1. Übung

1.1. Aufgabe

$$b \in \left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} | x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \tag{1}$$

Da b aber eben nicht Element dieser Menge ist, gibt es keine Lösung. Man möchte, dass $Ax^\star$ möglichst nahe daran liegt.
eine möglichst „gute“ Lösung könnte sinnvollerweise foglendes erfüllen:

$$\|Ax - b\|_2^2 \longrightarrow min$$

1.2. Aufgabe

1.2.a

$$\begin{gathered} u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ v = v_\perp + v_\| \end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} < v; u > &= < v_\perp + v_\|; u > \\ &= < v_\perp; u > + < v_\|; u > \\ &= \cancelto{0}{< v_\perp; u >} + < v_\|; u > \\ &= < v_\|; u > \end{aligned} \tag{3}$$

$$v_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$u_v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Orthogonale Projektion:

$$\begin{aligned} u \to P_u : v \mapsto v_1 \\ v \mapsto P_u(v) = \frac{< v; u >}{< u; u >} u = \frac{1}{< u; u >} u \cdot u^T v \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} v &\mapsto \frac{1}{\|u\|^2} u^T v \cdot u = y \\ y_i &= \frac{1}{\|u\|^2} u_i (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3) \\ &\stackrel{!}{=} a_{i1} v_1 + a_{i2} v_2 + a_{i3} v_3 \\ a_{ij} &= \frac{1}{\|u\|^2} u_i u_j \\ \rightsquigarrow A &= \frac{1}{\|u\|^2} u \cdot u^T \end{aligned} \tag{7}$$

$$Bild(P_u) = span\{u\} = \{\lambda u | \lambda \in \mathbb{R}\} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} Kern(P_u) &= Bild(P_u)^\perp \\ &= \{y | y \perp u\} \\ &= \{y | < u, y >= 0\} \end{aligned} \tag{9}$$

1.2.b

$$\begin{aligned} v \in V = \mathbb{R}^m \quad &; \quad u \in U = \mathbb{R}^n \\ v &\stackrel{P_u}{\mapsto} \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n \\ &\text{mit } \lambda_i = < v; u_i > \end{aligned} \tag{10}$$

$\square$

3. Aufgabe

3a

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \|b - Ax\|_2^2 \\
&= \langle\, b - Ax\,;\, b - Ax \,\rangle \\
&= \langle\, b\,;\, b - Ax \,\rangle - \langle\, Ax\,;\, b - Ax \,\rangle \\
&= \langle\, b\,;\, b \,\rangle - \langle\, b\,;\, Ax \,\rangle - \langle\, Ax\,;\, b \,\rangle + \langle\, Ax\,;\, Ax \,\rangle \\
&= \langle\, b\,;\, b \,\rangle - 2\,\langle\, b\,;\, Ax \,\rangle + \langle\, Ax\,;\, Ax \,\rangle
\end{aligned} \tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= Jacobi(f) = „-2\left\langle\, b\,;\, A\cdot\vec{1} \,\right\rangle + 2\left\langle\, Ax\,;\, A\cdot\vec{1} \,\right\rangle" = -2b^T A + 2x^T A^T A \\
f''(x) &= Hess(f) = „2\left\langle\, A\cdot\vec{1}\,;\, A\cdot\vec{1} \,\right\rangle" = 2A^T A
\end{aligned} \tag{12}
$$

Hinweis zu 1.3.b)

$B \coloneqq Hess = 2A^T \cdot A$. Daher $x^T Bx = x^T A^T Ax = ... \geq 0$. kann nur Null werden, wenn $Ax = 0 ... Kern(A)....$

1.3.b

Da $B \coloneqq 2A^T A$ ist, ist B symmetrisch.

Frage: woher kommt $x^T Ax$?
Da B die 2. Ableitung einer quadratischen Funktion, welche >= 0 ist, muss die erste Ableitung positive Steigung haben, somit ist die zweite Ableitung nicht negativ.
damit die zweite Ableitung null ist, muss die erste Ableitung

Hinweis zu 1.3.c

$f(x+h) = \langle\, b - A(x+h)\,;\, b - A(x+h) \,\rangle = ... = f(x) + f'(x)\cdot h + 1/2h' Hess_f h$.
Am Kritischen Punkt aber $f'(x) = 0$ und der dritte Term ist positiv ... .

1.3.c

$$
\begin{aligned}
f(x+h) &= \langle\, b - A(x+h)\,;\, b - A(x+h) \,\rangle \\
&= \langle\, b\,;\, b \,\rangle - 2\,\langle\, b\,;\, A(x+h) \,\rangle + \langle\, A(x+h)\,;\, A(x+h) \,\rangle \\
&= \langle\, b\,;\, b \,\rangle - 2\,\langle\, b\,;\, Ax \,\rangle - 2\,\langle\, b\,;\, Ah \,\rangle + \langle\, A(x+h)\,;\, A(x+h) \,\rangle \\
&= \langle\, b\,;\, b \,\rangle - 2\,\langle\, b\,;\, Ax \,\rangle - 2\,\langle\, b\,;\, Ah \,\rangle + \langle\, Ax\,;\, Ax \,\rangle + 2\,\langle\, Ax\,;\, Ah \,\rangle + \langle\, Ah\,;\, A \\
&= \langle\, b\,;\, b \,\rangle - 2\,\langle\, b\,;\, Ax \,\rangle + \langle\, Ax\,;\, Ax \,\rangle - 2\,\langle\, b\,;\, Ah \,\rangle + 2\,\langle\, Ax\,;\, Ah \,\rangle + \langle\, Ah\,;\, A \\
&= \langle\, b - Ax\,;\, b - Ax \,\rangle - 2\,\langle\, b\,;\, Ah \,\rangle + 2\,\langle\, Ax\,;\, Ah \,\rangle + \langle\, Ah\,;\, Ah \,\rangle \\
&= f(x) - 2\,\langle\, b\,;\, Ah \,\rangle + 2\,\langle\, Ax\,;\, Ah \,\rangle + \langle\, Ah\,;\, Ah \,\rangle \\
&= f(x) - 2b^T Ah + 2x^T A^T Ah + h^T A^T Ah \\
&= f(x) + (-2b^T A + 2x^T A^T A)h + h^T 1/2 Hess_f h \\
&= f(x) + f'(x)\cdot h + h^T 1/2 Hess_f h
\end{aligned} \tag{13}
$$

Da $f(x) = min$, da x hier ja die Lösung ist, welche f minimiert ist $f'(x) = 0$, und falls $\cancelto{0}{f'(x)\cdot h} + h^T 1/2 Hess_f h > 0$ wächst f in jede Richtung von x unabhängig von gewähltem h, somit ist x ein isoliertes Minimum von f.

Sollte es ein h geben, für welches $h^T 1/2 Hess_f h = 0$ ist ($h = \vec{0}$ ausgenommen), so ist x kein isoliertes Minimum, sondern liegt im „Bett eines Flusses", dort liegen dann alle Minima nebeneinander.

4. Aufgabe

Matlab sagt: `(A'*A)*A'*b` $= \begin{pmatrix} 15 \\ -25 \end{pmatrix}$

1.5

1.5.a

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \alpha \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \beta \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)\\
\varphi(t,\alpha,\beta) &= \alpha \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \beta \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\rightarrow A &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}1\right) & \sin\left(\frac{\pi}{3}1\right)\\ \cos\left(\frac{\pi}{4}2\right) & \sin\left(\frac{\pi}{3}2\right)\\ \cos\left(\frac{\pi}{4}3\right) & \sin\left(\frac{\pi}{3}3\right) \end{pmatrix} \qquad (14)\\
A &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 2\\ 0\\ -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

d.h. das Lineare Ausgleichsproblem, bzw. das was zu lösen ist, sieht folgendermaßen aus:

$$
\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 2\\ 0\\ -3 \end{pmatrix} \tag{15}
$$

gesucht ist $x = \begin{pmatrix} \alpha\\ \beta \end{pmatrix}$;

1.5.b

in Matlab

1.5.c

in Matlab

Notizen

Normalengleichung:

$$A^T A x = A^T b$$

2. Übung

2.1. Aufgabe

Zu zeigen:

$$A^T A x = 0 \Leftrightarrow Ax = 0 \tag{16}$$

bzw. $Rang(A) = n \overset{?}{\Leftrightarrow} Rang(A^T A) = 0$ oder auch $Kern(A) = Kern(A^T A)$ schon klar:

$$Ax = 0 \Rightarrow A^T A x = 0 \quad \checkmark \tag{17}$$

2.2. Aufgabe

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} -1 & 1\\ 2 & 4\\ -2 & -1 \end{pmatrix}\\
&= Q \cdot R\\
&\overset{\texttt{Matlab}}{=} \underbrace{1/3 \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2\\ 2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{Q} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3\\ 0 & 3\\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{18}
$$

Minimale 2-Norm des Residuums?

$$
\begin{aligned}
\|b - Ax\|_2^2 &= \left\| \underbrace{Q^T b}_{c} - Rx \right\|_2^2\\
&= \left\| \begin{pmatrix} c_1\\ c_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_1\\ \vec{0} \end{pmatrix} \cdot x \right\|_2^2\\
&= \|c_1 - R_1 x\|_2^2 + \left\| c_2 - \vec{0}x \right\|
\end{aligned} \tag{19}
$$

nun könnte für $\|c_1 - R_1 x\|_2^2$ ein x gefunden werden, da aber $\left\| c_2 \cancelto{0}{-\vec{0}x} \right\| \geq 0$ ist, kann das Residuum nur minimal $\|c_2\|_2^2$ werden.

Hier also:

$$Q^T b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (20)$$
$$c_2 = 1 \Rightarrow \|c_2\|_2^2 = 1$$

2.3. Aufgabe

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ orthogonal, $R_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obere Dreiecksmatrix und

$$Q^T A = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vec{0} \end{pmatrix} \qquad (21)$$

Zeige, R_1 ist regulär, gdw. $Rang(A) = n$.
d.h. zeige, dass $Rang(A) = n \overset{?}{\Leftrightarrow} R_1$regulär $\Leftrightarrow Rang(R_1) = n \Leftrightarrow Rang(R) = n \overset{Q\text{regulär}}{\Leftrightarrow} Rang(QR) = n \Leftrightarrow Rang(A) = n$
Da Q orthogonal, wird der Rang von A nicht geändert.

SVD

$$\begin{aligned} A &= U\Sigma V \\ A \cdot A^T u &= \lambda u \\ A^T \cdot Av &= \lambda v \end{aligned} \qquad (22)$$

Die ersten p Eigenwerte von A, A^TA und AA^T sind identisch.
Die i-ten Eigenvektoren von A^TA und respektive AA^T sind die i-ten Spalten von U und V.
Die Diagonale von Σ sind $\sigma_{ii} = \sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$

3. Übung

3.1.i Aufgabe

$$\begin{aligned} AV &= VD \\ \Rightarrow A \cdot v_i &= \lambda_i \cdot v_i \\ \Leftrightarrow A \cdot v_i &= v_i \cdot \lambda_i \end{aligned} \qquad (23)$$

d.h.

3.1.ii Aufgabe

Zu zeigen: für EW v_i von A

$$\begin{aligned} A^T = A &\Rightarrow v_i \perp v_j \quad \forall i \neq j \\ &\Leftrightarrow \langle v_i ; v_j \rangle = \vec{0} \end{aligned} \qquad (24)$$

Tipp: Berechnen Sie zu zwei Eigenvektoren v_1 und v_2 das Skalarprodukt $\langle v_1 ; Av_2 \rangle$ und benutzen Sie die Identität $\langle x ; Ax \rangle = \langle A^T x ; y \rangle$.

$$\ldots \qquad (25)$$

3.4.a Aufgabe

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ A^T A &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4 \\ &\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{Sortiere: ... } &\rightsquigarrow \\ AA^T &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad analog \\ &\Rightarrow U = V = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ D &= \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}^T \end{aligned} \qquad (26)$$

$$
\begin{aligned}
b &= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\
\rightsquigarrow Ax &= b \\
\Leftrightarrow U\Sigma V^T x &= b \\
\Leftrightarrow \Sigma V^T x &= U^T b \\
\Leftrightarrow V^T x &= \Sigma^+ U^T b \\
x &= V\Sigma^+ U^T b \\
\Leftrightarrow x &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\
x &\overset{Matlab}{=} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{27}
$$

oder alternativ einfacher:

$$
\begin{aligned}
A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{regulär}, \ & Ax = b \\
x = A^{-1}b &= V\Sigma^{-1}U^T \cdot b \\
&= \sum_{i=1}^{p=r} \frac{1}{\sigma_i} v_i \cdot \left(u_i^T b\right) \\
\Rightarrow x = 1/2 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot & \left(\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}
\tag{28}
$$

3.4.b Aufgabe

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
AA^T &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
A^TA &= \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
\det\left(AA^T - \lambda \mathbb{1}\right) &= (6-\lambda)(1-\lambda) - 1 \overset{!}{=} 0 \\
\Leftrightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 5 &= 0 \\
\Rightarrow \lambda_{1/2} &= 7/2 \pm \sqrt{\frac{7^2}{4} - 5} = 7/2 \pm \frac{\sqrt{29}}{2}
\end{aligned}
\tag{29}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(A^TA - \lambda\mathbb{1}\right) \underline{v_1} &\overset{!}{=} \underline{0} \\
\Rightarrow \begin{pmatrix} 6-\lambda_1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \begin{pmatrix} 6 - 7/2 - \frac{\sqrt{29}}{2} & -1 \\ -1 & 1 - 7/2 - \frac{\sqrt{29}}{2} \end{pmatrix} v_1 &= 0 \\
\Rightarrow \begin{pmatrix} 5/2 - \frac{\sqrt{29}}{2} & -1 \\ -1 & -5/2 - \frac{\sqrt{29}}{2} \end{pmatrix} v_1 &= 0 \\
\Rightarrow \begin{pmatrix} 5/2 - \frac{\sqrt{29}}{2} & -1 \\ -1 \cdot (5/2 - \frac{\sqrt{29}}{2}) & (-5/2 - \frac{\sqrt{29}}{2}) \cdot (5/2 - \frac{\sqrt{29}}{2}) \end{pmatrix} v_1 &= 0 \\
\overset{\text{sum}}{\Rightarrow} (-5/2 - \frac{\sqrt{29}}{2}) \cdot (5/2 - \frac{\sqrt{29}}{2}) \cdot v_{12} &= 0 \\
\Rightarrow v_{12} &= 0 \\
\Rightarrow v_1 &= \underline{0}
\end{aligned}
\tag{30}
$$