

**Lineares**      **Ausgleichsproblem:**      Daten:

$t_i$	0	1	2	3
$y_i$	3	2,14	1,8	1,72

Modellfunktion:

$$y(t) = \alpha \frac{1}{1+t} + \beta$$

$$A = \begin{pmatrix} y(t_1=0) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(t_n=3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} ; b = \begin{pmatrix} y_1=3 \\ 2,14 \\ 1,86 \\ y_n=1,72 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 1 \\ 1/3 & 1 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1=3 \\ 2,14 \\ 1,86 \\ y_n=1,72 \end{pmatrix}$$

**Satz: 1.1:**  $x^* \in \mathbb{R}$  ist genau dann eine Lösung des linearen Ausgleichsproblems, wenn  $x^*$  Lösung der Normalgleichung  $A^T A x = A^T b$  ist. Es gibt mindestens eine Lösung  $x^*$ . Sie ist eindeutig, gdw.  $\text{Rang}(A) = n$ .

**Satz: 1.2:** Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  mit QR-Zerlegung von  $A$ ,  $\text{Rang}(A) \equiv n$ ,  $A = QR$ ,  $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $R_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} := Q^T b$  mit  $c_1 \in \mathbb{R}^n$ ,  $c_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$ . Dann gilt:  $R_1$  ist regulär und Außerdem gilt:  $\|b - Ax\|_2 = \|c_2\|$ .

**Hessenbergmatrix durch Householder-Reflexion:** Mithilfe einer Householder-Reflexion, dargestellt durch Matrixmultiplikation  $Q_u \cdot A$ , kann ein Teil der Matrix zu null transformiert werden.

Mit  $v$  als Spaltenvektor von  $A$ , welcher die erste Spalte enthält, wird  $u := v + \text{sgn}(v_1) \cdot e_1 \cdot \|v\|$  gewählt ( $\text{sgn}(\cdot)$  ist die Vorzeichenfunktion, jedoch muss bei 0 nicht 0 genommen werden!). Damit wird

$Q_u := \mathbb{1}_{m \times m} - 2 \cdot \frac{u \cdot u^T}{u^T \cdot u}$  definiert, welche  $A$  so verdrehspiegelt, dass alle Elemente in der ersten Spalte unterhalb der Diagonalen verschwinden.

Nun kann man weiter vorgehen und die Teilmatrix von  $A$  hernehmen, welche die erste Zeile und Spalte gestrichen hat und darauf weiter agieren. Am ende hätte man mindestens eine obere rechte Dreiecksmatrix. Das Produkt aller verwendeten  $Q$  wäre dann eine orthogonale Matrix, womit  $Q \cdot R = A$  als QR-Zerlegung entstanden ist.

**Eigenschaften der Householder-Reflexion:**

- (i)  $Q_v \cdot v = -v$
- (ii)  $Q_v \cdot u = u \Leftrightarrow v \perp u$
- (iii)  $Q_v^T = Q_v^{-1} \Rightarrow Q_v$  ist Orthogonal

Eine **Givensrotation** von  $A = \begin{pmatrix} a_1 & * \\ a_2 & * \end{pmatrix}$  kann mit  $r = |\sqrt{a_1^2 + a_2^2}|$ ,  $c = a_1/r$ ,  $s = a_2/r$  und  $G = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$  erfolgen:  $G \cdot A = \begin{pmatrix} r & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$

**Nicht Lineares Ausgleichsproblem:**

Daten: 

$t_i$	0	1	2
$y_i$	2	-3	4

 Modellfunktion:  
 $y(t) = x_1 \sin(x_2 \cdot t)$

$$\phi(t, x) = y(t)$$

$$F_i = y_i - \phi(t_i, x)$$

$$F(x) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -x_1 \sin(x_2) \\ 4 & -x_1 \sin(2x_2) \end{pmatrix}$$

$$J_F(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sin(x_2) & -x_1 \cos(x_2) \\ -\sin(2x_2) & -2x_1 \cos(2x_2) \end{pmatrix}$$

### Algorithmus: Gauß-Newton-Verfahren

- 1: Wähle Startvektor  $x^{(0)} \in \mathbb{R}$
- 2: **for**  $k = 0, 1, \dots$  **do**
  - ▷ Löse LGS nach  $\Delta x^{(k)}$
- 3:  $\|J_F(x^{(k)})\Delta x^{(k)} + F(x^{(k)})\|_2^2 \rightarrow \min$
- 4: setze  $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$
- 5: **end for**

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  s.p.d  $\Rightarrow \exists V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  orthogonal mit  $V^T A V = D$ ;  $d_{ii} = \lambda_i \geq 0 \Rightarrow A = V D V^T$  ( $V V^T = \mathbb{1}$ )

$AV = VD$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$   $A^T A$  ist s.p.semi-d.  $x^T A^T A x \geq 0$

Satz: **Singulärwertzerlegung:** Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $p = \min(m, n)$ . Dann existieren orthogonale Matrizen  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$  und  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $U^T A V = \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p) \Rightarrow$

### Algorithmus: QR-Verfahren mit Spektralverschiebung

- 1:  $A_0 = P^T \cdot A \cdot P$ 
  - ▷ Tridiagonaltransformation
- 2: **for**  $k = 0, 1, \dots$  **do**
- 3: wähle  $\mu_k \in \mathbb{R}$
- 4:  $A_k - \mu_k \mathbb{1} = Q_k \cdot R_k$ 
  - ▷ QR-Zerlegung
- 5:  $A_{k+1} = R_k \cdot Q_k + \mu_k \mathbb{1}$ 
  - ▷  $= Q_k^T A_k Q_k$
- 6: **end for**

### Algorithmus: Vektoriteration

- 1: wähle  $x^{(0)} \in \mathbb{R}$ , setze  $y^{(0)} = x^{(0)} / \|x^{(0)}\|_2$
- 2: **for**  $k = 0, 1, \dots$  **do**
- 3:  $x^{k+1} = A \cdot y^{(k)}$
- 4:  $\lambda^{(k)} = y^{(k)T} \cdot x^{(k)}$
- 5:  $y^{k+1} = \frac{x^{(k+1)}}{\|x^{(k+1)}\|_2}$
- 6: **end for**

### Algorithmus: Inverse Vektoriteration mit Spektralverschiebung

- 1: wähle  $x^{(0)} \in \mathbb{R}$ , setze  $y^{(0)} = x^{(0)} / \|x^{(0)}\|_2$
- 2: **for**  $k = 0, 1, \dots$  **do**
- 3:     Löse LGS  $(A - \mu \mathbb{1}) x^{(k+1)} = y^{(k)}$   
        $\triangleright \Leftrightarrow x^{(k+1)} = (A - \mu \mathbb{1})^{-1} \cdot y^{(k)}$
- 4:      $\lambda^{(k+1)} = \frac{1}{y^{(k)T} \cdot x^{(k)}} + \mu$
- 5:      $y^{k+1} = \frac{x^{(k+1)}}{\|x^{(k+1)}\|_2}$
- 6: **end for**

enthalten und in der Originalsprache gesetzt sein.  $a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ . Er muß keinen Sinn ergeben, sollte aber lesbar sein.  $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ . Fremdsprachige Texte wie „Lorem ipsum“ dienen nicht dem eigentlichen Zweck, da sie eine falsche Anmutung vermitteln.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Dies hier ist ein Blindtext zum Testen von Textausgaben. Wer diesen Text liest, ist selbst schuld.  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\beta) = 1$ . Der Text gibt lediglich den

Dies hier ist ein Blindtext zum Testen von Textausgaben. Wer diesen Text liest, ist selbst schuld. Ist das wirklich so? Ist es gleichgültig, ob ich schreibe: „Dies ist ein Blindtext“ oder „Huardest gefburn“? Kjift – mit-Grauwert der Schrift an  $E = mc^2$ . Ist das wirklich nichten! Ein Blindtext bietet mir wichtige Informationen.  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ . An ihm messe ich die Lesbarkeit einer Schrift, ihre Anmutung, wie harmonisch die Figuren zueinander stehen und prüfe, wie breit oder schmal sie läuft.  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ . Ein Blindtext sollte möglichst viele verschiedene Buchstaben enthalten und in der Originalsprache gesetzt sein.  $a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ . Er muß keinen Sinn ergeben, sollte aber lesbar sein.  $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ . Fremdsprachige

Texte wie „Lorem ipsum“ dienen nicht dem eigent-

lichen Zweck, da sie eine falsche Anmutung ver-

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha x^2} dx} \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha y^2} dy = \frac{1}{2} \sqrt{\pi/\alpha}$$

Dies hier ist ein Blindtext zum Testen von Text-

ausgaben. Wer diesen Text liest, ist selbst schuld.

$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\beta) = 1$ . Der Text gibt lediglich den

Grauwert der Schrift an  $E = mc^2$ . Ist das wirklich

so? Ist es gleichgültig, ob ich schreibe: „Dies ist ein

Blindtext“ oder „Huardest gefburn“? Kjift – mit-

nichten! Ein Blindtext bietet mir wichtige Informa-

tionen.  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ . An ihm messe ich die Les-

barkeit einer Schrift, ihre Anmutung, wie harmo-

nisch die Figuren zueinander stehen und prüfe, wie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_0 q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_0 q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{a_0}{1 - q}$$

Dies hier ist ein Blindtext zum Testen von Text-

ausgaben. Wer diesen Text liest, ist selbst schuld.

$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\beta) = 1$ . Der Text gibt lediglich den

Grauwert der Schrift an  $E = mc^2$ . Ist das wirklich

so? Ist es gleichgültig, ob ich schreibe: „Dies ist ein

Blindtext“ oder „Huardest gefburn“? Kjift – mit-

nichten! Ein Blindtext bietet mir wichtige Informa-

tionen.  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ . An ihm messe ich die Les-

barkeit einer Schrift, ihre Anmutung, wie harmo-

nisch die Figuren zueinander stehen und prüfe, wie

breit oder schmal sie läuft.  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ . Ein Blind-

text sollte möglichst viele verschiedene Buchstaben

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Dies hier ist ein Blindtext zum Testen von Text-Grauwert der Schrift an  $E = mc^2$ . Ist das wirklich ausgaben. Wer diesen Text liest, ist selbst schuld. so? Ist es gleichgültig, ob ich schreibe: „Dies ist ein  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\beta) = 1$ . Der Text gibt lediglich den Blindtext“ oder „Huardest gefburn“? Kjift – mit-Grauwert der Schrift an  $E = mc^2$ . Ist das wirklich nichten! Ein Blindtext bietet mir wichtige Informa- tionen.  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ . An ihm messe ich die Les- Blindtext“ oder „Huardest gefburn“? Kjift – mit- barkeit einer Schrift, ihre Anmutung, wie harmo- nichten! Ein Blindtext bietet mir wichtige Informa- nisch die Figuren zueinander stehen und prüfe, wie- tionen.  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ . An ihm messe ich die Les- breit oder schmal sie läuft.  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ . Ein Blind- barkeit einer Schrift, ihre Anmutung, wie harmo- text sollte möglichst viele verschiedene Buchstaben- nisch die Figuren zueinander stehen und prüfe, wie- enthalten und in der Originalsprache gesetzt sein. breit oder schmal sie läuft.  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ . Ein Blind-  $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ . Er muß keinen Sinn ergeben, soll- text sollte möglichst viele verschiedene Buchstaben- te aber lesbar sein.  $d\Omega = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ . Fremdspra- enthalten und in der Originalsprache gesetzt sein. chige Texte wie „Lorem ipsum“ dienen nicht dem  $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ . Er muß keinen Sinn ergeben, sollte eigent- lichen Zweck, da sie eine falsche Anmutung aber lesbar sein.  $d\Omega = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ . Fremdsprachige vermitteln. Dies hier ist ein Blindtext zum Testen Texte wie „Lorem ipsum“ dienen nicht dem eigent- von Textausgaben. Wer diesen Text liest, ist selbst- lichen Zweck, da sie eine falsche Anmutung ver- schuld.  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\beta) = 1$ . Der Text gibt lediglich mitteln. den Grauwert der Schrift an  $E = mc^2$ . Ist das wirk- lich so? Ist es gleichgültig, ob ich schreibe: „Dies ist ein Blindtext“ oder „Huardest gefburn“? Kjift – mit-

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

Dies hier ist ein Blindtext zum Testen von Text- mationen.  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ . An ihm messe ich die ausgaben. Wer diesen Text liest, ist selbst schuld. Lesbarkeit einer Schrift, ihre Anmutung, wie har-  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\beta) = 1$ . Der Text gibt lediglich den

monisch die Figuren zueinander stehen und prü- setzt sein.  $a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ . Er muß keinen Sinn er-  
 fe, wie breit oder schmal sie läuft.  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ . Ein geben, sollte aber lesbar sein.  $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ .  
 Fremdsprachige Texte wie „Lorem ipsum“ dienen  
 Blindtext sollte möglichst viele verschiedene Buch- nicht dem eigentlichen Zweck, da sie eine falsche  
 staben enthalten und in der Originalsprache ge- Anmutung vermitteln.