Formelsammlung ExEv FS 2021

Inhaltsverzeichnis


Ich soll in der Übung immer
Fleissig vorrechnen

Einführung

Warum Experimente/Versuche?

- Besseres Verständnis reale Welt
- Ziel Verbesserung erreichen (Kostensenkung, kürzere Entwicklung, Funktionsumfang)
- Messung oder Probe auch Experiment des Augenblickzustand
- Produktionszeiten können verkürzt werden

Grundbegriffe und Unterschiede

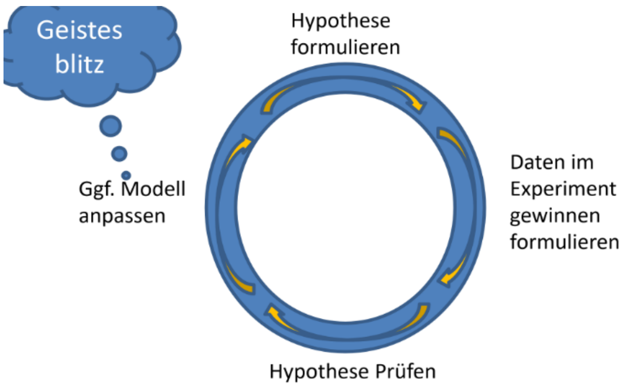
Begriff	**Erklärung**	**Beispiel**
Hypothese	Eine Hypothese ist eine Aussage deren Gültigkeit man für möglich hält, die aber nicht bewiesen oder verifiziert ist	Ich denke es hat Bier im Kühlschrank. Experiment ist dann öffnen des Kühlschrankes.
Nullhypothese	Die Nullhypothese sagt aus, dass zwischen zwei geprüften Daten kein Unterschied bzw. kein Zusammenhang besteht	
Simulation	Simulation ist das Durchführen von Experimenten am Modell anstatt am realen System.	
Zusammenhang Simulation und Experiment	Es gibt eigentlich keinen. Eine Theorie ist ein Modell, dass sich in einem bestimmten Wertebereich überprüfbar so verhält wie die physikalische Realität.	
Unterschied Modell und Theorie	Echte Daten gemessen am realen Objekt	
Empirische Daten	Simulation ist das Durchführen von Experimenten am Modell anstatt am realen System.	
Theoretische Daten	Erwartete Resultate durch die Theorie, Verteilungsfunktion liegt zu Grunde	
Testverteilung	Sollen Ergebnisse zweier Experimente verglichen werden, so wird es immer Unterschiede bzw. Variationen geben. *Die Unterschiede zwischen den Experimentiellen Ergebnissen unterliegen wieder Verteilung, diese können durch eine sogenannte Testverteilung beschrieben werden.* Dadurch lassen sich *Aussagen über die Gleichheit zweier Modelle vereinfachen.*	Bekannte Testverteilungen sind: Normalverteilung, Student-t Verteilung, chi-Quadratverteilung.

Lern-Phasen des Shewhard-Cyle

Wissenserwerb durch:

- Wahrnehmung
- Beobachten
- Lernen
- Denken und Schliessen
- Erklärungen(Modelle) finden und beschreiben
- Hypothesen formulieren & validieren

➔ Dafür braucht es Experimente (am realen System oder Modell)

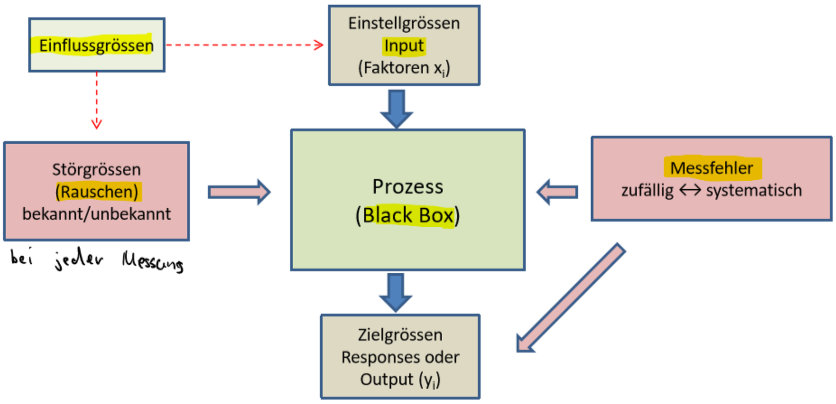


Haupthindernisse im Erkenntnisgewinn

Komplexität	- Hohe Anzahl von Faktoren oder Elementen - Vielgestaltig
Kompliziertheit	- Unbekannte, nicht verstandene oder schwierig zu beschreibende Mechanismen bzw. Zusammenhänge - Gefahr der zur grossen Vereinfachung (over simplification)
Rauschen, Dynamik	- Zeitliche Variation - Unterschiedliche Ergebnisse bei gleichen Eingangsgrössen

Das Prozessmodell des Experiments

Wichtig sind Steuergrössen, Störgrössen und Zielgrössen.



Grundbegriffe der Grössen

Begriff	Erklärung	Beispiele
Zielgrösse	Beschreiben die Grösse, die man optimieren möchte	
Einflussgrösse	Sind Grössen welche die Zielgrösse beeinflussen. Unterscheidung zwischen Steuergrössen und Störgrössen	
Steuergrössen	Eine einstellbare Grösse (die man auch für eine gewisse Zeit halten kann)	
Störgrössen	Eine Grösse deren Wert man nicht beeinflussen kann	
Faktoren	Aus allen Einflussgrössen werden die wesentlichen/relevanten Faktoren genannt. Es wird zwischen Quantitativen und Qualitativen Faktoren unterschieden	
Quantitative Faktoren	Die Werte sind auf einer Ordinalskala beschrieben	Temperatur, Füllmenge (Werte mit Zahlen zum Rechnen)
Qualitative Faktoren	Die Werte sind auf einer Nominalskala beschrieben	Name, Beschreibung oder Bezeichnungen

Vorgehensweise der Experimentdurchführung

a. Ausgangssituation und Problem beschreiben (Problembewusstsein schaffen)
b. Untersuchungsziel festlegen
c. Zielgrössen und Faktoren festlegen

Entscheidung: Das Problem kann/soll

Analytisch/ mathematisch

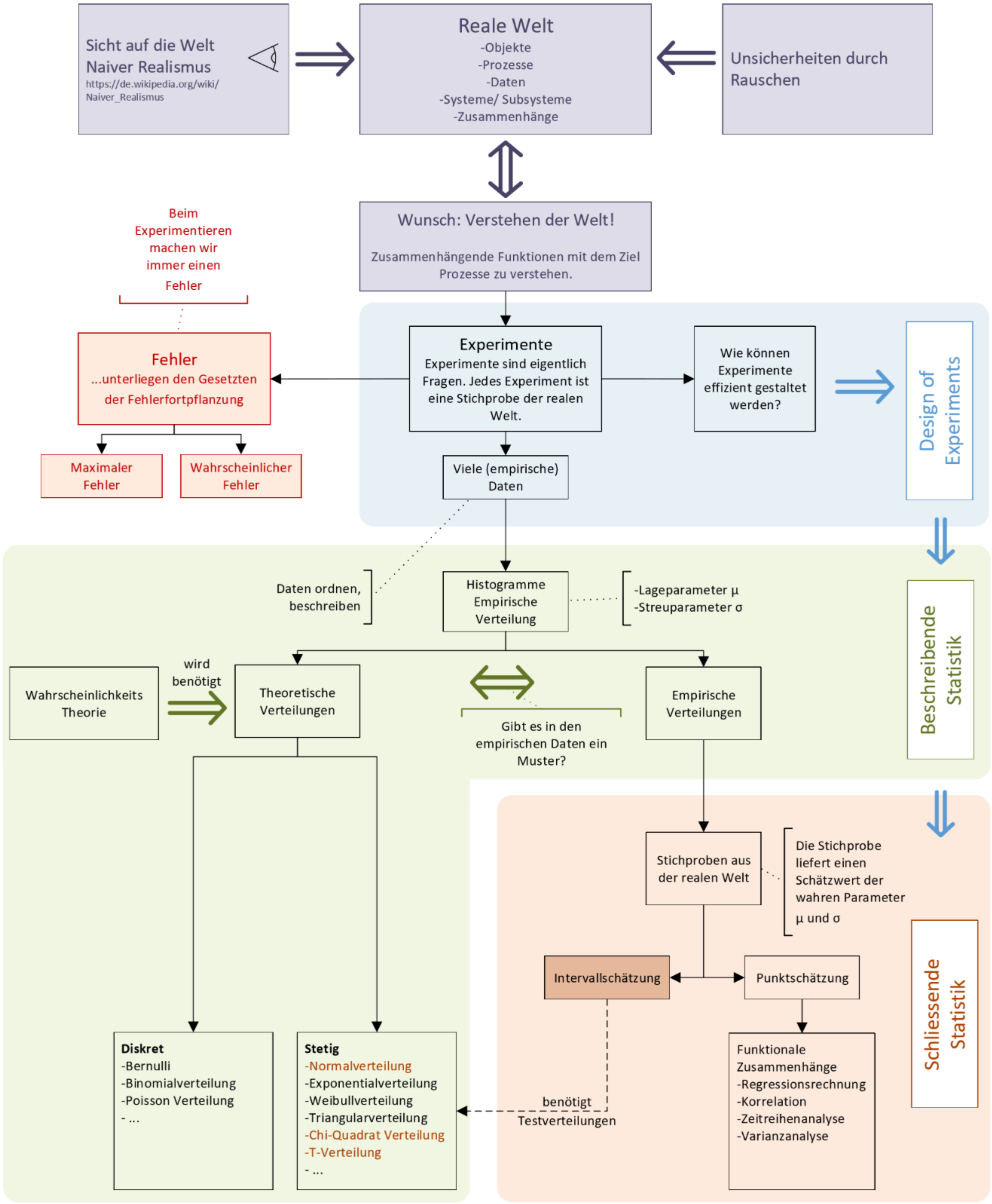
experimentell gelöst werden
d. Versuchsplan aufstellen
e. Blockbildung
f. Aufwandsabschätzung

Experiment am realen Objekt
Durchführungsplanung

Experiment am Model durch Simulation → ***Modell erstellen***

g. Versuche durchführen
h. Versuchsergebnisse auswerten
i. Ergebnisse interpretieren und Massnahmen ableiten
j. Absicherung, Dokumentation und weiteres Vorgehen

Überblick über Experimentieren und Evaluieren



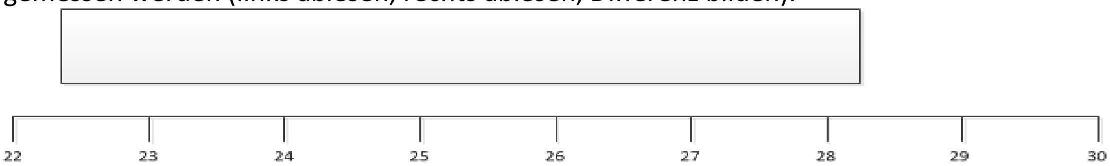
Fehlerrechnung

Es wird der Bereich abgeschätzt, in dem der tatsächliche Wert mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit liegt. Es betrifft die Fehlerfortpflanzung in der Wissenschaft.

Zu jedem gemessenen Wert, wird eine Angabe der Genauigkeit benötigt in der Wissenschaft

Bei Messgeräten wird meist der relative Fehler auf den eingestellten Wertebereich angegeben.

absoluter Fehler

<table>
<tr><td>Formel:
maximaler Fehler, ist eine Abschätzung oder*
von einer Nennwertangabe aus berechnet</td><td>Erklärung:
Angabe in Wert der Messung z.B. cm
Erklärung zu * siehe weiter unten.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Beispiel: Rechteck
Es soll die Länge L des rechteckigen Feldes im Bild unten mit einem angelegten Maßstab gemessen werden (links ablesen, rechts ablesen, Differenz bilden).


• Die Länge des Rechtecks wird gemessen zu: L = 28.15cm – 22.35cm = 5.8cm.
• Die Unsicherheit der abgelesenen Werte werden zu ± 0.05cm geschätzt;
• wie groß ist der Fehler der Differenz, also ΔL?
– ΔL = 0.05 cm + 0.05 cm = 0.1 cm, d.h. das Ergebnis der Länge L lautet: 5.8cm ± 0.1cm</td></tr>
</table>

*von einer Nennwertangabe aus den Fehler berechnen

<table>
<tr><td>Formel:
- mindestens eine halbe Einheit der letzten bedeutsamen Stelle bis
- höchstens einige (3 oder 4) Einheiten der letzten bedeutsamen Stelle</td><td>Erklärung:
Falls bei einem Nennwert die Fehlerangabe fehlt, kann diese so berechnet werden.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Beispiel Zeit:
Die Zeit t ist mit t = 15.32s angegeben. Der Fehler liegt zwischen mind. ± 0.005 bis höchstens ± 0.04s.</td></tr>
</table>

relativer Fehler

<table>
<tr><td>Formel:
absoluter Fehler / Messwert
also absoluter Fehler durch aktuellen Messwert</td><td>Erklärung:
Dabei handelt es sich um den absoluten Fehler in Bezug auf die Messung. Angabe findet in % statt.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Beispiel Weiterführung Rechteck von oben:
Messwert L = 5.8cm und absoluter Fehler ΔL = 0.1cm
Daraus ergibt sich der relative Fehler ΔL / L = 0.1cm / 5.8cm = 0.017 oder auch 1.7 %.</td></tr>
</table>

Methoden zur Fehlerrechnung:

Summen und Differenzen

<table>
<tr><td>Formel:
Bei Summen und Differenzen addieren sich absolute Fehler.</td><td>Erklärung:
Dies ist eine der Regeln in der Fehlerrechnung.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Beispiel Weiterführung Rechteck von oben:
links wurden 22.35 ± 0.05cm, rechts 28.15 ± 0.05cm gemessen. Länge L ist 28.15 – 22.35 = 5.80cm
d.h. der Fehler von 0.05cm bei 22.35cm und der Fehler von 0.05cm bei 28.15 addieren sich und ergeben: 0.10cm
das Ergebnis L lautet deshalb: 5.8cm ± 0.1cm</td></tr>
</table>

Produkte und Quotienten

<table>
<tr><td>Formel:
Bei Produkten und Quotienten addieren sich relativen Fehler.</td><td>Erklärung:
Dies ist eine der Regeln in der Fehlerrechnung.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Beispiel Weiterführung Rechteck von oben:
Die Länge L war 5.8 ± 0.1cm, die Breite B sei 0.9 ± 0.1cm bestimmen den relative Fehler für die Fläche A = L * B.
A = 5.8 * 0.9 = 5.22cm^2, d.h. der relative Fehler beträgt 0.1 / 5.8cm = 0.017 plus 0.1 / 0.9cm = 0.111 also 0.128
Wichtige Erkenntnis: der Fehleranteil der Länge L beträgt 1.7% der Fehleranteil der Breite B beträgt 11.1%. Beim Versuch das Experiment zu verbessern sollte also zuerst die Breite B betrachtet werden.
Der absolute Fehler der Fläche kann wie folgt bestimmt werden: 0.128 * 5.22cm^2 = 0.668cm^2. Das sinnvoll gerundete Ergebnis lautet A = 5.2cm^2 ± 0.7cm^2</td></tr>
</table>

Partielle Differentiation

Formel:	Erklärung:
$\Delta E = \left\lvert\frac{\delta E}{\delta x}\Delta x\right\rvert + \left\lvert\frac{\delta E}{\delta y}\Delta y\right\rvert + \left\lvert\frac{\delta E}{\delta z}\Delta z\right\rvert.$	Dies ist eine der Regeln in der Fehlerrechnung.

Beispiel: Ein Pendel mit der Länge l = 752mm ± 2mm führt 10 Schwingungen in t = 19.5s ± 0.1s aus. Die Fallbeschleunigung g berechnet sich aus:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{t^2}$$

Berechne die absolute Ableitung mit der partiellen Differentiation

$$\Delta g = \left\lvert\frac{\delta g}{\delta t}\Delta t\right\rvert + \left\lvert\frac{\delta g}{\delta l}\Delta l\right\rvert$$

$$\Delta g = \left\lvert-\frac{8\pi^2 l}{t^3}\Delta t\right\rvert + \left\lvert\frac{4\pi^2}{t^2}\Delta l\right\rvert$$

$$\Delta g = \left\lvert-\frac{8\pi^2 * 0.752}{19.5^3}0.1\right\rvert + \left\lvert\frac{4\pi^2}{19.5^2}0.002\right\rvert$$
$$\Delta g = |-0.000801| + |0.000208| = 0.00109$$

⇨ g = (0.0781 ± 0.00109) m/s²

Ableitungsregeln

Formel:	Erklärung:
Faktorregel $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$ **Summenregel** $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ **Produktregel** $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ **Kettenregel** $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ **Quotientenregel** $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$	Die Ableitungsregeln werden für die Partielle Differentiation benötigt.

Beispiel:
Eine kompliziertere Funktion abgeleitet
f(x) = $e^x + \sin(x) + \cos(x^2) - x^3 * \ln(x)$

f'(x) = $e^x + \cos(x) - \sin(x) * 2x - (3x^2 * \ln(x) + x^3 * 1/x)$

Ablauf der statistischen Untersuchung

Statistische Grundbegriffe

Statistik	Entwicklung und Anwendung von Methoden zur Erhebung, Aufbereitung, Analyse und Interpretation von Daten
Beschreibende Statistik	Vollständige Kenntnis über das Untersuchungsobjekt
Schliessende Statistik	Für Untersuchung liegen die Daten des Objekts nur zum Teil vor

Beispielerhebung: Altersstruktur der Mitarbeiter eines Spitals

Begriff	**Erklärung**	**Beispiel**
Merkmalsträger	Gegenstand der statistischen Untersuchung	Jeder Mitarbeiter des Spitals
Grundgesamtheit	Menge aller Merkmalsträger, mit übereinstimmenden Abgrenzungsmerkmalen	Menge aller Mitarbeiter des Spital
Abgrenzungsmerkmale	Festlegung wer Merkmalsträger, bzw. in der Grundgesamtheit ist.	Sachlich: zählen Personen im Mutter- oder Vaterschaftsurlaub?

(räumlich, sachlich, zeitlich)		Räumlich: alle Kliniken nehmen? Zeitlich: Alle Mitarbeiter, welche am 31.12.2014 angestellt waren.[1]
Merkmal	Eigenschaft des Merkmalträgers	Alter eines Mitarbeiters
Merkmalswert	Wert, der beim Merkmalsträger festgestellt wurde	Mitarbeiter XY ist 47 Jahre alt

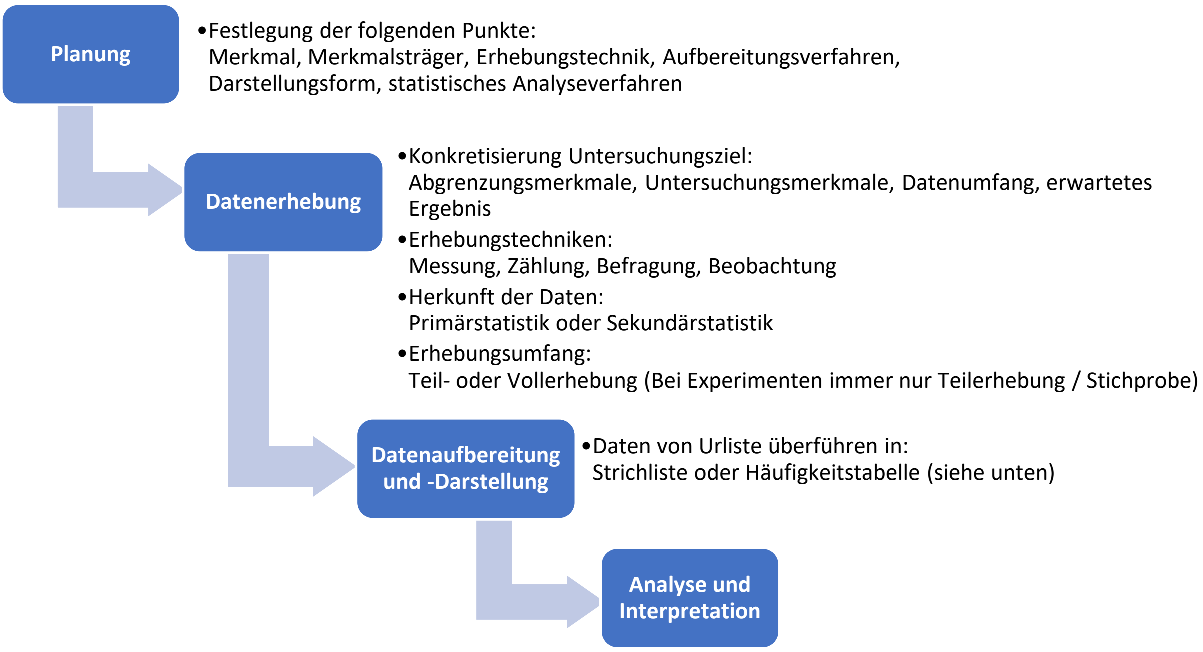
[1] existiert der Merkmalsträger über einen **langen Zeitraum**, wird für die Untersuchung ein **Zeitpunkt** festgelegt, werden hingegen **Ereignisse** untersucht, wird ein **Zeitraum/Intervall** festgelegt.

Merkmale und Skalen

Skala	Skala - Erklärung	Merkmal + Vergleich	Bsp.: Merkmal und Wert
Nominalskala	Namen abgetragen, die gleichwertig sind	**Qualitativ**, unterschiedlich oder gleich?	Familienstand: verheiratet, ledig, etc.
Ordinalskala	Klassen abgetragen, die eine Rangordnung haben	**Intensitätsmässig abgestuft oder umgekehrt**, Rangordnung	Schulnote: Sehr gut, gut, befriedigend
Intervallskala[2]	Nullpunkt ist mehr oder weniger willkürlich gewählt	**Quantitativ**, Rangordnung und Intervall, Abstände können berechnet werden	Uhrzeit: 20:00, 10:00
Verhältnisskala[2]	Null-Wert entspricht natürlichem, absoluten Nullpunkt	**Quantitativ**, Rangordnung, Intervall und Verhältnis (6 ist doppelt so gross wie 3)	Alter (Jahre): 10, 30, 45, 59, …

[2] werden oft unter dem Begriff metrische Skala oder Kardinalskala zusammengefasst (= reelle Zahlen abgetragen)

Ablauf einer statistischen Untersuchung



Häufigkeitsverteilungen

Einfache Häufigkeitsverteilung:

gibt an, wie häufig ein Merkmalswert aufgetreten ist

Formel:	Erklärung:
$n = \sum_{i=1}^{v} h_i$ $f_i = \frac{h_i}{n}$ $\sum_{i=1}^{n} f_i = 1$	h_i = absolute einfache Häufigkeit Anzahl der Merkmalsträger/Messungen mit dem Merkmalswert x_i (i = 1, .. v) f_i = relative einfache Häufigkeit Anteil der Merkmalsträger/Messungen mit dem Merkmalswert i (i: 1., .. , v) n : Gesamtzahl aller Merkmalsträger v : Anzahl verschiedener Merkmalswerte
Beispiel: Altersstruktur und Gehalt der Mitarbeiter eines Spitals n: 50 Personen	h_1 : 10 MA mit Alter 30 f_1 : 20% h_2 : 15 MA mit Alter 40 f_2 : 30% h_3 : 25 MA mit Alter 50 f_3 : 50%

Kumulierte Häufigkeitsverteilung (Summenhäufigkeit)

Formel:	Erklärung:
$H_i = h_1 + h_2 + \ldots + h_i = \sum_{a=1}^{i} h_a$ $F_i = f_1 + f_2 + \ldots + f_i = \sum_{a=1}^{i} f_a = \frac{H_i}{n} = 1$ $\sum_{i=1}^{n} f_i = 1$	H_i = absolute kumulierte Häufigkeit Anzahl der Merkmalsträger mit Merkmalswert ≤ x_i F_i = relative kumulierte Häufigkeit Anteil der Merkmalsträger mit Wert i (i: 1., .. , v)

Beispiel: wie oben, Mitarbeiter mit Alter ≤ 40
H_2 = h1 (10 MA mit Alter 30) + h2(15 MA mit Alter 40) = 25 Personen F_2 = 25 / 50 = 50%

Klassifizierte Häufigkeitsverteilung

Erklärung:
Um Verteilungen mit mehr als 10 Merkmalswerten übersichtlich darstellen zu können, werden Klassen von Merkmalswerten gebildet.

j= Klassenzahl, Vorschlag für $j_{max} = \sqrt{n}$
x_j^u : Untere Klassengrenze der Merkmalswerte x_j^o : Obere Klassengrenze der Merkmalswerte

Die relative kumulierte Häufigkeit für einen Wert x aus der j-ten Klasse lautet:

$$F(x) = F_{j-1} + \frac{x - x_j^u}{x_j^o - x_j^u} \cdot (F_j - F_{j-1})$$

Anzahl Klassengrenzen bestimmen (Sturges):
$\mathrm{m} = 1 + 3{,}32 \cdot \log(\mathrm{n})$ Klassenbreite: $\mathrm{Kb} = \frac{x_{max} - x_{min}}{m}$

Beispiel:

J	$x_j^u \leq x_i < x_j^o$	h_j	H_j	f_j	F_j
1	0 bis 40	10	10	0.2	0.2
2	40 bis 50	15	25	0.3	0.5
3	50 bis 65	25	50	0.5	1
		50		1	

relative kumulierte Häufigkeit für x = 43:

$$F(x) = 0.2 + \frac{43 - 40}{50 - 40} \cdot (0.5 - 0.2) = 0.2 + 0.3 \cdot 0.3 = 0.29$$

Häufigkeitsverteilungen und ihre Parameter

Typische Eigenschaften der Häufigkeitsverteilung können mit Hilfe von Kenngrössen, den sogenannten Parametern, beschrieben werden. Dabei werden viele Einzelinformationen zu wenigen, aber aussagekräftigen Grössen verdichtet.

Mittelwerte

Modus

Voraussetzungen: Häufigkeiten der Merkmalswerte, d.h. der Modus ist prinzipiell für jede Verteilung bestimmbar.

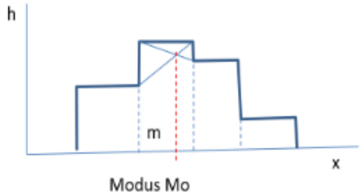
Formel:
--

Erklärung:
Derjenige Merkmalswert, **der am häufigsten** beobachtet wird.

Formel für klassifizierte Häufigkeit:

$$x_m^u + \frac{h_m - h_{m-1}}{(h_m - h_{m-1}) + (h_m - h_{m+1})} \cdot (x_m^o - x_m^u)$$

Erklärung:
h_m = Modusklasse
x_m^u = Untere Klassengrenze
x_m^o = Obere Klassengrenze



Formel für klassifizierte Häufigkeit unterschiedliche Klassenbreite:

$$x_m^u + \frac{h_m^* - h_{m-1}^*}{(h_m^* - h_{m-1}^*) + (h_m^* - h_{m+1}^*)} \cdot (x_m^o - x_m^u)$$

Erklärung:
h_m^*= Klassendichte muss anstelle Modusklasse verwendet werden. Berechet sich mit folgender Formel:

$$h_m^* = \frac{x_m^o - x_m^u}{h_m}$$

Beispiel:

Auftragswert (Tsd. €) von ...	bis unter ...	h_j
0	20	20
20	40	30
40	60	70
60	80	45
80	100	20
100	120	15

Schritt 1: Modusklasse ist die Klasse 3 (h_j = 70)→ m = 3

Schritt 2: $Mo = 40 + \frac{70-30}{(70-30)+(70-45)} * (60-40) = 52{,}3\ Tsd.$

Median

Voraussetzungen: Mindestens Ordinalskala, da die Merkmalswerte bzw. die Merkmalsträger in eine Rangordnung gebracht werden müssen.

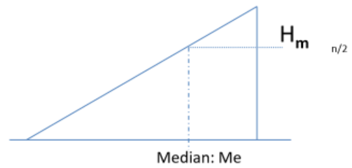
Formel für n ungerade und gerade:
Gerade: $Me = x_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$
Ungerade: $Me = \frac{1}{2}\left(x_{\left[\frac{n}{2}\right]} + x_{\left[\frac{n}{2}+1\right]}\right)$

Erklärung:
Derjenige Merkmalswert, dessen Merkmalsträger in der Rangordnung aller Merkmalsträger **genau die mittlere** Position einnimmt.

Formel für klassifizierte Häufigkeit:

$$Me = x_m^u + \frac{\frac{n}{2} - H_{m-1}}{H_m - H_{m-1})} \cdot (x_m^o - x_m^u)$$

Erklärung:
H_m = kumulierte Klassenhäufigkeit
x_m^u = Untere Klassengrenze
x_m^o = Obere Klassengrenze



Beispiel:

Forderung (€) von ...	bis unter ...	h_j	H_j
50	100	15	15
100	200	50	65
200	300	80	145
300	400	40	185
400	600	40	225
600	1000	20	245

Schritt 1: Medianklasse ist die Klasse 3 (245/2 = 122,5 → Klasse 3)

Schritt 2: $Me = 200 + \frac{122{,}5-65}{80} * (300-200) = 271{,}90$

Quantile

Formel:
analog der Berechnung des Median
$\frac{n}{4}\ statt \frac{n}{2}\ für\ Quartile$
$\frac{3n}{4}\ statt \frac{n}{2}\ für\ 3. Quartil$

Erklärung:
Ein Quantil ist ein Merkmalswert durch den die Gesamtheit in zwei Teile zerlegt.
(So wie der Median die Gesamtheit in zwei Hälften zerlegt)
50% Quantil = Median
Quartile = Zerlegung in 4 Teile (Häufig verwendet)
Dezile = Zerlegung in 10 Teile
Perzentile = Zerlegung in 100 Teile

Beispiel: (siehe Tabelle Median)

Bestimmung der 3. Quartils: Schritt 1: 75% bzw. ¾ von n = 245 ergibt die Position 183,75
Das 3. Quartil liegt in der 4. Klasse.

Schritt 2: $Q3 = 300 + \frac{183{,}75 - 145}{40} * (400 - 300) = 396{,}90$

Arithmetisches Mittel / Durchschnitt

Voraussetzungen: mindestens Intervallskala, da Addition von Merkmalswerten

Formel:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{v} x_i \cdot h_i \quad bzw.\ \bar{x} = \sum_{i=1}^{v} x_i \cdot f_i$$

Erklärung:
Das arithmetische Mittel ist der Wert, der sich bei gleichmässiger Verteilung der Summe aller beobachteten Merkmalswerte auf alle Merkmalsträger ergibt.

Formel für klassifizierte Häufigkeit:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{v} \acute{x}_i \cdot h_i \quad bzw.\ \bar{x} = \sum_{i=1}^{v} \acute{x}_i \cdot f_i$$

Erklärung:
$\acute{x}_i$ *ist der Klassenmittelwert*

Beispiel:

Forderung (€) von ...	bis unter ...	h_j	x_j'	$x_j' \cdot h_j$
50	100	15	75	1.125
100	200	50	150	7.500
200	300	80	250	20.000
300	400	40	350	14.000
400	600	40	500	20.000
600	1000	20	800	16.000
		245		78.625

Schritt 1: Bestimmung der Klassenmitten x_j' (Spalte 3)

Schritt 2: Berechnung der Produkte $x_j' * h_j$ und anschl. Addition (Spalte 4)

Schritt 3: $\frac{1}{245} * 78{,}625 = 320{,}92$

Harmonisches Mittel

Voraussetzungen: Verhältnisskala, da zur Berechnung der relativen Entfernungen die Quotienten aus Merkmalswerten gebildet werden müssen.

Formel:

$$\overline{MH} = \frac{\sum_{i=1}^{v} h_i}{\sum_{i=1}^{v} \frac{h_i}{x_i}}$$

Erklärung:
Das harmonische Mittel ist derjenige Wert, zu dem die in der Häufigkeitsverteilung vor ihm liegenden Merkmalswerte in der Summe gesehen relativ gleich weit entfernt sind wie die nach ihm liegenden Merkmalswerte.

Formel für klassifizierte Häufigkeit:
(Wie arithmetisches Mittel)

Erklärung:
--

Beispiel:
Eine Kipplore legt die Strecke von zwei Kilometern auf der Hinfahrt mit 10 km/h und auf der Rückfahrt mit 30 km/h zurück. Bestimme die mittlere Geschwindigkeit.

$$\overline{MH} = \frac{\sum_{i=1}^{v} h_i}{\sum_{i=1}^{v} \frac{h_i}{xi_i}} = \frac{(2+2)\ km}{\frac{2\ km}{10\ km/h} + \frac{2\ km}{30\ km/h}} = 15\ \frac{km}{h}$$

Geometrisches Mittel

Voraussetzungen: Verhältnisskala, wegen Division der Grössen. Alle Merkmalswerte müssen grösser als Null sein.

Formel:

$$MG = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \sqrt[n]{\frac{endwert}{anfangswert}}$$

Erklärung:
Das Geometrische Mittel ist der Wert, der mehrere aufeinanderfolgende Vervielfachungen einer Grösse als durchschnittliche Vervielfachung wiedergibt.

Beispiel:

$$\boxed{40} \xrightarrow{1.2} \boxed{48} \xrightarrow{1.25} \boxed{60} \xrightarrow{0.95} \boxed{57}$$

$$\sqrt[3]{\frac{57}{40}} = 1.125$$

Streuungsmasse

Spannweite

Voraussetzungen: Intervallskaliert, da Differenz zwischen Merkmalswerten gebildet wird.

Formel:
$R = x[n] - x[1]$

Erklärung:
Die Spannweite R ist die Differenz aus dem größten und dem kleinsten beobachteten Merkmalswert.

Formel für klassifizierte Häufigkeit:
$R = x_v^o - x_1^u$

Erklärung:
Obere Klassengrenze der letzten Klasse minus untere Klassengrenze der ersten Klasse

Beispiel:

Überstunde	0	1	2	3	4	12
Beschäftigte	3	10	4	3	2	1

R = 12 – 0 = 12

Zentraler Quartilsabstand

Voraussetzungen: Mindestens Intervallskaliert, da Abstandsberechnung

Formel:
ZQA = Q_3 - Q_1 = $x\left[\frac{3}{4} * n\right] - x\left[\frac{1}{4} * n\right]$

Erklärung:
Der zentrale Quartilsabstand ist die Entfernung zwischen den beiden Merkmalswerten, welche die in der Rangordnung zentral gelegenen 50% der Merkmalsträger eingrenzen.

Formel für klassifizierte Häufigkeit:

$$Me = x_m^u + \frac{\frac{n}{2} - H_{m-1}}{H_m - H_{m-1})} \cdot (x_m^o - x_m^u)$$

Erklärung:
Schritt 1: Bestimmung der 1. und 3. Quartilsklasse m über $x\left[\frac{n}{4}\right]$ *und* $x\left[\frac{3n}{4}\right]$
Schritt 2: Lokalisierung des Median, Anwenden der Formel (**statt n/2 --> n/4 oder 3n/4**):
Schritt 3: ZQA = Q_3 - Q_1

Beispiel:

Fehltage	0	2	5	6	7	11	12	14
h_i	4	2	2	2	4	3	2	1
H_i	4	6	8	10	14	17	19	20

$$x\left[\frac{3}{4} * 20\right] - x\left[\frac{1}{4} * 20\right] = x[15] - x[5] = 11 - 2 = 9\,Tage$$

Mittlere absolute Abweichung

Voraussetzungen: Mindestens Intervallskaliert, da Abstände der Merkmalswerte und ihrem Mittelwert zu berechnen sind. Besser geeignet als die Varianz bzw. Standardabweichung

Formel:

$$\delta = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{v} |x_i - \bar{x}| * h_i$$

Erklärung:
Die mittlere absolute Abweichung ist die durchschnittliche Entfernung aller beobachteten Merkmalswerte vom arithmetischen Mittel (alternativ: Median)
$\bar{x}$ = arithmetisches Mittel

Formel für klassifizierte Häufigkeit:

$$\delta = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{v} \left|x_j' - \bar{x}\right| \cdot h_j$$

Erklärung:
x_i durch Klassenmitte x_j' ersetzen

Beispiel:

x_i	h_i	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert \cdot h_i$
0	3	2,04	6,12
1	10	1,04	10,40
2	4	0,04	0,16
3	3	0,96	2,88
4	2	1,96	3,92
12	1	9,96	9,96
	23		33,44

Schritt 1: arithmetisches Mittel berechnen

$\frac{1}{n}\sum_i x_i = 2.04$

Schritt 2: (oder Total 4. Spalte durch Total 2. Spalte)

$$\delta = \frac{1}{n} * \sum^{v} |x_i - \bar{x}| * h_i = 1.45$$

Varianz und Standardabweichung → dienen nur als Vergleichswerte

Voraussetzungen: Mindestens Intervallskaliert, da Abstände zwischen Merkmalswerten und dem arithmetischen Mittel berechnet werden.

Formel	Erklärung
Formel: $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{v}(x_i - \bar{x})^2 h_i$ Vereinfacht: $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{v} x_i^2 h_i - \bar{x}^2$	Erklärung: Die **Varianz** ist die Summe der quadrierten Abweichungen der Merkmalswerte vom arithmetischen Mittel, dividiert durch die Anzahl der Merkmalsträger.
Formel: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$	Erklärung: Die **Standardabweichung** ist die Quadratwurzel aus der Varianz.
Formel: $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{v}(x_i - \bar{x})^2 h_i = \frac{n}{n-1}\sigma^2$	Erklärung: Die **Stichprobenvarianz** ist die Summe der quadrierten Abweichungen der Merkmalswerte vom arithmetischen Mittel, dividiert durch die Anzahl der Merkmalsträger minus Eins.
Formel für klassifizierte Häufigkeit: → x_i durch Klassenmitte x_j' ersetzen	Erklärung:

Beispiel:

x_i	h_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot h_i$
0	3	- 2,04	4,1616	12,48
1	10	- 1,04	1,0816	10,82
2	4	- 0,04	0,0016	0,01
3	3	0,96	0,9216	2,76
4	2	1,96	3,8416	7,68
12	1	9,96	99,2016	99,20
	23			132,95

Schritt 1: arithmetisches Mittel berechnen

$\frac{1}{n}\sum_i x_i = 2.04$

Schritt 2:

$\sigma^2 = \frac{1}{23} * \sum_{i=1}^{v}(x_i - \bar{x})^2 * h_i = \frac{1}{23} * 132{,}95 = 5{,}78$

Variationskoeffizienten

Voraussetzungen: Verhältnisskaliert, da Standardabweichung als Anteil des arithmetischen Mittels ausgedrückt wird.

Formel	Erklärung
Formel: $VK = \frac{\sigma}{\lvert\bar{x}\rvert} \cdot 100$	Erklärung: Der Variationskoeffizient ist der Quotient aus Standardabweichung und arithmetischem Mittel, multipliziert mit 100.

Beispiel:
Vergleich der Streuung der Leistungen eines Weitspringer W und eines Langstreckenläufer L (Achtung: **unterschiedliche Dimension** daher ist die Verwendung der **absoluten Streuung nicht erlaubt**)

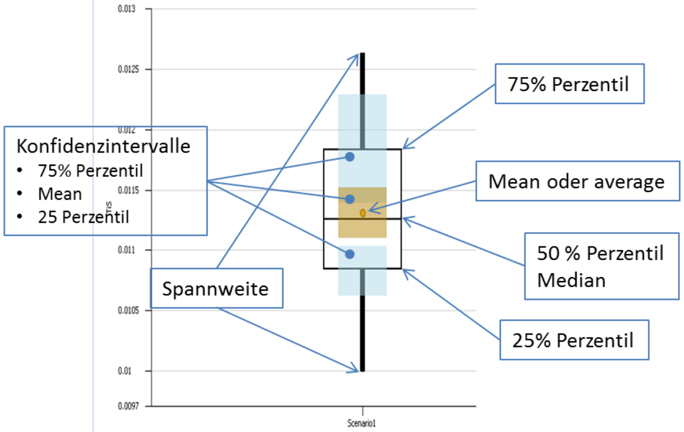
$\bar{x}_W = 7.\ 20\ m, \quad \sigma_W = 0.24\ m \qquad VK_W = \frac{0.24}{7.20} \cdot 100 = 3.3\ \%$

$\bar{x}_L = 29.4\ min, \quad \sigma_L = 0.89\ min \qquad VK_B = \frac{0.89}{29.40} \cdot 100 = 3.0\%$

Boxplot

Formel	Erklärung
Formel: --	Erklärung: Darstellung von Mittelwerten und Streuungsmassen, um einen schnellen Einblick zu erhalten.

Beispiel:



Zusammenhang zwischen zwei Merkmalen

Bei der Untersuchung des Zusammenhangs zwischen zwei Merkmalen X und Y interessieren die Fragen:
- Besteht ein Zusammenhang zwischen X und Y? (Feststellung der Abhängigkeit)
- Von welcher Form ist der Zusammenhang? (Regressionsanalyse)
- Von welcher Stärke / Intensität ist der Zusammenhang? (Korrelationsanalyse)

Begriffe

Begriff	**Erklärung**	**Beispiel**
Zeitreihe	Zusammenhang zwischen dem Merkmalsträger x und den diskreten Zeitpunkten ti Eine Zeitreihe ist eine zeitlich geordnete Folge von Merkmalswerten	- Kosten/Gewinnentwicklung - Verbrauch von Ressourcen - Auftragseingang Bearbeitungs- oder Durchlaufzeiten
Trend	Blick in die Zukunft, Beschreibt die langfristige Grundrichtung einer Zeitreihe. Verlauf kann linear, nichtlinear, exponentiell oder eine Potenzfunktion sein. Bei Zukunftsvoraussagen muss man sehr vorsichtig sein (Blick in eine Glaskugel)	

Gleitender Mittelwert

Formel:	Erklärung:
Vergangenheitswert: $x_{T\ [T=1,\dots,t-1]}$ **Gegenwartswert**: $x_{T\ [T=t]}$ **Mittelwert:** $M_t = \frac{1}{T+t}\left(\sum_{T=1}^{t-1} x_T + x_t\right)$	Dient zur Glättung des Verlaufs. Man kann damit eine Prognose für den Nächsten Wert feststellen. Mittelwert dient als Prognosewert r_{t+1} für die kommende Periode. t kann frei gewählt werden

Beispiel: t = 3

Zeit	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Wert	4	5	6	2	4	3

Mittelwerte:
(4+5+6)/3 = 5, (5+6+2)/3 = 4.3, (6+2+4)/3 = 3

Feststellung der Abhängigkeit

Formel:	Erklärung:
$h_{ik} = \frac{h_i * h_k}{n}$	im Fall der Unabhängigkeit gilt für jede Merkmalswertkombination (x_i, y_k) aus den beiden Merkmalen X und Y die links stehende Beziehung

- Ablauf Feststellung der Abhängigkeit

Schritt 1: Berechnung der Häufigkeiten, die bei Unabhängigkeit zu erwarten wären mit der Formel h_{ik}
Schritt 2: Vergleich mit der tatsächlichen Häufigkeiten

Beispiel: Farben
1'500 weibliche und 500 männliche Kunden haben alle einen Artikel gekauft, welchen es in den Farben blau, grün und rot gibt.

Farbe	blau	grün	rot	Summe
Häufigkeit	1.000	600	400	2.000

zeigt die Häufigkeitsverteilung der verkauften Farben dar

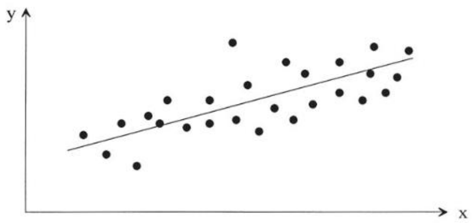
Daraus ergibt sich im Falle der Unabhängigkeit folgende Tabelle:

Geschlecht \ Farbe	blau	grün	rot	Summe
weiblich	$\frac{1.500 \cdot 1.000}{2.000} = 750$	$\frac{1.500 \cdot 600}{2.000} = 450$	$\frac{1.500 \cdot 400}{2.000} = 300$	1.500
männlich	$\frac{500 \cdot 1000}{2.000} = 250$	$\frac{500 \cdot 600}{2.000} = 150$	$\frac{500 \cdot 400}{2.000} = 100$	500
Summe	1.000	600	400	2.000

formale Abhängigkeit	stellt nur fest, ob eine zahlenmässig begründete Abhängigkeit vorliegt oder nicht
sachliche Abhängigkeit	Frage ob der Wert des einen Merkmals ursächlich für den Wert des anderen Merkmals ist. Es ist stets zu prüfen, ob die formale Abhängigkeit auch sachlich begründet ist, sonst kann es zu fehlerhaften Schlussfolgerungen aufgrund von Schein- oder Pseudokorrelationen kommen.

Regressionsanalyse

Es wird die Form bzw. Tendenz des Zusammenhangs durch eine mathematische Funktion beschrieben. **Voraussetzung:** Merkmal muss mindestens intervallskaliert sein
Graphische Darstellung im sogenannten Streuungsdiagramm:



Regressfunktion

Es ist abzuklären, ob eine einseitige, wechselseitige oder unbekannte Abhängigkeit vorliegt.

einseitige Abhängigkeit (Regressfunktion)

Ein Merkmal beeinflusst das andere Merkmal. Das beeinflussende, unabhängige Merkmal ist das Merkmal X, das beeinflusste, abhängige Merkmal ist das Merkmal Y. Es ist die Regressionsgerade $\hat{y}$ zu bestimmen mit dem Ansatz der kleinsten Quadrate.

Formeln:	Erklärung:
$\hat{y} = a_1 + b_1 x$ $a_1 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$ $b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$	$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$

bei Exponentiellem Verlauf

Werte y müssen Logarithmiert werden mit ln(y). Anschliessend wie oben Berechnen

Formeln:	Erklärung:
$\hat{y} = e^{a_1 + b_1 x}$	

wechselseitige oder unbekannte Abhängigkeit (Regressfunktion)

Es werden beide Richtungen der Abhängigkeit erfasst, das heisst es muss zusätzlich das $\hat{x}$ bestimmt werden.

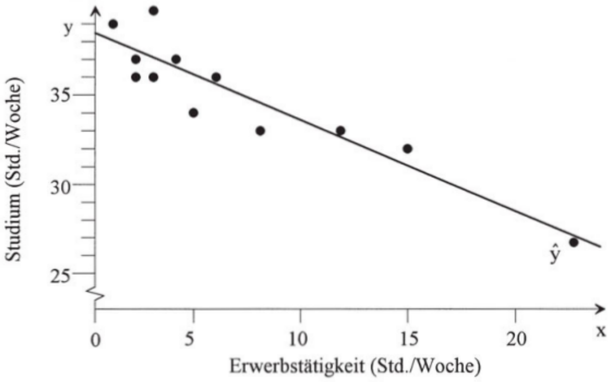
Formel:	Erklärung:
$\hat{x} = a_2 + b_2 y$ $a_2 = \bar{x} - b_2\,\bar{y}$ $b_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2}$	$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$

Beispiel: Erwerbstätigkeit und Studium

12 Studenten gingen im letzten Semester neben dem Studium einer Erwerbstätigkeit nach. In der nachfolgenden Tabelle sind der zeitliche Aufwand (Std./Woche) für die Erwerbstätigkeit X und der zeitliche Aufwand (Std./Woche) für das Studium Y angegeben.

Student	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Erwerbstätigkeit	1	2	2	3	3	4	5	6	8	12	15	23
Studium	39	37	36	40	36	37	34	36	33	33	32	27

Ein Student der **9** Stunden pro Woche erwerbstätig ist, will anhand der vorliegenden Daten ermitteln, wieviel Zeit er für sein Studium aufbringen kann.



Aus dem Streuungsdiagramm links geht hervor, dass zwischen Erwerbstätigkeit und Studium ein linearer Zusammenhang besteht.

Student	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
A	1	39	39	1	1.521
B	2	37	74	4	1.369
C	2	36	72	4	1.296
D	3	40	120	9	1.600
E	3	36	108	9	1.296
F	4	37	148	16	1.369
G	5	34	170	25	1.156
H	6	36	216	36	1.296
I	8	33	264	64	1.089
J	12	33	396	144	1.089
K	15	32	480	225	1.024
L	23	27	621	529	729
Summe	84	420	2.708	1.066	14.834

Arbeitstabelle für die Regressionsgeraden $\hat{y}$ und $\hat{x}$

$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{84}{12} = 7$; $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{420}{12} = 35$

$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{2'708 - 12*7*35}{1'066 - 12*7*7} = -0.49$

$a_1 = \bar{y} - b_1\bar{x} = 35 - (-0.49)*7 = 38.43$

Daraus folgt die generelle Regressionsgerade

$\hat{y}$: -0.49x + 38.43

Auf den Fall 9 Stunden Erwerbstätigkeit angewendet folgt:

-0.49*9 + 38.43 = 34.02

der Student kann tendenziell von einem Aufwand von 34.02 Stunden pro Woche für sein Studium ausgehen. Der tatsächliche Aufwand wird jedoch davon abweichen, da noch weitere Faktoren als die Erwerbstätigkeit einen Einfluss auf die Höhe der Studiendauer haben.

$b_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2} = \frac{2'708 - 12*7*35}{14'834 - 12*35*35} = -1.73$

$a_2 = \bar{x} - b_2\,\bar{y} = 7 - (-1.73)*35 = 67.55$

Daraus folgt die generelle Regressionsgerade

$\hat{x}$: -1.73y + 67.55

sie beschreibt die Tendenz des Zusammenhangs zwischen dem Zeitaufwand für das Studium und dem Zeitaufwand für Erwerbstätigkeit. Es kann der jeweils tendenziell anfallende Zeitaufwand für Erwerbstätigkeit bestimmt werden.

Berechnung mit Matrizen

Formel:	Erklärung:
$B^T \cdot B \cdot \vec{\gamma} = B^T \cdot \vec{y}$	Sei B eine Designmatrix mit zug. Ergebnisvektor $\vec{y}$. Dann lassen sich die Regessionskoeffizinten $\vec{\gamma}$ mit der Normalgleichung bestimmen.

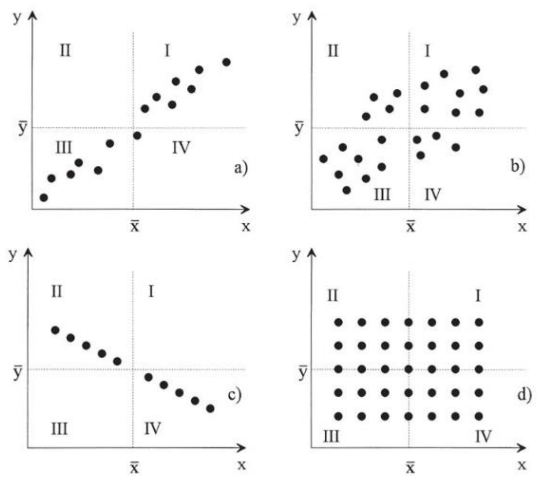
Interpretation der Regressfunktion

Regressionsgerade $\hat{y}$	beschreibt den Zusammenhang zwischen dem unabhängigen Merkmal X und dem abhängigen Merkmal Y. Das Ausmass der Abweichung hängt von der Stärke des Zusammenhangs ab (wird in der Korrelationsanalyse bestimmt). Die Regressionsgerade besitzt nur für den durch die Daten dieser Erhebung abgesteckten Untersuchungsbereich Gültigkeit. Die Differenz zwischen theoretischem Wert und tatsächlichem heisst **Residuum**.
Regressionsparameter b_1	gibt als Steigungsmass an, um wie viele Einheiten sich der Wert des Merkmals Y tendenziell ändert, wenn der Wert des Merkmals X um eine Einheit erhöht wird. Diese Aussage gilt nur für den Untersuchungsbereich.
Regressionsparameter a_1	gibt den tendenziellen Wert des Merkmals Y an, wenn der Wert des Merkmalswert x gleich Null ist. Diese Aussage ist nur dann sinnvoll, wenn der Merkmalswert x gleich Null, im oder sehr nahe am Untersuchungsbereich liegt.
Regressionsgerade $\hat{x}$	sie beschreibt den Zusammenhang zwischen dem unabhängigen Merkmal Y und dem abhängigen Merkmal X. Für jeden y_i Wert kann ein tendenzieller $\hat{x}_i$ Wert bestimmt werden. Die Regressionsgerade besitzt nur für den durch die Daten dieser Erhebung abgesteckten Untersuchungsbereich Gültigkeit.
Regressionsparameter b_2	gibt als Steigungsmasse an, um wie viele Einheiten sich der Wert des Merkmals X tendenziell ändert, wenn der Wert des Merkmals Y um eine Einheit erhöht wird. Diese Aussage gilt nur für den Untersuchungsbereich.
Regressionsparameter a_2	gibt den tendenziellen Wert des Merkmals X an, wenn der Wert des Merkmalswert y gleich Null ist. Diese Aussage ist nur dann sinnvoll, wenn der Merkmalswert y gleich Null im oder sehr nahe am Untersuchungsbereich liegt.

Korrelationsanalyse

Sie stellt die Stärke (Intensität, Ausmass, Grad) des Zusammenhangs fest, d.h. sie ermittelt, wie ausgeprägt der Einfluss eines Merkmals auf das andere Merkmal ist. Welches Verfahren im speziellen Fall eingesetzt werden darf, hängt von der Skalierung der Merkmale ab (wir gehen jedoch immer von folgendem aus): beide Merkmale mind. Intervallskaliert, dann wird der Korrelationskoeffizient von Bravais-Pearson angewendet.

graphische Interpretation



a) der lineare Zusammenhang ist stark positiv (gleichläufig) ausgeprägt, d.h. die Tendenz, dass mit zunehmendem Merkmalswert x auch y zunimmt, ist stark ausgeprägt. Die Kovarianz nimmt ebenfalls deutlich einen positiven Wert an.
b) Zusammenhang ist positiv (gleichläufig) aber geringer als in a). Die Kovarianz wird einen positiven jedoch einen relativ kleineren Wert als in a) annehmen.
c) Zusammenhang ist stark negativ (gegenläufig) ausgeprägt, d.h. die Tendenz, dass mit zunehmen-dem Merkmalswert x das y abnimmt, ist extrem stark. Die Kovarianz nimmt ebenfalls deutlich einen negativen Wert an.
d) es ist kein linearer Zusammenhang erkennbar. Die Kovarianz nimmt den Wert Null an.

Korrelationskoeffizient von Bravais-Pearson

Formel: $\sigma_{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}$ oder $\sigma_{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{v}\sum_{k=1}^{w}(x_i - \bar{x}) * (y_i - \bar{y}) * \mathrm{h}_{ik}$	Erklärung: wichtigster Baustein ist die Kovarianz σ_{XY} sie misst die Streeung der Merkmalswertkombinationen (x_i, y_i) um den Mittelpunkt oder Durchschnitt ($\bar{x}$, $\bar{y}$). Es gibt die zwei links stehenden Berechnungsarten.

Normierung der Kovarianz

Formel: $\mathrm{r} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \quad mit \quad \lvert\sigma_{XY}\rvert \leq \sigma_X\sigma_Y$	Erklärung: die Kovarianz als solche lässt noch keine Aussage über die Stärke des linearen Zusammenhangs zu. Eine Aussage über das Ausmass

$r = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\sum x_i^2 - n\bar{x}^2) * (\sum y_i^2 - n\bar{y}^2)}}$ oder $r = \sqrt{b_1 * b_2}$	der Abhängigkeit ist erst möglich, wenn die Kovarianz auf den Wertebereich -1 bis +1 normiert wird. Für $r = \sqrt{b_1 * b_2}$ muss folgendes beachtet werden: r ist positive, wenn beide Steigungsmasse positiv sind oder r ist negativ, wenn beide Steigungsmasse negativ sind oder bei entgegengesetzter Steigung ist die Berechnung nicht möglich

Interpretation des Korrelationskoeffizienten

Das Vorzeichen von r informiert über die Richtung des linearen Zusammenhangs: wenn **positiv** gleichläufig, d.h. wird x grösser, so wird y tendenziell auch grösser und wenn **negativ** gegenläufig, d.h. wird x grösser, so wird y tendenziell kleiner. Der Betrag von r informiert über die Stärke des linearen Zusammenhangs: wenn **nicht ausgeprägt** ist r gleich Null und wenn ein **starker Zusammenhang** besteht ist r gleich oder sehr nahe von -1 oder +1. Es gilt: je näher r bei -1 oder +1 ist, desto stärker ist der lineare Zusammenhang

Beispiel (Alter und Kilometer von Fahrzeugen):

$\bar{x} = \frac{40{,}1}{12} = 3{,}3417$ $\bar{y} = \frac{1010}{12} = 84{,}1667$

$$r = \frac{4272{,}9 - 12 * 3{,}3417 * 84{,}1667}{\sqrt{(166{,}85 - 12 * 3{,}3417^2) * (122914 - 12 * 84{,}1667^2)}}$$

$$= \frac{897{,}7817}{1115{,}8253} = 0{,}8046$$

i	Alter x_i	Strecke y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	1,5	30	2,25	900	45,0
2	5,2	68	27,04	4 624	353,6
3	4,5	90	20,25	8 100	405,0
4	0,5	12	0,25	144	6,0
5	2,4	100	5,76	10 000	240,0
6	2,6	62	6,76	3 844	161,2
7	1,8	21	3,24	441	37,8
8	4,2	112	17,64	12 544	470,4
9	6,2	230	38,44	52 900	1 426,0
10	3,6	120	12,96	14 400	432,0
11	2,5	56	6,25	3 136	140,0
12	5,1	109	26,01	11 881	555,9
Σ	40,1	1 010	166,85	122 914	4 272,9

Newton-Algorithmus

Formel:

f(x) = $a_0 + a_1(x-x_1) + a_2(x-x_1)(x-x_2) + \ldots + a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x- x_n)$

Die Koeffizienten a_0, a_1,…, a_n können iterativ bestimmt werden!:

- Einsetzen von x_1 in die Funktion f(x) ergibt:
  - $y_1 = f(x_1) = a_0$ $\Rightarrow a_0 = y_1$
  - $y_2 = f(x2) = a_0 + a_1(x_2 - x_1)$ $\Rightarrow a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = D_{2,1}$
  - $y_3 = f(x_3) = a_0 + a_1(x_3 - x_1) + a_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$ $\Rightarrow a_2 = \frac{y_3 - a_0 - a_1(x_3 - x_1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$ a

durch umformen folgt: $a_2 = \frac{1}{(x_3 - x_1)}\left(\frac{y_3 - y_2}{(x_3 - x_2)} - \frac{y_2 - y_1}{(x_2 - x_1)}\right)$

$$a_2 = \frac{D_{3,2} - D_{2,1}}{(x_3 - x_1)} = D_{3,2,1}$$

k	x_k	y_k	
1	x_1	y_1	a_0
2	x_2	y_2	$D_{2,1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a_1$
3	x_3	y_3	$D_{3,2} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \rightarrow D_{3,2,1} = \frac{D_{3,2} - D_{2,1}}{x_3 - x_1} = a_2$
4	x_4	y_4	$D_{4,3} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} \rightarrow D_{4,3,2,} = \frac{D_{4,3} - D_{3,2}}{x_4 - x_2} \rightarrow D_{4,3,2,1} = \frac{D_{4,3,2} - D_{3,2,1}}{x_4 - x_1} = a_3$
5	x_5	y_5	$D_{5,4} = \frac{y_5 - y_4}{x_5 - x_4} \rightarrow D_{5,4,3,} = \frac{D_{5,4} - D_{4,3}}{x_5 - x_3} \rightarrow D_{5,4,3,2} = \frac{D_{5,4,3} - D_{4,3,2}}{x_5 - x_{2,}} \rightarrow D_{5,4,3,2,1} = \frac{D_{5,4,3,2} - D_{4,3,2,1}}{x_5 - x_1} = a_4$

Mit

f(x) = $a_0 + a_1(x-x_1) + a_2(x-x_1)(x-x_2) + \ldots + a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x- x_n)$

Erklärung:

Zur Annäherung von Polynomen

Beispiel:

k	x_k	y_k	
1	1	6	$a_0 = 6$
2	2	11	$D_{2,1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{11-6}{2-1} = a_1 = 5$
3	3	18	$D_{3,2} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \rightarrow D_{3,2,1} = \frac{D_{3,2} - D_{2,1}}{x_3 - x_1} = a_2$
			$D_{3,2} = \frac{18 - 11}{3 - 2} = 7 \rightarrow D_{3,2,1} = \frac{7 - 5}{3 - 1} = a_2 = 1$
4	4	27	Warum nicht betrachtet?

Mit:

f(x) = $a_0 + a_1(x-x_1) + a_2(x-x_1)(x-x_2) + \ldots + a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x- x_n)$

f(x) = 6 + 5(x−1) + 1(x−1)(x−2) = 6 + 5x -5 +x² -2x − x + 2

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung befasst sich mit Zufallsexperimenten. Bei einem Zufallsexperiment ist der Ausgang nicht (exakt) vorhersagbar. Zudem erhalten wir unter "gleichen Versuchsbedingungen" jeweils verschiedene Ergebnisse. Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist es, die Wahrscheinlichkeit für den Eintritt oder Nicht-Eintritt eines Ereignisses zu bestimmen.

Der *Wahrscheinlichkeitsraum* umfasst die Ergebnismenge (**Ω**), das System der Ereignisse ($\mathcal{A}$) und das Warscheinlichkeitsmass (**P**)

Zufallsexperiment

Formel:	Erklärung:
--	Ein Zufallsvorgang ist ein Vorgang, dessen Ausgang aufgrund von Unkenntnis oder Unwissenheit nicht vorhergesagt werden kann.
Beispiel: Werfen eines Würfels	

Elementarereignis / Elementarergebnis

Formel:	Erklärung:
--	Elementarereignisse sind die einzelnen, sich gegenseitig ausschliessenden möglichen Ausgänge eines Zufallsexperiments.
Beispiel: Werfen eines Würfels Wird der Würfel einmal geworfen, dann ist das Elementarereignis eine der Augenzahlen zwischen 1 und 6.	

Ergebnismenge / Ereignismenge Ω

Formel:	Erklärung:
Ω = {…}	Umfasst alle möglichen Elementarereignisse eines Zufallsexperiments
Beispiel: Werfen eines Würfels Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6} → das sind alle Fälle, welche auftreten können → es handelt sich hier um eine endliche Ergebnismenge (natürlich sind auch unendliche Ergebnismengen möglich)	

Ereignis / Ergebnis

Formel:	Erklärung:
Ereignis A, B (durch Grossbuchstaben gekennzeichnet)	Ein Ereignis ist eine Menge, die aus einem Elementarereignis besteht oder sich aus mehreren Elementarereignissen zusammensetzt.
Beispiel: Werfen eines Würfels Ereignis B: Werfen einer geraden Augenzahl. B = { 2, 4, 6 }	

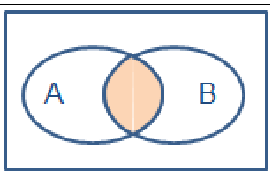
System der Ereignisse $\mathcal{A}$

Formel:	Erklärung:
--	Bei einem Zufallsvorgang gemessene Ereignisse, bilden zusammen ein System von Ereignissen. Dieses weist Eigenschaften auf, welche es ermöglichen Relationen (Durchschnitt, Vereinigung, etc.) mit Ereignissen zu bilden.
Beispiel: Werfen eines Würfels Ereignisse: A = {3}, B = {5} → $A \cup B = \{3, 5\}$	

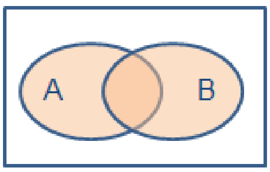
Eigenschaften des Systems der Ereignisse:

folgendes soll für gegebene Ereignisse möglich sein	
Formeln:	Erklärung:
A ∩ B	beide Ereignisse treten zugleich auf. (und)
A ∪ B	zumindest ein Ereignis von beiden tritt auf. (oder)
A^c	das Gegenereignis (komplementär) tritt auf.

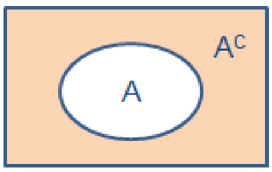
Beispiel:



A und B



A oder B



Das zu A komplementäre Ereignis

spezielle Ereignisse

Formel:	Erklärung:
$\emptyset$, die leere Menge	sie bildet das unmögliche Ereignis.
Ω, die Ergebnismenge	sie bildet das sichere Ereignis.
unvereinbare/disjunkte Ereignisse	A und B heissen unvereinbar/disjunkt, wenn $A \cap B = \emptyset$

das Ereignis $\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra wenn

Formel:	Erklärung:
(1) $\Omega \in \mathcal{A}$	alle Elemente(Ereignisse) von Ω sind in $\mathcal{A}$ enthalten
(2) Für $B \in \mathcal{A}$ gilt auch $B^C \in \mathcal{A}$	wenn B in $\mathcal{A}$ dann ist auch das Gegenereignis von B in $\mathcal{A}$
(3) Aus $B_i \in \mathcal{A}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ folgt $\bigcup_{i=1}^{\infty} Bi \in \mathcal{A}$	

Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Formel:	Erklärung:
(1) $P(A) \geq 0$	Jedes Ereignis hat Wahrscheinlichkeit grösser/gleich Null
(2) $P(\Omega) = 1$ / 100%	die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses liegt bei 1
(3) $W(A \cup B) = W(A) + W(B)$	Sind A und b zwei disjunkte Ereignisse, dann ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A ∪B gleich der Summe der beiden Einzelwahrscheinlichkeiten für A und B.

aus den Axiomen abgeleitete Rechenregeln

Formel:	Erklärung:
(1) $P(A^C) = 1 - P(A)$	die Gegenwahrscheinlichkeit zu A berechnet sich mit 1 - P(A)
(2) $P(\emptyset) = 0$	die leere Menge ist das unmögliche Ereignis
(3) $0 \leq P(A) \leq 1$	die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses liegt zwischen 0 und 1
(4) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B$	wenn das Ereignis A eine Teilmenge von B ist, ist die Wahrscheinlichkeit von A kleiner als die Wahrscheinlichkeit von B
(5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	Die Wahrscheinlichkeit der Vereinigungsmenge von A und B ist dieselbe wie die Wahrscheinlichkeit von A und B addiert, minus die Wahrscheinlichkeit der Schnittmenge von A und B.
(6) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, falls A und B unvereinbar	Die Wahrscheinlichkeit der Vereinigungsmenge von A und B ist dieselbe wie die Wahrscheinlichkeit von A und B addiert, falls A und B disjunkt / unvereinbar.
(7) $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$	Die Wahrscheinlichkeit der Schnittmenge von A und B ist dieselbe wie die Wahrscheinlichkeit von A und B multipliziert.
(8) $P(A \cap B) = P(A) * P(B\|A) = P(B) * P(A\|B)$	Die Wahrscheinlichkeit der Schnittmenge von A und B ist dieselbe wie die Wahrscheinlichkeit von A und B multipliziert. | bedeutet unter Voraussetzung das A bzw. B eingetreten ist.

Laplace-Experiment

Voraussetzungen:
→ Ergebnismenge Ω ist endlich / abzählbar und jedes Elementarereignis hat die gleiche Wahrscheinlichkeit

Formel:	Erklärung:
$P(\{\omega_i\}) = \dfrac{1}{\|\Omega\|}$	Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses berechnen: 1 durch die Anzahl aller möglichen Elementar-ereignisse
$\dfrac{AZ\ Elementarereignisse\ in\ Ereignismenge\ von\ A}{AZ\ möglicher\ Ereignisse\ \Omega}$ $\dfrac{\|A\|}{\|\Omega\|}$	Wahrscheinlichkeit eines beliebigen Ereignisses bestimmen: Anzahl der für A günstigen Ergebnisse / Anzahl aller möglichen Elementarereignisse

Beispiel: Werfen eines Würfels ($P(\{\omega_i\}) = 1/n$)
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dann ist $P(\{\omega_i\}) = 1/6$

Beispiel: Werfen eines Würfels ($P(A) = |A| / |\Omega|$)
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, A = eine gerade Augenzahl würfeln = $\{2, 4, 6\}$ dann ist $P(A) = 3/6 = 1/2$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Formel:	Erklärung:
$$P(A\|B) = \frac{P(A\ \cap\ B)}{P(B)}$$	Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A unter der Bedingung, dass B (P(B) > 0) eintritt.

Beispiel: Klausur

Ein zufällig ausgewählter Student hat mit einer Wahrscheinlichkeit von 65% die Statistikprüfung bestanden. Wie verändert sich die Wahrscheinlichkeit, wenn ein Student befragt wird, der die Mathematikklausur bestanden hat?

	S	$\bar{S}$	Σ
M	60	20	80
$\bar{M}$	5	15	20
Σ	65	35	100

W(S|M) = 60 / 80 = 0.75 also 75%

Multiplikationssatz (Satz von Bayes)

Formel:	Erklärung:
$P(A\ \cap B) = P(A) * P(B\|A) = P(B) * P(A\|B)\ oder$ $W(A\ \cap B) = W(A) * W(B)\ für\ A\ und\ B\ unabhängig$	Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Ereignisse A und B gemeinsam eintreten.

Beispiel:

In einer Urne befinden sich fünf Kugeln, 4 rote und 1 weisse. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei zwei Ziehungen ohne Zurücklegen zwei rote Kugeln gezogen werden?

$$\frac{4}{5} * \frac{3}{4} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

Unabhängigkeit von Ereignissen

Formel:	Erklärung:
$W(A) = W(A\|B)$ *bzw.* $\mathrm{W(A)} = \mathrm{W(A\|\bar{B})}$ *bzw.* $\mathrm{W(A\|B)} = \mathrm{W(A\|\bar{B})}$	Wird durch den Eintritt eines Ereignisses A der Eintritt eines Ereignisses B beeinflusst oder nicht?

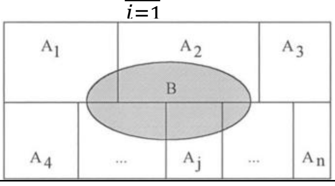
Beispiel: Es wurden folgende Wahrscheinlichkeiten berechnet: P(A) = 0,65; P(A|B) = 0,75;

➔ Da P(A) ≠ P(A|B) sind die beiden Ereignisse A und B abhängig.

Vollständige Wahrscheinlichkeit / totale Wahrscheinlichkeit

Formel:

$$W(B) = \sum_{i=1}^{n} W(A_i) * W(B|A_i)$$



Erklärung:

Gegeben sind die Ereignisse A_i (i = 1, …, n), die ein vollständiges Ereignissystem bilden, sowie das Ereignis B, das sich aus Elementarereignissen der Ereignisse Ai zusammensetzt.

bekannt sind:

$W(A_i)$ und $W(B|A_i)$ für i = 1, …, n

Beispiel: Prüfung

Die Wahrscheinlichkeit, die Statistikklausur zu bestehen, beträgt 0,65. Die Wahrscheinlichkeit, die Mathematik-klausur zu bestehen, beträgt, wenn

a) die Statistikklausur bestanden wurde: 60/65 = 0,923

b) die Statistikklausur nicht bestanden wurde: 20/35 = 0,571

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, die Mathematikklausur zu bestehen?

Berechnung:

Statistikklausur bestanden (0,65) / nicht bestanden (1 - 0,65) bildet das vollständige Ereignissystem --> W(Ai)

$W(B) = W(A) * W(B|A) + W(\bar{A}) * W(B|\bar{A})$

$W(B) = 0{,}65\ * 0{,}923 + 0{,}35\ * 0{,}571 = 0{,}8\ bzw\ 80\%$

Kombinatorik

Aufgabe ist es, die AZ der Möglichkeiten für das Auswählen und/oder Anordnen der Elemente zu ermitteln.
Unterschied Menge und Tupel: Bei Tupel wird die Reihenfolge/Anordnung beachtet.

Vorgehensweise

Schritt 1: Ist jedes vorgegebene Element genau einmal anzuordnen?

- ja: Schritt 2
- nein: Schritt 3

Schritt 2: Sind die vorgegebenen Elemente alle verschieden?

- ja: Permutation ohne Wiederholung
- nein: Permutation mit Wiederholung

Schritt 3: Darf ein vorgegebenes Element wiederholt ausgewählt werden?

- nein: Schritt 4
- ja: Schritt 5

Schritt 4: Ist die Anordnung der Elemente von Bedeutung?

- ja: Variation ohne Wiederholung
- nein: Kombination ohne Wiederholung

Schritt 5: Ist die Anordnung der Elemente von Bedeutung?

- ja: Variation mit Wiederholung
- nein: Kombination mit Wiederholung

Beispiel Warscheinlichkeit & Kobinatorik kombiniert

Von einer Lieferung von 30 Schokoladentafeln werden zufällig 3 Tafeln entnommen und auf die Qualität geprüft. Wie wahrscheinlich ist es, dass genau zwei Tafeln mangelhaft sind? Insgesamt sind in der Lieferung 5 Tafeln mangelhaft.

Hier können wir das Laplace-Experiment machen. Die Anzahl mögliche Ereignisse sind mittels der Kombinatorik zu bestimmen, ebenso die Anzahl günstigen Ereignisse. Die günstigen Ereignisse müssen wir auf zwei Vorgänge aufteilen:

- 2 mangelhafte Tafeln aus 5 mangelhaften Tafeln ziehen
- 1 Tafel aus den 24 qualitativ guten Tafeln ziehen

Via Vorgehensweise ist jeder Element mehr als einmal einzuordnen (Schritt 3), und ohne Wiederholung (Schritt 4). Ebenso spielt die Anordnung keine Rolle, weshalb wir die Kombination ohne Wiederholung wählen.

Nachfolgend die Zusammengesetzte Formel und das Ergebnis:

$$\mathrm{P}\{2 \text{ mangelhafte Tafeln}\} = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{24}{1}}{\binom{30}{3}} = \frac{10 \cdot 25}{4060} = 0.06 \; = \; 6\%$$

Permutation ohne Wiederholung

Formel: $P(n) = n!$	Erklärung: **Permutation**: Jedes vorgegebene Element wird genau einmal in die Anordnung eingebracht. **ohne Wiederholung**: wenn alle vorgegebene Elemente voneinander verschieden sind
Beispiel: Eine Maschine muss vier Aufträge A, B, C, D nacheinander abarbeiten. Wie viele Anordnungen sind möglich? 4! = 24	

Permutation mit Wiederholung

Formel: $P_{n1,\,n2,..,nk}(n) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}$	Erklärung: **mit Wiederholung**: wenn von den vorgegebenen Elementen mind. zwei identisch sind. Diese werden zu Klassen zusammengefasst. n = AZ Elemente k = AZ Klassen
Beispiel: Zahlenschloss 6-stelliges Zahlenschloss mit einer bestimmten Folge der Ziffern 1, 1, 4, 4, 4, 8 n=6 Ziffern, k=3 Klassen, n1 = 2 Elemente, n2 = 3 Elemente, n3 = 1 Element $P_{2,3,1}(6)$ = 6!/(2!∗3!∗1!)= 720/12=60 → max. 60 Versuche nötig, um das Schloss zu öffnen	

Kombination ohne Wiederholung

Formel: $K_k(n) = \frac{\prod_n^{n-k+1} n}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!*k!} = \binom{n}{k}$	Erklärung: **Kombination**: Aus n Elementen werden nur k Elemente angeordnet.
Beispiel: Lotto Beim Lotto müssen aus 49 Zahlen 6 Zahlen ausgewählt werden. $\binom{49}{6} = \frac{49!}{(49-6)!*6!} = 13'983'816\ Tipps\ sind\ möglich$ Alternativ: $\frac{49*48*47*46*45*44}{6!} = 13'983'816$	

Kombination mit Wiederholung

Formel: $K_k^W(n) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!*((n+k-1)-k)!}$	Erklärung: *siehe oben*
Beispiel: In einem Rat werden 3 Sitze neu vergeben, es bewerben sich 6 Verbände darauf. Die wiederholte Auswahl eines Verbandes ist möglich. Wie viele mögliche Sitzverteilungen gibt es? $K_3^W(6) = \binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{(8-3)!*3!} = 56$	

Variation ohne Wiederholung / Auswahl ohne Zurücklegen

Formel: $V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!} = \prod_n^{n-k+1} n$	Erklärung: **Variation**: Kombination, bei denen die Reihenfolge der Elemente beachtet wird. n = AZ Elemente k = AZ ausgewählte Elemente
Beispiel: Berufungsliste Aus 5 Bewerbern soll eine Rangliste der ersten 3 Plätze gemacht werden. Wie viele verschiedene Listen sind möglich? $V_3(5) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$ Alternativ: $5*4*3 = 60$	

Variation mit Wiederholung / Auswahl mit Zurücklegen

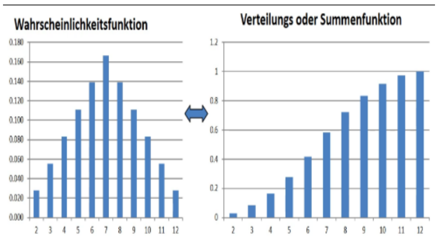
Formel: $V_k^W(n) = n^k$	Erklärung: n = AZ Elemente k = AZ ausgewählte Elemente
Beispiel: Dekoration: Es sind 4 Dekorationen für ein dreiteiliges Gedeck gegeben. Die Anordnung spielt eine Rolle, da es einen Unterschied macht, ob der Suppenteller oder der Speiseteller Dekor A bekommt, Wiederholungen sind möglich. $V_3^W(4) = 4^3 = 64$	

Zufallsvariable

Mit Hilfe der Zufallsvariable kann eine nur schwer überschaubare AZ von Elementarereignissen eines Zufallsvorgangs problembezogen und übersichtlich zu Ereignissen zusammengefasst werden.

Analogien zwischen Zufallsvariablen X und dem Merkmal X der beschreibenden Statistik:

Zufallsvariable X	**Merkmal X**
Realisation x	Merkmalswert x
Wahrscheinlichkeit	relative Häufigkeit
Wahrscheinlichkeitsfunktion	einfache relative Häufigkeitsverteilung
Verteilungsfunktion	kumulierte relative Häufigkeitsverteilung
Erwartungswert	arithmetisches Mittel
Varianz	Varianz



Zufallsvariable

Formel:	Erklärung:
Zufallsvariable meist X, Y, Z Realisationen entspr. x, y, z	Eine **Zufallsvariable** X ist eine Funktion, die jedem Elementarereignis aus dem Ereignisraum Ω eine reelle Zahl x zuordnet. Diese reellen Zahlen werden **Realisation** genannt. Die Wahrscheinlichkeit einer Realisation ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der zugeordneten Elementarereignisse.

Beispiel:
Ein Roulettespieler setzt 1 Geldeinheit auf das Ereignis „1. Dutzend". Tritt bei der Ausspielung dieses Ereignis ein, so erhält er 3 Geldeinheiten, ansonsten verliert er seinen Einsatz. Die Funktion „Reingewinn" lautet:

$$\underbrace{X : \{0, 1, \ldots, 36\}}_{\text{Ergebnismenge}} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad X(\omega) = \begin{cases} \underset{\text{Realisation}}{3} & , \text{für } \underset{\text{Ergebnis}}{\omega} \in \underset{\text{Ereignisse}}{\{1, 2, \ldots, 12\}} \\ -1 & , \text{für } \omega \in \{0, 13, 14, \ldots, 36\} \end{cases}$$

Diskrete Zufallsvariable

Für die Realisation kommen in einem vorgegebenen Intervall nur ganz bestimmte Werte in Frage. → Zählvorgang

Wahrscheinlichkeitsfunktion

Formel:	Erklärung:
$f(x_i) = P(X = x_i)$	Die Funktion, die den möglichen Realisationen x_i der diskreten Zufallsvariablen X Eintrittswahrscheinlichkeiten zuordnet. „Wahrscheinlichkeit, dass Zufallsvar. X den Wert x_i annimmt, beträgt f(xi)"

Beispiel: Lotto
Ein Spieler interessiert sich für seine Gewinnaussichten, d.h. für die mögliche AZ der richtig angekreuzten Zahlen und die jeweilige Realisierungswahrscheinlichkeit.
Zufallsvariable X: „AZ der Richtigen" mögliche Realisationen: x_i : 0, 1, 2, 3, 4, 5, und 6

i	Realisation x_i	Wahrscheinlichkeit $W(X = x_i)$
1	0	0,43596
2	1	0,41302

P(X = 1) = 0,41302

Wahrscheinlichkeit, dass X den Wert 1 annimmt, also bei einem Tipp genau 1 richtige Zahlen angekreuzt wird

Verteilungsfunktion

Formel:	Erklärung:
$F(x) = P(X \leq x)$ $F(x) = \sum_{xi \leq x} W(X = xi)$ $= \sum_{xi \leq x} f(xi)$	Die Funktion, die die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass die diskrete Zufallsvariable eine Realisation annimmt, die kleiner / gleich einem Wert x ist. „Wahrsch., dass Zufallsvar. X höchstens Wert x annimmt beträgt F(x)"

Beispiel: Lotto, Fortsetzung von oben
Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler höchstens 1 richtigen ankreuzt: $W(X \leq 1) = W(X=0) + W(X=1) = 0{,}84989$

Parameter: Erwartungswert

Formel:	Erklärung:
$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i * f(x_i)$	Der Wert, der bei genügend häufiger Durchführung des Zufallsvorgangs als durchschnittliche Realisation zu erwarten ist.
Beispiel: Lotto Ein Spieler interessiert sich, wie viele Zahlen pro Spiel durchschnittlich angekreuzt werden. Für den Erwartungswert ist die Summe der Realisationen gewichtet mit den Wahrscheinlichkeiten zu berechnen. $0 * 0{,}43596 + 1 * 0{,}41302 + 2 * 0{,}13238 + \ldots + 6 * 0{,}00000 = 0{,}73471$	

Parameter: Varianz σ² und Standardabweichung σ

Formel:	Erklärung:
$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 * f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i) - E(X)^2$ $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$	Dienen ausschliesslich als Vergleichswerte: je tiefer die beiden Parameter, desto dichter streuen die Realisationen um den Erwartungswert.
Beispiel: Lotto $(0 - 0{,}73471)^2 * 0{,}43596 + (1 - 0{,}73471)^2 * 0{,}43596 + (2 - 0{,}73471)^2 * \ldots = 0{,}577\ Richtige^2$ Die niedrige Varianz weist auf eine enge Streuung um den Erwartungswert.	

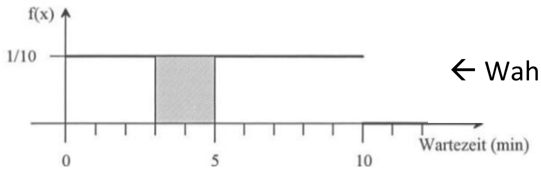
Stetige Zufallsvariable

Für die Realisation kommt in einem vorgegebenen Intervall jeder beliebige Wert in Frage. → Messvorgang

Wahrscheinlichkeitsdichte

Formel:	Erklärung:
$W(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$	Eine Funktion, welche die Fläche über einem Intervall [a, b] derart begrenzt, dass diese Fläche der Wahrscheinlichkeit der Realisierung der Zufallsvariablen in diesem Intervall entspricht.

Beispiel:
Eine Person trifft zu einem zufälligen Zeitpunkt an einer Bushaltestelle ein, bei der alle 10min ein Bus fährt. Da der Zeitpunkt zufällig ist, ist jede Realisation gleich möglich.



← Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{für } 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wahrscheinlichkeit für Wartezeit zw. 3 und 5 Minuten: $W(3 \leq X \leq 5) = \int_3^5 \frac{1}{10}\, dx = \frac{1}{10} * x \,\Big\vert_3^5 = \frac{1}{10} * (5-3) = 0{,}20$

Verteilungsfunktion

Formel:	Erklärung:
$F(x) = W(X \leq x) = \int_{x\,min}^{x} f(v)dv$	Die Funktion, die die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass die stetige Zufallsvariable X eine Realisation kleiner / gleich Wert x annimmt. x min: kleinste Realisation
Beispiel: Bus, Fortsetzung von oben Wahrscheinlichkeit, dass eine Person höchstens 6min auf einen Bus warten muss. $W(X \leq 6) = W(0 \leq X \leq 6) = \int_0^6 \frac{1}{10}\, dx = \frac{1}{10} * x \,\Big\vert_0^6 = \frac{1}{10} * (6-0) = 0{,}60$	

Parameter: Erwartungswert

Formel:	Erklärung:
$E(X) = \int_{x\,min}^{x\,max} x * f(x)dx$	x min/max: kleinste bzw. grösste Realisation
Beispiel: Bus, Fortsetzung von oben $E(X) = \int_0^{10} \frac{1}{10}\, dx = \frac{1}{20} * x^2 \,\Big\vert_0^{10} = \frac{1}{20} * (100-0) = 5\ Minuten$ Trifft eine Person zu zufälligen Zeitpunkt ein, so muss sie durchschnittlich 5 Minuten auf den Bus warten.	

Parameter: Varianz σ² und Standardabweichung σ

Formel:	Erklärung:
$\sigma^2 = \int_{x\,min}^{x\,max} [x - E(X)]^2 * f(x)dx$ $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$	x min/max: kleinste bzw. grösste Realisation
Beispiel: $\sigma^2 = \int_0^{10} (x-5)^2 * \frac{1}{10}\, dx = 8{,}33\ Minuten^2$	

Theoretische Verteilungen von Zufallsvariablen

Sind das Ergebnis rein gedanklicher Durchführungen eines Zufallsvorgangs .

Bernoulli-Prozess

- Bei jeder Wiederholung interessiert nur, ob ein bestimmtes Ereignis eintritt oder nicht -> binär
- Die Wiederholungen sind unabhängig.
- Die Erfolgswahrscheinlichkeit p bleibt gleich
- Die Misserfolgswahrscheinlichkeit q ist dann: q = 1-p
- Die charakteristische Daten:
- Es galt: Erwartungswert: E(X) = p
- Varianz: σ^2 = pq =

mit x1 = 1 und x2 = 0 folgt

$$E(x) = \bar{x} = \sum_{i=1}^{2} x_i^2 p_i - p^2$$

$E(x)$ = 1^2 *p + 0 * (1-p) - p^2 = p

$E(x)$ = p - p^2 = p (1-p) = pq

Diskrete Verteilung

Binominalverteilung → tabelliert

<table>
<tr><td colspan="2">Anwendung:
- Zufallsexperiment unterscheidet 2 Ergebnisse
- Experiment wird n-mal identisch durchgeführt
- Gesucht: Wahrscheinlichkeit, dass Ereignis (genau/mindestens/höchstens) x-mal eintrifft</td></tr>
<tr><td>Formel: Wahrscheinlichkeitsfunktion
$f_B(x|n;\ \Theta) = \binom{n}{x} * \Theta^x * (1-\Theta)^{n-x}$</td><td>Erklärung:
x: gesuchte Realisation / n: AZ Durchführungen / Θ: P(A)</td></tr>
<tr><td>Formel: Erwartungswert
$E(X) = n * \Theta = n * P(A)$</td><td>Erklärung:
--</td></tr>
<tr><td>Formel: Varianz
$\sigma^2 = n * \Theta * (1-\Theta) = n * P(A) * (1 - P(A))$</td><td>Erklärung:
--</td></tr>
<tr><td colspan="2">Beispiel:
Gegen eine Krankheit wurde ein neues Medikament entwickelt. Die Heilungschance liegt bei 90%. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 5 zufällig gewählten Patienten mindestens 4 geheilt werden?
$P(4) = \binom{5}{4} * 0{,}9^4 * (1-0{,}9)^{5-4} =\ 0{,}328 \quad P(5) = 0{,}590 \quad P(4+5) = 0{,}9185$</td></tr>
</table>

Poissonverteilung → tabelliert

<table>
<tr><td colspan="2">Anwendung:
- Ereignis A tritt in vorgegebener Einheit (Zeit, Strecke, Raum) durchschnittlich µ mal ein
- Ereignisse sind Unabhängig voneinander (erinnerungsfrei)
- Gesucht: Wahrscheinlichkeit, dass Ereignis in einem Intervall (genau/höchstens) x-mal eintrifft
- Für $np < 10$ und $n >= 1500p$ kann Possionverteilung als Näherung für Binominalverteilung verwendet werden.</td></tr>
<tr><td>Formel: Wahrscheinlichkeitsfunktion
$f_P(x|\mu) = \frac{\mu^x * e^{-\mu}}{x!}$</td><td>Erklärung:
x: ges. Realisation / µ: durchschnittliches Eintreten von A
e: Eulersche Zahl, ca. 2,71828</td></tr>
<tr><td>Formel: Erwartungswert = Varianz
$E(X) = \sigma^2 = \mu$</td><td>Erklärung:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Beispiel: Telefonvermittlung
Durchschnittlich 1 Telefonanruf/Minute. Wie gross ist Wahrscheinlichkeit, dass 2 Anrufe pro Minute eingehen?
$f_P(2|1) = \frac{1^2 * e^{-1}}{2!} =\ 0{,}18$</td></tr>
</table>

stetige Verteilung

Rechteckverteilung/Gleichverteilung

<table>
<tr><td colspan="2">Anwendung:
- Alle Realisationen in einem bestimmten Intervall [a, b] sind gleich wahrscheinlich</td></tr>
<tr><td>Formel: Wahrscheinlichkeitsdichte
$f_{GL}(x|a;b) = \frac{1}{b-a}$</td><td>Formel: Erwartungswert
$E(X) = \frac{b+a}{2}$</td></tr>
<tr><td>Formel: Verteilungsfunktion
$F_{GL}(x|a;b) = \frac{x-a}{b-a}$</td><td>Formel: Varianz
$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$</td></tr>
</table>

Beispiel:
Eine Person trifft zu einem zufälligen Zeitpunkt an einer Bushaltestelle ein, bei der alle 10min ein Bus fährt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie 3 Minuten auf den Bus warten muss?

$f_{GL}(3|0;10) = \frac{1}{10-0} = 0{,}1$

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie höchstens 3 Minuten auf den Bus warten muss?

$F_{GL}(3|0;10) = \frac{3-0}{10-0} = 0{,}3$

Deiecksverteilung

Anwendung:
- Beschreibung von Bedienprozessen (Ermittlung oder Beschreibung der Bearbeitungszeit)

Formel: Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}, & \text{wenn } a \le x < c \\ \frac{2}{b-a}, & \text{wenn } x = c \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}, & \text{wenn } c < x \le b. \end{cases}$	Formel: Erwartungswert $E(X) = \frac{a+b+c}{3}$
Formel: Verteilungsfunktion $F(x) = \begin{cases} \frac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)}, & \text{wenn } a \le x < c \\ \frac{c-a}{b-a}, & \text{wenn } x = c \\ 1 - \frac{(b-x)^2}{(b-a)(b-c)}, & \text{wenn } c < x \le b. \end{cases}$	Formel: Varianz $\sigma^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18}$

Exponentialverteilung

Anwendung:
- In vorgegebener Einheit tritt das Ereignis A durchschnittlich µ-mal ein.
- Gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Abstand zwischen zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden Ereignissen A höchstens das x-fache der gegebenen Zeit- oder Streckeneinheit beträgt.

Formel: Wahrscheinlichkeitsdichte $f_E(x\|\mu) = \mu * e^{-\mu * x}$ Formel: Verteilungsfunktion $F_E(x\|\mu) = 1 - e^{-\mu * x}$	Erklärung: x: gesuchte Realisation µ: durchschnittlicher Eintritt e: Eulersche Zahl, ca. 2,71828
Formel: Erwartungswert $E(X) = \frac{1}{\mu}$	Formel: Varianz $\sigma^2 = \frac{1}{\mu^2}$

Beispiel:
In einem Geschäft treffen pro Stunde durchschnittlich 3,5 Kunden ein. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Abstand zwischen dem Eintreffen zweier Kunden höchstens 0,2 Stunden (12 Minuten) beträgt?

$F_E(0{,}2|3{,}5) = 1 - e^{-3{,}5*0{,}2} = 0{,}503$

Weilbull-Verteilung

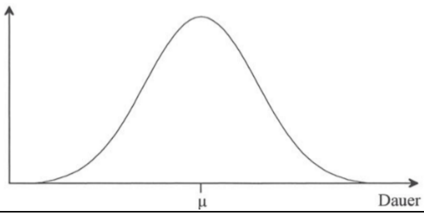
Anwendung:
- Beschreibung von Lebensdauer von Geräten oder Materialien mit Abnutzungserscheinungen

Formel: Wahrscheinlichkeitsdichte $f(t) = \alpha * \beta * t^{\beta-1} * e^{-\alpha * t^{\beta}}$	Erklärung: $\alpha: Skalierungsparameter, \beta: Formparameter$ β < 1: Ausfallrate nimmt mit der Zeit ab β = 1: Ausfallrate konstant (Annäherung Exponentiell) β > 1: Ausfallrate nimmt mit der Zeit zu
Formel: Gamma-Funktion Γ • $\Gamma(n+1) = n!\ \text{für jede natürliche Zahl } n$ • $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\ e^{-1}\ \text{für positive reelle Zahlen } x$	Erklärung:
Formel: Erwartungswert $\mathrm{E(X)} = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$	Formel: Varianz $\sigma^2 = \frac{1}{\alpha^2}\left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right)$

Normalverteilung und Standardnormalverteilung → tabelliert

Anwendung:
- In schliessender Statistik von fundamentaler Bedeutung

Eigenschaften:
- Maximum ist gleich μ, dem Erwartungswert
- Verläuft symmetrisch um den Wert μ
- Wendepunkte sind +σ und –σ Einheiten von μ entfernt



Formel: Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_N(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma * \sqrt{2\pi}} * e^{\frac{-1}{2} * \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Formel: Verteilungsfunktion

$$F_N(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma * \sqrt{2\pi}} * \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-1}{2} * \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Erklärung:
x: gesuchte Realisation
μ: Erwartungswert
σ: Standardabweichung
Integral lässt sich so nicht lösen!

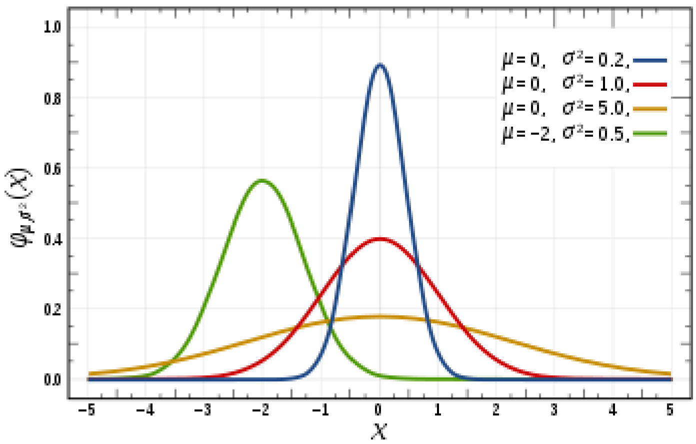
Formel: Reproduktivität
Sind die Zufallsvariablen X1, X2, …, Xn unabhängig und normalverteilt mit μ1, μ2, …, μn und σ1, σ2, …, σn dann ist die Zufallsvariable X = X1 + X2 + … + Xn ebenfalls normalverteilt mit:
$\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$ und $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$

Standard-Normalverteilung:
$\mu = 0, \ \sigma = 1$
Formel: z-Transformation NV → SNV

$$F_N(x|\mu,\sigma) \xrightarrow{z = \frac{x-\mu}{\sigma}} F_{SN}(z|0{,}1)$$

Vorgehen:
1. μ und σ bestimmen
2. W(X≤?/≥?) bestimmen
3. Verteilungsfunktionen NF bestimmen
4. z-Transformation
5. Werte aus Tabelle lesen

Wichtige Anmerkungen
- Die Normalverteilung ist eine ***stetige symmetrische Verteilung***
- μ enspricht dem Erwartungswert(x-Wert des Scheitelpunktes) →xmax = μ
- Wird ***μ verändert, so hat es eine Verschiebung nach links oder rechts*** zu Folge
- σ entspricht der Standardabweichung
- Wird ***σ verändert, so hat es eine Veränderung in der Breite der Kurve*** zu Folge
- Die Fläche zwischen zwei Werten entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass x in diesem Bereich liegt.

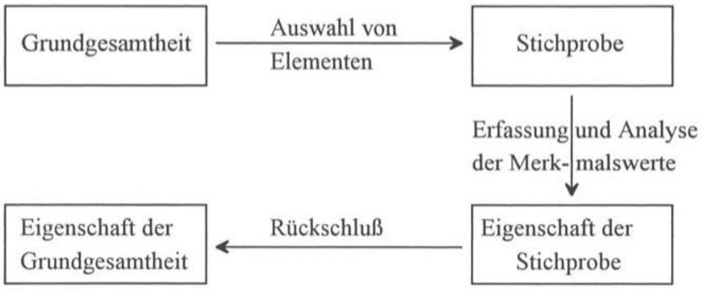


Beispiel: Küchenhersteller
Bei der Herstellung von Küchenarbeitsplatten wird auf eine Spanplatte eine Kunststoffbeschichtung aufgebracht. Gesamtstärke soll zw. 32 und 34mm liegen. Stärke der Platte ist normalverteilt mit μ = 31,7 und σ = 0,4mm, Stärke der Kunststoffschicht ist normalverteilt mit μ = 1,5 und σ = 0,3mm.
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Gesamtstärke innerhalb der Toleranz liegt? W(32 ≤ Xs + Xk ≤ 34)

1. Reproduktivität: μ = $\mu_S + \mu_K = 33{,}2mm$ $\quad \sigma^2 = \sigma_S^2 + \sigma_K^2 = 0{,}5mm$
2. Gesucht: W(32 ≤ X ≤ 34) → X ist Gesamtstärke
   = W(X≤34) – W(X≤32)
3. $F_N(34|33{,}2;\ 0{,}5)$ - $F_N(32|33{,}2;\ 0{,}5)$
4. $z = \frac{34-33{,}2}{0{,}5}$ $\quad z = \frac{32-33{,}2}{0{,}5}$
   $F_{SN}(1{,}6|0;\ 1)$ - $F_{SN}(-2{,}4|0;\ 1)$
5. 0,9452 - 0,0082 = 0,9370 bzw. 93,70 %

Grundlagen der schliessenden Statistik

Informationen zur Grundgesamtheit werden in der schliessenden Statistik mit Hilfe von Stichproben gewonnen, mit deren Eigenschaften (Bsp. Arithmetisches Mittel) man auf die Grundgesamtheit zurückschliesst.



Vorteile:

- Weniger Kosten und Zeitaufwand
- Aktueller
- Unmöglichkeit der Vollerhebung

Nachteil:

- Fehlerrisiko

Stichprobe

Formel: Stichprobenvektor: $(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ Realisation der Stichprobe: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$	Erklärung: Eine Stichprobe ist eine Variation n-ter Ordnung aus N Elementen. Aus Grundgesamtheit N werden n Elemente bestimmt, deren Reihenfolge eine Rolle spielt.
Beispiel: Kaffeekonsum (AZ Tassen/Tag) Man will den Kaffeekonsum von allen Schülern einer Schule feststellen und befragt dazu zufällig 20 Personen. N: alle Schüler der Schule n: 20 Realisation: (1, 1, 0, 3, …, 2)	

Auswahlverfahren

Einfache Zufallsstichprobe	
Erklärung: Aus Grundgesamtheit werden Elemente zufällig ausgewählt.	Beispiel: Kaffeekonsum, Fortsetzung von oben Aus allen Schülern werden zufällig 20 befragt.
Geschichtete Stichprobe (mehrstufig)	
Erklärung: Aus Grundgesamtheit werden zuerst Schichten gebildet (Elemente mit gew. Merkmalen zusammengefasst). Aus allen Schichten werden dann zufällig Elemente ausgewählt.	Beispiel: Kaffeekonsum, Fortsetzung von oben Die Schüler werden zuerst nach Klassen aufgeteilt. Anschliessend werden aus jeder Klasse zufällig ausgewählte Schüler befragt.
Klumpenstichprobe (mehrstufig)	
Erklärung: Grundgesamtheit wird in Klumpen zerlegt. Anschliessend werden zufällig Klumpen ausgewählt und daraus alle Elemente befragt.	Beispiel: Kaffeekonsum, Fortsetzung von oben Die Schüler werden zuerst nach Klassen aufgeteilt. Anschliessend werden zufällig 2 Klassen ausgewählt und davon alle Schüler befragt.
Systematische Stichprobe (pseudozufällig)	
Erklärung: Die Grundgesamtheit wird nach einem bestimmten Muster befragt.	Beispiel: Kaffeekonsum, Fortsetzung von oben Es wird aus allen Schülern jeder 7. im Alphabet befragt.

Stichprobenverteilungen (Verteilungen von Stichprobenfunktionen)

Definition: Stichprobenfunktion (Stichprobenmittelwert)

Formel: $$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$	Erklärung: Eine Vorschrift f, die einem Stichprobenvektor (X1, X2, …, Xn) eine reelle Zahl zuordnet.
Beispiel: Kaffeekonsum, Fortsetzung von oben Es interessiert der durchschnittliche Kaffeekonsum. Das arithmetische Mittel ist die Vorschrift, die dem Stichprobenvektor (2, 1, 3) die Zahl 2 zuordnet. Es werden also im Schnitt 2 Tassen Kaffee getrunken.	

t-Verteilung / Student-Verteilung (Bei n < 30 Stichproben)

Formel:

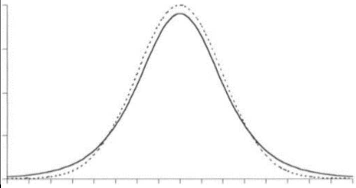
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{r}\cdot B\left(\frac{1}{2},\frac{r}{2}\right)} \cdot \left(1+\frac{t^2}{r}\right)^{-\frac{1}{2}(r+1)} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{k}}} \qquad t = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$E(X) = 0 \text{ für } r > 1$$
$$VAR(X) = \frac{r}{r-2} \text{ für } r > 2$$

Erklärung:
- Ausgangspunkt sind zwei voneinander unabhängige Zufallsvariablen X und Y, die standardnormalverteilt bzw. mit r (= n-1) Freiheitsgraden chi-quadrat-verteilt sind.

Freiheitsgrad r bestimmt bei einer Gleichung wie viele Parameter «**frei» wählbar** sind.



k \ 1 - α	0,70	....	0,95	....	0,99
1					
...					
15			2,131		
...					

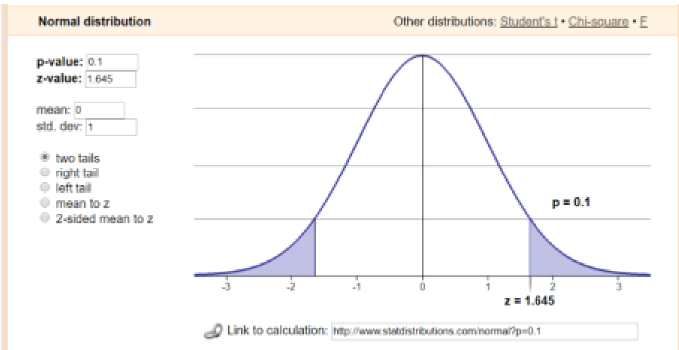
Zentrales Intervall: Mit einer WS von 95% befindet sich die Zufallsvariable T in dem Intervall (-2,131; +2,131)

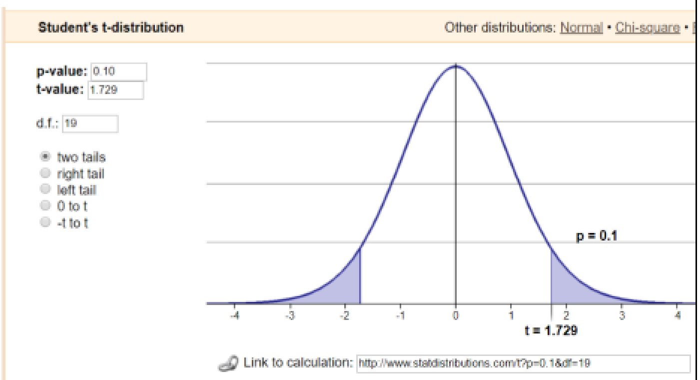
Beispiel (Unterschied t-Verteilung und Normalverteilung):
Sie haben das Simulationsmodell einer Produktionseinrichtung erstellt, vom realen System wissen sie, dass diese Maschine im normalverteilten Mittel 10 Stück pro Sekunde produziert und die Standardabweichung von 1 Stück pro Sekunde besitzt. In welchem symmetrischen Intervall liegt der Mittelwert bei vorgegebener Warscheinlichkeit, oft mit 1-α bezeichnet. Zum Beispiel sei hier 1- α = 0.90

Zur Überprüfung des Modells werden 20 Experimente durchgeführt der Schätzwert liegt bei $\bar{x} = 9.8$

Z = invNorm(0.05) -1.64485 t= invt(0.05,19) -1.72913

Aus der Rechner folgt: z = 1.645 und t= 1.729





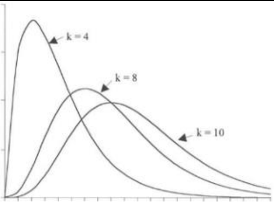
$$-z\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} - \mu < z\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad -t\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} - \mu < t\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Chi-Quadrat – Verteilung

Formel:

$$Y = X^2 = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_k^2$$
$$E(X) = k$$
$$VAR(X) = 2k$$

Erklärung:
- Zufallsvariablen unabhängig und standardnormalverteilt
- - Chi-Quadrat – Verteilung Y mit k (= n-1) Freiheitsgraden ist die Verteilung der Summe der quadrierten Zufallsvariablen.
- Ist X darüber hinaus normalverteilt, ist auch der Stichprobenmittelwert normalverteilt.



k \ 1 - α	0,010	....	0,950	....	0,999
1					
2					
...					
15			24,9958		
...					

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% nimmt die Zufallsvariable Y einen Wert kleiner / gleich 24,9958 an.

Normalverteilung

Satz 1: $E(\bar{X}) = \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \quad bzw. \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	Erklärung: $\bar{X}: Stichprobenmittelwert$ σ²: Varianz µ: Mittelwert der Grundgesamtheit σ: Standardabweichung - Der Erwartungswert des Stichprobenmittels ist identisch mit dem arithmetischen Mittel µ der Grundgesamtheit. - Die Varianz des Stichprobemittels $\sigma_{\bar{X}}^2$ ist der n-te Teil der Varianz der Grundgesamtheit σ^2.
Satz 2: Wenn X N(µ; σ)-verteilt, dann $\bar{X} \Rightarrow N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$	- Ist X darüber hinaus normalverteilt, ist auch der Stichprobenmittelwert normalverteilt.
Es galt zudem: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \rightarrow Z_{Stichprobe} = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	

Beispiel:
Sie haben das Simulationsmodell einer Produktionseinrichtung erstellt, vom realen System wissen sie, dass diese Maschine im normalverteilten Mittel 10 Stück pro Sekunde produziert und die Standardabweichung von 1 Stück pro Sekunde besitzt. Sie führen in der Simulationsumgebung 25 Experimente durch.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der mittlere Ausstoss zwischen 9.8 und 10.2 Stück pro Sekunde liegen?

6. µ und σ bestimmen	µ = 10, σ = 1
7. W(X≤?/≥?) bestimmen	P(9,8 ≤ X̄ ≤ 10,2) = P(X̄ ≤ 10,2) – P(X̄ ≤ 9,8)
8. Verteilungsfunktionen Normalform best.	$F_N(10{,}2\|10;\ 1)$ - $F_N(9{,}8\|10;\ 1)$
9. z-Transformation	$Z1_{Stichprobe} = \frac{10{,}2-10}{\frac{1}{\sqrt{25}}}$ $Z2_{Stichprobe} = \frac{9{,}8-10}{\frac{1}{\sqrt{25}}}$
10. Werte aus Tabelle lesen	0,8413 (Z1) – 0,1587 (Z2) = 0,6826 → 68,26 %

Schätzverfahren

Schätzfunktionen sind das mathematisch Instrument zur Abschätzung unbekannter Parameter der Grundgesamtheit. Sie stellen ein Bindeglied zwischen der Grundgesamtheit und der Stichprobe dar.

Gütekriterien

- Erwartungstreue (Unverzerrtheit)	
Formel: E(T̂) – T = 0	Erklärung: eine Schätzfunktion, deren Erwartungswert mit dem Parameter der Grundgesamtheit bei jedem Stichprobenumfang n übereinstimmt, wird als erwartungstreu oder unverzerrt bezeichnet
- Konsistenz	
Eine Schätzfunktion soll mit zunehmendem Stichprobenumfang n tendenziell bessere Schätzwerte liefern, d.h. die Varianz soll immer kleiner werden.	
- Effizienz (Wirksamkeit)	
Eine erwartungstreue Schätzfunktion heisst effizient, wenn es keine andere Schätzfunktion gibt, die bei gleichem Stichprobenumfang n eine geringere Varianz besitzt.	

Genauigkeit und Konfidenz

Die Genauigkeit und die Konfidenz sind voneinander abhängige Grössen, das heisst:

- Soll die Genauigkeit erhöht werden (d.h. der max. Schätzfehler verringert werden), dann ist
  - der Stichprobenumfang n unter Beibehaltung des Konfidenzniveaus "z" zu erhöhen oder
  - das Konfidenzniveau bei festem n abzusenken.
- Soll die Konfidenz erhöht werden, dann ist
  - der Stichprobenumfang n unter Beibehaltung der Konfidenzgrenzen zu erhöhen oder
  - die Genauigkeit verringert werden, also das Konfidenzintervall / der maximale Fehler ist zu vergrössern bei gleichbleibendem n.

Erkenntnis: Eine gleichzeitige Verbesserung beider Grössen ist nur über eine Erhöhung des Stichprobenumfangs möglich.

Konfidenzintervall für das arithmetische Mittel

Da die Schätzfunktion $\bar{X}$ erwartungstreu ist, gilt: $\mu_{\bar{X}} = \mu$

Schrittfolge zur Erstellung eines Konfidenzintervalls

Schritt 1: Festlegung der Verteilungsform von $\bar{X}$
Wie: mit Hilfe von Abbildung 1 (siehe weiter unten)
Schritt 2: Festlegung der Varianz / Standartabweichung von $\bar{X}$
Wie: mit Hilfe von Abbildung 2 (siehe weiter unten)
Schritt 3: Ermittlung des Quantilswertes z oder t
Wie: z = Tabelle und t = Tabelle
Schritt 4: Berechnung des maximalen Schätzfehlers
Wie: Produkt aus Quantilswert und Standartabweichung (σ) von $\bar{X}$
Schritt 5: Ermittlung der Konfidenzgrenze
Wie: Subtraktion bzw. Addition des max. Schätzfehlers vom bzw. zum Stichprobenmittel $\bar{X}$

Formeln:

Varianz σ^2 / Verteilung des Merkmals X	bekannt	unbekannt
bekannt und normalverteilt	$\bar{X}$ ist normalverteilt	$\bar{X}$ ist t-verteilt mit k = n - 1 Freiheitsgraden Wenn n > 30: $\bar{X}$ ist approximativ normalverteilt
bekannt und nicht normalverteilt (n > 30)	$\bar{X}$ ist approximativ normalverteilt	
unbekannt (n > 30)		

Erklärung:

Abbildung 1

Formeln:

Varianz σ^2 / Stichprobe	bekannt	unbekannt
mit Zurücklegen	$\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n}$	$\hat{\sigma}^2_{\bar{X}} = \frac{s^2}{n}$
ohne Zurücklegen, $\frac{n}{N} < 0{,}05$	$\sigma^2_{\bar{X}} \approx \frac{\sigma^2}{n}$	$\hat{\sigma}^2_{\bar{X}} \approx \frac{s^2}{n}$
ohne Zurücklegen, $\frac{n}{N} \geq 0{,}05$	$\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$	$\hat{\sigma}^2_{\bar{X}} = \frac{s^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N}$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Erklärung:

Abbildung 2

N: Grundmenge
n: Grösse der Stichprobe

Beispiel: Zuckerabfüllung

Auf einer Anlage wird Zucker in Tüten abgefüllt. Das Soll-Füllgewicht beträgt 1‘000 g. Aufgrund mehrjähriger Untersuchungen weiß man, dass das Füllgewicht normalverteilt ist mit einer Streuung von σ = 1.2 g. Von 1‘000 Packungen wurden 25 zufällig nach dem Modell mit Zurücklegen entnommen. Das durchschnittliche Füllgewicht in dieser Stichprobe betrug 1‘000.3 g. Erstellung des zentralen 95%-Konfidenzintervalls für μ.

Schritt 1: Festlegung der Verteilungsform von $\bar{X}$
Resultat: $\bar{X}$ ist normalverteilt
Schritt 2: Festlegung der Varianz / Standartabweichung von $\bar{X}$
Resultat: $\sigma^2_{\bar{X}} \approx \frac{\sigma^2}{n} \rightarrow \sigma_{\bar{X}} = \frac{1.2}{\sqrt{25}} = 0.24$
Schritt 3: Ermittlung des Quantilswertes z
Resultat aus Tabelle: z = 1.96
Schritt 4: Berechnung des maximalen Schätzfehlers
Resultat: z * $\sigma_{\bar{X}}$ = 1.96 * 0.24 = 0.47
$W(999.83 \leq \mu \leq 1'000.77) = 0.95$

Schritt 5: Ermittlung der Konfidenzgrenze
Resultat: W(1‘000.3 – 0.47 ≤ μ ≤ 1‘000.3 + 0.47) = 0,95
Das durchschnittliche Füllgewicht der 1‘000 Zuckerpackungen wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% vom Intervall [999.83 g; 1.000.77 g] überdeckt.

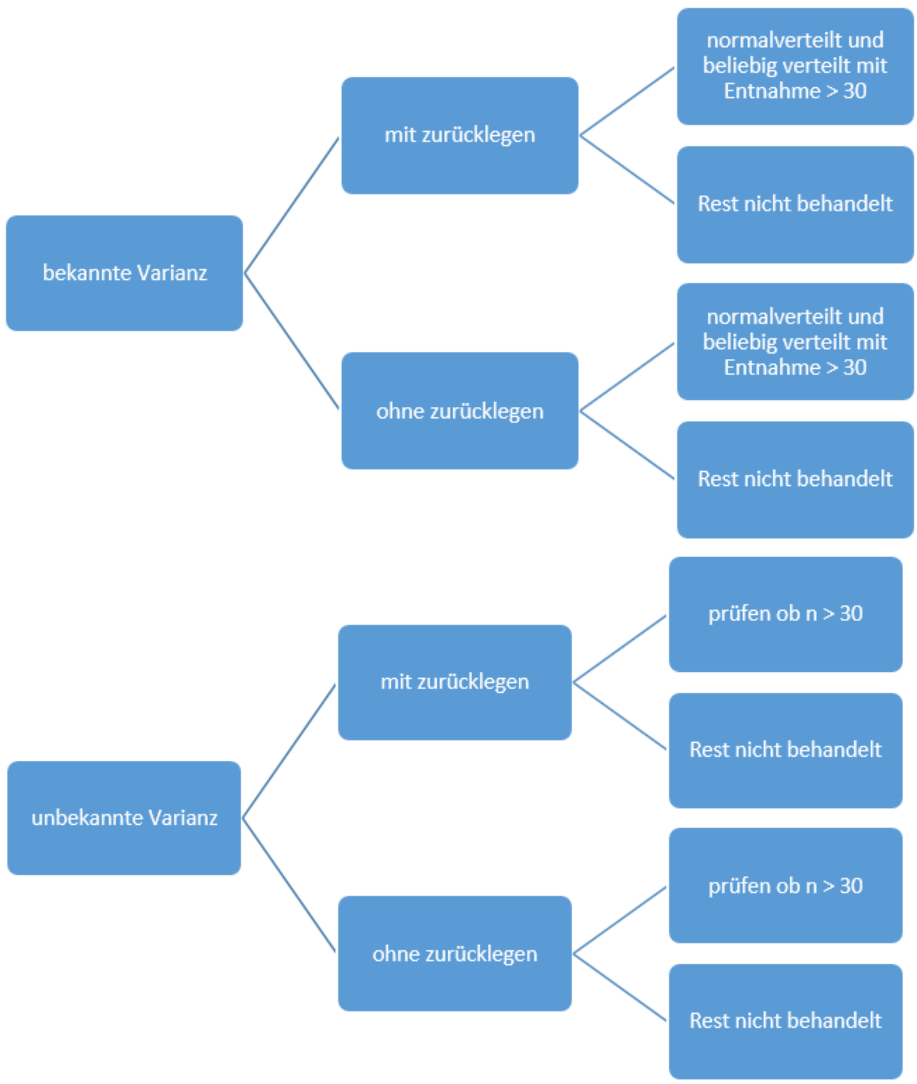
Ermitteln der Konfidenz für das mit 1000g nach unten begrenzte Intervall für μ.
Schritt 1: Festlegung der Verteilungsform von $\bar{X}$
Resultat: $\bar{X}$ ist normalverteilt
Schritt 2: Z berechnen

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{1000.3 - 1000}{0.24} = 1.25$$

Schritt 3: Aus Tabelle auslesen
Wert von -∞ bis 1.25 = 0.896
Schritt 4: Umrechnen in %
Resultat:
Der Mittelwert wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 89.6% im Intervall [1000, ∞] liegen.
(Falls die obere Grenze gefragt ist, einfach *1 – Untere Grenze* = 1-0.896 = 0.104. Somit liegt die Wahrscheinlichkeit, dass der Mittelwert im Intervall [-∞, 1000] liegt bei 10.4%

notwendiger Stichprobenumfang n beim Konfidenzintervall für das arithmetische Mittel

In diesem Fall wird gefordert, dass die Schätzung ein vorgegebenes Mindestmass an Genauigkeit e besitzt und dass diese Mindestgenauigkeit mit einer vorgegebenen Konfidenz bzw. Sicherheit erzielt wird.
gegeben: Konfidenz, Genauigkeit (e)
gesucht: Stichprobenumfang n



n ist jeweils die kleinste ganze Zahl, für die die Ungleichung gilt:

$$n \geq \frac{z^2 * \sigma^2}{e^2}$$

$$n \geq \frac{z^2 * N * \sigma^2}{e^2 * (N-1) + z^2 * \sigma^2}$$

falls N nicht bekannt ist, so ist oben stehende Formel zu verwenden

$$n \geq \frac{z^2 * s^2}{e^2}$$

Es ist im Nachhinein zu prüfen, ob n > 30 ist!

$$n \geq \frac{z^2 * N * s^2}{e^2 * (N-1) + z^2 * s^2}$$

Es ist im Nachhinein zu prüfen, ob n > 30 ist!
falls N nicht bekannt ist, so ist oben stehende Formel zu verwenden

Bei der unbekannten Varianz wird im vorherein jeweils eine kleine Vorstichprobe gezogen und wie folgt bestimmt:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} * \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Beispiel: Zuckerabfüllung
gegeben: Konfidenz z = 1.96 Genauigkeit e = 0.2 g Standartabweichung σ = 1.2
$n \geq \frac{z^2 * \sigma^2}{e^2} = \frac{1.96^2 * 1.2^2}{0.2^2}$ = 138.3
Es müssen 139 Packungen entnommen werden, um die gewünschte Genauigkeit zu erzielen (wegen n > 30 ist im Falle einer beliebig verteilten Grundgesamtheit die Approximation durch die Normalverteilung zulässig).

Konfidenzintervall für den Anteilswert

Es wird folgende Schätzfunktion verwendet: $P = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \frac{X}{n}$

X_i (für i = 1, …, n) ist wie folgt definiert: $X_i = \begin{cases} 1 & falls\ Element\ i\ die\ Eigenschaft\ besitzt \\ 0 & falls\ Element\ i\ die\ Eigenschaft\ nicht\ besitzt \end{cases}$

Der Erwartungswert ist: μ_p = E(P) = Θ, d.h. die Schätzfunktion P ist eine erwartungstreue Schätzung.
Der Fall "Varianz bekannt" für die Schätztheorie ohne Bedeutung, da bei Kenntnis der Varianz auch der zu schätzende Anteilswert bekannt ist.

Schrittfolge zur Erstellung eines Konfidenzintervalls

Schritt 1: Festlegung der Verteilungsform von P
Wie: Die Schätzfunktion ist approximativ normalverteilt, wenn: n * P * (1 - P) > 9
Schritt 2: Festlegung der Varianz / Standartabweichung von P
Wie: mit Hilfe von Abbildung 3 (siehe weiter unten)
Schritt 3: Ermittlung des Quantilswertes z
Wie: z = Tabelle 3a, 3b Seiten 368-370
Schritt 4: Berechnung des maximalen Schätzfehlers
Wie: Produkt aus Quantilswert und Standartabweichung (σ) von P
Schritt 5: Ermittlung der Konfidenzgrenze
Wie: Subtraktion bzw. Addition des max. Schätzfehlers vom bzw. zum Stichprobenmittel P

Formeln:

Stichprobe \ Varianz σ^2		bekannt	unbekannt
mit Zurücklegen		$\sigma_P^2 = \frac{\Theta \cdot (1-\Theta)}{n}$	$\hat{\sigma}_P^2 = \frac{P \cdot (1-P)}{n}$
ohne Zurücklegen	$\frac{n}{N} < 0{,}05$	$\sigma_P^2 \approx \frac{\Theta \cdot (1-\Theta)}{n}$	$\hat{\sigma}_P^2 \approx \frac{P \cdot (1-P)}{n}$
	$\frac{n}{N} \geq 0{,}05$	$\sigma_P^2 = \frac{\Theta \cdot (1-\Theta)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$	$\hat{\sigma}_P^2 = \frac{P \cdot (1-P)}{n} \cdot \frac{N-n}{N}$

Erklärung:

Abbildung 3

N: Grundmenge
n: Grösse der Stichprobe

Beispiel: Bekanntheitsgrad
Ein Chemieunternehmen möchte den Bekanntheitsgrad eines von ihm hergestellten Waschmittels in Erfahrung bringen. Dazu werden 400 Personen zufällig ausgewählt und befragt. Das Waschmittel war 30 % der Befragten zumindest namentlich bekannt. Erstellung des zentralen 95%-Konfidenzintervalls für Θ.
Schritt 1: Festlegung der Verteilungsform von P
Wie: n * P * (1 - P) > 9 = 400 * 0.3 * 0.7 = 84 > 9 → wahr, also approximativ normalverteilt
Schritt 2: Festlegung der Varianz / Standartabweichung von P
Resultat: $\hat{\sigma}_P = \sqrt{\frac{P*(1-P)}{n}} = \sqrt{\frac{0.3*0.7}{400}}$ = 0.02
Schritt 3: Ermittlung des Quantilswertes z
Resultat aus Tabelle 3a, 3b Seiten 368-370: z = 1.96
Schritt 4: Berechnung des maximalen Schätzfehlers
Resultat: z * $\hat{\sigma}_P$ = 1.96 * 0.02 = 0.04
Schritt 5: Ermittlung der Konfidenzgrenze
Resultat: W(0.30 – 0.04 ≤ Θ ≤ 0.30 + 0.04) = 0,95 W(0.26 ≤ Θ ≤ 0.34) = 0.95

⇨ *Bekanntheitsgrad der Grundgesamtheit wird mit Wahrscheinlichkeit von 95% vom Intervall [26%; 34%] überdeckt.*

notwendiger Stichprobenumfang n beim Konfidenzintervall für den Anteilswert

Das Problem, dass der im maximalen Schätzfehler enthaltene Anteilswert P der Stichprobe unbekannt ist, da noch keine Stichprobe gezogen worden ist, wird gelöst, indem eine Vorstichprobe gezogen wird und der Anteilswert dieser Vorstichprobe als Schätzwert für den Anteilswert P der Stichprobe verwendet wird. Es wird zwischen den Fällen Entnahme mit und ohne Zurücklegen unterschieden.

Entnahme mit Zurücklegen

Formel:	Erklärung:
$n \geq \frac{z^2 * P * (1-P)}{e^2}$	n ist die kleinste ganze Zahl, für die die Ungleichung erfüllt ist

Entnahme ohne Zurücklegen

Formel:	Erklärung:
$n \geq \frac{z^2 * N * P * (1-P)}{e^2 * (N-1) + z^2 * P * (1-P)}$	n ist die kleinste ganze Zahl, für die die Ungleichung erfüllt ist

Konfidenzintervall für die Varianz

Es wird die folgende Schätzfunktion verwendet: $s^2 = \frac{1}{n-1} * \sum(X_i - \bar{X})^2$

Voraussetzungen für eine erwartungstreue Schätzung: das Merkmal X ist in der Grundgesamtheit normalverteilt und die Entnahme erfolgt mit Zurücklegen.

zweiseitiges Konfidenzintervall

Formel:	Erklärung:
$W = \left(\frac{(n-1) * s^2}{y_{1-\frac{\alpha}{2},\ r=n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1) * s^2}{y_{\frac{\alpha}{2},\ r=n-1}} \right) = 1 - \alpha$	Das y unter dem Bruchstrich ist Chi-Quadrat-verteilt mit r = n - 1 Freiheitsgraden, es kann aus Tabelle ausgelesen werden.

einseitiges Konfidenzintervall

Formel:	Erklärung:
$W = \left(\sigma^2 \leq \frac{(n-1) * s^2}{y_{\alpha,\ r=n-1}} \right) = 1 - \alpha$	Das y unter dem Bruchstrich ist Chi-Quadrat-verteilt mit r = n - 1 Freiheitsgraden, es kann aus ausgelesen werden.

Testverfahren

Bei den Testverfahren handelt es sich um Verfahren, die überprüfen, ob eine Hypothese über eine interessierende Eigenschaft beibehalten oder abgelehnt wird. Die Hypothesen können sich auf folgendes beziehen:
- Parameter einer Verteilung (Parametertest)
- Form der Verteilung (Verteilungs- bzw. Anpassungstest)
- Unabhängigkeit von Merkmalen (Unabhängigkeitstest)

Elemente der Testverfahren

Hypothese	Wird als H_0 bezeichnet und kann beibehalten oder abgelehnt werden
Alternativhypothese	Wird als H_1 bezeichnet und kann angenommen oder nicht angenommen werden. I.d.R wird jene Behauptung zur Alternativhypothese, welche nachgewiesen oder statistisch untermauert werden soll.
Testfunktion	Ist das mathematische Instrument für die Entscheidungsfunktion.
Beibehaltungs- und Ablehnungsbereich	**zweiseitiger Test / Punkthypothese:** - wird angewendet, wenn behauptet wird, dass der Parameter einen ganz bestimmten Wert besitzt. Es ist H_0 $x = x_0$ gegen H_1 $x \neq x_0$ - der Beibehaltungsbereich besteht aus einem zweiseitigen Intervall, die Grenzen werden bestimmt, indem der max. Schätzfehler ($z^*\sigma_{\bar{X}}$) vom zu prüfenden Parameter x_0 addiert und subtrahiert wird **einseitiger Test / Bereichshypothese:** - wird angewendet, wenn behauptet wird, dass der Parameter kleiner gleich oder grösser gleich einem bestimmten Wert und es ist entweder H_0 $x \leq x_0$ gegen H_1 $x > x_0$ oder H_0 $x \geq x_0$ gegen H_1 $x < x_0$ - H_0 nach oben begrenzt (Höchstwert): obere Grenze wird wie folgt ermittelt: der max. Schätzfehler ($z^*\sigma_{\bar{X}}$) wird zum Parameter x_0 addiert - H_0 nach unten begrenzt (Mindestwert): untere Grenze wird wie folgt ermittelt: der max. Schätzfehler ($z^*\sigma_{\bar{X}}$) wird vom Parameter x_0 subtrahiert
Signifikanzniveau	Die Wahrscheinlichkeit, dass die wahre Hypothese H_0 irrtümlich abgelehnt wird, kann über die Wahrscheinlichkeit α nach oben begrenzt werden. *Z.B Die Irtummswarscheinlichkeit ist bei α=0.01 kleiner als bei α=0.1. α=0.01 ist sehr signifikant*
Entscheidung und Interpretation	Entscheidung wird gefällt, indem der Testfunktionswert für die Stichprobe bestimmt wird und dann festgestellt wird, ob dieser in den Beibehaltungs-bereich fällt oder im Ablehnungsbereich ist. - im Beibehaltungsbereich: H_0 wird beibehalten bzw. H_1 wird nicht angenommen - im Ablehnungsbereich: H_0 wird abgelehnt bzw. H_1 wird angenommen
Fehler	**Fehler 1. Art auch α-Fehler ("Produzentenrisiko")** irrtümliche Ablehnung von H_0 der α-Fehler wird vom Entscheidungsträger kontrolliert, da das Fehlerrisiko in Form des Signifikanzniveaus vorgegeben ist **Fehler 2. Art auch β-Fehler ("Konsumentenrisiko")** irrtümliche Annahme / Beibehaltung von H_0

Parametertest

arithmetisches Mittel

Schritt 1: Erstellen der Hypothesen
Wie: In der Regel wird diejenige Behauptung zur Alternativhypothese gemacht, die nachgewiesen oder statistisch untermauert werden soll
Schritt 2: Verteilungsform und Standartabweichung von $\bar{X}$
Wie: siehe Schätzverfahren Abschnitt: Konfidenzintervall für das arithmetische Mittel Abbildung 1 & 2
Schritt 3: Festlegung des Signifikanzniveaus α
Schritt 4: Ermittlung des Beibehaltungsbereichs
Wie: siehe Beibehaltungs- und Ablehnungsbereich weiter oben
Schritt 5: Berechnung Stichprobenmittel und Entscheidung bzw. Interpretation
Wie: siehe Entscheidung und Interpretation weiter oben

Beispiel: Wurstfabrik

In einer Wurstfabrik werden u.a. Leberwürste mit einem Mindest-Füllgewicht von 125 g hergestellt. Aus früheren Messreihen ist bekannt, dass das Gewicht normalverteilt ist. - Dem Wurstfabrikanten wird unterstellt, die Leberwürste würden zu wenig wiegen. Aus der Tagesproduktion von 600 Leberwürsten wurden daraufhin 36 Würste zufällig entnommen und gewogen; das durchschnittliche Füllgewicht betrug 124.58 g bei einer Standardabweichung von 1.72 g. Prüfung der Unterstellung bei den Signifikanzniveaus von 10%.

Schritt 1: Erstellen der Hypothesen

Resultat: Die schwerwiegende Unterstellung, das Mindest-Füllgewicht würde unterschritten, ist nachzuweisen und daher zur Alternativhypothese zu machen. Also: $H_0 = \mu \geq \mu_0 = 125$ g und $H_1 = \mu < \mu_0$ 125 g

Schritt 2: Verteilungsform und Standartabweichung von $\bar{X}$

Resultat: wegen n > 30 ist $\bar{X}$ approximativ normalverteilt; $\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}} * \sqrt{\frac{N-n}{N}} = \frac{1.72}{\sqrt{36}} * \sqrt{\frac{600-36}{600}} = 0.28$ g

Schritt 3: Festlegung des Signifikanzniveaus α

Resultat: ist mit 10% bereits vorgegeben. Es kann nun der zugehörige z-Wert ausgelesen werden. Vorgehen: $1 - \alpha$ berechnen und diesen Wert innerhalb der Tabelle suchen → 0.9 suchen → 1.28 ist mit 0.8997 am nächsten

Schritt 4: Ermittlung des Beibehaltungsbereichs

Resultat: Beibehaltungsbereich = $[125 - z*\hat{\sigma}_{\bar{X}}; \infty] = [125 - 1.28*0.28; \infty] = [124.64 \text{ g}; \infty]$

Schritt 5: Berechnung Stichprobenmittel und Entscheidung bzw. Interpretation

Resultat: Der Stichprobenmittelwert von 124.58 g liegt im Ablehnungsbereich, d.h. die Alternativhypothese wird angenommen. Dementsprechend wird die Aussage „die Leberwürste wiegen durchschnittlich mindestens 125 g“ abgelehnt.

Anteilswert

Schritt 1: Erstellen der Hypothesen

Wie: In der Regel wird diejenige Behauptung zur Alternativhypothese gemacht, die nachgewiesen oder statistisch untermauert werden soll

Schritt 2: Verteilungsform und Standartabweichung von P

Wie: P ist approximativ normalverteilt, wenn $n * \Theta_0 * (1 - \Theta_0) > 9$ und die Varianz kann als bekannt angesehen werden, da Θ_0 aus der Hypothese H_0 bekannt ist, Rest siehe Schätzverfahren Abschnitt: Konfidenzintervall für den Anteilswert Abbildung 3

Schritt 3: Festlegung des Signifikanzniveaus α

Schritt 4: Ermittlung des Beibehaltungsbereichs

Wie: siehe Beibehaltungs- und Ablehnungsbereich weiter oben

Schritt 5: Berechnung Stichprobenmittel und Entscheidung bzw. Interpretation

Wie: siehe Entscheidung und Interpretation weiter oben

Differenztest für Mittelwerte von Normalverteilungen

Wenn mit Hilfe von Stichproben untersucht werden soll, ob zwei Mittelwerte gleich sind oder ob sie signifikant voneinander abweichen. Es wird zwischen abhängigen und unabhängigen Stichproben unterschieden.

abhängige Stichprobe

Wird in der Regel angestrebt, wenn es sonst zu Überlagerungen kommt, die das Ergebnis verzerren könnten.

Schritt 1: Bilden der Nullhypothese H_0: $\mu_1 = \mu_2$

Schritt 2: Die Differenzen der Stichprobe $d_i = x_i - y_i$ müssen für alle i erfasst werden

Schritt 3: Die Nullhypothese H_0 gilt dann, wenn der Mittelwert von d_i im Bereich von $1-\alpha$ liegt

Schritt 4: Es wird eine Signifikanzzahl α gewählt

Schritt 5: Mit Hilfe der Tabelle für Normalverteilung werden die Annahmegrenzen festgelegt

Beispiel:

Ablauf 1	Ablauf 2	Differenz	Häufigkeit	
22	24	-2	1	
36	41	-5	2	
40	39	1	2	
28	29	-1	4	
30	30	0	3	
34	40	-6	3	
31	29	2	3	
32	28	4	2	
35	35	0	3	
33	35	-2	4	
37	36	1	1	
38	43	-5	2	
26	29	-3	3	
42	45	-3	1	
39	37	2	1	
			35	Summe
		-1.28571		

Abhängige Stichproben:

Gegeben sind die Ergebnisse der beiden Stichproben

$$\bar{d} = \frac{1}{35}\sum_{i=1}^{15} n_i \, d_i = -1.29$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{34}\sum_{i=1}^{15} n_i(d_i - \bar{d})^2} = 2.77$$

Mit der Signifikanzzahl ergibt sich

$$c = 0 \mp 1.96\frac{2.77}{\sqrt{35}} = \mp 0.918$$

Da der Mittelwert -1.29 nicht in den Annahmebereich fällt ist die Hypothese zu verwerfen.

unabhängige Stichprobe

Liegt dann vor, wenn zum Beispiel für ein Herstellungsprozess zwei unterschiedliche Produktions-Modellvarianten untersucht werden sollen, in denen der Durchsatz untersucht werden soll. Gefragt ist: Ist Variante A signifikant besser als Variante B?

Schritt 1: Lege eine Signifikanzzahl α fest

Schritt 2: Mit Hilfe der Tabelle für Normalverteilung wird der Werte $\mp Z$ festgelegt

Schritt 3: Berechnen des Annahmebereichs

Wie: c = $\mp^{z}\sqrt{\frac{\sigma1^2}{n_1}+\frac{\sigma2^2}{n_2}}$

Schritt 4: Berechnen der Mittelwerte der Stichproben μ_1 und μ_2

Schritt 5: Die Nullhypothese H_0 wird angenommen, wenn die Differenz $d_i = \mu_1 - \mu_2$ in den Annahmebereich fällt

Chi-Quadrat-Verteilungstest

Es wird anhand einer Stichprobe geprüft, ob eine Behauptung über die Verteilungsform eines Merkmals in der übergeordneten Grundgesamtheit beibehalten werden kann oder zugunsten einer alternativen Behauptung abzulehnen ist. **Voraussetzung:** die Durchführung des Tests ist nur möglich, wenn die theoretischen Häufigkeiten grösser gleich 5 sind.

Formel:	Erklärung:
$y = \sum_{i=1}^{v}\frac{(h_i^e - h_i^t)^2}{h_i^t}$	v = Anzahl der verschiedenen Merkmalswerte h_i^e = empirische Häufigkeit des Merkmalswerts x_i in der Stichprobe h_i^t = theoretische Häufigkeit des Merkmalswerts x_i, die bei der unterstellten Verteilungsform zu erwarten wäre y ist näherungsweise chi-Quadrat-verteilt mit k = v - 1 Freiheitsgraden, die Freiheitsgrade reduzieren sich, falls bei der theoretischen Häufigkeitsverteilung Parameter zu schätzen sind, um die Anzahl der zu schätzenden Parameter wenn y $\leq y_{1-\alpha,\,k=v-1}$ ist, dann wird die unterstellte Verteilung beibehalten, andernfalls abgelehnt

Ablauf Chi-Quadrat-Verteilungstest

Schritt 1: Erstellen der Hypothesen

Schritt 2: Festlegung des Signifikanzniveaus

Schritt 3: Ermittlung des Beibehaltungsbereichs

Wie: $y_{1-\alpha,\,k=v-1}$

Schritt 4: Berechnung des Testwerts und Entscheidung

Wie: siehe oben stehende Formel

Beispiel: Simulation/Zufallszahlen

Im Rahmen einer Simulation zur Entwicklung einer Lagerhaltungsstrategie wird unterstellt, dass die werktägliche Nachfrage nach einem Erzeugnis 100, 110, 120, 130 oder 140 betragen kann, wobei jeder Nachfragewert gleich wahrscheinlich ist. Mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators soll für insgesamt 100‘000 Werktage die Nachfrage generiert werden. - In der Abbildung sind die Häufigkeitsverteilung für die Nachfrage in den ersten 100 Tagen (Stichprobe) und die zu erwartende Häufigkeitsverteilung wiedergegeben.

Nachfrage	100	110	120	130	140
h_i^e	16	19	20	24	21
h_i^t	20	20	20	20	20

Es ist mit einem Signifikanzniveau von 0.05 zu prüfen, ob die vom Zufallszahlengenerator erzeugte Nachfrageverteilung in der Grundgesamtheit gleich verteilt ist.

Schritt 1: Erstellen der Hypothesen

Resultat: H_0 = Die Nachfrage in der Grundgesamtheit ist gleich verteilt und H_1 = Die Nachfrage ist nicht gleich verteilt

Schritt 2: Festlegung des Signifikanzniveaus

Resultat: Signifikanzniveau ist mit 0.05 bereits vorgegeben

Schritt 3: Ermittlung des Beibehaltungsbereichs

Resultat: Beibehaltungsbereich = [0; $y_{1-\alpha,\,k=v-1}$] = [0; $y_{0.95,\,k=5-1}$] = [0; 9.4877]

Schritt 4: Berechnung des Testwerts und Entscheidung

Resultat: y = $\frac{(16-20)^2}{20}+\frac{(19-20)^2}{20}+\frac{(20-20)^2}{20}+\frac{(24-20)^2}{20}+\frac{(21-20)^2}{20}=\frac{34}{20}=1.7$

Die Stichprobenfunktion liegt mit 1.7 im Beibehaltungsbereich das heisst, dass bei einem Signifikanzniveau von 0.05 davon ausgegangen werden kann, dass die Nachfrage in der Grundgesamtheit gleichverteilt ist.

Unabhängigkeitstest

Es wird anhand einer Stichprobe geprüft, ob die Behauptung, zwei Merkmale X und Y sind in der Grundgesamtheit voneinander unabhängig, beibehalten werden kann oder abzulehnen ist. Voraussetzungen: die Durchführung des Tests ist nur möglich, wenn die theoretischen Häufigkeiten grösser gleich 5 sind und der Stichprobenumfang muss grösser 30 sein.

Formel:	Erklärung:
$y = \sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{w} \frac{\left(\mathrm{h}_{ij}^{e} - \mathrm{h}_{ij}^{t}\right)^2}{\mathrm{h}_{ij}^{t}}$	v und w = Anzahl der verschiedenen Merkmalswerte h_{ij}^{e} = empirische Häufigkeit der Merkmalswertkombination x_i, y_i h_{ij}^{t} = theoretische Häufigkeit der Merkmalswertkombination x_i, y_i die bei der unterstellten Verteilungsform zu erwarten wäre $\mathrm{h}_{ij}^{t} = \frac{\mathrm{h}_i^e * \mathrm{h}_j^e}{n}$ y ist näherungsweise chi-Quadrat-verteilt mit k = (v - 1) * (w - 1) Freiheitsgraden wenn y $\leq y_{1-\alpha,\, k=(v-1)*(w-1)}$ ist, dann wird die unterstellte Verteilung beibehalten, andernfalls abgelehnt

Ablauf Unabhängigkeitstest

Schritt 1: Erstellen der Hypothesen
Schritt 2: Festlegung des Signifikanzniveaus
Schritt 3: Ermittlung des Beibehaltungsbereichs
Wie: $y_{1-\alpha,\, k=(v-1)*(w-1)}$
Schritt 4: Berechnung des Testwerts und Entscheidung
Wie: siehe oben stehende Formel

Beispiel: Pausenregelung
In einem Grossunternehmen soll die Mittagspause von bisher 30 auf 45 Minuten verlängert werden. Von den 20'000 Beschäftigten wurden 400 Beschäftigte nach ihrer Einstellung zu der unbezahlten Verlängerung der Mittagspause befragt. Von den 400 Befragten waren 100 in der Verwaltung und 300 in der Produktion tätig. Als mögliche Antworten waren die Werte positiv, unentschieden und negativ vorgegeben. Das Ergebnis der Befragung ist in unten stehender Abbildung wiedergegeben.

X \ Y	positiv	unentschieden	negativ	Summe
Verwaltung	40	28	32	100
Produktion	140	72	88	300
Summe	180	100	120	400

Die Geschäftsleitung interessiert, ob der Tätigkeitsbereich (Merkmal X) die Einstellung zur Pausenregelung (Merkmal Y) beeinfluss oder nicht. Es ist bei einem Signifikanzniveau von 0.05 zu prüfen, ob die beiden Merkmale voneinander unabhängig sind.

X \ Y	positiv	unentschieden	negativ	Summe
Verwaltung	$\frac{100 \cdot 180}{400} = 45$	$\frac{100 \cdot 100}{400} = 25$	$\frac{100 \cdot 120}{400} = 30$	100
Produktion	$\frac{300 \cdot 180}{400} = 135$	$\frac{300 \cdot 100}{400} = 75$	$\frac{300 \cdot 120}{400} = 90$	300
Summe	180	100	120	400

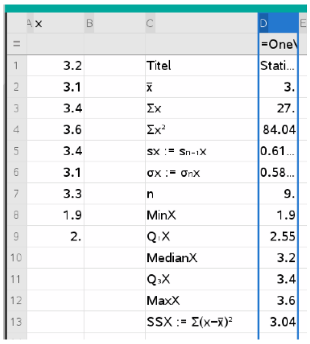
Diese Abbildung stellt die Situation der Unabhängigkeit dar.

Schritt 1: Erstellen der Hypothesen
Resultat: H_0 = Die beiden Merkmale sind voneinander unabhängig und H_1 = Die Merkmale sind nicht unabhängig
Schritt 2: Festlegung des Signifikanzniveaus
Resultat: Signifikanzniveau ist mit 0.05 bereits vorgegeben
Schritt 3: Ermittlung des Beibehaltungsbereichs
Resultat: Beibehaltungsbereich = $[0;\, y_{1-\alpha,\, k=(v-1)*(w-1)}] = [0;\, y_{0.95,\, k=(2-1)*(3-1)}] = [0;\, 5.9915]$
Schritt 4: Berechnung des Testwerts und Entscheidung
Resultat: $y = \frac{(40-45)^2}{45} + \frac{(28-25)^2}{25} + \frac{(32-30)^2}{30} + \frac{(140-135)^2}{135} + \frac{(72-75)^2}{75} + \frac{(88-90)^2}{90} = 1.3985$
Die Stichprobenfunktion liegt mit 1.3985 im Beibehaltungsbereich das heisst, dass bei einem Signifikanzniveau von 0.05 davon ausgegangen werden kann, dass vom Tätigkeitsbereich kein Einfluss zur Pausenregelung ausgeht. Die Merkmale sind voneinander unabhängig.

TI NSPIRE CAS

Mittelwerte und Streuwerte berechnen (unklassifiziert)

1. Alle Messwerte in Urliste eingeben untereinander in Tabelle und Tabelle benennen (Lists & Spreadsheet)
2. Menu > 4. Statistik > 1. Statistik mit einer Variable
   a. Listenanzahl 1 festlegen
   b. Bei X1 Liste die Spalte mit Namen angeben
   c. Mit OK bestätigen
3. Ergebnisse können nun in Spalte C und D abgelesen werden



	A x	B	C	D
=				=OneV
1	3.2		Titel	Stati...
2	3.1		$\bar{x}$	3.
3	3.4		Σx	27.
4	3.6		Σx^2	84.04
5	3.4		$sx := s_{n-1}x$	0.61...
6	3.1		$\sigma x := \sigma_n x$	0.58...
7	3.3		n	9.
8	1.9		MinX	1.9
9	2.		Q_1X	2.55
10			MedianX	3.2
11			Q_3X	3.4
12			MaxX	3.6
13			$SSX := \Sigma(x-\bar{x})^2$	3.04

Kombinatorik

Zu Finden im Calculator unter Menu > 5. Wahrscheinlichkeit

$\mathrm{nCr}(n,k)$ $$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

Wahrscheinlichkeiten und Binomialkoeffizienten berechnen

n= Anzahl versuche $\pi\ = \Theta\ \mathrm{P(A)}$

Unter der Annahme dass $X \sim \mathrm{Binom}(n,\pi)$ können folgende Wahrscheinlichkeiten im Rechner berechnet werden

$$\mathrm{P}[X = x] \overset{\text{im TR}}{=} \mathrm{binompdf}(n,\pi,x)$$
$$\mathrm{P}[X \leq x] \overset{\text{im TR}}{=} \mathrm{binomcdf}(n,\pi,x)$$
$$\mathrm{P}[X < x] \overset{\text{im TR}}{=} \mathrm{binomcdf}(n,\pi,x-1)$$
$$\mathrm{P}[X \geq x] \overset{\text{im TR}}{=} 1 - \mathrm{binomcdf}(n,\pi,x-1)$$
$$\mathrm{P}[X > x] \overset{\text{im TR}}{=} 1 - \mathrm{binomcdf}(n,\pi,x).$$

Um Binomialkoeffizienten $\binom{n}{x}$ zu berechnen, kann man im Rechner eintippen

$$n\ \ \mathrm{nCr}\ \ x,$$

oder falls ihr nCr nicht brauchen wollt, könnt ihr auch alles ausschreiben

$$n!/(x!(n-x)!).$$

Tabellen

Die Tabellen können im Calculator wie folgt abgefragt werden:

1. Menu > 6. Statistik > 5. Verteilungen
2. Hier muss entsprechende Verteilung ausgewählt werden.
   a. -Pdf: Dezimalzahl in Prozentzahl bei einem exakten Wert
   b. -Cdf: Dezimalzahl in Prozentzahl bei einem Range
   c. Invers: Prozentzahl in Dezimal um Zahlenwerte zu erhalten

In der Regel braucht man -Cdf und Invers. Um das Unendlichkeitszeichen zu erhalten (Für Rechts oder Links offene grenzen) im Nspire Taste π▸ (PI) links neben dem Buchstaben H anklicken.

Beispiel Normalverteilung z=1.95 => $\mathrm{normCdf}(-\infty,1.95,0,1)$ 0.974412 (Wert aus Tabelle abgelesen: 0.9744)

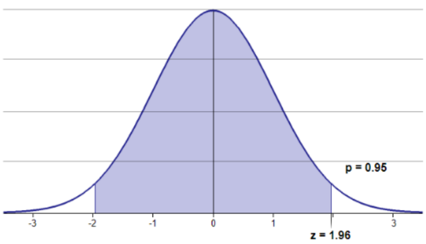
Zentrale Verteilung (2-Sided Mean): Prozentzahlen umrechnen

Invers geht immer vom rechten Rand aus, weshalb man bei Zentral etwas tricksen muss. Hier kann man folgende Formel Anwenden um den korrekten Wert für den TR erhalten (x= %-Wert)

$$x' = x + \frac{1-x}{2}$$

Beispiel Normalverteilung: Aus der Tabelle liest man für den Wert 95% (x=0.95): z= 1.96.

In TR muss man x'=0.975 eingeben: $\mathrm{invNorm}(0.975,0,1)$ 1.95996



Tabellen

Bininomalverteilung

Tabelle 1a: Binomialverteilung; Wahrscheinlichkeitsfunktion $f_B(x)$

		Θ									
n	x	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0	0,9500	0,9000	0,8500	0,8000	0,7500	0,7000	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
1	1	0,0500	0,1000	0,1500	0,2000	0,2500	0,3000	0,3500	0,4000	0,4500	0,5000
2	0	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
2	1	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4550	0,4800	0,4950	0,5000
2	2	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1225	0,1600	0,2025	0,2500
3	0	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
3	1	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4436	0,4320	0,4084	0,3750
3	2	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2389	0,2880	0,3341	0,3750
3	3	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0429	0,0640	0,0911	0,1250
4	0	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
4	1	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3845	0,3456	0,2995	0,2500
4	2	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,3105	0,3456	0,3675	0,3750
4	3	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,1115	0,1536	0,2005	0,2500
4	4	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0150	0,0256	0,0410	0,0625
5	0	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313
5	1	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3124	0,2592	0,2059	0,1563
5	2	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3364	0,3456	0,3369	0,3125
5	3	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1811	0,2304	0,2757	0,3125
5	4	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0488	0,0768	0,1128	0,1563
5	5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0053	0,0102	0,0185	0,0313
6	0	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
6	1	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2437	0,1866	0,1359	0,0938
6	2	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3280	0,3110	0,2780	0,2344
6	3	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,2355	0,2765	0,3032	0,3125
6	4	0,0001	0,0012	0,0055	0,0154	0,0330	0,0595	0,0951	0,1382	0,1861	0,2344
6	5	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0205	0,0369	0,0609	0,0938
6	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0018	0,0041	0,0083	0,0156
7	0	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
7	1	0,2573	0,3720	0,3960	0,3670	0,3115	0,2471	0,1848	0,1306	0,0872	0,0547
7	2	0,0406	0,1240	0,2097	0,2753	0,3115	0,3177	0,2985	0,2613	0,2140	0,1641
7	3	0,0036	0,0230	0,0617	0,1147	0,1730	0,2269	0,2679	0,2903	0,2918	0,2734
7	4	0,0002	0,0026	0,0109	0,0287	0,0577	0,0972	0,1442	0,1935	0,2388	0,2734
7	5	0,0000	0,0002	0,0012	0,0043	0,0115	0,0250	0,0466	0,0774	0,1172	0,1641
7	6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0036	0,0084	0,0172	0,0320	0,0547
7	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0016	0,0037	0,0078
8	0	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
8	1	0,2793	0,3826	0,3847	0,3355	0,2670	0,1977	0,1373	0,0896	0,0548	0,0313
8	2	0,0515	0,1488	0,2376	0,2936	0,3115	0,2965	0,2587	0,2090	0,1569	0,1094
8	3	0,0054	0,0331	0,0839	0,1468	0,2076	0,2541	0,2786	0,2787	0,2568	0,2188
8	4	0,0004	0,0046	0,0185	0,0459	0,0865	0,1361	0,1875	0,2322	0,2627	0,2734
8	5	0,0000	0,0004	0,0026	0,0092	0,0231	0,0467	0,0808	0,1239	0,1719	0,2188
8	6	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0038	0,0100	0,0217	0,0413	0,0703	0,1094
8	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0033	0,0079	0,0164	0,0313
8	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0017	0,0039

Tabelle 1a: Binomialverteilung; Wahrscheinlichkeitsfunktion $f_B(x)$

		Θ									
n	x	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
9	0	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
9	1	0,2985	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1004	0,0605	0,0339	0,0176
9	2	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2162	0,1612	0,1110	0,0703
9	3	0,0077	0,0446	0,1069	0,1762	0,2336	0,2668	0,2716	0,2508	0,2119	0,1641
9	4	0,0006	0,0074	0,0283	0,0661	0,1168	0,1715	0,2194	0,2508	0,2600	0,2461
9	5	0,0000	0,0008	0,0050	0,0165	0,0389	0,0735	0,1181	0,1672	0,2128	0,2461
9	6	0,0000	0,0001	0,0006	0,0028	0,0087	0,0210	0,0424	0,0743	0,1160	0,1641
9	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0012	0,0039	0,0098	0,0212	0,0407	0,0703
9	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0035	0,0083	0,0176
9	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0008	0,0020
10	0	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
10	1	0,3151	0,3874	0,3474	0,2684	0,1877	0,1211	0,0725	0,0403	0,0207	0,0098
10	2	0,0746	0,1937	0,2759	0,3020	0,2816	0,2335	0,1757	0,1209	0,0763	0,0439
10	3	0,0105	0,0574	0,1298	0,2013	0,2503	0,2668	0,2522	0,2150	0,1665	0,1172
10	4	0,0010	0,0112	0,0401	0,0881	0,1460	0,2001	0,2377	0,2508	0,2384	0,2051
10	5	0,0001	0,0015	0,0085	0,0264	0,0584	0,1029	0,1536	0,2007	0,2340	0,2461
10	6	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0162	0,0368	0,0689	0,1115	0,1596	0,2051
10	7	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0031	0,0090	0,0212	0,0425	0,0746	0,1172
10	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0043	0,0106	0,0229	0,0439
10	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0042	0,0098
10	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010

Tabelle 1b: Binomialverteilung; Verteilungsfunktion $F_B(x)$

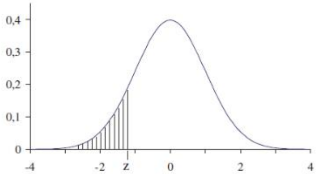
		Θ									
n	x	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0	0,9500	0,9000	0,8500	0,8000	0,7500	0,7000	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
1	1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
2	1	0,9975	0,9900	0,9775	0,9600	0,9375	0,9100	0,8775	0,8400	0,7975	0,7500
2	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
3	1	0,9928	0,9720	0,9393	0,8960	0,8438	0,7840	0,7183	0,6480	0,5748	0,5000
3	2	0,9999	0,9990	0,9966	0,9920	0,9844	0,9730	0,9571	0,9360	0,9089	0,8750
3	3	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
4	1	0,9860	0,9477	0,8905	0,8192	0,7383	0,6517	0,5630	0,4752	0,3910	0,3125
4	2	0,9995	0,9963	0,9880	0,9728	0,9492	0,9163	0,8735	0,8208	0,7585	0,6875
4	3	1,0000	0,9999	0,9995	0,9984	0,9961	0,9919	0,9850	0,9744	0,9590	0,9375
4	4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Tabelle 1b: Binomialverteilung; Verteilungsfunktion $F_B(x)$

		Θ									
n	x	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
5	0	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313
5	1	0,9774	0,9185	0,8352	0,7373	0,6328	0,5282	0,4284	0,3370	0,2562	0,1875
5	2	0,9988	0,9914	0,9734	0,9421	0,8965	0,8369	0,7648	0,6826	0,5931	0,5000
5	3	1,0000	0,9995	0,9978	0,9933	0,9844	0,9692	0,9460	0,9130	0,8688	0,8125
5	4	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990	0,9976	0,9947	0,9898	0,9815	0,9688
5	5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
6	1	0,9672	0,8857	0,7765	0,6554	0,5339	0,4202	0,3191	0,2333	0,1636	0,1094
6	2	0,9978	0,9842	0,9527	0,9011	0,8306	0,7443	0,6471	0,5443	0,4415	0,3438
6	3	0,9999	0,9987	0,9941	0,9830	0,9624	0,9295	0,8826	0,8208	0,7447	0,6563
6	4	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9954	0,9891	0,9777	0,9590	0,9308	0,8906
6	5	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9982	0,9959	0,9917	0,9844
6	6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	0	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
7	1	0,9556	0,8503	0,7166	0,5767	0,4449	0,3294	0,2338	0,1586	0,1024	0,0625
7	2	0,9962	0,9743	0,9262	0,8520	0,7564	0,6471	0,5323	0,4199	0,3164	0,2266
7	3	0,9998	0,9973	0,9879	0,9667	0,9294	0,8740	0,8002	0,7102	0,6083	0,5000
7	4	1,0000	0,9998	0,9988	0,9953	0,9871	0,9712	0,9444	0,9037	0,8471	0,7734
7	5	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9962	0,9910	0,9812	0,9643	0,9375
7	6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9994	0,9984	0,9963	0,9922
7	7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8	0	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
8	1	0,9428	0,8131	0,6572	0,5033	0,3671	0,2553	0,1691	0,1064	0,0632	0,0352
8	2	0,9942	0,9619	0,8948	0,7969	0,6785	0,5518	0,4278	0,3154	0,2201	0,1445
8	3	0,9996	0,9950	0,9786	0,9437	0,8862	0,8059	0,7064	0,5941	0,4770	0,3633
8	4	1,0000	0,9996	0,9971	0,9896	0,9727	0,9420	0,8939	0,8263	0,7396	0,6367
8	5	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9958	0,9887	0,9747	0,9502	0,9115	0,8555
8	6	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9964	0,9915	0,9819	0,9648
8	7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9983	0,9961
8	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
9	0	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
9	1	0,9288	0,7748	0,5995	0,4362	0,3003	0,1960	0,1211	0,0705	0,0385	0,0195
9	2	0,9916	0,9470	0,8591	0,7382	0,6007	0,4628	0,3373	0,2318	0,1495	0,0898
9	3	0,9994	0,9917	0,9661	0,9144	0,8343	0,7297	0,6089	0,4826	0,3614	0,2539
9	4	1,0000	0,9991	0,9944	0,9804	0,9511	0,9012	0,8283	0,7334	0,6214	0,5000
9	5	1,0000	0,9999	0,9994	0,9969	0,9900	0,9747	0,9464	0,9006	0,8342	0,7461
9	6	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987	0,9957	0,9888	0,9750	0,9502	0,9102
9	7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9986	0,9962	0,9909	0,9805
9	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9992	0,9980
9	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
10	0	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
10	1	0,9139	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
10	2	0,9885	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
10	3	0,9990	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719
10	4	0,9999	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770
10	5	1,0000	0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230
10	6	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,9740	0,9452	0,8980	0,8281
10	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9952	0,9877	0,9726	0,9453
10	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893
10	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990
10	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

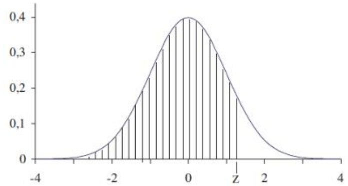
Standardnormalverteilung

Tabelle 3a: Standardnormalverteilung; $F_{SN}(z) = W(-\infty \le Z \le z)$



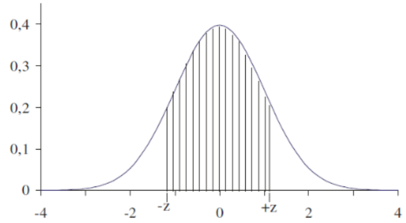
z	-0,09	-0,08	-0,07	-0,06	-0,05	-0,04	-0,03	-0,02	-0,01	0,00
-3,2	0,0005	0,0005	0,0005	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0007	0,0007
-3,1	0,0007	0,0007	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0009	0,0009	0,0009	0,0010
-3,0	0,0010	0,0010	0,0011	0,0011	0,0011	0,0012	0,0012	0,0013	0,0013	0,0013
-2,9	0,0014	0,0014	0,0015	0,0015	0,0016	0,0016	0,0017	0,0018	0,0018	0,0019
-2,8	0,0019	0,0020	0,0021	0,0021	0,0022	0,0023	0,0023	0,0024	0,0025	0,0026
-2,7	0,0026	0,0027	0,0028	0,0029	0,0030	0,0031	0,0032	0,0033	0,0034	0,0035
-2,6	0,0036	0,0037	0,0038	0,0039	0,0040	0,0041	0,0043	0,0044	0,0045	0,0047
-2,5	0,0048	0,0049	0,0051	0,0052	0,0054	0,0055	0,0057	0,0059	0,0060	0,0062
-2,4	0,0064	0,0066	0,0068	0,0069	0,0071	0,0073	0,0075	0,0078	0,0080	0,0082
-2,3	0,0084	0,0087	0,0089	0,0091	0,0094	0,0096	0,0099	0,0102	0,0104	0,0107
-2,2	0,0110	0,0113	0,0116	0,0119	0,0122	0,0125	0,0129	0,0132	0,0136	0,0139
-2,1	0,0143	0,0146	0,0150	0,0154	0,0158	0,0162	0,0166	0,0170	0,0174	0,0179
-2,0	0,0183	0,0188	0,0192	0,0197	0,0202	0,0207	0,0212	0,0217	0,0222	0,0228
-1,9	0,0233	0,0239	0,0244	0,0250	0,0256	0,0262	0,0268	0,0274	0,0281	0,0287
-1,8	0,0294	0,0301	0,0307	0,0314	0,0322	0,0329	0,0336	0,0344	0,0351	0,0359
-1,7	0,0367	0,0375	0,0384	0,0392	0,0401	0,0409	0,0418	0,0427	0,0436	0,0446
-1,6	0,0455	0,0465	0,0475	0,0485	0,0495	0,0505	0,0516	0,0526	0,0537	0,0548
-1,5	0,0559	0,0571	0,0582	0,0594	0,0606	0,0618	0,0630	0,0643	0,0655	0,0668
-1,4	0,0681	0,0694	0,0708	0,0721	0,0735	0,0749	0,0764	0,0778	0,0793	0,0808
-1,3	0,0823	0,0838	0,0853	0,0869	0,0885	0,0901	0,0918	0,0934	0,0951	0,0968
-1,2	0,0985	0,1003	0,1020	0,1038	0,1056	0,1075	0,1093	0,1112	0,1131	0,1151
-1,1	0,1170	0,1190	0,1210	0,1230	0,1251	0,1271	0,1292	0,1314	0,1335	0,1357
-1,0	0,1379	0,1401	0,1423	0,1446	0,1469	0,1492	0,1515	0,1539	0,1562	0,1587
-0,9	0,1611	0,1635	0,1660	0,1685	0,1711	0,1736	0,1762	0,1788	0,1814	0,1841
-0,8	0,1867	0,1894	0,1922	0,1949	0,1977	0,2005	0,2033	0,2061	0,2090	0,2119
-0,7	0,2148	0,2177	0,2206	0,2236	0,2266	0,2296	0,2327	0,2358	0,2389	0,2420
-0,6	0,2451	0,2483	0,2514	0,2546	0,2578	0,2611	0,2643	0,2676	0,2709	0,2743
-0,5	0,2776	0,2810	0,2843	0,2877	0,2912	0,2946	0,2981	0,3015	0,3050	0,3085
-0,4	0,3121	0,3156	0,3192	0,3228	0,3264	0,3300	0,3336	0,3372	0,3409	0,3446
-0,3	0,3483	0,3520	0,3557	0,3594	0,3632	0,3669	0,3707	0,3745	0,3783	0,3821
-0,2	0,3859	0,3897	0,3936	0,3974	0,4013	0,4052	0,4090	0,4129	0,4168	0,4207
-0,1	0,4247	0,4286	0,4325	0,4364	0,4404	0,4443	0,4483	0,4522	0,4562	0,4602
0,0	0,4641	0,4681	0,4721	0,4761	0,4801	0,4840	0,4880	0,4920	0,4960	0,5000

Tabelle 3a: Standardnormalverteilung; $F_{SN}(z) = W(-\infty \le Z \le z)$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995

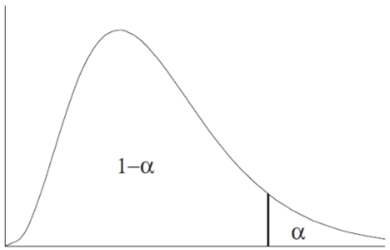
Tabelle 3b: Standardnormalverteilung; $F^{*}_{SN}(z) = W(-z \le Z \le +z)$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0080	0,0160	0,0239	0,0319	0,0399	0,0478	0,0558	0,0638	0,0717
0,1	0,0797	0,0876	0,0955	0,1034	0,1113	0,1192	0,1271	0,1350	0,1428	0,1507
0,2	0,1585	0,1663	0,1741	0,1819	0,1897	0,1974	0,2051	0,2128	0,2205	0,2282
0,3	0,2358	0,2434	0,2510	0,2586	0,2661	0,2737	0,2812	0,2886	0,2961	0,3035
0,4	0,3108	0,3182	0,3255	0,3328	0,3401	0,3473	0,3545	0,3616	0,3688	0,3759
0,5	0,3829	0,3899	0,3969	0,4039	0,4108	0,4177	0,4245	0,4313	0,4381	0,4448
0,6	0,4515	0,4581	0,4647	0,4713	0,4778	0,4843	0,4907	0,4971	0,5035	0,5098
0,7	0,5161	0,5223	0,5285	0,5346	0,5407	0,5467	0,5527	0,5587	0,5646	0,5705
0,8	0,5763	0,5821	0,5878	0,5935	0,5991	0,6047	0,6102	0,6157	0,6211	0,6265
0,9	0,6319	0,6372	0,6424	0,6476	0,6528	0,6579	0,6629	0,6680	0,6729	0,6778
1,0	0,6827	0,6875	0,6923	0,6970	0,7017	0,7063	0,7109	0,7154	0,7199	0,7243
1,1	0,7287	0,7330	0,7373	0,7415	0,7457	0,7499	0,7540	0,7580	0,7620	0,7660
1,2	0,7699	0,7737	0,7775	0,7813	0,7850	0,7887	0,7923	0,7959	0,7995	0,8029
1,3	0,8064	0,8098	0,8132	0,8165	0,8198	0,8230	0,8262	0,8293	0,8324	0,8355
1,4	0,8385	0,8415	0,8444	0,8473	0,8501	0,8529	0,8557	0,8584	0,8611	0,8638
1,5	0,8664	0,8690	0,8715	0,8740	0,8764	0,8789	0,8812	0,8836	0,8859	0,8882
1,6	0,8904	0,8926	0,8948	0,8969	0,8990	0,9011	0,9031	0,9051	0,9070	0,9090
1,7	0,9109	0,9127	0,9146	0,9164	0,9181	0,9199	0,9216	0,9233	0,9249	0,9265
1,8	0,9281	0,9297	0,9312	0,9328	0,9342	0,9357	0,9371	0,9385	0,9399	0,9412
1,9	0,9426	0,9439	0,9451	0,9464	0,9476	0,9488	0,9500	0,9512	0,9523	0,9534
2,0	0,9545	0,9556	0,9566	0,9576	0,9586	0,9596	0,9606	0,9615	0,9625	0,9634
2,1	0,9643	0,9651	0,9660	0,9668	0,9676	0,9684	0,9692	0,9700	0,9707	0,9715
2,2	0,9722	0,9729	0,9736	0,9743	0,9749	0,9756	0,9762	0,9768	0,9774	0,9780
2,3	0,9786	0,9791	0,9797	0,9802	0,9807	0,9812	0,9817	0,9822	0,9827	0,9832
2,4	0,9836	0,9840	0,9845	0,9849	0,9853	0,9857	0,9861	0,9865	0,9869	0,9872
2,5	0,9876	0,9879	0,9883	0,9886	0,9889	0,9892	0,9895	0,9898	0,9901	0,9904
2,6	0,9907	0,9909	0,9912	0,9915	0,9917	0,9920	0,9922	0,9924	0,9926	0,9929
2,7	0,9931	0,9933	0,9935	0,9937	0,9939	0,9940	0,9942	0,9944	0,9946	0,9947
2,8	0,9949	0,9950	0,9952	0,9953	0,9955	0,9956	0,9958	0,9959	0,9960	0,9961
2,9	0,9963	0,9964	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972
3,0	0,9973	0,9974	0,9975	0,9976	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980
3,1	0,9981	0,9981	0,9982	0,9983	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986
3,2	0,9986	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,3	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993

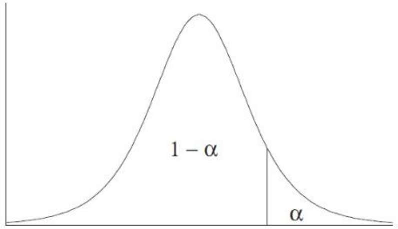
Chi-Quadrat & t-Verteilung

Tabelle 5: Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung



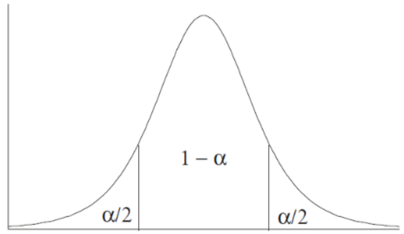
1- α		0,010	0,020	0,025	0,050	0,900	0,950	0,975	0,980	0,990
k	1	0,0002	0,0006	0,0010	0,0039	2,7055	3,8415	5,0239	5,4119	6,6349
	2	0,0201	0,0404	0,0506	0,1026	4,6052	5,9915	7,3778	7,8241	9,2104
	3	0,1148	0,1848	0,2158	0,3518	6,2514	7,8147	9,3484	9,8374	11,3449
	4	0,2971	0,4294	0,4844	0,7107	7,7794	9,4877	11,1433	11,6678	13,2767
	5	0,5543	0,7519	0,8312	1,1455	9,2363	11,0705	12,8325	13,3882	15,0863
	6	0,8721	1,1344	1,2373	1,6354	10,6446	12,5916	14,4494	15,0332	16,8119
	7	1,2390	1,5643	1,6899	2,1673	12,0170	14,0671	16,0128	16,6224	18,4753
	8	1,6465	2,0325	2,1797	2,7326	13,3616	15,5073	17,5345	18,1682	20,0902
	9	2,0879	2,5324	2,7004	3,3251	14,6837	16,9190	19,0228	19,6790	21,6660
	10	2,5582	3,0591	3,2470	3,9403	15,9872	18,3070	20,4832	21,1608	23,2093
	11	3,0535	3,6087	3,8157	4,5748	17,2750	19,6752	21,9200	22,6179	24,7250
	12	3,5706	4,1783	4,4038	5,2260	18,5493	21,0261	23,3367	24,0539	26,2170
	13	4,1069	4,7654	5,0087	5,8919	19,8119	22,3620	24,7356	25,4715	27,6882
	14	4,6604	5,3682	5,6287	6,5706	21,0641	23,6848	26,1189	26,8727	29,1412
	15	5,2294	5,9849	6,2621	7,2609	22,3071	24,9958	27,4884	28,2595	30,5780
	16	5,8122	6,6142	6,9077	7,9616	23,5418	26,2962	28,8453	29,6332	31,9999
	17	6,4077	7,2550	7,5642	8,6718	24,7690	27,5871	30,1910	30,9950	33,4087
	18	7,0149	7,9062	8,2307	9,3904	25,9894	28,8693	31,5264	32,3462	34,8052
	19	7,6327	8,5670	8,9065	10,1170	27,2036	30,1435	32,8523	33,6874	36,1908
	20	8,2604	9,2367	9,5908	10,8508	28,4120	31,4104	34,1696	35,0196	37,5663
	21	8,8972	9,9145	10,2829	11,5913	29,6151	32,6706	35,4789	36,3434	38,9322
	22	9,5425	10,6000	10,9823	12,3380	30,8133	33,9245	36,7807	37,6595	40,2894
	23	10,1957	11,2926	11,6885	13,0905	32,0069	35,1725	38,0756	38,9683	41,6383
	24	10,8563	11,9918	12,4011	13,8484	33,1962	36,4150	39,3641	40,2703	42,9798
	25	11,5240	12,6973	13,1197	14,6114	34,3816	37,6525	40,6465	41,5660	44,3140
	26	12,1982	13,4086	13,8439	15,3792	35,5632	38,8851	41,9231	42,8558	45,6416
	27	12,8785	14,1254	14,5734	16,1514	36,7412	40,1133	43,1945	44,1399	46,9628
	28	13,5647	14,8475	15,3079	16,9279	37,9159	41,3372	44,4608	45,4188	48,2782
	29	14,2564	15,5745	16,0471	17,7084	39,0875	42,5569	45,7223	46,6926	49,5878
	30	14,9535	16,3062	16,7908	18,4927	40,2560	43,7730	46,9792	47,9618	50,8922

Tabelle 6a: Quantile der t-Verteilung; einseitiges Intervall



1 - α		0,700	0,750	0,800	0,850	0,900	0,950	0,975	0,980	0,990
k	1	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	15,894	31,821
	2	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	4,849	6,965
	3	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	3,482	4,541
	4	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	2,999	3,747
	5	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	2,757	3,365
	6	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	2,612	3,143
	7	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,517	2,998
	8	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,449	2,896
	9	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,398	2,821
	10	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,359	2,764
	11	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,328	2,718
	12	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,303	2,681
	13	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,282	2,650
	14	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,264	2,624
	15	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,249	2,602
	16	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,235	2,583
	17	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,224	2,567
	18	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,214	2,552
	19	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,205	2,539
	20	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,197	2,528
	21	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,189	2,518
	22	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,183	2,508
	23	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,177	2,500
	24	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,172	2,492
	25	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,167	2,485
	26	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,162	2,479
	27	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,158	2,473
	28	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,154	2,467
	29	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,150	2,462
	30	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,147	2,457
	40	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,123	2,423
	50	0,528	0,679	0,849	1,047	1,299	1,676	2,009	2,109	2,403
	100	0,526	0,677	0,845	1,042	1,290	1,660	1,984	2,081	2,364
	200	0,525	0,676	0,843	1,039	1,286	1,653	1,972	2,067	2,345

Tabelle 6b: Quantile der t-Verteilung; zentrales Intervall



1 - α		0,700	0,750	0,800	0,850	0,900	0,950	0,975	0,980	0,990
k	1	1,963	2,414	3,078	4,165	6,314	12,706	25,452	31,821	63,657
	2	1,386	1,604	1,886	2,282	2,920	4,303	6,205	6,965	9,925
	3	1,250	1,423	1,638	1,924	2,353	3,182	4,177	4,541	5,841
	4	1,190	1,344	1,533	1,778	2,132	2,776	3,495	3,747	4,604
	5	1,156	1,301	1,476	1,699	2,015	2,571	3,163	3,365	4,032
	6	1,134	1,273	1,440	1,650	1,943	2,447	2,969	3,143	3,707
	7	1,119	1,254	1,415	1,617	1,895	2,365	2,841	2,998	3,499
	8	1,108	1,240	1,397	1,592	1,860	2,306	2,752	2,896	3,355
	9	1,100	1,230	1,383	1,574	1,833	2,262	2,685	2,821	3,250
	10	1,093	1,221	1,372	1,559	1,812	2,228	2,634	2,764	3,169
	11	1,088	1,214	1,363	1,548	1,796	2,201	2,593	2,718	3,106
	12	1,083	1,209	1,356	1,538	1,782	2,179	2,560	2,681	3,055
	13	1,079	1,204	1,350	1,530	1,771	2,160	2,533	2,650	3,012
	14	1,076	1,200	1,345	1,523	1,761	2,145	2,510	2,624	2,977
	15	1,074	1,197	1,341	1,517	1,753	2,131	2,490	2,602	2,947
	16	1,071	1,194	1,337	1,512	1,746	2,120	2,473	2,583	2,921
	17	1,069	1,191	1,333	1,508	1,740	2,110	2,458	2,567	2,898
	18	1,067	1,189	1,330	1,504	1,734	2,101	2,445	2,552	2,878
	19	1,066	1,187	1,328	1,500	1,729	2,093	2,433	2,539	2,861
	20	1,064	1,185	1,325	1,497	1,725	2,086	2,423	2,528	2,845
	21	1,063	1,183	1,323	1,494	1,721	2,080	2,414	2,518	2,831
	22	1,061	1,182	1,321	1,492	1,717	2,074	2,405	2,508	2,819
	23	1,060	1,180	1,319	1,489	1,714	2,069	2,398	2,500	2,807
	24	1,059	1,179	1,318	1,487	1,711	2,064	2,391	2,492	2,797
	25	1,058	1,178	1,316	1,485	1,708	2,060	2,385	2,485	2,787
	26	1,058	1,177	1,315	1,483	1,706	2,056	2,379	2,479	2,779
	27	1,057	1,176	1,314	1,482	1,703	2,052	2,373	2,473	2,771
	28	1,056	1,175	1,313	1,480	1,701	2,048	2,368	2,467	2,763
	29	1,055	1,174	1,311	1,479	1,699	2,045	2,364	2,462	2,756
	30	1,055	1,173	1,310	1,477	1,697	2,042	2,360	2,457	2,750
	40	1,050	1,167	1,303	1,468	1,684	2,021	2,329	2,423	2,704
	50	1,047	1,164	1,299	1,462	1,676	2,009	2,311	2,403	2,678
	100	1,042	1,157	1,290	1,451	1,660	1,984	2,276	2,364	2,626
	200	1,039	1,154	1,286	1,445	1,653	1,972	2,258	2,345	2,601

Possionverteilung

Tabelle 2a: Poissonverteilung; Wahrscheinlichkeitsfunktion $f_P(x)$

μ		0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
x	0	0,9900	0,9802	0,9704	0,9608	0,9512	0,9418	0,9324	0,9231	0,9139	0,9048
	1	0,0099	0,0196	0,0291	0,0384	0,0476	0,0565	0,0653	0,0738	0,0823	0,0905
	2	0,0000	0,0002	0,0004	0,0008	0,0012	0,0017	0,0023	0,0030	0,0037	0,0045
	3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002
μ		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
x	0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
	1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
	2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	0,1839
	3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
	4	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
μ		1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
x	0	0,3329	0,3012	0,2725	0,2466	0,2231	0,2019	0,1827	0,1653	0,1496	0,1353
	1	0,3662	0,3614	0,3543	0,3452	0,3347	0,3230	0,3106	0,2975	0,2842	0,2707
	2	0,2014	0,2169	0,2303	0,2417	0,2510	0,2584	0,2640	0,2678	0,2700	0,2707
	3	0,0738	0,0867	0,0998	0,1128	0,1255	0,1378	0,1496	0,1607	0,1710	0,1804
	4	0,0203	0,0260	0,0324	0,0395	0,0471	0,0551	0,0636	0,0723	0,0812	0,0902
	5	0,0045	0,0062	0,0084	0,0111	0,0141	0,0176	0,0216	0,0260	0,0309	0,0361
	6	0,0008	0,0012	0,0018	0,0026	0,0035	0,0047	0,0061	0,0078	0,0098	0,0120
	7	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0008	0,0011	0,0015	0,0020	0,0027	0,0034
	8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0006	0,0009
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002
μ		2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
x	0	0,1225	0,1108	0,1003	0,0907	0,0821	0,0743	0,0672	0,0608	0,0550	0,0498
	1	0,2572	0,2438	0,2306	0,2177	0,2052	0,1931	0,1815	0,1703	0,1596	0,1494
	2	0,2700	0,2681	0,2652	0,2613	0,2565	0,2510	0,2450	0,2384	0,2314	0,2240
	3	0,1890	0,1966	0,2033	0,2090	0,2138	0,2176	0,2205	0,2225	0,2237	0,2240
	4	0,0992	0,1082	0,1169	0,1254	0,1336	0,1414	0,1488	0,1557	0,1622	0,1680
	5	0,0417	0,0476	0,0538	0,0602	0,0668	0,0735	0,0804	0,0872	0,0940	0,1008
	6	0,0146	0,0174	0,0206	0,0241	0,0278	0,0319	0,0362	0,0407	0,0455	0,0504
	7	0,0044	0,0055	0,0068	0,0083	0,0099	0,0118	0,0139	0,0163	0,0188	0,0216
	8	0,0011	0,0015	0,0019	0,0025	0,0031	0,0038	0,0047	0,0057	0,0068	0,0081
	9	0,0003	0,0004	0,0005	0,0007	0,0009	0,0011	0,0014	0,0018	0,0022	0,0027
	10	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0008
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
μ		3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4
x	0	0,0450	0,0408	0,0369	0,0334	0,0302	0,0273	0,0247	0,0224	0,0202	0,0183
	1	0,1397	0,1304	0,1217	0,1135	0,1057	0,0984	0,0915	0,0850	0,0789	0,0733
	2	0,2165	0,2087	0,2008	0,1929	0,1850	0,1771	0,1692	0,1615	0,1539	0,1465
	3	0,2237	0,2226	0,2209	0,2186	0,2158	0,2125	0,2087	0,2046	0,2001	0,1954
	4	0,1733	0,1781	0,1823	0,1858	0,1888	0,1912	0,1931	0,1944	0,1951	0,1954
	5	0,1075	0,1140	0,1203	0,1264	0,1322	0,1377	0,1429	0,1477	0,1522	0,1563
	6	0,0555	0,0608	0,0662	0,0716	0,0771	0,0826	0,0881	0,0936	0,0989	0,1042
	7	0,0246	0,0278	0,0312	0,0348	0,0385	0,0425	0,0466	0,0508	0,0551	0,0595

Tabelle 2a: Poissonverteilung; Wahrscheinlichkeitsfunktion $f_P(x)$

μ		3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4
x	8	0,0095	0,0111	0,0129	0,0148	0,0169	0,0191	0,0215	0,0241	0,0269	0,0298
	9	0,0033	0,0040	0,0047	0,0056	0,0066	0,0076	0,0089	0,0102	0,0116	0,0132
	10	0,0010	0,0013	0,0016	0,0019	0,0023	0,0028	0,0033	0,0039	0,0045	0,0053
	11	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0009	0,0011	0,0013	0,0016	0,0019
	12	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
μ		4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5
x	0	0,0166	0,0150	0,0136	0,0123	0,0111	0,0101	0,0091	0,0082	0,0074	0,0067
	1	0,0679	0,0630	0,0583	0,0540	0,0500	0,0462	0,0427	0,0395	0,0365	0,0337
	2	0,1393	0,1323	0,1254	0,1188	0,1125	0,1063	0,1005	0,0948	0,0894	0,0842
	3	0,1904	0,1852	0,1798	0,1743	0,1687	0,1631	0,1574	0,1517	0,1460	0,1404
	4	0,1951	0,1944	0,1933	0,1917	0,1898	0,1875	0,1849	0,1820	0,1789	0,1755
	5	0,1600	0,1633	0,1662	0,1687	0,1708	0,1725	0,1738	0,1747	0,1753	0,1755
	6	0,1093	0,1143	0,1191	0,1237	0,1281	0,1323	0,1362	0,1398	0,1432	0,1462
	7	0,0640	0,0686	0,0732	0,0778	0,0824	0,0869	0,0914	0,0959	0,1002	0,1044
	8	0,0328	0,0360	0,0393	0,0428	0,0463	0,0500	0,0537	0,0575	0,0614	0,0653
	9	0,0150	0,0168	0,0188	0,0209	0,0232	0,0255	0,0281	0,0307	0,0334	0,0363
	10	0,0061	0,0071	0,0081	0,0092	0,0104	0,0118	0,0132	0,0147	0,0164	0,0181
	11	0,0023	0,0027	0,0032	0,0037	0,0043	0,0049	0,0056	0,0064	0,0073	0,0082
	12	0,0008	0,0009	0,0011	0,0013	0,0016	0,0019	0,0022	0,0026	0,0030	0,0034
	13	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009	0,0011	0,0013
	14	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
μ		5,2	5,4	5,6	5,8	6	6,2	6,4	6,6	6,8	7
x	0	0,0055	0,0045	0,0037	0,0030	0,0025	0,0020	0,0017	0,0014	0,0011	0,0009
	1	0,0287	0,0244	0,0207	0,0176	0,0149	0,0126	0,0106	0,0090	0,0076	0,0064
	2	0,0746	0,0659	0,0580	0,0509	0,0446	0,0390	0,0340	0,0296	0,0258	0,0223
	3	0,1293	0,1185	0,1082	0,0985	0,0892	0,0806	0,0726	0,0652	0,0584	0,0521
	4	0,1681	0,1600	0,1515	0,1428	0,1339	0,1249	0,1162	0,1076	0,0992	0,0912
	5	0,1748	0,1728	0,1697	0,1656	0,1606	0,1549	0,1487	0,1420	0,1349	0,1277
	6	0,1515	0,1555	0,1584	0,1601	0,1606	0,1601	0,1586	0,1562	0,1529	0,1490
	7	0,1125	0,1200	0,1267	0,1326	0,1377	0,1418	0,1450	0,1472	0,1486	0,1490
	8	0,0731	0,0810	0,0887	0,0962	0,1033	0,1099	0,1160	0,1215	0,1263	0,1304
	9	0,0423	0,0486	0,0552	0,0620	0,0688	0,0757	0,0825	0,0891	0,0954	0,1014
	10	0,0220	0,0262	0,0309	0,0359	0,0413	0,0469	0,0528	0,0588	0,0649	0,0710
	11	0,0104	0,0129	0,0157	0,0190	0,0225	0,0265	0,0307	0,0353	0,0401	0,0452
	12	0,0045	0,0058	0,0073	0,0092	0,0113	0,0137	0,0164	0,0194	0,0227	0,0263
	13	0,0018	0,0024	0,0032	0,0041	0,0052	0,0065	0,0081	0,0099	0,0119	0,0142
	14	0,0007	0,0009	0,0013	0,0017	0,0022	0,0029	0,0037	0,0046	0,0058	0,0071
	15	0,0002	0,0003	0,0005	0,0007	0,0009	0,0012	0,0016	0,0020	0,0026	0,0033
	16	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0005	0,0006	0,0008	0,0011	0,0014
	17	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004	0,0006
	18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002

Tabelle 2a: Poissonverteilung; Wahrscheinlichkeitsfunktion $f_P(x)$

μ		7,2	7,4	7,6	7,8	8,0	8,2	8,4	8,6	8,8	9,0
x	0	0,0007	0,0006	0,0005	0,0004	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001
	1	0,0054	0,0045	0,0038	0,0032	0,0027	0,0023	0,0019	0,0016	0,0013	0,0011
	2	0,0194	0,0167	0,0145	0,0125	0,0107	0,0092	0,0079	0,0068	0,0058	0,0050
	3	0,0464	0,0413	0,0366	0,0324	0,0286	0,0252	0,0222	0,0195	0,0171	0,0150
	4	0,0836	0,0764	0,0696	0,0632	0,0573	0,0517	0,0466	0,0420	0,0377	0,0337
	5	0,1204	0,1130	0,1057	0,0986	0,0916	0,0849	0,0784	0,0722	0,0663	0,0607
	6	0,1445	0,1394	0,1339	0,1282	0,1221	0,1160	0,1097	0,1034	0,0972	0,0911
	7	0,1486	0,1474	0,1454	0,1428	0,1396	0,1358	0,1317	0,1271	0,1222	0,1171
	8	0,1337	0,1363	0,1381	0,1392	0,1396	0,1392	0,1382	0,1366	0,1344	0,1318
	9	0,1070	0,1121	0,1167	0,1207	0,1241	0,1269	0,1290	0,1306	0,1315	0,1318
	10	0,0770	0,0829	0,0887	0,0941	0,0993	0,1040	0,1084	0,1123	0,1157	0,1186
	11	0,0504	0,0558	0,0613	0,0667	0,0722	0,0776	0,0828	0,0878	0,0925	0,0970
	12	0,0303	0,0344	0,0388	0,0434	0,0481	0,0530	0,0579	0,0629	0,0679	0,0728
	13	0,0168	0,0196	0,0227	0,0260	0,0296	0,0334	0,0374	0,0416	0,0459	0,0504
	14	0,0086	0,0104	0,0123	0,0145	0,0169	0,0196	0,0225	0,0256	0,0289	0,0324
	15	0,0041	0,0051	0,0062	0,0075	0,0090	0,0107	0,0126	0,0147	0,0169	0,0194
	16	0,0019	0,0024	0,0030	0,0037	0,0045	0,0055	0,0066	0,0079	0,0093	0,0109
	17	0,0008	0,0010	0,0013	0,0017	0,0021	0,0026	0,0033	0,0040	0,0048	0,0058
	18	0,0003	0,0004	0,0006	0,0007	0,0009	0,0012	0,0015	0,0019	0,0024	0,0029
	19	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0007	0,0009	0,0011	0,0014
	20	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006
	21	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003
	22	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001

Tabelle 2b: Poissonverteilung; Verteilungsfunktion $F_P(x)$

μ		0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
x	0	0,9900	0,9802	0,9704	0,9608	0,9512	0,9418	0,9324	0,9231	0,9139	0,9048
	1	1,0000	0,9998	0,9996	0,9992	0,9988	0,9983	0,9977	0,9970	0,9962	0,9953
	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998
	3	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
μ		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
x	0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
	1	0,9953	0,9825	0,9631	0,9384	0,9098	0,8781	0,8442	0,8088	0,7725	0,7358
	2	0,9998	0,9989	0,9964	0,9921	0,9856	0,9769	0,9659	0,9526	0,9371	0,9197
	3	1,0000	0,9999	0,9997	0,9992	0,9982	0,9966	0,9942	0,9909	0,9865	0,9810
	4	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9992	0,9986	0,9977	0,9963
	5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9994
	6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
	7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Tabelle 2b: Poissonverteilung; Verteilungsfunktion $F_P(x)$

μ		1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
x	0	0,3329	0,3012	0,2725	0,2466	0,2231	0,2019	0,1827	0,1653	0,1496	0,1353
	1	0,6990	0,6626	0,6268	0,5918	0,5578	0,5249	0,4932	0,4628	0,4337	0,4060
	2	0,9004	0,8795	0,8571	0,8335	0,8088	0,7834	0,7572	0,7306	0,7037	0,6767
	3	0,9743	0,9662	0,9569	0,9463	0,9344	0,9212	0,9068	0,8913	0,8747	0,8571
	4	0,9946	0,9923	0,9893	0,9857	0,9814	0,9763	0,9704	0,9636	0,9559	0,9473
	5	0,9990	0,9985	0,9978	0,9968	0,9955	0,9940	0,9920	0,9896	0,9868	0,9834
	6	0,9999	0,9997	0,9996	0,9994	0,9991	0,9987	0,9981	0,9974	0,9966	0,9955
	7	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9998	0,9997	0,9996	0,9994	0,9992	0,9989
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
μ		2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
x	0	0,1225	0,1108	0,1003	0,0907	0,0821	0,0743	0,0672	0,0608	0,0550	0,0498
	1	0,3796	0,3546	0,3309	0,3084	0,2873	0,2674	0,2487	0,2311	0,2146	0,1991
	2	0,6496	0,6227	0,5960	0,5697	0,5438	0,5184	0,4936	0,4695	0,4460	0,4232
	3	0,8386	0,8194	0,7993	0,7787	0,7576	0,7360	0,7141	0,6919	0,6696	0,6472
	4	0,9379	0,9275	0,9162	0,9041	0,8912	0,8774	0,8629	0,8477	0,8318	0,8153
	5	0,9796	0,9751	0,9700	0,9643	0,9580	0,9510	0,9433	0,9349	0,9258	0,9161
	6	0,9941	0,9925	0,9906	0,9884	0,9858	0,9828	0,9794	0,9756	0,9713	0,9665
	7	0,9985	0,9980	0,9974	0,9967	0,9958	0,9947	0,9934	0,9919	0,9901	0,9881
	8	0,9997	0,9995	0,9994	0,9991	0,9989	0,9985	0,9981	0,9976	0,9969	0,9962
	9	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998	0,9997	0,9996	0,9995	0,9993	0,9991	0,9989
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998	0,9997
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
μ		3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0
x	0	0,0450	0,0408	0,0369	0,0334	0,0302	0,0273	0,0247	0,0224	0,0202	0,0183
	1	0,1847	0,1712	0,1586	0,1468	0,1359	0,1257	0,1162	0,1074	0,0992	0,0916
	2	0,4012	0,3799	0,3594	0,3397	0,3208	0,3027	0,2854	0,2689	0,2531	0,2381
	3	0,6248	0,6025	0,5803	0,5584	0,5366	0,5152	0,4942	0,4735	0,4532	0,4335
	4	0,7982	0,7806	0,7626	0,7442	0,7254	0,7064	0,6872	0,6678	0,6484	0,6288
	5	0,9057	0,8946	0,8829	0,8705	0,8576	0,8441	0,8301	0,8156	0,8006	0,7851
	6	0,9612	0,9554	0,9490	0,9421	0,9347	0,9267	0,9182	0,9091	0,8995	0,8893
	7	0,9858	0,9832	0,9802	0,9769	0,9733	0,9692	0,9648	0,9599	0,9546	0,9489
	8	0,9953	0,9943	0,9931	0,9917	0,9901	0,9883	0,9863	0,9840	0,9815	0,9786
	9	0,9986	0,9982	0,9978	0,9973	0,9967	0,9960	0,9952	0,9942	0,9931	0,9919
	10	0,9996	0,9995	0,9994	0,9992	0,9990	0,9987	0,9984	0,9981	0,9977	0,9972
	11	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998	0,9997	0,9996	0,9995	0,9994	0,9993	0,9991
	12	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998	0,9997
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Tabelle 2b: Poissonverteilung; Verteilungsfunktion $F_P(x)$

μ		4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5
x	0	0,0166	0,0150	0,0136	0,0123	0,0111	0,0101	0,0091	0,0082	0,0074	0,0067
	1	0,0845	0,0780	0,0719	0,0663	0,0611	0,0563	0,0518	0,0477	0,0439	0,0404
	2	0,2238	0,2102	0,1974	0,1851	0,1736	0,1626	0,1523	0,1425	0,1333	0,1247
	3	0,4142	0,3954	0,3772	0,3594	0,3423	0,3257	0,3097	0,2942	0,2793	0,2650
	4	0,6093	0,5898	0,5704	0,5512	0,5321	0,5132	0,4946	0,4763	0,4582	0,4405
	5	0,7693	0,7531	0,7367	0,7199	0,7029	0,6858	0,6684	0,6510	0,6335	0,6160
	6	0,8786	0,8675	0,8558	0,8436	0,8311	0,8180	0,8046	0,7908	0,7767	0,7622
	7	0,9427	0,9361	0,9290	0,9214	0,9134	0,9049	0,8960	0,8867	0,8769	0,8666
	8	0,9755	0,9721	0,9683	0,9642	0,9597	0,9549	0,9497	0,9442	0,9382	0,9319
	9	0,9905	0,9889	0,9871	0,9851	0,9829	0,9805	0,9778	0,9749	0,9717	0,9682
	10	0,9966	0,9959	0,9952	0,9943	0,9933	0,9922	0,9910	0,9896	0,9880	0,9863
	11	0,9989	0,9986	0,9983	0,9980	0,9976	0,9971	0,9966	0,9960	0,9953	0,9945
	12	0,9997	0,9996	0,9995	0,9993	0,9992	0,9990	0,9988	0,9986	0,9983	0,9980
	13	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998	0,9997	0,9997	0,9996	0,9995	0,9994	0,9993
	14	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
μ		5,2	5,4	5,6	5,8	6,0	6,2	6,4	6,6	6,8	7,0
x	0	0,0055	0,0045	0,0037	0,0030	0,0025	0,0020	0,0017	0,0014	0,0011	0,0009
	1	0,0342	0,0289	0,0244	0,0206	0,0174	0,0146	0,0123	0,0103	0,0087	0,0073
	2	0,1088	0,0948	0,0824	0,0715	0,0620	0,0536	0,0463	0,0400	0,0344	0,0296
	3	0,2381	0,2133	0,1906	0,1700	0,1512	0,1342	0,1189	0,1052	0,0928	0,0818
	4	0,4061	0,3733	0,3422	0,3127	0,2851	0,2592	0,2351	0,2127	0,1920	0,1730
	5	0,5809	0,5461	0,5119	0,4783	0,4457	0,4141	0,3837	0,3547	0,3270	0,3007
	6	0,7324	0,7017	0,6703	0,6384	0,6063	0,5742	0,5423	0,5108	0,4799	0,4497
	7	0,8449	0,8217	0,7970	0,7710	0,7440	0,7160	0,6873	0,6581	0,6285	0,5987
	8	0,9181	0,9027	0,8857	0,8672	0,8472	0,8259	0,8033	0,7796	0,7548	0,7291
	9	0,9603	0,9512	0,9409	0,9292	0,9161	0,9016	0,8858	0,8686	0,8502	0,8305
	10	0,9823	0,9775	0,9718	0,9651	0,9574	0,9486	0,9386	0,9274	0,9151	0,9015
	11	0,9927	0,9904	0,9875	0,9841	0,9799	0,9750	0,9693	0,9627	0,9552	0,9467
	12	0,9972	0,9962	0,9949	0,9932	0,9912	0,9887	0,9857	0,9821	0,9779	0,9730
	13	0,9990	0,9986	0,9980	0,9973	0,9964	0,9952	0,9937	0,9920	0,9898	0,9872
	14	0,9997	0,9995	0,9993	0,9990	0,9986	0,9981	0,9974	0,9966	0,9956	0,9943
	15	0,9999	0,9998	0,9998	0,9996	0,9995	0,9993	0,9990	0,9986	0,9982	0,9976
	16	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998	0,9997	0,9996	0,9995	0,9993	0,9990
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998	0,9997	0,9996
	18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999
	19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Tabelle 2b: Poissonverteilung; Verteilungsfunktion $F_P(x)$

μ		7,2	7,4	7,6	7,8	8,0	8,2	8,4	8,6	8,8	9,0
x	0	0,0007	0,0006	0,0005	0,0004	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001
	1	0,0061	0,0051	0,0043	0,0036	0,0030	0,0025	0,0021	0,0018	0,0015	0,0012
	2	0,0255	0,0219	0,0188	0,0161	0,0138	0,0118	0,0100	0,0086	0,0073	0,0062
	3	0,0719	0,0632	0,0554	0,0485	0,0424	0,0370	0,0323	0,0281	0,0244	0,0212
	4	0,1555	0,1395	0,1249	0,1117	0,0996	0,0887	0,0789	0,0701	0,0621	0,0550
	5	0,2759	0,2526	0,2307	0,2103	0,1912	0,1736	0,1573	0,1422	0,1284	0,1157
	6	0,4204	0,3920	0,3646	0,3384	0,3134	0,2896	0,2670	0,2457	0,2256	0,2068
	7	0,5689	0,5393	0,5100	0,4812	0,4530	0,4254	0,3987	0,3728	0,3478	0,3239
	8	0,7027	0,6757	0,6482	0,6204	0,5925	0,5647	0,5369	0,5094	0,4823	0,4557
	9	0,8096	0,7877	0,7649	0,7411	0,7166	0,6915	0,6659	0,6400	0,6137	0,5874
	10	0,8867	0,8707	0,8535	0,8352	0,8159	0,7955	0,7743	0,7522	0,7294	0,7060
	11	0,9371	0,9265	0,9148	0,9020	0,8881	0,8731	0,8571	0,8400	0,8220	0,8030
	12	0,9673	0,9609	0,9536	0,9454	0,9362	0,9261	0,9150	0,9029	0,8898	0,8758
	13	0,9841	0,9805	0,9762	0,9714	0,9658	0,9595	0,9524	0,9445	0,9358	0,9261
	14	0,9927	0,9908	0,9886	0,9859	0,9827	0,9791	0,9749	0,9701	0,9647	0,9585
	15	0,9969	0,9959	0,9948	0,9934	0,9918	0,9898	0,9875	0,9848	0,9816	0,9780
	16	0,9987	0,9983	0,9978	0,9971	0,9963	0,9953	0,9941	0,9926	0,9909	0,9889
	17	0,9995	0,9993	0,9991	0,9988	0,9984	0,9979	0,9973	0,9966	0,9957	0,9947
	18	0,9998	0,9997	0,9996	0,9995	0,9993	0,9991	0,9989	0,9985	0,9981	0,9976
	19	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998	0,9997	0,9997	0,9995	0,9994	0,9992	0,9989
	20	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998	0,9997	0,9996
	21	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998
	22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
	23	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000