Numerische Mathematik II: 1. Aufgabenblatt

Sommersemester 2019
Prof. Dr. Frank Haußer

BEUTH HOCHSCHULE FÜR TECHNIK BERLIN
University of Applied Sciences

Lineare Ausgleichsrechnung, Einführung

letzte Änderung: 2. April 2019
Ausgabe: 3. April 2019

1. Aufgabe: Überbestimmte LGSe

Für welche rechten Seiten $b \in \mathbb{R}^3$ besitzt das LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

eine Lösung? Ist die Lösung – wenn sie existiert – eindeutig? Es sei jetzt $b = (1,\, 2,\, 0)^T$. In diesem Fall gibt es keine Lösung des obigen LGS. Überlegen Sie: Was könnte man von einer „möglichst guten" Lösung $x \in \mathbb{R}^2$ sinnvollerweise verlangen?

2. Aufgabe: Orthogonale Zerlegung

(a) Es sei $u = (1,\, 1,\, 1)^T$ und $v = (0,\, 2,\, 1)^T$. Zerlegen Sie v in eine orthogonale Summe $v = v_1 + v_2$ aus einem Vektor v_1, der parallel zu u ist, und einen Vektor v_2, der senkrecht zu u ist (bezüglich des Standardskalarproduktes auf R^3). Wie lautet allgemein die orthogonale Projektion (Projektionsabbildung)

$$P_u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$

die einen beliebigen Vektor $v \in V$ orthogonal auf den zu u parallelen Anteil projiziert? Geben Sie das Bild und den Kern von P_u an.

(b) Es sei jetzt U ein n-dimensionaler Unterraum eines m-dimensionalen reellen euklidischen Vektorraumes V mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Des weiteren sei $\{u_1, \dots, u_n\}$ eine ONB von U. Geben Sie die orthogonale Projektion von V auf U an.

3. Aufgabe: Minimum einer quadratischen konvexen Funktion

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, ein Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ und die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto f(x) = \|b - Ax\|_2^2.$$

(a) Berechnen Sie die erste Ableitung (einzeilige) Jacobi-Matrix $J_f(x) = f'(x)$ (bzw. den Gradienten $\nabla f(x) := f'(x)^T$ - ein Spaltenvektor - und die zweite Ableitung (Hesse-Matrix) $\mathrm{Hess}_f(x) = f''(x)$. Bestätigen Sie, dass die Hesse-Matrix der Funktion f gleich der Jacobimatrix der Funktion

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto g(x) = \nabla f(x)$$

ist.

(b) Zeigen Sie: Die Matrix $\mathrm{Hess}_f(x)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}^n$ symmetrisch positiv semidefinit. Sie ist genau dann symmetrisch positiv definit, wenn gilt: $m \geq n$ und $\mathrm{Rang}(A) = n$.

(c) Es sei x^* ein kritischer Punkt von f, d.h., es gelte $f'(x^*) = 0$. Zeigen Sie, dass in x^* die Funktion f in jeder Richtung wächst:

$$f(x^* + h) \geq f(x^*), \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Wann ist x^* ein isoliertes Minimum (d.h., wann gilt $\gneq$ in der obigen Ungleichung) ?

(d) Wählen Sie jetzt eine 4×2-Matrix A mit maximalem Rang und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^4$. Plotten Sie $f(x)$ in der Umgebung des Minimums. Plotten Sie auch die Isolinien von f. (Matlab-Befehle: `meshgrid, mesh, contour`, siehe Beispiel auf Moodle.) Wählen Sie zum Vergleich eine Matrix mit dem Rang eins.

4. Aufgabe: Lineare Ausgleichsrechnung

Bestimmen Sie zu dem überbestimmten linearen Gleichungssystem aus Aufgabe 1 mit Hilfe der Normalgleichungen dasjenige $x \in \mathbb{R}^2$ für welches der Vektor Ax minimalen euklidischen Abstand zu b hat. Argumentieren Sie (anschaulich, und oder formal), dass für dieses x der Vektor $b - Ax$ orthogonal auf dem Bild von A ist.

5. Aufgabe: Lineare Ausgleichsrechnung

Sie messen ein Signal, von dem Sie annehmen, daß es sich um eine Überlagerung zweier Schwingungen handelt:

$$f(t) = \alpha \cos(\tfrac{\pi}{4} t) + \beta \sin(\tfrac{\pi}{3} t).$$

Die Parameter α und β sollen aus der Meßtabelle

i	1	2	3
t_i	1	2	3
y_i	2	0	-3

nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden, d.h. so, dass die Summe der quadratischen Fehler möglichst klein ist.

(a) Formulieren Sie das entsprechende lineare Ausgleichsproblem.

(b) Lösen Sie das Problem mit Hilfe der Normalgleichungen. Plotten Sie die so bestimmte Funktion $f(t)$ zusammen mit den Meßpunkten in ein Schaubild.

(c) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion, die als Eingabeparameter Meßpunkte (in Form zweier Vektoren) erwartet und die berechneten Parameter α, β zurückliefert.