Innlevering 5
TMA4115, våren 2022

Oppgaver for kapittel 10

1 a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

$(1-\lambda)^2 - 4 = 0$
$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$
$\lambda_1 = \underline{\underline{-1}}$ og $\lambda = \underline{\underline{3}}$

Egenvektoren til $\lambda_1 = -1 \to (A + 1I_n)x = 0$

$\left[\begin{array}{cc:c} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim R_1 - R_2 \sim \left[\begin{array}{cc:c} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$\sim \frac{1}{2}R_1 \sim \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $\quad x_1 + x_2 = 0$
$\quad x_2 = x_2$

$\to$ $x_1 = -x_2$
$x_2 = x_2$ $\to \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}}$ er en egenvektor

Egenvektoren til $\lambda = 3 \to (A - 3I_n)x = 0$

$\left[\begin{array}{cc:c} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim R_1 + R_2 \sim \left[\begin{array}{cc:c} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$\frac{1}{2}R_1 \sim \left[\begin{array}{cc:c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $\quad -x_1 = -x_2$
$\quad x_2 = x_2$

$\to = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}}$ er en egenvektor.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$

$$(1-\lambda)\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$(1-\lambda)(-\lambda+\lambda^2) - 2(-2\lambda)$

$-\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 4\lambda$

$-\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda$

Løser for 0 → får at $\lambda_1 = 3$

$\lambda_2 = -1$

$\lambda_3 = 0$

Egenvektor til $\lambda_1 = 3$: Ser at matrisen vår er matrisen fra a) i R^3. Egenvektoren blir da den samme som a), men med et ekstra element lik 0:

$$\lambda_1 = 3 \rightarrow \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

Kan bruke samme argument for $\lambda_2 = -1$:

$$\lambda_2 = -1 \rightarrow \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

For $\lambda_3 = 0$: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim -2R_1 + R_2$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\sim -2R_2 + R_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$x_1 = 0$
$x_2 = 0$
$x_3 = x_3$ $\rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Egenvektoren for $\lambda_3 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}$

$\lambda^2 = 0$ når $\lambda = 0$

Egenvektor for $\lambda = 0$: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ er allerede på rref-form

x_1 er en frivariabel

$x_1 = x_1$
$x_2 = 0$ $\rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

En egenvektor: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 3 \\ -1 & 1-\lambda & -3 \\ 2 & 4 & 9-\lambda \end{bmatrix}$

$$4-\lambda \begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 4 & 9-\lambda \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 9-\lambda \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -1 & 1-\lambda \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$4-\lambda((1-\lambda)(9-\lambda)+12) - 2(-9+\lambda+6) + 3(-4-2+2\lambda)$$
$$(4-\lambda)(\lambda^2-10\lambda+21) + 18 - 2\lambda - 12 - 12 - 6 + 6\lambda$$
$$= -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 57\lambda + 72$$

$$-\lambda^3 + 14\lambda^2 - 57\lambda + 72 = 0$$
$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 11\lambda^2 - 33\lambda - 24\lambda + 72 = 0$$
$$-\lambda^2(\lambda-3) + 11\lambda(x-3) - 24(\lambda-3) = 0$$
$$(x-3)\underbrace{(-x^2+11\lambda-24)}_{=(x-3)(x-8)} = 0$$

Egenverdiene er $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 3$ og $\lambda_3 = 8$.

Egenvektor for λ_1 og $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \sim R_1 + R_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\sim 2R_1 - R_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$
$$x_2 = x_2$$
$$x_3 = x_3$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 & -2x_2 && -3x_3 \\ x_2 &= 0 & x_2 && 0 \\ x_3 &= 0 & 0 && x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egenvektorene for $\lambda = 3$: $\underline{\underline{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}$ og $\underline{\underline{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}}$

2) a) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Om vi finner det karakteristiske polynomet for matrisen: $(-\lambda)^2 - (-1)(1)$

$$= \lambda^2 + 1 = 0$$

Denne likningen har kun komplekse løsninger, så matrisen har ingen reelle egenverdier.

b) $A \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{bmatrix}$

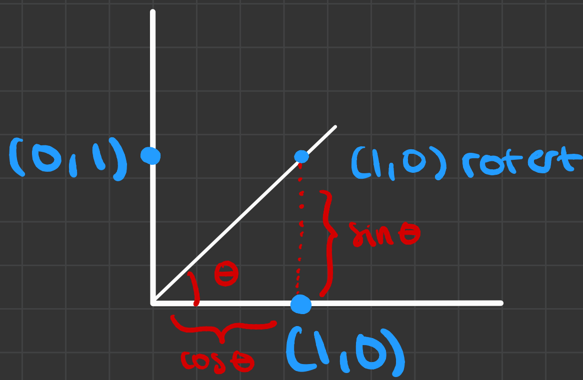
Fra notatet ser vi at denne matrisens virkning er å rotere planet m/ $90°$.

Rotasjoner endrer ikke selve størrelsen av vektoren som skalarmultipikasjon hadde gjort, så da har ikke A noen reelle egenverdier.

3)

a) $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
b)

Om vi roterer e_1:

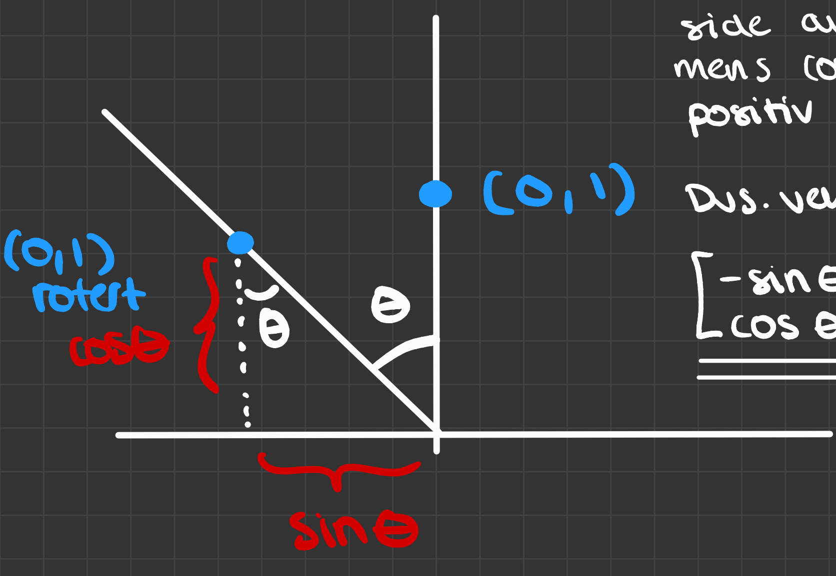


Fra trigonometri ser vi at $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}}}$

for å rotere e_1 θ grader.

For å rotere e_2:

sin θ er på negativ side av x-aksen, mens cos θ er på positiv side.



Dvs. vektoren blir

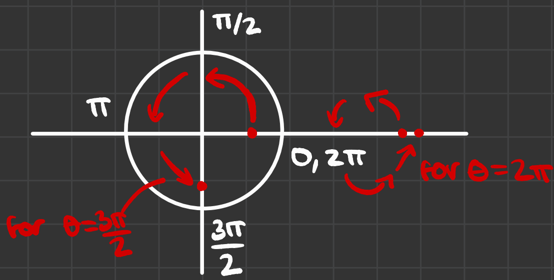
$\underline{\underline{\begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}}}$

b) Trenger bare å sette sammen svarene fra forrige oppgave:

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}}$$

siden vi utledet de for de to enhetsvektorene, så holder det for alle 2x2-matriser.

c) $Ax = \lambda x$ for en vilkårlig egenverdi λ, betyr i dette tilfellet at å rotere en egenvektor x vil resultere i at man får en vektor som er parallell m/ x. Om vi ser på enhetssirkelen:



går det bare an om $\theta = 0$, eller π, eller 2π siden for alle andre θ vil et punkt bli "kastet" rundt sirkelen.

$$\theta = \underline{\underline{0,\ \pi,\ 2\pi}}$$ for å få en reell egenverdi

4) $A^2 = A$

$\rightarrow A^2 \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = (A = 1)$ som ikke er sant.

Dette betyr at A ikke er invertibel → det $A = 0$ og fra det følger det at en av egenverdiene til A er 0.

For $Ax = \lambda x = A^2 x$

$A^2 x$ blir likt $A(\lambda x)$, som igjen blir likt $\lambda^2 x$

om vi setter $\lambda^2 x = \lambda x$ får vi $(\lambda^2 - \lambda)x = 0$

$\lambda^2 - \lambda = 0$ for $\underline{\underline{\lambda = 1, 0}}$

<u>Oppgaver til kapittel 11</u>

1a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

egenverdiene: $\begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 2 \\ 3 & -1-\lambda & 6 \\ -2 & 2 & -2-\lambda \end{bmatrix}$

$(3-\lambda)(\lambda^2 + 3\lambda - 10) - 3\lambda + 6 - 4\lambda + 8$
$= -\lambda^3 + 12\lambda - 16 = 0$
for $\lambda = \underline{\underline{-4}}$ og $\lambda = \underline{\underline{2}}$

$(A+4I)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \frac{1}{7}R_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & -1/7 & 2/7 \\ 3 & 3 & 6 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$-3R_1 + R_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & -1/7 & 2/7 \\ 0 & 24/7 & 30/7 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\sim 2R_1 + R_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & -1/7 & 2/7 \\ 0 & 24/7 & 30/7 \\ 0 & 12/7 & 18/7 \end{bmatrix}$$

$$\sim \frac{7}{24} \cdot R_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & -1/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 12/7 & 18/7 \end{bmatrix} \sim -\frac{12}{7}R_2 + R_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & -1/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \frac{1}{7}R_2 + R_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 + 0x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 &= 0 \\ 0x_1 + x_2 + \tfrac{3}{2}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

x_3 er frivariabel:
$$x_1 = -\frac{1}{2}x_3$$
$$x_2 = -\frac{3}{2}x_3$$
$$x_3 = x_3$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1/2 \\ -3/2 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

$(A-2I)x=0$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to \frac{1}{3}R_2 \\ \to \frac{1}{2}R_3 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim R_2+R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim R_1-R_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_2 &= 0x_1 + x_2 + 0x_3 \\ x_3 &= 0x_1 + 0x_2 + x_3 \end{aligned}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}} \text{ med } \begin{bmatrix} -1/2 \\ -3/2 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1/2 \\ 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sjekker determinanten til

$$1\left(\frac{3}{2}\right) - (-2)(1) + \left(-\frac{1}{2}\right)1$$

$$\frac{3}{2} + 2 - \frac{1}{2} = 1 + 2 = \underline{\underline{3}}$$

Siden determinanten $\neq 0$, er egenvektorene lineært uavhengige.

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \text{ og } P = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & -2 \\ -3/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

determinant : $\begin{bmatrix} -\lambda & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -\lambda & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

prøve å få denne på øvre triangulær form:

bytter om R_1 og R_2 $\sim$ $\begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 2 & 6 \\ -\lambda & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -\lambda \end{bmatrix}$

$\lambda \cdot R_1 + R_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 2 & 6 \\ 0 & -1-\lambda^2 & 1+2\lambda & 5+6\lambda \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -\lambda \end{bmatrix}$

bytter om på R_3 og R_4 $\sim$ $\begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 2 & 6 \\ 0 & -1-\lambda^2 & 1+2\lambda & 5+6\lambda \\ 0 & 0 & 4 & -\lambda \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 0 \end{bmatrix}$

$\frac{1}{4}(\lambda-3)R_3 + R_4 \sim$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 2 & 6 \\ 0 & -1-\lambda^2 & 1+2\lambda & 5+6\lambda \\ 0 & 0 & 4 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{4}(-3+\lambda) \end{bmatrix}$$

Determinanten til en øvre triangulær matrise er produktet av elementene på diagonalen.

$$1(-1-\lambda^2)\cdot\cancel{4}\cdot -\frac{\lambda}{\cancel{4}}(-3+\lambda)$$

$$(-1-\lambda^2)-\lambda(-3+\lambda)$$
$$(-1-\lambda^2)(3\lambda-\lambda^2)$$
$$=-3\lambda+\lambda^2-3\lambda^3+\lambda^4$$
$$=\lambda^4-3\lambda^3+\lambda^2-3\lambda$$

Dette blir det karakterisistiske polynomet til matrisen:

$$\lambda^4-3\lambda^3+\lambda^2-3\lambda=0$$
$$\lambda(\lambda^3-3\lambda^2+\lambda-3)$$
$$\lambda^2(\lambda-3)+(\lambda-3))$$
$$\lambda(\lambda^2+1)(\lambda-3)=0$$
$$\lambda=0$$
$$\lambda=3$$
$$\lambda=\pm i$$

$(A-0I)x=0$:

$$\begin{bmatrix}1&0&2&6\\0&-1&1&5\\0&0&3&0\\0&0&4&0\end{bmatrix}\sim 4R_3-3R_4\sim\begin{bmatrix}1&0&2&6\\0&1&-1&-5\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\sim R_3+R_2\sim\begin{bmatrix}1&0&2&6\\0&1&0&-5\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\sim 2R_3+R_1$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_4 er fri variabel:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -6x_4 \\ x_2 &= 5x_4 \\ x_3 &= 0x_4 \\ x_4 &= x_4 \end{aligned}\right\} \underline{\underline{\begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

For $\lambda_2 = 3$:

$(A - 3I)x = 0$:

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim -\frac{1}{3}R_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 & -5/3 \\ 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim (-1)R_1 + R_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 & -5/3 \\ 0 & -10/3 & 7/3 & 23/3 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim -\frac{3}{10}R_2 \sim \quad \frac{1}{4}R_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 & -5/3 \\ 0 & 1 & -7/10 & -23/10 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \frac{7}{10}R_3 + R_2 \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 & -5/3 \\ 0 & 1 & 0 & -113/40 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \frac{1}{3}R_3 + R_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 0 & -23/12 \\ 0 & 1 & 0 & -113/40 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim -\tfrac{1}{3}R_2 + R_4 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -39/40 \\ 0 & 1 & 0 & -113/40 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vi har x_4 som fri variabel

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{39}{40}x_4 \\ x_2 &= \frac{113}{40}x_4 \\ x_3 &= 3/4\, x_4 \\ x_4 &= x_4 \end{aligned}\right\} = \text{egenvektor for } \lambda = 3 = \begin{bmatrix} 39/40 \\ 113/40 \\ 3/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Om egenvektorene til de andre egenverdiene er lineært uavhengige alle sammen, er matrisen diagonaliserbar.

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{bmatrix}$

$\det(A - \lambda I): \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-i \\ 1+i & -1-\lambda \end{vmatrix}$

$(1-\lambda)(-1-\lambda) - (1+i)(1-i)$

$-1-\lambda+\lambda+\lambda^2 \qquad 1-i+i-i^2$

$\qquad\qquad\qquad\qquad 1-(-1) = 2$

$\lambda^2 - 1 - 2$

$\lambda^2 - 3 = 0$

$\underline{\lambda = \pm\sqrt{3}} \qquad D = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$

Finne egenvektorene:

$\begin{bmatrix} 1-\sqrt{3} & 1-i \\ 1+i & -1-\sqrt{3} \end{bmatrix} \sim R_1 \cdot \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{(i-1)\sqrt{3} - (1-i)}{2} \\ 1+i & -1-\sqrt{3} \end{bmatrix}$

$-(1+i)R_1 + R_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{(i-1)\sqrt{3} - (1-i)}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

x_2 er fri variabel: egenvektor: $\begin{bmatrix} \frac{(i-1)\sqrt{3} + (1-i)}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

for $-\sqrt{3}$ blir nesten det samme, bare med motsatt fortegn inni de komplekse tallene:

$\begin{bmatrix} \frac{(-1+i)\sqrt{3} + (1-i)}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

DVS. vi har $P = \begin{bmatrix} \frac{(-1+i)\sqrt{3} + (1-i)}{2} & \frac{(i-1)\sqrt{3} + (1-i)}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

og $D = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$

3)

$A = \begin{bmatrix} r_1 & \bar{z} \\ \bar{z} & r_2 \end{bmatrix}$ egenverdiene til A er gitt ved $(A-\lambda I)x = 0$

$$\left| \begin{bmatrix} r_1 - \lambda & z \\ \bar{z} & r_2 - \lambda \end{bmatrix} \right| = (r_1 - \lambda)(r_2 - \lambda) - (z \cdot \bar{z})$$

$$= r_1 r_2 - r_1 \lambda - r_2 \lambda + \lambda^2 - z \cdot \bar{z}$$

huske at for $z = a+bi$ og $\bar{z} = a-bi$ vil $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$

Løsningen for det polynomet blir reelle tall siden $z\bar{z}$ blir et reellt tall.

4) $a \neq b \neq 0 \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{bmatrix}$$

Egenverdier: $(A - \lambda I)x = 0$

$$\begin{bmatrix} a-\lambda & b & 0 \\ b & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & a-b-\lambda \end{bmatrix}$$

$$=(a-\lambda)^2(a-b-\lambda)-b^2(a-b-\lambda)$$

$$=(a-b-\lambda)((a-\lambda)^2-b^2)=0$$

Dette betyr at enten $a-b-\lambda=0 \rightarrow \lambda=a-b$

eller $\underbrace{((a-\lambda)^2-b^2)}_{(-(a+b+\lambda)(a+b-\lambda))=0}=0 \rightarrow \underline{\underline{\lambda=a+b}}$

For $\lambda=a-b$:

$$\begin{bmatrix} b & b & 0 \\ b & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{-R_1+R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_2 og x_3 er frie variabler

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -x_2 - \\ x_2 &= x_2 \\ x_3 &= \quad x_3 \end{aligned}\right\} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

For $\lambda=a+b$:

$$\begin{bmatrix} -b & b & 0 \\ b & -b & 0 \\ 0 & 0 & -2b \end{bmatrix} \sim \text{deler hver rad på } -b \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \tfrac{1}{2}R_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim R_2+R_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

bytter R_2 og R_3 $\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ x_2 er en fri variabel

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ x_2 &= x_2 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Må sjekke om P er invertibel ved å se om determinanten = 0 eller ikke.

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(P) = (-1)(-1) - 0 + 1(1)$$
$$= 1 + 1 = 2 \neq 0$$

$$D = \begin{bmatrix} a-b & 0 \\ 0 & a+b \end{bmatrix}$$

A er diagonaliserbar.

5) $T: P_2 \to P_2$

$$T(f) = (x+1)f'(x) + f(x)$$

$$T(1) = (x+1)\cdot 0 + 1 = (1)1 + (0)x + (0)x^2$$
$$T(x) = (x+1)\cdot 1 + x = 2x + 1$$
$$= (1)1 + (2)x + (0)x^2$$

$$T(x^2) = (x+1)2x + x^2$$
$$2x^2 + 2x + x^2 = 0(1) + 2x + 3x^2$$

Setter løsningene oppå hverandre:

$$(1)1 + (0)x + (0)x^2$$
$$(1)1 + (2)x + (0)x^2$$
$$0(1) + (2)x + (3)x^2$$

Radene av koeffisientene blir kolonnene til matrisen A =

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

b) Siden A er på øvre triangulær form, ligger egenverdiene på diagonalen.

$$\lambda_1 = 1$$
$$\lambda_2 = 2$$
$$\lambda_3 = 3$$

Egenvektor for $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_1 er en fri variabel, og x_2 og x_3 er begge 0

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

Egenvektor for $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_2 er fri

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ x_2 &= x_2 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

For $\lambda = 3$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ x_3 er fri

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_3 \\ x_2 &= 2x_3 \\ x_3 &= x_3 \end{aligned}\right\} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

Regner ut det(P): $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det(P) = 1(1 - (2 \cdot 0)) = 1 \neq 0$$

$\underline{\underline{\det(P) \neq 0 \text{ så A er diagonaliserbar.}}}$

b) a) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad -\sin\theta = -\frac{1}{2}$

$\sin\theta = \frac{1}{2}$ $\quad \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$(\cos\theta, \sin\theta) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ for $\underline{\underline{\theta = \frac{\pi}{6}}}$

$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}}}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3} - \lambda & -1 \\ 1 & \sqrt{3} - \lambda \end{bmatrix}$$

$(\sqrt{3}-\lambda)^2 + 1 = 0$ for $\lambda = \sqrt{3}+i$
$\lambda = \sqrt{3}-i$

Egenvektor for $\lambda = \sqrt{3}+i$

$$\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \sim -i \cdot R_1 \sim \begin{bmatrix} -1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_2 er fri $\quad \left.\begin{matrix} x_1 = i x_2 \\ x_2 = x_2 \end{matrix}\right\} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}}}$

Egenvektor for $\lambda = \sqrt{3}-i$

$$\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \sim iR_2 \sim \begin{bmatrix} i & -1 \\ i & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} i & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \frac{1}{i}R_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_2 er fri $\quad \left.\begin{matrix} x_1 = -i x_2 \\ x_2 = x_2 \end{matrix}\right\} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}}}$

Sjekker $\det(P) = \left|\begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right|$

$= i - (-i) = 2i \neq 0$

$\underline{\underline{\text{A er diagonaliserbar.}}}$

c) $v_1 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$ og $v_2 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ danner en basis for $\mathbb{C}^2$

$T = (T(e_1), T(e_2))$

$$T(e_1) = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$T(e_2) = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Den nye matrisen dannes ved å sette sammen $T(e_1)$ og $T(e_2)$:

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}}}$$ som representerer T.