Lineares Ausgleichsproblem:

t_i	0	1	2	3
y_i	3	2,14	1,8	1,72

Daten

$$y(t) = \alpha \frac{1}{1+t} + \beta$$

Modellfunktion

$$A = \begin{pmatrix} y(t_1 = 0) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(t_n = 3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} y_1 = 3 \\ 2,14 \\ 1,86 \\ y_n = 1,72 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 1 \\ 1/3 & 1 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 = 3 \\ 2,14 \\ 1,86 \\ y_n = 1,72 \end{pmatrix}$$

Satz: 1.1: $x^* \in \mathbb{R}$ ist genau dann eine Lösung des linearen Ausgleichsproblems, wenn x^* Lösung der Normalgleichung $A^T Ax = A^T b$ ist. Es gibt mindestens eine Lösung x^*. Sie ist eindeutig, gdw. $Rang(A) = n$.

Satz: 1.2: Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ mit QR-Zerlegung von A, $Rang(A) \equiv n$, $A = QR$, $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} := Q^T b$ mit $c_1 \in \mathbb{R}^n$, $c_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$ Dann gilt: R_1 ist regulär und $x^* = R_1^{-1} \cdot c_1$ ist die eindeutige Lösung des Linearen Ausgleichsproblems $\|b - Ax\|_2^2 = min$. Außerdem gilt: $\|b - Ax\|_2 = \|c_2\|$

Hessenbergmatrix durch Householder-Reflexion

Mithilfe einer Householder-Reflexion, dargestellt durch Matrixmultiplikation $Q_u \cdot A$, kann ein Teil der Matrix zu null transformiert werden.

Mit v als Spaltenvektor von A, welcher die erste Spalte enthält, wird $u := v + \mathrm{sgn}(v_1) \cdot e_1 \cdot \|v\|$ gewählt (sgn(.) ist die Vorzeichenfunktion, jedoch muss bei 0 nicht 0 genommen werden!). Damit wird $Q_u := \mathbb{1}_{m\times m} - 2 \cdot \frac{u \cdot u^T}{u^T \cdot u}$ definiert, welche A so verdreht, dass alle Elemente in der ersten Spalte unterhalb der Diagonalen verschwinden.

Nun kann man weiter vorgehen und die Teilmatrix von A hernehmen, welche die erste Zeile und Spalte gestrichen hat und darauf weiter agieren. Am ende hätte man mindestens eine obere rechte Dreiecksmatrix. Das Produkt aller verwendeten Q wäre dann eine orthogonale Matrix, womit $Q \cdot R = A$ als QR-Zerlegung entstanden ist.

Algorithmus: QR-Verfahren mit Spektralverschiebung

$A_0 = P^T \cdot A \cdot P$
▷ Tridiagonaltransformation
for $k = 0, 1, \ldots$ **do**
  wähle $\mu_k \in \mathbb{R}$
  $A_k - \mu_k \mathbb{1} = Q_k \cdot R_k$
▷ QR-Zerlegung
  $A_{k+1} = R_k \cdot Q_k + \mu_k \mathbb{1}$
▷ $= Q_k^T A_k Q_k$
end for

Algorithmus:Vektoriteration

wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}$, setze $y^{(0)} = {}^{x^{(0)}}/\|x^{(0)}\|_2$
for $k = 0, 1, \ldots$ **do**
  $x^{k+1} = A \cdot y^{(k)}$
  $\lambda^{(k)} = {y^{(k)}}^T \cdot x^{(k)}$
  $y^{k+1} = \dfrac{x^{(k+1)}}{\|x^{(k+1)}\|_2}$
end for

Algorithmus: Inverse Vektoriteration mit Spektralverschiebung

wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}$, setze $y^{(0)} = {}^{x^{(0)}}/\|x^{(0)}\|_2$
for $k = 0, 1, \ldots$ **do**
  Löse LGS $(A - \mu \mathbb{1})\, x^{(k+1)} = y^{(k)}$
  ▷ $\Leftrightarrow x^{(k+1)} = (A - \mu \mathbb{1})^{-1} \cdot y^{(k)}$
  $\lambda^{(k+1)} = \dfrac{1}{{y^{(k)}}^T \cdot x^{(k)}} + \mu$
  $y^{k+1} = \dfrac{x^{(k+1)}}{\|x^{(k+1)}\|_2}$
end for