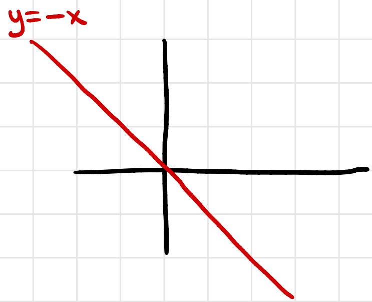
Innlevering 3
TMA 4115, våren 2022

Oppgaver til kapittel 7:



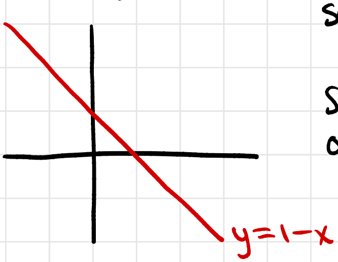
1) a) alle x, y slik at $x+y=0$
$\rightarrow y=-x$
En rett linje i xy-planet som går gjennom origo.
Sjekker addisjon og skalar:
$y=\alpha \;,\; x=(-\alpha)$

$\alpha+(-\alpha)=0$, stemmer siden linja går gjennom origo

Multiplikasjon:
$$c(x+y)=0$$
$$c(-\alpha+\alpha)=0$$
$$c(0)=0$$
$$\underline{\underline{0=0}}$$

$x+y=0$ er et underrom av $\mathbb{R}^2$.

b) $x+y=1$
$y=1-x$, også en rett linje i xy-planet som går gjennom (0, 1)



Siden funksjonen ikke går gjennom origo, inneholder den ikke nullvektoren

$y=1-x$ er ikke et underrom av $\mathbb{R}^2$.

c) Q^2 er alle rasjonale tall, som vi vet inneholder null.
Må teste addisjon og skalarmultiplikasjon:

Siden alle skalarer c skal gjøre at produktet av alle elementer i R^2 ganget m/ c i R^2, ser man at om $c =$ et irrasjonelt tall, som $\sqrt{2}$ vil ikke produktet være i Q^2.

Q^2 er dermed ikke et underrom av $\mathbb{R}^2$.

Oppgave 2

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

pivotelementer

A er allerede i rref-form, så en basis for radrommet blir:

$\{[0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1], [0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1], [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1]\}$

Dim Row A $= 3$

Basis for kolonnerommet: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Dim Col A $= 3$

Basis for nullrommet: Må se på $Ax = 0$

$x_2 + x_3 + x_7 = 0$

$x_5 + x_7 = 0$

$x_6 + x_7 = 0$

Setter frie variabler

$x_1 = s \qquad x_4 = u$

$x_3 = t \qquad x_7 = v$

$x_2 = -v - t$

$x_5 = -v$

$x_6 = -v$

$x_1 = s$
$x_2 = -v - t$
$x_3 = t$
$x_4 = u$
$x_5 = -v$
$x_6 = -v$
$x_7 = v$

$$\text{Basis Null } A = \left\{ s\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} + u\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + v\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\0\\-1\\-1\\1\end{bmatrix} \right\}$$

$\text{Dim Null } A = 4$

b) Null, Col og Row for $B = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 4\\3 & 4 & 5\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 0\\2 & 3 & 4 & 0\\3 & 4 & 5 & 0\\4 & 5 & 6 & 0\end{array}\right] \sim 4R_1 - R_4 \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 0\\2 & 3 & 4 & 0\\3 & 4 & 5 & 0\\0 & 3 & 6 & 0\end{array}\right] \sim 3R_1 - R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 0\\2 & 3 & 4 & 0\\0 & 2 & 4 & 0\\0 & 3 & 6 & 0\end{array}\right] \sim 2R_1 - R_2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 0\\0 & 1 & 2 & 0\\0 & 2 & 4 & 0\\0 & 3 & 6 & 0\end{array}\right] \; 3R_3 - 2R_4 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 0\\0 & 1 & 2 & 0\\0 & 2 & 4 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \sim 2R_2 - R_3 \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 0\\0 & 1 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \; 2R_2 - R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \sim -1R_1 \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\0 & 1 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$$\text{Basis Row } B = \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} \right\} \qquad \dim \text{Row } B = 2$$

$$\text{Basis Col } B = \left\{ \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix} \right\} \qquad \dim \text{Col } B = 2$$

For nullrommet til B: $x_1 - x_3 = 0$ velger
$x_2 + 2x_3 = 0$ $x_3 = t$

$x_1 = t$
$x_2 = -2t$
$x_3 = t$

Basis Null $A = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

dim Null $A = 1$

c) $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ om $Av = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 1(-2) + (1)(1) \\ (-1)(1) + (1)(1) \\ (-1)(1) + (1)(1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - 2 + 1 \\ -1 + 1 \\ -1 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

v ligger i nullrommet til A siden $Av = 0$.

v ligger ikke i nullrommet til B siden dimensjonene ikke egner seg for matrisemultiplikasjon.

d) om $v = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ligger i kolonnerommet til A og til kolonnerommet til B:

Sjekker Col A først: løser col(A) | v

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \leftarrow$$ nullrad som ikke har null på andre siden.

Dette systemet har ingen løsning, så v er ikke i kolonnerommet til A.

Col B:

Ser på basisen til Col B: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$

Om man trekker de
to vektorene fra hverandre: $\begin{bmatrix} 1-2 \\ 2-3 \\ 3-4 \\ 4-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = v$

v ligger i col(B).

3)

a) Basis for P_2

P_2 = alle polynomer med grad 2 på formen
$ax^2 + bx + c$

En mulig basis: $\{1, x, x^2\}$. Polynomer i P_2 er bare lineærkombinasjoner av x^2, x og 1.

b) For $1 + 2x + 3x^2$ blir koordinatene $(1, 2, 3)$.

c) Basis for P_n, $n \geq 0$: tar utgangspunkt i a)

Basis $P_n = \{1, x, x_2, x_3, \dots x_n\}$

4)

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) $u + s \cdot a_1 + t \cdot a_2$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

For å vise at planet er et underrom av $\mathbb{R}^3$, må det inneholde nullvektoren.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{array}\right] \sim 3R_1 - R_3 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

$$\sim R_1 - R_3 \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Ser at systemet ikke har en løsning, og dermed er ikke planet et underrom av $\mathbb{R}^3$.

b) $$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

sjekker om nullvektoren er med:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{array}\right] \sim 3R_3 - R_1 \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{array}\right] \sim 2R_1 - R_2 \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

$3(-1) - (-1)$

$-3 - (-1)$

$-3 + 1 = -2$

$2(-1) - (-1)$

$-2 + 1 = -1$

$$\sim -2R_2 + R_3 \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim -2R_2 + R_1 \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} = s \\ = t \\ \end{matrix}$$

$-2(-1) + (-1)$

$+2 - 1 = 1$

Planet er et underrom, $s = 1$, $t = -1$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ eller $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Col A består av disse kolonnevektorene, disse fikk jeg fra utregningen i 4b)

dim Col A = 2

Ser at $a_2 - a_1 = v$, da er v en lineærkombinasjon av kolonnevektorer og ligger dermed i Col A. Underrommet kommer fra oppg a).

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim R_2 - R_3 \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$ systemet har ikke en løsning, u ligger ikke i Col A.

5a) Ser på en 2x3-matrise som eksempel:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ antall rader < antall kolonner

Om nederste rad er en nullrad har vi plutselig ingen pivotkolonner, så dim Col A kommer ikke til å være større enn null.

b) dim Nul > 0 er sant fordi n er større enn m -> n kolonner og m rader betyr at det er m antall likninger m/ n ukjente. Antallet frie variabler blir da <u>minst</u> $(n-m)$, som er større enn null.

Oppgaver til kapittel 8:

1a) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \sin(x) + \cos(y) \\ -\sin(y) \end{bmatrix}$

Sjekker om nullvektoren gir oss samme på hver side:
$(T(0_v) = 0_w)$

$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \sin(0) + \cos(0) \\ -\sin(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, så T er ikke en lineærtransformasjon.

b) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = e^x + e^y$

Sjekker om nullvektorene blir like:

$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \Rightarrow e^0 + e^0 = 1 + 1 = 2 \neq 0$

Ikke en lineærtransformasjon.

c) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8x - 7y \\ 3z - 8x - 7y \\ 5y - 4x - 8z \\ 6y - 6x - 4z \end{bmatrix}$

her ser vi at nullvektorene blir like, så må sjekke addisjon og skalarmultiplikasjon

Skalar:

$$T\left(c \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} cx \\ cy \\ cz \end{bmatrix}\right) \rightarrow \begin{bmatrix} 8cx - 7cy \\ 3cz - 8cx - 7cy \\ 5cy - 4cx - 8cz \\ 6cy - 6cx - 4cz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(8x - 7y) \\ c(3z - 8x - 7y) \\ c(5y - 4x - 8z) \\ c(6y - 6x - 4z) \end{bmatrix}$$

$$= c \begin{bmatrix} 8x - 7y \\ 3z - 8x - 7y \\ 5y - 4x - 8z \\ 6y - 6x - 4z \end{bmatrix}$$

Oppfyller skalarmultiplikasjon:

Sjekker addisjon:

$$T\begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + T\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Det er ingen multiplikasjon eller divisjon i matrisen, og det er kun variabler av første orden. Dette betyr at f.eks:

$$7(u_1+v_1) = 7(u_1) + 7(v_1)$$

og dette kan brukes til hvert eneste ledd i matrisen.

Dette er en lineærtransformasjon.

Finne standardmatrisen til T:

sorterer variablene i x→y→z rekkefølge:

$$\begin{bmatrix} 8 & 7 & 0 \\ -8 & -7 & 3 \\ -4 & 5 & -8 \\ -6 & 6 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ -7 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 0 \\ -8 & -7 & 3 \\ -4 & 5 & -8 \\ -6 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

dette er standardmatrisen til T.

ker A = null A :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 7 & 0 & 0 \\ -8 & -7 & 3 & 0 \\ -4 & 5 & -8 & 0 \\ -6 & 6 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim R_1 + R_2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 5 & -8 & 0 \\ -6 & 6 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \frac{1}{8}R_1 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 5 & -8 & 0 \\ -6 & 6 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim 6R_1 + R_4 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 5 & -8 & 0 \\ 0 & 45/4 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim 4R_1 + R_3 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 17/2 & -8 & 0 \\ 0 & 45/4 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

R_2 og R_3 bytter plass

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7/8 & 0 & 0 \\ 0 & 17/2 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 45/4 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \frac{2}{17}R_2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -16/17 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 45/4 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \frac{1}{3}R_3 \text{ og } \frac{45}{4}R_2 - R_4$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -16/17 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{112}{17} & 0 \end{array}\right] \sim \frac{7}{8}R_2 - R_1 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{14}{17} & 0 \\ 0 & 1 & -16/17 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{112}{17} & 0 \end{array}\right]$$

ved å bruke det markerte elementet til å eliminere resten av dem:

Løsningene blir $x_1, x_2, x_3 = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\ker T = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Siden gauss ga en nullvektor, kan vi konkludere med at T er injektiv. (siden vektorene er lineært uavh.)

$$\operatorname{im} T = \operatorname{col} T = \left\{ \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ -7 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$$

d)

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \right) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

For skalar c: om $x \to x^2$, blir $cx \to c \cdot (x^2)$?

$(cx)^2 = c^2x^2 \neq cx^2$, dette er ikke en lineær transformasjon.

e) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = x + 2y + 3z + 4w$

Tester addisjon:

$$T\left(\begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \\ u_4 & v_4 \end{bmatrix}\right) = (u_1+v_1) + 2(u_2+v_2) + 3(u_3+v_3) + 4(u_4+v_4)$$
$$u_1 + v_1 + 2u_2 + 2v_2 + 3u_3 + 3v_3 + 4u_4 + 4v_4$$

$$T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}\right) = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + 4u_4$$

$$T\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}\right) = v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4v_4$$

Om man summerer de to siste likningene sammen, får man den første.

Skalarer kommer også til å stemme fordi vi bare har 1.ordens variabler.

T er en lineærtransformasjon.

Standardmatrise til A:

$x = T(e_1)$ $\quad z = T(e_3)$ $\quad \rightarrow$ satt inn i $x+2y+3z+4w$
$y = T(e_2)$ $\quad w = T(e_4)$

gir A: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

Kolonnene er lineært avhengige av hverandre i A, så T er ikke injektiv.

im T = col A = ([1]) fordi 1 er den eneste kolonnen som er uavhengig.

ker T = null A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$ gjelder bare når

$$\vec{x} = \ker T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

T er surjektiv fordi kolonnene i A er lineært avhengige.

2a) $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som speiler et plan om x-aksen: bytter fortegn på y

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

$$A = [T(e_1) \; T(e_2)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = S$$

hvor $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $R: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som roterer planet m/ $\frac{3}{4}\pi$:

Matrisen $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ beskriver en rotasjon av planet m/ θ grader.

$$A = \begin{bmatrix} \cos\frac{3\pi}{4} & -\sin\frac{3\pi}{4} \\ \sin\frac{3\pi}{4} & \cos\frac{3\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = R$$

3) $S \circ R$ og $R \circ S$

$$S \circ R = S(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(-\frac{\sqrt{2}}{2})+0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0-1(\frac{\sqrt{2}}{2}) & +\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & +\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

$$R \circ S = R(S) = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

$S \circ R$ betyr at man utfører transformasjonen R på planet først, deretter transformasjonen S. Samme prinsipp gjelder $R \circ S$.

$S \circ R$ = roterer først, så speiler man
$R \circ S$ = motsatt.

4) a) $D(p) = p'$ fordi:

fra Matematikk 1: $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
og $(cf)'(x) = c \cdot f'(x)$

Siden disse virkningene stemmer, og fordi de er det samme som å bevare skalarmultiplikasjon og addisjon, er D en lineærtransformasjon.

For $G(p) = q$ der $q(x) = x \cdot p(x)$:
sjekker addisjon og skalar:

$$G(p+s) = x(p+s) = xp(x) + x\,s(x)$$
$$= G(p) + G(s)$$

$$G(c \cdot p) = x(c\,p) = x \cdot c \cdot p(x)$$ kan trekke ut c
$$= c(x \cdot p(x)) \rightarrow c \cdot G(p)$$

G er en lineærtransformasjon.

b) ker D, ker G, im D, im G

ker D = f slik at D(f) = 0
om vi deriverer en konstant → 0
fordi om $f(x) = a \rightarrow f'(x) = 0$ dvs. null D er alle polynomer av nullte grad. = konstanter

im D inneholder alle funksjoner g slik at $D(f) = g$. Dette skjer når $D(f) = \frac{d}{dx}\int_0^x g(t)\,dt$

dvs. im D er alle polynomer som er en antiderivert.

ker G = null G = 0 fordi det ikke er noen andre skalarer det går an å multiplisere x med for å få null.

im G må inneholde x, siden transformasjonen innebærer at x er involvert. im G er da alle polynomer med x i seg.

c) D er ikke injektiv fordi ker D ≠ 0
G er injektiv fordi ker G = 0
D og G er surjektiv fordi bildet til D = hele kodomenet

d) $\underbrace{(D \circ G)}$ − $\underbrace{(G \circ D)}$

ganger et polynom m/ x og deriverer resultatet

→ deriverer et polynom og ganger resultatet m/ x

prøver $3x^2 + 2x + 2$ | $6x + 2$

$3x^3 + 2x^2 + 2x$ | $6x^2 + 2x$

$9x^2 + 4x + 2$

$9x^2 + 4x + 2 - (6x^2 + 2x)$

$3x^2 + 2x + 2$ → du ender opp m/ samme polynom du starta med.

e) Basis $P_2 = \{x^2, x, 1\} \rightarrow ax^2 + bx + c$
Basis $P_3 = \{x^3, x^2, x, 1\} \rightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d$

D_3 kommer fra å derivere $ax^3 + bx^2 + cx + d$
$D_3 = 3ax^2 + 2bx + c$ (ingen x^3)

$$G_3 = x(ax^3 + bx^2 + cx + d)$$
$$= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$$

A for D_3 blir $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 3a \\ 2b \\ c \end{bmatrix}$ for $\begin{bmatrix} x^3 \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^3 \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix}$$

For $G_3 \rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ men m/ en ekstra x: $\begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^3 \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix}$

?

5 a) Samme svar som jeg skrev i 4a) for kapittel 8.

b) Siden den deriverte til en konstant er null, og ker D = null D, vil ker D være alle konstanter.

En konstant har basis 1, og er endeligdimensjonalt.
Basis 1 fordi det spenner ut R.

dim ker D = 1 siden ker D = $\mathrm{sp}\{1\}$

c) D er surjektiv fordi bildet er hele kodomenet
(flere polynomer kan deriveres og resultere i et nytt likt polynom f.eks $4x^2+2x+1$ og $4x^2+2x+2$)