3. Projekt: Filterung im Frequenzraum; Hoch-/Tiefpassfilter

Keine Abgabe des Projektes. Bearbeitung freiwillig, aber empfohlen :-).

Aufgabenstellung:

Implementieren Sie in MATLAB eine Funktion, die auf ein übergebenes Grauwertbild ein ideales Hochpass- bzw. Tiefpassfilter oder ein Gaußsches Hochpass- bzw. Tiefpassfilter zu einer übergebenen Cut-Off-Frequenz (Cut-Off-Wellenzahl) k_0 anwendet und das gefilterte Bild zurückliefert. Welches der vier Filter angewendet wird, soll dabei durch einen weiteren Parameter der Funktion auswählbar sein. Testen Sie die Funktion mit unterschiedlichen *Cutoff-Frequenzen* k_0 an den folgenden Bildern: weiße Kreisscheibe, weißes Rechteck auf schwarzem Grund, Schachbrett, `test_pattern.tif`. Interpretieren Sie die Ergebnisse. Betrachten Sie auch das Spektrum der Testbilder (vor und nach der Filterung).

Hochpass- / Tiefpassfilter (siehe Vorlesung)

Es sei $\hat{f} = \hat{f}(u,v)$ das Grauwertbild in der Freuenzraumdarstellung, mit den (diskreten, ganzzahligen) Ortsfrequenzen (Wellenzahlen) (u,v), d.h. für ein Bild $f = f(m,n)$ der Größe $M \times N$ ist

$$f(m,n) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} \hat{f}(u,v) e^{2\pi i \left(\frac{um}{M} + \frac{vn}{N}\right)} \tag{1}$$

$$\hat{f}(u,v) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) e^{-2\pi i \left(\frac{um}{M} + \frac{vn}{N}\right)} \tag{2}$$

Damit ist also $\hat{f}(u,v)$ der Anteil des Bildes mit einer Wellenlänge von $\lambda_x = M/u$ in x-Richtung und $\lambda_y = N/v$ in y-Richtung. Hoch- bzw. Tiefpassfilter sollen aus einem Bild die tiefen (d.h. kleinen) bzw. hohen (d.h. großen) Frequenzen herausfiltern, d.h. unterdrücken (die hohen bzw. tiefen Frequenzen dürfen passieren, daher der zunächst etwas verwirrende Name). Realisiert werden diese Filter als Frequenzfilter, d.h. durch die Multiplikation von $\hat{f}(u,v)$ mit einer geeigneten Filterfunktion $\hat{h}(u,v)$. Es sei

$$\|(u,v)\|_2 := \sqrt{u^2 + v^2}$$

die euklidische Norm des Wellenvektors (u,v). Dann sind die Filterfunktionen zu einer *Cutoff-Frequenz* k_0 wie folgt definiert (k_0 ist hier bezogen auf die ganzzahligen Frequenzen (Wellenzahlen) (u,v) und nicht auf die eigentlichen Frequenzen $(u/M, v/N)$

$$\hat{h}_{itp}(u,v) = \begin{cases} 1 & : \|(u,v)\|_2 \leq k_0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{Ideales Tiefpassfilter}$$

$$\hat{h}_{ihp}(u,v) = 1 - \hat{h}_{itp}(u,v) \qquad \text{Ideales Hochpassfilter}$$

$$\hat{h}_{gtp}(u,v) = e^{-\frac{\|(u,v)\|_2^2}{2k_0^2}} \qquad \text{Gaußsches Tiefpassfilter}$$

$$\hat{h}_{ghp}(u,v) = 1 - \hat{h}_{gtp}(u,v) \qquad \text{Gaußsches Hochpassfilter}$$

Eine einfache Multiplikation mit diesen Filterfunktionen führt jedoch nicht zu dem gewünschten Ergebnis, denn aus der Periodizität von $\hat{f}(u,v)$ folgt, dass gilt

$$\hat{f}(M-u, N-v) = \hat{f}(-u,-v)$$

und der Beitrag $\hat{f}(M-u, N-v)$ in (1) gehört auch zu der Frequenzen (u, v). Anders ausgedrückt sollte die periodisch fortgesetzte Filterfunktion $\hat{h}_{....}$ symmetrisch in (u, v) sein, d.h., es soll gelten

$$\hat{h}_{...}(M-u, N-v) = \hat{h}_{...}(-u, -v) = \hat{h}_{...}(u, v).$$

(Dies sichert im übrigen auch, dass das gefilterte Bild in der Ortsraumdarstellung wieder reellwertig ist.) Damit ist die obige Definition der vier Filterfunktionen nur gültig für $\{(u, v)|u \leq M/2, v \leq N/2\}$ und muss dann entsprechend fortgesetzt werden.
Überlegen Sie, dass daher das folgende Vorgehen sinnvoll ist:

(i) Man multipliziere das Bild $f(m, n)$ in der Ortsdarstellung punktweise mit $\text{sig}(m, n) := (-1)^{n+m}$, d.h. man setze

$$f_c(m, n) := \text{sig}(m, n) f(m, n).$$

(Dazu sollte man natürlich zunächst das Bild ins Datenformat `double` umwandeln).

(ii) Man berechne die diskrete Fouriertransformierte $\hat{f}_c$ von f_c. Dann gilt:

$$\hat{f}_c(u, v) = \hat{f}(u - M/2, v - N/2)$$

$\hat{f}_c$ ist die sogenannte zentrierte Fouriertransformation. Als Bild betrachtet, wurde der Punkt $(0, 0)$ ins Zentrum geschoben. Gehen Sie der Einfachheit halber davon aus, das M und N gerade Zahlen sind. (Tip: $(-1)^l = e^{-\pi i l} = e^{-2\pi i l \frac{N}{2}/N}$).

(iii) Man ersetze in den oben angegebenen 4 Filterfunktionen den Abstand zum Ursprung ($\|(u, v)\|_2$) durch den Abstand zum Zentrum, d.h. durch $\|(u - M/2, v - N/2)\|_2$ und multipliziere $\hat{f}_c$ mit dieser Filterfunktion.

(iv) Man berechne die inverse diskrete Fouriertransformation und multipliziere das Ergebnis wieder mit $\text{sig}(n, m)$; dies ergibt dann das gefilterte Bild.

Hinweise zur Implementierung

(a) Benutzen Sie die MATLAB-Implementierung der schnellen 2d-Fouriertransformation `fft2`, `ifft2`.

(b) Aufgrund von Rechenungenauigkeiten ist das gefilterte Bild nicht rein reellwertig. Nehmen Sie daher zum Schluß noch den Realteil (`real`).

(c) Arbeiten Sie nur im Datentyp `double`, d.h. transformieren Sie das Bild am Anfang

(d) Das gefilterte Bild enthält eventuell auch negative Grauwerte und ist dunkler als vorher (wieso ?). Benutzen Sie daher zur Anzeige `imshow( ..., [])` (affine Grauwerttransformation auf den gesamten Grauwertbereich).

(e) Schauen Sie sich auch das Spektrum der jeweiligen Bilder (also den Absolutbetrag der Fouriertransformierten) an. Dazu empfiehlt es sich, zunächst eine logarithmische Grauwerttransformation vorzuschalten (z.B. `imshow(log(1. + abs(testBildFFTc)), [])`).

(f) Erstellen Sie auch ein geeignetes Skript, mit dem Sie einige Beispiele übersichtlich vorführen können. Können Sie die ringartigen Artefakte erklären?