

1. Übung

1.1. Aufgabe

$$b \in \left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \quad (1)$$

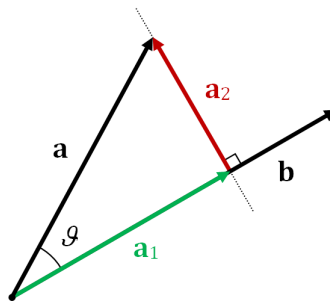
Da b aber eben nicht Element dieser Menge ist, gibt es keine Lösung. Man möchte, dass Ax^* möglichst nahe daran liegt.

eine möglichst „gute“ Lösung könnte sinnvollerweise folgendes erfüllen:

$$\|Ax - b\|_2^2 \rightarrow \min$$

1.2. Aufgabe

1.2.a



$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$v = v_{\perp} + v_{\parallel}$$

$$\begin{aligned} \langle v; u \rangle &= \langle v_{\perp} + v_{\parallel}; u \rangle \\ &= \langle v_{\perp}; u \rangle + \langle v_{\parallel}; u \rangle \\ &= \underbrace{\langle v_{\perp}; u \rangle}_0 + \langle v_{\parallel}; u \rangle \\ &= \langle v_{\parallel}; u \rangle \end{aligned} \quad (3)$$

$$v_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$u_v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Orthogonale Projektion:

$$u \rightarrow P_u : v \mapsto v_1$$

$$v \mapsto P_u(v) = \frac{\langle v; u \rangle}{\langle u; u \rangle} u = \frac{1}{\langle u; u \rangle} u \cdot u^T v \quad (6)$$

$$v \mapsto \frac{1}{\|u\|^2} u^T v \cdot u = y$$

$$y_i = \frac{1}{\|u\|^2} u_i (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)$$

$$\stackrel{!}{=} a_{i1} v_1 + a_{i2} v_2 + a_{i3} v_3 \quad (7)$$

$$a_{ij} = \frac{1}{\|u\|^2} u_i u_j$$

$$\rightsquigarrow A = \frac{1}{\|u\|^2} u \cdot u^T$$

$$\text{Bild}(P_u) = \text{span}\{u\} = \{\lambda u | \lambda \in \mathbb{R}\} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{Kern}(P_u) &= \text{Bild}(P_u)^\perp \\ &= \{y | y \perp u\} \\ &= \{y | \langle u, y \rangle = 0\} \end{aligned} \quad (9)$$

1.2.b

$$v \in V = \mathbb{R}^m \quad ; \quad u \in U = \mathbb{R}^n$$

$$v \stackrel{P_u}{\mapsto} \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$$

$$\text{mit } \lambda_i = \langle v; u_i \rangle \quad (10)$$

□

3. Aufgabe

3a

$$\begin{aligned} f(x) &= \|b - Ax\|_2^2 \\ &= \langle b - Ax; b - Ax \rangle \\ &= \langle b; b - Ax \rangle - \langle Ax; b - Ax \rangle \\ &= \langle b; b \rangle - \langle b; Ax \rangle - \langle Ax; b \rangle + \langle Ax; Ax \rangle \\ &= \langle b; b \rangle - 2 \langle b; Ax \rangle + \langle Ax; Ax \rangle \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \text{Jacobi}(f) = „-2 \langle b; A \cdot \vec{1} \rangle + 2 \langle Ax; A \cdot \vec{1} \rangle “ = -2b^T A + 2x^T A^T A \\
 f''(x) &= \text{Hess}(f) = „2 \langle A \cdot \vec{1}; A \cdot \vec{1} \rangle “ = 2A^T A
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Hinweis zu 1.3.b)

$B := \text{Hess} = 2A^T \cdot A$. Daher $x^T Bx = x^T A^T A x = \dots \geq 0$. kann nur Null werden, wenn $Ax = 0 \dots \text{Kern}(A) \dots$

1.3.b

Da $B := 2A^T A$ ist, ist B symmetrisch.

B ist positiv definit, falls $x^T A x > 0$,
 B ist positiv semi definit, falls $x^T A x \geq 0$
 B ist negativ definit, falls $x^T A x < 0$,
 B ist negativ semi definit, falls $x^T A x \leq 0$
 B ist indefinit, falls positive und negative Eigenwerte existieren

Frage: woher kommt $x^T A x$?

Da B die 2. Ableitung einer quadratischen Funktion, welche ≥ 0 ist, muss die erste Ableitung positive Steigung haben, somit ist die zweite Ableitung nicht negativ.
damit die zweite Ableitung null ist, muss die erste Ableitung

Hinweis zu 1.3.c

$f(x+h) = \langle b - A(x+h); b - A(x+h) \rangle = \dots = f(x) + f'(x) \cdot h + 1/2 h^T \text{Hess}_f h$.
 Am Kritischen Punkt aber $f'(x) = 0$ und der dritte Term ist positiv ...

1.3.c

$$\begin{aligned}
 f(x+h) &= \langle b - A(x+h); b - A(x+h) \rangle \\
 &= \langle b; b \rangle - 2 \langle b; A(x+h) \rangle + \langle A(x+h); A(x+h) \rangle \\
 &= \langle b; b \rangle - 2 \langle b; Ax \rangle - 2 \langle b; Ah \rangle + \langle A(x+h); A(x+h) \rangle \\
 &= \langle b; b \rangle - 2 \langle b; Ax \rangle - 2 \langle b; Ah \rangle + \langle Ax; Ax \rangle + 2 \langle Ax; Ah \rangle + \langle Ah; Ah \rangle \\
 &= \langle b; b \rangle - 2 \langle b; Ax \rangle + \langle Ax; Ax \rangle - 2 \langle b; Ah \rangle + 2 \langle Ax; Ah \rangle + \langle Ah; Ah \rangle \\
 &= \langle b - Ax; b - Ax \rangle - 2 \langle b; Ah \rangle + 2 \langle Ax; Ah \rangle + \langle Ah; Ah \rangle \\
 &= f(x) - 2 \langle b; Ah \rangle + 2 \langle Ax; Ah \rangle + \langle Ah; Ah \rangle \\
 &= f(x) - 2b^T Ah + 2x^T A^T Ah + h^T A^T Ah \\
 &= f(x) + (-2b^T A + 2x^T A^T A)h + h^T 1/2 \text{Hess}_f h \\
 &= f(x) + f'(x) \cdot h + h^T 1/2 \text{Hess}_f h
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Da $f(x) = \min$, da x hier ja die Lösung ist, welche f minimiert ist $f'(x) = 0$, und falls $\cancel{f'(x) \cdot h}^0 + h^T 1/2 \text{Hess}_f h > 0$ wächst f in jede Richtung von x unabhängig von gewähltem h , somit ist x ein isoliertes Minimum von f .

Sollte es ein h geben, für welches $h^{T1/2} \text{Hess}_f h = 0$ ist ($h = \vec{0}$ ausgenommen), so ist x kein isoliertes Minimum, sondern liegt im „Bett eines Flusses“, dort liegen dann alle Minima nebeneinander.

4. Aufgabe

Matlab sagt: $(A' * A) * A' * b = \begin{pmatrix} 15 \\ -25 \end{pmatrix}$

1.5

1.5.a

$$\begin{aligned} f(t) &= \alpha \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \beta \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) \\ \varphi(t, \alpha, \beta) &= \alpha \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \beta \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) \\ \rightarrow A &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}1\right) & \sin\left(\frac{\pi}{3}1\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{4}2\right) & \sin\left(\frac{\pi}{3}2\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{4}3\right) & \sin\left(\frac{\pi}{3}3\right) \end{pmatrix} \\ A &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

d.h. das Lineare Ausgleichsproblem, bzw. das was zu lösen ist, sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (15)$$

gesucht ist $x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$;

1.5.b

in Matlab

1.5.c

in Matlab

Notizen

Normalengleichung:

$$A^T A x = A^T b$$

2. Übung

2.1. Aufgabe

Zu zeigen:

$$A^T A x = 0 \Leftrightarrow A x = 0 \quad (16)$$

2.2. Aufgabe

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= Q \cdot R \\ &\stackrel{\text{Matlab}}{=} \frac{1}{3} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_Q \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

Minimale 2-Norm des Residuums?

$$\begin{aligned} \|b - Ax\|_2^2 &= \left\| \underbrace{Q^T b}_c - Rx \right\|_2^2 \\ &= \left\| \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_1 \\ \vec{0} \end{pmatrix} \cdot x \right\|_2^2 \\ &= \|c_1 - R_1 x\|_2^2 + \|c_2 - \vec{0}x\|_2^2 \end{aligned} \quad (18)$$

nun könnte für $\|c_1 - R_1 x\|_2^2$ ein x gefunden werden, da aber $\|c_2 - \vec{0}x\|_2^2 \geq 0$ ist, kann das Residuum nur minimal $\|c_2\|_2^2$ werden.

Hier also:

$$\begin{aligned} Q^T b &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ c_2 = 1 &\Rightarrow \|c_2\|_2^2 = 1 \end{aligned} \quad (19)$$

2.3. Aufgabe

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ orthogonal, $R_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ obere Dreiecksmatrix und

$$Q^T A = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vec{0} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Zeige, R_1 ist regulär, gdw. $\text{Rang}(A) = n$.