

Autour du problème des N corps

Joshua Benabou

June 7, 2018

Le problème à N-corps

Etant donné les vitesses et positions initiales de N masses ponctuelles m_i , $i = 1, 2, \dots, N$ (dans un référentiel galiléen) qui interagissent via la gravitation newtonienne, déterminer leurs trajectoires à tous les futurs instants.

Introduction au problème

- $N = 2$ (problème de Kepler): 2 corps se déplacent dans le même plan dans des sections coniques autour de leur barycentre (Bernoulli, 1734).
- $N = 3$: il n'y a pas de solution analytique générale, et le mouvement est généralement non planaire, apériodique, et chaotique (Poincaré, 1887).
- N grand (e.g les galaxies, 10^{12} étoiles): une solution explicite est impossible, on cherche une solution numérique approximative. Une **simulation à N-corps** donne des informations utiles sur l'évolution *macroscopique* du système.

- **Objectif 1:** construction d'un simulateur à $N > 1000$ corps avec un bon compromis entre la précision et le temps de calcul.
- **Objectif 2:** modélisation de "l'effondrement froid" d'un amas globulaire, étude de quelques phénomènes de dynamique stellaire: l'évolution vers l'équilibre, l'effondrement de cœur, l'échange d'énergie via binaires, et l'évaporation de l'amas.

Quelques propriétés générales d'un système à N corps

D'après la loi de la gravitation et le PFD, $\forall i \in [1, N]$:

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N -Gm_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^3}$$

Énergie potentielle du système:

$$U = \sum_{1 \leq i < j \leq N} -\frac{Gm_i m_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|}$$

Énergie cinétique du système:

$$K = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \|\vec{v}_i\|^2$$

Pour un système isolé, conservation $E = U + K$ est conservée, ainsi que la quantité de mouvement et le moment cinétique.

Construction du simulateur: organisation du programme

Langage: Python.

GUI: Pygame.

Graphes: Matplotlib.

Nb de lignes de code: ???

Nous simulons seulement des systèmes 2-dimensionnels!

Structure du code:

-initialisation

-boucle principale

1. intégration, mise a jour des paramétrés des objets particules
2. avancement du "simtime" par un pas
3. collection des données
4. affichage

-génération des graphes

Construction du simulateur: choix de l'intégrateur

Euler (d'ordre 1) donne des solutions divergentes, même pour des pas de temps relativement petits.

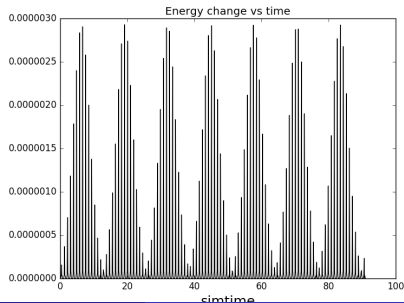
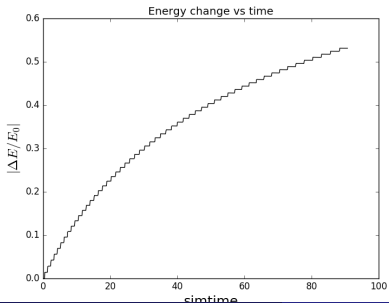
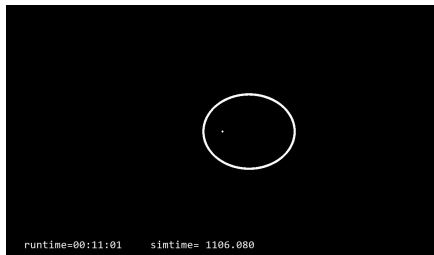
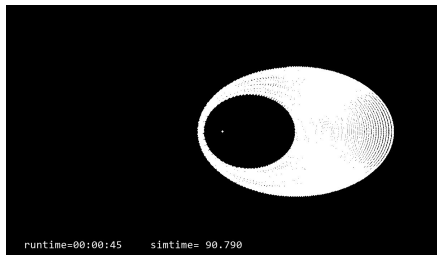
On a implémente l'algorithme de Verlet:

$$\vec{x}(t + \Delta t) = \vec{x}(t) + \vec{v}(t) \Delta t + \frac{1}{2} \vec{a}(t) \Delta t^2$$

$$\vec{v}(t + \Delta t) = \vec{v}(t) + \frac{\vec{a}(t) + \vec{a}(t + \Delta t)}{2} \Delta t$$

Verlet est d'ordre 2, réversible dans le temps, et minimise la dérive d'énergie mécanique.

Construction du simulateur: choix de l'intégrateur



Construction du simulateur: "lissage gravitationnel" et unités

Lorsque la distance entre deux corps tend vers zéro, la force entre eux tend vers l'infini, conduisant à des erreurs.

On utilise donc l'approximation

$$F_{i,j} = -\frac{Gm_i m_j}{r^2 + \epsilon}$$

où ϵ est petit et convenablement choisi pour minimiser la dérive d'énergie.

Unités: choisies arbitrairement de sorte que le système rentre dans l'écran.

En général, la simulation ne prend pas en compte les collisions.

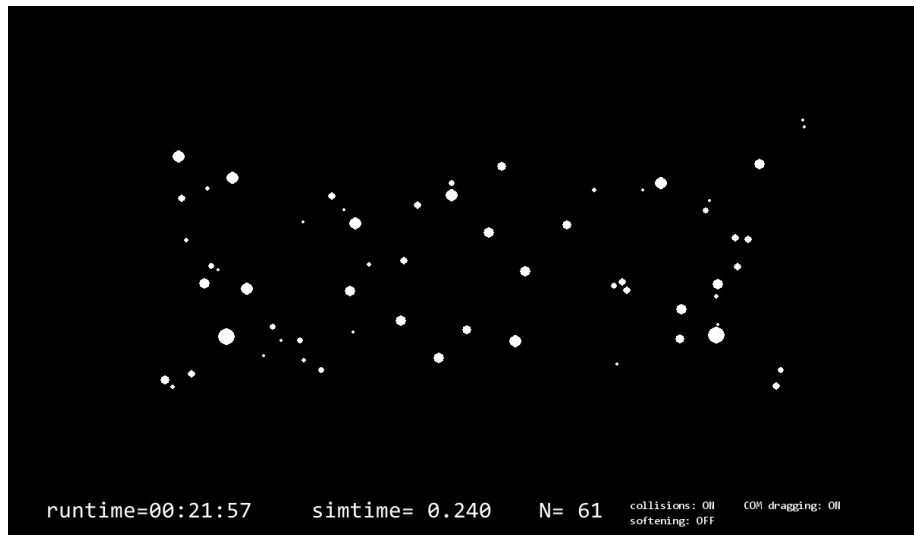
Expérience: simulation de la formation d'un système solaire

- tous les corps sont sphériques de même densité uniforme
- si deux corps entrent en contact, ils forment une seule particule
- $N_0 = 200$, masses de particules, des vitesses et des positions initialisées aléatoirement.

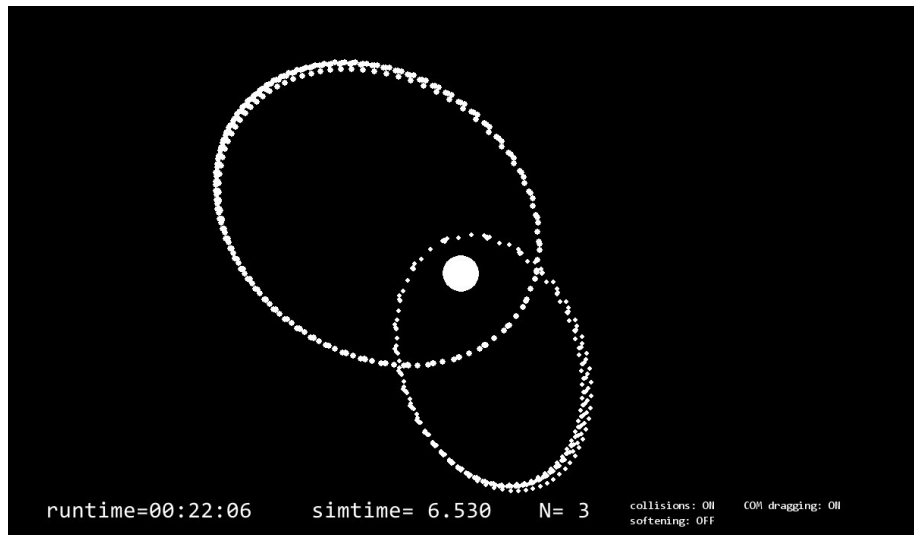
Résultats: (20 répétitions)

- Dans 14 cas, le système est rapidement réduit à une seule masse
- Les 6 autres cas, formation d'un "système solaire" avec entre 1 et 5 planètes
- Dans un cas, formation d'un système soleil-planète-lune

Construction du simulateur: collisions



Construction du simulateur: collisions



Construction du simulateur: optimisation de Barnes-Hut

Une approche directe nécessite $\binom{N}{2}$ calculs par pas de temps, complexité en $O(N^2)$.

Pour aborder $N > 100$ on a implémenté l'algorithme de **Barnes-Hut**, complexité en $O(N \ln(N))$ avec une perte de précision minimale.

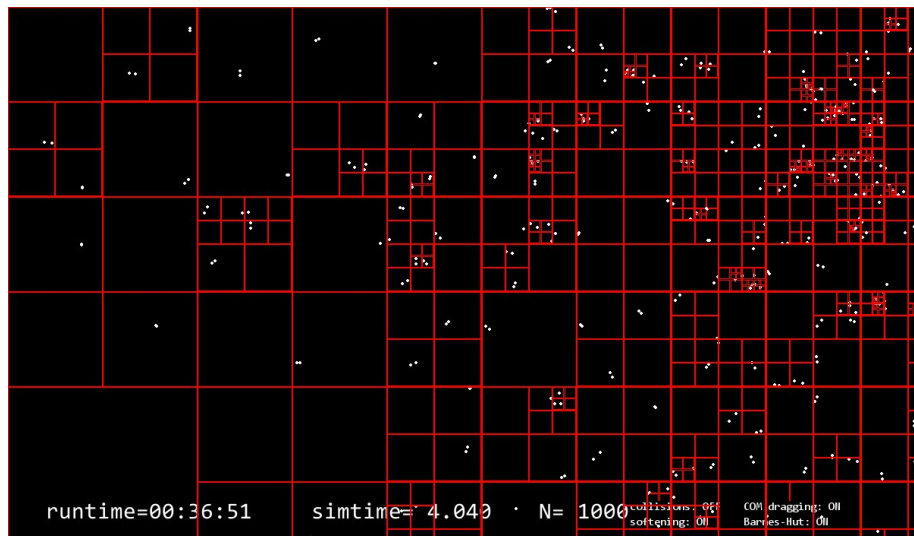
Principe: approcher la force exercée sur un corps par un groupe de corps proches en les traitant comme un seul corps.

Les corps sont stockés dans un arbre quaternaire. Chaque nœud représente une région de l'espace 2D.

La racine représente l'espace entier, ses quatre enfants représentent les quatre quadrants de l'espace.

L'espace est subdivisé récursivement en quadrants jusqu'à ce que chaque subdivision contienne 0 ou 1 corps.

Construction du simulateur: optimisation de Barnes-Hut



Construction du simulateur: optimisation de Barnes-Hut

Chaque noeud externe représente un seul corps. Chaque nœud interne représente le groupe de corps qui se trouve en dessous et stocke le barycentre et la masse totale de tous les corps de ses enfants.

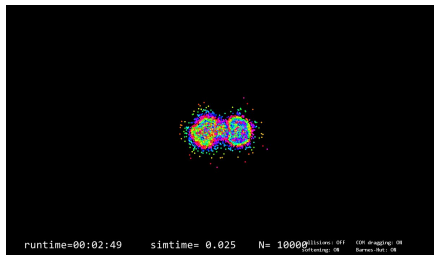
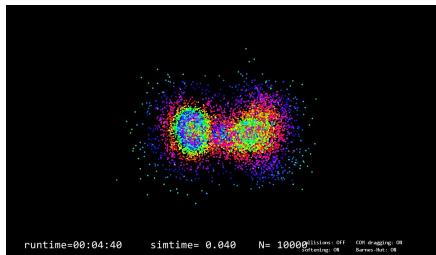
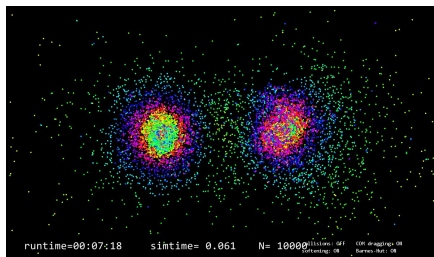
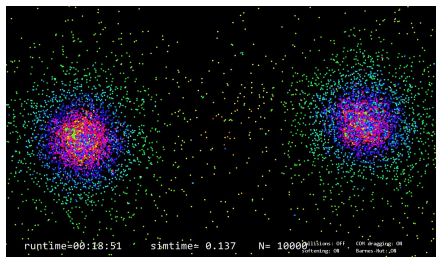
Calcul de la force sur un corps m_i : traverser les nœuds de l'arbre, en commençant par la racine

- Si le centre de masse d'un nœud interne est suffisamment éloigné de m_i (*), traite les corps contenus dans cette partie de l'arbre comme un seul corps
- Sinon, traverser récursivement chacun de ses sous-arbres.

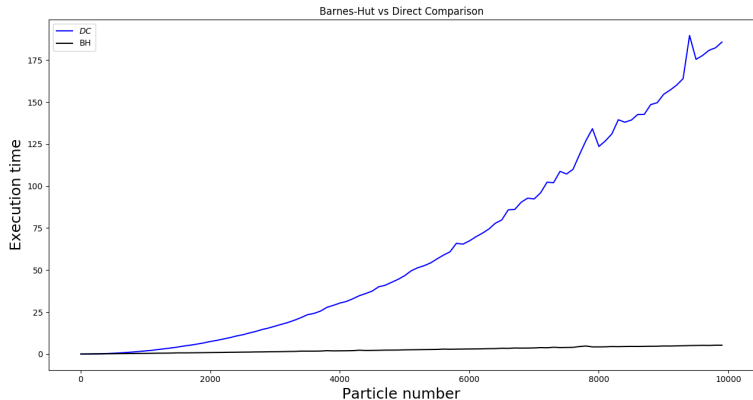
(*) si le diamètre angulaire $s/d < \theta$, où s = largeur de la région représentée par le nœud, d = distance entre m_i et le barycentre du nœud.

Construction du simulateur: optimisation de Barnes-Hut

$N = 10^4$ simulation de la collision de deux "galaxies".



Construction du simulateur: optimisation de Barnes-Hut



Théorème du viriel

Un système *borné* à N corps en équilibre satisfait: $2 \langle K \rangle + \langle U \rangle = 0$.

Par conséquent, lorsque le système se rapproche de l'équilibre ("relaxation"), $Q = -K/U$ tend vers 0,5.

Mécanisme de la relaxation dans un amas globulaire:

- Passages à proximité entre deux étoiles, $\delta v \approx v$ (fortes, rares)
- Interactions à longue-portée, $b \gg r_s$ (faibles, fréquentes)

On peut montrer que les interactions à longue-portée ont un effet plus important sur le mouvement d'une étoile dans l'amas.

Dynamique Stellaire: temps de relaxation

temps de relaxation (t_r) - le temps moyenne pour que la composante v_{\perp} de la vitesse d'une étoile soit de mémé module que sa vitesse initiale

Intuitivement, le temps pour qu'une étoile perde mémoire de sa trajectoire initiale.

Pour un système de densité numérique n dont tous les corps sont de masse égale m et la vitesse moyenne est V , un calcul probabiliste montre:

$$t_r = \frac{V^3}{8\pi G^2 m^2 n \ln(b_{\max}/b_{\min})}$$

Ex d'un amas globulaire: $V = 10 \text{ kms}^{-1}$, $n = 10^4 \text{ pc}^{-3}$, $m = M_s$,
 $t_r = 10^{11} \text{ an}$

Dynamique Stellaire: conséquences de la relaxation

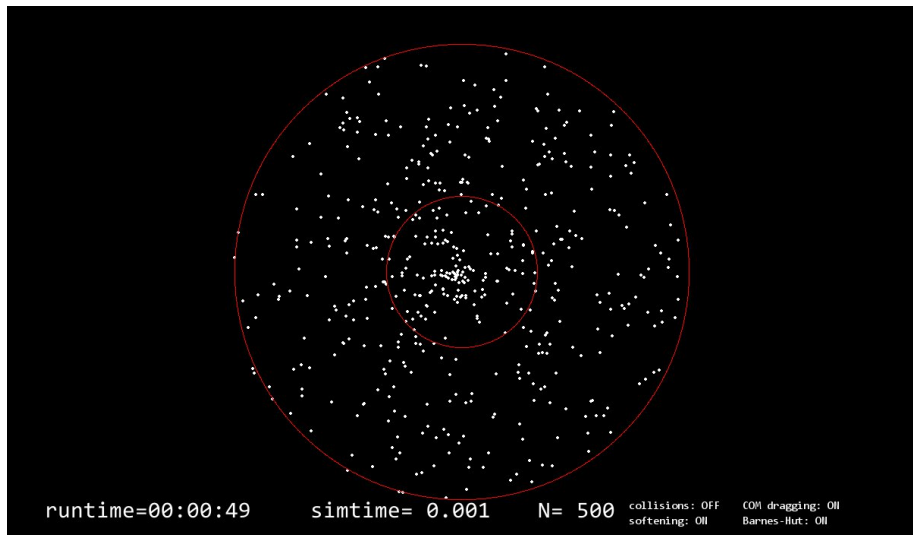
La relaxation provoque une "conduction" de l'énergie des régions chaudes (où les vitesses sont grandes, i.e le cœur) vers les régions plus froides (i.e le bord).

Les étoiles du cœur sont "refroidies", ce qui les fait tomber plus près du centre, et accélérer; les étoiles au bord sont "chauffées", ce qui les fait s'éloigner du centre et ralentir.

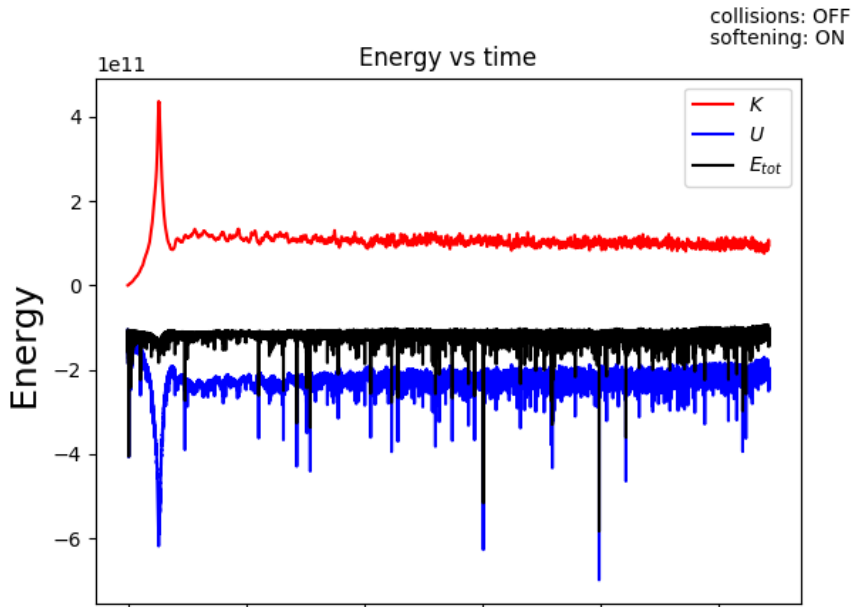
Ainsi, le gradient de température augmente et le cœur devient plus compacte (échelle de temps= t_r)

Évaporation: la relaxation permet un échange d'énergie entre étoiles. Si l'énergie totale d'une étoile devient positive, elle échappera à l'amas ($t_{evap} \approx 100t_r$)

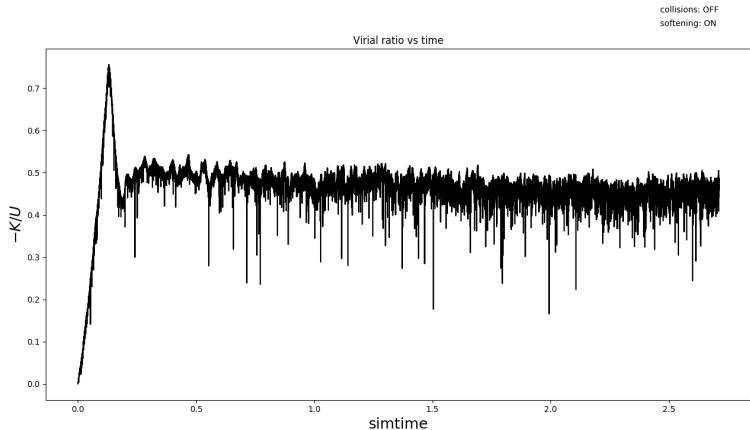
Simulation de l'effondrement froid d'un AG



Simulation de l'effondrement froid d'un AG



Simulation de l'effondrement froid d'un AG



durée= 34h, $\langle \Delta E/E_0 \rangle = 0.072$, t_r **prédit**=1.29503

Simulation de l'effondrement froid d'un AG

