Les familles sommables

Auteur : Joshua Lozano *Encadrante* : Elisa ouvert

Université Paris Cité

7 juin 2024

Introduction aux familles sommables

Etant donnée une famille finie de réels $(x_i)_{i\in I}$, il est aisé de définir la somme $\sum_{i\in I} x_i$ de cette famille, comformément à notre intuition, en ajoutant les x_i un par un dans n'importe quel ordre. Cependant, ce raisonnement là ne peut s'appliquer aux familles infinies, alors qu'en est-il des familles infinies ?

Soit Σ l'ensemble infini de nombres réels suivant :

$$\Sigma = \left\{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \dots\right\}.$$

C'est la que la question d'ordre se pose, en le changeant un peu la série converge vers un réel $x > 0$.

Application

Soit $S = 1 + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}...$
Nous avons S=$\lim_{n\to\infty} S_n$, avec $S_n = \Sigma U_k$.On sait d'autant plus que U_k est de la forme :

$$U_k = \alpha_k + \beta_k - \gamma_k$$

Avec quelques calculs on trouve $U_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k}$. On remarque qu'avec un certain arrangement, comme on a pu le voir précédemment, cette somme tendrait vers $+\infty$. Or, en mettant tout sur le même dénominateur et en simplifiant, on trouve :

$$U_k \sim \frac{1}{4k^2}$$

Donc U_k converge par Riemann (par comparaison de série de positive), on remarque donc que **l'ordre est primordial**.

Théorème de réarrangement de Riemann

Théorème

- Pour toute série semi convergente de nombres réels, il est possible de réarranger ses termes de manière à ce que la série converge vers n'importe quel nombre réel donné, ou même diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$. En d'autres termes, la somme d'une série semi convergente peut être changée par une réorganisation adéquate de ses termes. Illustrons cela avec un programme python :

main.py > ...

```python
import math
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def U(n):
  if n % 2 == 0:
    return 1 / ((n / 2) + 1)
  else:
    return -1 / (((n - 1) / 2) + 1)
def ensemble(x, epsilon):
    S = U(0)
    L = [0]
    i_positif = 2
    i_negatif = 1
    sommes_partielles = [S]
    while abs(S - x) > epsilon:
      if S < x:
        S += U(i_positif)
        L.append(i_positif)
        i_positif += 2
      else:
        S += U(i_negatif)
        L.append(i_negatif)
        i_negatif += 2
      sommes_partielles.append(S)
    return L, np.sum([U(L[i]) for i in range(len(L))]), sommes_partielles
# Exemple d'utilisation
x = 2
epsilon = 0.05
L, somme, sommes_partielles = ensemble(x, epsilon)
print("Sous-partie de Σ :", L)
print("Somme des éléments :", somme)
  # Représentation graphique
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(sommes_partielles, marker='o', linestyle='-')
plt.axhline(y=x, color='r', linestyle='--', label=f'Target value: {x}')
plt.fill_between(range(len(sommes_partielles)), x - epsilon, x + epsilon, color='gray', alpha=0, label=f'Range: [{x-epsilon}, {x+epsilon}]')
plt.title('Convergence des sommes partielles')
plt.xlabel('Nombre de termes')
plt.ylabel('Somme partielle')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

Figure – Code du Théorème de réarrangement de Riemann

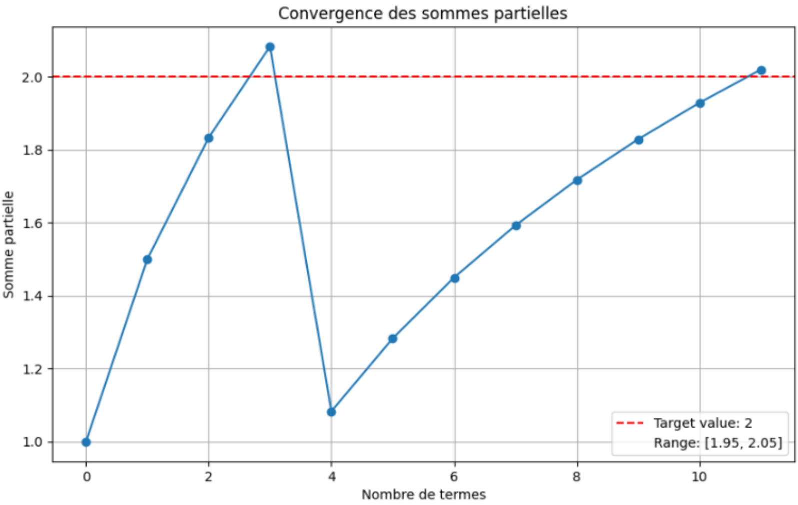

Figure – Exemple de résultat obtenue avec le code précédent

Familles sommables et convergence absolue

Définition

- Soit Σ un sous ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que Σ est sommable et a pour somme $S \in \mathbb{R}$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe une partie finie $\Sigma\epsilon \subset \Sigma$ tel que pour toute partie finie Σ_0 telle que $\Sigma\epsilon \subset \Sigma_0$.
$$\left|S - \sum_{x\in\Sigma_0} x\right| \leq \epsilon$$

Porpiriété

- Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont la série est absolument convergente. Nous allons montrer que Σ=$\{U_n; n \in \mathbb{N}\}$ est sommable et a pour somme S=$\sum_{k=0}^{\infty} u_k$.

Familles sommables et convergence absolue

Traitons le cas ou $(U_k) \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, tel que :

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} U_k = S$$

pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\left|\sum_{k=0}^{N_0} U_k - S\right| \leq \epsilon$$

on sait que comme la série est convergente, le reste converge vers 0 :
$R_n = \sum_{k=N+1}^{\infty} U_k$ vérifie :

$$\lim_{N\to\infty} R_n = 0$$

Donc $|R_n| \leq \epsilon$. Soit $\Sigma_\epsilon = \{U_0, \dots, U_{N0}\}$ tel que :

$$\left|\sum_{x\in\Sigma_\epsilon} - S\right| \leq \epsilon$$

Montrons à présent que cela est aussi vrai pour $\Sigma_0 \subset \mathbb{N}$ tel que Σ_0 est finie et que $\Sigma_\epsilon \subset \Sigma_0$. Σ_0 est finie donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\Sigma_0 \subset \{0, 1, 2, \dots, N\}$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{N_0} U_k \leq \sum_{x\in\Sigma_0} x \leq \sum_{k=0}^{N} U_k \leq S$$

Famille sommable et dénombrement

Porpiriété

- Soit Σ une partie sommable. Alors il existe $A > 0$ tel que pour toute famille finie $\Sigma_0 \subset \Sigma$:

$$\sum_{x \in \Sigma_0} |x| \leq A$$

Soit Σ une famille sommable et soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $\Sigma_n = \{x \in \Sigma : |x| > \frac{1}{n}\}$, montrons que Σ_n ne peut pas avoir une infinité de nombres positifs ou négatifs. Raisonnons par l'absurde :
Il existe A tel que pour tout Σ_0 finie,

$$\sum_{x \in \Sigma_0} |x| \leq A$$

Supposons Σ_n infini. Pour tout Σ_0 finie tel que $\Sigma_0 \subset \Sigma_n$,

$$\sum_{x \in \Sigma_0} \frac{1}{n} \leq \sum_{x \in \Sigma_0} |x| \leq A$$

Or,

$$\sum_{x \in \Sigma_0} \frac{1}{n} = \frac{card(\Sigma_0)}{n} \text{ et } \mathrm{card}(\Sigma_0) = +\infty$$

Et $A < +\infty$ donc :

$$A < \sum_{x \in \Sigma_0} \frac{1}{n} \leq \sum_{x \in \Sigma_0} |x| \leq A$$

Famille sommable et dénombrement

Déduisons de cela que Σ est dénombrable. on sait que $\Sigma_n = \{x \in \Sigma : |x| > \frac{1}{n}\}$ et que :

$$\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \ldots \cup \Sigma_n$$

Σ est donc l'union dénombrable des Σ_n, $n \in \mathbb{N}$:

$$\Sigma = \cup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$$

Et les Σ_n sont dénombrables donc, par union d'ensemble dénombrable, Σ l'est aussi. Pour le cas avec $0 \in \Sigma$:

$$\Sigma = \{0\} \cup \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \ldots \cup \Sigma_n$$

$\{0\}$ est dénombrable donc Σ l'est toujours aussi.

Familles sommables → convergence absolue

propriété

Soit U_n une série avec des termes ≥ 0 converge si et seulement si ses sommes partielles sont majorée.

Soit Σ une partie sommable, il existe $A > 0$ tel que pour toute famille finie $\Sigma_0 \subset \Sigma$,

$$\sum_{x \in \Sigma_0} |x| \leq A$$

Posons $\Sigma_0 = \{U_0, U_1, .., U_n\}$ donc :

$$\sum_{x \in \Sigma_0} |x| = \sum_{k=0}^{n} |U_n| \leq A$$

Dans notre cas $|U_k| \geq 0, k \in \mathbb{N}$ et les sommes partielles de Σ sont majorées, donc (U_n) converge absolument.