Skriftlig innlevering 3 - blokk 1

Oppgave 1)

a) $E(X) = 3315$, $Var(X) = 575^2$

Siden det er normalfordeling, er $\mu = 3315$ og $\sigma = 575$
Skifter og skalerer fordelinga slik at $E(X) = 0$ og $Var(X) = 1$:

$$z = \frac{X-\mu}{\sigma} \rightarrow \frac{3000-3315}{575} = -0.548$$

1)

$P(z < -0.548) = 0.2912$ fra tabell

$P(X > 3000) = 1 - 0.2912 = \underline{\underline{0.709}}$

2)

$$P(3000 < X < 3500) = P(X < 3500) - \underbrace{P(X < 3000)}_{0.2912}$$

Finner $P(X < 3500)$ på samme måte som i 1)

$$z = \frac{3500-3315}{575} = 0.322 \;,\; P(z < 0.322) = 0.6255$$

Endelig sannsynlighet: $0.6255 - 0.2912 = \underline{\underline{0.3343}}$

3)

$$P(X > 3500 \mid X > 3000) = \frac{P(X > 3500 \cap X > 3000)}{P(X > 3000)} = \frac{P(X > 3500)}{P(X > 3000)}$$

$$= \frac{1-0.6255}{0.709} = \underline{\underline{0.528}}$$

b) Y er binomisk fordelt om vi antar:

- enten er barnet undervektig eller ikke (to ulike utfall)
- barna er uavhengige av hverandre (ingen søsken)
- alle barna har like stor sannsynlighet for undervektighet

$$P(Y > 0) = 1 - \binom{100}{0}(1-0.01)^{100} = 1 - 0.366 = \underline{\underline{0.634}}$$

$$P(Y > 1 \mid Y > 0) = \frac{P(Y > 1)}{P(Y > 0)} = \frac{-\binom{100}{1} \cdot 0.01(1-0.01)^{100-1} + 0.634}{0.634}$$

$$\frac{1 - P(Y=0) - P(Y=1)}{P(Y=0)} \qquad = \underline{\underline{0.416}}$$

Oppgave 2)

a) $p(x;7) = \frac{7^x}{x!} e^{-7}$, $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 0)$ fra tabell
$1 - 0.0009$
$= \underline{\underline{0.9991}}$

$$P(X \leq 2 \mid X \geq 1) = \frac{P(X \leq 2)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X=2)+P(X=1)}{0.9991} = \frac{\left(\frac{7^2}{2} + \frac{7^1}{1}\right)e^{-7}}{1-e^{-7}} = \underline{\underline{0.029}}$$

(ikke inkluder $P(X=0)$ i teller)

b) Poisson A: $p(x;5) = \frac{5^x}{x!} e^{-5}$, Poisson B: $p(x;15) = \frac{15^x}{x!} e^{-15}$

Poisson C: $p(x;20) = \frac{20^x}{x!} e^{-20}$, $p_a = 0.5$
$p_b = p_c = 0.25$

Marginal sannsynlighetsfordeling:

Vi vet $p(x \mid A)$, $p(x \mid B)$ og $p(x \mid C)$ og skal finne $p(x)$.
Må finne marginalfordeling til hver av dem og summere den sammen.
(diskret = summere)

$$= \underline{\underline{\frac{5^x}{x!} e^{-5} \cdot p_a + \frac{15^x}{x!} e^{-15} \cdot p_b + \frac{20^x}{x!} e^{-20} \cdot p_c}}$$

hver av dem har en marginalfordeling = p · fordeling

$E(X) = (5 \cdot 0.5) + (15 \cdot 0.25) + (20 \cdot 0.25) = \underline{\underline{11.25}}$
forventning · sannsynlighet

Oppgave 3)

10% = 20000 timer (type A) , X = levetid til komponent
90% = 50000 timer (type B)

Vil finne $P(X > 60000)$. Kan prøve å finne $P(X > 60000 \mid A)$ og $P(X > 60000 \mid B)$.

$E(X_A) = 20000$, $\lambda_a = 5 \cdot 10^{-5}$

$E(X_b) = 50000$, $\lambda_b = 2 \cdot 10^{-5}$

$P(X_a > 60000) = 1 - P(X_a \leq 60000) = 1 - F(60000)$ hvor F er den kumulative fordelingsfunksjonen $1 - e^{\lambda x}$.

$1 - F(60000) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{20000} \cdot 60000}) = 0.0498$

Tilsvarende for type B gir $P(X_b > 60000) = 0.301$

$P(X > 60000) = P(A)P(X_A > 60000) + P(B)P(X_B > 60000)$

$= 0.1(0.0498) + (0.9)(0.301) = \underline{\underline{0.276}}$

Oppgave 4)

a) P(gjetter riktig kode) $= \left(\frac{1}{10}\right)^4 = \underline{\underline{\frac{1}{10000}}}$

X er geometrisk fordelt siden vi har en $p = 1/10000$ for et forsøk m/ to tilfeller: suksess eller feil, og forsøket avsluttes etter den første suksessen.

P(ringer nr. 300 gjetter riktig) $= 1/10000\,(1 - 1/10000)^{300-1} = \underline{\underline{9.7 \cdot 10^{-5}}}$

b) sifferet 7 forekommer to ganger: $m = 486$

$$(9^2)\cdot\binom{4}{2} = \underline{\underline{486}}$$

måter å plassere sifrene 7 og 7 på

måter å bestemme de to resterende sifrene

$p = 1/486$ gir en $E(X) = 486$ $(E(X) = 1/p)$ hvor $E(X)$ = antall gjett til suksess

486/2 minutter = $\underline{\underline{243 \text{ minutter}}}$

c) $P(Y=y)$, ser på $P(Y=1)$ osv. for å finne et mønster:

Utfallsrommet til $Y = \underline{\underline{\{1, 2, \ldots, 486\}}}$ alle mulige Y

Dette likner på terning fra forrige øving:

$$P(Y=1) = \frac{1}{m}, \quad P(Y=2) = \frac{1}{m-1}\cdot\underbrace{\frac{484}{485}}_{\text{sjanse for å gjette feil}}, \quad P(Y=3) = \frac{1}{m-2}\left(\frac{483}{484}\right)$$

$$P(Y=y) = \underbrace{\frac{1}{(m+1)-y}}_{P(\text{rett})} \cdot \underbrace{\frac{(m+1)-(y+1)}{(m+1)-y}}_{P(\text{feil nå})}$$

← må summere $\underline{\text{alle}}$ disse

P(første person tar feil) $= \frac{m-1}{m}$

$$P(Y=y) = \frac{1}{\cancel{(m+1)-y}} \cdot \left(\frac{\cancel{(m+1)-y}}{\cancel{(m+1)-(y-1)}}\right) \cdot \left(\frac{\cancel{(m+1)-(y-1)}}{(m+1)-\cancel{(y-2)}}\right) \cdot \ldots \cdot \frac{\cancel{m-1}}{m} = \underline{\underline{\frac{1}{m}}}$$

Forventningen m/ denne sannsynlighetsfordelingen:

$$E(Y) = \sum_{y=1}^{m} y \cdot P(Y=y) = \sum_{y=1}^{486} \frac{y}{m} = \frac{1}{486}\sum_{y=1}^{486} y = \frac{\cancel{486}(486+1)}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{486}}$$

$= \underline{\underline{243{,}5 \text{ forsøk, som tilsvarer 121 min, 45 sekunder.}}}$

Oppgave 5)

a) $\beta = \pi/8$ gir en $F(y; \frac{\pi}{8}) = P(Y \leq y) = \frac{1 - \exp(-y/(\pi/8))}{1 - \exp(-\pi/(\pi/4))}$

$$P(Y > \tfrac{\pi}{4}) = 1 - P(Y \leq \tfrac{\pi}{4}) = 1 - 0.8807 = \underline{\underline{0.1192}}$$

$$P(\tfrac{\pi}{4} < Y < \tfrac{\pi}{3}) = P(Y \leq \tfrac{\pi}{3}) - P(Y \leq \tfrac{\pi}{4}) = \underline{\underline{0.0671}}$$

$$P(Y > \tfrac{\pi}{4} \mid Y < \tfrac{\pi}{3}) = \frac{P(Y > \frac{\pi}{4} \cap Y < \frac{\pi}{3})}{P(Y < \frac{\pi}{3})} = \frac{0.0671}{0.4479} = \underline{\underline{0.0708}}$$

b) Vi kan få sannsynlighetstettheten ved å derivere $F(X)$, hvor

$$F(X) = \frac{1 - \exp(-y/(\beta))}{1 - \exp(-\pi/(2\beta))}, \quad F'(X) = \frac{1}{1 - \exp(-\pi/2\beta)} \cdot \frac{d}{dy}\left(1 - e^{-y/\beta}\right)$$

$$= -\frac{1}{\beta} e^{-y/\beta} \left(\frac{1}{1 - \exp(-\pi/2\beta)}\right)$$

$$f(y;\beta) = \underline{\underline{\frac{\exp(-y/\beta)}{\beta - \beta\exp(-\pi/2\beta)}}} \qquad y \in [0, \pi/2)$$

Sannsynlighetstettheten for X:

$Y = \arctan(X)$ fra figuren: $F(X; \beta) = \frac{1 - \exp(-\arctan x/(\beta))}{1 - \exp(-\pi/(2\beta))}$

Deriverer denne:

Vi får $\frac{d}{dx}(\arctan x) \cdot$ svaret i forrige oppgave:

$$f(x;\beta) = \underline{\underline{\frac{1}{1+x^2}\left(\frac{\exp(-\arctan x/\beta)}{\beta - \beta\exp(-\pi/2\beta)}\right)}}$$