SVD

$$\begin{aligned} A &= U\Sigma V \\ A \cdot A^T u &= \lambda u \\ A^T \cdot Av &= \lambda v \end{aligned} \tag{1}$$

Die ersten p Eigenwerte von A, $A^T A$ und AA^T sind identisch.
Die i-ten Eigenvektoren von $A^T A$ und respektive AA^T sind die i-ten Spalten von U und V.
Die Diagonale von Σ sind $\sigma_{ii} = \sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$

3. Übung

3.1.i Aufgabe

$$\begin{aligned} AV &= VD \\ \Rightarrow A \cdot v_i &= \lambda_i \cdot v_i \\ \Leftrightarrow A \cdot v_i &= v_i \cdot \lambda_i \end{aligned} \tag{2}$$

d.h.

3.1.ii Aufgabe

Zu zeigen: für EW v_i von A

$$\begin{aligned} A^T = A \Rightarrow v_i \perp v_j \quad \forall i \neq j \\ \Leftrightarrow \left\langle v_i \,;\, v_j \right\rangle = \vec{0} \end{aligned} \tag{3}$$

Tipp: Berechnen Sie zu zwei Eigenvektoren v_1 und v_2 das Skalarprodukt $\left\langle v_1 \,;\, Av_2 \right\rangle$ und benutzen Sie die Identität $\left\langle x \,;\, Ax \right\rangle = \left\langle A^T x \,;\, y \right\rangle$.

$$\ldots \tag{4}$$

3.4.a Aufgabe

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
A^T A &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4 \\
&\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\text{Sortiere: ... } &\rightsquigarrow \\
A A^T &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad analog \\
&\Rightarrow U = V = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\
D &= \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow A &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}^T
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
b &= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\
\rightsquigarrow Ax &= b \\
\Leftrightarrow U\Sigma V^T x &= b \\
\Leftrightarrow \Sigma V^T x &= U^T b \\
\Leftrightarrow V^T x &= \Sigma^+ U^T b \\
x &= V \Sigma^+ U^T b \\
\Leftrightarrow x &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\
x &\overset{Matlab}{=} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{6}$$

oder alternativ einfacher:

$$\begin{aligned}
A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{regulär}, Ax = b & \\
x = A^{-1} b = V \Sigma^{-1} U^T \cdot b & \\
= \sum_{i=1}^{p=r} \frac{1}{\sigma_i} v_i \cdot \left(u_i^T b\right) & \\
\Rightarrow x = 1/2 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right) &
\end{aligned} \tag{7}$$