

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zug und Druck in Stäben</b>	<b>1</b>
1.1	Spannung . . . . .	1
1.2	Dehnung . . . . .	2
1.3	Stoffgesetz . . . . .	2
1.4	Einzelstab . . . . .	3
1.5	Statisch bestimmte Stabsysteme . . . . .	3
1.6	Statisch unbestimmte Stabsysteme . . . . .	4
1.7	Zusammenfassung . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Spannungszustand</b>	<b>4</b>
2.1	Spannungvektor und Spannungstensor . . . . .	4
2.2	Ebener Spannungszustand . . . . .	4
2.2.1	Koordinatentransformation . . . . .	4
2.2.2	Hauptspannungen . . . . .	5
2.3	Mohrscher Spannungskreis . . . . .	6
2.3.1	Dünnwandiger Kessel . . . . .	6
2.4	Gleichgewichtsbedingungen . . . . .	7
2.5	Zusammenfassung . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Verzerrungszustand, Elastizitätsgesetze</b>	<b>7</b>
3.1	Verzerrungszustand . . . . .	7
3.2	Elastizitätsgesetz . . . . .	8
3.3	Festigkeitshypothesen . . . . .	9
3.4	Zusammenfassung . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Balkenbiegung</b>	<b>10</b>
4.1	Einführung . . . . .	10
4.2	Flächenträgheitsmomente . . . . .	10
4.2.1	Definition . . . . .	10
4.2.2	Parallelverschiebung der Bezugsachsen . . . . .	11
4.2.3	Drehung des Bezugssystems, Hauptträgheitsmomente . . . . .	11
4.3	Grundgleichungen der geraden Biegung . . . . .	12
4.4	Normalspannungen . . . . .	13
4.5	Biegelinie . . . . .	13

4.5.1	Differentialgleichung der Biegelinie . . . . .	13
4.5.2	Einfeldbalken . . . . .	14
4.5.3	Balken mit mehreren Feldern . . . . .	14
4.5.4	Superposition . . . . .	14
4.6	Einfluss des Schubes . . . . .	14
4.6.1	Schubspannungen . . . . .	14
4.6.2	Durchbiegung infolge Schub . . . . .	14
4.7	Schiefe Biegung . . . . .	15
4.8	Biegung und Zug/Druck . . . . .	15
4.9	Kern des Querschnitts . . . . .	16
4.10	Temperaturbelastung . . . . .	16
4.11	Zusammenfassung . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Torsion</b>	<b>17</b>
5.1	Einführung . . . . .	17
5.2	Die kreiszylindrische Welle . . . . .	17
5.3	Dünnwandige geschlossene Profile . . . . .	19
5.4	Dünnwandige offene Profile . . . . .	20
5.5	Zusammenfassung . . . . .	21
<b>6</b>	<b>Der Arbeitsbegriff in der Elastostatik</b>	<b>21</b>
6.1	Einleitung . . . . .	21
6.2	Arbeitssatz und Formänderungsenergie . . . . .	21
6.3	Das Prinzip der virtuellen Kräfte . . . . .	21
6.4	Einflusszahlen und Vertauschungssätze . . . . .	21
6.5	Anwendung des Arbeitssatzes auf statisch unbestimmte Systeme	21
6.6	Zusammenfassung . . . . .	21
<b>7</b>	<b>Knickung</b>	<b>21</b>
7.1	Verzweigung einer Gleichgewichtslage . . . . .	21
7.2	Der Euler-Stab . . . . .	21
7.3	Zusammenfassung . . . . .	21
<b>8</b>	<b>Verbundquerschnitte</b>	<b>21</b>
8.1	Einleitung . . . . .	21
8.2	Zug und Druck in Stäben . . . . .	21

8.3	Reine Biegung . . . . .	21
8.4	Biegung und Zug/Druck . . . . .	21
8.5	Zusammenfassung . . . . .	21

# Zug und Druck in Stäben

## 1.1 Spannung

$$\underbrace{\sigma}_{\text{Spannung}\left[\frac{N}{mm^2}\right]} = \frac{\overbrace{N}^{\text{Normalspannung}[N]}}{\underbrace{A}_{\text{Fläche}[mm^2]}} \quad (1.1)$$

$$\underbrace{\sigma}_{\text{Spannung}\left[\frac{N}{mm^2}\right]} = \frac{\overbrace{F}^{\text{Kraft}[N]}}{\underbrace{A}_{\text{Fläche}[mm^2]}} \quad (1.2)$$

$$\underbrace{\text{Normalspannung in einem Schnitt Senkrecht zur Stabachse}}_{\sigma_0} \quad (1.3)$$

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{2} (1 + \cos 2\varphi), \tau = \frac{\sigma_0}{2} (\sin 2\varphi)$$

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)} \quad (1.4)$$

$$A_{\text{erf}} = \frac{|N|}{\sigma_{\text{zul}}} \quad (1.5)$$

## 1.2 Dehnung

$$\underbrace{\varepsilon}_{\text{Dehnung[1]}} = \frac{\overbrace{\Delta \ell}^{\text{Verlängerung[m]}}}{\underbrace{\ell_0}_{\text{Ursprüngliche Länge [m]}}} = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} \quad (1.6)$$

Örtliche (lokale Dehnung)

$$\varepsilon(x) = \frac{du}{dx} \quad (1.7)$$

## 1.3 Stoffgesetz

Hooke'sches Gesetz

$$\underbrace{E}_{\substack{\text{Elastizitätsmodul} \\ \left[\frac{N}{mm^2}\right]}} = \frac{\overbrace{\sigma}^{\text{Spannung} \left[\frac{N}{mm^2}\right]}}{\underbrace{\varepsilon}_{\text{Dehnung[1]}}} \quad (1.8)$$

Umgestellt nach Sigma, übliche Form:

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell_0} E$$

$$\underbrace{\varepsilon}_{\text{Dehnung[1]}} = \frac{\sigma}{E} \quad (1.9)$$

$$\underbrace{\varepsilon_T}_{\text{Wärmedehnung[1]}} = \underbrace{\alpha}_{\substack{\text{Thermischer Aus-} \\ \text{dehnungskoeffizient} \\ \text{(Wärmeausdehnungskoeffizient)} \\ [1/^\circ\text{C}]}} \cdot \underbrace{\Delta T}_{\text{Temperaturänderung[}^\circ\text{C]}} \quad (1.10)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T \quad (1.11)$$

$$\sigma = E (\varepsilon - \alpha_T \Delta T) \quad (1.12)$$

## 1.4 Einzelstab

$$\frac{dN}{dx} + \underbrace{n}_{\text{Linienkraft}} = 0 \quad (1.13)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{N}{EA} + \alpha_T \Delta T \quad (1.14)$$

$$\Delta \ell = u(l) - u(0) = \int_0^\ell \varepsilon dx \quad (1.15)$$

$$\Delta \ell = \int_0^\ell \left( \frac{N}{EA} + \alpha_T \Delta T \right) dx \quad (1.16)$$

$$\Delta \ell = \frac{F\ell}{EA} + \alpha_T \Delta T \ell \quad (1.17)$$

Für  $\Delta T = 0$

$$\Delta \ell = \frac{F\ell}{EA} \quad (1.18)$$

Oder  $F = 0$

$$\Delta \ell = \alpha_T \Delta T \ell \quad (1.19)$$

$$(EAu')' = -n + (EA\alpha_T \Delta T)' \quad (1.20a)$$

Sei in 1.20a  $EA = \text{const}$  und  $\Delta T = \text{const}$

$$EAu'' = -n \quad (1.20b)$$

## 1.5 Statisch bestimmte Stabsysteme

$$\begin{aligned} u &= |\Delta \ell_1| = \frac{F\ell}{EA} \frac{1}{\tan \alpha}, \\ v &= \frac{\Delta \ell_2}{\sin \alpha} + \frac{u}{\tan \alpha} = \frac{F\ell}{EA} \frac{1 + \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos \alpha} \end{aligned} \quad (1.21)$$

## 1.6 Statisch unbestimmte Stabsysteme

## 1.7 Zusammenfassung

# 2 Spannungszustand

## 2.1 Spannungsvektor und Spannungstensor

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A} = \frac{d\mathbf{F}}{dA} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{t} = \tau_{yx} \mathbf{e}_x + \sigma_y \mathbf{e}_y + \tau_{yz} \mathbf{e}_z \quad (2.2)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (2.3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

## 2.2 Ebener Spannungszustand

### 2.2.1 Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} \sigma_\xi &= \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \\ \tau_{\xi\eta} &= -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \end{aligned} \quad (2.5a)$$

$$\sigma_\eta = \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi - 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \quad (2.5b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\xi &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi, \\ \sigma_\eta &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi, \\ \tau_{\xi\eta} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = \sigma_x + \sigma_y \quad (2.7)$$

**2.2.2 Hauptspannungen**

$$\boxed{\tan 2\varphi^* = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}} \quad (2.8)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos 2\varphi^* &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\varphi^*}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \\ \sin 2\varphi^* &= \frac{\tan 2\varphi^*}{\sqrt{1 + \tan^2 2\varphi^*}} = \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \end{aligned}} \quad (2.9)$$

$$\boxed{\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \quad (2.10)$$

$$\boxed{\tan 2\varphi^{**} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}} \quad (2.11)$$

$$\boxed{\tau_{\max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \quad (2.12a)$$

$$\boxed{\tau_{\max} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)} \quad (2.12b)$$

$$\boxed{\sigma_M = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)} \quad (2.13)$$



## 2.3 Mohrscher Spannungskreis

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi} - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) &= \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \\ \tau_{\xi\eta} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi\end{aligned}\quad (2.14)$$

$$\left[ \sigma_{\xi} - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \right]^2 + \tau_{\xi\eta}^2 = \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (2.15)$$

$$(\sigma - \sigma_M)^2 + \tau^2 = r^2 \quad (2.16)$$

$$r^2 = \frac{1}{4} \left[ (\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4(\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2) \right] \quad (2.17)$$

### 2.3.1 Dünnwandiger Kessel

$$\sigma_x = \frac{1}{2} p \frac{r}{t} \quad (2.18)$$

$$\sigma_{\varphi} = p \frac{r}{t} \quad (2.19)$$

$$\sigma_t = \sigma_{\varphi} = \frac{1}{2} p \frac{r}{t} \quad (2.20)$$

## 2.4 Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + f_x = 0 \quad (2.21a)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0 \quad (2.21b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

## 2.5 Zusammenfassung

# 3 Verzerrungszustand, Elastizitätsgesetze

## 3.1 Verzerrungszustand

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.1)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.2)$$

$$\text{da bin ich jetzt zu faul} \quad (3.3)$$

$$\tan 2\varphi^* = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right)^2} \quad (3.5)$$

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},} \quad (3.6a)$$

$$\boxed{\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y},} \quad (3.6b)$$

$$\boxed{\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}} \quad (3.7)$$

### 3.2 Elastizitätsgesetz

$$\boxed{\varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x} \quad (3.8)$$

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x)} \quad (3.9)$$

$$\boxed{\tau_{xy} = G \gamma_{xy}} \quad (3.10)$$

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1 + \eta)}} \quad (3.11)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{aligned}} \quad (3.12a)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y - \nu \varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \end{aligned}} \quad (3.12b)$$

$$\boxed{\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1)} \quad (3.13)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha_T \Delta T \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_z + \sigma_x)] + \alpha_T \Delta T \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha_T \Delta T \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}, \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \end{aligned}} \quad (3.14)$$

### 3.3 Festigkeitshypothesen

$$\boxed{\sigma_V \leq \sigma_{zul}} \quad (3.15)$$

$$\boxed{\sigma_V = \sigma_1} \quad (3.16)$$

$$\boxed{\sigma_V = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \quad (3.17)$$

$$\boxed{\sigma_V = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2}} \quad (3.18)$$

### 3.4 Zusammenfassung

## 4 Balkenbiegung

### 4.1 Einführung

$$\sigma(z) = cz \quad (4.1)$$

$$M = \int z\sigma \, dA \quad (4.2)$$

$$I = \int z^2 \, dA \quad (4.3)$$

$$\sigma = \frac{M}{I} z \quad (4.4)$$

### 4.2 Flächenträgheitsmomente

#### 4.2.1 Definition

Das statische Moment ist quasi Fläche  $\times$  Hebelarm bezogen auf den Schwerpunkt der Fläche:

$$S_y = \int z \, dA, \quad S_z = \int y \, dA \quad (4.5)$$

$$I_y = \int z^2 \, dA, \quad I_z = \int y^2 \, dA \quad (4.6a)$$

$$I_{yz} = I_{zy} = - \int yz \, dA \quad (4.6b)$$

$$I_p = \int r^2 \, dA = \int (z^2 + y^2) \, dA = I_y + I_z \quad (4.6c)$$

$$i = \text{seltsameWurzel}; \text{da bin ich jetzt zu faul} \quad (4.7)$$

### 4.2.2 Parallelverschiebung der Bezugsachsen

$$\begin{aligned} I_{\bar{y}} &= I_y + \bar{z}_s^2 A \\ I_{\bar{z}} &= I_z + \bar{y}_s^2 A \\ I_{\bar{y}\bar{z}} &= I_{yz} - \bar{y}_s \bar{z}_s A \end{aligned} \quad (4.13)$$

### 4.2.3 Drehung des Bezugssystems, Hauptträgheitsmomente

$$\begin{aligned} I_\eta &= \frac{1}{2} (I_y + I_z) + \frac{1}{2} (I_y - I_z) \cos 2\varphi + I_{yz} \sin 2\varphi \\ I_\zeta &= \frac{1}{2} (I_y + I_z) - \frac{1}{2} (I_y - I_z) \cos 2\varphi - I_{yz} \sin 2\varphi \\ I_{\eta\zeta} &= -\frac{1}{2} (I_y - I_z) \sin 2\varphi + I_{yz} \cos 2\varphi \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$I_\eta + I_\zeta = I_y + I_z = I_p \quad (4.15)$$

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} \quad (4.16)$$

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \quad (4.17)$$

### 4.3 Grundgleichungen der geraden Biegung

$$\frac{dQ}{dx} = -q, \quad \frac{dM}{dx} = Q \quad (4.18)$$

$$M = \int z \sigma dA \quad (4.19a)$$

$$Q = \int \tau dA \quad (4.19b)$$

$$N = \int \sigma dA \quad (4.19c)$$

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.20)$$

$$\sigma = E \varepsilon, \quad \tau = G \gamma \quad (4.21)$$

$$\omega = \omega(x) \quad (4.22a)$$

$$u(x, z) = \psi(x)z \quad (4.22b)$$

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x} = E \psi' z \quad (4.23a)$$

$$\tau = G \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = G(\omega' + \psi) \quad (4.23b)$$

$$M = EI \psi' \quad (4.24)$$

$$Q = \kappa GA(\omega' + \psi) \quad (4.25)$$

## 4.4 Normalspannungen

$$\sigma = \frac{M}{I} z \quad (4.26)$$

$$W = \frac{I}{|z|_{\max}} \quad (4.27)$$

Aber hier mit subscript, also  $W_{\text{Achse}} = \frac{I_{\text{Achse}}}{|\text{andere Achse}|_{\max}}$

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|}{W} \quad (4.28)$$

## 4.5 Biegelinie

### 4.5.1 Differentialgleichung der Biegelinie

$$\omega' + \psi = 0 \quad (4.29)$$

$$Q' = -q, \quad M' = Q, \quad \psi' = \frac{M}{EI}, \quad \omega' = -\psi \quad (4.30)$$

$$\omega'' = -\frac{M}{EI} \quad (4.31)$$

$$\kappa_B = \frac{\omega''}{(1 + \omega'^2)^{3/2}} \quad (4.32a)$$

$$\kappa_B \approx \omega'' \quad (4.32b)$$

$$Q = -(EI\omega'')' \quad (4.33)$$

$$(EI\omega'')'' = q \quad (4.34a)$$

$$EI\omega^{IV} = q \quad (4.34b)$$



**4.5.2 Einfeldbalken****4.5.3 Balken mit mehreren Feldern****4.5.4 Superposition****4.6 Einfluss des Schubes****4.6.1 Schubspannungen**

$$\boxed{\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{Q}{I} \zeta} \quad (4.35)$$

$$\boxed{S(z) = \int_{A^*} \zeta \, dA} \quad (4.36)$$

$$\boxed{\underbrace{\tau(z)}_{N/mm^2} = \frac{\overbrace{\frac{Q}{I}}^{[N] \, mm^3}}{\underbrace{\frac{S(z)}{b(z)}}_{mm^4 \, mm}}} \quad (4.37)$$

**4.6.2 Durchbiegung infolge Schub**

$$\boxed{\omega' + \psi = \frac{Q}{GA_S}} \quad (4.40)$$

$$\boxed{\omega'_s = \frac{Q}{GA_S}} \quad (4.41)$$

$$\boxed{\omega' = \omega'_B + \omega'_S} \quad (4.42)$$

$$\boxed{\omega = \omega_B + \omega_S} \quad (4.43)$$

$$\boxed{\omega_S = \frac{F}{GA_S} x} \quad (4.44)$$

## 4.7 Schiefe Biegung

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y \quad (4.45)$$

$$\omega'' = \frac{M_y}{EI_y}, \quad \nu'' = \frac{M_z}{EI_z} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ_z}{dx} &= -q_z, & \frac{dQ_y}{dx} &= -q_y \\ \frac{dM_y}{dx} &= Q_z, & \frac{dM_z}{dx} &= -Q_y \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\varepsilon = -(\omega'' z + \nu'' y) \quad (4.48)$$

$$\sigma = -E(\omega'' z + \nu'' y) \quad (4.49)$$

$$M_y = \int z \sigma \, dA, \quad M_z = - \int y \sigma \, dA \quad (4.50)$$

$$\text{da bin ich jetzt zu faul} \quad (4.51)$$

$$\text{da bin ich jetzt zu faul} \quad (4.52)$$

$$\text{da bin ich jetzt zu faul} \quad (4.53a)$$

$$\text{da bin ich jetzt zu faul} \quad (4.53b)$$

## 4.8 Biegung und Zug/Druck

$$\text{da bin ich jetzt zu faul} \quad (4.54a)$$

$$\text{da bin ich jetzt zu faul} \quad (4.54b)$$

## 4.9 Kern des Querschnitts

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \quad (4.55)$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \quad (4.56)$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \quad (4.57)$$

## 4.10 Temperaturbelastung

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \quad (4.58)$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \quad (4.59)$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \quad (4.60)$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \quad (4.61)$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \quad (4.62)$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \quad (4.63)$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \quad (4.64)$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \quad (4.65)$$

#### 4.11 Zusammenfassung

### 5 Torsion

#### 5.1 Einführung

#### 5.2 Die kreiszylindrische Welle

$$r \, d\vartheta = \gamma \, dx \rightarrow \gamma = r \frac{d\vartheta}{dx} \quad (5.1)$$

Man nennt die Verdrehung pro Längeneinheit  $d\vartheta = dx$  manchmal auch Verwindung  $\kappa_T$ .

$$\tau = Gr \frac{d\vartheta}{dx} = Gr \vartheta' \quad (5.2)$$

$$M_T = \int r \vartheta \, dA \quad (5.3)$$

$$M_T = G \vartheta' \int r^2 \, dA = G \vartheta' I_p \quad (5.4)$$

$$\int$$

$$GI_T \vartheta' = M_T \quad (5.5)$$

Die Größe  $GI_T$  heißt Torsionssteifigkeit.

$$M_T = M_x \quad (5.6)$$

$$\vartheta_l = \frac{M_T l}{GI_T} \quad (5.7)$$

$$\tau = \frac{M_T}{I_T} r \quad (5.8)$$

Der Größtwert tritt am Rand  $r = R$  auf:  $\tau_{\max} = (M_T/I_T) R$ . Um die Analogie zur Biegung herzustellen, führen wir ein *Torsionswiderstandsmoment*  $W_T$  ein:

$$\tau_{\max} = \frac{M_T}{W_T} \quad (5.9)$$

$$\text{da bin ich jetzt zu faul} \quad (5.10)$$

$$\text{da bin ich jetzt zu faul} \quad (5.11)$$

$$\text{da bin ich jetzt zu faul} \quad (5.12)$$

$$\text{da bin ich jetzt zu faul} \quad (5.13)$$

$$\text{da bin ich jetzt zu faul} \quad (5.14)$$

### 5.3 Dünnwandige geschlossene Profile

da bin ich jetzt zu faul	(5.15)
--------------------------	--------

da bin ich jetzt zu faul	(5.16)
--------------------------	--------

da bin ich jetzt zu faul	(5.17)
--------------------------	--------

da bin ich jetzt zu faul	(5.18)
--------------------------	--------

da bin ich jetzt zu faul	(5.19)
--------------------------	--------

da bin ich jetzt zu faul	(5.20)
--------------------------	--------

da bin ich jetzt zu faul	(5.21)
--------------------------	--------

da bin ich jetzt zu faul	(5.22)
--------------------------	--------

da bin ich jetzt zu faul	(5.23)
--------------------------	--------

da bin ich jetzt zu faul	(5.24)
--------------------------	--------

da bin ich jetzt zu faul	(5.25)
--------------------------	--------

da bin ich jetzt zu faul	(5.26)
--------------------------	--------

da bin ich jetzt zu faul	(5.27)
--------------------------	--------

da bin ich jetzt zu faul	(5.28)
--------------------------	--------

## 5.4 Dünnwandige offene Profile

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \quad (5.29)$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \quad (5.30)$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \quad (5.31)$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \quad (5.32)$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \quad (5.33)$$

$$\boxed{\text{da bin ich jetzt zu faul}} \quad (5.34)$$

## 5.5 Zusammenfassung

# 6 Der Arbeitsbegriff in der Elastostatik

## 6.1 Einleitung

## 6.2 Arbeitssatz und Formänderungsenergie

## 6.3 Das Prinzip der virtuellen Kräfte

## 6.4 Einflusszahlen und Vertauschungssätze

## 6.5 Anwendung des Arbeitssatzes auf statisch unbestimmte Systeme

## 6.6 Zusammenfassung

# 7 Knickung

## 7.1 Verzweigung einer Gleichgewichtslage

## 7.2 Der Euler-Stab

## 7.3 Zusammenfassung

# 8 Verbundquerschnitte

## 8.1 Einleitung

## 8.2 Zug und Druck in Stäben

## 8.3 Reine Biegung

## 8.4 Biegung und Zug/Druck

## 8.5 Zusammenfassung