Oppgaver til kapittel 3

Innlevering 2
TMA4115, våren 2022

1. Løs ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for

a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -7 & 0 \\ -8 & -7 & 3 \\ -4 & 5 & -8 \\ -6 & 6 & -4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Oppgave 1

a)
$$\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \end{array}$$

Er totalt 7 ukjente:

$x_2 + x_3 + x_7 = 0$ setter $x_7 = t$

$x_5 + x_7 = 0$ da blir x_5 og

$x_6 + x_7 = 0$ x_6 lik $-t$

x_1 og x_4 er ukjente

setter $x_1 = s$

$x_4 = r$

$x_2 + x_3 = -t$

setter $x_3 = u$

$x_2 = -t - u$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} s \\ -t-u \\ u \\ r \\ -t \\ -t \\ t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ 0 \\ 0 \\ -t \\ -t \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -u \\ u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \vec{s}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{t}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{r}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ -8 & -7 & 3 & -7 \\ -4 & 5 & -8 & -3 \\ -6 & 6 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim R_1 + R_2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & -14 & 3 & -10 \\ -4 & 5 & -8 & -3 \\ -6 & 6 & -4 & 0 \end{array}\right)$

$-2R_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & -14 & 3 & -10 \\ -8 & 10 & -16 & -6 \\ -6 & 6 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim R_1 + R_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & -14 & 3 & -10 \\ 0 & 3 & -16 & -9 \\ -6 & 6 & -4 & 0 \end{array}\right)$

$\frac{6}{8}R_1 + R_4 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & -14 & 3 & -10 \\ 0 & 3 & -16 & -9 \\ 0 & 3/4 & -4 & -9/4 \end{array}\right) \sim 4R_4 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & -14 & 3 & -10 \\ 0 & 3 & -16 & -9 \\ 0 & 3 & -16 & -9 \end{array}\right)$

$R_3 + R_4$ som eliminerer R_4. $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & -14 & 3 & -10 \\ 0 & 3 & -16 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\sim 3R_2 + 14R_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & -14 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & -215 & 96 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ ← kan uttrykke x_1 og x_2 med denne

har en løsning: $-215x_3 = 96 \rightarrow x_3 = \frac{-96}{215}$

$-14x_2 + 3\left(\frac{-96}{215}\right) = -10 \rightarrow x_2 = \frac{133}{215}$

$8x_1 - 7\left(\frac{133}{215}\right) = -3 \rightarrow x_1 = \frac{143}{860}$

$\vec{x} = \left[\frac{143}{860}, \frac{133}{215}, \frac{-96}{215}\right]$

oppgave 2)

$v = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix}$ og $w = \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix}$ finn $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ slik at u, v, og w spenner ut $\mathbb{R}^3$ → dette betyr at u, v og w må være lineært uavhengige

$$u = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & -7 & -3 \\ 8 & -8 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\hookrightarrow = \hat{i} \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ -8 & -4 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} -3 & -7 \\ 8 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= 4\hat{i} - 36\hat{j} + 80\hat{k}$$

$$= [4, -36, 80] \rightarrow \frac{1}{4}u \rightarrow [1, -9, 20]$$

u, v, og w er lineært uavhengige, som betyr at den eneste løsningen på $xu + yv + zw = 0$ er $x = y = z = 0$.

3) $p(x) = x^2 + 5x - 3$

a) $q(x) = 4x^2 + 18x + 4$ → $x^2 + 8x + 2 = a(x^2 + 5x - 3) + b(4x^2 + 18x + 4)$

$s(x) = x^2 + 8x + 2$

ganger ut: $x^2 + 8x + 2 = ax^2 + 5ax - 3a + 4bx^2 + 18bx + 4b$

$= x^2(a + 4b) + x(5a + 18b) - 3a + 4b$

1) $a + 4b = 1 \rightarrow a = (1 - 4b)$ setter inn i 3

2) $5a + 18b = 8$

3) $-3a + 4b = 2$ $\quad -3(1 - 4b) + 4b = 2$

$-3 + 12b + 4b = 2$

$16b = 5 \rightarrow b = \frac{5}{16}$

<u>men</u>: om vi setter inn det for a i likning 2 istedenfor:

$5(1 - 4b) + 18b = 8$

$5 - 20b + 18b = 8$

$2b = 3 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$

Siden vi får to ulike verdier for b, fins det ingen a som kommer til å passe.

b) $r(x) = a \cdot p(x) + b \cdot q(x) + c \cdot t(x)$
$= a(x^2+5x-3) + b(4x^2+18x+4) + c(dx^2+ex+f)$
$= ax^2 + 5ax - 3a + 4bx^2 + 18bx + 4b + cdx^2 + cex + fc$
$= x^2(a+4b+cd) + x(5a+18b+ce) - 3a + 4b + fc$

I forrige oppgave, siden det ikke var noen a eller b som passet $s(x) = ap(x) + bq(x)$, betyr det at $[1,8,2]$ er lineært uavhengig fra $[1,5,-3]$ og $[4,18,4]$.

$t(x)$ kan da være $s(x) = x^2 + 8x + 2$.

Oppgaver til kapittel 4

1) v_1 og $v_2 \rightarrow$ vektorer i $\mathbb{R}^2$
$A = 2 \times 2$ matrise

$Av_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $Av_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, Aw der $w = 2v_1 - v_2$

$Aw = 2Av_1 - Av_2$

$$2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}}}$$

2) a) $\begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & i \end{bmatrix}$ $\det A = i - i = 0$

Matrisen er ikke inverterbar siden $\det A = 0$.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ er ikke inverterbar siden det ikke er en $n \times n$-matrise.

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\sim 3R_1 - R_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right)$

$\sim 2R_1 - R_2 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right)$

$\sim 2R_2 - R_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right)$

En hel rad m/ nuller nederst og 3, 0, -1 på andre siden gjør at inversen ikke finnes.

3a) $AX = B$

$A[x_1, x_2] = B$

$A[x_1, x_2] = [b_1, b_2]$ deler B opp i sine respektive kolonnevektorer som i x.

$Ax_1 = b_1$ og $Ax_2 = b_2$ er ekvivalent med å løse to likningssystemer. For nxn systemer blir det = løse n separate systemer.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

deler opp som i A)

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{matrix} x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{matrix}$ dette systemet har uendelig mange løsninger. $x_1 = x_3 = \frac{1}{2}$

$x_1 = 0,\ x_3 = 1$ osv.

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \to \begin{matrix} x_2 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_4 = -1 \end{matrix}$ dette systemet har ikke en løsning for x_2 og x_4.

Det finnes ingen x slik at $AX = b$.

4 a) $AX + XB = C$

$A[x_1, x_2] + B[x_1, x_2] = C$

$Ax_1 + Ax_2 + Bx_1 + Bx_2 = C$

X er avhengig av både A og B nå, så man kan ikke løse den som i forrige oppgave.

b) $AX + XB = C$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1x_1 + a_3x_2 & a_1x_3 + a_3x_4 \\ a_2x_1 + a_4x_2 & a_2x_3 + a_4x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1x_1 + b_3x_2 & b_1x_3 + b_2x_4 \\ b_2x_1 + b_4x_2 & b_3x_3 + b_4x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1x_1 + a_3x_2 + b_1x_1 + b_3x_2 & a_1x_3 + a_3x_4 + b_1x_3 + b_3x_4 \\ a_2x_1 + a_4x_2 + b_2x_1 + b_4x_2 & a_2x_3 + a_4x_4 + b_2x_3 + b_4x_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} a_1x_1 + a_3x_2 + b_1x_1 + b_3x_2 &= c_1 \\ a_1x_3 + a_3x_4 + b_1x_3 + b_3x_4 &= c_2 \\ a_2x_1 + a_4x_2 + b_2x_1 + b_4x_2 &= c_3 \\ a_2x_3 + a_4x_4 + b_2x_3 + b_4x_4 &= c_4 \end{aligned}$$

dette er totalmatrisen i en annen form → faktoriserer ut x_1, x_2, x_3 og x_4

$$\begin{aligned} x_1(a_1+b_1) + x_2(a_3+b_3) &= c_1 \\ x_1(a_2+b_2) + x_2(a_4+b_4) &= c_2 \\ x_3(a_1+b_1) + x_4(a_3+b_3) &= c_3 \\ x_3(a_2+b_2) + x_4(a_4+b_4) &= c_4 \end{aligned} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & c \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} a_1+b_1 & a_3+b_3 & 0 & 0 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_4+b_4 & 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & a_1+b_1 & a_3+b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & a_2+b_2 & a_4+b_4 & c_4 \end{array}\right] \end{array}$$

c) $A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c}(-1+2) & (1+1) & 0 & 0 & 1\\ (1+1) & (-1+2) & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & (-1+2) & (1+1) & 1\\ 0 & 0 & (1+1) & (-1+2) & 1\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1\end{array}\right] \sim 2R_1 - R_2 \sim \left[\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1\end{array}\right]$$

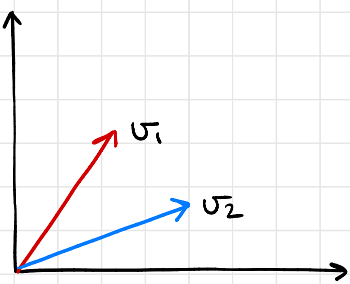
$$\sim \frac{1}{3}R_2 \sim \left[\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1\end{array}\right] \sim 2R_2 - R_1 \sim \left[\begin{array}{cccc|c}-1 & 0 & 0 & 0 & -1/3\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1\end{array}\right]$$

$$\sim 2R_3 - R_4 \sim \left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & -1/3\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & -1/3\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3\end{array}\right]$$

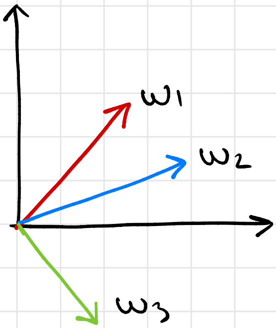
$$\sim 2R_4 - R_3 \sim \left[\begin{array}{cccc|c}-1 & 0 & 0 & 0 & -1/3\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3\\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1/3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3\end{array}\right] \sim -1R_1 \text{ og } -R_3 \sim \left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & 1/3\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3\end{array}\right]$$

oppgaver til kapittel 5:

1)



disse er lineært uavhengige siden de er i $\mathbb{R}^2$ men ikke parallelle



3 vektorer i $\mathbb{R}^2$ er lineært avhengig av hverandre siden de må spenne ut $\mathbb{R}^3$ for å være lineært uavhengige. De utspenner et plan i $\mathbb{R}^2$.

2a) $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}$ fra kapittel 4 - 2c ser vi at gauss ikke gir oss pivot-element i hver kolonne, så vektorene er lineært avhengige.

b) $\begin{bmatrix}2\\4\\2i\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}i\\2i\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5-3i\\10+2i\\4+6i\end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & i & 5-3i & 0 \\ 4 & 2i & 10+2i & 0 \\ 2i & -1 & 4+6i & 0 \end{array}\right] \sim i \cdot R_1 - R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & i & 5-3i & 0 \\ 4 & 2i & 10+2i & 0 \\ 0 & 0 & -7+3i & 0 \end{array}\right] \sim 2R_1 - R_2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & i & 5-3i & 0 \\ 0 & 0 & 8i & 0 \\ 0 & 0 & -7+3i & 0 \end{array}\right]$$

$$2(5-3i) - (10+2i)$$
$$10 - 6i - 10 - 2i = 8i$$

Fri variabel for z → vektorene er lineært avhengige (har ikke pivot i hver kolonne heller)

Oppgaver til kapittel 6

1 a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\det A = 1-(4) = -3$

Siden $\det A \neq 0$ er kolonnene i A lineært uavhengige.

b) $\begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ -6 & 15 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det A = 2\begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 15 & 1 \end{bmatrix} - (-5)\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -6 & 15 \end{bmatrix}$$

$$2(-4-(15\cdot 7)) - (-5)(2+42) + 3(30-24)$$

$$2 + 18 = 20$$

Siden $\det A \neq 0$ er kolonnene i A lineært uavhengige.

c) $\begin{bmatrix} 2i & -5 & 3 \\ 2 & -4i & 7 \\ -6 & 15 & i \end{bmatrix}$

$$\det A = 2i\underbrace{\begin{pmatrix} -4i & 7 \\ 15 & i \end{pmatrix}}_{-4i(i)-(15\cdot 7)} - (-5)\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -6 & i \end{pmatrix}}_{2i+42} + 3\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -4i \\ -6 & 15 \end{pmatrix}}_{30-24i}$$

$4-(15\cdot 7)$

-101

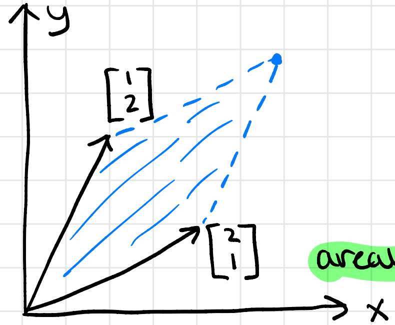
$$2i(-101) - (-5)(2i+42) + 3(30-24i)$$

$$-202i + 210 - 10i + 90 - 72i$$

$$= 300 - 284i$$

Siden $\det A \neq 0$ er kolonnene i A lineært uavhengige.

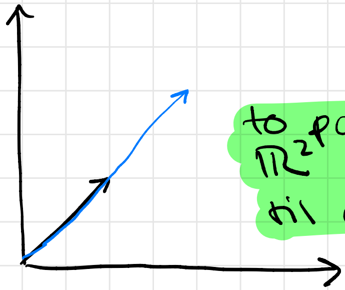
2a)



arealet blir $\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} = 3$

Som funnet i en tidligere oppgave

b)



to parallelle vektorer i $\mathbb{R}^2$ gjør at determinanten til de to vektorene er 0.

3) a) $\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y & z \end{bmatrix} = A$

$$\det A = \underbrace{a\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&x\\0&y&z\end{pmatrix}}_{\text{hele blir 0}} - b\begin{pmatrix}c&0&0\\0&0&x\\0&y&z\end{pmatrix}$$

$$- b\cdot c\underbrace{\begin{pmatrix}0 & x\\ y & z\end{pmatrix}}_{(z\cdot 0)-(xy)}$$

$\det A = +bcxy$

b) A er inverterbar så lenge verken b, c, x eller y blir ikke 0.