1. Res. 1

Definición de los eventos:

- A_J: La moneda elegida es justa.
- A_F: La moneda elegida es falsa.
- B: Se obtiene cara en los 13 lanzamientos.

Queremos obtener las probabilidades de que la moneda elegida sea justa y falsa, lo que se define como:

$$P(A_J|B) = \frac{P(B|A_J)P(A_J)}{P(B)}$$

y

$$P(A_F|B) = \frac{P(B|A_F)P(A_F)}{P(B)}$$

Sabemos que:

- $P(A_J) = 0{,}8$, $P(A_F) = 0{,}2$.
- $P(B|A_J) = (0{,}5)^{13}$, pues si la moneda es justa, la probabilidad de obtener cara es 0.5 en cada lanzamiento.
- $P(B|A_F) = (0{,}7)^{13}$, pues si la moneda es falsa, la probabilidad de obtener cara es 0.7 en cada lanzamiento.

La probabilidad total $P(B)$ es:

$$P(B) = P(B|A_J)P(A_J) + P(B|A_F)P(A_F)$$

Sustituyendo los valores:

$$P(B) = (0{,}5)^{13} \cdot 0{,}8 + (0{,}7)^{13} \cdot 0{,}2$$

Calcular las probabilidades condicionales:

$$P(A_J|B) = \frac{(0{,}5)^{13} \cdot 0{,}8}{(0{,}5)^{13} \cdot 0{,}8 + (0{,}7)^{13} \cdot 0{,}2} = 0{,}048 = 4{,}8\,\%$$

y

$$P(A_F|B) = \frac{(0{,}7)^{13} \cdot 0{,}2}{(0{,}5)^{13} \cdot 0{,}8 + (0{,}7)^{13} \cdot 0{,}2} = 0{,}952 = 95{,}2\,\%$$

2. Res. 2

a. Determinar el valor de K

La densidad conjunta $f_{X,Y}(x, y)$ está definida sobre la región donde $9x^2 \leq y \leq 10x$. Para obtener los límites de integración, primero analizamos estas restricciones:

- De $9x^2 \leq y$, obtenemos que $x \leq \frac{\sqrt{y}}{3}$.
- De $y \leq 10x$, obtenemos que $x \geq \frac{y}{10}$.

Por lo tanto, para un valor fijo de y, los límites de integración para x son:

$$\frac{y}{10} \leq x \leq \frac{\sqrt{y}}{3}.$$

Además, para que las desigualdades sean consistentes, es necesario que $9x^2 \leq 10x$. Esto implica que x debe estar en el intervalo $0 \leq x \leq \frac{10}{9}$. Por lo tanto, el valor máximo de y ocurre cuando $x = \frac{10}{9}$, lo que da:

$$y_{\max} = 10 \times \frac{10}{9} = \frac{100}{9}.$$

Por lo tanto, los límites de integración para y son de 0 a $\frac{100}{9}$.

Para encontrar el valor de K, utilizamos la condición de que la integral de la densidad conjunta sobre todo su dominio debe ser igual a 1:

$$1 = \int_0^{\frac{100}{9}} \int_{\frac{y}{10}}^{\frac{\sqrt{y}}{3}} Ky\, dx\, dy.$$

Primero, evaluamos la integral interna con respecto a x:

$$\int_{\frac{y}{10}}^{\frac{\sqrt{y}}{3}} dx = \frac{\sqrt{y}}{3} - \frac{y}{10}.$$

Sustituyendo esta expresión en la integral total, tenemos:

$$1 = K \int_0^{\frac{100}{9}} y \left(\frac{\sqrt{y}}{3} - \frac{y}{10} \right) dy.$$

Expandimos la expresión:

$$1 = K \int_0^{\frac{100}{9}} \left(\frac{y^{3/2}}{3} - \frac{y^2}{10} \right) dy.$$

Ahora resolvemos las integrales por separado:

$$\int_0^{\frac{100}{9}} \frac{y^{3/2}}{3}\, dy = \frac{2}{15} \left(\frac{100}{9} \right)^{5/2},$$

$$\int_0^{\frac{100}{9}} \frac{y^2}{10}\, dy = \frac{1}{30} \left(\frac{100}{9} \right)^{3}.$$

Sustituyendo estos valores en la expresión anterior:

$$1 = K \left[\frac{2}{15} \left(\frac{100}{9} \right)^{5/2} - \frac{1}{30} \left(\frac{100}{9} \right)^{3} \right].$$

Calculando los términos numéricos:

$$\left(\frac{100}{9} \right)^{5/2} = \frac{100^{5/2}}{9^{5/2}} = \frac{100000}{243},$$

$$\left(\frac{100}{9} \right)^{3} = \frac{100^3}{9^3} = \frac{1000000}{729}.$$

Sustituyendo estos valores en la expresión de K:

$$1 = K \left[\frac{2}{15} \times \frac{100000}{243} - \frac{1}{30} \times \frac{1000000}{729} \right].$$

Calculamos cada término:

$$\frac{2}{15} \times \frac{100000}{243} = 54{,}870,$$

$$\frac{1}{30} \times \frac{1000000}{729} = 45{,}725.$$

Entonces,

$$1 = K \left[54{,}870 - 45{,}725 \right],$$

$$1 = K \times (9{,}145).$$

Finalmente, despejamos K:

$$K = \frac{1}{9{,}145} \approx 0{,}109.$$

b. La densidad marginal $f_Y(y)$

La densidad marginal de Y se obtiene integrando la densidad conjunta $f_{X,Y}(x,y)$ con respecto a x:

$$f_Y(y) = \int_{\frac{y}{10}}^{\frac{\sqrt{y}}{3}} Ky\, dx.$$

Sustituyendo K y evaluando la integral:

$$f_Y(y) = Ky\left(\frac{\sqrt{y}}{3} - \frac{y}{10}\right).$$

Sustituyendo $K \approx 0{,}109$:

$$f_Y(y) = 0{,}109y\left(\frac{\sqrt{y}}{3} - \frac{y}{10}\right), \quad 0 \leq y \leq \frac{100}{9}.$$

Expandimos y simplificamos:

$$f_Y(y) = 0{,}109y\left(\frac{y^{1/2}}{3} - \frac{y}{10}\right).$$

c. La densidad condicional $f_{X|Y}(x|y)$

La densidad condicional de X dado Y se encuentra usando la fórmula:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}.$$

Sustituyendo $f_{X,Y}(x,y) = Ky = 0{,}109$ y $f_Y(y) = 0{,}109y\left(\frac{\sqrt{y}}{3} - \frac{y}{10}\right)$:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{0{,}109y}{0{,}109y\left(\frac{\sqrt{y}}{3} - \frac{y}{10}\right)}.$$

Simplificando:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{\frac{\sqrt{y}}{3} - \frac{y}{10}} = \frac{30}{10\sqrt{y} - 3y}, \quad \frac{y}{10} \leq x \leq \frac{\sqrt{y}}{3}.$$

3. Res. 3

La resolución está en el siguiente link: