Innlevering 2
TMA4105
våren 2022

1) $f(x,y) = x^2 - 7y^2 + y^4$

a) Kritiske punkter der $\nabla f(x,y) = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -14y + 4y^3 \to y(-14 + 4y^2) = 0 \text{ for } y=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ når } x=0$$

$$-14 + 4y^2 = 0$$
$$4y^2 = 14 \to y^2 = \frac{14}{4}$$
$$y = \pm\frac{\sqrt{14}}{2}$$

$(0, \frac{\sqrt{14}}{2})$, $(0, -\frac{\sqrt{14}}{2})$, og $(0,0)$
er kandidater for kritiske punkter.

Bruker andrederiverttesten:

$$\frac{\partial f^2}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -14 + 12y^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial xy} = 0$$

$\Delta = 2(-14 + 12y^2)$ setter inn hvert av punktene

$(0,0)$: $2(-14) = -28$

$(0, \pm\frac{\sqrt{14}}{2})$: $2(-14 + 12(\pm\frac{\sqrt{14}}{2})^2) = 56$

Siden $\Delta > 0$ for $(0, \frac{\sqrt{14}}{2})$ og $(0, -\frac{\sqrt{14}}{2})$ er de enten lokale maxima eller minima.

Siden $\Delta < 0$ for $(0,0)$, er det et sadelpunkt.

Må sjekke om punktene er max eller min:

Er $\frac{\partial f^2}{\partial x^2} < 0$? $\frac{\partial f^2}{\partial x^2} = 2$, så begge punktene er lokale minima.

b) største og minste verdi for f på $4x^2+y^2 \leq 8$:

Lagrange:

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) \quad \text{hvor} \quad g(x,y) = 4x^2+y^2-8$$

sett $x=0$

$$= x^2 - 7y^2 + y^4 + 4\lambda x^2 + \lambda y^2 - 8\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 8\lambda x \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = -14y + 4y^3 + 2\lambda y \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 4x^2+y^2-8$$

Løser for λ:

$$2x + 8\lambda x = 0$$

Enten er $x=0$ eller

$$2x(1+4\lambda) = 0$$

$$1 + 4\lambda = 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{4}$$

x og y kan ikke være null samtidig.

$(0, +\sqrt{\frac{29}{8}})$ og $(0, -\sqrt{\frac{29}{8}})$

Setter inn $+\sqrt{\frac{29}{8}}$ i

$4x^2 + y^2 - 8 = 0$

får at $x = \pm\sqrt{\frac{70}{8}}$

$(\pm\frac{\sqrt{70}}{8}, \pm\sqrt{\frac{29}{8}})$

største verdi: 8

minste verdi: $-\frac{713}{64}$

Setter inn $x=0$:

$$4(0^2) + y^2 - 8 = 0$$

$$+y^2 - 8 = 0$$

$$y^2 = 8$$

$$y = \pm\sqrt{8}$$

$(0, \sqrt{8})$ og $(0, -\sqrt{8})$

Setter inn $\lambda = -\frac{1}{4}$:

$$-14y + 4y^3 + 2(-\tfrac{1}{4})y = 0$$

$$-14y + 4y^3 - \tfrac{1}{2}y = 0$$

$$y(-14 + 4y - \tfrac{1}{2}) = 0$$

$$y = 0$$

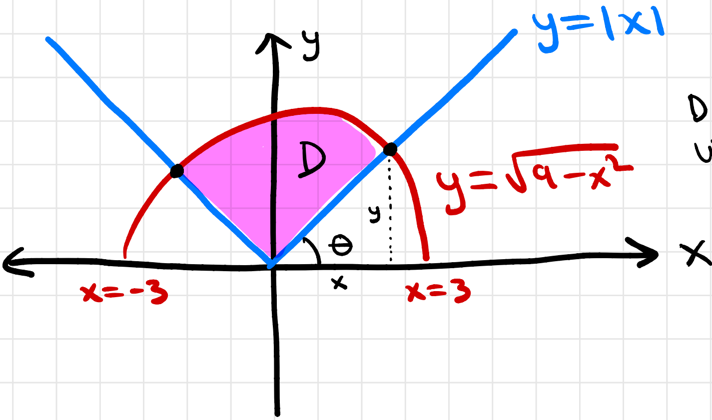
$$-14 + 4y^2 - 1/2 = 0$$

$$4y^2 = 14.5$$

$$y = +\sqrt{\frac{29}{8}}$$

2

D er avgrenset av $|x| = y$ og $y = \sqrt{9-x^2}$



D er markert i lilla.

Skjæringspunkter $\to \sqrt{9-x^2} = x \qquad 2x^2 = 9 \to x^2 = \frac{9}{2}$

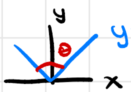
$9 - x^2 = x^2 \qquad x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$

$\hookrightarrow \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ og $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

$$\theta = \arctan \frac{x}{y} = \frac{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{\pi}{4}$$

Setter opp dobbeltintegral: avstanden fra det ene skjæringspunktet til det andre når man følger kurven til halvsirkelen blir $\theta = \frac{\pi}{2}$ fordi



y=|x| hver av linjene i y=|x| ligger normalt på hverandre, vinkel mellom: 90°

tar derfor $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$, dette blir det ytterste integralets grenser:

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int$$

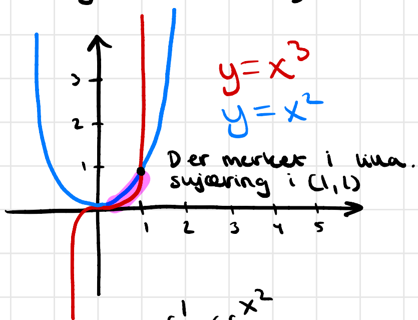
$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(\underbrace{\int_0^3 r\,dr}_{\left[\frac{1}{2}r^2\right]_{r=0}^{r=3} = \frac{9}{2}} \right) d\theta$$

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{9}{2}\,d\theta = \left[\frac{9}{2}\theta\right]_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{3\pi}{4}}$$

$$= \frac{9}{2}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{9\pi}{4}$$

3) D er avgrenset av $y=x^2$ og $y=x^3$



Finn $\iint_D (x^2-2y)\,dA$ ved å skrive det som et iterert integral.

$$\int_0^1 \left(\int_{x^3}^{x^2} (x^2 - 2y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 y - y^2\right]_{y=x^3}^{y=x^2}$$

$$= \int_0^1 (x^2(x^2) - (x^2)^2) - (x^2 \cdot x^3 - (x^3)^2)$$

$$\int_0^1 x^4 - x^4 - (x^5 - x^6)\,dx$$

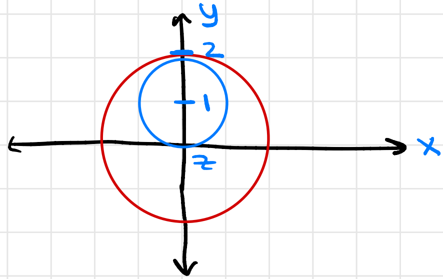
$$\int_0^1 -x^5 + x^6\,dx = \left[-\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7\right]_0^1 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{7}$$

$$= -\frac{1}{42}$$

4) $x^2+y^2+z^2=4$ (kuleflate)

$x^2+(y-1)^2=1$ (sylinder)

Sett ovenfra:



uttrykker z fra kula:

$$z^2=4-x^2-y^2$$

$$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$$

setter inn polarkoordinater

$$z=\sqrt{\underbrace{4-(r^2\cos^2\theta)-(r^2\sin^2\theta)}_{4-r^2}}$$

$z=\sqrt{4-r^2}$, så integrasjonsgrenser for dz:

$0 \to \sqrt{4-r^2}$

omgjør sylinder til polarkoordinater:

$$r^2\cos^2\theta+(r\sin\theta-1)^2=1$$

$$\underbrace{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}-2r\sin(\theta)+1=1 \quad |-1$$

$$r^2-2r\sin\theta=0$$

$$r^2=2r\sin\theta$$

$r=0$ eller $r=2\sin\theta$

integrasjonsgrensene for dr = $\int_0^{2\sin\theta}$

Løser $r=2$ og $r=2\sin\theta$

$$2\sin\theta=2$$

$$\sin\theta=1$$

$\theta=\frac{\pi}{2}$, integrasjonsgrenser for $d\theta$: 0 og $\frac{\pi}{2}$

Det endelige integralet:

$$4\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\sin\theta}\int_0^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$4\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\sin\theta}\underbrace{\int_0^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz}\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\sin\theta}[r\,z]_0^{\sqrt{4-r^2}} = \int_0^{2\sin\theta} r\sqrt{4-r^2}\,dr = -\frac{1}{2}\int_0^{2\sin\theta}\sqrt{u}\,du$$

$u = 4-r^2$
$du = -2r$

$$\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)4\int_0^{\pi/2} -\frac{\cancel{2}}{3}u^{3/2}\Big|_4^{4-4\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$\left(-\frac{1}{3}(4-4\sin^2\theta)^{3/2}\right) = \left(-\frac{1}{3}(4\cos^2\theta)^{3/2}\right)$$

$$V = -\frac{4}{3}\cdot\int_0^{\pi/2}(4\cos^2\theta)^{3/2}-(4)^{3/2}\,d\theta = -\frac{4}{3}\cdot\int_0^{\pi/2} 8\cos^3\theta - 8\,d\theta$$

$$= -\frac{32}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta - \underbrace{1\,d\theta}$$ dette blir bare $\frac{\pi}{2}$

tar $\int\cos^3\theta$ først : $= \int\cos(\theta)(1-\sin^2(\theta))\,d\theta$

$u = \sin\theta$
$du = \cos\theta$

$= \int 1-u^2\,du$

$= u - \frac{u^3}{3}\Big|_0^1$ 1 og 0 fordi nye integrasjonsgrenser

$= 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

fullstendig integral: $-\frac{32}{3}\left(\frac{2}{3}-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{32\pi}{6}-\frac{64}{9} \approx 9.64404$