Lineares Ausgleichsproblem: Daten:
$$\frac{t_{i} \mid 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3}{y_{i} \mid 3 \mid 2,14 \mid 1,8 \mid 1,72}$$
 Modellfunktion:
$$y(t) = \alpha \frac{1}{1+t} + \beta$$
 Modellfunktion:
$$A = \begin{pmatrix} y(t_{1} = 0) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(t_{n} = 3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} y_{1} = 3 \\ 2,14 \\ 1,86 \\ y_{n} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 where
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 1 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1} = 3 \\ 2,14 \\ 1,86 \\ y_{n} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{1} = 3 \\ y_{1} = 3 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{1} = 3 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{1} = 3 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{1} = 3 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{1} = 3 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{1} = 3 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{2} = 0 \\ y_{3} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{2} = 0 \\ y_{3} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1,72 \end{pmatrix}$$
 and
$$\begin{pmatrix} x_{1} = 0 \\ y_{2} = 1$$

Satz: 1.1: $x^* \in \mathbb{R}$ ist genau dann eine Lösung des linearen Ausgleichsproblems, wenn x^* Lösung der Normalgleichung $A^TAx = A^Tb$ ist. Es gibt mindestens eine Lösung x^* . Sie ist eindeutig, gdw. Rang(A) = n.

Daten: $\|$ Satz: 1.2: Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ mit QR-Zerlegung von A, $Rang(A) \equiv n$, A = QR, $R = {R_1 \choose 0}, R_1 \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ und } {c_1 \choose c_2} := Q^T b \text{ mit}$ $c_1 \in \mathbb{R}^n$, $c_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$. Dann gilt: R_1 ist regulär und $x^* = R_1^{-1} \cdot c_1$ ist die eindeutige Lösung des Linea-

Householder-Hessenbergmatrix durch **Reflexion**: Mithilfe einer Householder-Reflexion, dargestellt durch Matrixmultiplikation $Q_u \cdot A_r$ kann ein Teil der Matrix zu null transformiert

werden. Mit v als Spaltenvektor von A, welf erfolgen: $G \cdot A = \begin{pmatrix} r & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix}$ erste Spalte enthält, wird cher die $u := v + \operatorname{sgn}(v_1) \cdot e_1 \cdot ||v||$ gewählt (sgn(.) ist Nicht Lineares die Vorzeichenfunktion, jedoch muss bei 0 Daten: $t_i \mid 0 \mid 1 \mid 2$ nicht 0 genommen werden!). Damit wird $Q_u \coloneqq \mathbb{1}_{m \times m} - 2 \cdot \frac{u \cdot u^T}{u^T \cdot u}$ definiert, welche A so verdrehspiegelt, dass alle Elemente in der ersten Spalte unterhalb der Diagonalen verschwinden. Nun kann man weiter vorgehen und die Teilmatrix von A hernehmen, welche die erste Zeile und Spalte gestrichen hat und darauf weiter agieren. Am ende hätte man mindestens eine obere rechte Dreiecksmatrix. Das Produkt aller verwendeten Q wäre dann eine orthogonale Matrix, womit $Q \cdot R = A$ als QR-Zerlegung entstanden ist.

Eigenschaften der Householder-Reflexion:

- (i) $Q_v \cdot v = -v$
- (ii) $Q_v \cdot u = u \Leftrightarrow v \perp u$
- (iii) $Q_v^T = Q_v^{-1} \Rightarrow Q_v$ ist Orthogonal

Eine **Givensrotation** von $A = \begin{pmatrix} a_1 & * \\ a_2 & * \end{pmatrix}$ kann mit $r = |\sqrt{a_1^2 + a_2^2}|, c = a_1/r, s = a_2/r \text{ und } G = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$

Algorithmus: Gauß-Newton-Verfahren

- 1: Wähle Startvektor $x^{(0)} \in \mathbb{R}$
- 2: **for** k = 0, 1, ... **do**
 - \triangleright Löse LGS nach $\Delta x^{(k)}$
- 3: $||I_F(x^{(k)})\Delta x^{(k)} + F(x^{(k)})||_2^2 \to min$
- setze $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Lambda x^{(k)}$
- 5: end for

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} s.p.d \Rightarrow \exists V \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ orthogonal mit}$$

 $V^T AV = D$; $d_{ii} = \lambda_i \geq 0 \Rightarrow A = VDV^T (VV^T = 1)$
 $AV = VD$

Algorithmus: QR-Verfahren mit Spektralverschiebung

- 1: $A_0 = P^T \cdot A \cdot P$
 - > Tridiagonaltransformation
- 2: **for** k = 0, 1, ... **do**
- 3: wähle $\mu_k \in \mathbb{R}$
- 4: $A_k \mu_k \mathbb{1} = Q_k \cdot R_k$
- 5: $A_{k+1} = R_k \cdot Q_k + \mu_k \mathbb{1}$
 - $\triangleright = Q_k^T A_k Q_k$
- 6: end for

Algorithmus: Vektoriteration

- 1: wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}$, setze $y^{(0)} = x^{(0)} / ||x^{(0)}||_2$
- 2: **for** k = 0, 1, ... **do**

- 3: $x^{k+1} = A \cdot y^{(k)}$ 4: $\lambda^{(k)} = y^{(k)^T} \cdot x^{(k)}$ 5: $y^{k+1} = \frac{x^{(k+1)}}{\|x^{(k+1)}\|_2}$
- 6: end for

Algorithmus: Inverse Vektoriteration mit Spektralverschiebung

- 1: wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}$, setze $y^{(0)} = x^{(0)} / ||x^{(0)}||_2$
- 2: **for** k = 0, 1, ... **do**
- 3: Löse LGS $(A \mu \mathbb{1}) x^{(k+1)} = y^{(k)}$
- $\Rightarrow x^{(k+1)} = (A \mu \mathbb{1})^{-1} \cdot y^{(k)}$ 4: $\lambda^{(k+1)} = \frac{1}{y^{(k)^{T}} \cdot x^{(k)}} + \mu$ 5: $y^{k+1} = \frac{x^{(k+1)}}{\|x^{(k+1)}\|_{2}}$
- 6: end for

Dies hier ist ein Blindtext zum Testen von Textausgaben. Wer diesen Text liest, ist selbst schuld. $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\beta) = 1$. Der Text gibt lediglich den Grauwert der Schrift an $E = mc^2$. Ist das wirklich so? Ist es gleichgültig, ob ich schreibe: "Dies ist ein tionen. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. An ihm messe ich die Les-Blindtext" oder "Huardest gefburn"? Kjift – mit-barkeit einer Schrift, ihre Anmutung, wie harmonichten! Ein Blindtext bietet mir wichtige Informa-nisch die Figuren zueinander stehen und prüfe, wie tionen. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. An ihm messe ich die Lesbreit oder schmal sie läuft. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. Ein Blindbarkeit einer Schrift, ihre Anmutung, wie harmo-

nisch die Figuren zueinander stehen und prüfe, wie text sollte möglichst viele verschiedene Buchstaben breit oder schmal sie läuft. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. Ein Blind- $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^nb}$. Er muß keinen Sinn ergeben, sollte text sollte möglichst viele verschiedene Buchstaben aber lesbar sein. d $\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$. Fremdsprachige enthalten und in der Originalsprache gesetzt sein. Texte wie "Lorem ipsum" dienen nicht dem eigent- $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^nb}$. Er muß keinen Sinn ergeben, sollte lichen Zweck, da sie eine falsche Anmutung veraber lesbar sein. d $\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$. Fremdsprachige mitteln.

Texte wie "Lorem ipsum" dienen nicht dem eigentlichen Zweck, da sie eine falsche Anmutung ver- $\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \sqrt{\int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha x^2}} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha y^2} \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ mitteln.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Dies hier ist ein Blindtext zum Testen von Textausgaben. Wer diesen Text liest, ist selbst schuld. $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\beta) = 1$. Der Text gibt lediglich den

Dies hier ist ein Blindtext zum Testen von Text-Grauwert der Schrift an $E = mc^2$. Ist das wirklich ausgaben. Wer diesen Text liest, ist selbst schuld. so? Ist es gleichgültig, ob ich schreibe: "Dies ist ein $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\beta) = 1$. Der Text gibt lediglich den Blindtext" oder "Huardest gefburn"? Kjift – mit-Grauwert der Schrift an $E = mc^2$. Ist das wirklich nichten! Ein Blindtext bietet mir wichtige Informaso? Ist es gleichgültig, ob ich schreibe: "Dies ist ein tionen. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. An ihm messe ich die Les-Blindtext" oder "Huardest gefburn"? Kjift – mit-barkeit einer Schrift, ihre Anmutung, wie harmonichten! Ein Blindtext bietet mir wichtige Informa-nisch die Figuren zueinander stehen und prüfe, wie

breit oder schmal sie läuft. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. Ein Blind-enthalten und in der Originalsprache gesetzt sein. $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$. Er muß keinen Sinn ergeben, sollte text sollte möglichst viele verschiedene Buchstaben aber lesbar sein. d $\Omega=\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$. Fremdsprachige enthalten und in der Originalsprache gesetzt sein. Texte wie "Lorem ipsum" dienen nicht dem eigent $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$. Er muß keinen Sinn ergeben, sollte lichen Zweck, da sie eine falsche Anmutung veraber lesbar sein. $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$. Fremdsprachige mitteln.

Texte wie "Lorem ipsum" dienen nicht dem eigentlichen Zweck, da sie eine falsche Anmutung vermitteln.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_0 q^k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} a_0 q^k = \lim_{n \to \infty} a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{a_0}{1 - q}$$

Dies hier ist ein Blindtext zum Testen von Text-so? Ist es gleichgültig, ob ich schreibe: "Dies ist ein ausgaben. Wer diesen Text liest, ist selbst schuld. Blindtext" oder "Huardest gefburn"? Kjift - mit- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\beta) = 1$. Der Text gibt lediglich den nichten! Ein Blindtext bietet mir wichtige Informa-

breit oder schmal sie läuft. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. Ein Blind- $\frac{a\sqrt[n]{b}}{aber lesbar sein.}$ Er muß keinen Sinn ergeben, sollte aber lesbar sein. d $\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$. Fremdsprachige text sollte möglichst viele verschiedene Buchstaben Texte wie "Lorem ipsum" dienen nicht dem eigent-

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Dies hier ist ein Blindtext zum Testen von Textausgaben. Wer diesen Text liest, ist selbst schuld. $\sum_{k=0}^{\infty} a_0 q^k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} a_0 q^k = \lim_{n \to \infty} a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{a_0}{1 - q}$ ausgaben. Wer diesen Text liest, ist selbst schuld. $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\beta) = 1.$ Der Text gibt lediglich den Grauwert der Schrift an $E = mc^2$. Ist das wirklich

Grauwert der Schrift an $E = mc^2$. Ist das wirklich tionen. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. An ihm messe ich die Lesso? Ist es gleichgültig, ob ich schreibe: "Dies ist ein barkeit einer Schrift, ihre Anmutung, wie harmo-Blindtext" oder "Huardest gefburn"? Kjift – mit-nisch die Figuren zueinander stehen und prüfe, wie nichten! Ein Blindtext bietet mir wichtige Informationen. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. An ihm messe ich die Lesbarkeit einer Schrift, ihre Anmutung, wie harmo-text sollte möglichst viele verschiedene Buchstaben nisch die Figuren zueinander stehen und prüfe, wie enthalten und in der Originalsprache gesetzt sein. lichen Zweck, da sie eine falsche Anmutung ver-eigentlichen Zweck, da sie eine falsche Anmutung mitteln.

vermitteln. Dies hier ist ein Blindtext zum Testen

von Textausgaben. Wer diesen Text liest, ist selbst

 $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$

schuld. $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\beta) = 1$. Der Text gibt lediglich Dies hier ist ein Blindtext zum Testen von Text-den Grauwert der Schrift an $E=mc^2$. Ist das wirkausgaben. Wer diesen Text liest, ist selbst schuld. lich so? Ist es gleichgültig, ob ich schreibe: "Dies $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\beta) = 1$. Der Text gibt lediglich den ist ein Blindtext" oder "Huardest gefburn"? Kjift – Grauwert der Schrift an $E = mc^2$. Ist das wirklich mitnichten! Ein Blindtext bietet mir wichtige Inforso? Ist es gleichgültig, ob ich schreibe: "Dies ist ein mationen. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. An ihm messe ich die Blindtext" oder "Huardest gefburn"? Kjift – mit-Lesbarkeit einer Schrift, ihre Anmutung, wie harnichten! Ein Blindtext bietet mir wichtige Informa-monisch die Figuren zueinander stehen und prütionen. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. An ihm messe ich die Lestionen. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt{v} = \sqrt{av}$. An inm messe ich die Lesbarkeit einer Schrift, ihre Anmutung, wie harmo- fe, wie breit oder schmal sie läuft. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{h}} = \sqrt[n]{\frac{a}{h}}$. Ein nisch die Figuren zueinander stehen und prüfe, wie Blindtext sollte möglichst viele verschiedene Buchbreit oder schmal sie läuft. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. Ein Blind-staben enthalten und in der Originalsprache gesetzt sein. $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$. Er muß keinen Sinn ertext sollte möglichst viele verschiedene Buchstaben geben, sollte aber lesbar sein. d $\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$. enthalten und in der Originalsprache gesetzt sein. Fremdsprachige Texte wie "Lorem ipsum" dienen $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$. Er muß keinen Sinn ergeben, soll-nicht dem eigentlichen Zweck, da sie eine falsche te aber lesbar sein. d $\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$. Fremdspra-Anmutung vermitteln. chige Texte wie "Lorem ipsum" dienen nicht dem