**Lineares Ausgleichsproblem**: Daten:

| $t_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 3 | 2,14 | 1,8 | 1,72 |

Modellfunktion: $y(t) = \alpha \frac{1}{1+t} + \beta$

$$A = \begin{pmatrix} y(t_1 = 0) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(t_n = 3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} ; b = \begin{pmatrix} y_1 = 3 \\ 2,14 \\ 1,86 \\ y_n = 1,72 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 1 \\ 1/3 & 1 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 = 3 \\ 2,14 \\ 1,86 \\ y_n = 1,72 \end{pmatrix}$$

**Satz: 1.1**: $x^* \in \mathbb{R}$ ist genau dann eine Lösung des linearen Ausgleichsproblems, wenn $x^*$ Lösung der Normalgleichung $A^T A x = A^T b$ ist. Es gibt mindestens eine Lösung $x^*$. Sie ist eindeutig, gdw. $Rang(A) = n$.

**Satz: 1.2**: Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ mit QR-Zerlegung von $A$, $Rang(A) \equiv n$, $A = QR$, $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \coloneqq Q^T b$ mit $c_1 \in \mathbb{R}^n$, $c_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$. Dann gilt: $R_1$ ist regulär und Außerdem gilt: $\|b - Ax\|_2 = \|c_2\|$.

**Hessenbergmatrix durch Householder-Reflexion**: Mithilfe einer Householder-Reflexion, dargestellt durch Matrixmultiplikation $Q_u \cdot A$, kann ein Teil der Matrix zu null transformiert werden.
Mit $v$ als Spaltenvektor von $A$, welcher die erste Spalte enthält, wird $u \coloneqq v + \operatorname{sgn}(v_1) \cdot e_1 \cdot \|v\|$ gewählt ($\operatorname{sgn}(.)$ ist die Vorzeichenfunktion, jedoch muss bei 0 nicht 0 genommen werden!). Damit wird $Q_u \coloneqq \mathbb{1}_{m\times m} - 2 \cdot \frac{u \cdot u^T}{u^T \cdot u}$ definiert, welche $A$ so verdrehspiegelt, dass alle Elemente in der ersten Spalte unterhalb der Diagonalen verschwinden.
Nun kann man weiter vorgehen und die Teilmatrix von $A$ hernehmen, welche die erste Zeile und Spalte gestrichen hat und darauf weiter agieren. Am ende hätte man mindestens eine obere rechte Dreiecksmatrix. Das Produkt aller verwendeten $Q$ wäre dann eine orthogonale Matrix, womit $Q \cdot R = A$ als QR-Zerlegung entstanden ist.

**Eigenschaften der Householder-Reflexion**:

(i) $Q_v \cdot v = -v$

(ii) $Q_v \cdot u = u \Leftrightarrow v \perp u$

(iii) $Q_v^T = Q_v^{-1} \Rightarrow Q_v$ ist Orthogonal

Eine **Givensrotation** von $A = \begin{pmatrix} a_1 & * \\ a_2 & * \end{pmatrix}$ kann mit $r = |\sqrt{a_1^2 + a_2^2}|$, $c = {}^{a_1}/_{r}$, $s = {}^{a_2}/_{r}$ und $G = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$ erfolgen: $G \cdot A = \begin{pmatrix} r & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix}$

**Nicht Lineares Ausgleichsproblem**:

Daten:

| $t_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $y_i$ | 2 | -3 | 4 |

Modellfunktion: $y(t) = x_1 \sin(x_2 \cdot t)$

$$\phi(t, x) = y(t)$$
$$F_i = y_i - \phi(t_i, x)$$
$$F(x) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -x_1 \sin(x_2) \\ 4 & -x_1 \sin(2x_2) \end{pmatrix}$$
$$J_F(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sin(x_2) & -x_1 \cos(x_2) \\ -\sin(2x_2) & -2x_1 \cos(2x_2) \end{pmatrix}$$

Algorithmus: **Gauß-Newton-Verfahren**

Wähle Startvektor $x^{(0)} \in \mathbb{R}$
**for** $k = 0, 1, \ldots$ **do**
$\triangleright$ Löse LGS nach $\Delta x^{(k)}$
$\quad \left\| J_F(x^{(k)}) \Delta x^{(k)} + F(x^{(k)}) \right\|_2^2 \rightarrow min$
$\quad$ setze $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$
**end for**

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $s.p.d \Rightarrow \exists V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal mit $V^T A V = D$; $d_{ii} = \lambda_i \geq 0 \Rightarrow A = V D V^T$ $(V V^T = \mathbb{1})$
$\boxed{AV = VD}$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $A^T A$ ist s.p.semi-d. $x^T A^T A x \geq 0$
Satz: **Singulärwertzerlegung**: Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $p = min(m, n)$. Dann existieren orthogonale Matrizen $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $U^T A V = \Sigma = diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_p) \Rightarrow$

Algorithmus: **QR-Verfahren mit Spektralverschiebung**

$A_0 = P^T \cdot A \cdot P$
$\triangleright$ Tridiagonaltransformation
**for** $k = 0, 1, \ldots$ **do**
$\quad$ wähle $\mu_k \in \mathbb{R}$
$\quad A_k - \mu_k \mathbb{1} = Q_k \cdot R_k$
$\triangleright$ QR-Zerlegung
$\quad A_{k+1} = R_k \cdot Q_k + \mu_k \mathbb{1}$
$\triangleright$ $= Q_k^T A_k Q_k$
**end for**

Algorithmus: **Vektoriteration**

wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}$, setze $y^{(0)} = x^{(0)} / \left\| x^{(0)} \right\|_2$
**for** $k = 0, 1, \ldots$ **do**
$\quad x^{k+1} = A \cdot y^{(k)}$
$\quad \lambda^{(k)} = {y^{(k)}}^T \cdot x^{(k)}$
$\quad y^{k+1} = \dfrac{x^{(k+1)}}{\left\| x^{(k+1)} \right\|_2}$
**end for**

Algorithmus: **Inverse Vektoriteration mit Spektralverschiebung**

```
wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}$, setze $y^{(0)} = x^{(0)} / \left\| x^{(0)} \right\|_2$
**for** $k = 0, 1, \ldots$ **do**
    Löse LGS $\left(A - \mu \mathbb{1}\right) x^{(k+1)} = y^{(k)}$
    ▷ $\Leftrightarrow x^{(k+1)} = \left(A - \mu \mathbb{1}\right)^{-1} \cdot y^{(k)}$
    $\lambda^{(k+1)} = \dfrac{1}{{y^{(k)}}^T \cdot x^{(k)}} + \mu$
    $y^{k+1} = \dfrac{x^{(k+1)}}{\left\| x^{(k+1)} \right\|_2}$
**end for**
```

Dies hier ist ein Blindtext zum Testen von Textausgaben. Wer diesen Text liest, ist selbst schuld. $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\beta) = 1$. Der Text gibt lediglich den Grauwert der Schrift an $E = mc^2$. Ist das wirklich so? Ist es gleichgültig, ob ich schreibe: „Dies ist ein Blindtext“ oder „Huardest gefburn“? Kjift – mitnichten! Ein Blindtext bietet mir wichtige Informationen. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. An ihm messe ich die Lesbarkeit einer Schrift, ihre Anmutung, wie harmonisch die Figuren zueinander stehen und prüfe, wie breit oder schmal sie läuft. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. Ein Blindtext sollte möglichst viele verschiedene Buchstaben enthalten und in der Originalsprache gesetzt sein. $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$. Er muß keinen Sinn ergeben, sollte aber lesbar sein. $\mathrm{d}\Omega = \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi$. Fremdsprachige Texte wie „Lorem ipsum“ dienen nicht dem eigentlichen Zweck, da sie eine falsche Anmutung vermitteln.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Dies hier ist ein Blindtext zum Testen von Textausgaben. Wer diesen Text liest, ist selbst schuld. $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\beta) = 1$. Der Text gibt lediglich den Grauwert der Schrift an $E = mc^2$. Ist das wirklich so? Ist es gleichgültig, ob ich schreibe: „Dies ist ein Blindtext“ oder „Huardest gefburn“? Kjift – mitnichten! Ein Blindtext bietet mir wichtige Informationen. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. An ihm messe ich die Lesbarkeit einer Schrift, ihre Anmutung, wie harmonisch die Figuren zueinander stehen und prüfe, wie breit oder schmal sie läuft. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. Ein Blindtext sollte möglichst viele verschiedene Buchstaben enthalten und in der Originalsprache gesetzt sein. $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$. Er muß keinen Sinn ergeben, sollte aber lesbar sein. $\mathrm{d}\Omega = \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi$. Fremdsprachige

Texte wie „Lorem ipsum" dienen nicht dem eigentlichen Zweck, da sie eine falsche Anmutung vermitteln.

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha x^2} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha y^2} \mathrm{d}y} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Dies hier ist ein Blindtext zum Testen von Textausgaben. Wer diesen Text liest, ist selbst schuld. $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\beta) = 1$. Der Text gibt lediglich den Grauwert der Schrift an $E = mc^2$. Ist das wirklich so? Ist es gleichgültig, ob ich schreibe: „Dies ist ein Blindtext" oder „Huardest gefburn"? Kjift – mitnichten! Ein Blindtext bietet mir wichtige Informationen. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. An ihm messe ich die Lesbarkeit einer Schrift, ihre Anmutung, wie harmonisch die Figuren zueinander stehen und prüfe, wie breit oder schmal sie läuft. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. Ein Blindtext sollte möglichst viele verschiedene Buchstaben enthalten und in der Originalsprache gesetzt sein. $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$. Er muß keinen Sinn ergeben, sollte aber lesbar sein. $\mathrm{d}\Omega = \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi$. Fremdsprachige Texte wie „Lorem ipsum" dienen nicht dem eigentlichen Zweck, da sie eine falsche Anmutung vermitteln.

$$\sum_{k=0}^\infty a_0 q^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n a_0 q^k = \lim_{n\to\infty} a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{a_0}{1-q}$$

Dies hier ist ein Blindtext zum Testen von Textausgaben. Wer diesen Text liest, ist selbst schuld. $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\beta) = 1$. Der Text gibt lediglich den Grauwert der Schrift an $E = mc^2$. Ist das wirklich so? Ist es gleichgültig, ob ich schreibe: „Dies ist ein Blindtext" oder „Huardest gefburn"? Kjift – mitnichten! Ein Blindtext bietet mir wichtige Informationen. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. An ihm messe ich die Lesbarkeit einer Schrift, ihre Anmutung, wie harmonisch die Figuren zueinander stehen und prüfe, wie breit oder schmal sie läuft. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. Ein Blindtext sollte möglichst viele verschiedene Buchstaben enthalten und in der Originalsprache gesetzt sein. $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$. Er muß keinen Sinn ergeben, sollte aber lesbar sein. $\mathrm{d}\Omega = \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi$. Fremdsprachige Texte wie „Lorem ipsum" dienen nicht dem eigentlichen Zweck, da sie eine falsche Anmutung vermitteln.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Dies hier ist ein Blindtext zum Testen von Textausgaben. Wer diesen Text liest, ist selbst schuld. $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\beta) = 1$. Der Text gibt lediglich den Grauwert der Schrift an $E = mc^2$. Ist das wirklich so? Ist es gleichgültig, ob ich schreibe: „Dies ist ein Blindtext“ oder „Huardest gefburn“? Kjift – mitnichten! Ein Blindtext bietet mir wichtige Informationen. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. An ihm messe ich die Lesbarkeit einer Schrift, ihre Anmutung, wie harmonisch die Figuren zueinander stehen und prüfe, wie breit oder schmal sie läuft. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. Ein Blindtext sollte möglichst viele verschiedene Buchstaben enthalten und in der Originalsprache gesetzt sein. $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$. Er muß keinen Sinn ergeben, sollte aber lesbar sein. $\mathrm{d}\Omega = \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi$. Fremdsprachige Texte wie „Lorem ipsum“ dienen nicht dem eigentlichen Zweck, da sie eine falsche Anmutung vermitteln.

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$$

Dies hier ist ein Blindtext zum Testen von Textausgaben. Wer diesen Text liest, ist selbst schuld. $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\beta) = 1$. Der Text gibt lediglich den Grauwert der Schrift an $E = mc^2$. Ist das wirklich so? Ist es gleichgültig, ob ich schreibe: „Dies ist ein Blindtext“ oder „Huardest gefburn“? Kjift – mitnichten! Ein Blindtext bietet mir wichtige Informationen. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. An ihm messe ich die Lesbarkeit einer Schrift, ihre Anmutung, wie harmonisch die Figuren zueinander stehen und prüfe, wie breit oder schmal sie läuft. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. Ein Blindtext sollte möglichst viele verschiedene Buchstaben enthalten und in der Originalsprache gesetzt sein. $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$. Er muß keinen Sinn ergeben, sollte aber lesbar sein. $\mathrm{d}\Omega = \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi$. Fremdsprachige Texte wie „Lorem ipsum“ dienen nicht dem eigentlichen Zweck, da sie eine falsche Anmutung vermitteln. Dies hier ist ein Blindtext zum Testen von Textausgaben. Wer diesen Text liest, ist selbst schuld. $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\beta) = 1$. Der Text gibt lediglich den Grauwert der Schrift an $E = mc^2$. Ist das wirklich so? Ist es gleichgültig, ob ich schreibe: „Dies ist ein Blindtext“ oder „Huardest gefburn“? Kjift – mitnichten! Ein Blindtext bietet mir wichtige Informationen. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. An ihm messe ich die Lesbarkeit einer Schrift, ihre Anmutung, wie harmonisch die Figuren zueinander stehen und prüfe, wie breit oder schmal sie läuft. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. Ein Blindtext sollte möglichst viele verschiedene Buchstaben enthalten und in der Originalsprache gesetzt sein. $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$. Er muß keinen Sinn ergeben, sollte aber lesbar sein. $\mathrm{d}\Omega = \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi$. Fremdsprachige Texte wie „Lorem ipsum“ dienen nicht dem eigentlichen Zweck, da sie eine falsche Anmutung vermitteln.