Singulärwertzerlegung

letzte Änderung: 16. Mai 2019
Ausgabe: 16. Mai 2019

1. Aufgabe: Diagonalisierung

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ habe n Eigenwerte λ_i, $i = 1,\dots n$ mit zugehörigen Eigenvektoren $v_i \in \mathbb{R}^n$, d.h. es gelte

$$Av_i = \lambda v_i, \quad i = 1,\dots n$$

(i) Es sei $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrix, deren i-te Spalte den i-ten Eigenvektor v_i von A enthält und $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die aus den Eigenwerten λ_i von A gebildete Diagonalmatrix, d.h. $d_{ii} = \lambda_i$. Überzeugen Sie sich davon, dass gilt:

$$AV = VD$$

(ii) Zeigen Sie, dass Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix zu unterschiedlichen Eigenwerten stets orthogonal sind, und folgern Sie daraus, dass die Eigenvektoren für symmetrische Matrizen so gewählt werden können, dass sie eine ONB bilden. Dann gilt also

$$V^T AV = D$$

(Tipp: Berechnen Sie zu zwei Eigenvektoren v_1 und v_2 das Skalarprodukt $\langle v_1, Av_2\rangle$ und benutzen Sie die Identität $\langle x, Ay\rangle = \langle A^T x, y\rangle$).

2. Aufgabe:

Es sei $A \in \mathbb{R}^{1\times 2}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $A^T A$ und von AA^T. (Zur Erinnerung: Eigenwerte sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms, und die Eigenvektoren einer Matrix B zu einem Eigenwert λ erhält man als Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems $B - \lambda\mathbb{1} = 0$).

3. Aufgabe: Lösen des allgemeinen linearen Ausgleichsproblems mit SVD

(a) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion, die mit Hilfe der Singulärwertzerlegung die Lösung des allgemeinen Ausgleichsproblems zurückliefert (d.h. also die Lösung x^* des Ausgleichproblems mit minimaler Euklidischer Norm). Übergeben wird der Funktion die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und die rechte Seite $b \in \mathbb{R}^m$. Benutzen Sie für die Berechnung der Singulärwertzerlegung die Matlab-Funktion `svd` und zur Berechnung von x^* die Formel

$$x^* = \sum_{i=1}^{r} \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i.$$

Dabei soll r so gewählt werden, dass gilt:

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_1} \geq \sqrt{m\,n}\,\mathtt{eps} > \frac{\sigma_{r+1}}{\sigma_1}.$$

(Ein Singulärwert σ_k wird also als 0 angesehen, falls gilt: $\frac{\sigma_k}{\sigma_1} < \sqrt{m\,n}\,\mathtt{eps}$). Warum ist diese Wahl sinnvoll?

(b) Testen Sie die Funktion an einem einfachen Beispiel (siehe Beispiel aus der Vorlesung) und an

$$A = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 16 & 52 & -80 \\ 44 & 80 & 32 \\ -9 & -36 & 72 \\ -16 & -16 & -64 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Aufgabe: Berechnung der Singulärwertzerlegung

(a) Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie für $b = (3,3)^T$ die Lösung des linearen Ausgleichsproblems

$$\|b - Ax\|_2 = \min$$

(b) Bestimmen Sie die Singulärwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Aufgabe: Pseudoinverse

(a) Berechnen Sie die Pseudoinverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie für $b = (3,3,3)^T$ die Lösung des linearen Ausgleichsproblems

$$\|b - Ax\|_2 = \min$$

(b) Zeigen Sie, dass für die Pseudoinverse A^+ einer Matrix $A \in R^{m \times n}$ gilt

(i) AA^+ ist die orthogonale Projektion auf $\mathrm{Bild}(A) \subset \mathbb{R}^m$

(ii) A^+A ist die orthogonale Projektion auf $\mathrm{Kern}(A)^\perp \subset \mathbb{R}^n$

Beachten Sie, dass eine lineare Abbildung $P : V \to U \subset V$ genau dann die orthogonale Projektion auf den Unterraum U eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraumes V ist, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(i) P wirkt auf U wie die Identität, d.h.

$$P(u) = u,\ \forall u \in U.$$

(ii) Der Vektor $v_\perp := v - P(v)$ ist orthogonal zu dem Unterraum U. Es gilt also für alle $v \in V$:

$$v = P(v) + v_\perp, \quad \text{mit } \langle v_\perp, u\rangle = 0, \forall u \in U$$