**Satz:** 1.1:  $x^* \in \mathbb{R}$  ist genau dann eine Lösung des linearen Ausgleichsproblems, wenn x\* Lösung der Normalgleichung  $A^{T}Ax = A^{T}b$  ist. Es gibt mindestens eine Lösung  $x^*$ . Sie ist eindeutig, gdw. Rang(A) = n.

Daten:  $\|$  Satz: 1.2: Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  mit QR-Zerlegung von A,  $Rang(A) \equiv n$ , A = QR,  $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}, R_1 \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ und } \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} := Q^T b \text{ mit}$  $c_1 \in \mathbb{R}^n$ ,  $c_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$ . Dann gilt:  $R_1$  ist regulär und  $x^* = R_1^{-1} \cdot c_1$  ist die eindeutige Lösung des LineaHessenbergmatrix durch

Reflexion: Mithilfe einer Householder-Reflexion, dargestellt durch Matrixmultiplikation  $Q_u \cdot A_t$ kann ein Teil der Matrix zu null transformiert werden.

Mit als Spaltenvektor von A, wel- label description erste Spalte enthält, cher die wird  $u := v + \operatorname{sgn}(v_1) \cdot e_1 \cdot ||v||$  gewählt (sgn(.) ist die Vorzeichenfunktion, jedoch muss bei 0

nicht 0 genommen werden!). Damit wird  $Q_u \coloneqq \mathbb{1}_{m \times m} - 2 \cdot \frac{u \cdot u^T}{u^T \cdot u}$  definiert, welche A so

verdrehspiegelt, dass alle Elemente in der ersten

Spalte unterhalb der Diagonalen verschwinden. Nun kann man weiter vorgehen und die Teilmatrix von *A* hernehmen, welche die erste Zeile und Spalte gestrichen hat und darauf weiter agieren. Am ende hätte man mindestens eine obere rech-

te Dreiecksmatrix. Das Produkt aller verwendeten Q wäre dann eine orthogonale Matrix, womit  $Q \cdot R = A$  als QR-Zerlegung entstanden ist.

Householder- | Eigenschaften der Householder-Reflexion:

label description

label description

Algorithmus: QR-Verfahren mit Spektralverschiebung

- 1:  $A_0 = P^T \cdot A \cdot P$ 
  - ▶ Tridiagonaltransformation
- 2: **for** k = 0, 1, ... **do**
- wähle  $\mu_k \in \mathbb{R}$ 3:
- 4:  $A_k \mu_k \mathbb{1} = Q_k \cdot R_k$ 
  - ▷ QR-Zerlegung
- 5:  $A_{k+1} = R_k \cdot Q_k + \mu_k \mathbb{1}$
- $\triangleright = Q_k^T A_k Q_k$ 6: end for

## Algorithmus: Vektoriteration

1: wähle 
$$x^{(0)} \in \mathbb{R}$$
, setze  $y^{(0)} = x^{(0)} / ||x^{(0)}||_2$ 

2: **for** 
$$k = 0, 1, ...$$
 **do**

$$3 \cdot \qquad x^{k+1} = A \cdot u^{(k)}$$

$$\lambda^{(k)} = \mu^{(k)}^{T} \cdot \gamma^{(k)}$$

3: 
$$x^{k+1} = A \cdot y^{(k)}$$
  
4:  $\lambda^{(k)} = y^{(k)T} \cdot x^{(k)}$   
5:  $y^{k+1} = \frac{x^{(k+1)}}{\|x^{(k+1)}\|_2}$ 

## 6: end for

## Algorithmus: Inverse Vektoriteration mit Spektralverschiebung

1: wähle 
$$x^{(0)} \in \mathbb{R}$$
, setze  $y^{(0)} = x^{(0)} / ||x^{(0)}||_2$ 

2: **for** 
$$k = 0, 1, ...$$
 **do**

3: Löse LGS 
$$(A - \mu \mathbb{1}) x^{(k+1)} = y^{(k)}$$

$$\Rightarrow x^{(k+1)} = (A - \mu \mathbb{1})^{-1} \cdot y^{(k)}$$

$$\Rightarrow x^{(k+1)} = (A - \mu \mathbb{1})^{-1} \cdot y^{(k)}$$
4: 
$$\lambda^{(k+1)} = \frac{1}{y^{(k)^T} \cdot x^{(k)}} + \mu$$
5: 
$$y^{k+1} = \frac{x^{(k+1)}}{\|x^{(k+1)}\|_2}$$

5: 
$$y^{k+1} = \frac{x^{(k+1)}}{\|x^{(k+1)}\|_2}$$

so? Ist es gleichgültig, ob ich schreibe: "Dies ist ein Blindtext" oder "Huardest gefburn"? Kjift – mitnichten! Ein Blindtext bietet mir wichtige Informationen.  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ . An ihm messe ich die Lesbarkeit einer Schrift, ihre Anmutung, wie harmonisch die Figuren zueinander stehen und prüfe, wie breit oder schmal sie läuft.  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ . Ein Blindtext sollte möglichst viele verschiedene Buchstaben enthalten und in der Originalsprache gesetzt sein.  $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^nb}$ . Er muß keinen Sinn ergeben, sollte aber lesbar sein.  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ . Fremdsprachige Texte wie "Lorem ipsum" dienen nicht dem eigentlichen Zweck, da sie eine falsche Anmutung vermitteln.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Dies hier ist ein Blindtext zum Testen von Textausgaben. Wer diesen Text liest, ist selbst schuld.  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\beta) = 1$ . Der Text gibt lediglich den

Dies hier ist ein Blindtext zum Testen von Text-Grauwert der Schrift an  $E=mc^2$ . Ist das wirklich ausgaben. Wer diesen Text liest, ist selbst schuld so? Ist es gleichgültig, ob ich schreibe: "Dies ist ein  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\beta) = 1$ . Der Text gibt lediglich den Blindtext" oder "Huardest gefburn"? Kjift – mit-Grauwert der Schrift an  $E = mc^2$ . Ist das wirklich nichten! Ein Blindtext bietet mir wichtige Informationen.  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ . An ihm messe ich die Lesbreit oder schmal sie läuft.  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ . Ein Blindbarkeit einer Schrift, ihre Anmutung, wie harmonisch die Figuren zueinander stehen und prüfe, wie text sollte möglichst viele verschiedene Buchstaben breit oder schmal sie läuft.  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ . Ein Blind- $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ . Er muß keinen Sinn ergeben, sollte text sollte möglichst viele verschiedene Buchstaben aber lesbar sein.  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ . Fremdsprachige enthalten und in der Originalsprache gesetzt sein. Texte wie "Lorem ipsum" dienen nicht dem eigent $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ . Er muß keinen Sinn ergeben, sollte lichen Zweck, da sie eine falsche Anmutung veraber lesbar sein.  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ . Fremdsprachige mitteln.

Texte wie "Lorem ipsum" dienen nicht dem eigentlichen Zweck, da sie eine falsche Anmutung ver-  $\sum_{k=0}^{\infty}a_0q^k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^na_0q^k=\lim_{n\to\infty}a_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=\frac{a_0}{1-q}$ mitteln.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_0 q^k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_0 q^k = \lim_{n \to \infty} a_0 \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$
Dies hier ist ein Blindtext zum Testen von Text-

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha x^2}} dx \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha y^2} dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{\text{ausgaben. Wer diesen Text liest, ist selbst schuld.}}{\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \sin^2(\alpha) + \cos^2(\beta)} = 1. \text{ Der Text gibt lediglich den Grauwert der Schrift an } E = mc^2. \text{ Ist das wirklich}$$

Dies hier ist ein Blindtext zum Testen von Text-so? Ist es gleichgültig, ob ich schreibe: "Dies ist ein ausgaben. Wer diesen Text liest, ist selbst schuld. Blindtext" oder "Huardest gefburn"? Kjift - mit- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\beta) = 1$ . Der Text gibt lediglich den nichten! Ein Blindtext bietet mir wichtige Informa-Grauwert der Schrift an  $E = mc^2$ . Ist das wirklich tionen.  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ . An ihm messe ich die Lesso? Ist es gleichgültig, ob ich schreibe: "Dies ist ein barkeit einer Schrift, ihre Anmutung, wie harmo-Blindtext" oder "Huardest gefburn"? Kjift – mit-nisch die Figuren zueinander stehen und prüfe, wie nichten! Ein Blindtext bietet mir wichtige Informationen.  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ . An ihm messe ich die Les-breit oder schmal sie läuft.  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ . Ein Blindbarkeit einer Schrift, ihre Anmutung, wie harmo-text sollte möglichst viele verschiedene Buchstaben nisch die Figuren zueinander stehen und prüfe, wie enthalten und in der Originalsprache gesetzt sein.  $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^nb}$ . Er muß keinen Sinn ergeben, sollte lichen Zweck, da sie eine falsche Anmutung veraber lesbar sein. d $\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ . Fremdsprachige mitteln.

Texte wie "Lorem ipsum" dienen nicht dem eigentlichen Zweck, da sie eine falsche Anmutung vermitteln.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

Dies hier ist ein Blindtext zum Testen von Textausgaben. Wer diesen Text liest, ist selbst schuld.  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\beta) = 1$ . Der Text gibt lediglich den

Dies hier ist ein Blindtext zum Testen von Text-Grauwert der Schrift an  $E=mc^2$ . Ist das wirklich ausgaben. Wer diesen Text liest, ist selbst schuld so? Ist es gleichgültig, ob ich schreibe: "Dies ist ein  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\beta) = 1$ . Der Text gibt lediglich den Blindtext" oder "Huardest gefburn"? Kjift – mit-Grauwert der Schrift an  $E = mc^{2}$ . Ist das wirklich nichten! Ein Blindtext bietet mir wichtige Informaso? Ist es gleichgültig, ob ich schreibe: "Dies ist ein tionen.  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ . An ihm messe ich die Les-Blindtext" oder "Huardest gefburn"? Kjift - mit-barkeit einer Schrift, ihre Anmutung, wie harmonichten! Ein Blindtext bietet mir wichtige Informa-nisch die Figuren zueinander stehen und prüfe, wie tionen.  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ . An ihm messe ich die Lesbarkeit einer Schrift, ihre Anmutung, wie harmobreit oder schmal sie läuft.  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ . Ein Blindnisch die Figuren zueinander stehen und prüfe, wie text sollte möglichst viele verschiedene Buchstaben breit oder schmal sie läuft.  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ . Ein Blind- enthalten und in der Originalsprache gesetzt sein.  $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ . Er muß keinen Sinn ergeben, solltext sollte möglichst viele verschiedene Buchstaben te aber lesbar sein. d $\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ . Fremdspraenthalten und in der Originalsprache gesetzt sein. chige Texte wie "Lorem ipsum" dienen nicht dem  $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ . Er muß keinen Sinn ergeben, sollte eigentlichen Zweck, da sie eine falsche Anmutung aber lesbar sein.  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ . Fremdsprachige vermitteln. Dies hier ist ein Blindtext zum Testen Texte wie "Lorem ipsum" dienen nicht dem eigent- von Textausgaben. Wer diesen Text liest, ist selbst schuld.  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\beta) = 1$ . Der Text gibt lediglich fe, wie breit oder schmal sie läuft.  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ . Ein lich so? Ist es gleichgültig, ob ich schreibe: "Dies Blindtext sollte möglichst viele verschiedene Buchist ein Blindtext" oder "Huardest gefburn"? Kjift – staben enthalten und in der Originalsprache gemitnichten! Ein Blindtext bietet mir wichtige Infor-setzt sein.  $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ . Er muß keinen Sinn ermationen.  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ . An ihm messe ich die geben, sollte aber lesbar sein.  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ . Lesbarkeit einer Schrift, ihre Anmutung, wie har-Fremdsprachige Texte wie "Lorem ipsum" dienen monisch die Figuren zueinander stehen und prü-nicht dem eigentlichen Zweck, da sie eine falsche Anmutung vermitteln.