Inhaltsverzeichnis

1 Zug und Druck in Stäben 1

1.1 Spannung . . . 1
1.2 Dehnung . . . 2
1.3 Stoffgesetz . . . 3
1.4 Einzelstab . . . 4
1.5 Statisch bestimmte Stabsysteme . . . 4
1.6 Statisch unbestimmte Stabsysteme . . . 5
1.7 Zusammenfassung . . . 5

2 Spannungszustand 5

2.1 Spannungvektor und Spannungtensor . . . 5
2.2 Ebener Spannungszustand . . . 5
2.2.1 Koordinatentransformation . . . 5
2.2.2 Hauptspannungen . . . 6
2.3 Mohrscher Spannungkreis . . . 7
2.3.1 Dünnwandiger Kessel . . . 7
2.4 Gleichgewichtsbedingungen . . . 8
2.5 Zusammenfassung . . . 8

3 Verzerrungszustand, Elastizitätsgesetze 8

3.1 Verzerrungszustand . . . 8
3.2 Elastizitätsgesetz . . . 9
3.3 Festigkeitshypothesen . . . 10
3.4 Zusammenfassung . . . 11

4 Balkenbiegung 11

4.1 Einführung . . . 11
4.2 Flächenträgheitsmomente . . . 11
4.2.1 Definition . . . 11
4.2.2 Parallelverschiebung der Bezugsachsen . . . 12
4.2.3 Drehung des Bezugssystems, Hauptträgheitsmomente 12
4.3 Grundgleichungen der geraden Biegung . . . 13
4.4 Normalspannungen . . . 14
4.5 Biegelinie . . . 14

4.5.1 Differentialgleichung der Biegelinie 14
4.5.2 Einfeldbalken 15
4.5.3 Balken mit mehreren Feldern 15
4.5.4 Superposition 15
4.6 Einfluss des Schubes 15
4.6.1 Schubspannungen 15
4.6.2 Durchbiegung infolge Schub 15
4.7 Schiefe Biegung 16
4.8 Biegung und Zug/Druck 16
4.9 Kern des Querschnitts 17
4.10 Temperaturbelastung 17
4.11 Zusammenfassung 18

5 Torsion **18**
5.1 Einführung 18
5.2 Die kreiszylindrische Welle 18
5.3 Dünnwandige geschlossene Profile 20
5.4 Dünnwandige offene Profile 21
5.5 Zusammenfassung 22

6 Der Arbeitsbegriff in der Elastostatik **22**
6.1 Einleitung 22
6.2 Arbeitssatz und Formänderungsenergie 22
6.3 Das Prinzip der virtuellen Kräfte 22
6.4 Einflusszahlen und Vertauschungssätze 22
6.5 Anwendung des Arbeitssatzes auf statisch unbestimmte Systeme 22
6.6 Zusammenfassung 22

7 Knickung **22**
7.1 Verzweigung einer Gleichgewichtslage 22
7.2 Der Euler-Stab 22
7.3 Zusammenfassung 22

8 Verbundquerschnitte **22**
8.1 Einleitung 22
8.2 Zug und Druck in Stäben 22

8.3 Reine Biegung 22
8.4 Biegung und Zug/Druck 22
8.5 Zusammenfassung 22

1 Zug und Druck in Stäben

1.1 Spannung

B	vB	UB	s	vs	su	us	uvs
(A)			α		α	α	
(B)			β		β	β	
Γ	Γ	Γ	γ		γ	γ	
Δ	Δ	Δ	δ		δ	δ	
(E)			ε	ε	ϵ	ϵ	ε
(Z)			ζ		ζ	ζ	
(H)			η		η	η	
Θ	Θ	Θ	ϑ	ϑ	θ	θ	ϑ
(I)			ι		ι	ι	
(K)			κ	ϰ	κ	κ	ϰ
Λ	Λ	Λ	λ		λ	λ	
(M)			μ		μ	μ	
(N)			ν		ν	ν	
Π	Π	Π	π	ϖ	π	π	ϖ
(P)			ρ	ϱ	ρ	ρ	ϱ
Σ	Σ	Σ	σ	ς	σ	σ	ς
(T)			τ		τ	τ	
ϒ	ϒ	ϒ	υ		υ	υ	
Φ	Φ	Φ	φ	φ	ϕ	ϕ	φ
(X)			χ		χ	χ	
Ψ	Ψ	Ψ	ψ		ψ	ψ	
Ω	Ω	Ω	ω		ω	ω	

$$\boxed{\underbrace{\sigma}_{\text{Spannung}\left[\frac{N}{mm^2}\right]} = \frac{\overbrace{N}^{\text{Normalspannung}[N]}}{\underbrace{A}_{\text{Fläche}\left[mm^2\right]}}} \tag{1.1}$$

$$\boxed{\underbrace{\sigma}_{\text{Spannung}\left[\frac{N}{mm^2}\right]} = \frac{\overbrace{F}^{\text{Kraft}[N]}}{\underbrace{A}_{\text{Fläche}[mm^2]}}} \tag{1.2}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{\overbrace{\sigma_0}^{\substack{\text{Normalspannung}\\ \text{in einem Schnitt}\\ \text{Senkrecht zur Stabachse}}}}{2}(1+\cos 2\varphi), \tau = \frac{\sigma_0}{2}(\sin 2\varphi)} \tag{1.3}$$

$$\boxed{\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)}} \tag{1.4}$$

$$\boxed{A_{\mathrm{erf}} = \frac{|N|}{\sigma_{\mathrm{zul}}}} \tag{1.5}$$

1.2 Dehnung

$$\boxed{\underbrace{\varepsilon}_{\text{Dehnung}[1]} = \frac{\overbrace{\Delta\ell}^{\text{Verlängerung}[m]}}{\underbrace{\ell_0}_{\substack{\text{Ursprüngliche}\\ \text{Länge }[m]}}} = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}} \tag{1.6}$$

Örtliche (lokale Dehnung)

$$\boxed{\varepsilon(x) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}} \tag{1.7}$$

1.3 Stoffgesetz

Hooke'sches Gesetz

$$\boxed{\underbrace{E}_{\substack{\text{Elastizitätsmodul}\\ \left[\frac{N}{mm^2}\right]}} = \frac{\overbrace{\sigma}^{\text{Spannung}\left[\frac{N}{mm^2}\right]}}{\underbrace{\varepsilon}_{\text{Dehnung}[1]}}} \tag{1.8}$$

Umgestellt nach Sigma, übliche Form:

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell_0}E$$

$$\boxed{\underbrace{\varepsilon}_{\text{Dehnung}[1]} = \frac{\sigma}{E}} \tag{1.9}$$

$$\boxed{\underbrace{\varepsilon_T}_{\text{Wärmedehnung}[1]} = \underbrace{\alpha}_{\substack{\text{Thermischer Aus-}\\ \text{dehnungskoeffizient}\\ \text{(Wärmeausdehnugnskoeffizient)}\\ [1/{}^\circ\text{C}]}} \cdot \underbrace{\Delta T}_{\text{Temperaturänderung}[{}^\circ\text{C}]}} \tag{1.10}$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T} \tag{1.11}$$

$$\boxed{\sigma = E\left(\varepsilon - \alpha_T \Delta T\right)} \tag{1.12}$$

1.4 Einzelstab

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} + \underbrace{n}_{\text{Linienkraft}} = 0} \tag{1.13}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{N}{EA} + \alpha_T \Delta T} \tag{1.14}$$

$$\boxed{\Delta\ell = u(l) - u(0) = \int_0^\ell \varepsilon \mathrm{d}x} \tag{1.15}$$

$$\boxed{\Delta\ell = \int_0^\ell \left(\frac{N}{EA} + \alpha_T \Delta T\right) \mathrm{d}x} \tag{1.16}$$

$$\boxed{\Delta\ell = \frac{F\ell}{EA} + \alpha_T \Delta T \ell} \tag{1.17}$$

Für $\Delta T = 0$

$$\boxed{\Delta\ell = \frac{F\ell}{EA}} \tag{1.18}$$

Oder $F = 0$

$$\boxed{\Delta\ell = \alpha_T \Delta T \ell} \tag{1.19}$$

$$\boxed{(EAu')' = -n + (EA\alpha_t \Delta T)'} \tag{1.20a}$$

Sei in 1.20a $EA = const$ und $\Delta T = const$

$$\boxed{EAu'' = -n} \tag{1.20b}$$

1.5 Statisch bestimmte Stabsysteme

$$\boxed{\begin{aligned} u &= |\Delta\ell_1| = \frac{F\ell}{EA}\frac{1}{\tan\alpha}, \\ v &= \frac{\Delta\ell_2}{\sin\alpha} + \frac{u}{\tan\alpha} = \frac{F\ell}{EA}\frac{1+\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha\cos\alpha} \end{aligned}} \tag{1.21}$$

1.6 Statisch unbestimmte Stabsysteme

1.7 Zusammenfassung

2 Spannungszustand

2.1 Spannungvektor und Spannungtensor

$$\boxed{\boldsymbol{t} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta A} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}A}} \tag{2.1}$$

$$\boxed{\boldsymbol{t} = \tau_{yx}\boldsymbol{e_x} + \sigma_y \boldsymbol{e_y} + \tau_{yz}\boldsymbol{e_z}} \tag{2.2}$$

$$\boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}} \tag{2.3}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}} \tag{2.4}$$

2.2 Ebener Spannungszustand

2.2.1 Koordinatentransformation

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_\xi &= \sigma_x \cos^2\varphi + \sigma_y \sin^2\varphi + 2\tau_{xy} \sin\varphi \cos\varphi \\ \tau_{\xi\eta} &= -(\sigma_x - \sigma_y) \sin\varphi \cos\varphi + \tau_{xy}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \end{aligned}} \tag{2.5a}$$

$$\boxed{\sigma_\eta = \sigma_x \sin^2\varphi + \sigma_y \cos^2\varphi - 2\tau_{xy} \cos\varphi \sin\varphi} \tag{2.5b}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_\xi &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi, \\ \sigma_\eta &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi, \\ \tau_{\xi\eta} &= - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi, \end{aligned}} \tag{2.6}$$

$$\boxed{\sigma_\xi + \sigma_\eta = \sigma_x + \sigma_y} \tag{2.7}$$

2.2.2 Hauptspannungen

$$\boxed{\tan 2\varphi^* = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}} \tag{2.8}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos 2\varphi^* &= \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2\varphi^*}} &&= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \\ \sin 2\varphi^* &= \frac{\tan 2\varphi^*}{\sqrt{1+\tan^2 2\varphi^*}} &&= \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \end{aligned}} \tag{2.9}$$

$$\boxed{\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \tag{2.10}$$

$$\boxed{\tan 2\varphi^{**} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}} \tag{2.11}$$

$$\boxed{\tau_{\max} = \pm\sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2}} \tag{2.12a}$$

$$\boxed{\tau_{\max} = \pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)} \tag{2.12b}$$

$$\boxed{\sigma_M = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)} \tag{2.13}$$

2.3 Mohrscher Spannungkreis

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_\xi - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) &= \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi \\ \tau_{\xi\eta} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi \end{aligned}} \tag{2.14}$$

$$\boxed{\left[\sigma_\xi - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right]^2 + \tau_{\xi\eta}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{2.15}$$

$$\boxed{(\sigma - \sigma_M)^2 + \tau^2 = r^2} \tag{2.16}$$

$$\boxed{r^2 = \frac{1}{4}\left[(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4(\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2)\right]} \tag{2.17}$$

2.3.1 Dünnwandiger Kessel

$$\boxed{\sigma_x = \frac{1}{2}\,p\,\frac{r}{t}} \tag{2.18}$$

$$\boxed{\sigma_\varphi = p\,\frac{r}{t}} \tag{2.19}$$

$$\boxed{\sigma_t = \sigma_\varphi = \frac{1}{2}\,p\,\frac{r}{t}} \tag{2.20}$$

2.4 Gleichgewichtsbedingungen

$$\boxed{\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + f_x = 0} \tag{2.21a}$$

$$\boxed{\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0} \tag{2.21b}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z &= 0 \end{aligned}} \tag{2.22}$$

2.5 Zusammenfassung

3 Verzerrungszustand, Elastizitätsgesetze

3.1 Verzerrungszustand

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}} \tag{3.1}$$

$$\boxed{\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}} \tag{3.2}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{3.3}$$

$$\boxed{\tan 2\varphi^* = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}} \tag{3.4}$$

$$\boxed{\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right)}} \tag{3.5}$$

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},} \tag{3.6a}$$

$$\boxed{\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y},} \tag{3.6b}$$

$$\boxed{\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}} \tag{3.7}$$

3.2 Elastizitätsgesetz

$$\boxed{\varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x} \tag{3.8}$$

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right), \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right)} \tag{3.9}$$

$$\boxed{\tau_{xy} = G\gamma_{xy}} \tag{3.10}$$

$$\boxed{G = \frac{E}{2\left(1+\eta\right)}} \tag{3.11}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \end{aligned}} \tag{3.12a}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y - \nu\varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \end{aligned}} \tag{3.12b}$$

$$\boxed{\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1)} \tag{3.13}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] + \alpha_T \Delta T \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right] + \alpha_T \Delta T \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] + \alpha_T \Delta T \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}, \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \end{aligned}} \tag{3.14}$$

3.3 Festigkeitshypothesen

$$\boxed{\sigma_V \leq \sigma_{zul}} \tag{3.15}$$

$$\boxed{\sigma_V = \sigma_1} \tag{3.16}$$

$$\boxed{\sigma_V = \sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \tag{3.17}$$

$$\boxed{\sigma_V = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2}} \tag{3.18}$$

3.4 Zusammenfassung

4 Balkenbiegung

4.1 Einführung

$$\boxed{\sigma(z) = cz} \tag{4.1}$$

$$\boxed{M = \int z\sigma \, \mathrm{d}A} \tag{4.2}$$

$$\boxed{I = \int z^2 \, \mathrm{d}A} \tag{4.3}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{M}{I} z} \tag{4.4}$$

4.2 Flächenträgheitsmomente

4.2.1 Definition

Das statische Moment ist quasi Fläche × Hebelarm bezogen auf den Schwerpunkt der Fläche:

$$\boxed{S_y = \int z \mathrm{d}A, \quad S_z = \int y \mathrm{d}A} \tag{4.5}$$

$$\boxed{I_y = \int z^2 \mathrm{d}A, \quad I_z = \int y^2 \mathrm{d}A} \tag{4.6a}$$

$$\boxed{I_{yz} = I_{zy} = -\int yz \, \mathrm{d}A} \tag{4.6b}$$

$$\boxed{I_p = \int r^2 \, \mathrm{d}A = \int \left(z^2 + y^2\right) \, \mathrm{d}A = I_y + I_z} \tag{4.6c}$$

$$\boxed{i = seltsameWurzel; \text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{4.7}$$

4.2.2 Parallelverschiebung der Bezugsachsen

$$\boxed{\begin{aligned} I_{\bar{y}} &= I_y + \bar{z}_s^2 A \\ I_{\bar{z}} &= I_z + \bar{y}_s^2 A \\ I_{\bar{y}\bar{z}} &= I_{yz} - \bar{y}_s \bar{z}_s A \end{aligned}} \tag{4.13}$$

4.2.3 Drehung des Bezugssystems, Hauptträgheitsmomente

$$\boxed{\begin{aligned} I_\eta &= \frac{1}{2}\left(I_y + I_z\right) & &+\frac{1}{2}\left(I_y - I_z\right)\cos 2\varphi + I_{yz}\sin 2\varphi \\ I_\zeta &= \frac{1}{2}\left(I_y - I_z\right) & &-\frac{1}{2}(I_y - I_z)\cos 2\varphi - I_{yz}\sin 2\varphi \\ I_{\eta\zeta} &= & &-\frac{1}{2}\left(I_y - I_z\right)\sin 2\varphi + I_{yz}\cos 2\varphi \end{aligned}} \tag{4.14}$$

$$\boxed{I_\eta + I_\zeta = I_y + I_z = I_p} \tag{4.15}$$

$$\boxed{\tan 2\varphi^* = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}} \tag{4.16}$$

$$\boxed{I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}} \tag{4.17}$$

4.3 Grundgleichungen der geraden Biegung

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = -q, \quad \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = Q} \tag{4.18}$$

$$\boxed{M = \int z\sigma \,\mathrm{d}A} \tag{4.19a}$$

$$\boxed{Q = \int \tau \,\mathrm{d}A} \tag{4.19b}$$

$$\boxed{N = \int \sigma \,\mathrm{d}A} \tag{4.19c}$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}} \tag{4.20}$$

$$\boxed{\sigma = E\,\varepsilon, \quad \tau = G\,\gamma} \tag{4.21}$$

$$\boxed{\omega = \omega(x)} \tag{4.22a}$$

$$\boxed{u(x,z) = \psi(x)z} \tag{4.22b}$$

$$\boxed{\sigma = E\frac{\partial u}{\partial x} = E\psi' z} \tag{4.23a}$$

$$\boxed{\tau = G\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = G(\omega' + \psi)} \tag{4.23b}$$

$$\boxed{M = EI\psi'} \tag{4.24}$$

$$\boxed{Q = \varkappa GA(\omega' + \psi)} \tag{4.25}$$

4.4 Normalspannungen

$$\boxed{\sigma = \frac{M}{I} z} \tag{4.26}$$

$$\boxed{W = \frac{I}{|z|_{\text{max}}}} \tag{4.27}$$

Aber hier mit subscript, also $W_{\text{Achse}} = \dfrac{I_{\text{Achse}}}{|\text{andere Achse}|_{\text{max}}}$

$$\boxed{\sigma_{\text{max}} = \frac{|M|}{W}} \tag{4.28}$$

4.5 Biegelinie

4.5.1 Differentialgleichung der Biegelinie

$$\boxed{\omega' + \psi = 0} \tag{4.29}$$

$$\boxed{Q' = -q, \quad M' = Q, \quad \psi' = \frac{M}{EI}, \quad \omega' = -\psi} \tag{4.30}$$

$$\boxed{\omega'' = -\frac{M}{EI}} \tag{4.31}$$

$$\boxed{\varkappa_B = \frac{\omega''}{(1 + \omega'^2)^{3/2}}} \tag{4.32a}$$

$$\boxed{\varkappa_B \approx \omega''} \tag{4.32b}$$

$$\boxed{Q = -(EI\omega'')'} \tag{4.33}$$

$$\boxed{(EI\omega'')'' = q} \tag{4.34a}$$

$$\boxed{EI\omega^{IV} = q} \tag{4.34b}$$

4.5.2 Einfeldbalken

4.5.3 Balken mit mehreren Feldern

4.5.4 Superposition

4.6 Einfluss des Schubes

4.6.1 Schubspannungen

$$\boxed{\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{Q}{I}\zeta} \tag{4.35}$$

$$\boxed{S(z) = \int_{A^*} \zeta \, \mathrm{d}A} \tag{4.36}$$

$$\boxed{\underbrace{\tau(z)}_{N/mm^2} = \frac{\overbrace{Q}^{[N]} \; \overbrace{S(z)}^{mm^3}}{\underbrace{I}_{mm^4} \; \underbrace{b(z)}_{mm}}} \tag{4.37}$$

4.6.2 Durchbiegung infolge Schub

$$\boxed{\omega' + \psi = \frac{Q}{GA_S}} \tag{4.40}$$

$$\boxed{\omega_s' = \frac{Q}{GA_S}} \tag{4.41}$$

$$\boxed{\omega' = \omega_B' + \omega_S'} \tag{4.42}$$

$$\boxed{\omega = \omega_B + \omega_S} \tag{4.43}$$

$$\boxed{\omega_S = \frac{F}{GA_S}x} \tag{4.44}$$

4.7 Schiefe Biegung

$$\boxed{\sigma = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y} \tag{4.45}$$

$$\boxed{\omega'' = \frac{M_y}{EI_y}, \quad \nu'' = \frac{M_z}{EI_z}} \tag{4.46}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}Q_z}{\mathrm{d}x} &= -q_z, \quad & \frac{\mathrm{d}Q_y}{\mathrm{d}x} &= -q_y \\ \frac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}x} &= Q_z, \quad & \frac{\mathrm{d}M_z}{\mathrm{d}x} &= -Q_y \end{aligned}} \tag{4.47}$$

$$\boxed{\varepsilon = -\left(\omega'' z + \nu'' y\right)} \tag{4.48}$$

$$\boxed{\sigma = -E\left(\omega'' z + \nu'' y\right)} \tag{4.49}$$

$$\boxed{M_y = \int z\sigma \,\mathrm{d}A, \quad M_z = -\int y\sigma \,\mathrm{d}A} \tag{4.50}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{4.51}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{4.52}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{4.53a}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{4.53b}$$

4.8 Biegung und Zug/Druck

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{4.54a}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{4.54b}$$

4.9 Kern des Querschnitts

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{4.55}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{4.56}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{4.57}$$

4.10 Temperaturbelastung

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{4.58}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{4.59}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{4.60}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{4.61}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{4.62}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{4.63}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{4.64}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{4.65}$$

4.11 Zusammenfassung

5 Torsion

5.1 Einführung

5.2 Die kreiszylindrische Welle

$$\boxed{r\,\mathrm{d}\vartheta = \gamma\,\mathrm{d}x \rightarrow \gamma = r\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}x}} \tag{5.1}$$

Man nennt die Verdrehung pro Längeneinheit $\mathrm{d}\vartheta = \mathrm{d}x$ manchmal auch Verwindung $\varkappa_T$.

$$\boxed{\tau = Gr\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}x} = Gr\vartheta'} \tag{5.2}$$

$$\boxed{M_T = \int r\vartheta\,\mathrm{d}A} \tag{5.3}$$

$$\boxed{M_T = G\vartheta' \int r^2\,\mathrm{d}A = G\vartheta' I_p} \tag{5.4}$$

$$\int$$

$\int$

$$\boxed{GI_T\,\vartheta' = M_T} \tag{5.5}$$

Die Größe GI_T heißt Torsionssteifigkeit.

$$\boxed{M_T = M_x} \tag{5.6}$$

$$\boxed{\vartheta_l = \frac{M_T\,l}{GI_T}} \tag{5.7}$$

$$\boxed{\tau = \frac{M_T}{I_T}r} \tag{5.8}$$

Der Größtwert tritt am Rand $r = R$ auf: $\tau_{\max} = (M_T / I_T)\, R$. Um die Analogie zur Biegung herzustellen, führen wir ein *Torsionswiderstandsmoment* W_T ein:

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{M_T}{W_T}} \tag{5.9}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{5.10}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{5.11}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{5.12}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{5.13}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{5.14}$$

5.3 Dünnwandige geschlossene Profile

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{5.15}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{5.16}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{5.17}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{5.18}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{5.19}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{5.20}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{5.21}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{5.22}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{5.23}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{5.24}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{5.25}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{5.26}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{5.27}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{5.28}$$

5.4 Dünnwandige offene Profile

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{5.29}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{5.30}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{5.31}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{5.32}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{5.33}$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \tag{5.34}$$

5.5 Zusammenfassung

6 Der Arbeitsbegriff in der Elastostatik

6.1 Einleitung

6.2 Arbeitssatz und Formänderungsenergie

6.3 Das Prinzip der virtuellen Kräfte

6.4 Einflusszahlen und Vertauschungssätze

6.5 Anwendung des Arbeitssatzes auf statisch unbestimmte Systeme

6.6 Zusammenfassung

7 Knickung

7.1 Verzweigung einer Gleichgewichtslage

7.2 Der Euler-Stab

7.3 Zusammenfassung

8 Verbundquerschnitte

8.1 Einleitung

8.2 Zug und Druck in Stäben

8.3 Reine Biegung

8.4 Biegung und Zug/Druck

8.5 Zusammenfassung