Innlevering 2, blokk 1

Oppgave 1)

marginalfordelingen $g(x)$:

$f_X(-1)$: $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$

$f_X(0)$: $\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$

$f_X(1)$: $-\text{"}- = \frac{1}{3}$

som gir følgende marginalfordeling:

$$g(x)=\begin{cases} 1/3 & \text{for } x=-1 \\ 1/3 & \text{for } x=0 \\ 1/3 & \text{for } x=1 \end{cases}$$

marginalfordelingen $h(y)$:

$f_Y(0)=f_Y(1)=f_Y(2)=1/3$ som gir marginalfordelingen:

$$h(y)=\begin{cases} 1/3 & \text{for } y=0 \\ 1/3 & \text{for } y=1 \\ 1/3 & \text{for } y=2 \end{cases}$$

Forventning og varians for X og Y:

Forventning $E(X)$: $\sum_x x\,g(x)=(-1+0+1)\frac{1}{3}=\underline{\underline{0}}$

$E(Y)$: $\sum_y y\,h(y)=(0+1+2)\frac{1}{3}=\underline{\underline{1}}$

Varians for X $Var(X)$: $E(X^2)-(E(X))^2=\frac{2}{3}-0=\underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

$E(X^2)=\sum_x x^2 g(x)=((-1)^2+(1)^2)\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

Varians for Y $Var(Y)$: $E(Y^2)-(E(Y))^2=\frac{5}{3}-1=\underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

$E(Y^2)=\sum_y y^2 h(y)=(1^2+2^2)\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$

$cov(X,Y)=E(XY)-\underbrace{E(X)E(Y)}_{=0}=\underline{\underline{\frac{1}{6}}}$

$E(XY)=\sum_x\sum_y x\cdot y\cdot f(x,y)=(-\frac{1}{12})+(-2\cdot\frac{1}{12})+(\frac{1}{12})+(2\cdot\frac{1}{6})=\frac{1}{6}$

X og Y er avhengige av hverandre siden $cov(X,Y)\neq 0$.

Oppgave 2)

Stokastisk variabel X som er antall kast:

Kast 1: $P(X=1)=0$

2: $P(X=2)=1/6$ (sjansen for å treffe samme tall på nytt)

3: $P(X=3)=2/6 \cdot 5/6 = 5/18$

4: $P(X=4) = 3/6 \cdot 4/6 \cdot 5/6 = 5/18$

5: $P(X=5) = 4/6 \cdot 3/6 \cdot 4/6 \cdot 5/6 = 5/27$

6: $P(X=6) = 5/6 \cdot 2/6 \cdot 3/6 \cdot 4/6 \cdot 5/6 = 25/324$

7: $P(X=7) = 1 \cdot 5/6 \cdot 4/6 \cdot 3/6 \cdot 2/6 \cdot 1/6 = 5/324$

Vi multipliserer sannsynligheten for å få noe vi har fått før m/ sannsynligheten for å få noe nytt. Dette fungerer siden $P(X=4)$ (f.eks) regner med at en ikke traff på de tre første kastene.

Summen av disse blir 1, som tyder på at det er riktig fordeling.

Oppgave 3)

Stokastisk variabel X er kontinuerlig fordelt m/ sannsynlighetstetthet:

$$f_X(x) = \begin{cases} nx^{n-1}, & 0 < x \leq 1 \\ 0 & ; \text{ellers.} \end{cases}$$

$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ om $f(t)=$ sannsynlighetstetthet

Fordelingsfunksjonen $F(X)$ betyr kumulativ fordeling:

kumulativ fordeling: $F(X) = P(X \leq x) = \int_0^x nt^{n-1} = [t^n]_0^x$

$= \underline{\underline{x^n}}$ kun definert mellom 0 og 1

$P(\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4})$ for $n=1$:

$$\int_{1/4}^{3/4} x^0\,dx = \int_{1/4}^{3/4} dx = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$P(\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4})$ for $n=2$:

$$\int_{1/4}^{3/4} 2x\,dx = [x^2]_{1/4}^{3/4} = \left(\frac{9}{16} - \frac{1}{16}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Medianen til X:
Vil ha a slik at $P(-\infty < X < a) = \frac{1}{2}$

$$\int_0^a nx^{n-1}\,dx = \int_a^1 nx^{n-1}\,dx$$ setter inn $n=1$

$n=1$: $\int_0^a 1\,dx = \int_a^1 1\,dx = \frac{1}{2} =$

$a = 1-a \rightarrow 2a = 1 \rightarrow a = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$ median for $n=1$

$n=2$:

$$\int_0^a 2x\,dx = \int_a^1 2x\,dx \Rightarrow \begin{array}{l} a^2 = 1-a^2 \\ 2a^2 = 1 \end{array} \text{ gir } a = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

$E(X)$ når $n=1$: $\int_0^1 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$ Denne er lik medianen for $n=1$.

$E(X)$ når $n=2$: $\int_0^1 2x^2 = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$ Denne er ikke lik medianen for $n=2$.

Oppgave 4)

Kumulativ fordelingsfunksjon $F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha}\right)$; $x > 0$

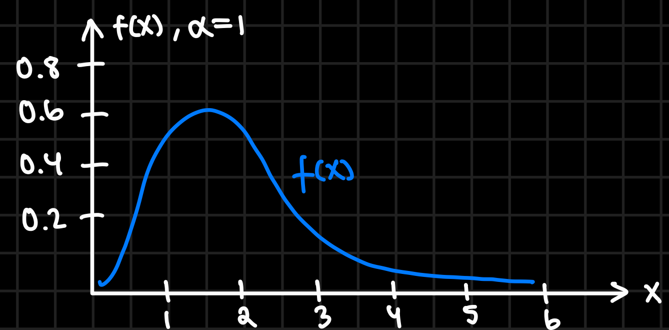
a) sannsynlighetstettheten til X er gitt ved $F'(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left(1 - e^{-\frac{1}{2\alpha}x^2}\right) = -e^{-\frac{1}{2\alpha}x^2} \cdot -\frac{x}{\alpha} = \underline{\underline{\frac{e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}}{\alpha} x}} = f(x)$$

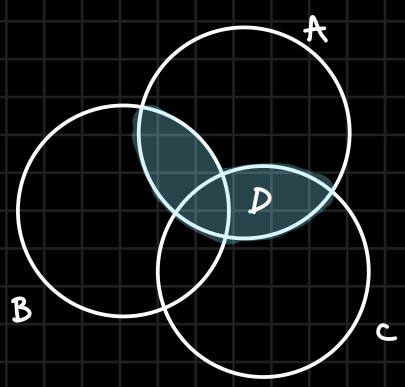
$$f'(x) = \frac{1}{\alpha}\exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha}\right) + \frac{x}{\alpha}\exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}\exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha}\right) - \frac{x^2}{\alpha^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha}\right) = 0$$

$$\underbrace{\exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha}\right)}_{\text{alltid større enn 0}}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{x^2}{\alpha^2}\right) = 0$$

$$\frac{x^2}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha} \rightarrow \underline{\underline{x = \sqrt{\alpha}}}$$



b)



$D = A \cap (B \cup C)$

$F(2) = 1 - e^{-2} = P(X \leq 2)$

$P(D) = P(A \cap (B \cup C)) = P(A \mid B \cup C)P(B \cup C)$

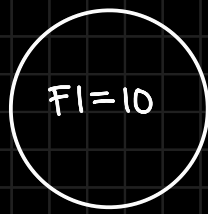
$P(A) = P(B) = P(C) = 1 - P(\bar{A}) = e^{-2}$

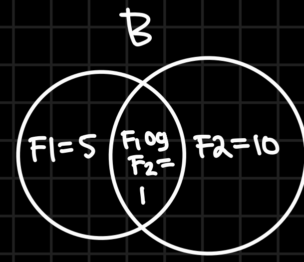
A, B og C er uavhengige $\rightarrow P(A \mid B \cup C) = P(A)$
$P(D) = P(A)P(B \cup C)$

$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B)P(C)$
$= 2e^{-2} - e^{-4}$

$P(D) = \underline{\underline{e^{-2}(2e^{-2} - e^{-4}) = 0.034}}$

Oppgave 5)

a) Venndiagram A: 

Venndiagram B: 

$$P(F_1 \mid B) = \underline{\underline{\frac{5}{100}}}$$

Må bruke choose-operator for neste scenario: trekke en m/ kun F1 og en m/ kun F_2 fra B: gir dette tilfellet bokstaven E:

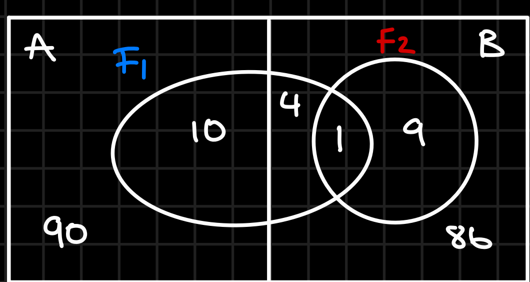
$$P(E): \frac{\binom{10-1}{1}\binom{5-1}{1}}{\binom{100}{2}} = \frac{\left(\frac{9!}{1!\cdot 8!}\right)\left(\frac{4!}{1!\cdot 3!}\right)}{\left(\frac{100!}{2!\,98!}\right)} = \underline{\underline{\frac{2}{275}}}$$

$(10-1)C\,1$ = trekke kun én F_2

$(5-1)C\,1$ = trekke kun én F_1

tar −1 fra 10 og 5 fordi det er én boks som har begge feilene, og den skal vi ikke ha.

b) må danne en partisjon som består av A og B:



ting vi vet:
- F_2 er kun i B
- F_1 og F_2 kan være i begge
- 1 boks har begge

P(to feilfrie og én m/ feil F_1) = P(C)

$$P(C) = P(A)\cdot P(C\mid A) + P(B)\cdot P(C\mid B)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot P(C\mid A) + \frac{1}{2}\cdot P(C\mid B)$$

$P(C \mid A)$ = bruker choose:

$$\frac{\binom{10}{1}\binom{90}{2}}{\binom{100}{3}} = \frac{\text{"velger én m/}F_1\text{"}\cdot\text{"to feilfrie"}}{\text{"velger tre bokser"}}$$

$$= 0.248$$

$$P(C\mid B) = \frac{\binom{4}{1}\binom{86}{2}}{\binom{100}{3}} = 0.090$$

$$P(C) = \frac{1}{2}(0.09) + \frac{1}{2}(0.248) = \underline{\underline{0.169}}$$

Sannsynligheten for at boksene kom fra A:

Bayes regel:

$$P(A\mid C) = \frac{P(C\mid A)\cdot P(A)}{P(C)} = \frac{0.248\cdot\frac{1}{2}}{0.169} = \underline{\underline{0.734}}$$

c) Bare F_1 : −10kr i inntekt   197 bokser
$F_1 \cup F_2$: −160kr i inntekt   13 av dem har F_1, 9 av dem har F_2 og 1 har begge

Tilfeller: 1) gir en inntekt på $((197)\cdot(10kr)$
$- (13 \cdot 10 kr)$ bare F_1
$- (160 \cdot 10)$ $F_1 \cup F_2$
$= \underline{\underline{240 kr}}$

2) mengde i resterende stabel: 97 bokser

$$P(C \text{ er fra enten A eller B}) = f(x) = \begin{cases} 0.7326 , & x = A \\ 1 - 0.7326 , & x = B \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} (97 \cdot 10) - (9 \cdot 10) , & x = A \\ (97 \cdot 10 - 3 \cdot 10 - 1600) , & x = B \end{cases}$$ mengde bokser

$$E(g(x)) = (880)(0.7326) + (840 - 1500)(1 - 0.7326)$$
$$= \underline{\underline{468.20 kr}}$$

3) Selge alle i den andre stabelen:
INKLUDERT DE SOM ER TESTET:
Siden det gjelder den andre stabelen,
kan vi bare snu sannsynlighetene:

$$= (1000 - 10)(1 - 0.7326) + (1000 - 40 - 1600)(0.7326)$$
$$= \underline{\underline{-228.20 kr}}$$

4) 0kr.

<u>2) er det beste tilfellet.</u>