Innlevering 1, TMA4105

1) $z = 2 - x^2 - y^2$

$z = x^2 - 2x + y^2 - \cancel{2y}\,4y$

$x^2 - 2x + y^2 - \cancel{2y}\,4y = 2 - x^2 - y^2$

$2x^2 + 2y^2 - 2x - 4y - 2 = 0 \quad | \div 2$

$x^2 + y^2 - x - 2y - 1 = 0$

$x^2 - x + y^2 - 2y - 1 = \cancel{0} + 2$ fullfører y-kvadrat

$\cancel{x^2 - x + (y-1)^2 = 0 \quad | + \frac{1}{4}}$

$\cancel{(x - \frac{1}{2})^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}}$

$x^2 - x + (y-1)^2 = 2$

$\underbrace{x^2 - x + \frac{1}{4}}\cancel{-\frac{1}{4}} + (y-1)^2 = 2 + \frac{1}{4}$

$(x - \frac{1}{2})^2 + (y-1)^2 = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

Sirkel m/sentrum i $(\frac{1}{2}, 1)$ og radius lik $\frac{3}{2}$

$\underline{\underline{x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos(t)}}, \quad \underline{\underline{y = \frac{3}{2}\sin(t) + 1}}$

$\cancel{z(t) = 2 - (\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos t)^2 - (\frac{3}{2}\sin t + 1)^2}$

$z(t) = \underline{\underline{((\cancel{\tfrac{1}{2}} + \frac{3}{2}\cos t) - \cancel{\tfrac{1}{2}})^2 + (\frac{3}{2}\sin t \cancel{+1} \cancel{-1})^2 = \frac{1}{4}}}$

2) $r = \sqrt{|\sin n\theta|}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$\sqrt{|\sin n\theta|} = 0 \rightarrow n\theta =$ enten $0 + 2\pi k$ eller $\pi + 2\pi k$

$n\theta = 2\pi k$

$\theta = \frac{2\pi k}{n}$ 1) eller $\theta = \frac{\pi + 2\pi k}{n}$ 2)

Vi vet at θ må ligge mellom 0 og 2π.

DVS. likningen $\theta = 2\pi \cdot \frac{k}{n}$ kan bare gjelde om

k er et tall mellom 0 og n.

For likningen $\theta = \frac{\pi + 2\pi k}{n}$ må k være et

tall mellom 0 og n−1 (ikke n, fordi da havner θ utenfor intervallet sitt.

Mengden løsninger til θ er altså (n+1) fra 1) og n fra 2)

$n+1+n = 2n+1$ løsninger for n (heltall)

Om θ er null danner ikke (n et kronblad, så må trekke fra en løsning.

Antall kronblader: $(2n+1)-1 = \underline{\underline{2n}}$

Arealet av hele kurven er mengde blader × areal til ett blad

$2n \cdot \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2$, velger $\alpha = 0$ og $\beta = \frac{\pi}{n}$ siden $\sin(n \cdot \theta)$
$= \sin(n \cdot \frac{\pi}{n}) = 0$

$$2n \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/n} |\sin n\theta| \, d\theta = n \int_0^{\pi/n} |\sin n\theta| \, d\theta$$

$$u = n\theta \qquad du = n \qquad \rightarrow n \cdot \frac{1}{n} \int_0^{\pi/n} -\cos(n\theta) \, d\theta$$

$$= \left(-\cos n\theta\right)_0^{\pi/n}$$

$$= -\cos\left(n \cdot \frac{\pi}{n}\right) - \left(-\cos(0)\right)$$

$$= 1 - (-1) = \underline{\underline{2}}$$

3)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy + x^4}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ c & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad \rightarrow \frac{2(r\cos\theta)(r\sin\theta) + r^4 \cos^4(\theta)}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2(\theta)}$$

$$= 2\, \cancel{r^2} r\sin\theta + r\cos\theta \; \frac{1 \cos\theta\sin\theta}{\cancel{r^2}} + r^4\cos^4(\theta)$$

$$= 2\cos\theta\sin\theta + r^2\cos^4(\theta) \xrightarrow[r \to 0]{} 2\cos\theta\sin\theta$$

$$= \underline{\underline{\sin 2\theta}}$$ Siden grenseverdien er avhengig av θ, så fins den ikke.

4) Formel for tangentplan:

$$z = f(a,b) + \partial_x f(a,b)(x-a) + \partial_y f(a,b)(y-b)$$

$$\partial x = -2\cos(x)\sin(x) + \cos(y) \cdot \cos(x)$$
$$= \cos(x)\left(\cos(y) - 2\sin(x)\right)$$

$$\partial y = \sin(x) \cdot \left(-\sin(y)\right) = -\sin(x)\sin(y)$$

$$z = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$z = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}y + \frac{\pi}{8}$$

$$\underline{\underline{z = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{\pi}{4}}}$$