SVD

$$\begin{aligned} A &= U\Sigma V \\ A \cdot A^T u &= \lambda u \\ A^T \cdot Av &= \lambda v \end{aligned} \tag{1}$$

Die ersten p Eigenwerte von A, A^TA und AA^T sind identisch.
Die i-ten Eigenvektoren von A^TA und respektive AA^T sind die i-ten Spalten von U und V.
Die Diagonale von Σ sind $\sigma_{ii} = \sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$

3. Übung

3.1.i Aufgabe

$$\begin{aligned} AV &= VD \\ \Rightarrow A \cdot v_i &= \lambda_i \cdot v_i \\ \Leftrightarrow A \cdot v_i &= v_i \cdot \lambda_i \end{aligned} \tag{2}$$

d.h.

3.1.ii Aufgabe

Zu zeigen: für EW v_i von A

$$\begin{aligned} A^T = A \Rightarrow v_i \perp v_j \quad \forall i \neq j \\ \Leftrightarrow \langle v_i ; v_j \rangle = \vec{0} \end{aligned} \tag{3}$$

Tipp: Berechnen Sie zu zwei Eigenvektoren v_1 und v_2 das Skalarprodukt $\langle v_1 ; Av_2 \rangle$ und benutzen Sie die Identität $\langle x ; Ax \rangle = \langle A^T x ; y \rangle$.

$$\ldots \tag{4}$$

3.4.a Aufgabe

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
A^T A &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4 \\
&\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\text{Sortiere: ...} &\rightsquigarrow \\
A A^T &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \textit{analog} \\
&\Rightarrow U = V = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\
D &= \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow A &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}^T
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
b &= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\
\rightsquigarrow Ax &= b \\
\Leftrightarrow U\Sigma V^T x &= b \\
\Leftrightarrow \Sigma V^T x &= U^T b \\
\Leftrightarrow V^T x &= \Sigma^+ U^T b \\
x &= V \Sigma^+ U^T b \\
\Leftrightarrow x &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\
x &\overset{Matlab}{=} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

oder alternativ einfacher:

$$
\begin{aligned}
A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{regulär}, Ax &= b \\
x = A^{-1} b &= V \Sigma^{-1} U^T \cdot b \\
&= \sum_{i=1}^{p=r} \frac{1}{\sigma_i} v_i \cdot \left(u_i^T b \right) \\
\Rightarrow x = 1/2 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} &\cdot \left(\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

3.4.b Aufgabe

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
AA^T &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
A^TA &= \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
\det\left(AA^T - \lambda \mathbb{1}\right) &= (6-\lambda)(1-\lambda) - 1 \stackrel{!}{=} 0 \\
\Leftrightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 5 &= 0 \\
\Rightarrow \lambda_{1/2} &= 7/2 \pm \sqrt{\frac{7^2}{4} - 5} = 7/2 \pm \frac{\sqrt{29}}{2}
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\left(A^TA - \lambda \mathbb{1}\right) \underline{v_1} &\stackrel{!}{=} \underline{0} \\
\Rightarrow \begin{pmatrix} 6-\lambda_1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \begin{pmatrix} 6 - 7/2 - \frac{\sqrt{29}}{2} & -1 \\ -1 & 1 - 7/2 - \frac{\sqrt{29}}{2} \end{pmatrix} v_1 &= 0 \\
\Rightarrow \begin{pmatrix} 5/2 - \frac{\sqrt{29}}{2} & -1 \\ -1 & -5/2 - \frac{\sqrt{29}}{2} \end{pmatrix} v_1 &= 0 \\
\Rightarrow \begin{pmatrix} 5/2 - \frac{\sqrt{29}}{2} & -1 \\ -1 \cdot (5/2 - \frac{\sqrt{29}}{2}) & (-5/2 - \frac{\sqrt{29}}{2}) \cdot (5/2 - \frac{\sqrt{29}}{2}) \end{pmatrix} v_1 &= 0 \\
\stackrel{\text{sum}}{\Rightarrow} (-5/2 - \frac{\sqrt{29}}{2}) \cdot (5/2 - \frac{\sqrt{29}}{2}) \cdot v_{12} &= 0 \\
\Rightarrow v_{12} &= 0 \\
\Rightarrow v_1 &= \underline{0}
\end{aligned} \tag{9}$$