Øving 5

12.1) ~~14d~~, ~~15~~

14d) $\frac{d}{dy}(v(x)+w(y)) = w'(y)$

$\frac{d}{dx}(w'(y)) = 0 = u_{xy}$

$\frac{d}{dx}(v(x)w(y)) = w(y)v'(x) \qquad u_{xy} = v'(x)w'(y)$

$\frac{d}{dy}(v(x)w(y)) = v(x)w'(y) \qquad u(u_{xy}) = v(x)\cdot v'(x)\cdot w'(y)\cdot w(y)$

$u_x \cdot u_y = w(y)v'(x)v(x)w'(y) = \uparrow$

$u = v(x+2t) + w(x-2t) \qquad u_{tt} = 4u_{xx}$

$u_t = 2v'(x+2t) - 2w'(x-2t)$

✓ $u_{tt} = 4v''(x+2t) + 4w''(x-2t)$ kan se at $u_{tt} = 4u_{xx}$

$u_x = v'(x+2t) + w'(x-2t)$

✓ $u_{xx} = v''(x+2t) + w''(x+2t)$

15) $u(x,y) = a\ln(x^2+y^2) + b \qquad u = 110$ når $x^2+y^2=1$

$u = 0$ når $x^2+y^2 = 100$

u må løse Laplacelikningen: $u_{xx} + u_{yy} = 0$

$u_x = a\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x = \frac{2xa}{x^2+y^2}$

$u_{xx} = 2a\cdot\left(\frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = -\frac{2a(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

$u_y = \frac{a}{x^2+y^2}\cdot 2y = \frac{2ay}{x^2+y^2}$

$u_{yy} = 2a\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{y}{y^2+x^2}\right) = \frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2a(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

Ser at de to dobbeltderiverte er like, men m/motsatt fortegn. Summen av de blir dermed 0.

Løser for randbetingelsene: $a\ln(1)+b=110 \rightarrow b=110$

$a\ln(100)+b=0 \rightarrow a = \frac{-110}{\ln(100)}$

$a = \frac{-110}{\ln(100)}$ og $b = 110$ gir $u(x,y) = -\frac{110}{\ln(100)}\ln(x^2+y^2)+110$

12.3) ~~5~~, ~~7~~, ~~14~~, ~~15~~

5) $k \sin 3\pi x$ vi skal finne $u(x,t)$ for lengde $L=1$ og $c^2=1$ når $v_0=0$, uten $k=0.01$

$$\left.\begin{aligned} u(0,t)&=0 \\ u(1,t)&=0 \end{aligned}\right\} \text{ for alle } t \geq 0$$

En-dimensjonell bølgelikning: $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

d'Alembert:

$u_{tt} = c^2 u_{xx}$
$u(x,0) = k \sin 3\pi x = f(x)$ initial deflection
$u_t(x,0) = g(x) = 0$ startfart

generell løsning: $u(x,t) = p(x-ct) + q(x+ct)$
$u_t(x,t) = -cp'(x-ct) + cq'(x+ct)$

$u(x,0) = f(x) = p(x) + q(x)$
$u_t(x,0) = g(x) = -cp'(x) + cq'(x)$

$G'(x) = g(x)$, ønsker si at $G(x) = -cp(x) + cq(x)$

$$\left.\begin{aligned} p(x) &= \tfrac{1}{2}f(x) - \tfrac{1}{2c}G(x) \\ q(x) &= \tfrac{1}{2}f(x) + \tfrac{1}{2c}G(x) \end{aligned}\right\}$$ herfra kan vi finne $u(x,t) = \frac{1}{2}f(x-ct) - \frac{1}{2c}G(x-ct) + \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2c}G(x+ct)$

For $G(x) = \int_{x_0}^{x} g(s)\,ds$. Om vi setter dette inn i def for $u(x,t) \rightarrow$

$$G(x+ct) - G(x-ct) = \int_{x_0}^{x+ct} g(s)\,ds + \int_{x-ct}^{x_0} g(s)\,ds = \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds$$

som gir en $u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) - f(x-ct)) - \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds$

hvor $g(t)=0$ og $f(x) = 0.01\sin(3\pi x)$

$$\underline{\underline{u(x,t) = 0.01 \cdot \tfrac{1}{2}(\sin(3\pi(x+ct)) - \sin(3\pi(x-ct)))}}$$

som er ekvivalent m/ $\underline{\underline{0.01((\cos(3\pi t)\sin(3\pi x))}}$

7) Initial deflection: $f(x) = kx(1-x) = k(x-x^2)$, antar startfart $g(x)=0$

$B_n = 2k\int_0^1 (x-x^2)\sin(n\pi x)\,dx$ holder å regne ut B_n siden $g(x)=0$

$$= 2k\int_0^1 x\sin(n\pi x) + 2k\int_0^1 x^2 \sin(n\pi x)\,dx$$

$$= 2k\left(-\frac{x\cos(\pi n x)}{\pi n}\Big|_0^1 + \frac{1}{\pi n}\int_0^1 \cos(\pi n x)\,dx\right)$$

$$2k\left(\frac{\sin(\pi n)}{\pi^2 n^2} - \frac{\cos(\pi n)}{\pi n}\right) = -\frac{\cos(\pi n)}{\pi n} = \underline{-\frac{(-1)^n}{\pi n}}$$

$$2k\int_0^1 x^2 \sin(n\pi x)\,dx = 2k\left(-\frac{x^2\cos(\pi n x)}{\pi n}\Big|_0^1 + \frac{2}{\pi n}\int_0^1 x\cos(\pi n x)\,dx\right)$$

$$= 2k\left(-\frac{\cos(\pi n)}{\pi n} + \frac{2}{\pi n}\int_0^1 x\cos(n\pi x)\,dx\right)$$

$$= 2k\left(-\frac{\cos(\pi n)}{\pi n} + \frac{2x\sin(n\pi x)}{\pi^2 n^2}\Big|_0^1 - \frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1 \sin(n\pi x)\,dx\right)$$

$$= \underline{\frac{(2-n^2\pi^2)\cos(\pi n) - 2}{\pi^3 n^3}}$$

Summerer sammen integralene:

$$\frac{-4k\cos(\pi n) + 4k}{\pi^3 n^3}$$ som gir Fourierrekka:

genger m/ 2k

$$\underline{\underline{\frac{8k}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(-1)^n - 1}{n^3}\cos(\pi n t)\sin(n\pi x)}}$$

og er løsningen på $u(x,t)$.

14) $f(x) = 0$ og $g(x) = 0.01\left(\int_0^{\pi/2} x\sin(\pi x) + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x)\sin(nx)\,dx\right)$

$$= 0.01\left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi^2} - \frac{x\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{\pi^2}\sin\left(\frac{\pi^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi^2}{2}\right)\cdot 0.01$$

$$0.01\left(\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x)\sin(\pi x)\,dx\right) = 0.01\left(\frac{\sin(\frac{\pi^2}{2}) - \sin(\pi^2)}{\pi^2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi^2}{2}\right)\right)$$

$$B_n^* = \frac{0.02}{n\pi}\left(\frac{2\sin(\frac{\pi^2}{2}) - \sin(\pi^2)}{\pi^2}\right)$$

som gir oss rekka: $$\underline{\underline{\frac{0.02}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin(\frac{\pi^2}{2}) - \sin(\pi^2)}{\pi^3}\sin(nt)\sin(nx)}}$$

15) $u_{tt} = -c^2 u_{xxxx}$

$u(0,t) = u(L,t) = 0$
$u(x,0) = F(x)$
$u_t(x,0) = G(t)$

$$\left.\begin{aligned} u_{tt} &= F\cdot G''(t) \\ u_{xxxx} &= G\cdot F^{(4)} \end{aligned}\right\}$$ setter inn i PDE $\rightarrow F\cdot G'' = -p^2 G\cdot F^{(4)} \quad | \div FG$

$$\frac{G''}{G} = \frac{-p^2 F^{(4)}}{F} = \text{konstant} = \beta^4$$

$\beta^4 F = F^{(4)}$ og $\underbrace{G'' = -p^2\beta^4 G(t)}_{\text{"vanlig" diffligning}}$

$G'' + p^2\beta^4 G = 0$

Karakteristiske polynom: $r^2 = -p^2\beta^4$

$r = \pm i p \beta^2$

Vi får en løsning for $G(t) = a\cos(p\beta^2 t) + b\sin(p\beta^2 t)$

For $F(x)$ kan man si at $F = e^{irx}$, og av dette: $\beta^4 F = (ir)^4 F$

som gir $r^4 = \beta^4 \rightarrow r = \pm\beta$ og $\pm i\beta$ $\qquad \beta^4 = (ir)^4$ gitt at $F \neq 0$

får flere løsninger: $e^{\beta x}, e^{-\beta x}, e^{i\beta x}, e^{-i\beta x}$
Av disse ser vi at:

$$(e^{\beta x} \pm e^{-\beta x})\frac{1}{2} = \sinh \text{ og } \cosh(\beta x)$$

$$\text{og } \cos\beta x \pm i\sin\beta x = e^{\pm i\beta x}$$

Tilslutt gir dette en $F(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x + C\cosh\beta x + D\sinh\beta x$

hvor A, B, C, D er konstanter som kommer av at likningen er lineær.

12.4) 19

19) $u(0,t) = 0$
$u_x(L,t) = 0$

Må vise at $u(x,0) = f(x) \rightarrow u_{tt} = c^2 u_{xx}$

$F\ddot{G} = c^2 F'' G \rightarrow \frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F}$ = konstant k, som må være negativ gitt av initialbetingelsene

Det gir de eneste ikke-trivielle løsningene:

$\ddot{G} - c^2(-k)G = \ddot{G} + \frac{E}{P}kG = \ddot{G} + \frac{E}{P}N^2 G$ hvor $N^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$

$\ddot{G} + c^2N^2G = 0$ som gir $G = a\cos cNt + b\cos cNt$

og $F'' + N^2F = 0$ som gir $F = A\cos Nx + B\sin Nx$.

Av dette følger $u_n(x,t) = \sin Nx(B_n\cos cNt + B_n^*\sin cNt)$

$$u_n(x,0) = f(x) = \sin Nx(B_n \cdot 1 + 0) = B_n \sin Nx$$

$u(0,t) = u(L,t) = 0$: $A\cos 0 + B\sin 0 = 0 = A = 0$

$B \cos \nu L = 0$ gir en $\nu = \underline{\underline{\dfrac{(2n+1)\pi}{2L}}}$ for at cosinusfunksjonen alltid skal bli null.

Hvis initial velocity $= 0$ blir $B_n^* = 0$ slik at:

$u_n(x,t) = B_n \cos c\nu t \sin \nu x$ hvor u blir den tilsvarende rekka:

$u = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos c\nu t \sin \nu x$ og $u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \nu x$

B_n blir av det til Fourierkoeffisient: $\frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin \nu x \, dx$

Velger B_n slik at $u(x,0)$ er Fourierrekka til $f(x)$.

12 Rew) ~~18~~

18) $u_{xx} + u_x = 0$, $u(0,y) = f(y)$, $u_x(0,y) = g(y)$

Ingen y-deriverte gjør at vi kan løse som:

$u'' + u' = 0$, antar at en løsning er proporsjonal m/ $e^{\lambda x}$

$(e^{\lambda x})'' + (e^{\lambda x})' = 0$

$\lambda^2 e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} = 0$

$(\lambda^2 + \lambda) e^{\lambda x} = 0$ for $\lambda = -1$ eller 0

$\lambda = -1$ gir løsning $= Ce^{-x}$

$\lambda = 0$ gir løsning $= C$

summen blir løsning:

$= u(x,y) = \underline{\underline{A(y)e^{-x} + B(y)}}$ hvor konstantene C ble byttet ut m/ funksjoner av y, $A(y)$ og $B(y)$ som kan være hva som helst.

Setter inn betingelser: $u(0,y) = f(y) = \underline{\underline{A(y) + B(y)}}$

$u_x(0,y) = g(y) = -A(y)e^{-0} = \underline{\underline{-A(y)}}$