Lineares Ausgleichsproblem:

Daten:

t_i	0	1	2	3
y_i	3	2,14	1,8	1,72

Modellfunktion: $y(t) = \alpha {}^{1}/_{1+t} + \beta$

$$A = \begin{pmatrix} y(t_1 = 0) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(t_n = 3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} ; b = \begin{pmatrix} y_1 = 3 \\ 2,14 \\ 1,86 \\ y_n = 1,72 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 1 \\ 1/3 & 1 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 = 3 \\ 2,14 \\ 1,86 \\ y_n = 1,72 \end{pmatrix}$$

Satz: 1.1:
$x^* \in \mathbb{R}$ ist genau dann eine Lösung des linearen Ausgleichsproblems, wenn x^* Lösung der Normalgleichung $A^TAx = A^Tb$ ist. Es gibt mindestens eine Lösung x^*. Sie ist eindeutig, gdw. $Rang(A) = n$.

Satz: 1.2:
Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ mit QR-Zerlegung von A, $Rang(A) \equiv n$, $A = QR$, $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} := Q^Tb$ mit $c_1 \in \mathbb{R}^n$, $c_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$.
Dann gilt:
R_1 ist regulär und
Außerdem gilt: $\|b - Ax\|_2 = \|c_2\|$.

Hessenbergmatrix durch Householder-Reflexion:
Mithilfe einer Householder-Reflexion, dargestellt durch Matrixmultiplikation $Q_u \cdot A$, kann ein Teil der Matrix zu null transformiert werden.
Mit v als Spaltenvektor von A, welcher die erste Spalte enthält, wird $u := v + \text{sgn}(v_1) \cdot e_1 \cdot \|v\|$ gewählt (sgn(.) ist die Vorzeichenfunktion, jedoch muss bei 0 nicht 0 genommen werden!). Damit wird $Q_u := \mathbb{1}_{m\times m} - 2 \cdot (u \cdot u^T)/(u^T \cdot u)$ definiert, welche A so verdrehspiegelt, dass alle Elemente in der ersten Spalte unterhalb der Diagonalen verschwinden.
Nun kann man weiter vorgehen und die Teilmatrix von A hernehmen, welche die erste Zeile und Spalte gestrichen hat und darauf weiter agieren.
Am ende hätte man mindestens eine obere rechte Dreiecksmatrix. Das Produkt aller verwendeten Q wäre dann eine orthogonale Matrix, womit $Q \cdot R = A$ als QR-Zerlegung entstanden ist.

Eigenschaften der Householder-Reflexion:
(i) $Q_v \cdot v = -v$
(ii) $Q_v \cdot u = u \Leftrightarrow v \perp u$
(iii) $Q_v^T = Q_v^{-1} \Rightarrow Q_v$ ist Orthogonal

Eine **Givensrotation** von $A = \begin{pmatrix} a_1 & * \\ a_2 & * \end{pmatrix}$ kann mit $r = \left|\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\right|$, $c = {}^{a_1}/_{r}$, $s = {}^{a_2}/_{r}$ und $G = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$ erfolgen: $G \cdot A = \begin{pmatrix} r & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix}$

Nichtlineares Ausgleichsproblem:

Daten:

t_i	0	1	2
y_i	2	-3	4

Modellfunktion: $y(t) = x_1 \sin(x_2 \cdot t)$

$$\varphi(t, x) = y(t)$$
$$F_i = y_i - \varphi(t_i, x)$$
$$\mathbb{R}^n \ni F(x) = \begin{pmatrix} 2 - 0 \\ -3 - x_1 \sin(x_2) \\ 4 - x_1 \sin(2x_2) \end{pmatrix}$$
$$J_F(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sin(x_2) & -x_1 \cos(x_2) \\ -\sin(2x_2) & -2x_1 \cos(2x_2) \end{pmatrix}$$
$$\|F(x)\|_2^2 \approx \left\|F\left(x^{(k)}\right) + J_F\left(x^{(k)}\right)\left(x - x^{(k)}\right)\right\|_2^2 \} \rightarrow min$$

Algorithmus: **Gauß-Newton-Verfahren**
Wähle Startvektor $x^{(0)} \in \mathbb{R}$
for $k = 0, 1, \dots$ **do**
▷ Löse LGS nach $\Delta x^{(k)}$
$\left\|J_F(x^{(k)})\Delta x^{(k)} + F(x^{(k)})\right\|_2^2 \rightarrow min$
setze $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$
end for

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $s.p.d \Rightarrow \exists V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal mit $V^TAV = D$; $d_{ii} = \lambda_i \geq 0 \Rightarrow A = VDV^T$ $(VV^T = \mathbb{1})$
$\boxed{AV = VD}$

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ A^TA ist s.p.semi-d. $x^TA^TAx \geq 0$
Satz: **Singulärwertzerlegung**:
Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $p = min(m, n)$.
Dann existieren orthogonale Matrizen $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit
$U^TAV = \Sigma = diag(\sigma_1, \dots, \sigma_p) \Rightarrow \boxed{A = U\Sigma V^T}$

Anwendung der SVD
(i) $A^{(s)} := \sum_{i=1}^{n} \sigma_i u_i v_i^T$, $s < r$ ist die beste (im Sinne der $\|.\|_2$) Approximation von A mit dem Rang(s).
(ii) **Pseudoinverse A^+**, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$;
$A = U\Sigma V^T$;
$A^+ = V\Sigma^+U^T$ mit
$\Sigma^+ = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
$x = A^+b$ ist die Lösung des linearen Ausgleichsproblems $\|Ax - b\|_2 \rightarrow min$
(iii) Lösung des linearen Ausgleichsproblems für $Rang(A) < n$
(iv) Regularisierung schlecht gestellter Probleme
$\hat{x} = \sum_{i=1}^{s} {}^{1}/_{\sigma_i} v_i \cdot \left(u_i^T \cdot b\right)$, $s < n$

Algorithmus: **Vektoriteration**
wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}$, setze $y^{(0)} = {}^{x^{(0)}}/_{\|x^{(0)}\|_2}$
for $k = 0, 1, \dots$ **do**
$x^{k+1} = A \cdot y^{(k)}$
$\lambda^{(k)} = y^{(k)^T} \cdot x^{(k)}$
$y^{k+1} = {}^{x^{(k+1)}}/_{\|x^{(k+1)}\|_2}$
end for

Algorithmus: **Inverse Vektoriteration mit Spektralverschiebung**
wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}$, setze $y^{(0)} = {}^{x^{(0)}}/_{\|x^{(0)}\|_2}$
for $k = 0, 1, \dots$ **do**
Löse LGS $(A - \mu\mathbb{1})\, x^{(k+1)} = y^{(k)}$
▷ $\Leftrightarrow x^{(k+1)} = (A - \mu\mathbb{1})^{-1} \cdot y^{(k)}$
$\lambda^{(k+1)} = {}^{1}/_{y^{(k)^T} \cdot x^{(k)}} + \mu$
$y^{k+1} = {}^{x^{(k+1)}}/_{\|x^{(k+1)}\|_2}$
end for

Lemma zum QR-Verfahren
(i) die Matrizen A_k sind **ähnlich** zu A.
(ii) A Symetrisch $\Rightarrow A_k$ Symmetrisch.
(iii) A tridiagonal und Symetrisch $\Rightarrow A_k$ auch.
Zwei Matrizen A und B sind sich **ähnlich**, wenn es eine reguläre Matrix S gibt, so dass: $B = S^{-1} \cdot A \cdot S$ $\Leftrightarrow SB = AS$ gilt.
Ähnliche Matrizen haben dasselbe Spektrum $\sigma(A) = \sigma(B)$, gleiche Spur, gleichen Rang aber nicht notwendigerweise die gleichen EV.

Algorithmus: **QR-Verfahren mit Spektralverschiebung**
$A_0 = P^T \cdot A \cdot P$
▷ Tridiagonaltransformation
for $k = 0, 1, \dots$ **do**
wähle $\mu_k \in \mathbb{R}$
$A_k - \mu_k\mathbb{1} = Q_k \cdot R_k$
▷ QR-Zerlegung
$A_{k+1} = R_k \cdot Q_k + \mu_k\mathbb{1}$
▷ $= Q_k^T A_k Q_k$
end for

Lagrange-Fundamental-Polynom
Seien Stützpunkte (x_i, f_i) $i = 0, .., n$ gegeben:
Suche Polynome $\ell_j \in \Pi_n$, $j = 0, .., n$ mit
$$\ell_j(x_k) = \begin{cases} 1 : j = k \\ 0 : j \neq k \end{cases};$$
$$P(f|x_0, .., x_n)(x) \stackrel{?!}{=} \sum_{j=0}^{n} f_j \cdot \ell_j(x);$$
$$\ell_j = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

Newton-Basis:
$$P(f|x_0, .., x_n)(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i\omega_i(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i \prod_{p=0}^{j} (x - x_p)$$
$b_k = f_{[x_0, .., x_k]}$
$f_{[x_r, .., x_s]} = \left(f_{[x_{r+1}, .., x_s]} - f_{[x_r, .., x_{s-1}]}\right) / (x_r - x_s)$
$$\omega_j(x) = \prod_{i=0}^{j} (x - x_i), \omega_0(x) = 1$$

Algorithmus: **Horner-Schema**
$p = b_n$
for $k = n - 1, .., 1, 0$ **do**
$p = b_n + (x - x_k) \cdot p$
end for

Abschätzung;
Satz: Seien $x_0, .., x_n$ Paarweise unterschiedliche Stützstellen, $x_i \in [a, b]$ und $f \in C^{n+1}([a, b])$.
Dann gilt für $x \in [a, b]$
$$|f(x) - P(f|x_0, .., x_n)(x)| \leq |\omega_{n+1}| \max_{z \in [a,b]} \frac{\left|f^{(n+1)}(z)\right|}{(n+1)!}$$

	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\cot(\alpha)$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0