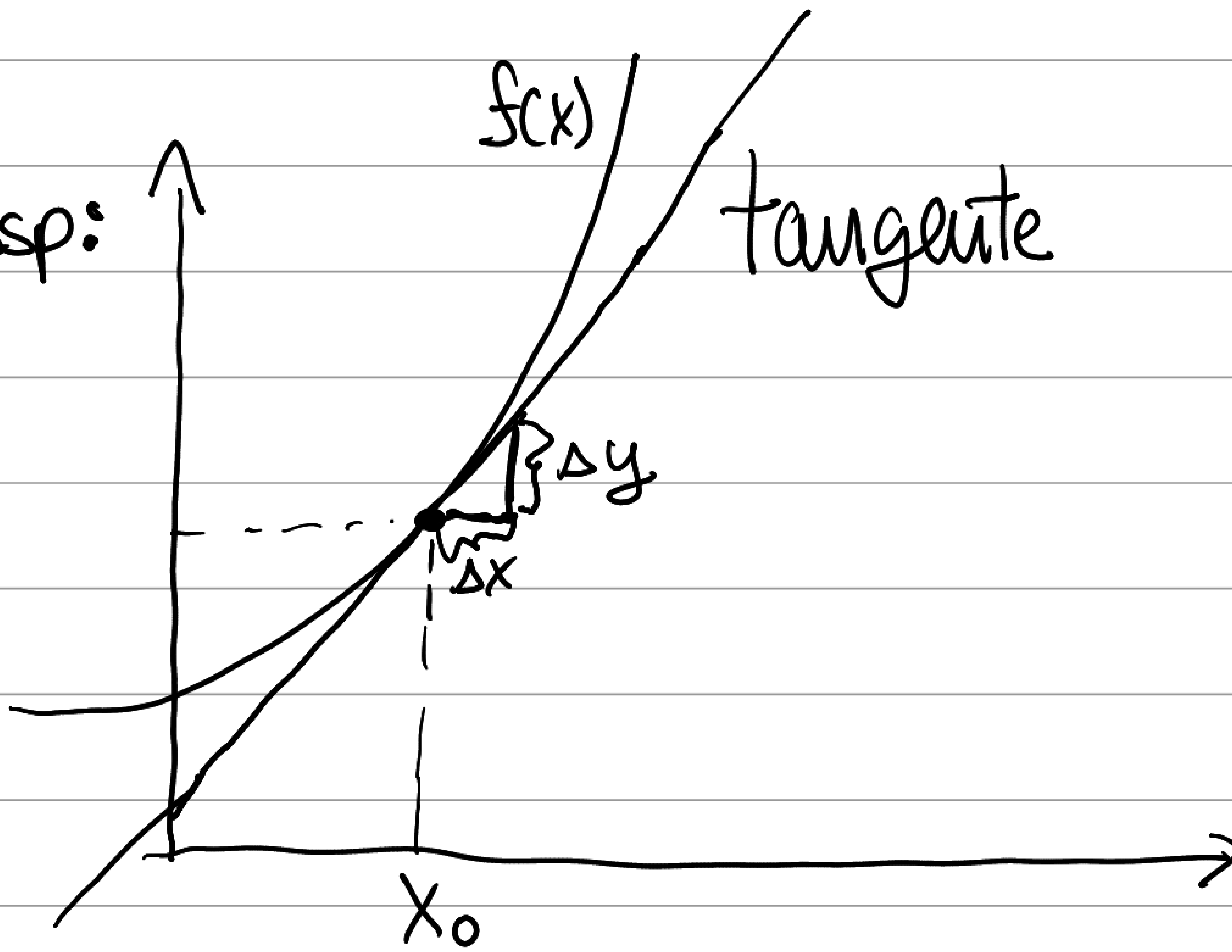
Differentialrechnung (Ableitungen)

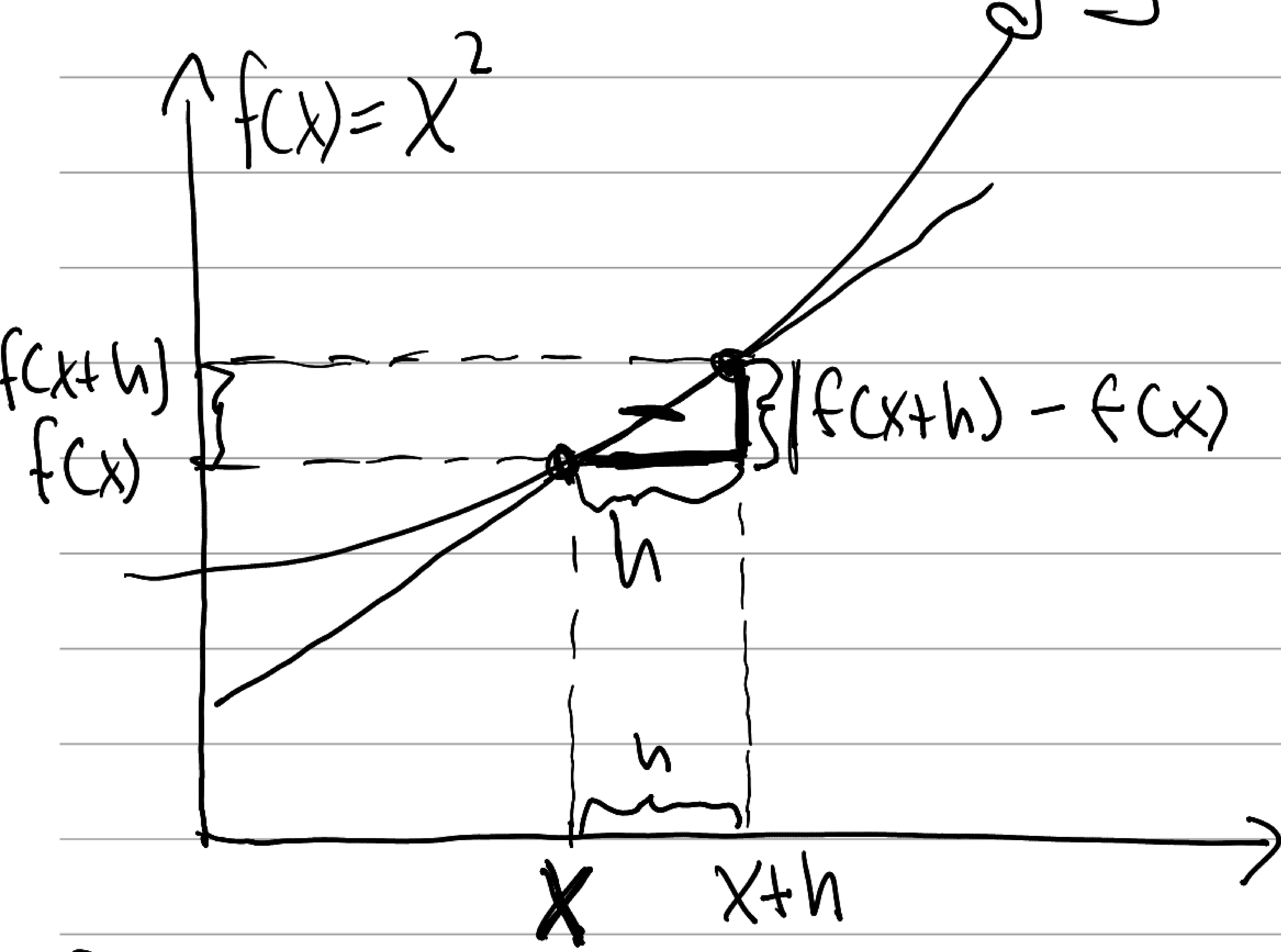
def: Die Ableitung $f'(x)$ einer Funktion gibt die Steigung dieser an einer Stelle x zurück:

Bsp:



$$\text{Steigung} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Wie können wir die Steigung bestimmen?



Steigung von $f(x)$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(Differentialquotient)

Bsp. $f(x) = x^2$

$$\rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

Binomische Formel

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$x^2 - x^2 = 0$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

h ausklammern

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h} \cdot (2x + h)}{\cancel{h}}$$

h kürzen

$$= \lim_{h \to 0} (2x + h)$$

h=0 einsetzen

$$= 2x + 0 = 2x$$

$$\boxed{f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2x}$$

Da das sehr aufwendig ist gibt es einfachere Regeln um Ableitungen zu bestimmen:

Ableitungsregel:

1. Potenzregel:

$$f(x) = ax^n$$

$$\rightarrow f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$$

n − 1 und n vorne dran

Bsp:

① $x^2 \rightarrow 2x$

② $x^3 \rightarrow 3 \cdot x^2$

③ $4x^5 \rightarrow 20x^4$

④ $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

⑤ $\frac{1}{x^2} = x^{-2} \rightarrow -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

Summenregel:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= g(x) + h(x) \\ \rightarrow f'(x) &= g'(x) + h'(x) \end{aligned}}$$

Summanden einzeln ableiten!

Bsp:

$x^2 + 3x^3 \longrightarrow 2x + 9x^2$

$x + x^2 + 4x^4 \longrightarrow 1 + 2x + 16x^3$

Produktregel:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= g(x) \cdot h(x) \\ \rightarrow f'(x) &= g'(x) \cdot h(x) + h'(x) g(x) \end{aligned}}$$

Bsp:

$x \cdot \sin(x) \longrightarrow 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)$

$3x^4 \cdot e^x \longrightarrow 12x^3 e^x + 3x^4 e^x$

Kettenregel:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= g(h(x)) \\ \rightarrow f'(x) &= h'(x) \cdot g(h(x)) \end{aligned}}$$

innere Ableitung mal äußere Ableitung !

Bsp:

$$(3x^3+4x)^2 \longrightarrow \overbrace{(9x^2+4)}^{\text{innere Ableitung}} \cdot \overbrace{2(3x^3+4x)}^{\text{äußere Ableitung}}$$

$$\sqrt{2x^4+5} \longrightarrow (8x^3) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2x^4+5}}$$

$$\ln(3x^2+5) \longrightarrow (6x) \cdot \frac{1}{3x^2+5} = \frac{6x}{3x^2+5}$$

$$e^{4x^4} \longrightarrow (16x^3) \cdot e^{4x^4}$$

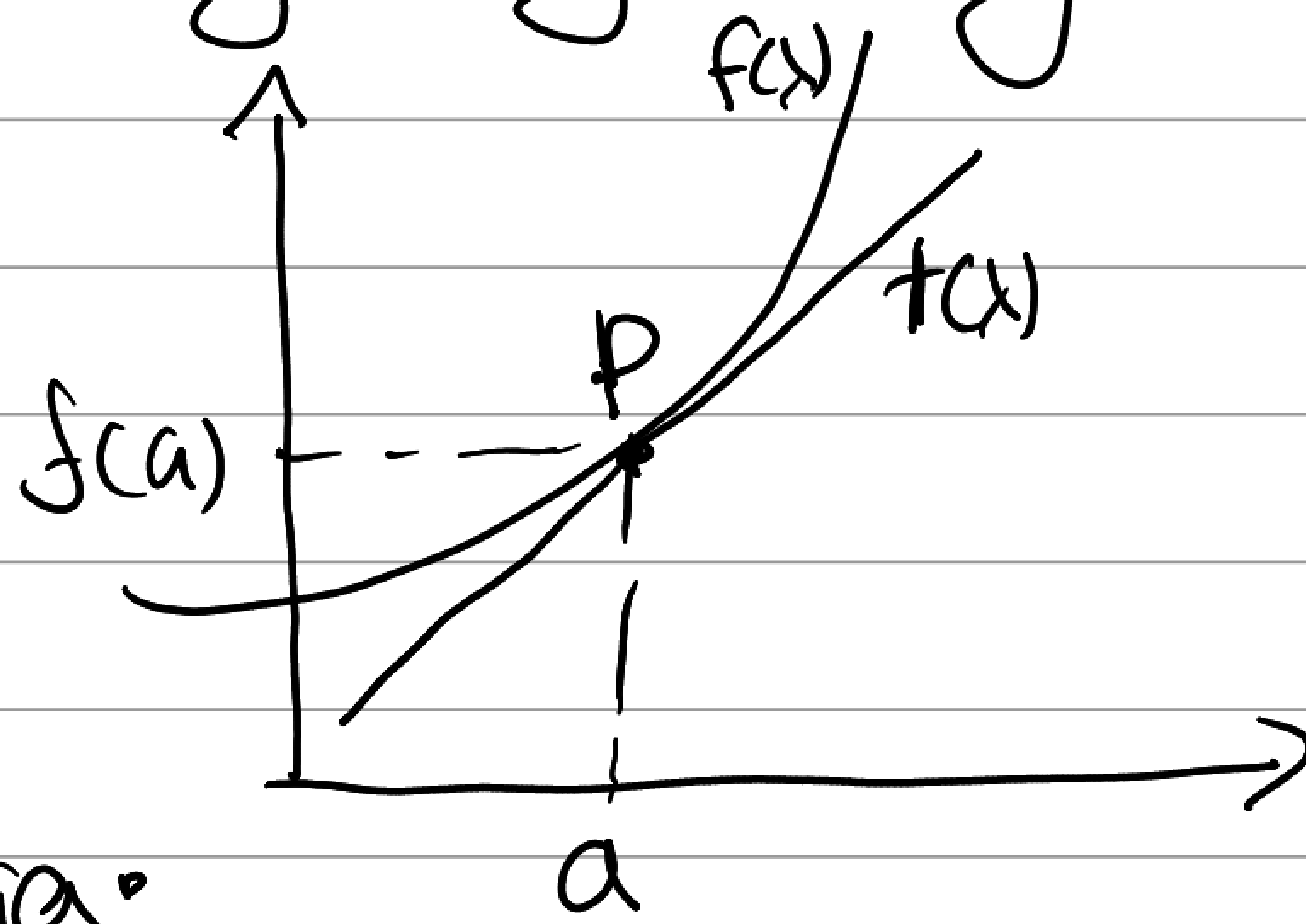
Wichtige Ableitungen:

$f(x)$		$f'(x)$
Konstante	$\longrightarrow$	0
$\sqrt{x}$	$\longrightarrow$	$-\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln(x)$	$\longrightarrow$	$\frac{1}{x}$
e^x	$\longrightarrow$	e^x
a^x	$\longrightarrow$	$\ln(a) \cdot a^x$

Trigonometrische Funktionen:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \sin(x) & \longleftarrow & -\cos(x) \\ \downarrow & & \uparrow \\ \cos(x) & \longrightarrow & -\sin(x) \end{array}}$$

Tangentengleichung:



ges:

Gerade mit Steigung $f'(a)$ durch den Punkt $(a \mid f(a))$

allg.: $t(x) = m x + b$

$\downarrow$

Steigung $m = f'(a)$

wir setzen $P(a \mid f(a))$ ein und erhalten:

$$f(a) = f'(a) \cdot a + b$$

$$\Leftrightarrow b = f(a) - f'(a) \cdot a$$

$$\boxed{\Longrightarrow t(x) = f'(a)(x-a) + f(a)}$$