

SVD

$$\begin{aligned} A &= U\Sigma V \\ A \cdot A^T u &= \lambda u \\ A^T \cdot Av &= \lambda v \end{aligned} \tag{1}$$

Die ersten p Eigenwerte von A , $A^T A$ und AA^T sind identisch.

Die i -ten Eigenvektoren von $A^T A$ und respektive AA^T sind die i -ten Spalten von U und V .

Die Diagonale von Σ sind $\sigma_{ii} = \sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$

3. Übung

3.1.i Aufgabe

$$\begin{aligned} AV &= VD \\ \Rightarrow A \cdot v_i &= \lambda_i \cdot v_i \\ \Leftrightarrow A \cdot v_i &= v_i \cdot \lambda_i \end{aligned} \tag{2}$$

d.h.

3.1.ii Aufgabe

Zu zeigen: für EW v_i von A

$$\begin{aligned} A^T = A &\Rightarrow v_i \perp v_j \quad \forall i \neq j \\ &\Leftrightarrow \langle v_i; v_j \rangle = \vec{0} \end{aligned} \tag{3}$$

Tipp: Berechnen Sie zu zwei Eigenvektoren v_1 und v_2 das Skalarprodukt $\langle v_1; Av_2 \rangle$ und benutzen Sie die Identität $\langle x; Ax \rangle = \langle A^T x; y \rangle$.

$$\dots \tag{4}$$

3.4.a Aufgabe

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 A^T A &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow \lambda_1 &= 0, \lambda_2 = 4 \\
 \Rightarrow v_1 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Sortiere: ... \rightsquigarrow

$$AA^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{analog} \quad (5)$$

$$\Rightarrow U = V = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}^T$$

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow Ax = b$$

$$\Leftrightarrow U \Sigma V^T x = b$$

$$\Leftrightarrow \Sigma V^T x = U^T b$$

$$\Leftrightarrow V^T x = \Sigma^+ U^T b$$

$$x = V \Sigma^+ U^T b$$

$$\Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x \stackrel{\text{Matlab}}{=} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

(6)

oder alternativ einfacher:

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ regulär, } Ax = b$$

$$x = A^{-1}b = V \Sigma^{-1} U^T \cdot b$$

$$= \sum_{i=1}^{p=r} \frac{1}{\sigma_i} v_i \cdot \left(u_i^T b \right) \quad (7)$$

$$\Rightarrow x = 1/2 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

3.4.b Aufgabe

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 AA^T &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
 A^T A &= \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\det(AA^T - \lambda \mathbf{1}) = (6 - \lambda)(1 - \lambda) - 1 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1/2} = 7/2 \pm \sqrt{\frac{7^2}{4} - 5} = 7/2 \pm \frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$\begin{aligned}
 & (A^T A - \lambda \mathbf{1}) \underline{v_1} \stackrel{!}{=} \underline{0} \\
 & \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 - \lambda_1 & -1 \\ -1 & 1 - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 - 7/2 - \frac{\sqrt{29}}{2} & -1 \\ -1 & 1 - 7/2 - \frac{\sqrt{29}}{2} \end{pmatrix} v_1 = 0 \\
 & \Rightarrow \begin{pmatrix} 5/2 - \frac{\sqrt{29}}{2} & -1 \\ -1 & -5/2 - \frac{\sqrt{29}}{2} \end{pmatrix} v_1 = 0 \\
 & \Rightarrow \begin{pmatrix} 5/2 - \frac{\sqrt{29}}{2} & -1 \\ -1 \cdot (5/2 - \frac{\sqrt{29}}{2}) & (-5/2 - \frac{\sqrt{29}}{2}) \cdot (5/2 - \frac{\sqrt{29}}{2}) \end{pmatrix} v_1 = 0 \\
 & \stackrel{\text{sum}}{\Rightarrow} (-5/2 - \frac{\sqrt{29}}{2}) \cdot (5/2 - \frac{\sqrt{29}}{2}) \cdot v_{12} = 0 \\
 & \Rightarrow v_{12} = 0
 \end{aligned} \tag{9}$$