Numerische Mathematik II: 5. Aufgabenblatt

Sommersemester 2019
Prof. Dr. Frank Haußer

BEUTH HOCHSCHULE FÜR TECHNIK BERLIN
University of Applied Sciences

Polynominterpolation (1)

letzte Änderung: 27. Juni 2019
Ausgabe: 20. Juni 2019

1. Aufgabe: Beispiel Polynominterpolation

Berechnen Sie das kubische Interpolationspolynom zu den Stützpunkten $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$

(a) in der Potenzform (Monome als Basis)

Lösung:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \tag{1}$$

Einsetzen der Interpolationsbedingungen $p(x_i) = f_i$ *in Gleichung* (1) *führt auf ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten* a_i, $i = 0, 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
p(-1) = 1: &\quad & a_0 - a_1 + a_2 - a_3 &= 1 \\
p(0) = 0: &\quad & a_0 &= 0 \\
p(1) = 1: &\quad & a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= 1 \\
p(2) = 0: &\quad & a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 &= 0
\end{aligned}$$

Wegen $a_0 = 0$ *muss lediglich ein LGS für drei Unbekannte gelöst werden:*

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gauss-Elimination ergibt $a_3 = -\frac{2}{3}$, $a_2 = 1$, $a_1 = \frac{2}{3}$, *und damit*

$$p(x) = \tfrac{2}{3}x + x^2 - \tfrac{2}{3}x^3$$

(b) in der Lagrange-Darstellung (Lagrange-Fundamentalpolynome als Basis).

Lösung:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{3} f_j l_j(x), \qquad l_j(x) = \prod_{k=0, k\neq j}^{3} \frac{x - x_k}{x_j - x_k} \tag{2}$$

Da $f_1 = f_3 = 0$ *ist, benötigt man nur die Fundamentalpolynome* $l_0(x)$ *und* $l_2(x)$. *Einsetzen der Stützstellen* x_i *in die zweite Gleichung in* (2) *ergibt*

$$l_0(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{-6}, \qquad l_2(x) = \frac{(x+1)x(x-2)}{-2}.$$

Einsetzen der Stützwerte f_i *in die erste Gleichung von* (2) *ergibt dann*

$$p(x) = l_0(x) + l_2(x) = -\frac{x(x-1)(x-2)}{6} - \frac{(x+1)x(x-2)}{2}$$

(Ausmultiplizieren und Zusammenfassen der Terme ergibt – wie es sein muss – dasselbe Polynom wie in Teil (a).)

2. Aufgabe: Polynominterpolation als lineare Abbildung

Es seien $n+1$ Stützstellen (Knoten) $x_i \in \mathbb{R}$ gegeben mit $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ und es sei Π_n der Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich n. Überzeugen Sie sich davon, dass die Polynominterpolation, d.h. die Abbildung

$$\begin{aligned} P(\,\cdot\,|x_0,\ldots,x_n) : C[a,b] &\longrightarrow \Pi_n, \\ f &\longmapsto P(f|x_0,x_1,\ldots,x_n), \end{aligned}$$

die jeder auf dem Intervall $[a,b]$ stetigen Funktion f das eindeutige Interpolationsplynom $P \in \Pi_n$ zu den Stützpunkten $(x_i, f(x_i))$ zuordnet, eine lineare Abbildung ist. Welchen Rang hat diese lineare Abbildung (Begründung)? Geben Sie auch den Kern und das Bild dieser Abbildung an.

Lösung:

Zu zeigen ist also, dass das Interpolationspolynom einer Summe von zwei Funktionen gleich der Summe der Interpolationspolynome der beiden Funktionen ist und das Interpolationspolynom des skalaren Vielfachen einer Funktion gleich dem skalaren Vielfachen des Interpolationspolynoms dieser Funktion ist. Wir zeigen im Folgenden beides in einem Schritt: Das Interpolationspolynom einer Linearkombination von 2 Funktionen ist gleich der entsprechenden Linearkombination der Interpolationspolynome der beiden Funktionen.

Sei also g eine Linearkombination von zwei stetigen Funktionen f_1, f_2,

$$g = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \quad \text{mit } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \quad f_1, f_2 \in C[a,b]$$

und seien $q, p_1, p_2 \in \Pi_n$ die Interpolationspolynome zu g, f_1, f_2 bez. der Stützstellen $\{x_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$, d.h.

$$q = P(g|x_0,\ldots,x_n), \quad p_1 = P(f_1|x_0,\ldots,x_n), \quad p_2 = P(f_2|x_0,\ldots,x_n)$$

Dann müssen wir zeigen, dass gilt

$$q = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2. \tag{3}$$

Zwei Polynome in Π_n sind genau dann gleich, wenn Sie an $n+1$ unterschiedlichen Stellen x_i denselben Funktionswert haben, d.h. wenn sie dieselben $n+1$ (Lagrange-) Interpolationsbedingungen erfüllen. Die linke und die rechte Seite von Gleichung (3) sind Polynome aus Π_n, die dieselben Interpolationsbedingungen in den $n+1$ Punkten x_i erfüllen:

$$q(x_i) = \alpha_1 f_1(x_i) + \alpha_2 f_2(x_i) = \alpha_1 p_1(x_i) + \alpha_2 p_2(x_i).$$

Also sind es dieselben Polynome, d.h. Gleichung (3) ist gezeigt und damit auch die Behauptung.

Behauptung: die Abbildung $P(\,\cdot\,|x_0,\ldots,x_n)$ hat maximalen Rang, also den Rang $n+1$. Aus der Eindeutigkeit der Polynominterpolation folgt, dass

$$P(g|x_0,\ldots,x_n) = g, \quad \forall g \in \Pi_n,$$

d.h., die Abbildung $P(\,\cdot\,|x_0,\ldots,x_n)$, eingeschränkt auf Π_n, ist gerade die Identitätsabbildung. Damit ist das Bild von $P(\,\cdot\,|x_0,\ldots,x_n)$ der ganze Raum Π_n und der Rang ist damit maximal und gleich der Dimension von Π_n, also $n+1$.

3. Aufgabe: Lagrange-Fundamentalpoylnome

(a) Plotten Sie für $n = 4$ die Lagrange-Fundamentalpolynome zu den äquidistanten Stützstellen

$$x_i = -1 + 2i/n, \quad i = 0,1,\ldots,n$$

in dem Intervall $[-1,1]$ in ein Schaubild.

(b) Wählen Sie jetzt zum Vergleich die sogenannten Tschebyscheff-Knoten

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

(c) Vergleichen Sie die entsprechenden Fundamentalpolynome für $n = 10$.

(Tip: Implementieren Sie zunächst eine MATLAB-Funktion `function y = lagrangePolynom(j, knoten, x)`, der ein Vektor `knoten` mit den Stützstellen übergeben wird und die die Auswertung des j-ten Fundamentalpolynoms l_j an der Stelle x zurückliefert. Benutzen Sie in dieser Funktion `.*` und nicht `*` ... .)

4. Aufgabe:

Behauptung: *Es reicht, das Interpolationsproblem auf dem Intervall* $[-1, 1]$ *zu untersuchen, bzw. zu verstehen*. Diskutieren Sie: Warum sollte das so sein? Was soll das heißen?

(Tipp: Bestimmen Sie eine einfache Transformation, die das Intervall $[a, b]$ auf das Intervall $[-1, 1]$ abbildet ... .)

Lösung:

Die Idee ist die folgende: mit einer einfachen Variablensubstitution, die den Polynomgrad nicht ändert, wird aus einer stetigen Funktion (und insbesondere auch aus einem Polynom) auf einem Intervall $[a, b]$ *eine Funktion auf dem Intervall* $[-1, 1]$*. Man transformiert also das Interpolationsproblem auf das Intervall* $[-1, 1]$*, löst es und transformiert die Lösung zurück. Wir diskutieren dies im folgenden möglichst abstrakt, da ähnliche Überlegungen in vielen anderen Zusammenhängen eine Rolle spielen.*

Die folgende affine Abbildung bildet das Intervall $[a, b]$ *bijektiv auf* $[-1, 1]$ *ab.*

$$t : [a, b] \to [-1, 1], \qquad x \mapsto t(x) = -1 + 2\frac{x-a}{b-a}$$

Mit einer solchen Abbildung kann man jede Funktion mit Definitionsbereich $[a, b]$ *in eine Funktion mit Definitionsbereich* $[-1, 1]$ *transformieren. Vornehm ausgedrückt induziert* t *bijektive Abbildungen*

$$\begin{aligned} t_* : C[-1, 1] \to C[a, b], &\qquad g \mapsto t_* g = g \circ t \\ t^* : C[a, b] \to C[-1, 1], &\qquad f \mapsto t^* f = f \circ t^{-1}, \end{aligned}$$

wobei der Grad eines Polynoms unter diesen Abbildungen invariant ist, d.h., die Polynomräume Π_n *werden wieder auf sich selbst abgebildet:*

$$t^*\Pi_n = t_*\Pi_n = \Pi_n.$$

Es gilt natürlich $t_* = (t^*)^{-1}$*. Man überzeugt sich nun leicht davon, dass:*

$$t_* P(t^* f | t(x_0), t(x_1), \ldots, t(x_n)) = P(f | x_0, x_1, \cdots, x_n).$$

(Das Polynom auf der linken und auf der rechten Seite erfüllen beide dieselben Interpolationsbedingungen $p(x_i) = f(x_i)$ *und sind daher identisch.) Dies ist aber gerade der oben in Worten beschriebene Zusammenhang: Man löst für* $g = t^* f$ *ein Interpolationsproblem auf dem Intervall* $[-1, 1]$ *(zu den Stützpunkten* $t_i = t(x_i), g(t_i)$*) und transformiert dann das berechnete Interpolationspolynom* p*, um die Lösung* $q = t_* p$ *des ursprünglichen Interpolationsproblems zu erhalten.*

Umgekehrt kann man zum Beispiel Fehlerabschätzungen, optimale Knotenabstände etc. für Interpolationsprobleme auf dem Intervall $[-1, 1]$ *herleiten und die Ergebnisse dann leicht auf ein beliebiges Intervall* $[a, b]$ *transformieren.*

5. Aufgabe: Newtonsche Interpolationsformel

Gegeben sei die Wertetabelle

i	0	1	2	3
x_i	1	3	4	6
f_i	3	7	30	238

Berechnen Sie die Lagrange-Interpolationspolynome $P(f|x_0, x_1, x_2)$ und $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$ in der Newtonschen Darstellung mit Hilfe des Schemas der dividierten Differenzen.

Lösung:

Man erhält das folgende Schema der dividierten Differenzen:

i	x_i	$f_{[x_i]}$	$f_{[x_{i-1},x_i]}$	$f_{[x_{i-2},x_{i-1},x_i]}$	$f_{[x_{i-3},x_{i-2},x_{i-1},x_i]}$
0	1	**3**			
1	3	7	**2**		
2	4	30	23	**7**	
3	6	238	104	27	**4**

Also ist

$$\begin{aligned} P(f|x_0, x_1, x_2)(x) &= f_{[x_0]} + f_{[x_0,x_1]}(x - x_0) + f_{[x_0,x_1,x_2]}(x - x_0)(x - x_1) \\ &= 3 + 2(x - 1) + 7(x - 1)(x - 3); \\ P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)(x) &= P(f|x_0, x_1, x_2)(x) + f_{[x_0,x_1,x_2,x_3]}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &= 3 + 2(x - 1) + 7(x - 1)(x - 3) + 4(x - 1)(x - 3)(x - 4) \end{aligned}$$

6. Aufgabe: Rekursionsformel für die Berechnung der dividierten Differenzen

Beweisen Sie die folgende Rekursionsformel aus der Vorlesung ($r < s$)

$$f_{[x_r,\dots,x_s]} = \frac{f_{[x_{r+1},\dots,x_s]} - f_{[x_r,\dots,x_{s-1}]}}{x_s - x_r}.$$

(Tipp: Setzen Sie im Lemma von Aitken die Polynome auf der linken und auf der rechten Seite in der Newton-Darstellung ein und vergleichen Sie die führenden Koeffizienten, d.h. die Koeffizienten vor dem Term x^{s-r}, wenn man die Basis der Monome wählen würde. Machen Sie sich dazu klar, dass z.B. für das Polynom $P(f|x_0, \dots, x_n)$ der führende Koeffizient gerade die dividierte Differenz $f_{[x_0,\dots,x_n]}$ ist.)

Satz 1 (Lemma von Aitken) *Für das Interpolationspolynom $P(f|x_r, \dots, x_s)$, $r < s$, gilt die Rekursionsformel*

$$P(f|x_r, \dots, x_s)(x) = \frac{x - x_r}{x_s - x_r} P(f|x_{r+1}, \dots, x_s)(x) + \frac{x_s - x}{x_s - x_r} P(f|x_r, \dots, x_{s-1})(x)$$

Lösung:

Direktes Einsetzen in das Lemma von Aitken ... .

7. Aufgabe: Fehlerabschätzung bei der Polynominterpolation

Die Funktion

$$f(x) = 2\sin(3\pi x)$$

soll polynomial interpoliert werden zu den Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{12}$, $x_2 = \frac{1}{6}$.

(a) Berechnen Sie das Interpolationspolynom in der Newton-Darstellung und werten Sie es an der Stelle $x = \frac{1}{24}$ aus.

Lösung:
Es ist $f(0) = 0, \quad f(\frac{1}{12}) = \sqrt{2}, \quad f(\frac{1}{6}) = 2$, *und damit*

i	x_i	$f_{[x_i]}$	$f_{[x_{i-1},x_i]}$	$f_{[x_{i-2},x_{i-1},x_i]}$
0	0	**0**		
1	$\frac{1}{12}$	$\sqrt{2}$	$12\sqrt{2}$	
2	$\frac{1}{6}$	2	$12(2-\sqrt{2})$	$144(1-\sqrt{2})$

Also ist

$$P(f|0, \tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{6})(x) = f_[0] + f_{[0,\frac{1}{12}]}x + f_{[0,\frac{1}{12},\frac{1}{6}]}x(x-\tfrac{1}{6}) = 12\sqrt{2}x + 144(1-\sqrt{2})x(x-\tfrac{1}{12})$$

und $P(f|0, \frac{1}{12}, \frac{1}{6})(\frac{1}{24}) = \frac{3}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4} \approx 0.81066$.
Mit $f(\frac{1}{24}) \approx 0.76537$ *ergibt sich damit ein absoluter Fehler von* $0.81066 - 0.76537 = 0.04529$.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für den Fehler $|f(x) - P(f|x_0, x_1, x_2)(x)|$ im Intervall $[0, \frac{1}{6}]$ an. (Bestimmen sie dazu das Maximum von $|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|$.)

Lösung:
Es gilt für $x \in [0, \frac{1}{6}]$ *(siehe Vorlesung):*

$$|f(x) - P(f|0, \tfrac{1}{12}, \tfrac{1}{6})(x)| \le \Big(\max_{x\in[0,\frac{1}{6}]} |\omega_3(x)|\Big)\Big(\max_{x\in[0,\frac{1}{6}]} \Big|\frac{f^{(3)}(x)}{3!}\Big|\Big) \tag{4}$$

Es ist $f^{(3)}(x) = -2(3\pi)^3\cos(3\pi x)$. *Da der Cosinus seinen betragsmäßig größten Wert (nämlich den Wert* 1*) bei* $x = 0$ *annimmt, erhält man für den 2. Term auf der rechten Seite von* (4)

$$\max_{x\in[0,\frac{1}{6}]} \Big|\frac{f^{(3)}(x)}{3!}\Big| = \frac{2(3\pi)^3}{3!} \approx 279.$$

Um den Wert des 1.Terms auf der rechten Seite von (4) *zu erhalten, bestimmt man zunächst die Extrema von*

$$\omega_3(x) = \prod_{k=0}^{2}(x - x_k) = x(x-\tfrac{1}{12})(x-\tfrac{1}{6}) = x^3 - \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{72}x$$

als die Nullstellen $x_\pm$ *der ersten Ableitung* $\omega_3'(x) = 3x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{72}$. *(Da* $w_3(x)$ *Nullstellen* $x_0 = 0$, $x_2 = 1/6$ *am Rand des betrachteten Intervalles hat, wird der betragsmäßig größte Wert also sicherlich nicht am Rand angenommen !) Man erhält*

$$x_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}}{12}, \qquad \omega_3(x_\pm) \approx \mp 2.227 \cdot 10^{-4}.$$

Damit ergibt sich als Abschätzung für den Fehler im Intervall $[0, \frac{1}{6}]$*:*

$$|f(x) - P(f|x_0, x_1, x_2)(x)| \le 2.227 \cdot 10^{-4} \cdot 279 \approx 0.0622.$$

8. Aufgabe: Fehlerabschätzung bei der Polynominterpolation

Die Funktion $\sin x$ soll im Intervall $I = [0, \pi/2]$ äquidistant tabelliert werden. Wieviele Stützstellen benötigen Sie, damit der Interpolationsfehler für jedes $x \in I$ kleiner als $\frac{1}{2}10^{-4}$ ist (also auf vier Nachkommastellen genau), bei

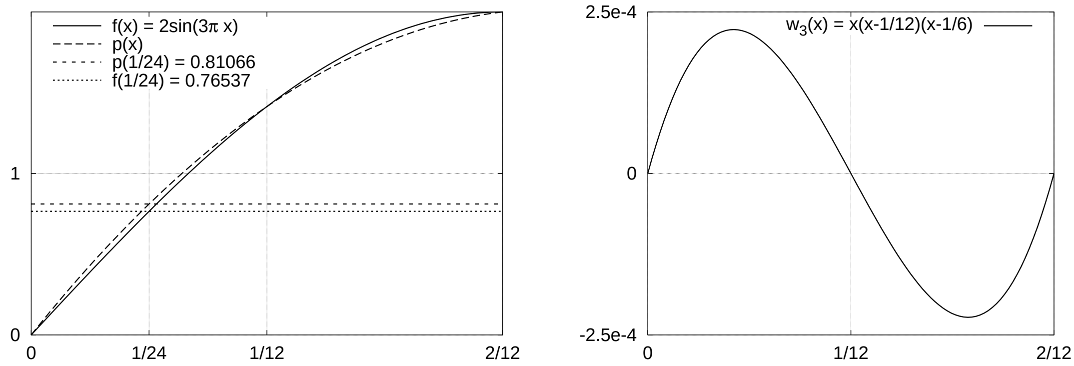

Abbildung 1: Aufgabe 7.

(a) linearer Interpolation (jeweils mit den zwei nächstgelegenen Stützstellen)

Lösung:
Es sei h der zu bestimmende Abstand aufeinanderfolgender Stützstellen x_i, x_{i+1}. Dann muss h so gewählt werden, dass auf jedem Teilintervall $x_i, x_{i+1} = x_i + h$ gilt:

$$\max_{x_i \le x \le x_{i+1}} |\sin(x) - P(\sin|x_i, x_{i+1})(x)| \le \tfrac{1}{2}10^{-4}.$$

Für die linke Seite gilt aber die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned}\max_{x_i \le x \le x_{i+1}} |\sin(x) - P(\sin|x_i, x_{i+1})(x)| &\le \max_{x_i \le x \le x_{i+1}} |(x-x_i)(x-x_i-h)| \max_{x_i \le x \le x_{i+1}} |\sin(x)/2| \\ &= \tfrac{1}{4}h^2 \max_{x_i \le x \le x_{i+1}} |\sin(x)/2|\end{aligned}$$

Bildet man das Maximum über alle Teilintervalle, so erhält man

$$|\sin(x) - P(\sin|x_i, x_{i+1})(x)| \le \tfrac{1}{8}h^2 \quad \forall i,\ x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Also müssen wir fordern:

$$\tfrac{1}{8}h^2 \le \tfrac{1}{2}10^{-4} \quad \text{d.h.} \quad h \le 2 \times 10^{-2}.$$

Für die minimale Anzahl der äquidistanten Stützstellen N erhält man damit

$$N = \lceil \pi/(2h) \rceil + 1 = \lceil 100\pi/4 \rceil + 1 = 80.$$

(b) kubischer Interpolation (jeweils mit den 4 nächstgelegenen Stützstellen).

Lösung:
Lösung analog zu (a). Zur Bestimmung des Maximums von $|\omega_4(x)|$ muss man im Prinzip die Nullstellen der 1.Ableitung bestimmen und in ω_4 einsetzen. Dabei geht man am besten wie folgt vor:

- *Es reicht, das Maximum für das Polynom $\omega_4^h(x)$ für $x_i = ih$, $i = 0, 1, 2, 3$, d.h.*

  $$\omega_4^h(x) = x(x-h)(x-2h)(x-3h)$$

  im Intervall $[0, 3h]$ zu bestimmen.
- *Es reicht, den Fall $h = 1$ zu betrachten, denn*

  $$\omega_4^h(x) = h^4 \omega_4^1(\tfrac{x}{h})$$

  Aus Symmetriegründen hat dieses Polynom vom Grade 4 ein Extremum bei $x = 3/2$.

- *Verschiebt man das Polynom ω_4^1 so, dass es symmetrisch zum Ursprung ist, d.h. so, dass das die Extremalstelle $x = 3/2$ im Urspung ist, so erhält man ein Polynom*

$$\hat{\omega}(x) = (x - \tfrac{3}{2})(x - \tfrac{1}{2})(x + \tfrac{1}{2})(x + \tfrac{3}{2}) = (x^2 - \tfrac{9}{4})(x^2 - \tfrac{1}{4})$$

  Wir müssen also die Maxima von $\hat{\omega}(x)$ im Intervall $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ bestimmen

Man berechnet

$$\hat{\omega}'(x) = ... = 2x(2x^2 - 10/4) = 4x(x - \sqrt{5}/2)(x + \sqrt{5}/2)$$

mit den Nullstellen $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = \sqrt{5}/2$, $\lambda_2 = -\sqrt{5}/2$. Einsetzen in $\hat{\omega}$ ergibt das Maximum

$$|\hat{\omega}(\pm\sqrt{5}/2)| = |-1| = 1.$$

Damit hat $|\omega_4(x)|$ also den maximalen Wert h^4 und man erhält die Abschätzung (analog zur Argumentation in (a))

$$|\sin(x) - P(\sin|x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3})(x)| \leq h^4/4! = h^4/24, \quad \forall i,\ x \in [x_i, x_{i+3}]$$

Also muss man fordern:

$$h^4 \leq 24\tfrac{1}{2} \times 10^{-4}, \quad \textit{d.h. } h \leq \sqrt[4]{12}/10 \approx 0.186$$

Für die minimale Anzahl der äquidistanten Stützstellen N erhält man damit

$$N = \lceil \pi/(2h) \rceil + 1 = 10.$$