1. Übung

1.1. Aufgabe

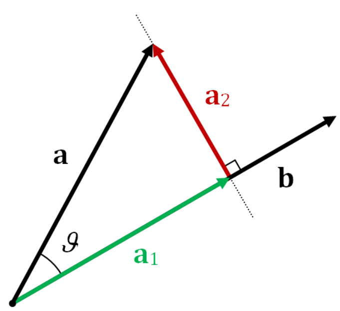
$$b \in \left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} | x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \tag{1}$$

Da b aber eben nicht Element dieser Menge ist, gibt es keine Lösung. Man möchte, dass $Ax^\star$ möglichst nahe daran liegt.
eine möglichst „gute“ Lösung könnte sinnvollerweise foglendes erfüllen:

$$\|Ax - b\|_2^2 \longrightarrow min$$

1.2. Aufgabe

1.2.a



$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$v = v_\perp + v_\parallel \tag{2}$$

$$\begin{aligned} < v; u > &=< v_\perp + v_\parallel; u > \\ &=< v_\perp; u > + < v_\parallel; u > \\ &= \cancelto{0}{< v_\perp; u >} + < v_\parallel; u > \\ &=< v_\parallel; u > \end{aligned} \tag{3}$$

$$v_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$u_v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Orthogonale Projektion:

$$\begin{aligned} u \rightarrow P_u : v \mapsto v_1 \\ v \mapsto P_u(v) = \frac{< v; u >}{< u; u >} u = \frac{1}{< u; u >} u \cdot u^T v \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} v &\mapsto \frac{1}{\|u\|^2} u^T v \cdot u = y \\ y_i &= \frac{1}{\|u\|^2} u_i (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3) \\ &\stackrel{!}{=} a_{i1} v_1 + a_{i2} v_2 + a_{i3} v_3 \\ a_{ij} &= \frac{1}{\|u\|^2} u_i u_j \\ \rightsquigarrow A &= \frac{1}{\|u\|^2} u \cdot u^T \end{aligned} \tag{7}$$

$$Bild(P_u) = span\{u\} = \{\lambda u | \lambda \in \mathbb{R}\} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} Kern(P_u) &= Bild(P_u)^{\perp} \\ &= \{y | y \perp u\} \\ &= \{y | < u, y >= 0\} \end{aligned} \tag{9}$$

1.2.b

$$\begin{aligned} v \in V = \mathbb{R}^m \quad &; \quad u \in U = \mathbb{R}^n \\ v &\overset{P_u}{\mapsto} \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n \\ \text{mit } \lambda_i &= < v; u_i > \end{aligned} \tag{10}$$

$\square$

3. Aufgabe

3a

$$\begin{aligned} f(x) &= \|b - Ax\|_2^2 \\ &= \langle b - Ax; b - Ax \rangle \\ &= \langle b; b - Ax \rangle - \langle Ax; b - Ax \rangle \\ &= \langle b; b \rangle - \langle b; Ax \rangle - \langle Ax; b \rangle + \langle Ax; Ax \rangle \\ &= \langle b; b \rangle - 2 \langle b; Ax \rangle + \langle Ax; Ax \rangle \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= Jacobi(f) = „-2\left\langle b; A\cdot\vec{1}\right\rangle + 2\left\langle Ax; A\cdot\vec{1}\right\rangle“ = -2b^TA + 2x^TA^TA \\ f''(x) &= Hess(f) = „2\left\langle A\cdot\vec{1}; A\cdot\vec{1}\right\rangle“ = 2A^TA \end{aligned} \tag{12}$$

Hinweis zu 1.3.b)

$B := Hess = 2A^T \cdot A$. Daher $x^TBx = x^TA^TAx = ... \geq 0$. kann nur Null werden, wenn $Ax = 0 ... Kern(A)$....

1.3.b

Da $B := 2A^TA$ ist, ist B symmetrisch.

B ist positiv definit, falls $x^TAx > 0$,
B ist positiv semi definit, falls $x^TAx \geq 0$
B ist negativ definit, falls $x^TAx < 0$,
B ist negativ semi definit, falls $x^TAx \leq 0$
B ist in definit, falls positive und negative Eigenwerte existieren

Frage: woher kommt x^TAx?
Da B die 2. Ableitung einer quadratischen Funktion, welche >= 0 ist, muss die erste Ableitung positive Steigung haben, somit ist die zweite Ableitung nicht negativ.
damit die zweite Ableitung null ist, muss die erste Ableitung

Hinweis zu 1.3.c

$f(x+h) = \langle b - A(x+h); b - A(x+h)\rangle = ... = f(x) + f'(x)\cdot h + 1/2h'Hess_f h$.
Am Kritischen Punkt aber $f'(x) = 0$ und der dritte Term ist positiv ... .

1.3.c

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \langle b - A(x+h); b - A(x+h)\rangle \\ &= \langle b; b\rangle - 2\langle b; A(x+h)\rangle + \langle A(x+h); A(x+h)\rangle \\ &= \langle b; b\rangle - 2\langle b; Ax\rangle - 2\langle b; Ah\rangle + \langle A(x+h); A(x+h)\rangle \\ &= \langle b; b\rangle - 2\langle b; Ax\rangle - 2\langle b; Ah\rangle + \langle Ax; Ax\rangle + 2\langle Ax; Ah\rangle + \langle Ah; Ah\rangle \\ &= \langle b; b\rangle - 2\langle b; Ax\rangle + \langle Ax; Ax\rangle - 2\langle b; Ah\rangle + 2\langle Ax; Ah\rangle + \langle Ah; Ah\rangle \\ &= \langle b - Ax; b - Ax\rangle - 2\langle b; Ah\rangle + 2\langle Ax; Ah\rangle + \langle Ah; Ah\rangle \\ &= f(x) - 2\langle b; Ah\rangle + 2\langle Ax; Ah\rangle + \langle Ah; Ah\rangle \\ &= f(x) - 2b^TAh + 2x^TA^TAh + h^TA^TAh \\ &= f(x) + (-2b^TA + 2x^TA^TA)h + h^T{}^1\!/\!_2 Hess_f h \\ &= f(x) + f'(x)\cdot h + h^T{}^1\!/\!_2 Hess_f h \end{aligned} \tag{13}$$

Da $f(x) = min$, da x hier ja die Lösung ist, welche f minimiert ist $f'(x) = 0$, und falls $\cancelto{0}{f'(x)\cdot h} + h^T{}^1\!/\!_2 Hess_f h > 0$ wächst f in jede Richtung von x unabhängig von gewähltem h, somit ist x ein isoliertes Minimum von f.

Sollte es ein h geben, für welches $h^T {}^1\!/\!_2 Hess_f h = 0$ ist ($h = \vec{0}$ ausgenommen), so ist x kein isoliertes Minimum, sondern liegt im „Bett eines Flusses", dort liegen dann alle Minima nebeneinander.

4. Aufgabe

Matlab sagt: `(A'*A)*A'*b` $= \begin{pmatrix} 15 \\ -25 \end{pmatrix}$

1.5

1.5.a

$$f(t) = \alpha \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \beta \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$$
$$\varphi(t, \alpha, \beta) = \alpha \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \beta \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$$

$$\rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}1\right) & \sin\left(\frac{\pi}{3}1\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{4}2\right) & \sin\left(\frac{\pi}{3}2\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{4}3\right) & \sin\left(\frac{\pi}{3}3\right) \end{pmatrix} \tag{14}$$
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

d.h. das Lineare Ausgleichsproblem, bzw. das was zu lösen ist, sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \tag{15}$$

gesucht ist $x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$;

1.5.b

in Matlab

1.5.c

in Matlab

Notizen

Normalengleichung:

$$A^T A x = A^T b$$

2. Übung

2.1. Aufgabe

Zu zeigen:

$$A^T Ax = 0 \Leftrightarrow Ax = 0 \tag{16}$$

bzw. $Rang(A) = n \overset{?}{\Leftrightarrow} Rang(A^T A) = 0$
schon klar:

$$Ax = 0 \Rightarrow A^T Ax = 0 \quad \checkmark \tag{17}$$

2.2. Aufgabe

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= Q \cdot R \\ &\overset{\texttt{Matlab}}{=} \underbrace{1/3 \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{Q} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{18}$$

Minimale 2-Norm des Residuums?

$$\begin{aligned} \|b - Ax\|_2^2 &= \left\| \underbrace{Q^T b}_{c} - Rx \right\|_2^2 \\ &= \left\| \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_1 \\ \vec{0} \end{pmatrix} \cdot x \right\|_2^2 \\ &= \|c_1 - R_1 x\|_2^2 + \left\| c_2 - \vec{0}x \right\| \end{aligned} \tag{19}$$

nun könnte für $\|c_1 - R_1 x\|_2^2$ ein x gefunden werden, da aber $\left\| c_2 \; \cancelto{0}{-\vec{0}x} \right\| \geq 0$ ist, kann das Residuum nur minimal $\|c_2\|_2^2$ werden.
Hier also:

$$\begin{aligned} Q^T b &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ c_2 = 1 &\Rightarrow \|c_2\|_2^2 = 1 \end{aligned} \tag{20}$$

2.3. Aufgabe

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ orthogonal, $R_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obere Dreiecksmatrix und

$$Q^T A = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vec{0} \end{pmatrix} \tag{21}$$

Zeige, R_1 ist regulär, gdw. $Rang(A) = n$.

d.h. zeige, dass $Rang(A) = n \overset{?}{\Leftrightarrow} R_1$regulär $\Leftrightarrow Rang(R_1) = n \Leftrightarrow Rang(R) = n \overset{Q\text{regulär}}{\Leftrightarrow} Rang(QR) = n \Leftrightarrow Rang(A) = n$
Da Q orthogonal, wird der Rang von A nicht geändert.