Lineares Ausgleichsproblem: Daten:

t_i	0	1	2	3
y_i	3	2,14	1,8	1,72

Modellfunktion: $y(t) = \alpha \dfrac{1}{1+t} + \beta$

$$A = \begin{pmatrix} y(t_1 = 0) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(t_n = 3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} ; b = \begin{pmatrix} y_1 = 3 \\ 2,14 \\ 1,86 \\ y_n = 1,72 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 1 \\ 1/3 & 1 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 = 3 \\ 2,14 \\ 1,86 \\ y_n = 1,72 \end{pmatrix}$$

Satz: 1.1: $x^* \in \mathbb{R}$ ist genau dann eine Lösung des linearen Ausgleichsproblems, wenn x^* Lösung der Normalgleichung $A^T A x = A^T b$ ist. Es gibt mindestens eine Lösung x^*. Sie ist eindeutig, gdw. $Rang(A) = n$.

Satz: 1.2: Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ mit QR-Zerlegung von A, $Rang(A) \equiv n$, $A = QR$, $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} := Q^T b$ mit $c_1 \in \mathbb{R}^n$, $c_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$. Dann gilt: R_1 ist regulär und Außerdem gilt: $b - Ax_2 = c_2$.

Hessenbergmatrix durch Householder-Reflexion: Mithilfe einer Householder-Reflexion, dargestellt durch Matrixmultiplikation $Q_u \cdot A$, kann ein Teil der Matrix zu null transformiert werden.
Mit v als Spaltenvektor von A, welcher die erste Spalte enthält, wird $u \coloneqq v + \operatorname{sgn}(v_1) \cdot e_1 \cdot v$ gewählt (sgn(.) ist die Vorzeichenfunktion, jedoch muss bei 0 nicht 0 genommen werden!). Damit wird $Q_u \coloneqq \mathbb{1}_{m\times m} - 2 \cdot \frac{u \cdot u^T}{u^T \cdot u}$ definiert, welche A so verdrehspiegelt, dass alle Elemente in der ersten Spalte unterhalb der Diagonalen verschwinden.
Nun kann man weiter vorgehen und die Teilmatrix von A hernehmen, welche die erste Zeile und Spalte gestrichen hat und darauf weiter agieren. Am ende hätte man mindestens eine obere rechte Dreiecksmatrix. Das Produkt aller verwendeten Q wäre dann eine orthogonale Matrix, womit $Q \cdot R = A$ als QR-Zerlegung entstanden ist.

Eigenschaften der Householder-Reflexion:
(i) $Q_v \cdot v = -v$
(ii) $Q_v \cdot u = u \Leftrightarrow v \perp u$
(iii) $Q_v^T = Q_v^{-1} \Rightarrow Q_v$ ist Orthogonal

Eine **Givensrotation** von $A = \begin{pmatrix} a_1 & * \\ a_2 & * \end{pmatrix}$ kann mit $r = |\sqrt{a_1^2 + a_2^2}|$, $c = {}^{a_1}/_{r}$, $s = {}^{a_2}/_{r}$ und $G = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$ erfolgen: $G \cdot A = \begin{pmatrix} r & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix}$

Nicht Lineares Ausgleichsproblem:
Daten:

t_i	0	1	2
y_i	2	-3	4

Modellfunktion: $y(t) = x_1 \sin(x_2 \cdot t)$

$$\phi(t, x) = y(t)$$
$$F_i = y_i - \phi(t_i, x)$$
$$F(x) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -x_1 \sin(x_2) \\ 4 & -x_1 \sin(2x_2) \end{pmatrix}$$
$$J_F(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sin(x_2) & -x_1 \cos(x_2) \\ -\sin(2x_2) & -2x_1 \cos(2x_2) \end{pmatrix}$$

Algorithmus: **Gauß-Newton-Verfahren**

Wähle Startvektor $x^{(0)} \in \mathbb{R}$
for $k = 0, 1, \ldots$ **do**
$\triangleright$ Löse LGS nach $\Delta x^{(k)}$
$\quad J_F(x^{(k)})\Delta x^{(k)} + F(x^{(k)})_2^2 \to min$
$\quad$ setze $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$
end for

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}\ s.p.d \Rightarrow \exists V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal mit $V^T AV = D\,;\, d_{ii} = \lambda_i \geq 0 \Rightarrow A = VDV^T\ (VV^T = \mathbb{1})$
$\boxed{AV = VD}$

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}\ A^T A$ ist s.p.semi-d. $x^T A^T Ax \geq 0$
Satz: **Singulärwertzerlegung**: Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $p = min(m, n)$. Dann existieren orthogonale Matrizen $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $U^T AV = \Sigma = diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_p) \Rightarrow$

Algorithmus: **QR-Verfahren mit Spektralverschiebung**

$A_0 = P^T \cdot A \cdot P$
$\triangleright$ Tridiagonaltransformation
for $k = 0, 1, \ldots$ **do**
$\quad$ wähle $\mu_k \in \mathbb{R}$
$\quad A_k - \mu_k \mathbb{1} = Q_k \cdot R_k$
$\triangleright$ QR-Zerlegung
$\quad A_{k+1} = R_k \cdot Q_k + \mu_k \mathbb{1}$
$\triangleright$ $= Q_k^T A_k Q_k$
end for

Algorithmus: **Vektoriteration**

wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}$, setze $y^{(0)} = x^{(0)}/x^{(0)}{}_2$
for $k = 0, 1, \ldots$ **do**
$\quad x^{k+1} = A \cdot y^{(k)}$
$\quad \lambda^{(k)} = y^{(k)^T} \cdot x^{(k)}$
$\quad y^{k+1} = \dfrac{x^{(k+1)}}{x^{(k+1)}{}_2}$
end for

Algorithmus: **Inverse Vektoriteration mit Spektralverschiebung**

wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}$, setze $y^{(0)} = {}^{x^{(0)}}\!/_{x^{(0)}{}_2}$

for $k = 0, 1, \ldots$ **do**

  Löse LGS $\left(A - \mu\mathbb{1}\right) x^{(k+1)} = y^{(k)}$

$\triangleright$ $\Leftrightarrow x^{(k+1)} = \left(A - \mu\mathbb{1}\right)^{-1} \cdot y^{(k)}$

  $\lambda^{(k+1)} = \dfrac{1}{{y^{(k)}}^{T} \cdot x^{(k)}} + \mu$

  $y^{k+1} = \dfrac{x^{(k+1)}}{x^{(k+1)}{}_2}$

end for