

# 函數方程

陳信睿

2024 年 8 月

## 目錄

1	函數方程基本概念	2
2	代值法	2
3	單射與滿射	3
4	柯西方程	4
5	三變數法	7
6	2007 ISL A4 引理	8
7	數論函方	10
8	附錄	11
9	習題	12
9.1	IMO . . . . .	12
9.2	ISL . . . . .	12
9.3	APMO . . . . .	14
9.4	其他 . . . . .	14
10	習題解答	15

# 1 函數方程基本概念

在數奧領域中，函數方程是數奧中，代數 (Algebra) 領域中常見的一種題目類型，像是 2019 年的 IMO：

**範例 1** (2019 IMO P1). 設  $\mathbb{Z}$  為所有整數的集合，試找到所有  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  滿足

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)) \quad (1)$$

對所有整數  $a, b$  成立。

如上所示，函數方程最常見的形式就是給定函數的定義域、對應域，並且一條關於函數的等式，而我們的目標是要找到滿足所有這樣條件的函數，並且證明我們找到了所有解。像是上面這題的解包含以下

$$f(x) = 0 \quad \text{或} \quad f(x) = 2x + d, \text{ 其中 } d \in \mathbb{Z} \text{ 是常數。}$$

不過知道所有解，離正確答案還很遠，我們還要證明這是所有解，才能在數奧的競賽中拿到滿分。因此以下我們將探討常見的解函方技巧。

## 2 代值法

基本上，解決函方的核心作法就是要用已知的方程式來推到其他有用的條件。因此最基本的手法就是代入一些特殊值，並且看能不能得到有用的結果。以下為範例：

**範例 2.** 試找到所有  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  使得

$$xf(x+f(y)) + xf(y) = 2yf(x) + x^2 \quad (2)$$

對所有  $x, y \in \mathbb{R}$  成立。

**解答.** 在式 (2) 中代入  $x = 0$ ，可得  $f(0)y = 0$  對所有  $y \in \mathbb{R}$  成立，因此  $f(0) = 0$  成立。接下來在式 (2) 中代入  $y = 0$ ，可以得到  $xf(x) = x^2$  對所有  $x \in \mathbb{R}$  成立，因此  $f(x) = x$  對所有  $x \neq 0$  成立。加上前面已經得到  $f(0) = 0$ ，我們可以得到  $f(x) = x$  對於所有  $x \in \mathbb{R}$  成立。經代回原式後驗證確實為解。

有時候代值不一定要代一個常數，以下是個例子：

**範例 3.** 試找到所有  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  使得

$$f(x+f(y)) = x+y \quad (3)$$

對所有  $x, y \in \mathbb{R}$  成立。

**解答.** 將  $x = -f(y)$  代入即可得到

$$f(0) = y - f(y),$$

故  $f(y) = y + c$  其中  $c$  為一常數。可驗證  $c = 0$  為唯一可能，因此所求函數為  $f(x) = x$ 。

### 3 單射與滿射

在這小節，要介紹函方中我認為最重要的技巧，單射與滿射。

**定義 1** (單射). 我們稱函數  $f$  為單射的 (一對一, injective, one-to-one), 如果  $f(a) \neq f(b)$  對所有  $a \neq b$  成立。換句話說, 若  $f(a) = f(b)$  則  $a = b$ 。

而滿射的定義如下:

**定義 2** (滿射). 我們稱函數  $f: X \rightarrow Y$  為滿射的 (surjective, onto), 如果對於每個  $y \in Y$ , 都存在  $x \in X$  使得  $f(x) = y$ 。

為什麼單射以及滿射這好用呢? 以下為常用的性質:

**性質 1.** 若  $f: X \rightarrow X$  為單射的或是滿射的 (其中一個成立即可) 且  $f(f(x)) = f(x)$ , 則  $f(x) = x$ 。

更廣泛地說, 如果有單射, 且我們有  $f(\text{expr1}) = f(\text{expr2})$ , 則我們可以得到  $\text{expr1} = \text{expr2}$ 。而如果有滿射且有  $\text{expr3} = 0$ , 為  $f(x)$  的表達式, 則可以把  $f(x)$  用  $x$  替換。

以下幾個例子為常見的使用方法:

**範例 4.** 試找到所有函數  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  使得

$$f(xy + f(x)) + f(x - yf(x)) = 2x \quad (4)$$

對所有  $x, y \in \mathbb{R}$  成立。

**解答.** 以  $P(a, b)$  表示將  $x = a, y = b$  代入式 (4)。首先  $P(x, 0)$  可得

$$f(f(x)) + f(x) = 2x \quad (5)$$

如果  $f(a) = f(b)$  則

$$2a = f(f(a)) + f(a) = f(f(b)) + f(b) = 2b$$

即可得  $a = b$ , 這告訴我們  $f$  是單射的。

接下來, 注意到  $P(x, -f(x)/x)$  ( $x \neq 0$ ) 可以得到

$$f\left(x + \frac{f(x)^2}{x}\right) = 2x - f(0) \quad (6)$$

我們現在利用這條式子證明  $f(0) = 0$ , 假設  $f(0) \neq 0$ , 則在式 (6) 中代入  $x = f(0)/2$ , 可以得到

$$f(c) = 0 \quad \text{其中} \quad c = \frac{f(0)}{2} + \frac{2}{f(0)}f\left(\frac{f(0)}{2}\right)^2$$

現在考慮  $P(c, y)$  可以得到  $f(cy) = 2c$ , 若  $c \neq 0$ , 則  $f$  為常數函數, 與  $f$  單射矛盾, 因此可以知道  $c = 0$ , 即得  $f(0) = 0$ , 又與假設矛盾, 因此我們證出了  $f(0) = 0$ 。現在考慮  $P(x, x/f(x))$  ( $x \neq 0$ ), 可以得到

$$f\left(\frac{x^2}{f(x)} + f(x)\right) = 2x,$$

與式 (6) 加上單射比較可得

$$x + \frac{f(x)^2}{x} = \frac{x^2}{f(x)} + f(x),$$

化簡可得  $f(x) = x$  對所有  $x \neq 0$  成立。綜合前面得到的  $f(0) = 0$ ，我們有  $f(x) = x$  對所有  $x \in \mathbb{R}$  成立，代回式 (4) 後檢驗確實成立。

這題我們可以看出單射確實是一個很強大的工具。下一題我們將示範滿射的使用方法。

**範例 5.** 試找到所有函數  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  使得

$$f(xf(y) + f(x+y)) + yf(x) + f(x) = y \quad (7)$$

對所有  $x, y \in \mathbb{R}$  成立。

**解答.** 由於我們想證明  $f$  滿射，改寫式 (7) 可得

$$f(xf(y) + f(x+y)) = (1 - f(x))y - f(x),$$

也就是如果存在  $k \in \mathbb{R}$  使得  $f(k) \neq 1$ ，則  $f$  滿射。這樣的  $k$  存在，否則  $f(x) \equiv 1$ ，但易見這不是一個解。因此現在我們有  $f$  滿射。以  $P(a, b)$  表示將  $x = a, y = b$  代入式 (7)。由  $P(0, y)$  可得

$$f(f(y)) + yf(0) + f(0) = y \quad (8)$$

若  $f(0) = 1$ ，則有  $f(f(y)) = -1$ ，由  $f$  滿射可知  $f(y) = -1$ ，與滿射矛盾，因此  $f(0) \neq 1$ ，改寫式 (8) 成以下

$$f(f(y)) = (1 - f(0))y - f(0),$$

可以看出  $f$  單射。由於  $f$  滿射，存在  $c \in \mathbb{R}$  使得  $f(c) = 0$ ，則  $P(c, 0)$  可得  $f(cf(0)) = 0$ ，故  $cf(0) = c$  (根據  $f$  單射)，因此  $c = 0$  ( $f(0) \neq 1$ )。現在我們比較  $P(x, 0): f(f(x)) + f(x) = 0$  以及  $P(0, y): f(f(y)) = y$ ，我們可以得到  $f(x) = -x$  對所有  $x \in \mathbb{R}$  成立，代回式 (7) 確實為解。

## 4 柯西方程

柯西方程是以下特殊形式的函數方程

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

有的時候，若我們能創造出這種形式的方程式，則我們能直接使用定理得出結論。

**定理 3** (柯西方程). 假設  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  或是  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  滿足

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (9)$$

則存在  $c \in \mathbb{Q}$  使得  $f(x) = cx$ 。

**證明.** 以  $P(a, b)$  表示將  $x = a, y = b$  代入式 (9)。則  $P(0, 0)$  可得  $f(0) = 0$ 。假設  $f(1) = c$ ，則我們證明  $f(n) = cn$  對於所有  $n \in \mathbb{N}$  成立。根據假設可知  $n = 1$  是對的，假設對於某個  $k \in \mathbb{N}$  我們有所有  $n \leq k$  是對的，則

$$f(k+1) = f(k) + f(1) = ck + c = c(k+1)$$

代表  $n = k+1$  是對的，根據數學歸納法， $f(n) = cn$  對所有正整數  $n$  成立。

接下來由  $P(n, -n) : 0 = f(0) = f(n) + f(-n)$  可得  $f(-n) = -cn$ ，這證明完  $\text{Dom}(f) = \mathbb{Z}$  的情況。現在我們證明對於所有有理數  $x = p/q$  ( $q \neq 0$ ) 的情況。注意到使用前面數學歸納法的手法，我們可以得到

$$f(mx) = mf(x),$$

其中  $m$  為整數。故我們有  $f(p) = qf(p/q)$ ，因此  $f(p/q) = cp/q$ ，也就是說對於所有的  $x \in \mathbb{Q}$ ，我們有  $f(x) = cx$ 。□

**性質 2.** 假設  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  滿足柯西方程，則我們有  $f(cx) = cf(x)$  對所有  $c \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R}$  成立。

這個性質可以從上面的證明看出來。接下來，我們可能會有一個疑問，如果目標函數  $f$  的定義域為  $\mathbb{R}$  那麼定理 3 的結果還會成立嗎？事實上是不成立的，用大學的線性代數的語言來說是因為  $\mathbb{R}$  不是  $\mathbb{Q}$  的有限維向量空間，此處的反例以現階段知識難以給出，因此放在附錄中。儘管如此，只要有更強的條件，我們還是能有一樣的結論。

**定理 4** ( $\mathbb{R}$  上的柯西方程). 假設  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  滿足

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

且  $f$  滿足以下三條件之一：

1.  $f$  在某區間上有上界或下界。
2.  $f$  在某區間上單調。
3.  $f$  在某區間上連續。

則存在  $c \in \mathbb{R}$  使得  $f(x) = cx$ 。

這個定理仰賴部份微積分知識以及一些關於無理數的不等式，因此就不詳細談這部份的理論，我認為大概知道就好了。以下為一些例題，首先最一開始提到的**範例 1**，就可以用代值加上柯西方程來解決，以下為一種範例解法：

**解答.** 以  $P(x, y)$  表示將  $a = x$  及  $b = y$  代入式 (1)。注意到  $P(0, a + b)$  可以得到

$$f(0) + 2f(a + b) = f(f(a + b)),$$

與式 (1) 比較可得：

$$f(0) + 2f(a + b) = f(2a) + 2f(b) \quad (10)$$

在式 (10) 中代入  $b = 0$  可以得到：

$$f(2a) = 2f(a) - f(0)$$

代回式 (10) 可得：

$$f(a + b) + f(0) = f(a) + f(b).$$

令  $g(x) = f(x) - f(0)$ ，則我們有  $g(a + b) = g(a) + g(b)$ ，根據定理 3，可以知道  $g(x) = cx$ ，而  $f(x) = cx + d$ ，其中  $c, d \in \mathbb{Z}$ 。代回原式化簡可得

$$(c - 2)(c(a + b) + d) = 0,$$

故  $c = 2$  或是  $c = 0$  且  $d = 0$ 。綜合以上，所有解為  $f(x) = 2x + d, d \in \mathbb{Z}$ ，以及  $f(x) = 0$ 。

**範例 6.** 試找到所有函數  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  使得

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{且} \quad f(xy) = f(x)f(y) \quad (11)$$

對所有  $x, y \in \mathbb{R}$  成立。

**解答.** 注意到在第二式中代入  $y = x$  可得  $f(x^2) = f(x)^2$ ，因此對於所有  $t \geq 0$ ，我們有  $f(t) \geq 0$ ，這代表  $f$  在區間  $[0, 1]$  上有下界，根據定理 4 可知  $f(x) = cx$  其中  $c \in \mathbb{R}$  為常數。代回原第二式可得  $c = 0, 1$ ，因此  $f(x) = x$  或是  $f(x) = 0$ 。

**範例 7.** 試找到所有函數  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  使得

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{且} \quad f(x^3) = f(x)^3 \quad (12)$$

對所有  $x, y \in \mathbb{R}$  成立。

**解答.** 首先根據性質 2 我們有  $f(p) = pf(1)$  對所有  $p \in \mathbb{Q}$  成立。接下來在第二式代入  $x = a + p$  ( $p \in \mathbb{Q}, a \in \mathbb{R}$ )，可以得到

$$f(a+p)^3 = (f(a) + pf(1))^3 = f(a)^3 + 3pf(1)f(a)^2 + 3f(a)p^2f(1)^2 + (pf(1))^3$$

$$f((a+p)^3) = f(a^3) + 3pf(a^2) + 3p^2f(a) + p^3f(1)$$

此二式視為  $p$  的多項式，為恆等多項式，因此我們有

$$f(1)^3 = f(1); \quad (f(1)^2 - 1)f(a) = 0; \quad f(1)f(a)^2 = f(a^2); \quad f(a)^3 = f(a^3),$$

由第一個條件可以得到  $f(1) = 0, 1, -1$ 。若  $f(1) = 0$  則  $f(a) = 0$  對所有  $a \in \mathbb{R}$  成立。而第二式可以得到  $f(a^2) = f(a)^2$  或是  $f(a^2) = -f(a)^2$ ，不管是何種情形， $f$  要嘛有上界，要嘛有下界，因此  $f$  為線性。可知  $f$  有三種解  $f(x) = x$ ， $f(x) = -x$ ， $f(x) = 0$ 。

接下來我們要討論另一種很類似柯西方程的函數方程，稱為詹森方程 (Jensen's equation)，在多數情況與柯西方程等價。

**定義 5** (詹森方程). 我們稱  $f: X \rightarrow Y$  滿足詹森方程若

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x) + f(y) \quad (13)$$

對所有  $x, y \in X$  成立。在數奧領域中， $X$  通常為  $\mathbb{Q}$ ， $\mathbb{R}$ ，或  $\mathbb{R}^+$ 。

以下介紹關於詹森方程的性質。

**性質 3.**  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  或是  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  滿足詹森方程，若且唯若  $g(x) = f(x) - f(0)$  滿足柯西方程。此外若  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  滿足詹森方程，則  $f(x) = ax + b$  其中  $a, b \geq 0$  為滿足  $a^2 + b^2 > 0$  的常數。

**證明.** 首先，我們證明第一部份。在式(13)中代入  $y = 0$  可得

$$2f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x) + f(0),$$

將此式代回式(13)可得

$$f(x+y) + f(0) = f(x) + f(y),$$

令  $g(x) = f(x) - f(0)$  則  $g(x+y) = g(x) + g(y)$ 。此外，我們容易看出如果  $g$  滿足柯西方程，則  $f(x) = g(x) + f(0)$  滿足詹森方程，這證明了第一部份。現在證明第二部份，我們宣稱

$$f(nz) = (f(2z) - f(z))n + 2f(z) - f(2z) \quad (14)$$

對所有  $z \in \mathbb{R}^+$  及  $n \in \mathbb{N}$  成立。式(14)對  $n = 1, 2$  成立，假設式(14)對  $n \leq k$  ( $k \geq 2$ ) 成立，則

$$\begin{aligned} f((k+1)z) &= 2f(kz) - f((k-1)z) \\ &= 2((f(2z) - f(z))k + 2f(z) - f(2z)) - ((f(2z) - f(z))(k-1) + 2f(z) - f(2z)) \\ &= (f(2z) - f(z))(k+1) + 2f(z) - f(2z) \end{aligned}$$

此式(14)對  $n = k+1$  亦成立。事實上，使用完全相同的手法，我們可以進一步證明對於所有的  $b > a > 0$ ，我們有

$$f((b-a)n + a) = (f(b) - f(a))n + 2f(a) - f(b) \quad (15)$$

由式(15)可得若  $b > a$ ，則  $f(b) > f(a)$ 。此外，由式(14)可以看出對於所有  $(p/2^k, f(p/2^k))$  ( $p \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ) 這樣形式的點都落在同一直線上，這是因為對於每個固定的  $k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ， $(p/2^{k_0}, f(p/2^{k_0}))$  皆落在同一直線  $L_{k_0}$  上，而對於更大的  $k' > k_0$ ， $p/2^{k_0} = p \cdot 2^{k'-k_0}/2^{k'}$  落在直線  $L_{k'}$  上，這表示  $L_{k_0} = L_{k'}$ 。現在我們可以假設所有  $(p/2^k, f(p/2^k))$  ( $p \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ) 這樣形式的點都落在直線  $y = ax + b$  ( $a \geq 0, b \geq 0, a^2 + b^2 > 0$ ) 上。

假設存在  $s \in \mathbb{R}^+$  使得  $f(s) \neq as + b$ ，則有兩種可能： $f(s) > as + b$  與  $f(s) < as + b$ 。如果  $f(s) < as + b$ ，注意到對於所有  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ，考慮  $t_k := \lceil s2^k \rceil / 2^k \leq s + 2^{-k}$ ， $f(t_k) = at_k + b$ 。現在取  $k$  夠大使得

$$a2^{-k} < f(s) - as - b,$$

則有

$$f(t_k) \leq a(s + 2^{-k}) + b < f(s) \quad \text{然而} \quad t_k \geq s,$$

故矛盾。類似地我們也可以使用類似手法在  $f(s) < as + b$  的狀況下導出矛盾。□

## 5 三變數法

三變數法這個技巧為引入一個新的變數，來破壞對稱性的技巧。以下為使用的範例：

**範例 8.** 試找到所有函數  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  使得

$$f(x+y)^2 = f(x)^2 + f(xy) + f(y)^2 \quad (16)$$

對所有  $x, y \in \mathbb{R}^+$  成立。

**解答.** 以  $P(a, b)$  表示將  $x = a$  及  $y = b$  代入式 (16)。比較  $P(x, y+z)$  與  $P(x+z, y)$ ，我們有

$$\begin{aligned} P(x, y+z): \quad f(x+y+z)^2 &= f(x)^2 + f(xy+xz) + f(y+z)^2 \\ &= f(x)^2 + f(xy+xz) + f(y)^2 + f(yz) + f(z)^2 \\ P(x+z, y): \quad f(x+y+z)^2 &= f(x+z)^2 + f(xy+zy) + f(y)^2 \\ &= f(x)^2 + f(xz) + f(z)^2 + f(xy+zy) + f(y)^2 \end{aligned}$$

可得

$$f(xy+xz) + f(yz) = f(xz) + f(xy+zy) \quad (17)$$

對所有  $x, y, z \in \mathbb{R}^+$  成立。現在我們證明  $f$  滿足詹森方程，對於任意的  $b > a > 0$ ，在式(17)中

代入

$$(x, y, z) \mapsto \left( \sqrt{\frac{a(b-a)}{b+a}}, \sqrt{\frac{b^2-a^2}{4a}}, \sqrt{\frac{a(b+a)}{b-a}} \right) \in \mathbb{R}_{>0}^3,$$

我們可以得到

$$2\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + f(b)$$

對於所有的  $a, b \in \mathbb{R}^+$  成立。因此根據性質3可以知道  $f(x) \equiv cx + d$  其中  $c, d \geq 0$  不同時為0。將此結果代回式(16)可得

$$\begin{aligned} (c(x+y) + d)^2 &= (cx + d)^2 + cxy + d + (cy + d)^2 \\ \implies 2c^2xy + d^2 &= cxy + 2d^2 + d \end{aligned}$$

由此可得  $c = 1/2$  且  $d = 0$ ，因此  $f(x) \equiv x/2$  為唯一解。

**範例 9** (2005 ISL A2). 試找到所有函數  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  使得

$$f(x)f(y) = 2f(x + yf(x)) \quad (18)$$

對所有  $x, y \in \mathbb{R}^+$  成立。

**解答.** 以  $P(a, b)$  表示將  $x = a$  及  $y = b$  代入式 (18)。考慮  $P(x + zf(x), y)$  我們有

$$\begin{aligned} \text{左式} &= f(x + zf(x))f(y) = \frac{1}{2}f(x)f(y)f(z) \\ \text{右式} &= 2f(x + zf(x) + yf(x + zf(x))) = 2f\left(x + zf(x) + \frac{1}{2}yf(x)f(z)\right) \\ &= f(x)f\left(z + \frac{1}{2}yf(z)\right) = \frac{1}{2}f(x)f\left(\frac{1}{2}y\right)f(z) \end{aligned}$$

因此  $f(y) = f(y/2)$  對於所有  $y \in \mathbb{R}^+$  成立，等價地  $f(x) = f(2^k x)$  對於所有  $k \in \mathbb{N}$  及  $x \in \mathbb{R}^+$  成立。對於每個  $x \in \mathbb{R}^+$ ，存在  $k = k(x) \in \mathbb{N}$  使得  $2^k > f(x)$ 。考慮  $P(x, x/(2^k - f(x)))$  則我們有

$$f(x)f\left(\frac{x}{2^k - f(x)}\right) = 2f\left(\frac{2^k x}{2^k - f(x)}\right),$$

由於

$$f\left(\frac{x}{2^k - f(x)}\right) = f\left(\frac{2^k x}{2^k - f(x)}\right),$$

因此  $f(x) = 2$ ，這對所有  $x$  成立，因此  $f(x) \equiv 2$  為唯一解。

## 6 2007 ISL A4 引理

這個小節主要介紹關於 2007 ISL A4 的一個小延伸引理。以下為該題的題目敘述：

**範例 10** (2007 ISL A4). 試找到所有函數  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  使得

$$f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y) \quad (19)$$

對所有  $x, y \in \mathbb{R}^+$  成立。



**解答.** 以  $P(a, b)$  表示將  $x = a$  及  $y = b$  代入式 (18)。考慮  $P(x, y + f(z))$ ，則我們有

$$\begin{aligned}\text{左式} &= f(x + f(y + f(z))) = f(x + f(y + z) + f(z)) \\ &= f(x + y + z + f(z)) + f(y + z) = f(x + y + 2z) + f(z) + f(y + z) \\ \text{右式} &= f(x + y + f(z)) + f(y + f(z)) \\ &= f(x + y + z) + f(z) + f(y + z) + f(z)\end{aligned}$$

因此  $f(x + y + 2z) = f(x + y + z) + f(z)$  對所有  $x, y, z \in \mathbb{R}^+$  成立。現在對於  $b > a > 0$ ，令  $x = y = (b - a)/2$  及  $z = a$ ，則我們有  $f(a) + f(b) = f(a + b)$  對所有  $a \neq b$  成立。

現在證明  $f(x) = cx$  其中  $c > 0$  為常數。假設  $f$  不是線性的，則存在  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ ，使得  $f(\alpha) = s\alpha$  且  $f(\beta) = t\beta$ ，其中  $s < t$ 。我們宣稱存在  $m, n \in \mathbb{N}$  使得

$$m\alpha - n\beta > 0 \quad \text{但} \quad ms\alpha - nt\beta < 0,$$

這等價

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{n}{m} > \frac{s\alpha}{t\beta},$$

根據有理數的稠密性，這樣的  $m, n \in \mathbb{N}$  存在。

現在固定正實數  $\gamma \notin \{p\alpha + q\beta : p, q \in \mathbb{Z}\}$ ，我們取足夠大的  $k \in \mathbb{N}$  使得

$$k(ms\alpha - nt\beta) + f(\gamma) < 0,$$

則因為

$$\begin{aligned}f(\gamma + k(m\alpha - n\beta)) + knf(\beta) &= f(\gamma + km\alpha) \\ f(\gamma) + kmf(\alpha) &= f(\gamma + km\alpha)\end{aligned}$$

因此，

$$f(\gamma + k(m\alpha - n\beta)) = f(\gamma) + k(ms\alpha - nt\beta) < 0,$$

矛盾。在以上推論中，我們選的  $\gamma$  確保了以上使用  $f(a + b) = f(a) + f(b)$  的過程中，都有  $a \neq b$ 。因此存在  $c \in \mathbb{R}^+$  使得  $f(x) = cx$ ，代回式(19)可得  $f(x) \equiv 2x$  為唯一可能。

事實上，後面所使用的手法可以被推廣成以下引理。

**引理 1** (2007 A4 引理). 假設  $f, g, h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  滿足

$$f(x + g(y)) = f(x) + h(y) \tag{20}$$

對所有  $x, y \in \mathbb{R}^+$  成立，則  $h(y)/g(y) = c$  ( $c \in \mathbb{R}^+$ ) 為常數。

我們前面在做範例10的時候可能還有  $y \neq x$  的條件，因此多數時候可以根據有的條件微調一下證明，但是大致思路不變。

**證明.** 假設  $h(y)/g(y)$  不是常數，則存在  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$  使得  $h(\alpha) = s \cdot g(\alpha)$  及  $h(\beta) = t \cdot g(\beta)$ ，其中  $s < t$ 。我們宣稱存在  $m, n \in \mathbb{N}$  使得

$$m \cdot g(\alpha) - n \cdot g(\beta) > 0 \quad \text{但} \quad ms \cdot g(\alpha) - nt \cdot g(\beta) < 0,$$

這等價

$$\frac{g(\alpha)}{g(\beta)} > \frac{n}{m} > \frac{s \cdot g(\alpha)}{t \cdot g(\beta)},$$

根據有理數的稠密性，這樣的  $m, n \in \mathbb{N}$  存在。現在固定  $\gamma \in \mathbb{R}^+$ ，並取足夠大的  $k \in \mathbb{N}$  使得

$$k(ms \cdot g(\alpha) - nt \cdot g(\beta)) + f(\gamma) < 0,$$

則因為

$$\begin{aligned} f(\gamma + km \cdot g(\alpha)) &= f(\gamma + k(m \cdot g(\alpha) - n \cdot g(\beta))) + kn \cdot h(\beta) \\ f(\gamma + km \cdot g(\alpha)) &= f(\gamma) + km \cdot h(\alpha) \end{aligned}$$

因此，

$$f(\gamma + k(m \cdot g(\alpha) - n \cdot g(\beta))) = f(\gamma) + k(ms \cdot g(\alpha) - nt \cdot g(\beta)) < 0,$$

矛盾。 □

**範例 11.** 試找到所有函數  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  使得

$$f(x + 3f(y)) = f(x) + f(y) + 2y \quad (21)$$

對所有  $x, y \in \mathbb{R}^+$  成立。

**解答.** 根據引理1，考慮  $g(y) = 3f(y)$  且  $h(y) = f(y) + 2y$ ，則我們有  $f(y) + 2y = c \cdot 3f(y)$  其中  $c \in \mathbb{R}^+$  為常數。由此可知  $f(y) = c_{\star}y$ ，其中  $c_{\star} \in \mathbb{R}^+$  為常數。代回式21可得  $3c_{\star}^2 = c_{\star} + 2$ ，可解出  $c_{\star} = 1$  為唯一正實數解。因此  $f(x) \equiv x$ 。

## 7 數論函方

數論函方在數奧中是一類特殊的函方，通常關於函數的關係式為一個整除關係，或是一個關於數論的敘述。最常見的兩個手法為：如果一個整數  $x$  被無限多個正整數整除，則  $x = 0$ ；此外，我們常常也會先嘗試炸出  $f(1)$  及  $f(p)$  的值，其中  $p \in \mathbb{P}$  為質數。以下為一個例子：

**範例 12** (2019 APMO P1). 試找到所有函數  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  使得

$$f(a) + b \mid a^2 + f(a)f(b) \quad (22)$$

對所有  $a, b \in \mathbb{N}$  成立。

**解答.** 以  $P(x, y)$  表示將  $a = x$  及  $b = y$  代入式 (22)。首先， $P(1, 1)$  可得  $f(1) + 1 \mid f(1)^2 + 1$ ，因此

$$f(1) + 1 \mid f(1)^2 + 1 - (f(1) - 1)(f(1) + 1) = 2,$$

因此  $f(1) = 1$ 。接下來令  $p \in \mathbb{P}$  為質數，考慮  $P(p, p)$  可得  $f(p) + p \mid f(p)^2 + p^2$ ，因此

$$f(p) + p \mid f(p)^2 + p^2 - (f(p) - p)(f(p) + p) = 2p^2,$$

因此  $f(p) + p$  有六種可能： $1, 2, p, 2p, p^2, 2p^2$ 。然而，前三個小於等於  $p$ ，因此不可能是前三個，故  $f(p) = p, p^2 - p, 2p^2 - p$ 。考慮  $P(p, 1)$ ，我們有  $f(p) + 1 \mid p^2 + f(p)$ ，即  $f(p) + 1 \mid p^2 - 1$ 。如果  $f(p) = p^2 - p$ ，則

$$p^2 - p + 1 \mid p^2 - 1 \implies p^2 - p + 1 \mid p,$$

因此  $p^2 - p + 1 = 1, p$ ，無論哪種情形都不合。如果  $f(p) = 2p^2 - p$ ，則

$$2p^2 - p + 1 \mid p^2 - p \implies 2p^2 - p + 1 \leq p^2 - 1,$$

矛盾。因此  $f(p) = p$  對於所有  $p \in \mathbb{P}$  成立。

現在考慮  $P(a, p)$  ( $p \in \mathbb{P}$ )，我們有  $f(a) + p \mid a^2 + f(a)p$ ，因此

$$f(a) + p \mid a^2 + f(a)p - (f(a) + p)f(a) = a^2 - f(a)^2,$$

這表示  $a^2 - f(a)^2$  被所有  $f(a) + p$  ( $p \in \mathbb{P}$ ) 整除，因此  $a^2 - f(a)^2 = 0$ ，即  $f(a) = a$  對於所有  $a \in \mathbb{N}$  成立。

以下為另一個例子：

**範例 13** (2013 ISL N1). 試找到所有函數  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  使得

$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n \quad (23)$$

對所有  $m, n \in \mathbb{N}$  成立。

**解答.** 以  $P(x, y)$  表示將  $m = x$  及  $n = y$  代入式 (23)。令  $p \in \mathbb{P}$  為大於  $f(1)$  的質數。由  $P(1, p - f(1))$  可得  $1 + f(p - f(1)) \mid p$ ，因此  $f(p - f(1)) = p - 1$ 。考慮  $P(p - f(1), p - f(1))$ ，有  $(p - f(1))^2 + p - 1 \mid (p - f(1))p$ ，因此

$$\begin{aligned} & (p - f(1))^2 + p - 1 \mid ((p - f(1))^2 + p - 1) \cdot p - ((p - f(1))p) \cdot (p - f(1)) \\ \implies & (p - f(1))^2 + p - 1 \mid p(p - 1) \end{aligned}$$

由於  $(p - f(1))^2 + p - 1 > p - 1$  且  $(p - f(1))^2 + p - 1$  為  $p(p - 1)$  的因數，因此  $p \mid (p - f(1))^2 + p - 1$ ，我們可以推論

$$p \mid f(1)^2 - 1,$$

這對所有質數  $p > f(1)$  成立，故  $f(1) = 1$  且  $f(p - 1) = p - 1$  對所有  $p \in \mathbb{P}$  成立。

現在考慮  $P(m, p - 1)$  ( $p \in \mathbb{P}$ )，有  $m^2 + p - 1 \mid mf(m) + p - 1$ ，因此

$$m^2 + p - 1 \mid (mf(m) + p - 1) - (m^2 + p - 1) = mf(m) - m^2,$$

因此  $mf(m) - m^2$  被無窮多個正整數  $m^2 + p - 1$  整除，可得  $mf(m) = m^2$  即  $f(m) = m$ 。

## 8 附錄

**定理 6.** 存在  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  滿足  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  但是對於所有  $c \in \mathbb{R}$  存在  $x_0 \in \mathbb{R}$  使得  $f(x_0) \neq cx_0$ 。也就是  $f$  不是線性函數。

**證明.** 在線性代數中，我們可以知道  $\mathbb{R}$  關於  $\mathbb{Q}$  的向量空間存在基底 (basis)，不妨假設此基底為  $\{1, \beta_1, \beta_2, \dots\}$ 。若

$$x = c + \sum_{i=1}^N c_i \beta_i, \quad c, c_i \in \mathbb{Q},$$

定義  $f(x) = c$ ，則可以看到  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  為柯西方程。然而  $f(\beta_1) = 0 \neq \beta_1$ ，因此  $f$  不是線性函數。  $\square$

## 9 習題

這些習題多數都只是幫讀者整理，前面有分類的題目選自 IMO, IMO shortlist, APMO 等競賽，並以年份排序，並不見得越前面越簡單，而後面的「其他」類別則是來自其他國家的題目，以我自己感受的難度排序。許多題目的難度非常高，我也不一定會寫。而有 \* 標記的題目表示我有自己做出來的題目，可以優先寫這些題目。

### 9.1 IMO

**問題 1** (2008 IMO 第四題 \*). 試找到所有  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  使得

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2} \quad (24)$$

對所有滿足  $wx = yz$  的  $w, x, y, z \in \mathbb{R}^+$  成立。

**問題 2** (2010 IMO 第一題 \*). 試找到所有  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  使得

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor \quad (25)$$

對所有  $x, y \in \mathbb{R}$  成立。

**問題 3** (2012 IMO 第四題 \*). 試找到所有  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  使得

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a) \quad (26)$$

對所有滿足  $a + b + c = 0$  的  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  成立。

**問題 4** (2015 IMO 第五題). 試找到所有  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  使得

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x) \quad (27)$$

對所有  $x, y \in \mathbb{R}$  成立。

**問題 5** (2017 IMO 第二題). 試找到所有  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  使得

$$f(f(x)f(y)) + f(x + y) = f(xy) \quad (28)$$

對所有  $x, y \in \mathbb{R}$  成立。

**問題 6** (1999 IMO 第六題). 試找到所有  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  使得

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1 \quad (29)$$

對所有  $x, y \in \mathbb{R}$  成立。

### 9.2 ISL

**問題 7** (2009 ISL A7). 試找到所有  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  使得

$$f(xf(x + y)) = f(yf(x)) + x^2 \quad (30)$$

對所有  $x, y \in \mathbb{R}$  成立。

問題 8 (2010 ISL A5). 試找到所有  $f: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$  使得

$$f(f(x)^2y) = x^3f(xy) \quad (31)$$

對所有  $x, y \in \mathbb{Q}^+$  成立。

問題 9 (2011 ISL A3). 試找到所有函數對  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  使得

$$g(f(x+y)) = f(x) + (2x+y)g(y) \quad (32)$$

對所有  $x, y \in \mathbb{R}$  成立。

問題 10 (2012 ISL A5). 試找到所有  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  使得

$$f(1+xy) - f(x+y) = f(x)f(y) \quad (33)$$

對所有  $x, y \in \mathbb{R}$  成立，且  $f(-1) = 0$ 。

問題 11 (2014 ISL A4). 試找到所有  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  使得

$$f(f(m)+n) + f(m) = f(n) + f(3m) + 2014 \quad (34)$$

對所有  $m, n \in \mathbb{Z}$  成立。

問題 12 (2014 ISL A6). 試找到所有  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  使得

$$n^2 + 4f(n) = f(f(n))^2 \quad (35)$$

對所有  $n \in \mathbb{Z}$  成立。

問題 13 (2015 ISL A2\*). 試找到所有  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  使得

$$f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1 \quad (36)$$

對所有  $x, y \in \mathbb{Z}$  成立。

問題 14 (2015 ISL A5). 試找到所有  $f: \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z} + 1$  使得

$$f(x + f(x) + y) + f(x - f(x) - y) = f(x + y) + f(x - y) \quad (37)$$

對所有  $x, y \in \mathbb{Z}$  成立。

問題 15 (2016 ISL A4). 試找到所有  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  使得

$$xf(x^2)f(f(y)) + f(yf(x)) = f(xy)(f(f(x^2)) + f(f(y^2))) \quad (38)$$

對所有  $x, y \in \mathbb{R}^+$  成立。

問題 16 (2016 ISL N6\*). 試找到所有  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  使得  $f(m) + f(n) - mn \neq 0$  且

$$f(m) + f(n) - mn \mid mf(m) + nf(n) \quad (39)$$

對所有  $m, n \in \mathbb{N}$  成立。

問題 17 (2018 ISL A1\*). 試找到所有  $f: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$  使得

$$f(x^2f(y)^2) = f(x)^2f(y) \quad (40)$$

對所有  $x, y \in \mathbb{Q}^+$  成立。

**問題 18** (2018 ISL A5). 試找到所有  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  使得

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)f(y) = f(xy) + f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (41)$$

對所有  $x, y \in \mathbb{R}^+$  成立。

**問題 19** (2020 ISL N5\*). 試找到所有  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$  滿足以下條件：

- (1) 至少存在一個  $n \in \mathbb{N}$ ，使得  $f(n) \neq 0$ 。
- (2)  $f(xy) = f(x) + f(y)$  對所有  $x, y \in \mathbb{N}$  成立。
- (3) 存在無窮多個  $n \in \mathbb{N}$  使得  $f(k) = f(n - k)$  對所有  $0 < k < n$  成立。

**附註.** 這題是 2021 年三階選訓的模競第一題，由於二階選訓我失去太多分，我需要做出這題才有機會成為國手，我有做出這題，算是延續了該年的國手夢到隔天的第二場模競。

**問題 20** (2020 ISL A6). 試找到所有  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  使得

$$f(a^2+b^2)(a+b) = af(a) + bf(b) \quad (42)$$

對所有  $a, b \in \mathbb{Z}$  成立。註： $f^{(n)}(x) = f(f^{(n-1)}(x))$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) 且  $f^{(0)}(x) = x$ 。

**附註.** 這題是 2021 年三階選訓的模競第四題，如前個備註所述，我在二階表現不佳，因此這題對我來說是一定要寫出來才能當上國手，惋惜的是，我沒做出這題。

### 9.3 APMO

**問題 21** (2015 APMO 第二題\*). 令  $S$  為所有大於 1 的正整數的集合。試找到所有  $f: S \rightarrow S$  使得

$$f(a)f(b) = f(a^2b^2) \quad (43)$$

對所有  $a, b \in S, a \neq b$  成立。

### 9.4 其他

**問題 22** (2014 韓國奧林匹亞\*). 試找到所有  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  使得

$$f(xf(x) + f(x)f(y) + y - 1) = f(xf(x) + xy) + y - 1 \quad (44)$$

對所有  $x, y \in \mathbb{R}$  成立。

**問題 23** (2008 加拿大\*). 試找到所有  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  使得

$$f(2f(x) + f(y)) = 2x + y \quad (45)$$

對所有  $x, y \in \mathbb{Q}$  成立。

**問題 24** (2010 印尼\*). 試找到所有  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  使得

$$f(x^3 + y^3) = xf(x^2) + yf(y^2) \quad (46)$$

對所有  $x, y \in \mathbb{R}$  成立。

**問題 25** (2019 Baltic Way\*). 試找到所有  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  使得

$$f(xf(y) - y^2) = (y+1)f(x-y) \quad (47)$$

對所有  $x, y \in \mathbb{R}$  成立。

**問題 26** (2007 義大利\*). 試找到所有  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  使得

$$f(xy + f(x)) = xf(y) + f(x) \quad (48)$$

對所有  $x, y \in \mathbb{R}$  成立。

**問題 27** (2020 香港\*). 試找到所有  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  使得

$$f(f(x) + y) + f(x + f(y)) = 2f(xf(y)) \quad (49)$$

對所有  $x, y \in \mathbb{R}$  成立。

**問題 28.** 試找到所有  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  使得

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + f(x) + f(y) \quad (50)$$

對所有  $x, y \in \mathbb{R}$  成立。

**問題 29.** 試找到所有  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  使得

$$f(x^2 + xf(y)) = xf(x+y) \quad (51)$$

對所有  $x, y \in \mathbb{R}$  成立。

## 10 習題解答

這個小節將放上一些習題的參考解答，大部分的解答都是我的答案，並不一定是最乾淨、最簡單的答案，如果想看看有沒有更簡潔的作法可以去 AOPS <https://artofproblemsolving.com/> 找。此外，有標 + 的解答表示我是參考別人的解答的。

**解答** (問題1). 以  $P(a, b, c, d)$  表示將  $w = a, x = b, y = c, z = d$  代入式(24)。 $P(1, 1, 1, 1)$  可以得到  $f(1)^2 = f(1)$  因此  $f(1) = 1$ ，而  $P(w, w, w, w)$  可以得到  $f(w^2) = f(w)^2$ 。現在我們可以將式(24)改寫成

$$\frac{f(w^2) + f(x^2)}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

現考慮  $P(\sqrt{t}, \sqrt{1/t}, 1, 1)$ ，則我們有

$$f(t) + f\left(\frac{1}{t}\right) = t + \frac{1}{t} \quad (52)$$

此式對所有  $t \in \mathbb{R}^+$  成立。將式(52) 左右兩式平方並且使用  $f(w^2) = f(w)^2$  可得

$$f(t^2) + 2f(t)f\left(\frac{1}{t}\right) + f\left(\frac{1}{t^2}\right) = t^2 + 2 + \frac{1}{t^2},$$

與式 (52) 中， $t$  代入  $t^2$  比較可得

$$f(t)f\left(\frac{1}{t}\right) = 1 \quad (53)$$

式(52)與式(53)綜合可得

$$f(t)^2 - \left(t + \frac{1}{t}\right) + 1 = 0 \quad \text{即} \quad (f(t) - t) \left(f(t) - \frac{1}{t}\right) = 0,$$

可得對於所有  $t \in \mathbb{R}^+$ ，要嘛  $f(t) = t$  要嘛  $f(t) = 1/t$ 。我們現在證明不可能存在  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ，使得  $f(\alpha) = \alpha$  但是  $f(\beta) = 1/\beta$ 。這也代表  $f(x) \equiv x$  以及  $f(x) \equiv 1/x$  為唯二解。考慮  $P(\alpha, \beta, \alpha\beta, 1)$ ，則可以得到

$$\frac{\alpha^2 + 1/\beta^2}{f(\alpha^2\beta^2) + 1} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2 + 1} \implies f(\alpha^2\beta^2) = \frac{(\alpha^2\beta^2 + 1)^2}{\beta^2(\alpha^2 + \beta^2)} - 1.$$

如果  $f(\alpha^2\beta^2) = \alpha^2\beta^2$ ，則

$$\alpha^2\beta^2 + 1 = \beta^2(\alpha^2 + \beta^2) \implies \beta^4 = 1,$$

與  $\beta \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$  矛盾，而若  $f(\alpha^2\beta^2) = 1/(\alpha^2\beta^2)$ ，則

$$\alpha^2\beta^2(\alpha^2\beta^2 + 1) = \beta^2(\alpha^2 + \beta^2) \implies \alpha^4 = 1,$$

一樣矛盾。因此這樣的  $\alpha, \beta$  不存在，故得證。

**解答 (問題2).** 以  $P(a, b)$  表示將  $x = a, y = b$  代入式(25)。  $P(0, 0)$  可得  $f(0) = f(0)[f(0)]$ ，即有  $[f(0)] = 1$  或是  $f(0) = 0$ 。

**狀況 (1)**  $[f(0)] = 1$ ，考慮  $P(x, 0)$  可得  $f(x) = f(0) = c$  ( $1 \leq c < 2$ )，代回式(25)驗證正確。

**狀況 (2)**  $f(0) = 0$ 。考慮  $P(1, 1)$  可得  $f(1) = f(1)[f(1)]$ ，因此  $f(1) = 0$  或是  $[f(1)] = 1$ 。第一種狀況中， $P(1, y)$  可得  $f(y) \equiv 0$ ，易驗證這是解。現在我們假設  $[f(1)] = 1$ 。首先  $P(x, 1)$  可得

$$f(x) = f([x]) \tag{54}$$

接下來考慮  $P(1, y)$  可得  $f(y) = f(1)[f(y)]$  以此改寫式(25)可得

$$f([x]y) = \frac{f(x)f(y)}{f(1)} \tag{55}$$

在此式中將  $y$  代入  $[y]$  並使用式(54)可得

$$f([x]y) = f([x][y]),$$

在此式中代入  $x = 2$  與  $y = 1/2$  可得  $f(1) = f(0) = 0$ ，與  $[f(1)] = 1$  矛盾。

**解答 (問題3).** 以  $P(x, y, z)$  表示將  $a = x, b = y, c = z$  代入式(26)。  $P(0, 0, 0)$  可得  $3f(0)^2 = 0$  即  $f(0) = 0$ ，而  $P(a, -a, 0)$  可得  $f(a)^2 + f(-a)^2 = 2f(a)f(-a)$  因此  $f(a) = f(-a)$ 。因此式(26)對於滿足  $a+b=c$  也成立， $P(x, x, 2x)$  化簡可得  $f(2x)^2 = 4f(x)f(2x)$ ，即  $f(2x) = 0$  或是  $f(2x) = 4f(x)$ 。令  $A := \{n \in \mathbb{N} : f(n) = 0\}$ ，我們將討論  $A = \emptyset$  與否。

**狀況 (1)**  $A = \emptyset$ 。因為對於任何  $x \in \mathbb{Z}$ ， $f(2x) = 0$  或是  $f(2x) = 4f(x)$  至少其中一個是對的，但  $A = \emptyset$ ，因此  $f(2x) = 4f(x)$  對所有  $x \in \mathbb{Z}$  成立。現在我們宣稱  $f(n) = n^2 f(1)$  對所有  $n \in \mathbb{N}$  成立。使用數學歸納法證明，這對  $n = 1$  是對的，假設此敘述對  $n \leq k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) 都是對的，化簡  $P(1, k, k+1)$  則有

$$(f(k+1) - (k+1)^2 f(1))(f(k+1) - (k-1)^2 f(1)) = 0,$$



如果  $f(k+1) = (k-1)^2 f(1)$ ,  $P(2, k-1, k+1)$  可得  $f(2)^2 = 4f(2)((k-1)^2 f(1))$ , 由於  $A = \emptyset$ ,  $f(2) \neq 0$ , 因此  $4f(1) = 4(k-1)^2 f(1)$  且  $k = 2$ 。故  $f(3) = f(1)$ 。  $P(1, 3, 4)$  可得  $f(4)^2 = 4f(4)f(1)$  因此  $f(4) = 4f(1) = f(2)$ , 但我們又有  $f(4) = 4f(2)$ , 這導致  $f(2) = 0$  與  $A = \emptyset$  矛盾。因此我們可以得到  $f(k+1) = (k+1)^2 f(1)$ , 根據數學歸納法可以知道  $f(n) = n^2 f(1)$  對所有  $n$  成立。可以驗證  $f(n) = an^2$  ( $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ) 為解。

**狀況 (2)**  $A \neq \emptyset$ , 首先注意到若  $z \in A$  則  $P(a, z-a, z)$  可得  $f(a) = f(z-a)$  因此  $f(a) = f(-a) = f(z+a)$  為週期函數。令  $w = \min A$ , 則對於所有  $z \in A$ , 我們都有  $w \mid z$ , 否則  $f(z') = 0$ , 其中  $z' < w$  為  $z$  除以  $w$  的餘數。我們不妨將  $w$  寫成  $2^t s$ , 其中  $s$  為奇數且  $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 。若  $s \neq 1$  則取  $k \in \mathbb{N}$  使得  $2^k \equiv 1 \pmod{s}$ <sup>1</sup> 則因為  $f(a) = f(a+w)$  且  $s \mid 2^k - 1$  我們有  $f(2^t) = f(2^k 2^t)$ 。我們又有  $f(2^k 2^t) = 4^k f(2^t)$ , 因此  $(4^k - 1)f(2^t) = 0$  這代表  $f(2^t) = 0$ , 與  $s \neq 1$  矛盾。因此  $w$  只能是  $2^t$  的形式。

如果  $w = 2^t$  其中  $t \geq 3$ , 則考慮  $P(2, w/2-1, w/2+1)$ , 因為  $f(w/2-1) = f(w/2+1) \neq 0$ , 我們可以寫下  $4f(1) = f(2) = 4f(w/2-1)$ , 故  $f(w/2-1) = f(1)$ , 接下來  $P(1, w/2-1, w/2)$  可得  $f(w/2) = 4f(1)$ , 然而我們又有  $f(w/2) = f(2^{t-1}) = 4^{t-1} f(1)$ , 由於  $t \geq 3$ , 故矛盾。因此  $t = 0, 1, 2$ 。如果  $t = 0$ , 表示  $f$  的週期為 1, 則  $f(n) \equiv 0$ 。如果  $t = 1$ , 則表示  $f$  的週期為 2, 因此  $f(2n) = 0$  且  $f(2n+1) = f(1)$  對所有  $n \in \mathbb{Z}$  成立, 我們可以驗證這對所有  $f(1) \neq 0$  都是解。如果  $t = 2$ , 則有  $f(4n+1) = f(4n+3) = f(1)$ ,  $f(4n+2) = 4f(1)$ ,  $f(4n) = 0$  對所有  $n \in \mathbb{Z}$  成立, 可以驗證此解對所有  $f(1) \neq 0$  成立。

**解答 (問題13).** 以  $P(a, b)$  表示將  $x = a, y = b$  代入式(36)。由  $P(f(y), y)$  可得

$$f(0) + 1 = f(f(f(y))) - f(y) \quad (56)$$

考慮  $P(f(x), f(f(x)))$  並使用式(56)代換可得  $f(-1 - f(0)) = -1$ 。現在  $P(x, -1 - f(0))$  可得  $f(x+1) = f(f(x))$ 。使用此式代換式(56)可得

$$f(y+2) = f(f(y+1)) = f(f(f(y))) = f(y) + f(0) + 1,$$

也就是

$$f(y+2) = f(y) + f(0) + 1 \quad (57)$$

考慮  $P(f(0)+1, 2)$  我們有

$$\begin{aligned} f(f(0)+1-2f(0)-1) &= f(f(0)+2) - f(2) - 1 \\ \implies f(f(0)) - f(0)(f(0)+1) &= f(f(0)) - f(0) - 1 \\ \implies (f(0)-1)(f(0)+1) &= 0 \end{aligned}$$

因此  $f(0) = 1$  或是  $f(0) = -1$ 。接下來我們計算  $f(-1)$ 。考慮  $P(-1+f(-1), -1)$ , 我們得到

$$\begin{aligned} f(-1) &= f(f(-1+f(-1))) - f(-1) - 1 \\ &= f(-1+f(-1)+1) - f(-1) - 1 \quad (\text{因為 } f(f(x)) = f(x+1)) \\ &= f(0) - f(-1) - 1 \quad (\text{又因為 } f(f(x)) = f(x+1)) \end{aligned}$$

因此,

$$f(0) = 2f(-1) + 1 \quad (58)$$

---

<sup>1</sup>根據歐拉定理, 這樣的  $k$  存在

先前得到  $f(0) = 1$  或是  $f(0) = -1$  的結論，我們現在就此討論。

**狀況 (1)**  $f(0) = 1$ ，此時由式(58)可得  $f(-1) = 0$ 。由式(57)，我們有  $f(y+2) = f(y) + 2$ ，我們便可以得到  $f(x) = x + 1$  對所有  $x \in \mathbb{Z}$  成立。

**狀況 (2)**  $f(0) = -1$ ，此時由式(58)可得  $f(-1) = -1$ 。由式(57)，我們有  $f(y+2) = f(y)$ ，我們便可以得到  $f(x) = -1$  對所有  $x \in \mathbb{Z}$  成立。

易驗證上述得到的結果都是解。

**解答** (問題16). 以  $P(a, b)$  表示將  $m = a, n = b$  代入式(39)。  $P(1, 1)$  可得  $2f(1) - 1 \mid 2f(1)$ ，因此  $2f(1) - 1 \mid 1$ ，因為  $2f(1) - 1 \geq 1$ ，所以  $2f(1) - 1 = 1$  即  $f(1) = 1$ 。令  $p$  為大於等於 7 的質數並考慮  $P(p, p)$ ，則有  $2f(p) - p^2 \mid 2pf(p)$ ，因此

$$2f(p) - p^2 \mid 2pf(p) - p(2f(p) - p^2) = p^3,$$

因此  $2f(p) - p^2 = \pm 1, \pm p, \pm p^2, \pm p^3$ ，以下討論將排除掉  $f(p) \leq 0$  的狀況，即  $2f(p) - p^2 = -p^2$  或  $-p^3$  兩種狀況。現在考慮  $P(p, 1)$ ，我們有  $f(p) + 1 - p \mid pf(p) + 1$ ，因此

$$f(p) + 1 - p \mid pf(p) + 1 - p(f(p) + 1 - p) = p^2 - p + 1 \quad (59)$$

現在我們討論前面得到的六種情況。

**狀況 (1)**  $f(p) = (p^2+1)/2$ 。代入式(59)可得  $p^2-2p+3 \mid 2p^2-2p+2$ ，因此  $p^2-2p+3 \mid 2p-4$ ，但  $p^2-4p+7 = (p-2)^2+3 > 0$  矛盾。

**狀況 (2)**  $f(p) = (p^2-1)/2$ 。代入式(59)可得  $p^2-2p+1 \mid 2p^2-2p+2$ ，因此  $p^2-2p+1 \mid 2p$ ，這表示  $p^2-2p+1 = (p-1)^2$  只能是  $1, 2, p, 2p$ 。這表示  $p = 2$  為唯一可能，但我們先前令  $p$  為大於等於 7 的質數，不合。

**狀況 (3)**  $f(p) = (p^2+p)/2$ 。代入式(59)可得  $p^2-p+2 \mid 2p^2-2p+2$ ，因此  $p^2-p+2 \mid 2$ ，但當  $p \geq 3$  時，我們有  $p^2-p \geq 0$ ，矛盾。

**狀況 (4)**  $f(p) = (p^2-p)/2$ 。代入式(59)可得  $p^2-3p+2 \mid 2p^2-2p+2$ ，因此  $p^2-3p+2 \mid 4p-2$ ，但當  $p \geq 7$  時，我們有  $p^2-7p+4 > 0$ ，矛盾。

**狀況 (5)**  $f(p) = (p^2+p^3)/2$ 。代入式(59)可得  $p^3+p^2-2p+2 \mid 2p^2-2p+2$ 。但  $p^3+p^2-2p+2 > 2p^2-2p+2 > 0$ ，矛盾。

因此， $f(p) = p^2$  對於所有大於等於 7 的質數。現在考慮  $P(m, p)$  我們有  $f(m) + p^2 - mp \mid mf(m) + p^3$ ，因此

$$\begin{aligned} f(m) + p^2 - mp &\mid mf(m) + p^3 - (f(m) + p^2 - mp) \cdot (p + m) \\ \implies f(m) + p^2 - mp &\mid p(f(m) - m^2) \end{aligned}$$

若考慮  $p > f(m)$ ，則  $\gcd(p, f(m) + p^2 - mp) = 1$ ，所以上式可以改寫成  $f(m) + p^2 - mp \mid f(m) - m^2$ ，這表示  $f(m) - m^2$  被無窮多個的正整數整除，我們可以推論  $f(m) - m^2 = 0$ ，即  $f(m) = m^2$  對所有  $m \in \mathbb{N}$  成立。

**解答** (問題17). 以  $P(a, b)$  表示將  $x = a, y = b$  代入式(40)。由  $P(1/f(1), 1)$  可得  $f(1/f(1)) = 1$ ，因此  $P(x, 1/f(1))$  可得  $f(x^2) = f(x)^2$ 。將式(40)改寫可得

$$f(xf(y))^2 = f(x^2f(y)^2) = f(x)^2f(y) \quad (60)$$

在此式(60)中，左右兩式開根號可得

$$f(xf(y)) = f(x)\sqrt{f(y)}。$$

固定  $x, y \in \mathbb{Q}^+$ ，定義  $t_0 = y$  且  $t_n = xf(t_{n-1})$ ，根據  $f$  的定義，我們有  $t_n \in \mathbb{Q}^+$ ，現在我們證明

$$f(t_n) = f(x)^{2-2^{1-n}}f(y)^{2^{-n}} \quad (61)$$

式(61)對  $n = 0$  是對的。假設式(61)對於  $n \leq k$  ( $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ) 是對的，則

$$\begin{aligned} f(t_{k+1}) &= f(xf(t_k)) = f(x)\sqrt{f(t_k)} = f(x) \cdot f(x)^{1-2^{-k}}f(y)^{2^{-k-1}} \\ &= f(x)^{2-2^{1-(k+1)}}f(y)^{2^{-(k+1)}} \end{aligned}$$

可得式(61)對  $n = k + 1$  也是對的，根據數學歸納法知道式(61)對所有  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  成立。假設存在  $s \in \mathbb{Q}^+$  使得  $f(s) = p/q \neq 1$  ( $\gcd(p, q) = 1$ )，則在式(61)中取  $x = 1/f(1), y = s$ ，可得  $f(t_n) = f(y)^{2^{-n}} = (p/q)^{2^{-n}}$ ，取  $n$  夠大即可使  $f(t_n)$  為無理數，與  $f$  的對應域為  $\mathbb{Q}^+$  矛盾。

**解答** (問題19). 首先，根據條件 (2) 及使用數學歸納法，我們很容易證明：

$$f\left(\prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i}\right) = \sum_{i=1}^m \alpha_i f(p_i) \quad (62)$$

因此，若  $f(n) \neq 0$ ，則存在質數  $p \mid n$  使得  $f(p) \neq 0$ 。現在令

$$S := \{n \in \mathbb{N} : f(k) = f(n-k) \text{ 對所有 } 0 < k < n \text{ 成立}\}$$

$$T := \{p \in \mathbb{P} : f(p) \neq 0\}$$

根據條件(1)，我們有  $T \neq \emptyset$ ，因此可以令  $p = \min T$ 。現在我們證明以下敘述：

**宣稱 19.1.** 如果  $n \in S$ ，則對於所有  $1 \neq m \mid n$ ，我們有  $f(m-1) = 0$ 。

**證明.** 若  $n = m \cdot s$  ( $m \neq 1$ )，則  $f(s) = f((m-1)s) = f(m-1) + f(s)$ ，即  $f(m-1) = 0$ 。□

**宣稱 19.2.** 對於所有的  $n \in S$ ，如果  $n \geq p$  則  $p \mid n$ 。

**證明.** 根據除法原理，我們可以寫  $n = ap + b$ ，其中  $a \in \mathbb{N}$  及  $0 \leq b < p$ 。現在根據  $S$  的定義，若  $b \neq 0$ ，則有  $f(b) = f(ap) = f(a) + f(p) > 0$ ，表示存在更小的質數  $p' \mid b$  使得  $f(p') \neq 0$  與  $p = \min T$  的假設矛盾。因此  $b = 0$  即  $p \mid n$ 。□

**宣稱 19.3.**  $T$  只存在一個元素，即  $T = \{p\}$ 。

**證明.** 假設  $q \in T - \{p\}$ ，並且將所有的  $n \in S$  ( $n \geq p$ )，寫成  $n = p^\alpha q^\beta s$  其中  $\alpha \in \mathbb{N}$ ， $\beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ，且  $\gcd(p, s) = \gcd(q, s) = 1$ 。我們證明  $\alpha < q-1$ ； $\beta < p-1$ ；且  $s < p$ 。首先若  $\alpha \geq q-1$ ，則根據宣稱19.1可知  $f(p^{q-1}-1) = 0$ ，然而根據費馬小定理可知  $p^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ ，即  $q \mid p^{q-1}-1$ ，因此  $f(q) = 0$  矛盾。類似地  $\beta < p-1$ 。而若  $s > p$ ，則由整數除法，可得  $s = ap + b$ ，其中  $a \in \mathbb{N}$ ， $0 \leq b < p$ 。若  $b > 0$ ，則

$$f(p^\alpha q^\beta \cdot b) = f(p^\alpha q^\beta \cdot ap) \implies f(b) = f(ap) = f(a) + f(p) > 0，$$

矛盾，因此  $p \mid s$ ，但這又與  $\gcd(p, s) = 1$  矛盾。

綜合以上，我們可以知道，

$$S \cap \mathbb{N}_{\geq p} \subseteq \{p^\alpha q^\beta s : \alpha < q-1, \beta < p-1, s < p\},$$

即

$$|S| \leq (q-2)(p-1)(p-1) + (p-1) < \infty,$$

與條件3： $|S| = \infty$  矛盾。因此最一開始的假設是錯的，故  $T = \{p\}$ 。 □

在證明完以上三個宣稱之後，根據式(62)及宣稱19.3，我們知道  $f(n) = f(p) \cdot v_p(n)$  對所有  $n \in \mathbb{N}$  成立，其中  $v_p(n)$  為最大的  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  使得  $p^k \mid n$ 。我們現在證明  $f(n) \equiv f(p) \cdot v_p(n)$  確實為原方程的解，顯然此函數滿足條件(1)及(2)，在條件(3)中，我們也很容易證明  $n = p^\ell$  其中  $\ell \in \mathbb{N}$  皆滿足條件。

**解答** (問題21). 考慮

$$f(a)f(b)f(c)f(d)f(e) = f(a)f(b^2c^2)f(d^2e^2) = f(a)f(b^4c^4d^4e^4)$$

以及

$$\begin{aligned} f(a)f(b)f(c)f(d)f(e) &= f(a^2b^2)f(c)f(d)f(e) = f(a^4b^4c^2)f(d)f(e) \\ &= f(a^8b^8c^4d^2)f(e) = f(a^{16}b^{16}c^8d^4e^2). \end{aligned}$$

只要取  $a, b, c, d, e \in S$  滿足  $a^{16}b^{16}c^8d^4e^2 = b^4c^4d^4e^4$ ，且在合併時不會違反題目敘述中的條件，即可產生矛盾  $f(a) = 1$ 。因此我們取

$$a = 2, \quad b = 2^2, \quad c = 2, \quad d = 2, \quad e = 2^{22},$$

即證明了這樣的  $f$  不存在。

**解答** (問題22). 以  $P(a, b)$  表示將  $x = a, y = b$  代入式(44)。由  $P(0, 1 - f(0))$  可知

$$f(f(0)f(1 - f(0)) - f(0)) = 0$$

這代表存在  $c \in \mathbb{R}$  使得  $f(c) = 0$ 。由  $P(c, 1)$  可得  $f(0) = 0$ 。由  $P(0, y)$  有  $f(y - 1) = y - 1$ ，這表示  $f(x) = x$  對所有  $x \in \mathbb{R}$  成立，易驗證這是解。

**解答** (問題23). 以  $P(a, b)$  表示將  $x = a, y = b$  代入式(45)。首先  $P(0, 0)$  可得  $f(3f(0)) = 0$ 。現在我們證明  $f$  是單射的，假設  $f(a) = f(b)$ ，比較  $P(x, a)$  與  $P(x, b)$  可得  $a = b$ ，即有單射。考慮  $P(x, -2x)$  有  $f(2f(x) + f(-2x)) = 0 = f(3f(0))$ ，根據單射我們有  $2f(x) + f(-2x) = 3f(0)$  將此式代回式(45)可得

$$f(3f(0) - f(-2x) + f(y)) = 2x + y \quad (63)$$

此外， $P(3f(0), y)$  與  $P(x, 3f(0))$  分別可得

$$\begin{aligned} f(f(y)) &= 6f(0) + y \\ f(2f(x)) &= 3f(0) + 2x \end{aligned} \quad (64)$$

在式(63)中，將  $(x, y)$  代入  $(-1/2f(x), f(y))$ ，並使用式(64)可得

$$f(3f(0) + y - x) = f(y) - f(x) \quad (65)$$

在此式中的  $y$  代入  $x + y - 3f(0)$  可得  $f(x) + f(y) = f(x + y - 3f(0))$ 。在此式中代入  $x = 2f(0)$  及  $y = f(0)$  並且使用式(64) 可得  $9f(0) = f(0)$  即  $f(0) = 0$ 。因此,  $f(x) + f(y) = f(x + y)$  為柯西方程。根據定理3, 我們知道  $f(x) = cx$  其中  $c \in \mathbb{Q}$  為常數。易驗證  $c = \pm 1$  為唯一的可能, 因此所有解為  $f(x) \equiv x$  及  $f(x) \equiv -x$  兩個。

**解答** (問題24). 以  $P(a, b)$  表示將  $x = a, y = b$  代入式(46)。  $P(0, 0)$  可得  $f(0) = 0$ , 而  $P(x, 0)$  可得

$$f(x^3) = xf(x^2) \quad (66)$$

將此結果代回式(46)可得  $f(x^3 + y^3) = f(x^3) + f(y^3)$ 。由於對於所有的  $u, v \in \mathbb{R}$ , 都存在  $x, y \in \mathbb{R}$  使得  $u = x^3, v = y^3$ , 因此我們有  $f(u + v) = f(u) + f(v)$ 。這代表  $f$  滿足柯西方程, 且根據性質2, 我們有  $f(cx) = cf(x)$  對於所有的  $c \in \mathbb{Q}$  成立。

現在我們將  $x = a + p$  (固定  $a \in \mathbb{R}$ ,  $p \in \mathbb{Q}$  則不固定) 代入式66, 並且使用性質2以及柯西方程展開, 可以得到

$$\begin{aligned} f((a+p)^3) &= f(a^3) + 3f(a^2)p + 3f(a)p^2 + f(1)p^3 \\ (a+p)f((a+p)^2) &= (a+p)(f(a^2) + 2pf(a) + p^2f(1)) \\ &= af(a^2) + (f(a^2) + 2af(a))p + (af(1) + 2f(a))p^2 + f(1)p^3 \end{aligned}$$

由於  $a$  被固定, 因此此兩式可以視為  $p$  的三次多項式, 這兩個多像是在所有有理數上有一樣的值, 因此這兩個是一樣的多項式。比較  $p^2$  項的係數可得  $3f(a) = 2f(a) + af(1)$ , 因此  $f(a) = af(1)$ , 這對所有  $a \in \mathbb{R}$  都是對的, 因此可得  $f(x) = cx$ , 其中  $c \in \mathbb{R}$  為常數。可以驗證每個  $c \in \mathbb{R}$  都是解。

**附註.** 可以思考為什麼兩個多項式只要在所有有理數上面的值全部相同, 則為相同的多項式。

**解答** (問題25). 以  $P(a, b)$  表示將  $x = a, y = b$  代入式(47)。如果  $f$  為常數函數, 則  $f \equiv 0$  為唯一可能, 現假設  $f$  不為常數函數。由  $P(x, -1)$  可得  $f(f(-1)x - 1) = 0$ , 如果  $f(-1) \neq 0$  則  $f$  為常數, 與假設矛盾, 因此有  $f(-1) = 0$ 。現在我們證明  $f$  為零單, 也就是  $f(a) \neq 0$  對所有  $a \neq -1$  成立。反設這樣的  $a \neq -1$  存在, 則  $P(x, a)$  給我們

$$f(-a^2) = (a+1)f(x-a) \quad \text{即} \quad f(x-a) = f(-a^2)/(a+1) \text{ 為常數函數, 矛盾。}$$

由此, 我們知道  $f$  為零單。

考慮  $P(y-1, y)$ , 則有

$$f((y-1)f(y) - y^2) = 0,$$

根據零單, 我們有  $(y-1)f(y) - y^2 = -1$ , 也就是  $f(y) = y + 1$  對所有  $y \neq 1$  成立。為了解出  $f(1)$ , 再考慮  $P(y+1, y)$ , 可得

$$(y+1)f(1) = f((y+1)f(y) - y^2) = f(2y+1) = 2y+2,$$

對所有  $y \neq 0, 1$  成立, 因此  $f(1) = 2$ 。綜合以上,  $f(x) = x + 1$  對所有  $x \in \mathbb{R}$  與  $f \equiv 0$  為所有解。

**解答** (問題26). 以  $P(a, b)$  表示將  $x = a, y = b$  代入式 (48)。  $P(0, 0)$  有  $f(f(0)) = f(0)$  且  $P(x, 0)$  有

$$f(f(x)) = f(0)x + f(x) \quad (67)$$

如果  $f(0) \neq 0$ ，則由式 (67) 可得  $f$  為單射，然而  $f(f(0)) = f(0)$  可得  $f(0) = 0$  與  $f(0) \neq 0$  矛盾。因此， $f(0) = 0$  且式 (67) 可以寫成  $f(f(x)) = f(x)$ 。由  $P(f(x), -1)$  可得  $f(x)(f(-1) + 1) = 0$ ，如果  $f(-1) \neq -1$ ，則  $f \equiv 0$ ，可驗證這是一個解。

現在我們討論  $f(-1) = -1$  的情形，考慮  $P(x, -1)$  則有

$$f(f(x) - x) = f(x) - x \quad (68)$$

我們宣稱<sup>2</sup>  $f(x) = x$  對所有  $x \in \mathbb{R}$  成立。反設存在  $t \in \mathbb{R}$  使得  $f(t) \neq t$ ，則考慮

$$w = xt + f(x) \quad f(w) = xf(t) + f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

將  $w$  代入式 (68)，可得

$$f((f(t) - t)x) = (f(t) - t)x,$$

由於我們假設  $f(t) \neq t$ ，這可以推論  $f(x) = x$  對於所有  $x \in \mathbb{R}$  成立。此即產生矛盾，因此  $f(x) \equiv x$  為另一個解。綜合以上，總共有兩個解  $f(x) \equiv 0$  及  $f(x) \equiv x$ 。

**解答 (問題27).** 以  $P(a, b)$  表示將  $x = a, y = b$  代入式 (49)。比較式 (49) 與  $P(y, x)$  可得

$$f(xf(y)) = f(yf(x)) \quad (69)$$

代入  $x = 0$ ，則有  $f(0) = f(f(0)y)$ 。如果  $f(0) \neq 0$ ，則  $f(x) \equiv c$  ( $c \neq 0$ ) 為常數函數，因此我們討論完  $f(0) \neq 0$  的情形。以下假設  $f(0) = 0$ 。

由  $P(x, 0)$  可得

$$f(f(x)) + f(x) = 0 \quad (70)$$

我們現證明  $f(f(x) + x) = 0$ 。由  $P(f(x), y)$  給我們

$$f(-f(x) + y) + f(f(x) + f(y)) = 2f(f(x)f(y)) \quad (71)$$

將式 (71) 的  $x, y$  對調後與式 (71) 比較可得

$$f(-f(x) + y) = f(-f(y) + x),$$

此時再將  $y$  以  $f(x)$  代入可得  $f(0) = f(f(x) + x)$ ，這證明初我們先前宣稱的結果。現在考慮  $P(1, 1)$  可得  $f(f(1)) = 0$  (注意到  $f(1 + f(1)) = 0$ )，與式 (70) 比較可得  $f(1) = 0$ 。在式 (69) 中代入  $x = 1$  可得  $f(f(y)) = 0$ ，在將此結果與式 (70) 綜合可得  $f(y) = 0$  對所有  $y \in \mathbb{R}$  成立。綜合以上，可得  $f(x) = c$  ( $c \in \mathbb{R}$ ) 為所有解。

**解答 (問題28+).** 假設  $P(a, b)$  為  $x = a, y = b$  代入原式 (50)。首先注意到，如果  $f(x)$  為常數函數  $c$ ，則有  $c = 0, 2$ 。我們可得兩個解  $f(x) \equiv 0$  以及  $f(x) \equiv 2$ 。

現假設  $f$  不為常數函數。由  $P(x, 0)$  可得

$$f(x) + f(x)f(0) = f(0) + f(x) + f(0),$$

可推論  $(f(x) - 2)f(0) = 0$ ，因為  $f(x)$  不為常數，因此  $f(0) = 0$ 。由  $P(x, 1)$  可得  $f(x + 1) = (2 - f(1))f(x) + f(1)$  且  $P(x + 1, 1)$  可得

$$\begin{aligned} f(x + 2) &= (2 - f(1))f(x + 1) + f(1) \\ &= (2 - f(1))^2 f(x) + f(1)(3 - f(1)) \end{aligned}$$

<sup>2</sup>在數奧競賽中，寫解時有時可以寫「宣稱」(claim) 來表示我們接下來要證明的敘述，這會讓解更易懂也更有結構性。

將上式以  $x = 0$  代入可以得到  $f(2) = f(1)(3 - f(1))$ ，並且以此代換：

$$f(x+2) = (2 - f(1))^2 f(x) + f(2) \quad (72)$$

現在考慮  $P(x, 2) : f(x+2) = f(2x) + f(x)(1 - f(2)) + f(2)$ ，與式 (50) 比較可得

$$(2 - f(1))^2 f(x) = f(2x) + f(x)(1 - 3f(1) + f(1)^2),$$

我們可以推論  $f(2x) = (3 - f(1))f(x)$ 。

因此有  $f(2x) = af(x)$  且  $f(4x) = a^2 f(x)$ ，其中  $a = 3 - f(1)$ 。接下來  $P(2x, 2y)$  可得  $af(x+y) + a^2 f(x)f(y) = a^2 f(xy) + af(x) + af(y)$ ，與原式 (50) 比較可得：

$$a(a-1)f(x+y) = a(a-1)(f(x) + f(y))。$$

注意到  $a \neq 0$ ，否則  $f(2x) = af(x)$  可推論  $f(x) = 0$  為常數函數，我們也有  $a \neq 1$ ，否則  $f(1) = 3 - a = 2$  且  $f(x+1) = (2 - f(1))f(x) + f(1) = f(1)$  為常數函數。因此  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ，並且與式 (50) 可得  $f(xy) = f(x)f(y)$ 。根據範例 6 可知  $f(x) = x$  或是  $f(x) = 0$ 。

**解答** (問題29+)。明顯  $f \equiv 0$  為解，不妨假設  $f$  不全為 0，假設  $f(z) \neq 0$ 。以  $P(a, b)$  表示將  $x = a, y = b$  代入式 (51)。  $P(x, z-x) : f(x^2 + xf(z-x)) = xf(z)$  可推出  $f$  滿射，此外  $P(0, 0)$  可得  $f(0) = 0$ ；  $P(x, 0)$  可得  $f(x^2) = xf(x)$ 。接下來我們證明： $f(z) \neq 0$  對於所有的  $z \neq 0$  成立。定義  $S = \{s \in \mathbb{R} : f(s) = 0\}$ ，並考慮  $P(x, s) (s \in S)$  有  $f(x^2) = xf(x+s)$ ，則可推論  $f(x+s) = f(x)$  無論  $x$  是否為 0，這表示  $s \in S$  則  $s$  是  $f$  的週期。很容易可以看到，如果  $t$  是  $f$  的週期，則  $f(t) = f(0) = 0$ ，因此  $t \in S$ ，這表示  $S$  恰好蒐集了所有  $f$  的週期。以上可以看出若  $s, t \in S$  則  $s+t \in S$  且  $-s \in S$ ，而  $P(s, -s) \implies s^2 \in S$ 。

現在假設  $s \in S - \{0\}$  存在，比較  $P(x+s, y)$  與  $P(x, y) (x, y \in \mathbb{R})$  我們有

$$\begin{aligned} f(x^2 + 2sx + s^2 + (x+s)f(y)) &= (x+s)f(x+s+y) = (x+s)f(x+y) \\ f(x^2 + xf(y)) &= xf(x+y) \end{aligned}$$

如果  $s^2 + 2sx + sf(y) \in S$ ，則  $sf(x+y) = 0$ ，因此  $f(x+y) = 0$  且  $x+y \in S$ 。由於  $f$  是滿射的，所以對於所有的  $x$ ，存在  $y \in \mathbb{R}$  使得  $f(y) = -2x$ ，此時  $s^2 + 2sx + sf(y) = s^2 \in S$ ，此時  $f(x+y) = 0$ ，故  $f(x^2 + xf(y)) = f(-x^2) = 0 \implies -x^2 \in S$  對所有  $x \in \mathbb{R}$  成立。我們可以推論當  $S \neq \{0\}$  則  $S = \mathbb{R}$ 。

現在考慮  $P(-f(y), y) (y \neq 0)$ ，可以得到  $0 = -f(y)f(y-f(y))$ ，根據前面得到的「零單」條件，我們可以得到  $f(y) = y$  對於所有的  $y \neq 0$  成立，加上前面的  $f(0) = 0$ ，我們得到  $f(x) = x$  對於所有的  $x \in \mathbb{R}$  成立，易驗證這是解。

**附註**。這題用到的技巧叫做零單，也就是映射到 0 的點是單射，具體來說，只存在一個  $a \in \mathbb{R}$  使得  $f(a) = 0$ ，換句話說，若  $f(a) = f(b) = 0$ ，則  $a = b$ 。