Probeaufgaben/ Klausurvorbereitung

Einige typische Aufgabenstellungen:

- Übungszettel 1 – 5.
- Gegeben sei die folgende Modellfunktion: ... und eine Wertetabelle. Formulieren Sie das (lineare/nichtlineare) Ausgleichsproblem zur Bestimmung der Parameter α, β nach der Methode der kleinsten Quadrate.
- Die Matrix A habe die folgende SVD: ... . Geben Sie die Pseudo-Inverse von A an. Berechnen Sie die Lösung x^* mit minimaler euklidischer Norm des Ausgleichsproblems $\|Ax-b\|_2 = \min$.
- Gegeben Sei die Funktion $F(x)$: .... Berechnen Sie einen Iterationsschritt für das Gauß-Newton-Verfahren zur Lösung des Minimierungsproblems $\|F(x)\|_2 = \min$. Warum konvergiert das Gauß-Newton-Verfahren im Allgemeinen nicht quadratisch, im Gegensatz zum Newton-Verfahren ?
- Es sei $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Kann man das Gauss-Newton-Verfahren zur Lösung des Nullstellenproblems $F(x) = 0$ benutzen?
- Berechnen Sie das kubische Lagrange-Polynom zu den Werten ... . Berechnen Sie das kubische Hermite-Polynom zu ... . Maximaler Interpolationsfehler auf dem Intervall ... ?
- Wieso nimmt man zu einer besseren Approximation einer Funktion f nicht einfach Polynome mit immer höherem Grad sondern approximiert lieber stückweise polynomial?
- Gegeben sei eine Matrix $A =$ .... Führen Sie einen Schritt des QR-Verfahrens zur Bestimmung der Eigenwerte durch. (die QR-Zerlegung von A sei bereits berechnet: $A = QR = ...$).
- Erklären Sie kurz: Wie kann eine symmetrische Matrix mit Hilfe von Householder-Reflexionen auf Tridiagonalgestalt gebracht werden.

Ein paar Übungsaufgaben:

Aufgabe 1:

(a) Berechnen Sie das kubische Interpolationspolynom in der Newtondarstellung mit äquidistanten Stützstellen im Intervall $[0, 3\pi/2]$, für die Funktion

$$f(x) = \cos(x)$$

(b) Skizzieren Sie die Funktion zusammen mit dem Interpolationspolynom in einem Schaubild.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, dass beim QR-Verfahren mit Spektralverschiebung die in jedem Iterationsschritt k berechneten Matrizen A_k ähnlich zu A sind.

Aufgabe 3:

Berechnen Sie das Polynom $p(x)$ kleinsten Grades, das die Gleichungen $p(1) = 2$, $p(3) = -6$, $p(4) = 5$ erfüllt

(a) in der Monom-Basis

(b) in der Newtondarstellung

(c) in der Basis der Lagrange-Fundamentalpolynome

Aufgabe 4:

Gegeben sei eine Funktion

$$f(x) = a\big(-\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{3}{2}x + 1\big) + b\big(-2x^2 + 7x - 5\big)$$

Die Parameter a und b sollen nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate so bestimmt werden, dass die Wertetabelle

x_i	0	1	2
f_i	2	-11	-5

möglichst gut approximiert wird. Formulieren Sie das lineare Ausgleichsproblem.

Aufgabe 5:

Betrachten Sie die Matrix A mit der folgenden QR-Zerlegung

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Lösung des linearen Ausgleichsproblems $\|Ax - b\|_2 = \min$ mit $b = (1, 1, 2)^T$. Wie groß ist die minimale 2-Norm des Residuums? Wie groß ist die Summe der Fehlerquadrate (:-)) ?

Aufgabe 6:

Es seien $\lambda_1 \neq \lambda_2$ zwei Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit zugehörigen Eigenvektoren v_1 und v_2. Zeigen Sie, dass v_1 und v_2 linear unabhängig sind.

Aufgabe 7:

Gegeben sei die Matrix

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & 14 & 22 \\ 14 & 8 & -8 \\ 22 & -8 & -10 \end{pmatrix}$$

Das Spektrum dieser Matrix ist $\sigma(A) = \{1, 2, -4\}$. Welchen dieser Eigenwerte von A liefert die inverse Vektoriteration mit einer Spektralverschiebung $\mu = 3$ (d.h. also bei Übergang zu $A - \mu I$) ? Führen Sie einen Schritt der inversen Vektoriteration mit dieser Spektralverschiebung und mit dem Startvektor $x^{(0)} = (2, 2, 1)^T$ durch (Vorsicht, hässliche Rechnung aber glattes Ergebnis). (Was sagt Ihnen das Ergebnis :-) ?).

Aufgabe 8:

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär, $b \in \mathbb{R}^n$. Begründen sie, warum die Lösung des linearen Ausgleichsproblem

$$\|Ax - b\| = \min$$

genau die Lösung des LGSs $Ax = b$ ist.

Aufgabe 9:

Leiten Sie die Methode der Lösung eines linearen Ausgleichsproblems mit Hilfe der QR-Zerlegung her. Warum muss die Matrix A maximalen Rang haben, damit das Verfahren eine eindeutige Lösung liefert?

Aufgabe 10:

Die Funktionswerte einer Funktion f seien an 4 Stellen $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$ bekannt. Geben Sie mit Hilfe der Polynominterpolation eine Appoximationsformel für die 3. Ableitung $f^{(3)}(x)$, $x \in [x_0, x_3]$ an.

Aufgabe 11:

Es seien n Punkte (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ in der Ebene gegeben. Sie wollen einen Kreis zeichnen, so daß alle n Punkte möglichst nahe an der Kreislinie liegen.

(i) Formulieren Sie diese Aufgabe als nichtlineares Ausgleichsproblem im Sinne der Minimierung der Fehlerquadrate.

(ii) Geben Sie die Linearisierung für das Gauß-Newton-Verfahren an, d.h. formulieren Sie das lineare Ausgleichsproblem, das in jedem Iterationsschritt gelöst werden muss.