øving 8

13.4) $\cancel{2}$, $\cancel{10}$, $\cancel{18}$, ~~30 bc~~

2) $f(z) = iz\bar{z}$
$= i(x^2+y^2)$ som betyr at $u=0$
og $v = x^2+y^2$

$$\left.\begin{array}{l} u_x = 0 = u_y \\ v_x = 2x, \quad v_y = 2y \end{array}\right\}$$ CR holder ikke, så <u>f(z) er ikke analytisk.</u>

10) Uttrykket er definisjonen til prinsipielverdien til $\ln(z) \rightarrow \mathrm{Ln}(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$

$\mathrm{Ln}(z)$ er analytisk i domenet

$$\{z \mid -\pi < \mathrm{Arg}(z) < \pi\}$$

18) Er $u = x^3 - 3xy^2$ harmonisk?

$u_x = 3x^2 - 3y^2, \quad u_{xx} = 6x$
$u_y = -6xy, \quad u_{yy} = -6x$

Siden $u_{xx} + u_{yy} = 0$, <u>er u harmonisk.</u>

$v_y = u_x = 3x^2 - 3y^2$ integrerer mtp. y:
$v = 3x^2y - y^3 + h(x)$ integrerer v_x mtpx:
$v = \int 6xy\,dx = 3x^2y + h(y)$
som gir at $h(y) = -y^3$ og $h(x) = 0$
$v(x,y) = 3x^2y - y^3$.

Det gir en endelig:

$$f(z) = \underline{\underline{x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)}}$$

30) $\left.\begin{array}{l} \text{b) } \operatorname{Im} f(z) = \text{konstant} \\ \text{c) } f'(z) = 0 \end{array}\right\} f(z) = \text{konstant}$

$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, og CR må holde, som betyr:

$u_x = v_y$ og $u_y = -v_x$ <u>må</u> stemme

$f'(x+iy) = u_x + iv_x = 0$ om u_x og $v_x = 0$.
Om u_x og $v_x = 0$ gir definisjonen på CR at v_y og u_x også må være 0.

Om en funksjon derivert mtp. x er lik en funksjon derivert mtp. y, og begge blir null, så er det eneste alternativet at u og v begge er konstanter A og B, og dermed at $f(z) = A + Bi =$ konstant. ∎

Av denne utledningen over ser vi at $\operatorname{Im}(f(z)) = B =$ konstant.
$\operatorname{Im}(f(z)) =$ konstant gjør at $v_x = 0$
$v_y = 0$
og dermed også u_x og $u_y = 0$.

$\operatorname{Im}(f(z)) = \text{konstant} \rightarrow f'(z) = 0$
$\rightarrow f(z) = \text{konstant}$. ∎

13.5) ~~20)~~

20) $e^{z} = 4+3i$

$$e^{x}e^{iy} = 4+3i = \sqrt{3^2+4^2}\,e^{i\theta}, \quad \theta = \arctan(3/4) \approx 0.644$$

$$e^{x}e^{iy} = 5e^{0.644i}$$

$$e^{x} = 5, \quad e^{iy} = e^{0.644i}, \quad y = \theta + 2\pi n, \quad x = \ln 5$$

$$z = x+iy \rightarrow \underline{\underline{\ln 5 + i(0.644 + 2\pi n),\ n \in \mathbb{Z}}}$$

13.6) ~~10~~, ~~16~~, ~~19~~

10) $\sinh(3+4i) = 1/2\,(e^{3+4i} - e^{-3-4i})$

$\sinh(x+iy)$ kan skrives som:

$$= \sinh(x)\cos(y) + i\cosh(x)\sin(y)$$

når $3+4i$

$$= \underline{\underline{\sinh(3)\cos(4) + i(\cosh(3)\sin(4))}}$$

16) $\sin(z) = 100$

$$100 = 1/2i\,(e^{iz} - e^{-iz}) \mid \cdot 2i$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = 200i, \quad \text{sub } u = e^{iz}$$

$$u - \frac{1}{u} = 200i \rightarrow \frac{u^2-1}{u} = 200i$$

$$u^2 - 1 = 200iu \rightarrow u^2 - 200iu - 1 = 0$$

andregradsligning

$$= \frac{200i \pm \sqrt{(200i)^2 + 4}}{2}$$

gir $u_1 = 100i + 3i\sqrt{1111} = e^{iz}$

$u_2 = 100i - 3i\sqrt{1111} = e^{iz}$

tar ln og ganger m/$-i$

$$\underline{\underline{-\ln(100i \pm 3i\sqrt{1111})i + 2\pi n = z}}$$

(to løsninger av z som har uendelig mange svar)

19) $\sinh(z) = 0$

$$\tfrac{1}{2}(e^{z} - e^{-z}) = 0$$

$$e^{z} - e^{-z} = 0$$

$$= e^{z} - \frac{1}{e^{z}} = 0, \text{ sub } u = e^{z}$$

$$u - \frac{1}{u} = 0 \mid \cdot u \rightarrow u^2 - 1 = 0$$

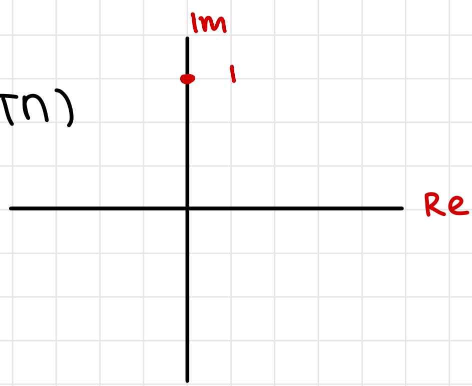
$$u^2 = 1 \rightarrow e^{2z} = 1 \text{ gir } 2z = i(0 + 2\pi n)$$

$$\underline{\underline{z = i\pi n}}$$

13.7) ~~15~~, ~~17~~, 30a

15) $\ln(e^{i}) = i(1 + 2\pi n)$

(flere verdier)



$$\underbrace{\ln|e^{i}|}_{\ln(1)} + i\,\underbrace{\mathrm{Arg}(e^{i})}_{=1}$$

17) $\ln(i^2) \neq 2\ln(i)$
må bruke prinsipiellverdien:

$\ln(i^2)$ kan skrives som $\ln(-1)$.

prinsipiellverdien til $\ln(-1)$:

$= \ln|-1| + i\,\mathrm{Arg}(i^2)$

$\mathrm{Arg}(i^2) = \mathrm{Arg}(-1) = \pi$ som man ser ved vinkelen som $\mathrm{Re} = -1$ danner. $\pi + 2\pi n$ pga funksjonen er periodisk:

$= \ln(1) + i(\pi + 2\pi n) = \underline{i(\pi + 2\pi n)}$

Bruker samme for $2 \cdot \ln(i)$:

$= 2(\ln|i| + i\,\mathrm{Arg}(0+i))$

$\mathrm{Arg}(i) = \pi/2 + 2\pi n$ (vet at $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$)

$2(\ln|i| + i(\frac{\pi}{2} + 2\pi n))$

$2(\ln(1) + i(\pi/2 + 2\pi n)) = \underline{2i(\pi/2 + 2\pi n)}$

Ser at:

$$\underline{\underline{2i(\pi/2 + 2\pi n) \neq i(\pi + 2\pi n)}}$$

30a) Skal vise at
$\arccos(z) = -i\ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$

$\cos(w) = z \rightarrow \arccos(z) = w$

$$z = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} \quad \Big| \cdot e^{iw}$$

$$ze^{iw} = \frac{1}{2}((e^{iw})^2 + 1)$$ gjør om til 2. gradslikning

$$\frac{(e^{iw})^2}{2} - ze^{iw} + \frac{1}{2} = 0,$$ sub $u = e^{iw}$

$$\frac{1}{2}u^2 - zu + \frac{1}{2} = 0 : \quad z \pm \sqrt{z^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow e^{iw} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$$ log og ganger med $-i$ for å få $w = \arccos(z)$

regner med at kun positiv løsning er ønsket

$$\underline{\underline{\arccos(z) = -i\ln(z + \sqrt{z^2 - 1})}}$$