Sommersemester 2019
Prof. Dr. Frank Haußer

BEUTH HOCHSCHULE FÜR TECHNIK BERLIN
University of Applied Sciences

Polynominterpolation (1)

letzte Änderung: 20. Juni 2019
Ausgabe: 20. Juni 2019

1. Aufgabe: Beispiel Polynominterpolation

Berechnen Sie das kubische Interpolationspolynom zu den Stützpunkten $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$

(a) in der Potenzform (Monome als Basis)

(b) in der Lagrange-Darstellung (Lagrange-Fundamentalpolynome als Basis).

2. Aufgabe: Polynominterpolation als lineare Abbildung

Es seien $n + 1$ Stützstellen (Knoten) $x_i \in \mathbb{R}$ gegeben mit $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$ und es sei Π_n der Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich n. Überzeugen Sie sich davon, dass die Polynominterpolation, d.h. die Abbildung

$$\begin{aligned} P(\,\cdot\,|x_0, \ldots, x_n) : C[a,b] &\longrightarrow \Pi_n, \\ f &\longmapsto P(f|x_0, x_1, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

die jeder auf dem Intervall $[a, b]$ stetigen Funktion f das eindeutige Interpolationsplynom $P \in \Pi_n$ zu den Stützpunkten $(x_i, f(x_i))$ zuordnet, eine lineare Abbildung ist. Welchen Rang hat diese lineare Abbildung (Begründung)? Geben Sie auch den Kern und das Bild dieser Abbildung an.

3. Aufgabe: Lagrange-Fundamentalpoylnome

(a) Plotten Sie für $n = 4$ die Lagrange-Fundamentalpolynome zu den äquidistanten Stützstellen

$$x_i = -1 + 2i/n, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

in dem Intervall $[-1, 1]$ in ein Schaubild.

(b) Wählen Sie jetzt zum Vergleich die sogenannten Tschebyscheff-Knoten

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

(c) Vergleichen Sie die entsprechenden Fundamentalpolynome für $n = 10$.

(Tip: Implementieren Sie zunächst eine MATLAB-Funktion `function y = lagrangePolynom(j, knoten, x)`, der ein Vektor `knoten` mit den Stützstellen übergeben wird und die die Auswertung des j-ten Fundamentalpolynoms l_j an der Stelle x zurückliefert. Benutzen Sie in dieser Funktion `.*` und nicht `*` ... .)

4. Aufgabe:

Behauptung: *Es reicht, das Interpolationsproblem auf dem Intervall* $[-1, 1]$ *zu untersuchen, bzw. zu verstehen*. Diskutieren Sie: Warum sollte das so sein? Was soll das heißen?

(Tipp: Bestimmen Sie eine einfache Transformation, die das Intervall $[a, b]$ auf das Intervall $[-1, 1]$ abbildet ... .)

5. Aufgabe: Newtonsche Interpolationsformel

Gegeben sei die Wertetabelle

i	0	1	2	3
x_i	1	3	4	6
f_i	3	7	30	238

Berechnen Sie die Lagrange-Interpolationspolynome $P(f|x_0, x_1, x_2)$ und $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$ in der Newtonschen Darstellung mit Hilfe des Schemas der dividierten Differenzen.

6. Aufgabe: Rekursionsformel für die Berechnung der dividierten Differenzen

Beweisen Sie die folgende Rekursionsformel aus der Vorlesung ($r < s$)

$$f_{[x_r,\dots,x_s]} = \frac{f_{[x_{r+1},\dots,x_s]} - f_{[x_r,\dots,x_{s-1}]}}{x_s - x_r}.$$

(Tipp: Setzen Sie im Lemma von Aitken die Polynome auf der linken und auf der rechten Seite in der Newton-Darstellung ein und vergleichen Sie die führenden Koeffizienten, d.h. die Koeffizienten vor dem Term x^{s-r}, wenn man die Basis der Monome wählen würde. Machen Sie sich dazu klar, dass z.B. für das Polynom $P(f|x_0, \dots, x_n)$ der führende Koeffizient gerade die dividierte Differenz $f_{[x_0,\dots,x_n]}$ ist.)

Satz 1 (Lemma von Aitken) *Für das Interpolationspolynom $P(f|x_r, \dots, x_s)$, $r < s$, gilt die Rekursionsformel*

$$P(f|x_r, \dots, x_s)(x) = \frac{x - x_r}{x_s - x_r} P(f|x_{r+1}, \dots, x_s)(x) + \frac{x_s - x}{x_s - x_r} P(f|x_r, \dots, x_{s-1})(x)$$

7. Aufgabe: Fehlerabschätzung bei der Polynominterpolation

Die Funktion

$$f(x) = 2\sin(3\pi x)$$

soll polynomial interpoliert werden zu den Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{12}$, $x_2 = \frac{1}{6}$.

(a) Berechnen Sie das Interpolationspolynom in der Newton-Darstellung und werten Sie es an der Stelle $x = \frac{1}{24}$ aus.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für den Fehler $|f(x) - P(f|x_0, x_1, x_2)(x)|$ im Intervall $[0, \frac{1}{6}]$ an. (Bestimmen sie dazu das Maximum von $|(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)|$.)

8. Aufgabe: Fehlerabschätzung bei der Polynominterpolation

Die Funktion $\sin x$ soll im Intervall $I = [0, \pi/2]$ äquidistant tabelliert werden. Wieviele Stützstellen benötigen Sie, damit der Interpolationsfehler für jedes $x \in I$ kleiner als $\frac{1}{2}10^{-4}$ ist (also auf vier Nachkommastellen genau), bei

(a) linearer Interpolation (jeweils mit den zwei nächstgelegenen Stützstellen)

(b) kubischer Interpolation (jeweils mit den 4 nächstgelegenen Stützstellen).