Innlevering 4

TMA4105, våren 2022

Våren 2022

Innleveringsfrist: 22. april 2022, kl. 16.00.

1 La vektorfeltet **F** være definert ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^{x+y+z}(-x, y, x-y).$$

a) Vis at **F** er divergensfritt.

b) Finn to vektorpotensialer for **F**; det vil si, vektorfelter **G**, **H** som er slik at curl **G** = curl **H** = **F**. Disse skal være ulike, i den forstand at **G** − **H** *ikke* er konstant.

a) $\operatorname{div}(F) = e^{x+y+z}(-1+1+0)$

$= e^{x+y+z}(0) = \underline{\underline{0}}$

b) $\operatorname{curl} F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$

$= (-1-(0), 0-(1), 0)$

$= (-1, -1, 0) \cdot e^{x+y+z}$

Setter $G = \langle G_1, G_2, G_3 \rangle$

$\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} = F_1 = -ex^{x+y+z}$

$\frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} = F_2 = ey^{x+y+z}$

$\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = F_3 = e^{x+y+z}(x-y)$

$\operatorname{curl}(\vec{G}) = (-ex^{x+y+z}, ey^{x+y+z}, e^{x+y+z}(x-y))$

For å finne G kan vi sette G_3 til 0:

$-\frac{\partial G_2}{\partial z} = -ex^{x+y+z}$ og $\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = e^{x+y+z}(x-y)$

$\frac{\partial G_1}{\partial z} = ey^{x+y+z}$

Integrerer de to første mtp z:

$$G_2 = x\int e^{x+y+z}\,dz = xe^{x+y+z} + \underbrace{f(x,y)}_{=0}$$

$$G_1 = y\int e^{x+y+z}\,dz = ye^{x+y+z} + g(x,y)$$

Setter inn i siste:

$$\underbrace{\frac{\partial(xe^{x+y+z})}{\partial x}}_{x\left(\frac{\partial}{\partial x}(e^{x+y+z})\right)+e^{x+y+z}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x)\right)} - \frac{\partial(ye^{x+y+z})}{\partial y} = (x+1)e^{x+y+z} - (y+1)e^{x+y+z} - \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \leftarrow = 0$$

$xe^{x+y+z} + e^{x+y+z}$

$(x+1)e^{x+y+z}$

$= e^{x+y+z}(x-y)$ som stemmer bra.

$$\underline{\underline{\vec{G} = (ye^{x+y+z},\ xe^{x+y+z},\ 0)}}$$

Finne $\vec{H}$: Sette G_2 til 0

$$\frac{\partial G_3}{\partial y} = F_1 = -ex^{x+y+z} \to -x\int e^{x+y+z}\,dy = -xe^{x+y+z} + f(x,z) = G_3$$

tar integralet mtp. y (G_3)

$$\frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} = F_2 = ey^{x+y+z}$$

lar denne være inntil videre

$$-\frac{\partial G_1}{\partial y} = F_3 = e^{x+y+z}(x-y) \to$$

tar integralet av $\frac{\partial G_1}{\partial y}$ mtp. y

$$-\int (xe^{x+y+z} - ye^{x+y+z})\,dy$$

$$\to \underbrace{\int ye^{x+y+z}}_{(y-1)e^{x+y+z}+g_2(x,z)} \underbrace{-x\int e^{x+y+z}\,dy}_{=-xe^{x+y+z}+g_1(x,z)}$$

fra tidligere utregninger. slår sammen $g_1(x,z)$ og $g_2(x,z)$

$$= -(y-1)e^{x+y+z} + xe^{x+y+z} + g(x,z) = G_1$$

$$-(x-y+1)e^{x+y+z} + g(x,z)$$

$\hookrightarrow = 0$

$$\frac{\partial(-(x-y+1)e^{x+y+z})}{\partial z} - \frac{\partial(-xe^{x+y+z})}{\partial x} =$$

$$= (-x-y-1)(-e^{x+y+z}) + (x+1)(-e^{x+y+z}) =$$

$$= \underline{ey^{x+y+z}}$$

$$\underline{\underline{\vec{H} = (-(x-y+1)e^{x+y+z}, 0, -xe^{x+y+z})}}$$

2 La D være det lukkede området i $\mathbb{R}^2$ begrenset av x-aksen og kurven beskrevet av likningen $y = 1 - x^2$. Vi skriver $\mathcal{C} = \partial D$ for randen til D.

Benytt Greens teorem til å beregne linjeintegralet

$$\oint_{\mathcal{C}} (\sin(x) + y^2)\, dx + (\cos(x) - xy)\, dy,$$

når $\mathcal{C}$ er orientert i positiv omløpsretning.

(Hint: I integralet du ender opp med til slutt kan det være lurt å bruke symmetri.)

Greens teorem: $\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\sin(x) - y \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 2y$

$\iint_R -\sin(x) - 3y \; dy\, dx$ hvor $R =$ lukkede området begrenset av x-aksen og $y = 1 - x^2$

grensene til $y \in 0 \to 1 - x^2$

$x \in -1 \to 1$

$$\int_{-1}^{1} \int_{0}^{-x^2+1} -\sin(x) - 3y \; dy\, dx$$

$\int_{-1}^{1} -\sin(x)\, dx$ blir en konstant som kan flyttes ut av hele integralet

$$\int_{-1}^{1} \underbrace{-\sin(x)}_{=0} - \frac{3}{2}(1-x^2)^2\, dx$$

$\sin(x)$ er en odde funksjon, så over et symmetrisk intervall blir integralet null.

$$-\frac{3}{2}\int_{-1}^{1} (1-x^2)^2\, dx = -\frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^4 - 2x^2 + 1\, dx$$

$(1-x^2)(1-x^2)$

$1 - x^2 - x^2 + x^4$

$x^4 - 2x^2 + 1$

$$= -\frac{3}{2}\left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \underline{\underline{-\frac{8}{5}}}$$

$\boxed{3}$ La S være den delen av paraboloiden $z = 3 - x^2 - y^2$ der $z \geq 2$, og la T være legemet begrenset av S og planet $z = 2$.

a) Bestem volumet til T.

Et vektorfelt $\mathbf{F}$ er gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = (-x^2y, xy^2, 2z)$.

b) Finn verdien til flateintegralet

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS,$$

der $\hat{\mathbf{N}}$ er enhetsnormalen til S med positiv $\mathbf{k}$-komponent. Dette kan tolkes som fluksen til $\mathbf{F}$ opp gjennom flaten S.
(Hint: Legg merke til at S *ikke* er en lukket flate.)

a) bytter om til polar

$z = 3 - r^2$

$$\underbrace{3 - x^2 - y^2}_{\text{sirkel m/}r=1} = 2$$

grensene: $z: \ 2 \to 3 - r^2$

$r: \ 0 \to 1$

$\theta: \ 0 \to 2\pi$

$$2\pi \int_0^1 \int_2^{3-r^2} r \, dz \, dr \, d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^1 [rz]_2^{3-r^2} \, dr$$

$$= 2\pi \int_0^1 r(3 - r^2) - 2r \, dr$$

$3r - r^3 - 2r$

$$= 2\pi \int_0^1 r - r^3 \, dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

Volumet blir absoluttverdien av svaret, $\frac{\pi}{2}$.

b) Bruker divergensteoremet:

$\operatorname{div} F = (-2xy, 2xy, 2)$

$= 2$ (husk at div er en skalar)

Siden S ikke er en lukket flate, må vi finne fluksen ut av grunnsirkelen og trekke den fra totalfluksen.

totalfluks: $2\pi \int_0^1 \int_2^{3-r^2} 2r \, dz \, dr$

$=$ forrige integral ganget m/ 4π istedenfor

$= \underline{\pi}$

fluks gjennom grunn: $\iint F \cdot \hat{N} \, dS$ hvor $\hat{N}$ peker rett ned: $(0,0,1)$

← sirkelen ligger i $z=2$

$\iint_B (-x^2y, xy^2, 2) \cdot (0,0,-1) \, dS$

$= \iint -2 \, dS \to -2 \iint_B dS$ hvor B er en sirkel m/ $r=1$

$-2 \cdot$ arealet av sirkelen $= -2\pi$

total fluks ut av S: $\pi - (-2\pi) = \underline{\underline{3\pi}}$

4 La vektorfeltet $\mathbf{F}$ være gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y, 3x-y, z^2+xy),$$

og la $\mathcal{C}$ være skjæringskurven mellom flaten $z = \sqrt{x^2+y^2+1}$ og planet $z = \sqrt{5}$. Vi orienterer $\mathcal{C}$ mot klokken sett ovenfra.

Regn ut linjeintegralet

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

(Altså sirkulasjonen til $\mathbf{F}$ rundt $\mathcal{C}$.)

$x^2 + y^2 + 1 = 5$

$x^2 + y^2 = 4 \to$ sirkel m/ radius 2:

Bruker Stokes' teorem:

$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{curl} F \cdot \hat{N} \, dS$

hvor S = sirkelen

$\operatorname{curl} \vec{F}: \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$

$= (x-0, 0-y, 3-1)$

$= (x, y, 2)$

$\hat{N} = (0, 0, 1)$

$\text{curl}\,\vec{F} \cdot \hat{N} = 2$

$= 2 \cdot$ arealet av sirkelen $= 2 \cdot \pi \cdot (2)^2$

$= 4 \cdot 2\pi$

$= \underline{\underline{8\pi}}$