Trabajo práctico 2

José Pérez Galindo

24 de mayo de 2025

1. Res. 1

Dada una variable aleatoria discreta X que puede tomar los valores $0, 1, 2, 3$ con probabilidades:

$$P(X=0)=\frac{\theta}{3}, \quad P(X=1)=\frac{2\theta}{3}, \quad P(X=2)=\frac{1-\theta}{3}, \quad P(X=3)=\frac{2(1-\theta)}{3}$$

y los datos observados $(2,2,1,3,2,2,3,2,0,2)$, procedemos a estimar el valor de θ mediante el método de máxima verosimilitud.

A partir de lo datos, la frecuencias de cada valor son:

$$n_0=1, \quad n_1=1, \quad n_2=6, \quad n_3=2$$

La función de verosimilitud está definida por:

$$L(\theta)=\left(\frac{\theta}{3}\right)^{n_0}\left(\frac{2\theta}{3}\right)^{n_1}\left(\frac{1-\theta}{3}\right)^{n_2}\left(\frac{2(1-\theta)}{3}\right)^{n_3}$$

Aplicamos logaritmo a amba parter para obtener la log-verosimilitud:

$$\log L(\theta)=n_0\log\left(\frac{\theta}{3}\right)+n_1\log\left(\frac{2\theta}{3}\right)+n_2\log\left(\frac{1-\theta}{3}\right)+n_3\log\left(\frac{2(1-\theta)}{3}\right)$$

Derivamos respecto a θ:

$$\frac{d}{d\theta}\log L(\theta)=\frac{n_0}{\theta}+\frac{n_1}{\theta}-\frac{n_2}{1-\theta}-\frac{n_3}{1-\theta}$$

Igualamos a cero para encontrar el valor de θ que maximiza la función:

$$\frac{n_0+n_1}{\theta}=\frac{n_2+n_3}{1-\theta}.$$

Reorganizamos la ecuación:

$$(n_0+n_1)(1-\theta)=\theta(n_2+n_3).$$

Desarrollamos:

$$n_0+n_1-(n_0+n_1)\theta=\theta(n_2+n_3),$$
$$\theta\big((n_2+n_3)+(n_0+n_1)\big)=n_0+n_1,$$
$$\theta=\frac{n_0+n_1}{n_0+n_1+n_2+n_3}$$

Sustituimos los valores observados:

$$\theta=\frac{1+1}{1+1+6+2}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

2. Res 2.

Dado el modelo cuadrático:

$$Y = a + bx + cx^2,$$

y los datos:

X	Y
4	8
6	39
14	143
19	360
24	439

queremos encontrar los estimadores de mínimos cuadrados para a, b, y c.

El sistema de ecuaciones está definido por:

$$\begin{cases} \sum Y = na + b\sum X + c\sum X^2 \\ \sum XY = a\sum X + b\sum X^2 + c\sum X^3 \\ \sum X^2Y = a\sum X^2 + b\sum X^3 + c\sum X^4 \end{cases}$$

A partir de los datos, calculamos las sumatorias:

X	Y	X^2	X^3	X^4	$X \cdot Y$	$X^2 \cdot Y$
4	8	16	64	256	32	128
6	39	36	216	1296	234	1404
14	143	196	2744	38416	2002	28028
19	360	361	6859	130321	6840	129960
24	439	576	13824	331776	10536	252864
67	989	1185	23707	502065	19644	412384

Sustituimos las sumatorias en el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5a + 67b + 1185c = 989, \\ 67a + 1185b + 23707c = 19644, \\ 1185a + 23707b + 502065c = 412384 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos:

$$a = -38{,}634$$
$$b = 9{,}124$$
$$c = 0{,}482$$

El modelo cuadrático estimado es:

$$Y = -38{,}634 + 9{,}124x + 0{,}482x^2$$

* Nota: La sumatoria y el sistema de ecuaciones se resolvió usando Python. El código se encuentra en el siguiente link: notebook TP2.

3. Res 3.

Los datos disponibles son que $n = 8$ clientes han sido vendidos a crédito y $k = 2$ están en mora. El modelo probabilístico para los datos es una distribución binomial:

$$P(k|p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Dado que el prior es una distribución Beta y la función de verosimilitud es binomial, la distribución a posteriori de p es también una distribución Beta con parámetros actualizados:

$$p \sim B(\alpha + k, \beta + n - k)$$

Sustituyendo los valores de $\alpha = 1$, $\beta = 5$, $k = 2$, y $n = 8$, obtenemos:

$$\alpha_{\text{posterior}} = \alpha + k = 1 + 2 = 3, \quad \beta_{\text{posterior}} = \beta + n - k = 5 + 8 - 2 = 11$$

Por lo tanto, la distribución a posteriori es:

$$p \sim B(3, 11)$$

La media y la varianza de una distribución Beta $B(\alpha, \beta)$ son:

$$\text{Media: } \mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad \text{Varianza: } \sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

Sustituyendo los valores de $\alpha = 3$ y $\beta = 11$, obtenemos:

$$\mu = \frac{3}{3 + 11} = \frac{3}{14} \approx 0{,}214, \quad \sigma^2 = \frac{3 \cdot 11}{(3 + 11)^2(3 + 11 + 1)} = \frac{33}{14^2 \cdot 15} = \frac{33}{2940} \approx 0{,}0112.$$

Por lo tanto:

$$p \sim B(3, 11), \quad \mu \approx 0{,}214, \quad \sigma^2 \approx 0{,}0112.$$