组合数学基础

by zj (zj@webturing.com)

知识点概述

Definition排列:

- 部分排列:从n个不同的元素中选择m个元素的排列方案数为$P(m,n)=n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$
- 全排列$P(n,n)=n(n-1)(n-2)\ldots 2*1$ 记做$n!$

Definition组合

- 从n个不同的元素中选择r个元素的方案: $\binom{n}{r}$也记做C_n^r
  $C_n^r=\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r(r-1)\ldots 1}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$
- 组合公式:
  - $C_n^r=C_n^{n-r}$
  - $C_n^r=C_{n-1}^{r-1}+C_{n-1}^r$

Definition二项展开式（杨辉三角）

- $(a+b)^n=\sum_{i=0}^n C_n^i a^i b^{n-i}$
- 令$a=1,b=1$ 可得 $2^n=\sum_{i=0}^n C_n^i$

计数方法

- 加法公式/乘法公式:
- 容斥原理:
  - $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$
  - $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$
  - $|\cap_{i=1}^n A_i|=\ldots$
- 递推:
  - 计算F_n和F_{n-1}的关系

常用组合计算

Algorithm阶乘$n!$

- 计算$n!$精确值
  - $n\leq 12$ int/unsigned int
  - $n\leq 20$ long long/unsigned long long
  - else 模拟高精度计算
- 计算$n!$的长度 :对数/斯特林公式 $n!\approx\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$

- 计算n!的后k位 :模算术
- 计算n!的前k位 :字符串/近似计算
- 计算n!的最后一位（非零数)

组合数

- 计算C_n^r精确 $r = \lceil \frac{n}{2} \rceil$时$C_n^r$最大（一般用unsigned long long 存储)或者高精度计算
- 计算C_n^r的长度
- 计算C_n^r的后k位 :模算术
- 利用记忆化数组/递推

斐波那契（Fibonacci）$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_1 = F_2 = 1$

- 计算F_n精确值 $F_n = ((\frac{\sqrt{5}+1}{2})^n + (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^n)/\sqrt{5}$
- 计算F_n的长度
  - 计算F_n模
- 利用记忆化数组
- 矩阵快速幂

卡特兰数 $H_n = H_1 H_{n-1} + H_2 H_{n-2} + \ldots + H_{n-1} H_1$

$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, \ldots$

- 和组合数关系：$H_n = \binom{2n}{n}/(n+1) = C_{2n}^n/(n+1)$
- 括号方案
- 出栈种类

典型习题

- 从矩形从左上到右下的 方案计算（只允许向下或者向右）
- 计算长度为n不含101的二进制串个数
- [1063. 计算组合数]
- [1064. 计算斐波那契第n项]
- [n!的最后一位非0的数]

扩展

- 错位排列
- 期望（概率)
- 在线序列破解网站OEIS