普通高等教育"十五"国家级规划教材

(高职高专教育)

线性代数

(第二版)

钱椿林　编

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育"十五"国家级规划教材，是根据教育部最新制定的

基本要求》 工作。

本书从高职高专教育的特点和要求出发，以线性方程组为主线，以矩阵作为工具，使线性代数的基本概念、基本理论、基本方法围绕着线性方程组展开，突出重点，突出对学生计算能力的培养，并注重解题方法的归纳和总结。各章均配有典型的例题及习题，便于学生巩固所学内容。

全书内容包括行列式、矩阵、线性方程组、相似矩阵与二次型等。

本书可作为高等专科学校、高等职业学校、成人高等学校及本科院校举办的二级职业技术学院工科各专业线性代数课程的教材，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目

线性代数/ 钱椿林编．—2 版．—北京：高等教育出版社，2004.4

ISBN 7-04-014704-1

术学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字

策划编辑 蒋 青 责任编辑 杨芝馨 封面设计 杨立新

责任绘图 版式设计 范晓红 责任校对 王 雨

责任印制

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷			
		版　　次	2000 年 7 月第 1 版
开　　本	787×1092 1/16		年 月第 2 版
印　　张	10	印　　次	年 月第 次印刷
字　　数	240 000	定　　价	12.10 元

出　版　说　明

为加强高职高专教育的教材建设工作，2000 年教育部高等教育司颁发了
专教育教材建设的若干意见》
版 500 本左右高职高专教育规划教材”的目标，并将高职高专教育规划教材的建设工作分为两步实施：先用 2 至 3 年时间，在继承原有教材建设成果的基础上，充分汲取近年来高职高专院校在探索培养高等技术应用性专门人才和教材建设方面取得的成功经验，解决好高职高专教育教材的有无问题；然后，再用 2 至 3 年的时间，在实施
教学内容体系改革与建设项目计划》
专教育教材。根据这一精神，有关院校和出版社从 2000 年秋季开始，积极组织编写和出版了一批“教育部高职高专规划教材”。这些高职高专规划教材是依据 1999 年教育部组织制定的

案)
部高职高专规划教材建设工作的第一步。

2002 年教育部确定了普通高等教育“十五”国家级教材规划选题，将高职高专教育规划教材纳入其中。“十五”国家级规划教材的建设将以“实施精品战略，抓好重点规划”为指导方针，重点抓好公共基础课、专业基础课和专业主干课教材的建设，特别要注意选择一部分原来基础较好的优秀教材进行修订使其逐步形成精品教材；同时还要扩大教材品种，实现教材系列配套，并处理好教材的统一性与多样化、基本教材与辅助教材、文字教材与软件教材的关系，在此基础上形成特色鲜明、一纲多本、优化配套的高职高专教育教材体系。

普通高等教育“十五”国家级规划教材
校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用。

教育部高等教育司

2002 年 11 月 30 日

第二版说明

在本教材的修订过程中吸取了广大读者的宝贵意见和我们教学实践中的经验与体会，对内容主要作了如下的改动：

1. 在第 1 章中增加和改动一些例题。

2. 在第 2 章中增加了矩阵方程的内容；抽象矩阵求逆的方法；分块矩阵作为需要掌握的内容；删去了四阶矩阵求逆的例题。

3. 在第 3 章中增加了有关向量组的内容和解线性方程组的具体步骤。

4. 在第 4 章增加了判断二次型负定的内容；删去了用正交矩阵对四阶对称矩阵进行对角化的例题；删去了用正交变换化二次型为标准形的较繁的例题和内容。

5. 对于带“ * ”号的第 4 章内容，有关专业可选学，一般不作教学要求。带“ * ”号习题不作要求。

苏州广播电视大学俞泳薇教授仔细审阅了全稿，提出了许多保贵意见，陈洁老师在文稿整理中做了大量工作，高等教育出版社的编辑为本教材的编写出版付出了大量的时间和精力，在此一并致谢。

限于作者水平，书中不当和疏漏之处，敬请读者不吝指正。

编者

2003 年 12 月

第一版前言

本书是教育部高职高专规划教材，是根据教育部“三教统筹”的精神，以最新制定的
职高专教育线性代数课程教学基本要求》

在本书编写过程中，作者结合多年从事线性代数课程教学、科研的体会，遵循高职高专教材的编写原则，以“必需、够用”为度，概念和结论的引入由具体到抽象、由特殊到一般，适当减少个别结论的推导与证明，力求通俗易懂，深入浅出；以线性方程组为主线，以矩阵作为工具，注重解题方法的归纳，突出重点，分散难点，使之易教易学；在讲清基本概念的基础上，引导学生进行归纳、对比和思考，突出对学生计算能力、逻辑思维能力和推理能力的培养。全书内容可在 27 学时内授完。

书中带“ * ”号的内容，可不作为教学要求，学生可根据具体情况，自行选学。

本书由北华大学杜忠复教授主审。

本书在编写过程中，得到了有关方面的大力支持。苏州广播电视大学的陈洁老师给予了大力协助和帮助。高等教育出版社的编辑为本教材的编写出版付出了大量的时间和精力，在此一并致谢。

由于编者水平有限，书中难免有不足之处，诚恳地希望读者批评指正。

编者

2000 年 1 月于苏州

目　录

第 1 章　行　列　式

行列式在线性代数中是一个基本工具，研究许多问题都需要用到它，比如线性方程组、矩阵、矩阵的特征值、二次型等．在初等代数中，为了便于求解二阶和三阶线性方程组，引进了二阶行列式和三阶行列式．为了研究一般的 n 元线性方程组，需要把二阶、三阶行列式加以推广．本章我们将讨论 n 阶行列式的概念、基本性质及其应用，还将介绍常用的几种计算 n 阶行列式的方法和用行列式解线性方程组的一种重要方法——克拉默法则．

1.1　n 阶行列式的定义

1.1.1　二阶和三阶行列式

行列式这一概念究竟如何形成的呢？这就得从求解方程个数和未知量个数相等的一次

在初等代数中，求解二元一次方程组

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

时，曾将 x_1 和 x_2 的 4 个系数组成的算式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 简记成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

即有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

这个符号称为二阶行列式，其中的数 $a_{ij}(i = 1,2; j = 1,2)$
横排称为行列式的行，每个竖排称为行列式的列．a_{ij} 的第 1 个下标 i 表示它位于自上而下的第 i 行，第 2 个下标 j 表示它位于从左到右的第 j 列，即 a_{ij} 是位于行列式第 i 行与第 j 列相交处的一个元素．

对于线性方程组

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.1.2}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - a_{12} b_2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - b_1 a_{21}$$

其中

当 $\Delta \neq 0$ 时，易验证

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \tag{1.1.3}$$

由此可见，二元一次方程组的解可以用未知量 x_1，x_2 的系数和常数项所组成的二阶行列式来表示．

类似地，为了简单地表达三元一次方程组

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 &= b_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 &= b_3 \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

的解，我们引进三阶行列式的概念．三阶行列式的展开式规定为:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= {}^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + {}^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + {}^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) \quad a_{12}(a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}) \quad a_{13}(a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}) \\ &= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

所以，三阶行列式也是一个数值，它通过转化为二阶行列式来计算．

例 1.1.1 计算行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 6 & 8 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

解 利用三阶行列式展开式，得

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \end{aligned}$$

三阶行列式可以用来解三元一次方程组．若分别记三阶行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

如果方程组

示为:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\qquad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\qquad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}\tag{1.1.6}$$

在方程组 x_i ($i=1,2,3$)

数行列式Δ, x_i 的分子是把系数行列式Δ的第 i 列换成方程组

其余列不动所得到的行列式, 可简记为 Δ_i ($i=1,2,3$)

例 **1.1.2** 解方程组

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3&=2\\ -2x_1+x_2-x_3&=-1\\ x_1+3x_2-x_3&=-2 \end{aligned}$$

解 方程组的系数行列式为

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&1\\-2&1&-1\\1&3&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1\\3&-1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-2&-1\\1&-1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-2&1\\1&3\end{vmatrix}=-11\neq0$$

又计算得

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}2&2&1\\-1&1&-1\\-2&3&-1\end{vmatrix}=5,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}1&2&1\\-2&-1&-1\\1&-2&-1\end{vmatrix}=-2,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}1&2&2\\-2&1&-1\\1&3&-2\end{vmatrix}=-23$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-\frac{5}{11},\qquad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{2}{11},\qquad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{23}{11}$$

显然, 对于未知数个数等于方程个数的二、三元线性方程组, 当它们的系数行列式不等于零时, 利用行列式这一工具求解十分简便, 结果也容易记忆. 我们自然联想到, 对于未知数个数等于方程个数的 n 元 $n>3$)

这就需要引入 n 阶 $n>3$)

1.1.2 *n* 阶行列式

在上面的讨论中, 是将三阶行列式转化为二阶行列式来计算. 下面, 循此思路给出 n 阶行列式的递归法定义.

定义 1.1.1 将 n^2 个数排列成 n 行 n 列

各加一竖线, 记为 D_n, 即

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

称为 ***n*** 阶行列式, 它代表一个由确定的运算关系所得到的数. 当 $n=2$ 时,

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

当 $n > 2$ 时,

$$D_n = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}$$

其中数 a_{ij}称为第 i 行第 j 列的元素,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

称为 a_{ij}的代数余子式; M_{ij}为由 D_n 划去第 i 行和第 j 列后余下元素构成的 $n-1$ 阶行列式, 即

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称 M_{ij}为 a_{ij}的余子式 .

例如, 四阶行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 6 & 1 \\ -6 & 8 & -1 & 0 \\ 9 & -4 & -8 & 5 \\ -3 & -2 & 5 & 8 \end{vmatrix}$$

中, 元素 a_{23}的余子式即为划去第 2 行和第 3 列元素后的三阶行列式

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 9 & -4 & 5 \\ -3 & -2 & 8 \end{vmatrix}$$

元素 a_{23}的代数余子式即为余子式 M_{23}前再加一个符号因子

$$A_{23} = \quad {}^{2+3}M_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 9 & -4 & 5 \\ -3 & -2 & 8 \end{vmatrix}$$

从定义 1.1.1 知道, 一个 n 阶行列式代表一个数值, 这个数值是第 1 行所有元素与其相应的代数余子式乘积之和 . 我们常将这定义简称为 n 阶行列式按第 1 行展开 .

例 1.1.3 计算三阶行列式

$$D_3 = \begin{vmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

解 由定义

$$D_3 = \quad {}^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + \quad {}^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 1\cdot \quad {}^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$= 24 - 84 + 12 = -48$

例 1.1.4 计算四阶行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & -5 \\ -4 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 5 & 7 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

解 由定义

$$D_4 = 3\cdot \qquad {}^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 7 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix} + \qquad {}^{1+4}\begin{vmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 7 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \quad 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \quad +$$

$$5 \quad (-4)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3$$

由此题的计算看到, 第 1 行的零元素越多, 按第 1 行展开时计算就越简便 .

1.1.3 几种特殊的行列式

下面利用行列式的定义来计算几种特殊的 n 阶行列式 .

1. 对角行列式

只是对角线上有非零元素的行列式称为对角行列式 .

例 1.1.5 证明对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \tag{1.1.7}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \qquad {}^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \tag{1.1.8}$$

其中行列式 $\lambda_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$

上的元素是 $\lambda_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$

证 对于行列式 n 阶行列式的定义依次降低其阶数, 则得

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_1\lambda_2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} \lambda_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \cdots = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

对于行列式 λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_n **依次在第** n, $n-1$, $\cdots$, 2, 1 **列，故有**

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \lambda_1(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_3 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_1(-1)^{1+n}\cdot\lambda_2(-1)^{1+n-1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_4 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = {}^{1+n}\cdot(-1)^{1+n-1}\cdot\cdots\cdot(-1)^{1+2}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$= {}^{(n-1)+\frac{(2+n)(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = {}^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

2. **下**

主对角线以上 下(上)三角行列式 .

例 1.1.6　**试证下三角行列式**

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \cdots & a_{n-1\,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \qquad (1.1.9)$$

证　**利用** n **阶行列式的定义，依次降低其阶数，每次都仅一项不为零，故有**

$$D_n = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = a_{11}(-1)^{1+1} \cdot a_{22}(-1)^{1+1} \cdots a_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

3. 一个重要的行列式公式

例 1.1.7 证明:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & c_{22} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

证 对等式左边行列式按第 1 行展开, 得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & c_{22} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ c_{12} & b_{11} & b_{12} \\ c_{22} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & 0 & 0 \\ c_{11} & b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} - a_{12} a_{21} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

所以等式成立.

一般地, 可以用数学归纳法证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1s} & b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ c_{t1} & \cdots & c_{ts} & b_{t1} & \cdots & b_{tt} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \cdots & & \cdots \\ b_{t1} & \cdots & b_{tt} \end{vmatrix} \quad (1.1.10)$$

习题 1.1

1. 计算下列行列式

($\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{vmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

2. 利用 3 阶行列式解三元一次方程组

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 &= -9 \end{aligned}$$

3. 写出下面行列式中元素 a_{32} 的余子式及代数余子式

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 8 & 5 & 4 \\ 9 & -3 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

4. 写出下面行列式中元素 a_{13} 的余子式及代数余子式

$$\begin{vmatrix} a & b & -c & 4 \\ b & -a & 3 & 6 \\ c & 5 & -6 & a \\ b & -3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

5. 由定义计算行列式

$$\begin{vmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

6. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 9 & -6 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 6 & -7 \end{vmatrix}$$

1.2　*n* 阶行列式的性质与计算

1.2.1　*n* 阶行列式的性质

从行列式的定义出发直接计算行列式是比较麻烦的. 为了简化 n 阶行列式的计算, 我们将进一步讨论 n 阶行列式, 下面介绍 n 阶行列式的一些基本性质.

将行列式 D 的行、列互换后, 得到新的行列式称为 D 的转置行列式, 记为 D^{T}, 即, 如果

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1.2.1　行列式与它的转置行列式相等，即 $D = D^{\mathrm{T}}$.

对于二阶行列式可由定义直接验证：

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$D_2^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = D_2$$

对于 n 阶行列式则可用数学归纳法予以证明，此处从略 .

这个性质说明了行列式中行、列地位的对称性，凡是行列式对行成立的性质对列也成立 .

例 1.2.1　验算下列行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等 . 设

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

解

$$D = 3\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -66 - 15 + 10 = -71$$

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ -5 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = -66 - 17 + 12 = -71$$

所以 $D = D^{\mathrm{T}}$.

例 1.2.2　证明：上三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证　由性质 1.2.1，得

$$D = D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

从下三角行列式公式　$D^{\mathrm{T}} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，故有 $D = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

这个例子说明：上、下三角行列式的值都等于主对角线上元素的乘积 .

性质 1.2.2　互换行列式的任意两行(列)

如对二阶行列式

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

交换两行，有

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}=a_{21}a_{12}-a_{22}a_{11}=-D_2$$

对于 n 阶行列式也可用数学归纳法证明，此处从略．

例 1.2.3　设

$$D=\begin{vmatrix} 4 & 26 & 1 \\ 3 & 54 & 2 \\ -2 & 31 & 1 \end{vmatrix}=-13$$

互换第 1 行与第 3 行后，得

$$D=\begin{vmatrix} -2 & 31 & 1 \\ 3 & 54 & 2 \\ 4 & 26 & 1 \end{vmatrix}$$

由性质 1.2.2 知，一定有

$$D=-D=13$$

例 1.2.4　计算

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -6 & 8 & 5 \\ 0 & 5 & 3 & -1 & 4 \\ -8 & 5 & 0 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & -6 & 8 & 5 \\ 6 & 7 & -2 & -3 & 9 \end{vmatrix}$$

解　注意到 D 中第 1 行和第 4 行是相同的，因此将这相同的两行互换，其结果仍是 D，而由性质 1.2.2 可知交换两行的结果为 $-D$．因此，$D=-D$，即 $D=0$．

推论　如果行列式有两行(列)的对应元素相同，则这个行列式等于零．

性质 1.2.3　n 阶行列式等于任意一行

积之和，即

$$D_n=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$D_n=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

性质 1.2.3 说明了行列式可按任一行

例 1.2.5　计算下列行列式

$$D=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & 2 & 7 & 8 & 10 \\ 4 & 0 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解　注意到第 2 列有 4 个零元素，可利用性质 1.2.3 按第 2 列展开：

$$D = 2\cdot {}^{3+2}\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

对上面的四阶行列式可按第 4 行展开

$$D = -2\cdot 6 \quad {}^{4+2}\begin{vmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & -6 & 0 \end{vmatrix}$$

再按第 3 列展开，可得

$$D = -12\cdot 7\cdot \quad {}^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 840$$

从而看到，行列式不仅可以按第 1 行展开，它可以按任一行
式的某一行
结果都是相等的 .

性质 1.2.4　n 阶行列式中任意一行
余子式的乘积之和等于零 . 即当 $i\neq k$ 时，有

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = 0$$

证　在 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } k \text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

中将第 i 行的元素都换成第 k $(i\neq k)$

$$D_0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } k \text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

显然，D_0 的第 i 行的代数余子式与 D 的第 i 行的代数余子式是完全一样的 . 将 D_0 按第 i 行展开，得

$$D_0 = a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in}$$

因为 D_0 中有两行元素相同，所以 $D_0 = 0$. 因此

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = 0 \quad (i\neq k)$$

由性质 1.2.3 **和性质** 1.2.4，**我们得到如下结论**:

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{cases}D_n, & k=i\\ 0, & k\neq i\end{cases}\tag{1.2.1}$$

或

$$a_{1s}A_{1j}+a_{2s}A_{2j}+\cdots+a_{ns}A_{nj}=\begin{cases}D_n, & s=j\\ 0, & s\neq j\end{cases}\tag{1.2.2}$$

性质 1.2.5　将行列式某一行(列) λ，**等于以数** λ **乘此行列式，即**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ \lambda a_{k1} & \lambda a_{k2} & \cdots & \lambda a_{kn}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

证　由性质 1.2.3 **将上式左右两边的行列式分别按第** k **行展开，注意到它们第** k **行元素的代数余子式是对应相同的，均为** A_{k1}，A_{k2}，…，A_{kn} . **于是**

$$\text{左边}=\lambda a_{k1}A_{k1}+\lambda a_{k2}A_{k2}+\cdots+\lambda a_{kn}A_{kn}$$
$$=\lambda\ \ a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+\cdots+a_{kn}A_{kn})$$

由性质 1.2.5 **可得到如下两个推论**:

推论 1.2.1　行列式某一行(列)

外面 .

推论 1.2.2　行列式中如果有两行(列)

性质 1.2.6　如果行列式中某一行(列)

两个行列式的和，而且这两个行列式除了这一行

的对应元素相同，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ b_{k1}+c_{k1} & b_{k2}+c_{k2} & \cdots & b_{kn}+c_{kn}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kn}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

证　将上述 3 **个行列式分别按第** k **行展开，并注意到它们第** k **行元素的代数余子式都是相同的** . **于是有**

$$\text{左边}=\ \ b_{k1}+c_{k1})A_{k1}+(b_{k2}+c_{k2})A_{k2}+\cdots+(b_{kn}+c_{kn})A_{kn}$$
$$=(b_{k1}A_{k1}+b_{k2}A_{k2}+\cdots+b_{kn}A_{kn})+(c_{k1}A_{k1}+c_{k2}A_{k2}+\cdots+c_{kn}A_{kn})$$

例 1.2.6　计算下列行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 6\\ 0 & 2 & 7 & 8\\ 6 & -2 & 2 & 13\\ 0 & 0 & -2 & 0\end{vmatrix}$$

解　利用性质 1.2.6，将行列式 D 分解为两个行列式的和，即

$$D=\begin{vmatrix}3&-1&4&6\\0&2&7&8\\6+0&-2+0&8-6&12+1\\0&0&-2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-1&4&6\\0&2&7&8\\6&-2&8&12\\0&0&-2&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&-1&4&6\\0&2&7&8\\0&0&-6&1\\0&0&-2&0\end{vmatrix}$$

上式右边是 2 个行列式的和，第 1 个行列式的第 1 行与第 3 行成比例，所以第 1 个行列式为 0；把第 2 个行列式的第 3 列与第 4 列交换，得

$$D=0+\begin{vmatrix}3&-1&6&4\\0&2&8&7\\0&0&1&-6\\0&0&0&-2\end{vmatrix}=12$$

性质 1.2.7　将行列式的某一行(列)　λ后，再加到另一行

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_{k1}&a_{k2}&\cdots&a_{kn}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_{k1}+\lambda a_{i1}&a_{k2}+\lambda a_{i2}&\cdots&a_{kn}+\lambda a_{in}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

证　由性质 1.2.6，上式右边可表示为

$$\text{右边}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_{k1}&a_{k2}&\cdots&a_{kn}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\\lambda a_{i1}&\lambda a_{i2}&\cdots&\lambda a_{in}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

又由性质 1.2.5，上式右边第 2 个行列式为

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\\lambda a_{i1}&\lambda a_{i2}&\cdots&\lambda a_{in}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=0$$

所以原式右边 = 左边 .

今后用记号“ⓘ· λ”表示将第 i 行　　　λ; “　(ⓘ,ⓙ)　　　　　i 行
第 j 行　　　　　ⓚ + ⓘ· λ”表示将第 i 行　　λ后加到第 k 行
行的变换写在等号上方，把对列的变换写在等号下方 .

例 **1.2.7**　计算下列行列式

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1 & 4 & -1\\ 3 & 1 & 2 & -3\\ 1 & 2 & 3 & -2\\ 5 & 0 & 6 & -2\end{vmatrix}$$

解　利用性质 1.2.2 与性质 1.2.7，得

$$D\ \underset{(①,②)}{}\ -\begin{vmatrix}1 & 2 & 4 & -1\\ 1 & 3 & 2 & -3\\ 2 & 1 & 3 & -2\\ 0 & 5 & 6 & -2\end{vmatrix}\ \overset{\substack{②+①\cdot\\ ③+①\cdot}}{}\ -\begin{vmatrix}1 & 2 & 4 & -1\\ 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & -3 & -5 & 0\\ 0 & 5 & 6 & -2\end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{③+②\cdot 3\\ ④+②\cdot}}{}\ -\begin{vmatrix}1 & 2 & 4 & -1\\ 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & -11 & -6\\ 0 & 0 & 16 & 8\end{vmatrix}\ \overset{④+③\cdot}{}\ -\begin{vmatrix}1 & 2 & 4 & -1\\ 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & -11 & -6\\ 0 & 0 & 0 & -8/11\end{vmatrix}$$

$$= -1\times 1\times \qquad -\frac{8}{11} = -8$$

1.2.2　*n* 阶行列式的计算

一般地说，计算行列式的方法比较多，综合性较强，计算较困难 . 但是我们还是可以总结出一些方法，主要有：利用行列式的性质；利用行列式的展开式；利用递推公式和加“边”等方法 . 一般是综合运用这些方法来计算行列式 . 下面我们举例加以说明 .

计算数字行列式的基本方法是，利用行列式的性质，把行列式化为上
列式，而由前面

例 **1.2.8**　计算

$$D=\begin{vmatrix}-2 & 3 & -8/3 & -1\\ 1 & -2 & 5/3 & 0\\ 4 & -1 & 1 & 4\\ 2 & -3 & -4/3 & 9\end{vmatrix}$$

解　为了避免分数运算，先对第 3 列提取公因子 1/3，并设法将 D 化为上三角形行列式 . 同样，为了计算简单，最好把第 1 行第 1 列的元素变成 1
法可利用行列式的性质，将第 1 列与第 4 列互换实现 . 若第 1 行第 1 列的元素为零元素，则可通过行

$$D \xlongequal{(①,④)} -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} -1 & 3 & -8 & -2 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 4 \\ 9 & -3 & -4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[④+①\cdot 9]{③+①\cdot 4} -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} -1 & 3 & -8 & -2 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 11 & -29 & -4 \\ 0 & 24 & -76 & -16 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(②,④)} \frac{1}{3}\begin{vmatrix} -1 & -2 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & -4 & -29 & 11 \\ 0 & -16 & -76 & 24 \end{vmatrix} \xlongequal[④+②\cdot 16]{③+②\cdot 4} \frac{1}{3}\begin{vmatrix} -1 & -2 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[④\cdot]{③\cdot} 4\begin{vmatrix} -1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal{(③,④)} -4\begin{vmatrix} -1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{④+③\cdot 3} -4\begin{vmatrix} -1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} =$$

正如例 1.2.5 所讲到的，为使行列式便于计算，可选择零元素最多的行
后按这行
化为零，然后再展开 .

例 1.2.9　计算

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

解　注意到 D **的第 4 行零元素有 2 个，在按第 4 行展开之前还可化简** D .

$$D \xlongequal{④+②} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第 4 行展开}} (-1)^{4+2}\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[②+③\cdot]{①+③\cdot 2} \begin{vmatrix} 0 & 11 & 4 \\ 0 & -5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第 1 列展开}} (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 11 & 4 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 31$$

例 1.2.10　计算

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -a_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解　根据 D_4 **元素的规律，可将第 4 列加至第 3 列，然后将第 3 列加至第 2 列，**

再将第 2 列加至第 1 列，目的是使 D_4 中的零元素增多 .

$$D_4 \xrightarrow{③+④} \begin{vmatrix} a_1 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{②+③} \begin{vmatrix} a_1 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{①+②} \begin{vmatrix} 0 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第 1 列展开}} 4 \quad {}^{4+1} \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 \end{vmatrix} = 4a_1a_2a_3$$

根据上述四阶行列式的计算规律，一般地，我们可以归纳得到：

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_1 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & -a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1+n)a_1a_2\cdots a_n$$

例 1.2.11　计算

$$D_4 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

解　这个行列式的特点是各行　　　　　　　　　　　　　　　$a+3$. 故可把第 2、3、4 列同时加到第 1 列，提出公因子 $a+3$，然后各行减去第 1 行，得

$$D_4 \xrightarrow{\substack{①+② \\ ①+③ \\ ①+④}} \begin{vmatrix} a+3 & 1 & 1 & 1 \\ a+3 & a & 1 & 1 \\ a+3 & 1 & a & 1 \\ a+3 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{②+①\cdot(-1) \\ ③+①\cdot(-1) \\ ④+①\cdot(-1)}} (a+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+3) \quad a-1)^3$$

根据上述四阶行列式的计算规律，一般地，我们可以归纳得到：

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix} = (a+n-1)(a-1)^{n-1}$$

例 1.2.12　计算

$$D_4=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1+a_2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+a_3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1+a_4\end{vmatrix}$$

其中 $a_i\neq 0\ (i=1,2,3,4)$

解　运用加“边”法，把 D_4 增加一行与一列，变成5阶行列式，且使其值不变，这种方法称为加“边”法，然后利用行列式的性质进行计算.

$$D_4=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1+a_1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1+a_2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1+a_3 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1+a_4\end{vmatrix}\overset{\substack{②+①\cdot(-1)\\ ③+①\cdot(-1)\\ ④+①\cdot(-1)\\ ⑤+①\cdot(-1)}}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & a_1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & a_2 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & a_3 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & a_4\end{vmatrix}$$

再将上述第2个行列式中第2，3，4，5列分别乘以 a_1^{-1}，a_2^{-1}，a_3^{-1}，a_4^{-1} 加到第1列，则有

$$D_4=\begin{vmatrix}1+\sum\limits_{i=1}^{4}a_i^{-1} & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4\end{vmatrix}=a_1a_2a_3a_4\left(1+\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{a_i}\right)$$

根据上述四阶行列式的计算规律，一般地，我们可以归纳得到:

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$$

某些有规律的行列式，有时可用递推公式来计算.

例1.2.13　计算

$$D_5=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

解　观察 D_5 的元素可知，D_5 具有某种“对称性”. 若将 D_5 按第1列展开可得

$$D_5 = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

上述等式右面第 2 个行列式按第 1 行展开，即为

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

由此得到递推公式

$$D_5 = 2D_4 - D_3$$

反复运用上式，可得

$$\begin{aligned} D_5 &= 2D_4 - D_3 = 2(2D_3 - D_2) - D_3 = 3D_3 - 2D_2 \\ &= 3(2D_2 - D_1) - 2D_2 = 4D_2 - 3D_1 = 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\times 2 = 6 \end{aligned}$$

根据上述五阶行列式的计算规律，一般地，我们可以归纳得到：

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} = n + 1$$

例 1.2.14　证明 n 阶范德蒙德行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(x_i - x_j) \qquad (1.2.3)$$

证　对其行列式的阶数 n 用数学归纳法．

第 1 步，$n=2$ 时，计算二阶范德蒙德行列式的值：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$

可见 $n=2$ 时，结论成立．

第 2 步，假设对于 $n-1$ 阶范德蒙德行列式，结论成立．我们对 n 阶范德蒙德行列式进行如下计算：把第 $n-1$ 行的　　x_1)　　　　n 行，再把第 $n-2$ 行的　　x_1)　　$n-1$ 行，如此继续，最后把第 1 行的　　x_1)

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_1 x_2 & x_3^2 - x_1 x_3 & \cdots & x_n^2 - x_1 x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & x_2^{n-2} - x_1 x_2^{n-3} & x_3^{n-2} - x_1 x_3^{n-3} & \cdots & x_n^{n-2} - x_1 x_n^{n-3} \\ 0 & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} & x_3^{n-1} - x_1 x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)\ x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)D_{n-1}$$

D_{n-1}是一个 $n-1$ 阶范德蒙德行列式，由归纳假设得

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{2 \le j < i \le n}(x_i - x_j)$$

于是上述 n 阶范德蒙德行列式

$$D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\prod_{2 \le j < i \le n}(x_i - x_j) = \prod_{1 \le j < i \le n}(x_i - x_j)$$

根据数学归纳法，对于一切 $n \geq 2$，式

上面我们简要地介绍了常见的计算行列式的方法，在具体计算之前，应注意观察所给的行列式是否有某些特点，然后考虑能否利用这些特点采取相应的方法以达到简化计算的目的．在计算以字母作元素的行列式时，更要注意简化．

综上所述，对于 n 阶行列式的计算，可以归纳出如下几种方法:

1. 对二、三阶行列式按定义展开，直接计算．

2. 对特殊的行列式，如上

3. 利用 n 阶行列式定义，按某一行

$$D_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

或

$$D_n = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

将行列式转化成低一阶行列式，如此反复下去，直至降到三阶或二阶行列式，再直接

计算 .

4. 利用性质 1.2.7 把行列式转化成上三角行列式，其主对角线元素的乘积即为行列式的值，这是计算 n 阶数字行列式常用的基本方法 .

5. 观察 n 阶行列式所具有的特点，首先计算四、五阶行列式，根据情况利用行列式的性质、行列式的展开式、递推公式以及加“ 边 ”等方法，或者上述方法的综合运用来进行计算，然后，推而广之，计算其 n 阶行列式 . 这是计算一般 n 阶行列式常用的最佳方法 .

习题 1.2

1. 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 7 & 10 & 13 \\ 8 & 11 & 14 \\ 9 & 12 & 15 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} ae & ac & -ab \\ de & -cd & bd \\ -ef & cf & bf \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} x+y & y & x \\ x & x+y & y \\ y & x & x+y \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$　$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

2. 证明下列等式

$$\begin{vmatrix} x_1+y_1 & y_1+z_1 & z_1+x_1 \\ x_2+y_2 & y_2+z_2 & z_2+x_1 \\ x_3+y_3 & y_3+z_3 & z_3+x_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

(　$\begin{vmatrix} y & x & x \\ x & y & x \\ x & x & y \end{vmatrix} = (2x+y)(x-y)^2$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)(x_4-x_3)$

上述行列式称为四阶范德蒙德行列式 .

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (c+3)^2 \end{vmatrix} = 0$$

3. 计算下列行列式

($\begin{vmatrix} 5/6 & -4/3 & 4/3 & 14/3 \\ 1 & -2 & 3/2 & 8 \\ 3/2 & 4 & -1 & -10 \\ 2/5 & -4/5 & 1/2 & 12/5 \end{vmatrix}$

($\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$，其中 $ab\neq 0$

($D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$

$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n-1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & n \end{vmatrix}$

1.3 克拉默法则

1.3.1 克拉默法则

n阶行列式的概念是二、三阶行列式的推广，而二、三阶行列式是来源于解线性方程组，今问 n 阶行列式能否用来解 n 个未知数 n 个方程构成的线性方程组？也就是说，用 n 阶行列式来解此类线性方程组时，能否得到与前面类似的解的表达式呢？本节就来回答这个问题 .

设含有 n 个方程、n 个未知数 x_1，x_2，…，x_n 的线性方程组

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

定理 1.3.1 (克拉默 Cramer 法则)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

那么，线性方程组

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta} \tag{1.3.2}$$

其中 $\Delta_j\ (j=1,2,\cdots,n)$ 是把系数行列式 Δ 中第 j 列的元素 a_{1j}，a_{2j}，$\cdots$，a_{nj} 换成方程组右端的常数列 b_1，b_2，$\cdots$，b_n，而其余各列不变所得到的 n 阶行列式，即

$$\Delta_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{1.3.3}$$

证　第 1 步，证明线性方程组

$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}$，$x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}$，$\cdots$，$x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}$代入线性方程组

在第 i　$i=1,2,\cdots,n)$　$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}$，$x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}$，$\cdots$，$x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}$代入后，

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n &= a_{i1}\frac{\Delta_1}{\Delta}+a_{i2}\frac{\Delta_2}{\Delta}+\cdots+a_{in}\frac{\Delta_n}{\Delta} \\ &= \frac{1}{\Delta}\ a_{i1}\Delta_1+a_{i2}\Delta_2+\cdots+a_{in}\Delta_n) \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

把 Δ_1 按第 1 列展开，注意到 Δ_1 除第 1 列外，其余各列的元素都与 Δ 的相应列的元素相同，所以 Δ_1 的第 1 列元素的代数余子式就是 Δ 的第 1 列元素的代数余子式 A_{11}，A_{21}，$\cdots$，A_{n1}，因此

$$\Delta_1=b_1A_{11}+\cdots+b_iA_{i1}+\cdots+b_nA_{n1}$$

同理，把 Δ_2 按第 2 列展开，$\cdots$，把 Δ_n 按第 n 列展开，然后把它们全部代入

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=\frac{1}{\Delta}\ a_{i1}(b_1A_{11}+\cdots+b_iA_{i1}+\cdots+b_nA_{n1})+ \\ a_{i2}(b_1A_{12}+\cdots+b_iA_{i2}+\cdots+b_nA_{n2})+\cdots+a_{in}(b_1A_{1n}+\cdots+b_iA_{in}+\cdots+b_nA_{nn})] \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

利用公式

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=\frac{1}{\Delta}(b_1\cdot 0+\cdots+b_i\cdot\Delta+\cdots+b_n\cdot 0)=\frac{1}{\Delta}b_i\Delta=b_i$$

所以第 i 方程式是恒等式．由于 i 可取 1，2，$\cdots$，n 中的任意一个数，因此我们证明了　$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}$，$x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}$，$\cdots$，$x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}$是线性方程组

第 2 步，证明线性方程组

解 $x_1=d_1$，$x_2=d_2$，$\cdots$，$x_n=d_n$，只要能够证明必有如下表达式

$$d_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad d_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad \cdots,\quad d_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}$$

即可．

因为 $x_1 = d_1, x_2 = d_2, \cdots, x_n = d_n$ 是线性方程组

式中，每个方程就变成了恒等式

$$\left.\begin{aligned} a_{11}d_1 + a_{12}d_2 + \cdots + a_{1j}d_j + \cdots + a_{1n}d_n &= b_1 \\ a_{21}d_1 + a_{22}d_2 + \cdots + a_{2j}d_j + \cdots + a_{2n}d_n &= b_2 \\ &\cdots\cdots \\ a_{n1}d_1 + a_{n2}d_2 + \cdots + a_{nj}d_j + \cdots + a_{nn}d_n &= b_n \end{aligned}\right. \tag{1.3.6}$$

在恒等式　$A_{1j}, A_{2j}, \cdots, A_{nj}$ 乘等式两边，得

$$\begin{aligned} a_{11}A_{1j}d_1 + a_{12}A_{1j}d_2 + \cdots + a_{1j}A_{1j}d_j + \cdots + a_{1n}A_{1j}d_n &= b_1A_{1j} \\ a_{21}A_{2j}d_1 + a_{22}A_{2j}d_2 + \cdots + a_{2j}A_{2j}d_j + \cdots + a_{2n}A_{2j}d_n &= b_2A_{2j} \\ &\cdots\cdots \\ a_{n1}A_{nj}d_1 + a_{n2}A_{nj}d_2 + \cdots + a_{nj}A_{nj}d_j + \cdots + a_{nn}A_{nj}d_n &= b_nA_{nj} \end{aligned}$$

把上述 n 个恒等式相加，并且利用公式

$$0 \cdot d_1 + \cdots + \Delta \cdot d_j + \cdots + 0 \cdot d_n = \Delta_j$$

即

$$\Delta \cdot d_j = \Delta_j$$

因为 $\Delta \neq 0$，所以 $d_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}$。由于在上述证明中 j 可取遍 1，2，…，n，于是得:

$$d_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\quad d_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\quad \cdots,\quad d_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

所以线性方程组

用克拉默法则求解含有 n 个方程、n 个未知数的线性方程组，有两个条件必须满足:

1. 方程组中方程的个数与未知数的个数相等;
2. 方程组的系数行列式不等于零

当一个线性方程组满足上述两个条件时，我们得到以下三个结论:

例 1.3.1　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_3 + 4x_4 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -4 \end{cases}$$

解　由于线性方程组有四个方程、四个未知数，又

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

根据克拉默法则，此线性方程组有唯一解．

因为

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}2&-1&1&-2\\4&0&-1&4\\-1&2&1&0\\-4&2&-1&2\end{vmatrix}=-2,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}1&2&1&-2\\2&4&-1&4\\3&-1&1&0\\-1&-4&-1&2\end{vmatrix}=4$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&-1&2&-2\\2&0&4&4\\3&2&-1&0\\-1&2&-4&2\end{vmatrix}=0,\quad \Delta_4=\begin{vmatrix}1&-1&1&2\\2&0&-1&4\\3&2&1&-1\\-1&2&-1&-4\end{vmatrix}=-1$$

于是此方程组的解是

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=1,\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=-2,\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=0,\quad x_4=\frac{\Delta_4}{\Delta}=\frac{1}{2}$$

用克拉默法则求解含有 n 个方程、n 个未知数的线性方程组，需要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式，计算量是很大的．所以，在一般情况下，我们不采用克拉默法则求解线性方程组．那么，克拉默法则有什么作用呢？它的作用很多，比较重要的有以下两点：

n 个方程、n 个未知数的线性方程组的系数行列式不等于零时，此线性方程组有唯一解．这说明我们只要根据方程组的系数，就能分析出它的解的情况，这说明了计算系数行列式的重要性．

组的唯一解可以用公式

数项之间的依存关系．

在后面的几章中，我们还能看到克拉默法则在理论上的应用．

1.3.2　运用克拉默法则讨论齐次线性方程组的解

当线性方程组(1.3.1)　　b_1，b_2，…，b_n 全为零时，即

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}\tag{1.3.7}$$

线性方程组

对齐次线性方程组　　$_j$ 中第 j 列的元素都是零，所以 $\Delta_j=0(j=1,2,\cdots,n)$．当线性方程组

$$x_j=0\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

全部由零组成的解叫做零解．

于是，我们得到一个结论：

推论 1.3.1 如果齐次线性方程组

零解.

另外，当齐次线性方程组有非零解时，必定有它的系数行列式 $\Delta=0$. 这是齐次线性方程组有非零解的必要条件. 由此我们又得到一个结论：

定理 1.3.2 如果齐次线性方程组

关于齐次线性方程组有非零解的充分条件

去求，将在第 3 章中讨论.

例 1.3.2 已知齐次线性方程组

$$\begin{cases}(5-\lambda)x+2y+2z=0\\2x+(6-\lambda)y=0\\2x+(4-\lambda)z=0\end{cases}\tag{1.3.8}$$

有非零解，问 λ 应取何值？

解 因为方程组的系数行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}5-\lambda&2&2\\2&6-\lambda&0\\2&0&4-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)(2-\lambda)(8-\lambda)$$

由定理 1.3.2 知，若齐次线性方程组

$$(5-\lambda)(2-\lambda)(8-\lambda)=0$$

解得

$$\lambda=2 \text{ 或 } \lambda=5 \text{ 或 } \lambda=8$$

容易验证，当 $\lambda=2$ 或 5 或 8 时，齐次线性方程组 1.3.8)

习题 1.3

1. 用克拉默法则解下列方程组

$$(\quad\begin{cases}x_2+2x_3=1\\x_1+x_2+4x_3=1\\2x_1-x_2=2\end{cases}\qquad\qquad(\quad\begin{cases}2x_1+x_2-5x_3+x_4=8\\x_1-3x_2-6x_4=9\\2x_2-x_3+2x_4=-5\\x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0\end{cases}$$

2. 问：为使齐次线性方程组

$$\begin{cases}ax_1+x_2-x_3=0\\x_1-3x_2+x_3=0\\ax_1-x_2+3x_3=0\end{cases}\qquad\qquad(\quad\begin{cases}x_1+x_2+x_3+ax_4=0\\x_1+3x_2+x_3+x_4=0\\x_1+x_2+4x_3+x_4=0\\x_1+x_2+bx_3+bx_4=0\end{cases}$$

有非零解，a 应为何值，或 a，b 必须满足什么条件？

3. 求二次多项式 $f(x)$ $f(1)=-2$，$f(-1)=10$，$f(2)=-5$.

本章内容提要

1. **n 阶行列式的定义** .
2. **余子式和代数余子式的概念** .
3. **行列式的 7 个性质** .
4. **行列式的计算法**:

5. **克拉默法则及其应用** .

第 2 章　矩　　阵

通过上一章的讨论已经知道，只有当线性方程组的个数等于未知量的个数并且系数行列式不等于零时，才能用克拉默法则求出线性方程组的解．对于一般线性方程组的解的讨论，需要借助矩阵这个工具．在线性代数中，矩阵是一个很重要的内容．它是研究线性问题的有力工具，它与自然科学、社会科学、工程技术以及生产实际中的大量问题有关，这些问题均可以通过对矩阵的研究获得解决．因此，矩阵是一个非常重要、非常实用的数学工具．

本章主要介绍矩阵的概念、性质及其运算，建立矩阵与行列式的某种关系，还要介绍分块矩阵的概念及其运算，初等变换及其相应的初等矩阵，矩阵的秩以及一些特殊矩阵．

2.1　矩阵的概念

在科学技术及经济领域中，常常要用到一些矩形数表．比如，设有 m 个方程、n 个未知量的线性方程组

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

未知量的系数按原来的次序可以排成一个矩形数表

$$
\begin{matrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{matrix}
$$

这个矩形数表可以明确地把线性方程组的特征表示出来．上述矩形数表中的每一个元素不能随意变动，都有各自的意义．

又如，某商场三个分场的四类商品一天的营业额

单位: 万元

分 场 / 种 类	第 一 分 场	第 二 分 场	第 三 分 场
彩电	18	16	15
冰箱	14	12	13
洗衣机	20	22	18
空调	30	25	19

也可以用矩形数表简明地表示为

$$\begin{matrix} 18 & 16 & 15 \\ 14 & 12 & 13 \\ 20 & 22 & 18 \\ 30 & 25 & 19 \end{matrix}$$

这类矩形数表在数学上称为矩阵 .

定义 2.1.1 由 $m\times n$ 个数 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ m 行 n 列矩形数表, 称为 $m\times n$ 矩阵, 矩形数表外用方括号

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

通常用大写字母 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\cdots$表示矩阵, a_{ij}称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列的元素 . 有时为了标明一个矩阵的行数和列数, 用 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$表示一个 m 行 n 列的矩阵 . 其中有以下 4 种特例:

$m=n$ 时, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为 n 阶方阵;

(2) 当 $m=1$ 时, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为行矩阵, 此时

$$\boldsymbol{A}=[a_{11},\ a_{12},\cdots,\ a_{1n}]$$

$n=1$ 时, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为列矩阵, 此时

$$\boldsymbol{A}=\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{matrix}$$

($a_{ij}=$ $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ $\boldsymbol{A}$ 为零矩阵, 一般记为 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{O}$.

2.2　矩阵的运算及其性质

定义 2.2.1　若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数、列数分别相等，则称 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵 .

定义 2.2.2　若矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$　　　$\boldsymbol{B} = (b_{ij})$

等，即 $a_{ij} = b_{ij}(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$　　　$\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等，记为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$$

例如　设有矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 7 & 8 \end{matrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 7 & 8 \end{matrix}$$

显然，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数和列数均相等，并且对应元素也相等，所以有 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

2.2.1　矩阵的加法

定义 2.2.3　设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵，即

$$\boldsymbol{A} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{matrix}$$

将矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 对应元素相加得到的矩阵 $\boldsymbol{C}$，则称矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的和，记为

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$$

即

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} + \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{matrix}$$

矩阵的加法满足以下规则　　$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 都是 $m \times n$ 矩阵)

1. 交换律：$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$
2. 结合律：$\boldsymbol{A} +$　$\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$　　$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})$　　$\boldsymbol{C}$
3. $\boldsymbol{O} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{A}$

定义 2.2.4　设 $\boldsymbol{A} =$　$a_{ij})$　　　$-a_{ij})$　　　$\boldsymbol{A}$ 的负矩阵 . 记为 $-\boldsymbol{A}$，即

$$-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

定义 2.2.5　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵，则

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -b_{11} & -b_{12} & \cdots & -b_{1n} \\ -b_{21} & -b_{22} & \cdots & -b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ -b_{m1} & -b_{m2} & \cdots & -b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}$$

显然 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

例 2.2.1　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

解

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3+0 & 2+3 & 4+2 \\ 5+(-5) & -1+4 & 2+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

2.2.2　数与矩阵的乘法(数乘)

定义 2.2.6　设有 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

以数 k 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一个元素得到矩阵 $\boldsymbol{C}$，称为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘法，简称数乘，记为

$$\boldsymbol{C}=k\boldsymbol{A}$$

即

$$\boldsymbol{C}=k\boldsymbol{A}=k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

数乘矩阵满足以下规则($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，k, l 是任意常数)

1. **分配律**: $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\quad k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B},\quad k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$

2. **结合律**: $(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})=l(k\boldsymbol{A})$

3. $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A},\qquad \boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}$

例 2.2.2 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 3 & 5 & -2\end{pmatrix}$$

求 $2\boldsymbol{A}$.

解

$$2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2\times2 & 2\times4 & 2\times1\\ 2\times3 & 2\times5 & 2\times(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 8 & 2\\ 6 & 10 & -4\end{pmatrix}$$

2.2.3 矩阵的乘法

例 2.2.3 设体育用品厂,用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示一天的产量,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 表示足球和篮球的单价和单位利润,求该厂三个车间一天的总产值和总利润.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc}\text{足球} & \text{篮球}\end{array} \\
\boldsymbol{A}= & \begin{pmatrix}100 & 200\\ 150 & 180\\ 120 & 210\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}\\ 1\text{ 车间}\\ 2\text{ 车间},\\ 3\text{ 车间}\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc}\text{单价/元} & \text{单位利润/元}\end{array} \\
\boldsymbol{B}= & \begin{pmatrix}50 & 20\\ 45 & 15\end{pmatrix}
\end{array}$$

解

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc}\text{总产值/元} & \text{总利润/元}\end{array} \\
\boldsymbol{C}= & \begin{pmatrix}100\times50+200\times45 & 100\times20+200\times15\\ 150\times50+180\times45 & 150\times20+180\times15\\ 120\times50+210\times45 & 120\times20+210\times15\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}\\ 1\text{ 车间}\\ 2\text{ 车间}\\ 3\text{ 车间}\end{array}$$

$$=\begin{pmatrix}14\,000 & 5\,000\\ 15\,600 & 5\,700\\ 15\,450 & 5\,550\end{pmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第 1 行的两个元素分别表示了 1 车间的总产值和总利润;第 2 行的两个元素分别表示了 2 车间的总产值和总利润;第 3 行的两个元素分别表示了 3 车间的总产值和总利润。从这个矩形数表上很清楚看到所求的结果,这就是矩阵乘法的优点所在.

定义 2.2.7 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times s$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $s\times n$ 矩阵,即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn}\end{pmatrix}$$

由元素

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\qquad(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

构成的 m 行 n 列矩阵 $\boldsymbol{C}$,称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积,记为

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$$

其中

$$\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{m\times n} = \left(\sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times n}$$

注意:

A 的列数与右边矩阵 **B** 的行数相等时, **A** 与 **B** 才能相乘, 简称为行乘列的规则;

C 中第 i 行 j 列的元素等于左矩阵 **A** 的第 i 行元素与右矩阵 **B** 的第 j 列对应元素乘积之和;

AB 仍为矩阵, 它的行数等于 **A** 的行数, 它的列数等于 **B** 的列数, 矩阵乘法的示意图, 如图 2-1 所示 .

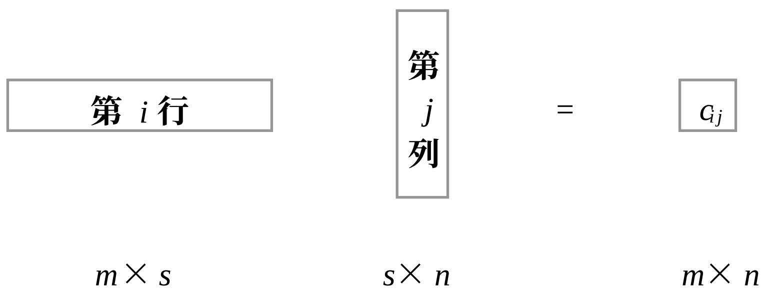

图 2-1 矩阵乘法示意图

在例 2.2.3 中, 矩阵 **C** 可以写成 **A** 与 **B** 相乘, 即 **C** = **AB** .

例 2.2.4 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

求 **AB** .

解

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 1\times 2 + 2\times 4 & 1\times 3 + 2\times 1 \\ 3\times 2 + & 3\times 3 + \\ 0\times 2 + 4\times 4 & 0\times 3 + 4\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 2 & 8 \\ 16 & 4 \end{pmatrix}$$

例 2.2.5 设 **A** 是一个行矩阵, **B** 是一个列矩阵, 且

$$\boldsymbol{A} = [a_1, a_2, \cdots, a_n] \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

求 **AB** 和 **BA** .

解

$$AB=[a_1, a_2, \cdots, a_n]\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

$$BA=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}[a_1, a_2, \cdots, a_n]=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & \cdots & a_nb_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & \cdots & a_nb_2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_1b_n & a_2b_n & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}$$

矩阵的乘法满足以下规则:

1. **结合律**: $(AB)C=A(BC)$

其中 A **为** $m\times n$ **矩阵**, B **为** $n\times s$ **矩阵**, C **为** $s\times p$ **矩阵** .

2. **数乘结合律**: $k(AB)=(kA)B=A(kB)$

其中 k **为任意实数**, A **为** $m\times n$ **矩阵**, B **为** $n\times s$ **矩阵** .

3. **左乘分配律**: $A(B+C)=AB+AC$

其中 A **为** $m\times n$ **矩阵**, B **和** C **均为** $n\times s$ **矩阵** .

4. **右乘分配律**: $(B+C)A=BA+CA$

其中 B **和** C **均为** $m\times n$ **矩阵**, A **为** $n\times s$ **矩阵** .

例 2.2.6 **计算**

$$[x_1, x_2, x_3]\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

解 **首先计算**

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1-2x_2+3x_3 \\ x_1+4x_2-x_3 \\ 5x_1-3x_2+2x_3 \end{bmatrix}$$

然后, **得**

$$\begin{aligned} &[x_1, x_2, x_3]\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &=[x_1, x_2, x_3]\begin{bmatrix} x_1-2x_2+3x_3 \\ x_1+4x_2-x_3 \\ 5x_1-3x_2+2x_3 \end{bmatrix} \\ &=x_1(x_1-2x_2+3x_3)+x_2(x_1+4x_2-x_3)+x_3(5x_1-3x_2+2x_3) \\ &=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2-x_1x_2+8x_1x_3-4x_2x_3 \end{aligned}$$

定义 2.2.8 **设有** n **阶方阵** A, **若它的主对角线上元素全为** 1, **其余元素全部为零**, **则称** A **为** n **阶单位矩阵**, **记为** E_n **或** E, **即**

$$
E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}
$$

当 $n=2, 3$ 时

$$
E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

就是二阶、三阶单位矩阵．

单位矩阵满足:

1．$E_m A_{m\times n} = A_{m\times n}$，$A_{m\times n} E_n = A_{m\times n}$；

2．当 A 是 n 阶方阵时，$E_n A = AE_n = A$．

显然，单位矩阵 E 在矩阵乘法中的作用类似于数 1 在数的乘法中的作用．

另外，要特别注意矩阵乘法性质和数的乘法性质的区别，矩阵乘法不满足交换律，即 AB 和 BA 不一定相等．

例 2.2.7　设

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}
$$

则

$$
AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

AB 和 BA 虽是同型矩阵，但 $AB \neq BA$．

例 2.2.8　设

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

则

$$
AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}
$$

$$
BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

AB 和 BA 是不同型的矩阵，更谈不上相等与不相等．

当进行矩阵乘法时，一定要注意乘的次序，不能随意改变．

若 $AB \neq BA$，我们称 A 与 B 不可交换；若 $AB = BA$ 时，我们称 A 与 B 可交换．

显然，只有 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换，才能改变矩阵相乘的次序．

例 2.2.9 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

所以，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是可交换矩阵．

在矩阵的乘法运算中还有一个奇特的现象，即虽然矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是非零矩阵 $\boldsymbol{A}$ $\neq \boldsymbol{O}$、$\boldsymbol{B}\neq \boldsymbol{O}$) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 有时却是一个零矩阵 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$) 是说，两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵，这种现象在数的乘法运算中是不可能出现的．

例 2.2.10 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

当 $\boldsymbol{A}\neq \boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{B}\neq \boldsymbol{O}$ 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 时，我们称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的左零因子，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的右零因子．一般说来，如果一个非零矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有右
左)

例 2.2.11 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & -6\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 10\\ 1 & 5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}-6 & 4\\ -3 & 2\end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{AC}$．

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 10\\ 1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6 & 4\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

由此可知，例 2.2.11 中的矩阵 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 都是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的右零因子，即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{O}$．

一般情况下，当 $\boldsymbol{A}\neq \boldsymbol{O}$ 时，且乘积矩阵 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 时，不能消去矩阵 $\boldsymbol{A}$ 而得到 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$．如例 2.2.11 中矩阵 $\boldsymbol{B}\neq \boldsymbol{C}$．

例 2.2.12 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 6\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

则

$$AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\4&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\0&0\end{pmatrix}$$

$$AC=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\0&0\end{pmatrix}$$

所以，$AB=AC$，显然，$B\neq C$.

矩阵乘法不满足交换律、消去律，两个非零矩阵的乘积有可能是零矩阵，这些都是矩阵乘法与数的乘法不同的地方 . 在做矩阵乘法运算时，要特别引起重视 .

对 n 阶方阵还可以定义乘幂运算 .

定义 2.2.9　设 A 为 n 阶方阵，m 为正整数，则规定

$$A^1=A,\quad A^2=A^1\cdot A^1,\quad A^m=A^{m-1}\cdot A^1$$

称 A^m 为方阵 A 的 m 次幂 .

并规定，n 阶矩阵 A 的零次幂为单位矩阵 E，即 $A^0=E$. 显然有，

$$A^kA^l=A^{k+l}\qquad (A^k)^l=A^{kl}$$

其中 k，l 为任意非负整数 .

由于矩阵乘法不满足交换律，因此一般地

$$(AB)^k\neq A^kB^k\ (k\text{ 为正整数})$$

例 2.2.13　计算

$$\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}^n$$

解　设

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}=E+B$$

其中

$$B=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}$$

显然

$$B^2=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

由此可知，当 $n\geq 2$ 时，

$$B^n=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

且

$$EB=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=BE$$

即 E 与 B 可交换，所以可以用二项式定理，得

$$A^n=(E+B)^n=E^n+nE^{n-1}B+\cdots=E+nB$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2n\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2n\\0&1\end{pmatrix}$$

2.2.4 矩阵的转置

定义 2.2.10 把 $m\times n$ 矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的行、列互换得到的 $n\times m$ 矩阵，称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行第 j 列的元素等于 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行第 i 列的元素．

矩阵的转置满足下列运算规则:

1．$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$

2．$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$

3．$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

4．$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

例 2.2.14 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

计算 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$．

解

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 8 & -1 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}，所以\quad (\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 4 & 8 & 11 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

又

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 8 & 11 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

从而我们看到

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

例 2.2.15 设 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}$，证明： $\boldsymbol{AB}\,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{ABA}^{\mathrm{T}}$.

证 因为 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}$，所以

$$(\boldsymbol{ABA}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \quad \boldsymbol{AB})\,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{ABA}^{\mathrm{T}}$$

2.2.5 *n* 阶方阵的行列式

为了进一步讨论矩阵的性质，我们还需要引入 n 阶方阵的行列式的概念 .

定义 2.2.11 设 n 阶方阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

则称对应的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，记为 $\det \boldsymbol{A}$.

关于方阵的行列式有下面重要的定理 .

定理 2.2.1 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是任意两个 n 阶方阵，则 $\det\ \boldsymbol{AB})\qquad \boldsymbol{A}\det \boldsymbol{B}$.

证明略 方阵行列式定理 . 由此定理可知：

列式相乘 .

列式 .

例 2.2.16 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{matrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{matrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{matrix}$$

验证 $\det\ \boldsymbol{AB})\qquad \boldsymbol{A}\det \boldsymbol{B}$.

解 因为 $\boldsymbol{AB} = \begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{matrix}\ \begin{matrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{matrix} = \begin{matrix} 7 & 9 \\ 3 & 11 \end{matrix}$，所以 $\det\ \boldsymbol{AB})\ \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 50$，

又因为 $\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5$，$\det \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10$，所以

$$\det \boldsymbol{A}\det \boldsymbol{B} = 5 \times 10 = 50 = \det\ \boldsymbol{AB})$$

例 2.2.17 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{matrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{matrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{matrix} 1 & 10 & -5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix}$$

求 $\det\ \boldsymbol{AB})\qquad \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\qquad \boldsymbol{A} + \det \boldsymbol{B}$，$\det\ \ \boldsymbol{A})$

解 $\det \quad \boldsymbol{AB})\qquad \boldsymbol{A}\det \boldsymbol{B}=2\times1\times$

$$\det \quad \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\ \begin{vmatrix}3&13&-1\\0&3&5\\0&0&1\end{vmatrix}=3\times3\times1=9$$

$$\det \boldsymbol{A}+\det \boldsymbol{B}=-6+8=2$$

$$\det \quad \boldsymbol{A})\ \begin{vmatrix}6&9&12\\0&3&6\\0&0&-9\end{vmatrix}=6\times3\times$$

由例 2.2.16，**例** 2.2.17 **可知，一般地**

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\qquad \boldsymbol{A}+\det \boldsymbol{B}$;

$k\,\boldsymbol{A})\neq k\det \boldsymbol{A}$，**而有** $\det \quad k\,\boldsymbol{A})\quad k^n\det \boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{A}$ **为** n **阶方阵**)

证明)

例 2.2.18 **设** $\boldsymbol{A}$ **是** n **阶方阵，且满足** $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，$\det \boldsymbol{A}=-1$，**证明** $\det \quad \boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})$

证 **利用已知条件，因为**

$$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\quad \boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}$$

所以

$$\det \quad \boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\qquad \boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\det \quad \boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\qquad \boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\qquad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\qquad \boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})$$

因此

$$\det \quad \boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})$$

习题 2.2

1. **已知** $\boldsymbol{A}=\begin{matrix}4&2&3\\x_1-x_2&1&0\end{matrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{matrix}4&2&x_1+x_2\\2&1&0\end{matrix}$

若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，**求** x_1，x_2 .

2. **设**

$$\boldsymbol{A}=\begin{matrix}1&2&3&4\\0&-1&5&2\\2&3&1&0\end{matrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{matrix}0&2&1&3\\4&1&0&2\\0&-3&2&5\end{matrix}$$

求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}$.

3. **问**

$$\begin{matrix}3&2&1\\4&2&6\\0&3&1\end{matrix}=2\begin{matrix}3&2&1\\2&1&3\\0&3&1\end{matrix}$$

对吗？为什么？

4. **计算下列矩阵**

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} (1, 3, 2)$　　　$(2, 1, 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$　　　$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$　　　$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

5. 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{AC} - \boldsymbol{BC}$.

6. 已知

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

求满足方程 $2\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{X} = 2\boldsymbol{B}$ 中的 $\boldsymbol{X}$.

7. 计算

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^3$　　　$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$, n 是正整数

8. 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

通过计算 $\boldsymbol{A}^2$, $\boldsymbol{A}^3$, …, 归纳出 $\boldsymbol{A}^n$ 一般的运算规律 .

9. 证明: 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可交换, 则有

$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2$

$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\ \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})\ \ \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2$

(　$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})^3 = \boldsymbol{A}^3 - 3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} + 3\boldsymbol{AB}^2 - \boldsymbol{B}^3$

10. 如果 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{CA}$, 证明 $\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{BC}) = (\boldsymbol{BC})\boldsymbol{A}$.

11. 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

12. 证明: $\boldsymbol{ABC})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

13. 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{matrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{matrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{matrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

求 $\det\ \boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}})$　$\boldsymbol{A} + \det\ \boldsymbol{B}$, $\det\ \boldsymbol{A})$

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, k 为实数, 试证: $\det\ k\boldsymbol{A}) = k^n \det\ \boldsymbol{A}$.

2.3　逆矩阵

2.3.1　逆矩阵的概念

从 2.2 节中知道, 如果已知矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 且满足相乘条件, 则用矩阵乘法可求出矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$. 现在, 如果已知矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$, 能否求出矩阵 $\boldsymbol{X}$, 使 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{C}$. 为此先讨论一个简单问题, 即如果已知方阵 $\boldsymbol{A}$, 能否求出同阶方阵 $\boldsymbol{B}$, 使 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$.

定义 2.3.1　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 如果存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$, 使得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}$$

则称方阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的(简称 $\boldsymbol{A}$ 可逆)　$\boldsymbol{B}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵(简称为 $\boldsymbol{A}$ 的逆阵,或 $\boldsymbol{A}$ 的逆)

一般地, $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{B}$ 记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$(读作" $\boldsymbol{A}$ 逆 ")　$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}$, 则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

于是, 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵, 则存在矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 满足

$$\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$$

例 2.3.1　设

$$\boldsymbol{A} = \begin{matrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{matrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{matrix}$$

验证 $\boldsymbol{B}$ 是否为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

解　因为

$$\boldsymbol{AB} = \begin{matrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{BA} = \begin{matrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{matrix} \begin{matrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

即有 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}$, 故 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

2.3.2　逆矩阵的性质

由定义可直接证明可逆矩阵具有下列性质:

性质 2.3.1　若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是唯一的.

证　假设 $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵, 有

$$AB_1 = B_1A = E,\quad AB_2 = B_2A = E$$

则

$$B_1 = B_1E = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = EB_2 = B_2$$

故 A 的逆矩阵唯一．

性质 2.3.2　若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，并且 $(A^{-1})^{-1} = A$．

性质 2.3.3　若 A 可逆，则 A^{T} 也可逆，并且 $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$．

性质 2.3.4　若 A 可逆，则 $\det(A^{-1})\quad A)^{-1}$．

性质 2.3.5　若 n 阶方阵 A 和 B 均可逆，则 AB 也可逆，并且

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

证　因为 A 和 B 均可逆，故 A^{-1}，B^{-1} 存在，又

$$(AB)\quad B^{-1}A^{-1})\quad A\quad BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$$

$$(B^{-1}A^{-1})\quad AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$$

由逆矩阵定义知 AB 可逆，且 $AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$．

性质 2.3.5 可推广到有限个 n 阶可逆矩阵相乘的情形，即

若 A_1，A_2，…，A_s 都可逆，则 $A_1A_2\cdots A_s$ 也可逆，并且 $(A_1A_2\cdots A_s)^{-1} = A_s^{-1}A_{s-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}$．

性质 2.3.2、性质 2.3.3 和性质 2.3.4 的证明留给读者．

例 2.3.2　单位矩阵是可逆的，且 $E^{-1} = E$．

证　因为　$EE = EE = E$，所以 E 是可逆的，且 $E^{-1} = E$．

例 2.3.3　零矩阵不可逆．

证　设 O 是 n 阶零矩阵，对任意 n 阶矩阵 A，都有

$$OA = AO = O \neq E$$

故不存在零矩阵的逆矩阵，即零矩阵不可逆．

2.3.3　矩阵可逆的判别与逆矩阵的求法

当矩阵 A 满足什么条件时，A 一定是可逆的？而当 A 可逆时，如何求 A 的逆？

定理 2.3.1　如果矩阵 A 是可逆矩阵，则有 $\det A \neq 0$．

证　因为 A 可逆，即有 A^{-1} 存在，使 $AA^{-1} = E$，所以

$$\det(AA^{-1})\qquad A\det\quad A^{-1})\qquad E = 1$$

所以　$\det A \neq 0$．

由定理 2.3.1 知，因为 A 是可逆矩阵，所以 $\det A \neq 0$，那么，反过来是否成立呢？为了回答这个问题，先引入伴随矩阵的定义．

定义 2.3.2　设有 n 阶方阵

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

则由 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 det $\boldsymbol{A}$ **中元素** a_{ij}**的代数余子式** $\boldsymbol{A}_{ij}$**所构成的** n **阶方阵**

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{matrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{matrix}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，记为 $\boldsymbol{A}^*$.

注意:

$$\boldsymbol{A} \text{ 中各行元素的代数余子式作为 } \boldsymbol{A}^* \text{ 的相应列的元素 .}$$

$$A_{ij} = (- 1)^{i+j} M_{ij} \ .$$

利用伴随矩阵, **可以证明**:

定理 2.3.2　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n **阶方阵**, **则 $\boldsymbol{A}$ 可逆，并且**

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}^* \tag{2.3.1}$$

证　设

$$\boldsymbol{A} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

利用 $\boldsymbol{AA}^*$ = $c_{ij})$

$$c_{ij} = a_{i1} A_{j1} + a_{i2} A_{j2} + \cdots + a_{in} A_{jn} = \begin{matrix} \det \boldsymbol{A}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{matrix}$$

故有

$$\boldsymbol{AA}^* = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \begin{matrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} \det \boldsymbol{A} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det \boldsymbol{A} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det \boldsymbol{A} \end{matrix} = (\det \boldsymbol{A}) \boldsymbol{E}$$

同理可得
$$\boldsymbol{A}^* \boldsymbol{A} = \quad \boldsymbol{A}) \boldsymbol{E}$$

即有
$$\boldsymbol{A}^* \boldsymbol{A} = \boldsymbol{AA}^* = \quad \boldsymbol{A}) \boldsymbol{E} \tag{2.3.2}$$

因 det $\boldsymbol{A} \neq 0$, **则从**

$$\boldsymbol{A} \quad \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}^* \quad = \quad \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}^* \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆，按逆矩阵的定义，有

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}^*$$

定义 2.3.3 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，若 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异的，否则，称 $\boldsymbol{A}$ 是奇异的．

由上面两个定理知，$\boldsymbol{A}$ 是可逆方阵的充分必要条件是 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$，即可逆方阵就是非奇异方阵．

例 2.3.4 求矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$．

解

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

由定义 2.3.2，可得

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & -2 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

定理 2.3.1 与定理 2.3.2 不仅给出了判断一个矩阵是否可逆的方法，并且还给出了求逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的一种方法——伴随矩阵法．下面给出判别一个矩阵是否可逆的更简单的方法．

定理 2.3.3 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$ $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E})$ $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均可逆，并且 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{A}$．

证 由 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$，得

$$\det(\boldsymbol{AB}) = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{B} = \det \boldsymbol{E} = 1$$

所以 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$，即 $\boldsymbol{A}$ 可逆．

又

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{EB} = (\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}^{-1}$$

同理可得 $\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{A}$．

定理 2.3.3 说明，要验证方阵 $\boldsymbol{B}$ 是否是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，只要验证 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}$ 中一个式子成立即可，这比直接用定义去判断要节省一半的计算量．

例 2.3.5 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

问 $\boldsymbol{A}$ 是否可逆？若可逆求 $\boldsymbol{A}^{-1}$．

解 因为 $\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$，所以，$\boldsymbol{A}$ 可逆．

又

$$A_{11} = (-1)^{1+1}|1| = 1,\quad A_{12} = (-1)^{1+2}|2| = -2$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1}|2| = -2,\quad A_{22} = (-1)^{2+2}|3| = 3$$

故

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}A^* = \frac{1}{3-4}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

例 2.3.6 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

判别 A 是否可逆? 若可逆求 A^{-1}.

解 因为

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

所以, A 可逆.

又

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1,\quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1,\quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3,\quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5,\quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -7$$
$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3,\quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3,\quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

所以

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}A^* = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -7 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 & -3/2 \\ 1/2 & -5/2 & -3/2 \\ -1/2 & 7/2 & 5/2 \end{pmatrix}$$

例 2.3.7 设

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

问 A 是否可逆? 若可逆求 A^{-1}.

解 因为 $\det A = abc$, **所以当** $abc \neq 0$ **时**, A **可逆**.

此时 $A^* = \begin{pmatrix} bc & 0 & 0 \\ 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ab \end{pmatrix}$, **所以** $A^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$

例 2.3.8 设 n 阶矩阵 A 满足方程 $A^2 - 3A - 10E = O$, 证明: A 和 $A - 4E$ 都可逆, 并求它们的逆矩阵.

证　由 $A^2-3A-10E=O$，得 $A\quad A-3E)=10E$，即

$$A\ \frac{1}{10}(A-3E)\quad=E$$

由定理 2.3.3 知，A 可逆，且 $A^{-1}=\frac{1}{10}(A-3E)$　　　$A^2-3A-10E=O$，得

$$(A+E)\quad A-4E)=6E$$

即

$$\frac{1}{6}(A+E)\quad A-4E\quad=E$$

由定理 2.3.3 知，$A-4E)$　　　　$A\ -4E)^{-1}=\frac{1}{6}(A+E)$

有了逆矩阵的概念，本节开始提出的问题就可以得到解决了 . 只要方阵 A 可逆，且矩阵 C 的行数等于方阵 A 的阶数，一定存在矩阵 X，使

$$AX=C$$

其中 A 是 $n\times n$ 矩阵，X、C 都是 $n\times m$ 矩阵 .

事实上，若 A 可逆，则 A^{-1} 存在 . 用 A^{-1} 同时左乘上式的两端，得

$$A^{-1}AX=A^{-1}C$$

即

$$EX=A^{-1}C$$

所以

$$X=A^{-1}C$$

类似地，对于矩阵方程 $XA=B$，则需方程两边同时右乘 A^{-1}，解得 $X=BA^{-1}$.

例 2.3.9　已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}$$

且满足 $AX=A+2X$，求矩阵 X .

解　这是一个矩阵方程求解问题 . 一般先将关系式变形，解出 X 的表达式，然后再代入具体矩阵进行计算 .

由 $AX=A+2X$，得

$$(A-2E)X=A$$

因

$$\det(A-2E)=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&2\end{vmatrix}=-1\neq0$$

在等式 $(A-2E)X=A$ 两端同时左乘　$A-2E)^{-1}$，得

$$X=(A-2E)^{-1}A$$

再用伴随矩阵法，求得

$$(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-2&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-2&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{pmatrix}$$

例 2.3.10　解矩阵方程

$$\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}1&2\\5&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

解　记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\5&-2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$$

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，用 $\boldsymbol{A}^{-1}$右乘上式得

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}^{-1}$$

容易计算出

$$\det\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}1&2\\5&-2\end{vmatrix}=-12,\quad \boldsymbol{A}^{*}=\begin{pmatrix}-2&-2\\-5&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{\det\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}^{*}=-\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-2&-2\\-5&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/6&1/6\\5/12&-1/12\end{pmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/6&1/6\\5/12&-1/12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/12&-1/12\\1/6&1/6\end{pmatrix}$$

例 2.3.11　用逆矩阵求线性方程组的解

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=1\\x_1+2x_2-x_3=-2\\-2x_1-3x_2-x_3=1\end{cases}$$

解　记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&-1\\-2&-3&-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

此线性方程组可写为矩阵方程

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$$

从而

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$$

容易计算出

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad \boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} 5/3 & -4/3 & -1/3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5/3 & -4/3 & -1/3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = 0 .$$

利用逆矩阵，求解线性方程组的方法，称为求逆求解法 .

习题 2.3

1. **若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都可逆，问：$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ 可逆吗 ?**

2. **若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，问：$k\boldsymbol{A}$ 何时可逆，求它的逆矩阵 .**

3. **设**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

问：满足什么条件 $\boldsymbol{A}$ 可逆，并且求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

4. **判别下列方阵是否奇异 ? 若方阵是非奇异的，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.**

(1) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$　(2) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　(3) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

5. **设矩阵** $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

解下列矩阵方程： 1) $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$，2) $\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{B}$，(3) $\boldsymbol{AXB} = \boldsymbol{C}$.

6. **试用逆矩阵求线性方程组**

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

7. **试证：设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则：**

$$\det(\boldsymbol{A}^*) = (\det \boldsymbol{A})^{n-1} \quad (n \geq 2)$$

8. **证明：**

(1)　$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 为同阶方阵且均可逆，则 $\boldsymbol{ABC}$ 也可逆，且

$$(\boldsymbol{ABC})^{-1} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$

$\boldsymbol{A}$ 可逆，则其伴随方阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆，且

$$(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}$$

(3)　$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$，且 $\boldsymbol{A}$ 为可逆方阵，则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$.

(4)　$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，且 $\boldsymbol{A}$ 为可逆方阵，则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$.

9. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足方程 $\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$，证明：$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{E}$ 都可逆，并求它们的逆矩阵.

2.4　分块矩阵

2.4.1　分块矩阵的概念

对于行数和列数比较高的矩阵 $\boldsymbol{A}$，可以将它看成是由若干个小矩阵组成的. 将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 用若干条纵线和横线分成许多小矩阵，为了计算方便且显示出矩阵的局部特性，每一个小矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵.

例如

$$\boldsymbol{A} = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

它的行分成 2 组：前 2 行为 1 组，后 3 行为第 2 组；它的列也分成 2 组：前 2 列为第 1 组，后 3 列为第 2 组. 我们用横线和竖线把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分成四个子块，每一个子块的元素按原次序组成一个比 $\boldsymbol{A}$ 低阶的矩阵. 令

$$\boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

那么 $\boldsymbol{A}$ 分成 4 个子矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_2 & \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_3 \end{pmatrix}$$

显然，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的结构比未分块之前更加明显.

矩阵分块方式是相当任意的，同一个矩阵可以根据需要划分成不同的子块，构成不同的分块矩阵.

例如

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}$$

可以按不同方法分块，例如

$$A=\left(\begin{array}{cc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{array}\right),\quad A=\left(\begin{array}{cc|cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{array}\right)$$

矩阵分块的更重要的用处是矩阵运算可以通过子块的运算进行 .

2.4.2　分块矩阵的运算

2.4.2.1　分块矩阵的加法

设矩阵 A 与矩阵 B 是同型矩阵，如果用同样的方式分块

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rs} \end{pmatrix}$$

其中 A_{ij} 与 B_{ij} 是同型矩阵 $(i=1,2,\cdots,r;\ j=1,2,\cdots,s)$

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1s}+B_{1s} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2s}+B_{2s} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{r1}+B_{r1} & A_{r2}+B_{r2} & \cdots & A_{rs}+B_{rs} \end{pmatrix}$$

也就是说，分块矩阵 A 与 B 相加，只需要把对应的子块相加即可 . 不过，A 与 B 的分块结构要一样 .

例 2.4.1　设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

求 $A+B$.

解　按同样的方式把 A，B 分成以下子块

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right),\quad B=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 6 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

分块的原则是尽可能地使子块有特征 . 若令

$$E_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad A_1=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\quad B_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

于是，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 分块后化为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_2 & \boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{E}_2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{E}_2\end{pmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O}+\boldsymbol{B}_2 & -\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{E}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$$

由于

$$\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 2 & 4\\ 6 & 3 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

2.4.2.2 分块矩阵的乘法

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times l$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $l\times n$ 矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 进行分块

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs}\end{pmatrix}\begin{matrix}m_1\\ m_2\\ \cdots\\ m_r\end{matrix}\\ \begin{matrix}l_1 & l_2 & \cdots & l_s\end{matrix}\end{array},\quad \boldsymbol{B}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t}\\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st}\end{pmatrix}\begin{matrix}l_1\\ l_2\\ \cdots\\ l_s\end{matrix}\\ \begin{matrix}n_1 & n_2 & \cdots & n_t\end{matrix}\end{array}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ik}$ 是 $m_i\times l_k$ 子矩阵，$\boldsymbol{B}_{kj}$ 是 $l_k\times n_j$ 子矩阵 $(i=1,2,\cdots,r;\ k=1,2,\cdots,s;\ j=1,2,\cdots,t)$ $\boldsymbol{A}_{ik}$ 与 $\boldsymbol{B}_{kj}$ 的乘积有意义，则有

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1t}\\ \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{C}_{22} & \cdots & \boldsymbol{C}_{2t}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ \boldsymbol{C}_{r1} & \boldsymbol{C}_{r2} & \cdots & \boldsymbol{C}_{rt}\end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{C}_{ij}=\sum_{k=1}^{s}\boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj}\quad (i=1,2,\cdots,r;\ j=1,2,\cdots,t)$$

例 2.4.2 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{AB}$.

解 将 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 进行分块

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&2&0\\2&-1&0&1\\\hline 1&0&1&2\\\hline 3&0&2&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}\\\boldsymbol{A}_{31}&\boldsymbol{A}_{32}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&2&0\\\hline -1&0&2\\2&1&-1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\boldsymbol{B}_{12}\\\boldsymbol{B}_{21}&\boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_{11}=\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_{12}=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_{21}=(1,\ 0),\ \boldsymbol{A}_{22}=(1,\ 2),\ \boldsymbol{A}_{31}=(3,\ 0),$$

$$\boldsymbol{A}_{32}=(2,\ 1),\ \boldsymbol{B}_{11}=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}_{12}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}_{21}=\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}_{22}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}\\\boldsymbol{A}_{31}&\boldsymbol{A}_{32}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\boldsymbol{B}_{12}\\\boldsymbol{B}_{21}&\boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{21}&\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{12}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{22}\\\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{21}&\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{12}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{22}\\\boldsymbol{A}_{31}\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{32}\boldsymbol{B}_{21}&\boldsymbol{A}_{31}\boldsymbol{B}_{12}+\boldsymbol{A}_{32}\boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{21}=\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3\\4&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{12}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{22}=\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{21}=(1,\ 0)\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}+(1,\ 2)\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\end{pmatrix}=(4,\ 3)$$

$$\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{12}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{22}=(1,\ 0)\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+(1,\ 2)\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=0$$

$$\boldsymbol{A}_{31}\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{32}\boldsymbol{B}_{21}=(3,\ 0)\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}+(2,\ 1)\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\end{pmatrix}=(3,\ 4)$$

$$\boldsymbol{A}_{31}\boldsymbol{B}_{12}+\boldsymbol{A}_{32}\boldsymbol{B}_{22}=(3,\ 0)\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+(2,\ 1)\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=3$$

故得

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}-1&3&4\\4&1&-1\\4&3&0\\3&4&3\end{pmatrix}$$

例 2.4.3　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&2\\-2&-1&-1\\-1&-3&5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1&4\\2&3&0\\5&0&2\end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{AB}$.

解　用分块矩阵作乘法，为此，将 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 分成

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c|c|c}3&0&2\\-2&-1&-1\\-1&-3&5\end{array}\right)=(\boldsymbol{A}_1,\ \boldsymbol{A}_2,\ \boldsymbol{A}_3),\quad \boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{ccc}1&-1&4\\\hline 2&3&0\\\hline 5&0&2\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1\\\boldsymbol{B}_2\\\boldsymbol{B}_3\end{pmatrix}$$

那么

$$\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{A}_1,\ \boldsymbol{A}_2,\ \boldsymbol{A}_3)\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1\\\boldsymbol{B}_2\\\boldsymbol{B}_3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1,\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2,\ \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_3)$$

$$=\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}(1,\ -1,\ 4)+\begin{pmatrix}0\\-1\\-3\end{pmatrix}(2,\ 3,\ 0)+\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}(5,\ 0,\ 2)$$

$$=\begin{pmatrix}3&-3&12\\-2&2&-8\\-1&1&-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\-2&-3&0\\-6&-9&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10&0&4\\-5&0&-2\\25&0&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&-3&16\\-9&-1&-10\\18&-8&6\end{pmatrix}$$

必须指出：两个相加的分块矩阵，都应按相同的方式进行分块；但两个相乘的分块矩阵，左矩阵的分块与右矩阵的分块要满足以下条件：

(1)　2.4.3 中左矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列组数和右矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行组数都是 3 .

(2)

2.4.2 中左矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列组含 2 列，右矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的相应的第 1 行组含 2 行等等 .

总之，左矩阵列的分法必须与右矩阵行的分法相匹配，才能进行两个分块矩阵的乘法，这是由于矩阵乘法要求左矩阵的列数等于右矩阵的行数所决定的 . 至于左矩阵行的分法及右矩阵列的分法可随意 .

还须指出：分块矩阵的乘法具有结合律，但交换律不一定成立 .

2.4.2.3　求分块对角矩阵的逆矩阵

若方阵 $\boldsymbol{A}$ 的分块矩阵只在主对角线上有非零子块，其余子块都是零块，且非零子块都是方阵，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{O}&\cdots&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2&\cdots&\boldsymbol{O}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\cdots&\boldsymbol{A}_s\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}_i\ (i=1,2,\cdots,s)$　$\boldsymbol{A}$ 为分块对角矩阵 .

对分块对角矩阵的运算，可以化为对其主对角线上子块的运算 .

例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{A}_s\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_2 & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{B}_s\end{pmatrix}$$

若 $\boldsymbol{A}_i$ **与** $\boldsymbol{B}_i$ **是阶数相等的方阵** $i=1,2,\cdots,s)$

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{A}_s\boldsymbol{B}_s\end{pmatrix}$$

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{A}_s\end{pmatrix}$$

若 $\boldsymbol{A}_i$ $(i=1,2,\cdots,s)$

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2^{-1} & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{A}_s^{-1}\end{pmatrix}$$

例 2.4.4 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解 将 $\boldsymbol{A}$ **分块**

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c|cc}5 & 0 & 0\\ \hline 0 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_1=(5),\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

因为

$$\boldsymbol{A}_1^{-1}=(1/5),\quad \boldsymbol{A}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/5 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix}$$

例 2.4.5 设

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\1&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&1&3\end{pmatrix}$$

求 A^{-1}.

解 将 A 分块

$$A=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}$$

其中

$$A_1=\begin{pmatrix}2&0\\1&2\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}3&0\\1&3\end{pmatrix}$$

因为
$$A_1^{-1}=\begin{pmatrix}1/2&0\\-1/4&1/2\end{pmatrix},\quad A_2^{-1}=\begin{pmatrix}1/3&0\\-1/9&1/3\end{pmatrix}$$

所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&O\\O&A_2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2&0&0&0\\-1/4&1/2&0&0\\0&0&1/3&0\\0&0&-1/9&1/3\end{pmatrix}$$

一般地，当矩阵中含有较多的零元素，或高阶矩阵经分块后有若干子块是有特征的矩阵时，用分块矩阵进行运算是较方便的，可以大大地减少计算量．

习题 2.4

1．用分块矩阵的乘法，计算下列矩阵的乘积。

(1) $A=\begin{pmatrix}1&2&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&2&1&0\\0&0&1&2&-1\\0&0&1&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\1&0&1&0&2\\0&1&1&2&-1\\3&2&1&1&1\end{pmatrix}$，求 AB

(2) $A=\begin{pmatrix}\alpha&2&0&0\\0&\alpha&0&0\\0&0&\beta&0\\0&0&-2&\beta\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}\alpha&-2&0&0\\0&\alpha&0&0\\0&0&\beta&0\\0&0&2&\beta\end{pmatrix}$，求 ABA

2．设 C 是 4 阶可逆矩阵，D 是 3×4 矩阵

$$D=\begin{pmatrix}1&-1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

试用分块乘法，求一个 4×7 矩阵 $\boldsymbol{A}$，使得

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{D}\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}_4$$

3. 用矩阵分块的方法求 $\boldsymbol{A}^{-1}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 5 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5\end{pmatrix}$$

4. (1)

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}_1\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{C}_1$ 均可逆，则

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & -\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_1^{-1}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}_1^{-1}\end{pmatrix}$$

(2)　　$\boldsymbol{A}^{-1}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 7 & -4 & 1 & 0\\ -2 & -5 & 9 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6\end{pmatrix}$$

*5. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$ 都是 $n\times n$ 矩阵，且 $\det \boldsymbol{A}\neq 0$，$\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$，试证：

$$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}=\det(\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{CB})$$

2.5　几类特殊矩阵

这节介绍几类常用的特殊矩阵及其运算，着重介绍它们的运算性质 .

2.5.1　对角矩阵

若未作特殊的说明，以下的矩阵都指 n 阶矩阵 .

定义 2.5.1　形如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

的矩阵称为对角矩阵，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中除了主对角线上的元素 a_{ii} $(i=1,2,\cdots,n)$

素均为零.

对角矩阵的运算有以下简单的性质:

性质 2.5.1　同阶对角矩阵的和仍然是对角矩阵.

性质 2.5.2　数与对角矩阵的乘积仍然是对角矩阵.

性质 2.5.3　同阶对角矩阵的乘积仍然是对角矩阵,而且它们相乘满足乘法交换律.

性质 2.5.4　对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与它的转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 相等,即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$.

性质 2.5.5　对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是主对角线上的元素全不为零,即 $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{matrix} a_{11}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{-1} \end{matrix}$$

主对角线上元素全相等的对角矩阵就称为数量矩阵,记为 $k\boldsymbol{E}$.

性质 2.5.6　n 阶数量矩阵能够与所有的 n 阶方阵可交换,即对任意一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 都有

$$(k\boldsymbol{E})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{E})$$

证　由数乘矩阵的法则得

$$(k\boldsymbol{E})\boldsymbol{A} = k(\boldsymbol{EA}) = k(\boldsymbol{AE}) = \boldsymbol{A}\quad k\boldsymbol{E})$$

其逆也是对的,读者可以自行证明.

2.5.2　三角形矩阵

定义 2.5.2　形如

$$\boldsymbol{A} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

的矩阵称为上三角形矩阵,形如

$$\boldsymbol{B} = \begin{matrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{matrix}$$

的矩阵称为下三角形矩阵.

上(下)　　三角形矩阵.

显然,两个同阶上

角形矩阵.

2.5.3　对称矩阵和反对称矩阵

定义 2.5.3　如果矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$　　$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$，那么称 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵 .

由定义 2.5.3 知，对称矩阵中的每一元素均满足 $a_{ij} = a_{ji}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$

显然，对角矩阵、数量矩阵和单位矩阵都是对称矩阵 .

定义 2.5.4　如果矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$　　$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A}$，那么称 $\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵 .

由定义 2.5.4 可知，反对称矩阵主对角线上的元素一定为零，其余元素均有 $a_{ij} = -a_{ji}(i \neq j)$

对称和反对称矩阵具有以下简单性质:

性质 2.5.7　对称(反对称)

性质 2.5.8　数乘对称

需要注意的是: 两个对称

例如

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

都是对称矩阵，但是它们的乘积矩阵

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

却不是对称矩阵 . 又如

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

都是反对称矩阵，但是它们的乘积矩阵

$$\boldsymbol{CD} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

却不是反对称矩阵 .

性质 2.5.9　奇数阶反对称矩阵的行列式等于零 .

证　因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A}$，并且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是奇数阶，有

$$\det \quad \boldsymbol{A}) \qquad {}^{n}\det \boldsymbol{A} = -\det \boldsymbol{A}$$

故得　　$\det \boldsymbol{A} = \det \quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$　　$\boldsymbol{A}) = -\det \boldsymbol{A}$，所以 $\det \boldsymbol{A} = 0$.

习题 2.5

1. 试证: 如果 $\boldsymbol{A}$ 是对称　　　　$\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是对称

2. 试证:

(1) 两个上

(2)

3 . 试证: 如果 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{O}$，那么 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$.

4 . 试证:

$$(1)\quad \begin{matrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{matrix}\quad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} = \begin{matrix} k_1 a_{11} & k_1 a_{12} & k_1 a_{13} \\ k_2 a_{21} & k_2 a_{22} & k_2 a_{23} \\ k_3 a_{31} & k_3 a_{32} & k_3 a_{33} \end{matrix}$$

$$(2)\quad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\quad \begin{matrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{matrix} = \begin{matrix} k_1 a_{11} & k_2 a_{12} & k_3 a_{13} \\ k_1 a_{21} & k_2 a_{22} & k_3 a_{23} \\ k_1 a_{31} & k_2 a_{32} & k_3 a_{33} \end{matrix}$$

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵，试证：

(1) $\boldsymbol{A}^2$ 是对称矩阵；

(2) $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$ 是对称矩阵；

(3) $\boldsymbol{AB}$ 是反对称矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

6. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{matrix}$$

试计算 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{E})$　$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$.

2.6　矩阵的初等行变换

在这一节介绍一种矩阵的变换，它在矩阵理论以及第 3 章求解线性方程组中有着重要的作用 .

2.6.1　矩阵的初等变换

我们知道，用消元法解线性方程组时，经常要反复进行以下 3 种运算：

1. 将一个方程遍乘一个非零常数 k；

2. 将两个方程位置互换；

3. 将一个方程遍乘一个非零常数 k 加至另一个方程上去 .

这 3 种运算称为方程组的初等变换，而且线性方程组经过初等变换后其解不变 .

如果从矩阵的角度来看方程组的初等变换，就有矩阵的初等行变换的概念 .

定义 2.6.1　矩阵的初等行变换是指：

k 遍乘矩阵的某一行；

k 加到另一行对应元素上 .

分别称以上 3 种变换为倍乘变换、互换变换、倍加变换 .

如果把定义 2.6.1 中对矩阵进行“行”的变换，改为对“列”的这 3 种变换，则称为矩阵的初等列变换 . 矩阵的初等行变换和初等列变换统称为初等变换，下面我们主要运用矩阵的初等行变换 .

2.6.2　初等矩阵

定义 2.6.2　对单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 进行一次初等变换所得到的矩阵，称为初等矩阵．对应于 3 种初等变换有 3 种类型的初等矩阵．

(1) 初等倍乘矩阵

$$\boldsymbol{P}_{i(k)}=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&k&\cdots&\cdots&\cdots\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \\ \text{第 } i \text{ 行}\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

其中 $k\neq0$，$\boldsymbol{P}_{i(k)}$是由单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 第 i 行乘 k 而得到的．

(2) 初等互换矩阵

$$\boldsymbol{P}_{i,j}=\begin{pmatrix}1&&&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&&&\\&&1&&&&&&&&\\&&&0&\cdots&\cdots&\cdots&1&\cdots&\cdots&\cdots\\&&&\vdots&1&&&\vdots&&&\\&&&\vdots&&\ddots&&\vdots&&&\\&&&\vdots&&&1&\vdots&&&\\&&&1&\cdots&\cdots&\cdots&0&\cdots&\cdots&\cdots\\&&&&&&&&1&&\\&&&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \\ \text{第 } i \text{ 行}\\ \\ \\ \\ \text{第 } j \text{ 行}\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$\boldsymbol{P}_{i,j}$是由单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 第 i，j 行互换而得到的．

(3) 初等倍加矩阵

$$\boldsymbol{P}_{i+j(k)}=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&\cdots&k&\cdots&\cdots\\&&\vdots&\ddots&\vdots&&\\&&0&\cdots&1&\cdots&\cdots\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \text{第 } i \text{ 行}\\ \\ \text{第 } j \text{ 行}\\ \\ \\ \end{array}$$

$\boldsymbol{P}_{i+j(k)}$是由单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 第 j 行乘 k 加到第 i 行而得到的．

易证 $\det\boldsymbol{P}_{i(k)}=k$，$\det\boldsymbol{P}_{i,j}=-1$，$\det\boldsymbol{P}_{i+j(k)}=1$．故 $\boldsymbol{P}_{i(k)}$，$\boldsymbol{P}_{i,j}$，$\boldsymbol{P}_{i+j(k)}$都是可逆矩阵，它们的逆矩阵分别为

$$\boldsymbol{P}_{i(k)}^{-1}=\boldsymbol{P}_{i(1/k)}$$

$$P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}$$

$$P_{i+j\ \ k)}^{-1} = P_{i+j\ \ -k)}$$

易知 $P_{i\ \ k)}^{-1}$, $P_{i,j}^{-1}$, $P_{i+j\ \ k)}^{-1}$ 都是初等矩阵 .

可以证明, 对 $m\times n$ 矩阵 A 进行一次初等行 A 左

的 m 阶 n 阶)

A 的第 i 行 k 等同于 $P_{i\ \ k)}A$ $AP_{i\ \ k)}$);

A 的第 i 行 j 行 $P_{i,j}A$ $AP_{i,j}$)

A 的第 j 行 k 加至第 i 行 $P_{i+j\ \ k)}A$ $AP_{i+j\ \ k)}$) .

有了初等变换和初等矩阵的概念, 就可以给出求逆矩阵的另一种较为方便的方法 .

2.6.3 运用初等行变换求逆矩阵

定理 2.6.1 任意一个矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 经过若干次初等变换, 可以化为如下形式的矩阵 D.

$$D = \begin{array}{ccccccccl} 1 &&&&&&&& \\ & 1 &&&&&&& \\ && \ddots &&&&&& \\ &&& 1 & \cdots & \cdots & \cdots && \text{第 } r \text{ 行} \\ &&&& 0 &&&& \\ &&&&& \ddots &&& \\ &&&&&& 0 && \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

其中 E_r 是 r 阶单位矩阵 .

证 如果所有 $a_{ij} = 0$ ($i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n$) A 已是 D 的形式, 此时 $r = 0$.

如果 a_{ij} 中至少有一个不为零, 不妨假设 $a_{11}\neq 0$ (如果 $a_{11} = 0$, 可以对 A 进行行或列的互换位置, 使左上角元素不为零 .) $-a_{i1}/a_{11}$ 乘第一行加到第 i 行上 $i = 2,3,\cdots,m$) $-a_{1j}/a_{11}$ 乘所得到矩阵的第 1 列加到第 j 列上 $j = 2,3,\cdots,n$)

$1/a_{11}$ 乘第 1 行, 于是矩阵 A 化为

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & \cdots & a_{mn}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & B_1 \end{pmatrix}$$

其中 B_1 是 $m-1)\times(n-1)$

如果 $B_1 = O$, 那么 A 化为 D 的形式; 如果 $B_1\neq O$, 那么按上述方法, 继续做下去, 最后总可以化为 D 的形式 .

由于对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等变换化成了矩阵 $\boldsymbol{D}$，相当于有初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，⋯，$\boldsymbol{P}_s$，$\boldsymbol{Q}_1$，$\boldsymbol{Q}_2$，⋯，$\boldsymbol{Q}_t$，满足

$$\boldsymbol{P}_s\boldsymbol{P}_{s-1}\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_{t-1}\boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{D}\tag{2.6.1}$$

于是有:

定理 2.6.2　如果 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，则 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{E}$.

证　设 $\boldsymbol{A}$ 可逆，即 $\det\boldsymbol{A}\neq 0$，由定理 2.6.1 和(2.6.1)

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{P}_s\boldsymbol{P}_{s-1}\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_{t-1}\boldsymbol{Q}_t$$

其中 $\boldsymbol{P}_i\ (i=1,2,\cdots,s)$　$\boldsymbol{Q}_i\ (i=1,2,\cdots,t)$

$\boldsymbol{D}$ 可逆，易知 $\boldsymbol{D}$ 为单位矩阵.

利用定理 2.6.2 可知，对于可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_i\ (i=1,2,\cdots,s)$　$\boldsymbol{Q}_i\ (i=1,2,\cdots,t)$

$$\boldsymbol{P}_s\boldsymbol{P}_{s-1}\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_{t-1}\boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{E}\tag{2.6.2}$$

即

$$\boldsymbol{P}_s\boldsymbol{P}_{s-1}\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}_t^{-1}\boldsymbol{Q}_{t-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{Q}_1^{-1}$$

利用(2.6.2)

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_{t-1}\boldsymbol{Q}_t\boldsymbol{P}_s\boldsymbol{P}_{s-1}\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\tag{2.6.3}$$

对 2.6.3)　　　　　　$\boldsymbol{A}^{-1}$，得

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_{t-1}\boldsymbol{Q}_t\boldsymbol{P}_s\boldsymbol{P}_{s-1}\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}$$

即

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_{t-1}\boldsymbol{Q}_t\boldsymbol{P}_s\boldsymbol{P}_{s-1}\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{E}\tag{2.6.4}$$

比较　　　　　　　　　　　　　$\boldsymbol{A}$ 进行一系列初等行变换化成 $\boldsymbol{E}$，对 $\boldsymbol{E}$ 进行同样的这一系列初等行变换得到 $\boldsymbol{A}^{-1}$. 由此得到求逆矩阵的另一种方法:

$$(\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{E})\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{E}\cdots\boldsymbol{A}^{-1})$$

即在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的右边同时写出与 $\boldsymbol{A}$ 同阶的单位矩阵 $\boldsymbol{E}$，构成一个 $n\times 2n$ 矩阵　$\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{E})$ 然后对　$\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{E})$　　　　　　　　　　　　　　　　$\boldsymbol{A}^{-1}$.

对矩阵进行初等行变换时，为了看清每一步的作用，每作一次初等行变换都标明是哪种变换，且写在箭头上方，记法如下:

1. 用ⓘ · k 表示第 i 行提出公因子 k;

2. 用(ⓘ, ⓙ)　　　　i 行与第 j 行互换;

3. 用ⓘ + ⓙ · k 表示第 j 行的 k 倍加到第 i 行.

例 2.6.1　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{matrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{matrix}$$

求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解

$$
(A \vdots E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow[\text{③}+\text{①}\cdot]{\text{②}+\text{①}\cdot(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\text{③}+\text{②}\cdot} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow{\text{③}\cdot} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[\text{②}+\text{③}\cdot 5]{\text{①}+\text{③}\cdot} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)
\xrightarrow[\text{②}\cdot]{\text{①}+\text{②}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & -3 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) = (E \vdots A^{-1})
$$

所以

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}
$$

下面我们再举一个例子.

例 2.6.2 设

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}
$$

求 A^{-1}.

解

$$
(A \vdots E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\xrightarrow{\text{①}+\text{②}\cdot(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\text{②}+\text{①}\cdot} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[\text{③}+\text{②}\cdot 3]{\text{①}+\text{②}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 8 & -1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 25 & -3 & 6 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[\text{③}\cdot]{\text{②}\cdot}
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & -8 & 1 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -3/25 & 6/25 & 1/25
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[\text{②}+\text{③}\cdot 8]{\text{①}+\text{③}\cdot}
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 4 & 12/25 & 1/25 & -4/25 \\
0 & 1 & -8 & 1/25 & -2/25 & 8/25 \\
0 & 0 & 1 & -3/25 & 6/25 & 1/25
\end{array}\right) = (\boldsymbol{E} \cdots \boldsymbol{A}^{-1})
$$

所以

$$
\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix}
12/25 & 1/25 & -4/25 \\
1/25 & -2/25 & 8/25 \\
-3/25 & 6/25 & 1/25
\end{pmatrix}
$$

习题 2.6

1. 用初等行变换求下列矩阵的逆矩阵

$$
\begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix};\quad
\begin{pmatrix} -2 & -5 & 2 \\ 3 & 7 & -3 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix};\quad
\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};
$$

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\quad
\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\quad
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

2. 试用初等行变换解矩阵方程

$$
\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}
$$

2.7　矩阵的秩

如果用矩阵来表示线性方程组，那么线性方程组的一些解的情况，应该由矩阵的特征来决定．反映矩阵特征的是哪些量呢？矩阵的秩就是其中之一，它是一个重要的概念．

2.7.1　矩阵秩的概念

为了建立矩阵秩的概念，首先给出矩阵的子式的定义．

定义 2.7.1　设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，在 $\boldsymbol{A}$ 中任取 k 行、k 列，位于这些行和列相交处的元素，按它们原来的次序组成一个 k 阶行列式，称为矩阵 A 的一个 k 阶子式 .

例 2.7.1　设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{matrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

取 $\boldsymbol{A}$ 的第 2、4、5 行，第 1、2、4 列相交处的元素组成一个 $\boldsymbol{A}$ 的三阶子式

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

取 $\boldsymbol{A}$ 的第 1、2 行，第 2、3 列相交处的元素组成一个 $\boldsymbol{A}$ 的二阶子式

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}=-33\neq 0$$

不难看出，从 $\boldsymbol{A}$ 中可取到一阶、二阶、三阶、四阶子式 . 在 $\boldsymbol{A}$ 的所有四阶子式中，易知均为零，而三阶子式不全为零，三阶子式是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中不等于零的子式的最高阶数，我们给它一个专门的名称 .

定义 2.7.2　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的非零子式的最高阶数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，记作秩($\boldsymbol{A}$) r　$\boldsymbol{A}$) .

在例 2.7.1 中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 3，即 r　$\boldsymbol{A}$)

例 2.7.2　求矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{matrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 6 \end{matrix}$$

的秩 .

解　因为

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$$

所以，$\boldsymbol{B}$ 的不为零子式的最高阶至少是 2，而 $\boldsymbol{B}$ 的所有

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 6 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}=0$$

由定义 2.7.2 知，r　$\boldsymbol{B}$)

因为零矩阵的所有子式全为零，故规定零矩阵的秩为零 .

用定义 2.7.2 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，对于低阶矩阵还是方便的，但对于高阶矩阵，计算 k 阶子式是比较麻烦的，而且计算量较大 . 下面介绍求矩阵秩的另一种方法——

用矩阵的初等行变换求矩阵的秩 .

2.7.2　用矩阵的初等行变换求矩阵的秩

定义 2.7.3　满足下列两个条件的矩阵称为阶梯形矩阵:

大;

例如, 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&-2&-1&5\\0&-3&2&0&2\\0&0&0&0&-4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2&1&0&0\\0&1&2&3\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

都是阶梯形矩阵, 而矩阵

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&3&5&0\\0&2&-1&4\\0&3&2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}2&4&0\\0&0&0\\0&5&0\end{pmatrix}$$

都不是阶梯形矩阵 .

关于阶梯形矩阵有以下性质

性质 2.7.1　阶梯形矩阵的秩等于它的非零行的行数 .

性质 2.7.2　任意一个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 经过若干次初等行变换可以化成阶梯形矩阵 .

性质 2.7.3　初等行变换不改变矩阵的秩 .

性质 2.7.4　n 阶可逆矩阵的秩等于 n, 反之亦成立, 即若一个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 n, 则 $\boldsymbol{A}$ 必可逆 .

由性质 2.7.4 可知, n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的等价于 $r\quad \boldsymbol{A})=n$. 所以, 以后称 $r\quad \boldsymbol{A})=n$ 的 n 阶矩阵为满秩矩阵 .

由性质 2.7.1、性质 2.7.2 和性质 2.7.3 可得到如下结论:

定理 2.7.1　任何矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 都可以经过一系列初等行变换化为阶梯形矩阵, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于其相应阶梯形矩阵非零行的行数 .

由此, 我们得到了一个求矩阵秩的方法: 只要对矩阵进行初等行变换, 使其化为阶梯形矩阵, 这个阶梯形矩阵的非零行的行数即为该矩阵的秩 .

在例 2.7.1 中, $\boldsymbol{A}$ 已是阶梯形矩阵了, 所以 $r\quad \boldsymbol{A})$

例 2.7.3　用初等行变换的方法, 求矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-1&3&-2&4\\4&-2&5&1&7\\2&-1&1&8&2\end{pmatrix}$$

的秩 .

解

$$\boldsymbol{B}\ \xrightarrow[\text{③}+\text{①}\cdot(-1)]{\text{②}+\text{①}\cdot(-2)}\ \begin{matrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{matrix}\ \xrightarrow{\text{③}+\text{②}\cdot(-2)}\ \begin{matrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} = \boldsymbol{B}_1$$

$\boldsymbol{B}_1$ 是阶梯形矩阵，有两行非零行，因此 r $\boldsymbol{B}$)

例 2.7.4 求矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{matrix}$$

的秩 .

解

$$\boldsymbol{A}\ \xrightarrow[\substack{\text{③}+\text{①}\cdot(-2)\\ \text{④}+\text{①}\cdot(-3)}]{\text{②}+\text{①}\cdot(-1)}\ \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & -2 & 1 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow[\text{④}+\text{②}\cdot]{\text{③}+\text{②}\cdot(-1)}\ \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\text{④}+\text{③}\cdot}\ \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} = \boldsymbol{A}_1$$

$\boldsymbol{A}_1$ 是有三个非零行的阶梯形矩阵，故 r $\boldsymbol{A}$)

2.7.3 关于矩阵秩的性质

矩阵的秩是反映矩阵内在特征的一个重要的量 . 关于矩阵的秩的性质，我们给出下面两个定理 .

定理 2.7.2 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，则

$0\leq r$ $\boldsymbol{A}$) $m, n\}$

r $\boldsymbol{A}) = r$ $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$)

由秩的定义易证上述结论成立 .

定理 2.7.3 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 m 阶满秩矩阵，$\boldsymbol{C}$ 为 n 阶满秩矩阵，则

$$r \quad \boldsymbol{A}) = r \quad \boldsymbol{BA}) = r \quad \boldsymbol{AC})$$

证 由 $\boldsymbol{B}$，能够找到初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$，使得

$$\boldsymbol{P}_s\boldsymbol{P}_{s-1}\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$$

即

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_{s-1}^{-1}\boldsymbol{P}_s^{-1}$$

且知 $\boldsymbol{P}_i^{-1}(i=1,2,\cdots,s)$也是初等矩阵，有

$$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_{s-1}^{-1}\boldsymbol{P}_s^{-1}\boldsymbol{A}$$

由性质 2.7.3 知，其秩不变，即 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{BA})$

同理可得

$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{AC})$$

习题 2.7

1. 求下列矩阵的秩

$$\begin{pmatrix}3&1&0&2\\1&-1&2&-1\\1&3&-4&4\end{pmatrix}$$

($\begin{pmatrix}3&2&-1&-3&-2\\2&-1&3&1&-3\\7&0&5&-1&8\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}3&2&-1&2&0&1\\4&1&0&-3&0&2\\2&-1&-2&1&1&-3\\3&1&3&-9&-1&6\\3&-1&5&7&2&-7\end{pmatrix}$$

($\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}$

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为分块矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$$

问 $r(\boldsymbol{A})\quad r(\boldsymbol{B})\quad r(\boldsymbol{C})$

3. 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，试证:

$$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leq n$$

4. 试证：若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵 $(n\geq2)$

$$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & 当\ r(A)=n\ 时\\1, & 当\ r(A)=n-1\ 时\\0, & 当\ r(A)<n-1\ 时\end{cases}$$

5. 设 $\boldsymbol{B}$ 是 s 阶矩阵，$\boldsymbol{C}$ 为 $s\times n$ 矩阵，且秩 $(\boldsymbol{C})=s$，试证:

$\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{O}$，那么 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

$\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{C}$，那么 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$

本章内容提要

1. 矩阵的加法、乘法、数量乘法、转置的定义及运算规律 . 注意与数的运算的不同之处 .

2. 方阵行列式的定理 .

3. 可逆矩阵:

4. 矩阵的分块及分块乘法，以及它的应用．
5. 几种特殊矩阵的乘法和性质．
6. 矩阵的初等行变换，利用初等行变换求逆矩阵．
7. 矩阵的秩，利用初等行变换求矩阵的秩．

第 3 章　线性方程组

许多科学技术领域中的实际问题往往涉及求解未知数达成百上千个的线性方程组 .因而,对于一般的线性方程组的研究,在理论和实际上都具有十分重要的意义,其本身也是线性代数的主要内容之一 .对于线性方程组,只有当方程个数与未知量个数相等且系数行列式不等于零时,才能用克拉默法则或逆矩阵求出其解 .本章以矩阵为工具来讨论一般线性方程组,即含有 n 个未知数, m 个方程的线性方程组的解的情况,并回答以下三个问题:

1. 如何判定线性方程组是否有解?
2. 在有解的情况下,解是否唯一?
3. 在解不唯一时,解的结构如何?

我们考虑线性方程组的一般形式

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{3.0.1}$$

式中系数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$　$b_i(i=1,2,\cdots,m)$

$x_j(j=1,2,\cdots,n)$　$b_i(i=1,2,\cdots,m)$

组 3.0.1)　$b_i(i=1,2,\cdots,m)$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{3.0.2}$$

称方程组

线性方程组

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$$

式中

$$\boldsymbol{A} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

为系数矩阵,

$$X = \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{matrix}$$

为未知数矩阵,

$$B = \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{matrix}$$

为常数矩阵 .

把矩阵 $A\cdots B)$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{matrix}$$

称为线性方程组

矩阵所决定 . 我们将以矩阵为工具, 建立向量空间, 来研究线性方程组

解的一般结构 .

3.1 高斯消元法

在第 2 章矩阵运算知道, 对线性方程组进行初等变换是不会改变其解的 . 现在我们用矩阵来证明这个结论 .

定理 3.1.1 若将增广矩阵 $A\cdots B)$ $S\cdots T)$ $AX = B$ 与 $SX = T$ 是同解方程组 .

证 由于对矩阵作一次初等行变换等价于矩阵左乘一个初等矩阵, 因此存在初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_k$, 使得

$$P_k P_{k-1} \cdots P_2 P_1 (A\cdots B) = (S\cdots T)$$

记 $P_k P_{k-1} \cdots P_2 P_1 = P$, 显然 P 可逆, 若 X_1 为 $AX = B$ 的解, 即

$$AX_1 = B$$

两边同时左乘矩阵 P, 有

$$PAX_1 = PB$$

即

$$SX_1 = T$$

于是 X_1 是 $SX = T$ 的解．反之，若 X_2 为 $SX = T$ 的解，即

$$SX_2 = T$$

两边同时左乘矩阵 P^{-1}，得

$$P^{-1}SX_2 = P^{-1}T$$

即

$$AX_2 = B$$

X_2 亦为 $AX = B$ 的解．

综上所述，$AX = B$ 与 $SX = T$ 的解相同，称之为同解方程组．

为了求方程组(3.0.1) 3.1.1，我们用初等行变换把增广矩阵 $(A\cdots B)$ 简．由第 2 章知，通过初等行变换总能把 $A\cdots B)$ 我们给出解线性方程组 3.0.1) $A\cdots B)$ 为阶梯形矩阵，求出阶梯形矩阵所表达的方程组的解．由于两者为同解方程组，所以也就得到原方程组 斯消元法来求解一般的线性方程组．

例 3.1.1　解线性方程组

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= -1 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4 \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

解　首先写出增广矩阵，然后作初等行变换，将增广矩阵化为阶梯形矩阵，有

$$A\cdots B) = \begin{matrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 2 & 4 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} ②+①\cdot(-2) \\ ③+①\cdot \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & 4 \end{matrix}$$

$$③+②\cdot \quad \begin{matrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 5 \end{matrix}$$

$$③\cdot \quad \begin{matrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{matrix}$$

阶梯形矩阵所对应的线性方程组为

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 \quad\quad &= -1 \\ x_3 - x_4 &= -1 \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

现在可通过解线性方程组

x_4 的项移至等号右端，得

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= x_4 \\ x_2 + x_3 &= -1 \\ x_3 &= x_4 - 1 \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

由 $x_3 = x_4 - 1$，**并将其回代第二个方程得** $x_2 = -x_4$，**再将** x_2，x_3 **回代到第一个方程得** $x_1 = -x_4 + 1$，**即**

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_4 + 1 \\ x_2 &= -x_4 \\ x_3 &= x_4 - 1 \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

显然，未知数 x_4 **任意取定一个值，代入** 3.1.4) x_1, x_2, x_3 **的值．这样，得到的** x_1, x_2, x_3, x_4 **的一组值是原方程组** 3.1.1) x_4 **取值的任意性，因此方程组** 3.1.1) 3.1.1) **方程组** 3.1.2) 3.1.4) 3.1.4) 3.1.1) 3.1.4) x_4 **称为自由未知数** 3.1.4) 3.1.1) **般解．自由元的取法不是唯一的，如本例也可将** x_3 **取作自由元，由**

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_4 &= -x_3 \\ x_2 \qquad &= -x_3 - 1 \\ x_4 &= x_3 + 1 \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

从

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_3 \\ x_2 &= -x_3 - 1 \\ x_4 &= x_3 + 1 \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

表达式

但它们本质上是一样的，它们都表示了方程组

若我们要把方程组

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - k \\ x_2 &= -k \\ x_3 &= -1 + k \\ x_4 &= k \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

即令自由元 x_4 **取任意常数** k **而得到**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - k \\ 0 - k \\ -1 + k \\ 0 + k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.1.8}$$

其中 k **为任意常数，**

例 3.1.2　解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ -2x_1 - 5x_2 + x_3 - 5x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ -x_1 - 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \tag{3.1.9}$$

解　对

$$(\boldsymbol{A} \cdots \boldsymbol{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & -5 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & 5 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{③ + ①\cdot(-3) \\ ④ + ①}]{② + ①\cdot 2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[④ + ②]{③ + ②\cdot 2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③\cdot} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵所对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 - 3x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_3 + 7x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases} \tag{3.1.10}$$

将 x_4, x_5 移至等号右端，有

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -2x_4 + x_5 \\ x_2 - 3x_3 = x_4 - x_5 \\ x_3 = -7x_4 + 2x_5 \end{cases} \tag{3.1.11}$$

由

$$\begin{cases} x_1 = 44x_4 - 10x_5 \\ x_2 = -20x_4 + 5x_5 \\ x_3 = -7x_4 + 2x_5 \end{cases} \tag{3.1.12}$$

式　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　x_4, x_5 为自由元．若写成矩阵形式，可令自由元 x_4 取任意常数 k_1，自由元 x_5 取任意常数 k_2，这样方程组

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}44k_1-10k_2\\-20k_1+5k_2\\-7k_1+2k_2\\k_1+0\\0+k_2\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}44\\-20\\-7\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-10\\5\\2\\0\\1\end{pmatrix}\tag{3.1.13}$$

其中 k_1, k_2 为任意常数 .

例 3.1.3 解非齐次线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=6\\3x_1+2x_2+x_3=1\\5x_1+3x_2+4x_3=27\end{cases}\tag{3.1.14}$$

解 将

$$(\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}2&1&3&6\\3&2&1&1\\5&3&4&27\end{pmatrix}\xrightarrow{①+②\cdot(-1)}\begin{pmatrix}-1&-1&2&5\\3&2&1&1\\5&3&4&27\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[③+①\cdot5]{②+①\cdot3}\begin{pmatrix}-1&-1&2&5\\0&-1&7&16\\0&-2&14&52\end{pmatrix}\xrightarrow{③+②\cdot}\begin{pmatrix}-1&-1&2&5\\0&-1&7&16\\0&0&0&20\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[②\cdot]{①\cdot}\begin{pmatrix}1&1&-2&-5\\0&1&-7&-16\\0&0&0&20\end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵所对应的方程组为

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=-5\\x_2-7x_3=-16\\0x_3=20\end{cases}\tag{3.1.15}$$

显然, 不可能有 x_1, x_2, x_3 的值满足第三个方程, 因此方程组

组

通过上面三个例子, 可归纳出解线性方程组

$\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{B}$)

阵;

r 个, 其

余未知数称为自由未知数 $n-r$ 个;

程右端, 并用逐个方程回代的方法得到用自由元表达的基本元, 这就是方程组

$n-r$ 个自由元依次令为 k_1,

k_2, $\cdots$, k_{n-r}, 对应地解出基本元, 即可写出方程

习题 3.1

解下列线性方程组:

1. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 10 \\ 11x_1 + x_2 = 8 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -5 \\ 3x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 13 \\ 4x_1 - x_2 + 9x_3 = -16 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 15x_2 - 7x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases}$

3.2　线性方程组的相容性定理

定义 3.2.1　若线性方程组(3.0.1)　　相容的，否则称此线性方程组为不相容的．

由 3.1 节知线性方程组

线性方程组　　$A\cdots B)$

矩阵 A 化为阶梯形矩阵后的非零行行数是否相同．从第 2 章中得知，一个矩阵用初等行变换化为阶梯形矩阵中非零行的数目就等于该矩阵的秩，因此，可以用矩阵的秩来反映线性方程组

定理 3.2.1　线性方程组

$$r\quad A) = r\quad A\cdots B))$$

定理 3.2.1 已圆满地回答了本章开头提出的关于线性方程组的三个问题中的第 1 个问题．至于第 2 个问题，由 3.1 节的高斯消元法也得到了回答．因为当 $r\quad A) = r\quad A\cdots B)) = r$ 时，方程组 3.0.1)　　r 个基本未知元，有 $n - r$ 个自由未知元，由此可知，只要有自由元，方程组 3.0.1)

由元时，即 $r = n$ 时，解才唯一．我们把它归结为下述定理．

定理 3.2.2　设对于线性方程组　　$r\quad A) = r\quad A\cdots B)) = r$，则当 $r = n$ 时，线性方程组 3.0.1)　　$r < n$ 时，线性方程组

例 3.2.1　判定下列方程组的相容性和相容时解的个数:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 = 8 \\ 5x_1 + 2x_3 = 11 \end{cases} \quad (\quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 = 8 \\ 5x_1 + 2x_3 = 9 \end{cases} \quad (\quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 = 8 \\ 5x_1 - 2x_3 = 11 \end{cases}$$

解　用初等行变换将三个方程组的增广矩阵化为阶梯形矩阵，有

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 2 & 11 \end{matrix} \xrightarrow{\substack{②+①\cdot \\ ③+①\cdot \\ ④+①\cdot}} \begin{matrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -8 & -4 \\ 0 & 5 & -8 & -4 \\ 0 & 5 & -8 & -4 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{③+②\cdot \\ ④+②\cdot}} \begin{matrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix};$$

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 2 & 9 \end{matrix} \xrightarrow{\substack{②+①\cdot \\ ③+①\cdot \\ ④+①\cdot}} \begin{matrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -8 & -4 \\ 0 & 5 & -8 & -4 \\ 0 & 5 & -8 & -6 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{③+②\cdot \\ ④+②\cdot}} \begin{matrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{matrix} \xrightarrow{(③,④)} \begin{matrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix};$$

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & -2 & 11 \end{matrix} \xrightarrow{\substack{②+①\cdot \\ ③+①\cdot \\ ④+①\cdot}} \begin{matrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -8 & -4 \\ 0 & 5 & -8 & -4 \\ 0 & 5 & -12 & -4 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{③+②\cdot \\ ④+②\cdot}} \begin{matrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{matrix} \xrightarrow{(③,④)} \begin{matrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix};$$

由此可知

$r\ \boldsymbol{A}) = r\ \boldsymbol{A}\cdots \boldsymbol{B})) = 2 < n\ = 3)$，**所以方程组** 1 **有无穷多组解**；

$r\ \boldsymbol{A}) = 2 \neq r\ \boldsymbol{A}\cdots \boldsymbol{B}))$

$r\ \boldsymbol{A}) = r\ \boldsymbol{A}\cdots \boldsymbol{B})) = 3 = n$，**所以方程组** 3 **有唯一解**.

例 3.2.2　**问** λ，μ **为何值时，方程组**

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_1 - x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + \lambda x_3 &= \mu \end{aligned}$$

无解？有唯一解？有无穷多解？

解　**利用初等行变换将方程组的增广矩阵化为阶梯形矩阵，有**

$$(\boldsymbol{A}\cdots \boldsymbol{B}) = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 6 & 0 \\ 3 & -2 & \lambda & \mu \end{matrix}$$

$$\xrightarrow[③+①\cdot(-3)]{②+①\cdot(-1)}\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 6\\ 0 & -3 & 3 & -6\\ 0 & -8 & \lambda-9 & \mu-18\end{matrix}\xrightarrow{②\cdot(-1/3)}\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 6\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & -8 & \lambda-9 & \mu-18\end{matrix}$$

$$\xrightarrow{③+②\cdot 8}\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 6\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & \lambda-17 & \mu-2\end{matrix}$$

可知

$$r\quad \boldsymbol{A}) = \begin{matrix}2，\text{当 } \lambda=17 \text{ 时};\\ 3，\text{当 } \lambda\neq 17 \text{ 时}.\end{matrix}$$

$$r\quad \boldsymbol{A}\cdots \boldsymbol{B})) = \begin{matrix}2，\text{当 } \lambda=17 \text{ 且 } \mu=2 \text{ 时};\\ 3，\text{其他}.\end{matrix}$$

因此，当 $\lambda=17$ 而 $\mu\neq 2$ 时，方程组无解;

当 $\lambda\neq 17$ 时，方程组有唯一解;

当 $\lambda=17$ 且 $\mu=2$ 时，方程组有无穷多解．

对于齐次线性方程组

理 3.2.1 的条件，即齐次线性方程组

满足方程　零解，也称平凡解．因此，对于齐次线性方程组

定理 3.2.3　齐次方程组　$r\quad \boldsymbol{A}) < n$．

我们在前面所得到的关于 $m=n$ 情形下的结论已被包含在这一节的结论之中，因为在 $m=n$ 时，$\det \boldsymbol{A}=0$ 等价于 $r\quad \boldsymbol{A}) < n$，故 $\det \boldsymbol{A}=0$ 不仅为齐次方程组有非零解的必要条件，而且还是充分条件．

本章开头提出的关于线性方程组三个问题中的第 3 个问题，还没有解决，下面，为了揭示关于无穷多解之间的内在联系，我们还要引进一些重要的概念．

习题 3.2

1. 不解线性方程组，判定下列线性方程组的相容性以及相容时解的个数:

$$\begin{matrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 5\\ 2 & 3 & -3\end{matrix}\quad \begin{matrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{matrix} = \begin{matrix}2\\ 5\\ -7\\ 14\end{matrix}$$

(2) $$\begin{matrix}x_1-x_2+3x_3-x_4=1\\ 2x_1-x_2+x_3+4x_4=2\\ -4x_3+5x_4=-2\end{matrix}$$

($$\begin{matrix}2x_1+x_2-x_3+x_4=1\\ 3x_1-2x_2+2x_3-3x_4=2\\ 5x_1+x_2-x_3+2x_4=-1\\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=4\end{matrix}$$

2. 设线性方程组

$$\lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda$$
$$x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2$$

问 λ 为何值时，方程组有唯一解？或有无穷多解？

3. 设线性方程组

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = a$$
$$x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3$$
$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = b$$

问 a，b 为何值时，方程组相容？

3.3　n 维向量及向量组的线性相关性

本节将把二维向量和三维向量的概念推广到 n 维向量，并讨论 n 维向量的线性相关性 .

3.3.1　n 维向量的定义

在解析几何中，我们已经熟悉了平面二维向量和三维向量的概念及其运算 . 比如，大家知道，在取定一个坐标系下，一个三维向量可以用坐标表示成(x, y, z) 中 x，y，z 都是实数 .

在很多实际问题或理论推导中，常常需要更多的分量才能描述 . 因此，需要将向量的概念进行推广 .

定义 3.3.1　由 n 个数$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成一个有序数组称为一个 **n** 维向量，记作

$$\alpha = \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{matrix}$$

其中 $a_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$　　n 维向量 α 的第 i 个分量

今后我们用希腊字母α, β, γ, …表示向量 .

比如，n 元线性方程组 3.0.1)　　　　$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 就可视为一个 n 维向量，即

$$\beta = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}}$$

线性方程组　　　　　　**A** 中第 j　$j = 1, 2, \cdots, n)$　　　　　　m 个顺序数组成，故都可以视为 m 维向量，即

$$\alpha_j = [a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj}]^{\mathrm{T}}$$

由此就使线性方程组与向量之间有了一一对应的关系，从而可以用向量来研究线性方程组的问题 . 与第 2 章中讲过的矩阵联系起来，我们把这 n 个 m 维向量称为矩阵 **A** 的列向量 . 一个 n 维列向量的转置称为 **n** 维行向量 .

对 n 维向量而言，我们规定：n 维向量相等、相加、数乘与列矩阵之间相等、相加、数乘都对应相同．

因此，n 维向量和 $n\times 1$ 的矩阵(即列矩阵)

说法，这样，便于我们理解 n 维向量的几何意义．

3.3.2 线性相关与线性无关

建立了 n 维向量的概念后，我们再从向量的角度来观察线性方程组．例如，线性方程组

$$\begin{aligned} x_1+2x_2-2x_3+3x_4&=6\\ 2x_1-3x_2+x_3+x_4&=4\\ 3x_1-x_3+4x_4&=10 \end{aligned}$$

它的矩阵方程为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3\\ 2 & -3 & 1 & 1\\ 3 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6\\ 4\\ 10 \end{pmatrix}$$

也可以把线性方程组写成

$$x_1\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 3 \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} 2\\ -3\\ 0 \end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix} -2\\ 1\\ -1 \end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix} 3\\ 1\\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6\\ 4\\ 10 \end{pmatrix} \tag{3.3.1}$$

于是，线性方程组的求解问题就可看成是求一组数 x_1, x_2, x_3, x_4，使得等式右端向量

$$\begin{pmatrix} 6\\ 4\\ 10 \end{pmatrix}$$

和系数矩阵的列向量

$$\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 3 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 2\\ -3\\ 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} -2\\ 1\\ -1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 3\\ 1\\ 4 \end{pmatrix}$$

之间有

研究一个向量和另外一些向量之间是否存在

此有如下的定义：

定义 3.3.2 对于向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \alpha$, $k_1, k_2, \cdots, k_m$，使得

$$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$$

便说 α 是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的线性组合，或称 α 由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表出，且称这组数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 为该线性组合的组合系数．

例 3.3.1 任意三维向量 $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}$ 均是向量 $\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}$ 的线性组合，因为总有

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

例 3.3.2 向量 $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 不是向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的线性组合，因对于任意的一组数 k_1，k_2，有

$$k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 - 2k_2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

例 3.3.3 零向量是任意一组向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的线性组合，因为显然有

$$\mathbf{0} = 0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + \cdots + 0 \cdot \alpha_m$$

设

$$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \end{pmatrix}$$

如何判别向量 β 能否由向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出？

为解决这个问题，作如下分析：

β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出等价于存在一组数 k_1, k_2, k_3 使得

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$$

即

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + a_{13}k_3 = b_1 \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + a_{23}k_3 = b_2 \\ a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + a_{33}k_3 = b_3 \\ a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{43}k_3 = b_4 \end{cases}$$

又等价于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 = b_4 \end{cases}$$

有解，且 k_1，k_2，k_3 是它的一组解．

显然，上述分析完全适用于一般情形．因此有以下定理：

定理 3.3.1 向量 β 可以由向量组 α_1，α_2，…，α_s 线性表出的充分必要条件是：以 α_1，α_2，…，α_s 为系数列向量，以 β 为常数项向量的线性方程组有解，并且此线性方程组的一组解就是线性组合的一组系数．

例 3.3.4 判断向量 β 能否由向量组 α_1，α_2，α_3，α_4 线性表出，若能，求出一组组合系数，其中

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解　考虑以 α_1，α_2，α_3，α_4 为系数列向量，以 β 为常数项的线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 1 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 1 \end{cases} \tag{3.3.2}$$

解此线性方程组，运用初等行变换，得

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[④+①\cdot(-1)]{③+①\cdot(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[④\cdot(-1)]{③+②\cdot(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵所对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 1 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = -1 \\ x_4 = 0 \end{cases} \tag{3.3.3}$$

显然方程组(3.3.3)　　　　β 可以由 α_1，α_2，α_3，α_4 线性表出．

由于

$$x_1 = 1/2,\quad x_2 = 1/2,\quad x_3 = -1,\quad x_4 = 0$$

所以

$$\beta = \quad \alpha_1 + \quad \alpha_2 - \alpha_3$$

例 3.3.5　试证向量组 α_1，α_2，…，α_s 中任一向量 α_i $(i = 1, 2, \cdots, s)$ 组线性表出．

证　因为

$$\alpha_i = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_{i-1} + 1\alpha_i + 0\alpha_{i+1} + \cdots + 0\alpha_s$$

所以 α_i $(i = 1, 2, \cdots, s)$　　　　α_1，α_2，…，α_i，…，α_s 线性表出．

例 3.3.6　已知 α 是 β_1，β_2，…，β_t 的线性组合，且每一个 β_i $(i = 1, 2, \cdots, t)$ 都是 γ_1，γ_2，…，γ_s 的线性组合，证明 α 也是 γ_1，γ_2，…，γ_s 的线性组合．

证　因 α 是 β_1，β_2，…，β_t 的线性组合，故存在数 k_i $(i = 1, 2, \cdots, t)$

$$\alpha = \sum_{i=1}^{t} k_i\beta_i = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_t\beta_t$$

又由已知条件，有

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}\gamma_j = a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{is}\gamma_s \quad (i = 1,2,\cdots,t)$$

代入上式，得

$$\alpha = \sum_{i=1}^{t} k_i \sum_{j=1}^{s} a_{ij}\gamma_j = \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{t} k_i a_{ij} \gamma_j = \sum_{j=1}^{s} b_j\gamma_j$$

式中 $b_j = \sum_{i=1}^{t} k_i a_{ij}\ (j = 1,2,\cdots,s)$ α 是 γ_1，γ_2，…，γ_s 的线性组合 .

对于向量组

$$\alpha_1 = \qquad ^{\mathrm{T}},\quad \alpha_2 = \qquad ^{\mathrm{T}},\quad \alpha_3 = \qquad ^{\mathrm{T}}$$

容易求出 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$，于是有 $\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = \mathbf{0}$. 具有这种性质的向量组称为线性相关的向量组 .

定义 3.3.3 对于向量组 α_1，α_2，…，α_s，若存在 s 个不全为零的数 k_1，k_2，…，k_s，使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = \mathbf{0} \tag{3.3.4}$$

则称向量组 α_1，α_2，…，α_s 线性相关；否则就称向量组 α_1，α_2，…，α_s 线性无关 .

例 3.3.7 试证：向量组 α_1，α_2，$\mathbf{0}$，α_3 是线性相关的 .

证 因为

$$0\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + 1\cdot\mathbf{0} + 0\cdot\alpha_3 = \mathbf{0}$$

其中系数 0，0，1，0 不全为零，所以 α_1，α_2，$\mathbf{0}$，α_3 是线性相关的 .

由此例可看出，包含零向量的向量组一定是线性相关的 .

定义 3.3.3 中还告诉我们线性无关向量组的特点是：它只有系数全为零的线性组合才是零向量，除此以外，它不再有别的线性组合是零向量 . 经常利用线性无关向量组的这个特点来证明一个向量组的线性无关性 .

例 3.3.8 试证：向量组

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

是线性无关的 .

证 若 $k_1\boldsymbol{e}_1 + k_2\boldsymbol{e}_2 + k_3\boldsymbol{e}_3 = \mathbf{0}$，即

$$k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

由上式解得唯一解 $k_1 = 0$，$k_2 = 0$，$k_3 = 0$，可知 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 线性无关 .

今后总用 $\boldsymbol{e}_i$ 表示第 i 个分量为 1 其余分量为 0 的向量 . 显然，n 维向量组 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_n$ 是线性无关的 .

对于仅含一个向量的向量组，由定义 3.3.3 容易推知：

3.3.3　线性相关性的判别

判别向量组的线性相关性，还可应用下面几个重要的结论 .

定理 3.3.2　对于向量组 α_1，α_2，…，α_s，若齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = \mathbf{0} \tag{3.3.5}$$

有非零解，则向量组 α_1，α_2，…，α_s 线性相关；若齐次线性方程组 3.3.5) 的零解，则向量组 α_1，α_2，…，α_s 线性无关 .

只要将　α_1，α_2，…，α_s 为系数列向量，以 k_1，k_2，…，k_s 为未知数的齐次线性方程组，就可由定义 3.3.3 直接得到定理 3.3.2 的结论 .

定理 3.3.3　关于向量组 α_1，α_2，…，α_s，设矩阵

$$\boldsymbol{A} = \ \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s]$$

若 $r\ \ \boldsymbol{A}) = s$，则向量组 α_1，α_2，…，α_s 线性无关；若 $r\ \ \boldsymbol{A}) < s$，则向量组 α_1，α_2，…，α_s 线性相关 .

定理 3.3.3 是由定理 3.3.2 和定理 3.2.3 结合起来得到的 .

由于一个矩阵的秩不会大于矩阵的行数，因此有下述结论：

定理 3.3.4　若 n 维向量的向量组中向量的个数 $m > n$，则该向量组一定线性相关 .

我们经常利用这些定理来判断向量组的线性相关性 .

例 3.3.9　判断下列向量组是线性相关还是线性无关？

$\alpha_1 = \quad^{\mathrm T}$，$\alpha_2 = \quad^{\mathrm T}$，$\alpha_3 = \quad^{\mathrm T}$；

$\alpha_1 = \quad^{\mathrm T}$，$\alpha_2 = \quad^{\mathrm T}$，$\alpha_3 = \quad^{\mathrm T}$，$\alpha_4 = \quad^{\mathrm T}$；

$\alpha_1 = \ a, a^2, a^3]^{\mathrm T}$，$\alpha_2 = \ b, b^2, b^3]^{\mathrm T}$，$\alpha_3 = \ c, c^2, c^3]^{\mathrm T}$，

$\alpha_4 = \ d, d^2, d^3]^{\mathrm T}$，其中 a，b，c，d 各不相同；

$\alpha_1 = \quad^{\mathrm T}$，$\alpha_2 = \quad^{\mathrm T}$，$\alpha_3 = \quad^{\mathrm T}$，

$\alpha_4 = \quad^{\mathrm T}$，$\alpha_5 = \quad^{\mathrm T}$.

解　$$\boldsymbol{A} = \begin{matrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{matrix} \xrightarrow[\text{④·}]{\text{②+①·3}\ \text{③+①·}} \begin{matrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 9 & 14 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix} \xrightarrow{(②,④)} \begin{matrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 9 & 14 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\text{④+②·}} \begin{matrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \end{matrix} \xrightarrow{\text{④+③·}} \begin{matrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

因为 $r\ \ \boldsymbol{A}) = 3 = s$，所以 α_1，α_2，α_3 线性无关；

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \\ 4 & 2 & 14 & -4 \end{matrix} \xrightarrow[\text{④+①·}]{\text{②+①}\ \text{③+①·}} \begin{matrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -8 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow[\text{④}+\text{②}\cdot]{\text{③}+\text{②}\cdot}\begin{array}{cccc}1 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 3 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -10\end{array}\xrightarrow{(\text{③},\text{④})}\begin{array}{cccc}1 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 3 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}$$

因为 $r\ \ \boldsymbol{A}) = 3$, $s = 4$, **所以** $r < s$, **因此** α_1, α_2, α_3, α_4 **线性相关**;

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0\\ ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 &= 0\\ a^2x_1 + b^2x_2 + c^2x_3 + d^2x_4 &= 0\\ a^3x_1 + b^3x_2 + c^3x_3 + d^3x_4 &= 0\end{aligned} \qquad (3.3.6)$$

此方程组的系数行列式是范德蒙德行列式, **易知**, **当** a, b, c, d **各不相同时**

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ a & b & c & d\\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3\end{vmatrix} \neq 0$$

据克拉默法则知, **方程组** 3.3.6) α_1, α_2, α_3, α_4 **线性无关**;

例 3.3.10 **设四维向量组** $\alpha_1 = \ a_1, a_2, a_3, a_4]^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2 = \ b_1, b_2, b_3, b_4]^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3 = \ c_1, c_2, c_3, c_4]^{\mathrm{T}}$ **线性无关**. **试证**: **在每个向量上添上一个分量**, **得到的五维向量组**

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5]^{\mathrm{T}}\\ \beta_2 &= \ b_1, b_2, b_3, b_4, b_5]^{\mathrm{T}}\\ \beta_3 &= \ c_1, c_2, c_3, c_4, c_5]^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

也线性无关.

证 **因为** α_1, α_2, α_3 **线性无关**, **所以相应的齐次线性方程组**

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 &= 0\\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 &= 0\\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 &= 0\\ a_4x_1 + b_4x_2 + c_4x_3 &= 0\end{aligned} \qquad (3.3.7)$$

只有零解. **考虑** β_1, β_2, β_3 **相应的齐次线性方程组**

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 &= 0\\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 &= 0\\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 &= 0\\ a_4x_1 + b_4x_2 + c_4x_3 &= 0\\ a_5x_1 + b_5x_2 + c_5x_3 &= 0\end{aligned} \qquad (3.3.8)$$

显然, **方程组** 3.3.8) 3.3.7) 3.3.7)
3.3.8) β_1, β_2, β_3 **线性无关**.

用同样的方法可把此结论推广到一般情形，即有

定理 3.3.5　若 n 维向量组 α_1，α_2，…，α_s 线性无关，则在每个向量上添上 m 个分量，得到的 $n+m$ 维向量组 β_1，β_2，…，β_s 也线性无关．

定理 3.3.6　向量组 α_1，α_2，…，α_s $(s\geq 2)$

有一个向量可以由其余向量线性表出．

证　必要性

已知向量组 α_1，α_2，…，α_s 线性相关，由定义 3.3.3 知，有一组不全为零的数 k_1，k_2，…，k_s，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=\mathbf{0} \tag{3.3.9}$$

不妨设 $k_i\neq 0$，由 3.3.9)

$$k_i\alpha_i=-k_1\alpha_1-k_2\alpha_2-\cdots-k_{i-1}\alpha_{i-1}-k_{i+1}\alpha_{i+1}-\cdots-k_s\alpha_s$$

即

$$\alpha_i=-\frac{k_1}{k_i}\alpha_1-\frac{k_2}{k_i}\alpha_2-\cdots-\frac{k_{i-1}}{k_i}\alpha_{i-1}-\frac{k_{i+1}}{k_i}\alpha_{i+1}-\cdots-\frac{k_s}{k_i}\alpha_s$$

这说明 α_i 可以由其余向量线性表出．

充分性

已知向量组 α_1，α_2，…，α_s $(s\geq 2)$　　　　　　α_j 可以用其余向量线性表出，即

$$\alpha_j=k_1'\alpha_1+k_2'\alpha_2+\cdots+k_{j-1}'\alpha_{j-1}+k_{j+1}'\alpha_{j+1}+\cdots+k_s'\alpha_s$$

移项得

$$k_1'\alpha_1+k_2'\alpha_2+\cdots+k_{j-1}'\alpha_{j-1}-\alpha_j+k_{j+1}'\alpha_{j+1}+\cdots+k_s'\alpha_s=\mathbf{0}$$

因为 k_1'，k_2'，…，k_{j-1}'，-1，k_{j+1}'，…，k_s' 中至少有一个 $-1\neq 0$，所以 α_1，α_2，…，α_s 线性相关．

由定理 3.3.6 立即得到定理 3.3.7．

定理 3.3.7　向量组 α_1，α_2，…，α_s $(s\geq 2)$

任一个向量都不能由其余向量线性表出．

例 3.3.11　试证：线性无关向量组的任何部分组也是线性无关的．

证　设向量组 α_1，α_2，…，α_s 线性无关，不妨设 α_1，α_2，…，α_t $(t<s)$

相关，由定义 3.3.3 知，有一组不全为零的数 k_1，k_2，…，k_t，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t=\mathbf{0}$$

从而有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t+0\cdot\alpha_{t+1}+\cdots+0\cdot\alpha_s=\mathbf{0}$$

因为 k_1，k_2，…，k_t 不全为零，所以 k_1，k_2，…，k_t，0，…，0 也不全为零，所以 α_1，α_2，…，α_s 线性相关．这与已知 α_1，α_2，…，α_s 线性无关相矛盾，故 α_1，α_2，…，α_t 线性无关．

例 3.3.12　设向量组 α_1，α_2，…，α_s 线性无关，而向量组 α_1，α_2，…，α_s，β 线性相关，证明 β 一定可以由 α_1，α_2，…，α_s 线性表出．

证　因为 α_1，α_2，…，α_s，β 线性相关，由定义 3.3.3 知，存在不全为零的数 k_1，k_2，…，k_s，k_{s+1}，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s+k_{s+1}\beta=\mathbf{0}$$

假设 $k_{s+1}=0$，则上式变成为

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=\mathbf{0}$$

而 k_1，k_2，…，k_s 不全为零，这与已知 α_1，α_2，…，α_s 线性无关相矛盾，因此 $k_{s+1}\neq 0$，于是

$$\beta=-\frac{k_1}{k_{s+1}}\alpha_1-\frac{k_2}{k_{s+1}}\alpha_2-\cdots-\frac{k_s}{k_{s+1}}\alpha_s$$

即 β 可以由 α_1，α_2，…，α_s 线性表出．

例 3.3.13　若向量组 α_1，α_2，…，α_s 中每一个向量都是 β_1，β_2，…，β_t 的线性组合，且 $t<s$，证明 α_1，α_2，…，α_s 线性相关．

证　由条件设

$$\alpha_i=a_{1i}\beta_1+a_{2i}\beta_2+\cdots+a_{ti}\beta_t\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ s$$

于是

$$\begin{aligned}&k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\\=&k_1(a_{11}\beta_1+a_{21}\beta_2+\cdots+a_{t1}\beta_t)+k_2(a_{12}\beta_1+a_{22}\beta_2+\cdots+a_{t2}\beta_t)\\&+\cdots+k_s(a_{1s}\beta_1+a_{2s}\beta_2+\cdots+a_{ts}\beta_t)\end{aligned}$$

所以只要 k_1，k_2，…，k_s 满足齐次线性方程组

$$\begin{aligned}a_{11}k_1+a_{12}k_2+\cdots+a_{1s}k_s&=0\\a_{21}k_1+a_{22}k_2+\cdots+a_{2s}k_s&=0\\\cdots\cdots\cdots&\cdots\\a_{t1}k_1+a_{t2}k_2+\cdots+a_{ts}k_s&=0\end{aligned}\qquad(3.3.10)$$

就有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=\mathbf{0}$$

而 3.3.10)　　t 个方程，故系数矩阵的秩必不超过 t　$<s$)　　3.3.10)　解．所以 α_1，α_2，…，α_s 线性相关．

习题 3.3

1．设 $\alpha=\qquad{}^{\mathrm{T}}$，$\beta=\qquad{}^{\mathrm{T}}$，$\gamma=\qquad{}^{\mathrm{T}}$，求 $\alpha-\beta$ 及 $3\alpha+2\beta-\gamma$．

2．设 $3\ \ \alpha_1-\alpha)+2(\alpha_2+\alpha)=5(\alpha_3+\alpha)$，　其中　$\alpha_1=[2,5,1,3]^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=[10,1,5,10]^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=[4,1,-1,1]^{\mathrm{T}}$，求 α．

3．判断向量 β 能否由向量组 α_1，α_2，α_3 线性表出，若能，写出它的一种表出方式．

$\beta=[8,3,-1,-25]^{\mathrm{T}}$，$\alpha_1=[-1,3,0,-5]^{\mathrm{T}}$

$\alpha_2=[2,0,7,-3]^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=[-4,1,-2,6]^{\mathrm{T}}$

$\beta=[-8,-3,7,-10]^{\mathrm{T}}$，$\alpha_1=[-2,7,1,3]^{\mathrm{T}}$

$$\alpha_2 = [3, -5, 0, -2]^{\mathrm T},\quad \alpha_3 = [-5, -6, 3, -1]^{\mathrm T}$$

$$\beta = [2, -30, 13, -26]^{\mathrm T},\quad \alpha_1 = [3, -5, 2, -4]^{\mathrm T}$$

$$\alpha_2 = [-1, 7, -3, 6]^{\mathrm T},\quad \alpha_3 = [3, 11, -5, 10]^{\mathrm T}$$

4. 设 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{s-1}, \alpha_s$ 线性表出，但不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{s-1}$ 线性表出，证明 α_s 一定可由 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{s-1}$ 线性表出．

5. 试证：任一四维向量 $\beta = [a_1, a_2, a_3, a_4]^{\mathrm T}$ 都可以由向量组 $\alpha_1 = [1, 0, 0, 0]^{\mathrm T}$，$\alpha_2 = [1, 1, 0, 0]^{\mathrm T}$，$\alpha_3 = [1, 1, 1, 0]^{\mathrm T}$，$\alpha_4 = [1, 1, 1, 1]^{\mathrm T}$ 线性表出，并且表出方式只有一种，写出这种表出方式．

6. 判断下列向量组是否线性相关：

$$\alpha_1 = [1, 2, -1, 4]^{\mathrm T},\quad \alpha_2 = [9, 10, 10, 4]^{\mathrm T},\quad \alpha_3 = [-2, -4, 2, -8]^{\mathrm T}$$

$$\alpha_1 = [1, 1, 0]^{\mathrm T},\quad \alpha_2 = [0, 2, 0]^{\mathrm T},\quad \alpha_3 = [0, 0, 3]^{\mathrm T}$$

$$\alpha_1 = [1, 2, 1, 3]^{\mathrm T}, \alpha_2 = [4, -1, -5, 6]^{\mathrm T}, \alpha_3 = [1, -3, -4, -7]^{\mathrm T}, \alpha_4 = [2, 1, -1, 0]^{\mathrm T}$$

7. 将向量组 α 表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性组合：

(1) $$\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},\quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\quad \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2) $$\alpha = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \alpha_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

8. 证明：$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 线性无关的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关．

3.4　向量组的秩

讨论一个向量组的线性相关性时，如何用尽可能少的向量去代表全组向量呢？为此，我们引入向量组的等价和极大线性无关组的概念．

3.4.1　向量组的等价关系

定义 3.4.1　设有两个向量组

$$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}\qquad B = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s\}$$

如果向量组 A 中的每个向量都能由向量组 B 中的向量线性表示，则称向量组 A 能由向量组 B 线性表示．如果向量组 A 能由向量组 B 线性表示，且向量组 B 也能由向量组 A 线性表示，则称向量组 A 与向量组 B 等价．

例 3.4.1　设有向量组 A

$$\alpha_1 = \qquad\quad^{\mathrm T},\quad \alpha_2 = [1, 3, 1]^{\mathrm T},\quad \alpha_3 = [1, 4, 0]^{\mathrm T}$$

和向量组 B

$$\beta_1 = \quad {}^{\mathrm{T}}, \quad \beta_2 = [0, -1, 1]^{\mathrm{T}}$$

求证：向量组 A 和向量组 B 等价．

证　因为

$$\alpha_1 = \beta_1 + \beta_2, \quad \alpha_2 = \beta_1 - \beta_2, \quad \alpha_3 = \beta_1 - 2\beta_2$$

这表明向量组 A 能由向量组 B 线性表示．又因

$$\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, \quad \beta_2 = \alpha_2 - \alpha_3$$

这表明向量组 B 能由向量组 A 线性表示．故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ $\beta_1, \beta_2\}$ ．

向量组之间的等价关系具有下面三条性质：

(1) A 与向量组 A 自身等价；

(2) A 与向量组 B 等价，则向量组 B 与向量组 A 等价；

(3) A 与向量组 B 等价，向量组 B 与向量组 C 等价，则向量组 A 与向量组 C 等价．

3.4.2 极大线性无关组

定义 3.4.2 若向量组 S 中的部分向量组 S_0 满足：

(1) S_0 线性无关；

(2) S 中的每一个向量都是 S_0 中向量的线性组合 S_0 为向量组 S 的一个极大线性无关组，简称极大无关组．

例 3.4.2 设向量组

$$\alpha_1 = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}, \quad \alpha_2 = \begin{matrix} 3 \\ 7 \end{matrix}, \quad \alpha_3 = \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}$$

因 α_1，α_2 线性无关，而 α_1，α_2，α_3 都是 α_1，α_2 的线性组合：

$$\alpha_1 = 1\alpha_1 + 0\alpha_2$$

$$\alpha_2 = 0\alpha_1 + 1\alpha_2$$

$$\alpha_3 = (-2)\alpha_1 + \alpha_2$$

所以 $\alpha_1, \alpha_2\}$ α_1，α_2，α_3 的一个极大无关组．同理 $\alpha_2, \alpha_3\}$ α_1，α_2，α_3 的一个极大无关组；$\alpha_1, \alpha_3\}$ α_1，α_2，α_3 的极大无关组．

例 3.4.3 设向量组 α_1，α_2，α_3，α_4，其中

$$\alpha_1 = \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}, \quad \alpha_2 = \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}, \quad \alpha_3 = \begin{matrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{matrix}, \quad \alpha_4 = \begin{matrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{matrix}$$

易见，$\alpha_1, \alpha_2\}$ $\alpha_1, \alpha_4\}$ $\alpha_3, \alpha_4\}$ $\alpha_2, \alpha_3\}$ 此向量组的一个极大无关组．而除此以外的其他部分向量组都不是此向量组的一个极大无关组．如 $\alpha_1\}$ α_1 是线性无关的，但 α_2 却不能由 α_1 线性表出；如 $\alpha_1, \alpha_3\}$ 因 α_1，α_3 线性相关；又如 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ α_1，α_2，α_3 线性相关，所以它们都不是此向量组的一个极大无关组．

通过上面两个例子我们看到，一个向量组可以有不止一个极大无关组，但极大无关组中所包含的向量个数却是相同的．有如下定理

定理 3.4.1　对于一个向量组，其所有极大无关组所含向量的个数都相同．

证　设$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$　$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t\}$　　　S 的极大无关组．

假设 $s \neq t$，不妨设 $s < t$．则因 α_1，α_2，$\cdots$，α_s 为 S 的极大无关组，所以每一个 $\beta_i\ (i = 1, 2, \cdots, t)$　　α_1，α_2，$\cdots$，α_s 的线性组合，由例 3.3.13 知，β_1，β_2，$\cdots$，β_t 线性相关，这和 β_1，β_2，$\cdots$，β_t 为 S 的极大无关相矛盾．所以 $t = s$．

定义 3.4.3　对于向量组 S，其极大无关组所含向量个数称为向量组 S 的秩．

从定理 3.4.1 和定义 3.4.3 可得到以下推论：

推论 3.4.1　若向量组 A 能由向量组 B 线性表示，则向量组 A 的秩不大于向量组 B 的秩．

推论 3.4.2　两个等价的线性无关向量组所包含向量个数一定相等．

推论 3.4.3　两个等价的向量组有相同的秩．

对于一个向量组，一般情况下如何求它的秩和极大无关组呢？我们将在下面讨论这个问题．

例 3.4.4　考虑构成上三角形矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n)$$

的 n 个列向量所构成的向量组的秩．

由于 r　$\boldsymbol{A}) = n$，所以这 n 个列向量是线性无关的，故这向量组的秩为 n．

例 3.4.5　考虑构成下列阶梯形矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{46} \end{pmatrix}$$

的 6 个列向量(其中 $a_{11}, a_{23}, a_{34}, a_{46}$ 不为零)

显然，列向量组

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{16} \\ a_{26} \\ a_{36} \\ a_{46} \end{pmatrix}$$

是线性无关的，而若再加上一个向量就是线性相关的，因此这 6 个列向量构成的向量组的秩为 4，也就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，而极大无关组就是上述列向量组．

上例的结论对于一般的阶梯形矩阵是成立的，当矩阵不是阶梯形矩阵时，又如何求呢？我们知道任何一个矩阵都可以通过初等行变换化为阶梯形矩阵．因此，有下列

结论.

定理 3.4.2 列向量组通过初等行变换不改变线性相关性.

证 由定理 3.3.2 知，向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k\}$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{O}$$

是否有非零解决定.

现经过初等行变换

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k)$$

由定理 3.1.1 知

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{O}$$

和

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{O}$$

为同解方程组，所以向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k\}$和向量组$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k\}$相同.

至此，我们一方面知道可以用初等行变换来求列向量组的秩和极大无关组，另一方面又对矩阵秩有了新的了解，即矩阵秩就是列向量组中极大无关组的个数. 又知 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$，因此有下面的定理.

定理 3.4.3 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 = 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩 = 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩.

因此，求一个向量组的秩与极大无关组的具体步骤如下:

第 1 步 将这些向量作为矩阵的列构成一个矩阵;

第 2 步 用初等行变换将其化为阶梯形矩阵，则阶梯形矩阵中非零行的数目即为向量组的秩;

第 3 步 首非零元所在列对应的原来的向量组即为极大无关组.

例 3.4.6 设向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

求向量组的秩及其一个极大无关组.

解 第 1 步 设矩阵 $\boldsymbol{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$

第 2 步 用初等行变换把 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 所对应的阶梯形矩阵中非零行的数目即为向量组的秩. 具体计算如下:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 14 & 6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{③+①\cdot(-2) \\ ④+①\cdot(-4)}]{②+①} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{④}+\text{②}\cdot(-2/3)]{\text{③}+\text{②}\cdot(-1/3)}\begin{pmatrix}1&0&3&2&1\\0&3&3&3&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&-4&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{(\text{③},\text{④})}\begin{pmatrix}1&0&3&2&1\\0&3&3&3&0\\0&0&0&-4&-4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

从 $\boldsymbol{A}$ 所对应的阶梯形矩阵中知，有 3 个非零行，即 α_1，α_2，α_3，α_4，α_5 的秩为 3 .

第 3 步　首非零元所在列对应的原来的向量组即为极大无关组，从 $\boldsymbol{A}$ 所对应的阶梯形矩阵中知，有 3 个线性无关的向量，首非零元所在列对应的原来的向量分别为 α_1，α_2，α_4，故 α_1，α_2，α_4 为其向量组的一个极大无关组 .

例 3.4.7　设

$$\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7)=\begin{pmatrix}1&1&3&1&2&4&4\\0&0&1&0&0&2&2\\0&1&1&1&3&5&6\\1&0&0&1&2&2&3\end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{A}$ 列向量组的一个极大无关组，并求出其余向量由此极大无关组线性表出的表达式 .

解　第 1 步　用初等行变换把 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 所对应的阶梯形矩阵中非零行的数目即为向量组的秩 . 具体计算如下:

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{④}+\text{①}\cdot(-1)}\begin{pmatrix}1&1&3&1&2&4&4\\0&0&1&0&0&2&2\\0&1&1&1&3&5&6\\0&-1&-3&0&0&-2&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(\text{②},\text{③})}\begin{pmatrix}1&1&3&1&2&4&4\\0&1&1&1&3&5&6\\0&0&1&0&0&2&2\\0&-1&-3&0&0&-2&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{④}+\text{②}}\begin{pmatrix}1&1&3&1&2&4&4\\0&1&1&1&3&5&6\\0&0&1&0&0&2&2\\0&0&-2&1&3&3&5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{④}+\text{③}\cdot 2}\begin{pmatrix}1&1&3&1&2&4&4\\0&1&1&1&3&5&6\\0&0&1&0&0&2&2\\0&0&0&1&3&7&9\end{pmatrix}$$

从 $\boldsymbol{A}$ 所对应的阶梯形矩阵中知，有 4 个非零行 . 由此可知，列向量组的秩为 4 .

第 2 步　首非零元所在列对应的原来的向量组即为极大无关组 . 从 $\boldsymbol{A}$ 所对应的阶梯形矩阵中知，有 4 个线性无关的向量，首非零元所在列对应的原来的向量分别为 α_1，α_2，α_3，α_4，即

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_4=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

为一个极大无关组.

第3步 为求线性表达式，可逐个求解线性方程组.令

$$\alpha_5=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3+\lambda_4\alpha_4$$

即

$$\begin{pmatrix}2\\0\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&3&1\\0&0&1&0\\0&1&1&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{pmatrix}$$

解得 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=0$，$\lambda_3=0$，$\lambda_4=3$，所以

$$\alpha_5=-\alpha_1+3\alpha_4$$

同理可得

$$\alpha_6=-5\alpha_1-4\alpha_2+2\alpha_3+7\alpha_4$$

$$\alpha_7=-6\alpha_1-5\alpha_2+2\alpha_3+9\alpha_4$$

定理3.4.4 向量组中每一个向量由极大无关组的向量线性表出的表达式是唯一确定的.

证 设$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}$ S的极大无关组，α为S中的向量，假设

$$\alpha=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_k\alpha_k$$

和

$$\alpha=\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2+\cdots+\mu_k\alpha_k$$

两式相减得

$$\mathbf{0}=(\lambda_1-\mu_1)\alpha_1+(\lambda_2-\mu_2)\alpha_2+\cdots+(\lambda_k-\mu_k)\alpha_k$$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}$

$$\lambda_1-\mu_1=\lambda_2-\mu_2=\cdots=\lambda_k-\mu_k=0$$

即

$$\lambda_1=\mu_1,\ \lambda_2=\mu_2,\ \cdots,\ \lambda_k=\mu_k$$

习题 3.4

1. 求下列向量组的秩及其一个极大无关组，并将其余向量用极大无关组线性表出：

(1) $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -9 \\ -16 \\ 22 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(2) $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

2. 设向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix},\ \alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix},\ \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1) α_1, α_4 线性无关;

(2) α_1, α_4 的极大无关组.

3. 设向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_s\}$ $s > r)$ 秩, 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_s\}$

4. 设$\beta_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_r$, $\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_r$, $\cdots$, $\beta_r = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{r-1}$, 证明: $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 与$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 有相同的秩

*3.5　向量空间

3.5.1　向量空间的定义

定义 3.5.1　设 P 是分量为实数的所有 n 维向量组成的集合, 对于集合 P 内的元素定义了加法运算和数乘两种运算, 并且若对于任意 n 维向量 $\alpha, \beta \in P$, 都有 $\alpha + \beta \in P$, $k\alpha \in P$　$k \in \mathbf{R}$)　**n 维向量空间, 记作 $\mathbf{R}^n$** .

定义 3.5.2　$\mathbf{R}^n$ 中的向量组 V 如果满足下列两个条件:

(1)　k 和任意向量 $\alpha \in V$, 都有 $k\alpha \in V$;

(2)　α, $\beta \in V$, 都有 $\alpha + \beta \in V$, 则称向量组 V 为 $\mathbf{R}^n$ 的一个向量子空间(简称子空间)

简单地说, 向量子空间即为 n 维向量中对加法运算以及对数乘运算封闭的向量组.

例 3.5.1　$\mathbf{R}^n$ 本身是 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间. 这是因为, 对任意实数

$k\in\mathbf{R}$和 $\alpha\in\mathbf{R}^n$，都有 $k\alpha\in\mathbf{R}^n$，并且对于任意 α，$\beta\in\mathbf{R}^n$，都有 $\alpha+\beta\in\mathbf{R}^n$.

例 3.5.2　只有一个零向量构成的向量组，也是 $\mathbf{R}^n$ 一个子空间，且称为零子空间.

$\mathbf{R}^n$ 和零子空间称为 $\mathbf{R}^n$ 的平凡子空间.

例 3.5.3　设向量组

$$S=\left\{\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}\middle|\, a\text{为任意实数}\right\}$$

是否为 $\mathbf{R}^2$ 中的向量子空间?

解　由于

$$2\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a\\2\end{pmatrix}\notin S$$

所以向量组 S 就不是 $\mathbf{R}^2$ 中的向量子空间.

例 3.5.4　设向量组

$$S=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}\middle|\, a,\ b\text{为任意实数}\right\}$$

是否为 $\mathbf{R}^3$ 的向量子空间?

解　任取数 k，和 $\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}\in S$，因

$$k\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka\\kb\\0\end{pmatrix}\in S$$

又任取 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\0\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\0\end{pmatrix}$，因

$$\alpha+\beta=\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+a_2\\b_1+b_2\\0\end{pmatrix}\in S$$

所以 S 是 $\mathbf{R}^3$ 中的一个向量子空间.

例 3.5.4 说明了判别一个向量组是否为向量子空间的一般步骤.

3.5.2　向量空间的基与维数

定义 3.5.3　设向量组 V 是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间，则向量组 V 的一个极大无关组称为子空间 V 的一组基，并且向量组 V 的秩称为子空间 V 的维数，记作 $\dim V$.

利用极大无关组的定义 3.4.2 和定义 3.5.3，若 α_1，α_2，…，α_s 是子空间 V 的一组极大线性无关的向量，那么 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 就是 V 的一组基　s 就是子空间 V 的维数.

例 3.5.5　在 $\mathbf{R}^n$ 中，因为 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，⋯，$\boldsymbol{e}_n$ 线性无关，并且是 $\mathbf{R}^n$ 的极大无关组，所以 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$是$\mathbf{R}^n$ 的一组基，从而 $\mathbf{R}^n$ 的维数是 n .

例 3.5.6　在向量子空间

$$S = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \Bigg| \ a，b \text{为任意实数}$$

中，因 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是线性无关的，而 S 中任意向量

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

都能用 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 线性表出，所以 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是 S 的基，并由此知 S 的维数为 2，即 $\dim S = 2$.

需要强调的是，向量的维数和向量空间的维数是两个不同的概念．一个向量有 n 个分量，就把这个向量称为 n 维向量；而由 n 维向量构成的向量子空间，它的维数是指基中所含向量的个数，因此可能为 0，1，⋯，n，由于已知超过 n 个的 n 维向量一定线性相关，所以由 n 维向量构成的向量子空间的维数不会超过 n .

我们把关于向量的秩，向量组的极大无关组的结论引至向量子空间的维数和基中，得到以下三点结论：

(1)

(2)

数．因此，向量子空间的维数是一个特征量；

(3)

确定的．

定义 3.5.4　设$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$　　　　V的基，对任何 $\alpha \in V$，其唯一表达式

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_r\alpha_r$$

则称向量

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_r \end{pmatrix}$$

为 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$　　坐标向量，而数 a_1，a_2，⋯，a_r 为 α 的坐标分量．

例 3.5.7　下列向量组是否为 $\mathbf{R}^3$ 的基，若是，求向量 $\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 在该基下的坐标．

(1) $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$，$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$，$\alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

解　因已知 $\mathbf{R}^3$ 的维数为 3，所以只要是三个线性无关的向量就构成 $\mathbf{R}^3$ 的基 .

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{② + ①\cdot(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{③ + ②\cdot 3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$　$\mathbf{R}^3$ 的一组基 .

其次，求坐标，即解方程组

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \lambda_3 \alpha_3 = \alpha$$

即

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

得 $\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = 1$，$\lambda_3 = -1$，所以 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(2)　α_3 为零向量，故 α_1，α_2，α_3 必线性相关，所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$　$\mathbf{R}^3$ 的基 .

(3) $$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{①\cdot(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[③ + ①\cdot(-3)]{② + ①} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{③ + ②\cdot(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

显然，α_1，α_2，α_3 线性相关，所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$　$\mathbf{R}^3$ 的基 .

如何求出向量子空间 V 的一组基呢？对有限向量所构成的向量组，可以用 3.4 节的方法 . 一般地，向量子空间有无穷多个向量，就不能用 3.4 节的方法 . 从 V 的构成特点出发，下面我们只讨论两种特殊情况 .

1. 若向量子空间 V 中每个向量是由 r 个独立的任意常数所确定，则分别令一个

任意常数取 1，其余取 0 所对应得到的 r 个向量即构成一组基．这是由定理 3.3.5 所保证的．

例 3.5.8　设 $V = \begin{matrix} a \\ b \\ b \end{matrix} \Bigg| a, b$ 为任意实数 为 $\mathbf{R}^3$ 的向量子空间，求一组基．

解　向量子空间 V 中的向量是由两个独立的任意常数 a，b 确定的．于是，我们令 $a = 1$，$b = 0$，得到向量

$$\alpha_1 = \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

再令 $a = 0$，$b = 1$，得到向量

$$\alpha_2 = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$$

下面验证 $\alpha_1, \alpha_2\}$　　V 的一组基．

由定理 3.3.5 知，α_1，α_2 线性无关，且 V 中的每一个向量都能由 α_1，α_2 线性表出：

$$\begin{matrix} a \\ b \\ b \end{matrix} = a\alpha_1 + b\alpha_2$$

所以 $\alpha_1, \alpha_2\}$　　V 的一组基．

例 3.5.9　设

$$V = \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} \Bigg| a_1, a_2, a_3, a_4 \text{ 为任意实数，且 } a_2 - a_3 + a_4 = 0$$

求 V 的一组基．　　　　　　V 是 $\mathbf{R}^4$ 中的向量子空间．)

解　因 a_2，a_3，a_4 要满足 $a_2 - a_3 + a_4 = 0$，所以其中只要两个是独立的任意常数，故 V 中的向量由三个独立的任意常数所确定，不妨设 a_1，a_2，a_3 为独立的任意常数．于是

令 $a_1 = 1$，$a_2 = a_3 = 0$，得 $a_4 = 0$，有

$$\alpha_1 = \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

令 $a_2 = 1$，$a_1 = a_3 = 0$，得 $a_4 = -1$，有

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

令 $a_3 = 1$, $a_1 = a_2 = 0$, 得 $a_4 = 1$, 有

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

则 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ V的一组基 .

请读者验证其为基 .

2. 若向量子空间 V是向量组 α_1, α_2, …, α_s 所生成的, 即

$$V = \beta = \sum_{i=1}^{s} k_i \alpha_i \,\Big|\, k_i \text{ 为任意实数}, i = 1,2,\cdots, s$$

则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$ V的一组基 .

例 3.5.10 设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

所谓由 α_1, α_2, α_3 所生成的向量子空间是指由所有形如

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3$$

的向量所构成的向量组 V, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意实数 . 易验证 V是向量子空间, 向量子空间 V的基为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

梯形矩阵

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[③ + ① \cdot (-1)]{② + ① \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[④ + ②]{③ + ②} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 2, $\alpha_1, \alpha_2\}$ V的一组基, 下面进行验证 .

因 α_1, α_2 线性无关, 而 $\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2$, 因此 V中任何一个向量

$$\begin{aligned} k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 &= k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 (2\alpha_1 - \alpha_2) \\ &= (k_1 + 2k_3)\alpha_1 + (k_2 - k_3)\alpha_2 \end{aligned}$$

由定义 3.5.3 知, $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ V的一组基 .

在实际应用中若原来考虑的范围不构成向量子空间, 则可利用生成向量子空间的方法, 把考虑范围扩大为向量子空间 .

习题 3.5

1. 判断下列向量组是否为向量子空间:

(1) $V=\left\{\begin{bmatrix}a\\a\\b\\b\end{bmatrix}\middle|\ a,\ b\text{ 为任意实数}\right\}$　(2) $V=\left\{\begin{bmatrix}2\\a\\b\\b\end{bmatrix}\middle|\ a,\ b\text{ 为任意实数}\right\}$

(3) $V=\left\{\begin{bmatrix}-a\\a\\-2a\\3a\end{bmatrix}\middle|\ a\text{ 为任意实数}\right\}$　(4) $V=\left\{\begin{bmatrix}a\\b\\0\\c\end{bmatrix}\middle|\ a,\ b,\ c\text{ 为任意实数}\right\}$

(5) $V=\{[x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}} \mid x_1+x_2+\cdots+x_n=0\}$

(6) $V=\{[x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}} \mid x_1+x_2+\cdots+x_n=1\}$

2. 下述向量组是否是 $\mathbf{R}^4$ 的基？若是，求向量

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}2\\-6\\5\\-9\end{bmatrix}$$

在该基下的坐标向量.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\2\\3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-2\\-1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\-3\\-3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}3\\2\\-1\\2\end{bmatrix}$

3. 求下列向量子空间的基和维数:

(1) $V_1=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\middle|\ x_1+2x_2-3x_3=0\right\}$

(2) $V_2=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\0\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\middle|\ x_1, x_2, x_3\text{ 为任意实数}\right\}$

$$(3)\quad V_3 = \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} \;\Bigg|\; x_1 = 2x_2 = 3x_3 = 4x_4$$

4. 证明: 由 $\alpha_1 = [1,1,1]^T$, $\alpha_2 = [1,1,0]^T$, $\alpha_3 = [1,0,1]^T$ 所生成的向量子空间就是 $\mathbf{R}^3$.

5. 由 $\alpha_1 = [1,1,0,0]^T$, $\alpha_2 = [1,0,1,1]^T$ 所生成的向量子空间记作 V_1, 由 $\beta_1 = [2,-1,3,3]^T$, $\beta_2 = [0,1,-1,-1]^T$ 所生成的向量子空间记作 V_2, 证明: $V_1 = V_2$.

3.6　线性方程组解的结构

我们用向量空间的观点来说明线性方程组解的结构.

3.6.1　齐次线性方程组解的结构

关于齐次线性方程组

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{O} \tag{3.6.1}$$

的解, 我们将已得到的结论归纳如下:

1. 当 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵时, 方程组 3.6.1)

r $\boldsymbol{A}) = n$;

2. 当 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵时, 方程组 3.6.1)　r $\boldsymbol{A}) < n$;

3. 当 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, r $\boldsymbol{A}) = r$ 时, 方程组 3.6.1)　$n - r$ 个自由元.

下面讨论齐次线性方程组(3.6.1)

性质 3.6.1　若 $\boldsymbol{X}_1$ 和 $\boldsymbol{X}_2$ 为齐次线性方程组 3.6.1)　$\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2$ 亦为 3.6.1)　.

证　由已知条件有 $\boldsymbol{AX}_1 = \boldsymbol{O}$ 和 $\boldsymbol{AX}_2 = \boldsymbol{O}$, 所以

$$\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2) = \boldsymbol{AX}_1 + \boldsymbol{AX}_2 = \boldsymbol{O} + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}$$

性质 3.6.2　若 $\boldsymbol{X}$ 为 3.6.1)　k, $k\boldsymbol{X}$ 亦为 3.6.1)　.

证　由已知条件有 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{O}$, 所以

$$\boldsymbol{A}\quad k\boldsymbol{X}) = k\boldsymbol{AX} = k\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}$$

利用性质 3.6.1 和性质 3.6.2, 我们有如下定理.

定理 3.6.1　齐次线性方程组(3.6.1)　$\mathbf{R}^n$ 中的向量子空间, 称之为齐次线性方程组 3.6.1)　解空间.

由 3.5 节向量空间知, 要掌握向量子空间中的所有向量, 只要掌握向量子空间的一组基即可, 因为由基向量的所有线性组合即可得到向量子空间的全部向量. 把这个结论应用到齐次线性方程组 3.6.1)　3.6.1)

解空间的一组基即可. 若 α_1, α_2, $\cdots$, α_s 为 3.6.1)

方程组 3.6.1)

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$$

其中 k_1, k_2, …, k_s 为任意常数.

下面, 我们给齐次线性方程组 3.6.1)

定义 3.6.1 齐次线性方程组(3.6.1) 3.6.1)

基础解系. 即将齐次线性方程组 3.6.1) 3.6.1)

(1)

(2) 3.6.1)

齐次线性方程组 $AX=O$ 的解空间是多少维呢?由本节开头归纳的第3条,"当 r $A)=r$时, 方程组 $AX=O$ 有 $n-r$ 个自由元", 利用3.5节所讲的求向量子空间的基的方法中第一种情形知, 这时解空间的基共有 $n-r$ 个解向量, 也即解空间是 $n-r$ 维的.

这样, 齐次方程组 3.6.1) 4条结论.

4. 当 A 为 $m\times n$ 矩阵, r $A)=r<n$ 时, 线性方程组 3.6.1) $\mathbf{R}^n$ 中的 $n-r$ 维向量子空间. 它的每一个基础解系含有 $n-r$ 个解向量. 若 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}\}$为基础解系, 则

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-r}\alpha_{n-r} \tag{3.6.2}$$

即为 $AX=O$ 的全部解, 其中 k_1, k_2, …, k_{n-r} 为任意实数. 形如 3.6.2) $AX=O$ 的通解.

下面给出求齐次线性方程组 $AX=O$ 解的一般步骤:

第1步 用初等行变换将系数矩阵 A 化为阶梯形矩阵;

第2步 写出齐次线性方程组的一般解. 设 r $A)=r$, 若 $r=n$, 则方程组 $AX=O$有唯一零解; 若 $r<n$, 则有无穷多解. 此时把阶梯形矩阵中的首非零元所在列对应的未知量 r 个划去, 剩余下 $n-r$ 个未知量作为自由元.

第3步 求基础解系. 分别令一个自由元为1, 其余自由元全为零, 求得 $n-r$ 个解向量 α_1, α_2, …, α_{n-r}, 即为 $AX=O$ 的一个基础解系.

第4步 求齐次线性方程组 $AX=O$ 的通解. 求出齐次线性方程组 $AX=O$ 的一个基础解系后, 通解 X 可以写成如下形式:

$$X=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-r}\alpha_{n-r}$$

其中 k_1, k_2, …, k_{n-r} 为任意常数, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}\}$ $AX=O$ 的一个基础解系.

利用以上四步, 我们可以求出齐次线性方程组 $AX=O$ 的通解.

注意: 由于对于 $n-r$ 个自由未知数 x_{r+1}, …, x_n 所取一组 $n-r$ 个数, 构成的一组 $n-r$ 个线性无关的解向量只要在保持其线性无关的条件下是可以任意的, 因此基础解系并不唯一. 但是, 实际上我们只需要用上述方式求出一个基础解系就可以了.

例 3.6.1 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -5x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_1 - 11x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

的基础解系和通解．

解　第 1 **步　用初等行变换将系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形矩阵，即**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & -11 & 2 & -5 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{③+① \\ ④+①\cdot(-3)}]{②+①\cdot 5} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -14 & 3 & -7 \\ 0 & -14 & 3 & -7 \\ 0 & 14 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[④+②]{③+②\cdot(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -14 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{②\cdot(-1/14)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3/14 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

第 2 **步　写出齐次线性方程组的一般解．**

从阶梯形矩阵知，有 2 **个非零行，即** $r\ \boldsymbol{A}) = r = 2 < 4 = n$，**故原方程组有非零解，阶梯形矩阵所对应的方程组为**

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 - (3/14)x_3 + (1/2)x_4 = 0 \end{cases} \tag{3.6.3}$$

由于 $n - r = 4 - 2 = 2$，**所以方程组** 3.6.3)　2 **个自由元，不妨设为** x_3，x_4，**并把自由元** x_3，x_4 **移到方程组** 3.6.3)　　3.6.3)

$$\begin{cases} x_1 = (-5/14)x_3 + (1/2)x_4 \\ x_2 = (3/14)x_3 - (1/2)x_4 \end{cases} \tag{3.6.4}$$

第 3 **步　求出基础解系．**

由第 2 **步知，其基础解系由** 2 **个线性无关的解向量组成．**

在一般解(3.6.4)　　$x_3 = 1$，$x_4 = 0$，**解得** $x_1 = -5/14$，$x_2 = 3/14$，**得到一个解向量为**

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} -5/14 \\ 3/14 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

在一般解(3.6.4)　　$x_3 = 0$，$x_4 = 1$，**解得** $x_1 = 1/2$，$x_2 = -1/2$，**得到一个解向量为**

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

于是，基础解系为 $\{\alpha_1, \alpha_2\}$

第 4 步　求齐次线性方程组的通解．

利用第 3 步，可得原齐次线性方程组的通解 $\boldsymbol{X}$ 为

$$\boldsymbol{X} = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$$

即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} -5/14 \\ 3/14 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中 k_1，k_2 为任意常数．

显而易见，用这种方法求出齐次线性方程组的通解和 3.1 节求出的一般解的矩阵形式是一样的．由于基础解系可以有多种取法，所以通解和一般解的形式未必一样．

3.6.2　非齐次线性方程组的解的结构

关于非齐次线性方程组

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B} \tag{3.6.5}$$

的解，将已得到的结论归纳如下：

1．$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 有解的充分必要条件为：$r(\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{B}) = r(\boldsymbol{A})$

2．当 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵时，若 $r(\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{B}) = r(\boldsymbol{A}) = n$，$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 的解唯一；

3．当 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵时，若 $r(\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{B}) = r(\boldsymbol{A}) = r < n$，$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 有无穷多组解，有 $n - r$ 个自由元．

下面将继续讨论若 $r(\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{B}) = r(\boldsymbol{A}) = r < n$，线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 有无穷多组解的情形．

性质 3.6.3　若 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$ 为 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 的解，则 $\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2$ 必为 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{O}$ 的解．

证　因为 $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$ 为 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 的解，所以有 $\boldsymbol{AX}_1 = \boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{AX}_2 = \boldsymbol{B}$，得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2) = \boldsymbol{AX}_1 - \boldsymbol{AX}_2 = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$$

性质 3.6.4　若 $\boldsymbol{X}_0$ 为 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 的解，η 为 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{O}$ 的解，则 $\boldsymbol{X}_0 + \eta$ 必为 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 的解．

证　因 $\boldsymbol{X}_0$ 为 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 的解，所以有 $\boldsymbol{AX}_0 = \boldsymbol{B}$．因 η 为 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{O}$ 的解，所以又有 $\boldsymbol{A}\eta = \boldsymbol{O}$，得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_0 + \eta) = \boldsymbol{AX}_0 + \boldsymbol{A}\eta = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{B}$$

利用这两条性质可以得到：

定理 3.6.2　设 $\boldsymbol{X}_0$ 是非齐次线性方程组 (3.6.5) (3.6.5) 意一个解 $\boldsymbol{X}$ 可以表示成 $\boldsymbol{X}_0$ 与相应的齐次线性方程组 (3.6.1) η 之和：

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_0 + \eta$$

证　把 $\boldsymbol{X}$ 表示为

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_0 + (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_0)$$

令 珚α= $\boldsymbol{X}$ - $\boldsymbol{X}_0$，由性质 3.6.3 知，珚α 为 3.6.1)

由于齐次线性方程组(3.6.1) 3.6.1) α_1，α_2，…，α_{n-r}} 3.6.2 即说明非齐次线性方程组(3.6.5) $\boldsymbol{X}$ 都能表示为

$$\boldsymbol{X} = \alpha_0 + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{n-r}\alpha_{n-r}$$

其中 α_0 是 3.6.5) α_0 是(3.6.5)的特解)

数 k_1，k_2，…，k_{n-r}，因 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{n-r}\alpha_{n-r}$ 是 3.6.1)

3.6.4 知

$$\alpha_0 + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{n-r}\alpha_{n-r}$$

一定是 3.6.5)

这样，非齐次线性方程组 3.6.5) 如下:

4. 当 r $\boldsymbol{A}$… $\boldsymbol{B}$)) = r $\boldsymbol{A}$) = $r < n$ 时，若 α_0 为线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 的一个特解，α_1，α_2，…，α_{n-r}为相应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{O}$ 的一个基础解系，则线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$的全部解为

$$\alpha_0 + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{n-r}\alpha_{n-r} \tag{3.6.6}$$

其中 k_1，k_2，…，k_{n-r}为任意常数 .

今后把(3.6.6) $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 的通解 . 简言之: 非齐次线性方程组的一个特解加上相应的齐次线性方程组的通解即为非齐次线性方程组的通解 .

求非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ (其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵)

第 1 步　用初等行变换将增广矩阵($\boldsymbol{A}$… $\boldsymbol{B}$)

第 2 步　判别线性方程组是否有解 ? 利用相容性定理，即当 r $\boldsymbol{A}$… $\boldsymbol{B}$)) = r $\boldsymbol{A}$) = r 时，线性方程组有解，并把不在首非零元所在列对应的 $n - r$ 个变量作为自由元;

第 3 步　求出非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 的一个特解 . 一般地令所有 $n - r$ 个自由未知元为零，就可以求得 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 的一个特解 α_0;

第 4 步　求出相应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{O}$ 的基础解系 . 从阶梯形矩阵中，不计算增广矩阵的最后一列，一般地分别令一个自由元为 1，其余自由元为零，得到 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{O}$ 的一个基础解系 α_1，α_2，…，α_{n-r}}

第 5 步　写出非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 的通解 . 利用非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 解的结构，即 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 的通解为

$$\boldsymbol{X} = \alpha_0 + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{n-r}\alpha_{n-r}$$

其中 k_1，k_2，…，k_{n-r}为任意常数 .

例 3.6.2　求线性方程组的通解

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 &= -2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 23 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 5x_5 &= 12 \end{aligned}$$

解 第1步 用初等行变换将增广矩阵$(\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{B})$

$$(\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -5 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[④+①\cdot(-5)]{②+①\cdot(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -10 & -23 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[④+②\cdot(-1)]{③+②} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{④\cdot(-1/4) \\ (③,④)}]{②\cdot(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

第2步 判别线性方程组是否有解.

利用相容性定理,从阶梯形矩阵知,由于 $r(\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{B})) = r(\boldsymbol{A}) = r = 3 < 5$,故线性方程组有无穷多解,此时 $n - r = 5 - 3 = 2$,有2个自由元,取 x_3, x_4 为自由元,阶梯形矩阵所对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

得到一般解为

$$\begin{cases} x_1 = -16 + x_3 + x_4 \\ x_2 = 23 - 2x_3 - 2x_4 \\ x_5 = 0 \end{cases} \tag{3.6.7}$$

第3步 求出非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 的一个特解 α_0.

在一般解(3.6.7) $x_3 = x_4 = 0$,有 $x_1 = -16$, $x_2 = 23$, $x_5 = 0$,得到一个特解为

$$\alpha_0 = [-16, 23, 0, 0, 0]^{\mathrm{T}}$$

第4步 求出相应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{O}$ 的基础解系.

从阶梯形矩阵所对应的方程组中去掉常数项,可得相应的齐次线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

或者从一般解中去掉常数项，可得相应的齐次线性方程组的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 \qquad (x_3,\ x_4 \text{ 为自由元}) \\ x_5 = 0 \end{cases} \tag{3.6.8}$$

在 3.6.8)　　$x_3 = 1, x_4 = 0$，有 $x_1 = 1, x_2 = -2, x_5 = 0$，得到一个解向量为

$$\alpha_1 = [1, -2, 1, 0, 0]^T$$

在　　$x_3 = 0, x_4 = 1$，有 $x_1 = 1, x_2 = -2, x_5 = 0$，得到另一个解向量为

$$\alpha_2 = [1, -2, 0, 1, 0]^T$$

所以，$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{O}$ 的一个基础解系为 $\alpha_1, \alpha_2\}$

第 5 步　写出非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 的通解．

利用非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 解的结构，于是所求通解 $\boldsymbol{X}$ 为

$$\boldsymbol{X} = \alpha_0 + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$$

即

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} -16 \\ 23 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中 k_1, k_2 为任意常数．

例 3.6.3　设非齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

试就 a, b

解　第 1 步　用初等行变换将增广矩阵 $(\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{B})$

$$(\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{B}) = \left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{(①,②)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[③+①\cdot(-1)]{②+①\cdot(-a)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & 1-ab & 1-a & 4-3a \\ 0 & b & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{②+③\cdot a} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1-a & 4-2a \\ 0 & b & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{③+②\cdot(-b)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1-a & 4-2a \\ 0 & 0 & ab-b & 2ab-4b+1 \end{array}\right]$$

第 2 步　判别线性方程组是否有解 .

利用相容性定理，从阶梯形矩阵知：

(1)　$b=0$ 时，阶梯形矩阵化为如下形式，即

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B}) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1-a & 4-2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

易知，$2=r(\boldsymbol{A})\neq r((\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B}))=3$，所以原方程组无解 .

(2)　$a=1$ 且 $b\neq 1/2$ 时，阶梯形矩阵化为如下形式，即

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B}) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2b \end{array}\right)$$

易知，$2=r(\boldsymbol{A})\neq r((\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B}))=3$，所以原方程组无解 .

(3)　$a=1$ 且 $b=1/2$ 时，阶梯形矩阵化为如下形式，即

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B}) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

易知，$r(\boldsymbol{A})=r((\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B}))=2<3=n$，所以原方程组有无穷多个解，其通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{其中 } k \text{ 为任意常数})$$

(4)　$a\neq 1$ 且 $b\neq 0$ 时，从阶梯矩阵知，$r(\boldsymbol{A})=r((\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B}))=3=n$，故原方程组有唯一解，且解为

$$x_1=\frac{2b-1}{b(a-1)},\quad x_2=\frac{1}{b},\quad x_3=\frac{2ab-4b+1}{b(a-1)}$$

从上述讨论得知，当 $b=0$ 时或当 $a=1$ 且 $b\neq 1/2$ 时，方程组无解；当 $a=1$ 且 $b=1/2$ 时，方程组有无穷多个解；当 $a\neq 1$ 且 $b\neq 0$ 时，方程组有唯一解 .

习题 3.6

1. 求下列齐次线性方程组的一个基础解系和通解：

(1) $$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0 \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} x_1+x_2-x_4-x_5=0 \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0 \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0 \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0 \end{cases}$$

(3) $$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5=0 \\ 2x_1+x_2-x_3-x_4-x_5=0 \\ x_1+7x_2-5x_3-5x_4+5x_5=0 \\ 3x_1-x_2-2x_3+x_4-x_5=0 \end{cases}$$

(4) $$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0 \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=0 \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=0 \\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=0 \end{cases}$$

2. 求下列线性方程组的通解:

(1) $\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-4x_4=1 \\ x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=-1 \\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5=3 \\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=3 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=-1 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4 \\ x_2-x_3+x_4=-3 \\ x_1+3x_2+x_4=1 \\ -7x_2+3x_3+x_4=-3 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_4+2x_5=1 \\ x_1-x_2-3x_3+x_4-3x_5=1 \\ 2x_1-3x_2+4x_3-5x_4+2x_5=7 \\ 9x_1-9x_2+6x_3-16x_4+2x_5=25 \end{cases}$　(4) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1 \\ 3x_1-2x_2+2x_3-3x_4=2 \\ 5x_1+x_2-x_3+2x_4=-1 \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=4 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=1 \\ 2x_1+2x_2+2x_3-x_4=1 \\ 5x_1+5x_2+2x_3=2 \end{cases}$

3. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 都是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的解, 证明: $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t$ 亦是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的解, 其中 $k_1+k_2+\cdots+k_t=1$.

4. 若 α_0 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的解, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的基础解系, 令

$$\beta_1=\alpha_0+\alpha_1,\ \beta_2=\alpha_0+\alpha_2,\ \cdots,\ \beta_t=\alpha_0+\alpha_t$$

证明: $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的任意一个解 α 均可表示成

$$\alpha=\mu_0\alpha_0+\mu_1\beta_1+\mu_2\beta_2+\cdots+\mu_t\beta_t$$

其中 $\mu_0+\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_t=1$

本章内容提要

1. 用高斯消元法求线性方程组的解.

2. 线性方程组的相容性定理.

3. n 维向量空间的基本知识:

(1) n 维向量的定义;

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

(7) n 维向量空间及向量子空间的概念.

4. 线性方程组解的结构:

(1)

(2)

*第 4 章　相似矩阵与二次型

本章主要介绍正交矩阵、相似矩阵的概念，矩阵的特征值、特征向量的概念及求法，n 元二次型、正定二次型的概念，化二次型为标准形以及正定二次型的判别方法等 .

本章所讨论的矩阵均为方阵，矩阵中元素都是实数 .

4.1　正交矩阵

4.1.1　向量的内积

定义 4.1.1　设有两个 n 维向量

$$\alpha=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\cdots\\a_n\end{bmatrix},\qquad \beta=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\cdots\\b_n\end{bmatrix}$$

记 $(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$，则 (α,β) 称为向量 α 与 β 的内积 .

内积是向量的一种运算，如果用矩阵记号表示，向量的内积还可写成

$$(\alpha,\beta)=\alpha^{\mathrm T}\beta=[a_1,a_2,\cdots,a_n]\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\cdots\\b_n\end{bmatrix}$$

设 α，β，γ，为 n 维向量，λ 为实数，则内积满足下列运算规律：

1. $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$
2. $(\lambda\alpha,\beta)=\lambda(\alpha,\beta)$
3. $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$

定义 4.1.2　设

$$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$$

称 $\|\alpha\|$ 为 n 维向量 α 的长度（或范数）

当 $\|\alpha\|=1$ 时，称 α 为单位向量 .

对任何非零向量 α, $\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha$ 称为向量 α 的单位化.

向量的长度具有下述性质:

1. 非负性: 当 $\alpha\neq 0$ 时, $\|\alpha\|>0$, 当 $\alpha=0$ 时, $\|\alpha\|=0$
2. 齐次性: $\|\lambda\alpha\|=|\lambda|\cdot\|\alpha\|$
3. 三角不等式: $\|\alpha+\beta\|\leq\|\alpha\|+\|\beta\|$

4.1.2　正交向量组

定义 4.1.3　当 $(\alpha,\beta)=0$ 时, 称向量 α 与 β 正交.

例如, 向量 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix}$ 与向量 $\beta=\begin{pmatrix}2\\-4\\3\\-3\end{pmatrix}$ 是正交的.

因为
$$(\alpha,\beta)=1\cdot 2+2\cdot(-4)+3\cdot 3+1\cdot(-3)=0$$

定义 4.1.4　若非零向量组 α_1, α_2, …, α_s 中的任意两个向量都是正交的, 则称这个向量组为正交向量组.

例如, n 维单位向量 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_n$ 是正交向量组. 因为

$$(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}\quad i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

定理 4.1.1　若 n 维向量 α_1, α_2, …, α_s 是正交向量组, 则 α_1, α_2, …, α_s 线性无关.

证　用反证法. 假设有 s 个不全为零的 λ_1, λ_2, …, λ_s, 使得

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_s\alpha_s=\mathbf{0}$$

以 α_i^{T} 左乘上式两端, 得

$$\lambda_i\alpha_i^{\mathrm{T}}\alpha_i=0$$

因 $\alpha_i\neq 0$, 故 $\alpha_i^{\mathrm{T}}\alpha_i=\|\alpha_i\|^2\neq 0$, 从而 $\lambda_i=0\ (i=1,2,\cdots,s)$

组 α_1, α_2, …, α_s 线性无关.

4.1.3　向量组的正交规范化

线性无关的向量组 α_1, α_2, …, α_s, 不一定是正交向量组, 不过总可以找一组两两正交的单位向量 γ_1, γ_2, …, γ_s, 使它与 α_1, α_2, …, α_s 等价, 这一过程称为将向量组 α_1, α_2, …, α_s 正交规范化.

下面介绍将线性无关的向量组 α_1, α_2, …, α_s 正交规范化的施密特(Schimidt)法.

设 α_1, α_2, …, α_s 线性无关, 首先取

$$\beta_1=\alpha_1$$

再取 $\beta_2=\alpha_2+\lambda\beta_1$ (其中 λ 待定)

$$(\beta_2,\beta_1)=(\alpha_2+\lambda\beta_1,\beta_1)=(\alpha_2,\beta_1)+\lambda(\beta_1,\beta_1)=0$$

得

$$\lambda = -\frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}$$

所以

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$$

类似地，再取 $\beta_3 = \alpha_3 + \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2$（其中 λ_1, λ_2 待定）

$$(\beta_1, \beta_2) = 0$$

$$(\beta_3, \beta_1) = (\alpha_3, \beta_1) + \lambda_1(\beta_1, \beta_1) + \lambda_2(\beta_2, \beta_1) = 0$$

$$(\beta_3, \beta_2) = (\alpha_3, \beta_2) + \lambda_1(\beta_1, \beta_2) + \lambda_2(\beta_2, \beta_2) = 0$$

得

$$\lambda_1 = -\frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}, \quad \lambda_2 = -\frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}$$

所以

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2$$

将这个过程继续下去

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{(\alpha_s, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \cdots - \frac{(\alpha_s, \beta_{s-1})}{(\beta_{s-1}, \beta_{s-1})}\beta_{s-1}$$

再将正交向量组 β_1，β_2，…，β_s 单位化，取

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}, \quad \gamma_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}, \quad \cdots, \quad \gamma_s = \frac{\beta_s}{\|\beta_s\|}$$

于是 γ_1，γ_2，…，γ_s 就是与线性无关向量组 α_1，α_2，…，α_s 等价的正交规范向量组．

例 4.1.1　将 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ 正交规范化．

解　取

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ -5/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5/3 \\ -5/3 \\ 5/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

然而将 β_1，β_2，β_3 单位化，取

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\begin{pmatrix}2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\end{pmatrix},\quad \gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix},\quad \gamma_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

则 γ_1，γ_2，γ_3 即为所求 .

例 4.1.2　已知 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，求非零向量 β_2，β_3，使 β_1，β_2，β_3 成为正交向量组 .

解　所求的 β_2，β_3，应满足 $\beta_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$

即

$$x_1+x_2+x_3=0$$

基础解系为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

将 α_1，α_2 正交化，取

$$\beta_2=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\beta_3=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\1\\-1/2\end{pmatrix}$$

β_2，β_3 即为所求 .

4.1.4　正交矩阵

定义 4.1.5　如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵 .

例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2&-1/2\\1/2&\sqrt{3}/2\end{pmatrix}$$

都是正交矩阵 .

由定义 4.1.5 知，正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一定是可逆的，并且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；反之，若实数的方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，于是我们可以得到下列结论：

(1)　n 阶实数方阵 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

(2)　n 阶实数方阵 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$

由此可见，我们欲验证 $\boldsymbol{A}$ 是否为正交矩阵，只需验证一个等式就可以了，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，这样可以节省一半的计算量 .

例 4.1.3 判断下述矩阵是否是正交矩阵:

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ 其中 θ 为实数;

(2) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{6}/3 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{6}/6\end{pmatrix}$.

解 (1)

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵.

(2)

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{6}/3 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{6}/6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}/3 & 0 & -\sqrt{6}/3 \\ \sqrt{3}/3 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{3}/3 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}$$

所以 $\boldsymbol{B}$ 是正交矩阵.

正交矩阵具有以下性质:

性质 4.1.1 $\boldsymbol{E}$ 是正交矩阵;

性质 4.1.2 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正交矩阵, 则 $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵;

性质 4.1.3 若 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是正交矩阵;

性质 4.1.4 若 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵, 则 $\det\boldsymbol{A}=1$ 或 -1.

性质 4.1.2、性质 4.1.3 与性质 4.1.4, 读者自己可以根据正交矩阵和行列式的定义证明.

根据正交矩阵的定义, 可以知道正交矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$

$$a_{i1}a_{j1}+a_{i2}a_{j2}+\cdots+a_{in}a_{jn}=\begin{cases}1, & i=j \\ 0, & i\neq j\end{cases}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

即

(1) $\boldsymbol{A}$ 的任意一行 1;

(2) $\boldsymbol{A}$ 的任意不同的两行

这说明: 方阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的行

两正交.

因此, 读者可以直观地判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否为正交矩阵.

习题 4.1

1. 计算 (α,β)

(1) $\alpha = [-1, 0, 3, -5]^T$, $\beta = [4, -2, 0, 1]^T$

(2) $\alpha = [3/2, -1/3, 3/4, -1]^T$, $\beta = [-3/2, -2, 3, 2/3]^T$

2. 把下列向量单位化:

(1) $\alpha = [3, 0, -1, 4]^T$, (2) $\beta = [5, 1, -2, 0]^T$

3. 试证: 若 α 与 β 正交, 则对任意实数 k, l, 有 $k\alpha$, $k\beta$ 也正交 .

4. 将向量组

$$\alpha_1 = \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}, \quad \alpha_2 = \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{matrix}, \quad \alpha_3 = \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{matrix}$$

正交规范化 .

4.2 矩阵的特征值与特征向量

工程技术中的振动问题和稳定性问题, 往往可归结为求一个方阵的特征值和特征向量的问题, 矩阵的特征值和特征向量的概念不仅在理论上很重要, 而且可直接用于解决实际问题 .

4.2.1 特征值与特征向量

定义 4.2.1 设 A 为 n 阶方阵, 若存在数 λ 和 n 维非零列向量 X, 使得

$$AX = \lambda X \tag{4.2.1}$$

则称数 λ 为矩阵 A 的特征值, 称非零列向量 X 为矩阵 A 对应于特征值 λ 的特征向量 .

(4.2.1)

$$(\lambda E - A) X = O \tag{4.2.2}$$

则 4.2.2) 4.2.1, A 的特征值就是使 4.2.2) 零解的 λ, 而 4.2.2)

$$\det(\lambda E - A) = 0 \tag{4.2.3}$$

方程 4.2.3) $\det(\lambda E - A)$ λ 的 n 次多项式, 因此 A 的特征值就是该多项式的根 .

定义 4.2.2 设矩阵

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \tag{4.2.4}$$

则称矩阵

$$\lambda E - A = \begin{matrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{matrix} \tag{4.2.5}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的特征矩阵，它的行列式

$$\det \quad \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) \tag{4.2.6}$$

是 λ 的一个 n 次多项式，称 4.2.6) $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 .

易知，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，即为其特征多项式的根 .

4.2.2 特征值与特征向量的求法

下面先举一个例子，然后介绍矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量的求法 .

例 4.2.1 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{matrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{matrix} \tag{4.2.7}$$

求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量 .

解 先写出 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$\det(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda-4 & -2 \\ -1 & 3 & \lambda-1 \end{vmatrix} \xrightarrow{①+③} \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & \lambda-3 \\ -1 & \lambda-4 & -2 \\ -1 & 3 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda-4 & -2 \\ -1 & 3 & \lambda-1 \end{vmatrix} \xrightarrow[③+①]{②+①} (\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-4 & -1 \\ 0 & 3 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)\ \lambda-3)^2$$

再求特征多项式的根，即解

$$(\lambda-1)\ \lambda-3)^2 = 0$$

得到 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值为

$$\lambda_1 = 1,\quad \lambda_2 = \lambda_3 = 3$$

求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_0 的特征向量 . 利用 4.2.2) $\lambda = \lambda_0$ 代入 4.2.2) λ_0 的特征向量 .

将特征值 $\lambda_1 = 1$ 代入(4.2.2)

$$(1\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{O} \tag{4.2.8}$$

把系数矩阵通过初等行变换化为阶梯形矩阵

$$1\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = \begin{matrix} 1-2 & -3 & -2 \\ -1 & 1-4 & -2 \\ -1 & 3 & 1-1 \end{matrix} = \begin{matrix} -1 & -3 & -2 \\ -1 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow[③+①\cdot(-1)]{②+①\cdot(-1)} \begin{matrix} -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \end{matrix} \xrightarrow{(②,③)} \begin{matrix} -1 & -3 & -2 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

取 x_3 为自由元，得到 4.2.8)

$$\alpha_1 = \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{matrix}$$

于是对于任意常数 k $\neq 0)$ $k\alpha_1$ 均为 $4.2.8)$ $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 1 的特征向量 .

再求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 3 的特征向量，即把 $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$ 代入 $(4.2.2)$ 线性方程组

$$(3\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{O} \tag{4.2.9}$$

为此，先计算

$$3\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3-2 & -3 & -2 \\ -1 & 3-4 & -2 \\ -1 & 3 & 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

对它作初等行变换化为阶梯形矩阵

$$3\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} \xrightarrow[③+①]{②+①} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

取 x_3 为自由元，得到 $4.9)$

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

于是对于任意常数 k $\neq 0)$ $k\alpha_2$ 均为 $4.2.9)$ $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 3 的特征向量 .

由此，我们可以得到两个重要的结论:

(1) $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_0 的特征向量乘以非零常数 k 仍为对应于 λ_0 的特征向量;

(2) $\boldsymbol{A}$ 对应于同一个特征值 λ_0 的两个特征向量之和仍为对应于 λ_0 的特征向量 .

上述关于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值及特征向量的求法的结论，可归纳为下述定理 .

定理 4.2.1 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，则数 λ_0 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的充分必要条件是: λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $\det(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})$ n 维向量 α 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_0 的特征向量的充分必要条件为: α 是齐次线性方程组 $\lambda_0\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{O}$ 的非零解 .

计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值、特征向量的具体步骤如下:

第 1 步 计算特征多项式 $\det(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})$

第 2 步 求出特征多项式 $\det(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})$ $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s \ (s \leq n)$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值;

第 3 步 把 $\boldsymbol{A}$ 的每一个特征值 λ_i 代入齐次线性方程组，即 $\lambda_i\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{O}$，求出每一个特征值 λ_i 的一个基础解系

$$\alpha_{i1}, \ \alpha_{i2}, \ \cdots, \ \alpha_{it_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, s)$$

则对于不全为零的任意常数 $k_{i1}, \ k_{i2}, \ \cdots, \ k_{it_i}$

$$k_{i1}\alpha_{i1} + k_{i2}\alpha_{i2} + \cdots + k_{it_i}\alpha_{it_i}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,s)$

例 4.2.2　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量 .

解　第 1 步　写出并计算特征多项式

$$\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda+2&-1&-1\\0&\lambda-2&0\\4&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda+2&-1\\4&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)^2$$

第 2 步，求出 $\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=0$ 的全部根，即解

$$(\lambda+1)(\lambda-2)^2=0$$

得到 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值为

$$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=\lambda_3=2$$

第 3 步　求出每一个特征值对应的特征向量 . 即对每一个特征值 λ, 求

$$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$$

的一个基础解系 .

对应于特征值 $\lambda_1=-1$ 的特征向量，即为求齐次线性方程组 $-1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 的一个基础解系 . 把该方程组的系数矩阵进行初等行变换化为阶梯形矩阵

$$-1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&-3&0\\4&-1&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{③+①\cdot(-4)}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&-3&0\\0&3&0\end{pmatrix}\xrightarrow{③+②}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

取 x_3 为自由元，得到其基础解系为

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 -1 的全部特征向量是

$$k_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad k_1\ \text{为任意非零的实数}$$

对应于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的特征向量，即为求齐次线性方程组 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 的一个基础解系 . 把该方程组的系数矩阵进行初等行变换化为阶梯形矩阵

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&-1&-1\\0&0&0\\4&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{③+①\cdot(-1)}\begin{pmatrix}4&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

取 x_2, x_3 为自由元，得到其基础解系为

$$\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$$

所以 A 对应于特征值 2 的全部特征向量是

$$k_2\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix},\quad k_2,\ k_3 \text{ 为任意不全为零的实数}$$

例 4.2.3　设

$$A=\begin{pmatrix}2 & -5\\3 & 4\end{pmatrix}$$

求 A 的特征值.

解

$$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 5\\-3 & \lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+23$$

由于特征多项式无实根，所以 A 在实数范围内无特征值.

从上面几个例题我们可以看到，在求矩阵的特征值和特征向量时，特征多项式的计算是很重要的.下面首先来看一下特征多项式某些系数的特征.

设 A 是 n 阶方阵，则对

$$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\-a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\\cdots & \cdots & & \cdots\\-a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

利用行列式的展开式，可以知道有一项是主对角线上元素的连乘积

$$(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})$$

展开式中的其余各项，至多包含 $n-2$ 个主对角线上的元素，它对 λ 次数最多是 $n-2$，因此特征多项式中含 λ 的 n 次与 $n-1$ 次的项只能在主对角线上元素的连乘积中出现，它们是

$$\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}$$

若在特征多项式中令 $\lambda=0$，即得常数项 $\det(-A)=(-1)^n\det A$.

因此，如果只写出特征多项式的前两项与常数项，就有

$$\det(\lambda E-A)=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\det A$$

由根与系数的关系可知，A 的全体特征值的和为 $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$（称为 A 的迹，记作 $\operatorname{tr} A$，即 $\operatorname{tr} A=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$）　A 的全体特征值的积为 $\det A$.从这里看到矩阵的特征值所展现的矩阵 A 的某些重要特征.

矩阵 A 的特征值相应的特征向量也有一些重要的特征.为了进一步弄清各特征值相应的特征向量之间的线性相关性，为此，我们有如下重要的结论.

定理 4.2.2　对称矩阵 A 的不同特征值的特征向量一定是正交的.

证　设 λ_1 与 λ_2 是对称矩阵 A 的两个不同的特征值，α_1，α_2 分别是 A 的对应于 λ_1，λ_2 的特征向量.于是有

$$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1,\quad A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2\quad(\alpha_1\neq0,\ \alpha_2\neq0)$$

因为

$$\lambda_1(\alpha_1,\alpha_2)=(\lambda_1\alpha_1,\alpha_2)=(\boldsymbol{A}\alpha_1,\alpha_2)=(\boldsymbol{A}\alpha_1)^{\mathrm{T}}\alpha_2=\alpha_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\alpha_2=\alpha_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\alpha_2$$

$$\lambda_2(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1,\lambda_2\alpha_2)=(\alpha_1,\boldsymbol{A}\alpha_2)=\alpha_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\alpha_2$$

所以

$$\lambda_1(\alpha_1,\alpha_2)=\lambda_2(\alpha_1,\alpha_2)$$

即

$$(\lambda_1-\lambda_2)\ \alpha_1,\alpha_2)=0$$

因为 $\lambda_1\neq\lambda_2$，所以 $\alpha_1,\alpha_2)=0$，即 α_1 与 α_2 正交 .

利用定理 4.1.1 和定理 4.2.2，我们得到如下结论:

定理 4.2.3　对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值的特征向量是线性无关的 .

证　由定理 4.2.2 知，$\boldsymbol{A}$ 的不同特征值的特征向量是正交的; 又由定理 4.1.1 知，正交向量是线性无关的 .

习题 4.2

1. 求下列矩阵的特征值和特征向量:

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix}$　　(6) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$　　(8) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. 设 α_1，α_2 都是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_0 的特征向量，证明: $k\alpha_1\ (k\neq0)$　$\alpha_1+\alpha_2$ 仍是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_0 的特征向量 .

3. 设 α_1 为 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_1 的特征向量，α_2 为 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_2 的特征向量，且 $\lambda_1\neq\lambda_2$，证明:

(1) α_1 和 α_2 线性无关

(2) $\alpha_1+\alpha_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量

4. 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为幂等矩阵 . 试证: 幂等矩阵的特征值只可能是 1 或者零 .

5. 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$. 试证: $\boldsymbol{A}$ 的特征值只可能是 1 或者 -1 .

6. (1)　　$\boldsymbol{A}$ 如果有特征值，则它的特征值不等于零

(2) λ_0 是可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $1/\lambda_0$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$的特征值

7. 试证:

(1) $\boldsymbol{A}$ 如果有特征值，则它的特征值是 1 或者 -1

(2) $\boldsymbol{A}$ 是奇数阶正交矩阵，且 $\det\boldsymbol{A}=1$，则 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值

(3) $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正交矩阵，且 $\det\boldsymbol{A}=-1$，则 -1 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值

(4)

4.3 相似矩阵

4.3.1 相似矩阵的概念

定义 4.3.1 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，如果存在一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是相似的，记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

相似矩阵有如下性质:

性质 4.3.1 相似矩阵有相同的行列式.

证 设 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，于是

$$\begin{aligned}\det\boldsymbol{B}&=\det(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})=\det(\boldsymbol{P}^{-1})\det\boldsymbol{A}\det\boldsymbol{P}=\det(\boldsymbol{P}^{-1})\det\boldsymbol{P}\det\boldsymbol{A}\\&=\det(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P})\det\boldsymbol{A}=\det\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

性质 4.3.2 相似矩阵具有相同的可逆性;若可逆，它们的逆矩阵也相似.

证 因矩阵的可逆性由矩阵的行列式是否为零所决定的. 由性质 4.3.1 知，所以它们具有相同的可逆性.

又设 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，且 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都可逆. 由于 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，故

$$\boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{P}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}$$

由定义 4.3.1 知，$\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}$.

性质 4.3.3 相似矩阵具有相同的特征多项式.

证 设 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$. 所以

$$\begin{aligned}\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})&=\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})=\det(\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{P})\\&=\det(\boldsymbol{P}^{-1})\det\boldsymbol{P}\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\end{aligned}$$

性质 4.3.4 相似矩阵具有相同的特征值.

证 由性质 4.3.3 立即可得性质 4.3.4.

定理 4.3.1 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，则

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$$

其中 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})$ $\boldsymbol{AB}$ 的迹.

证 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$

$\boldsymbol{AB}$ 的第 i 行第 i 列的元素为

$$a_{i1}b_{1i}+a_{i2}b_{2i}+\cdots+a_{in}b_{ni}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}$$

所以

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB}) = \sum_{i=1}^{n} (a_{i1}b_{1i} + a_{i2}b_{2i} + \cdots + a_{in}b_{ni})$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$$

又有

$\boldsymbol{BA}$ 的第 k 行第 k 列的元素为

$$b_{k1}a_{1k} + b_{k2}a_{2k} + \cdots + b_{kn}a_{nk} = \sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik}$$
$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{BA}) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$$

于是有

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{BA})$$

性质 4.3.5 相似矩阵有相同的迹.

证 设 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$$

由定理 4.3.1, 得

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{B}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{AP}))$$
$$= \operatorname{tr}((\boldsymbol{AP})\boldsymbol{P}^{-1}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{AE}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$$

既然相似矩阵具有这么多性质, 而形式最简单的矩阵又是对角矩阵. 所以下面要讨论的主要问题是: 对 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 寻求相似变换矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵. 如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能相似于对角矩阵, 则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

4.3.2 相似矩阵可对角化的条件

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 如果可对角化, 即有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{D}$$

其中 $\boldsymbol{D}$ 为对角矩阵, 即

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

即

$$\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{PD}$$

把 $\boldsymbol{P}$ 进行分块, 得

$$\boldsymbol{P} = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$$

由上式得

$$\boldsymbol{A}[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n] = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]\boldsymbol{D}$$

即

$$[\boldsymbol{A}\alpha_1, \boldsymbol{A}\alpha_2, \cdots, \boldsymbol{A}\alpha_n] = [\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \cdots, \lambda_n\alpha_n]$$

于是有

$$\boldsymbol{A}\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1,\quad \boldsymbol{A}\alpha_2 = \lambda_1\alpha_2,\quad \cdots,\quad \boldsymbol{A}\alpha_n = \lambda_n\alpha_n$$

因为 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵，所以 α_1，α_2，…，α_n 是线性无关的，由于上述推导过程可以反推回去，又知满足上述等式是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值 λ_1，λ_2，…，λ_n 分别对应的线性无关的特征向量 α_1，α_2，…，α_n．因此，关于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对角化有如下结论：

定理 4.3.2 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是：$\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量 α_1，α_2，…，α_n，并且此时以它们为列向量组的矩阵 $\boldsymbol{P}$，就能使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵，而且此对角矩阵的主对角元依次是 α_1，$\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 对应的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$．

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有不同的特征值是 λ_1，λ_2，…，λ_s．因为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_i 对应的特征向量是齐次线性方程组 $\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 的全部非零解，所以 $\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 的一个基础解系是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 λ_i 的极大线性无关的特征向量组，由于 $\boldsymbol{A}$ 有 s 个不同的特征值，于是可得到 s 组特征向量，其中每组向量都是线性无关的．问题是：把这 s 组向量合在一起成为一个大的向量组，它是否线性无关？由于这些向量都是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，因此回答是肯定的．在这里，我们只介绍一个简单重要结论，不再进行详细讨论．

定理 4.3.3 对应于不同特征值的特征向量是线性无关的．

证 设 $\boldsymbol{A}$ 的 s 个不同特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，对应的特征向量分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，不妨假设前 r $<s)$

$$\alpha_{r+1} = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r \tag{4.3.1}$$

在等式 4.3.1) λ_{r+1}，得

$$\lambda_{r+1}\alpha_{r+1} = k_1\lambda_{r+1}\alpha_1 + k_2\lambda_{r+1}\alpha_2 + \cdots + k_r\lambda_{r+1}\alpha_r \tag{4.3.2}$$

在等式 4.3.1) $\boldsymbol{A}$，得

$$\boldsymbol{A}\alpha_{r+1} = k_1\boldsymbol{A}\alpha_1 + k_2\boldsymbol{A}\alpha_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{A}\alpha_r \tag{4.3.3}$$

利用 $\boldsymbol{A}\alpha_i=\lambda_i\alpha_i\ (i=1,2,\cdots,s)$ 4.3.3)

$$\lambda_{r+1}\alpha_{r+1} = k_1\lambda_1\alpha_1 + k_2\lambda_2\alpha_2 + \cdots + k_r\lambda_r\alpha_r \tag{4.3.4}$$

用 4.3.4) 4.3.2)

$$k_1(\lambda_1-\lambda_{r+1})\alpha_1 + k_2(\lambda_2-\lambda_{r+1})\alpha_2 + \cdots + k_r(\lambda_r-\lambda_{r+1})\alpha_r = \boldsymbol{0}$$

由于 α_1，α_2，…，α_r 线性无关，所以

$$k_1(\lambda_1-\lambda_{r+1})=0,\quad k_2(\lambda_2-\lambda_{r+1})=0,\quad \cdots,\quad k_r(\lambda_r-\lambda_{r+1})=0$$

由于 λ_1，λ_2，…，λ_r，λ_{r+1} 互不相同，所以

$$k_1=0,\quad k_2=0,\quad \cdots,\quad k_r=0$$

由此可知，结论正确．

由前面讨论知，只要把 $\boldsymbol{A}$ 的全部不同的特征值求出来，设为 λ_1，λ_2，…，λ_s，然后对每个 λ_i，求出齐次线性方程组 $\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 的一个基础解系，就是 $\boldsymbol{A}$ 的极大线性无关的特征向量组．如果这个向量组有 n 个向量，则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化；如果这个向量组个数小于 n，则 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化．

例 4.3.1 判断例 4.2.1 与例 4.2.2 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能否对角化，若可对角化，找出可

逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵 .

解　(1) 在例 4.2.1 中的 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 1 与 3 (二重)　　$\lambda_1=1$，齐次线性方程组 $1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 的一个基础解系为

$$\begin{matrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{matrix}$$

对于 $\lambda_2=\lambda_3=3$，齐次线性方程组 $3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 的一个基础解系为

$$\begin{matrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}$$

因为三阶矩阵只有 2 个线性无关的特征向量，所以 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化 .

(2) 在例 4.2.2 中的 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 -1 与 2 (二重)　　$\lambda_1=-1$，齐次线性方程组 $-1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 的一个基础解系是

$$\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

对于 $\lambda_2=\lambda_3=2$，齐次线性方程组 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 的一个基础解系是

$$\begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{matrix},\quad \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{matrix}$$

于是三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量，所以 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，令

$$\boldsymbol{P}=\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{matrix}$$

则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}$$

例 4.3.2　在例 4.2.3 中在实数范围内矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能否对角化 ?

解　已经知道 $\boldsymbol{A}$ 在实数范围内没有特征值，从而 $\boldsymbol{A}$ 没有特征向量，所以 $\boldsymbol{A}$ 不能对角化 .

4.3.3　实对称矩阵的相似矩阵

在矩阵中，有一类特殊矩阵——实对称矩阵是一定可以对角化的，并且对于实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，不仅能找到一般的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵，而且还能够找到一个正交矩阵 $\boldsymbol{T}$，使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}$ 为对角矩阵 . 在这里我们不加证明地给出这些结果 .

定理 4.3.4　实对称矩阵的特征值都是实数 .

定理 4.3.5　若 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，则一定可对角化，并且一定能够找到一个正交矩阵 $\boldsymbol{T}$，使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}$ 为对角矩阵．

对于实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，求一个正交矩阵 $\boldsymbol{T}$，使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}$ 为对角矩阵的一般步骤如下：

第 1 步　求出 $\boldsymbol{A}$ 的所有不同的特征值 λ_1，λ_2，…，λ_s．因为由定理 4.3.4 知，n 阶实对称矩阵一定可求出所有的实特征值．

第 2 步　求出 $\boldsymbol{A}$ 对应于每个特征值 λ_i 的一组线性无关的特征向量，即求出齐次线性方程组 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 的一个基础解系，然后通过施密特正交化过程，把这个基础解系进行正交化、单位化．对于 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，一定可求出 n 个正交单位化的特征向量．

第 3 步　以 n 个正交单位化的特征向量作为列向量所得的 n 阶方阵即为所求的正交矩阵 $\boldsymbol{T}$；以相应的特征值作为主对角线元素的对角矩阵，即为之所求的 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}$．

例 4.3.3　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & -4\\ 2 & -4 & -2\end{pmatrix}$$

求正交矩阵 $\boldsymbol{T}$，使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}$ 为对角矩阵．

解　由于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，故由定理 4.3.5 知，一定可找到正交矩阵 $\boldsymbol{T}$，使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}$ 为对角矩阵．

第 1 步　先求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，由

$$\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda+2 & 4\\ -2 & 4 & \lambda+2\end{vmatrix}\xrightarrow{③+②\cdot(-1)}\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda+2 & 4\\ 0 & 2-\lambda & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda+2 & 4\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}\xrightarrow{②+③}(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1 & -4 & -2\\ -2 & \lambda+6 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)^2(\lambda+7)$$

求得 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值为 $\lambda_1=2$（二重）　$\lambda_2=-7$．

第 2 步　对于 $\lambda_1=2$，求解齐次线性方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$，由

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ -2 & 4 & 4\\ -2 & 4 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow[③+①\cdot 2]{②+①\cdot 2}\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

求得其一个基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

先正交化，令

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{4}{5}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2/5\\-4/5\\1\end{bmatrix}$$

再单位化，令

$$\gamma_1=\frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1=\begin{bmatrix}2\sqrt{5}/5\\\sqrt{5}/5\\0\end{bmatrix},\quad \gamma_2=\frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2=\begin{bmatrix}2\sqrt{5}/15\\-4\sqrt{5}/15\\\sqrt{5}/3\end{bmatrix}$$

对于 $\lambda_2=-7$，**求解齐次线性方程组** $(-7\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$，**由**

$$-7\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-8&-2&-2\\-2&-5&4\\-2&4&-5\end{bmatrix}\xrightarrow{(①,②)}\begin{bmatrix}-2&-5&4\\-8&-2&-2\\-2&4&-5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[③+①\cdot(-1)]{②+①\cdot(-4)}\begin{bmatrix}-2&-5&4\\0&18&-18\\0&9&-9\end{bmatrix}\xrightarrow[③+②\cdot(-9)]{②\cdot(1/18)}\begin{bmatrix}-2&-5&4\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

求得它的一个基础解系为

$$\alpha_3=\begin{bmatrix}-1/2\\1\\1\end{bmatrix}$$

这里只有一个向量，只要单位化，得

$$\gamma_3=\begin{bmatrix}-1/3\\2/3\\2/3\end{bmatrix}$$

第 3 步　以正交单位向量组 γ_1，γ_2，γ_3 **为列向量组的矩阵** $\boldsymbol{T}$，**就是所求的正交矩阵，即**

$$\boldsymbol{T}=[\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3]=\begin{bmatrix}2\sqrt{5}/5&2\sqrt{5}/15&-1/3\\\sqrt{5}/5&-4\sqrt{5}/15&2/3\\0&\sqrt{5}/3&2/3\end{bmatrix}$$

有

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-7\end{bmatrix}$$

习题 4.3

1. **若** $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，**证明** $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\sim\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，$k\boldsymbol{A}\sim k\boldsymbol{B}$.

2. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，证明 $\boldsymbol{AB} \sim \boldsymbol{AB}$.

3. 若 $\boldsymbol{A}_1 \sim \boldsymbol{B}_1$，$\boldsymbol{A}_2 \sim \boldsymbol{B}_2$，证明

$$\begin{matrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 \end{matrix} \sim \begin{matrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_2 \end{matrix}$$

4. 求正交矩阵 $\boldsymbol{T}$，使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}$ 为对角矩阵 .

(1) $= \begin{matrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -3 \end{matrix}$ (2) $= \begin{matrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{matrix}$

(3) $= \begin{matrix} 4 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \end{matrix}$ (4) $= \begin{matrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{matrix}$

5. 试证:

(1) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$

(2) $\mathrm{tr}(k\boldsymbol{A}) = k\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$

(3) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$

6. 试证: 如果 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶对称矩阵，并且 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式，则 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.

4.4 二次型

4.4.1 二次型的概念及矩阵表示

在实际问题中，当线性关系不能很好反映客观现象时，就要考虑非线性关系 . 其中最简单的一个做法就是再加上二次项 . 正如我们在平面解析几何中，研究了直线以后，接着就去研究二次曲线 . 二次曲线的一般方程为

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

其中二次项部分为

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

便是一个二次齐次多项式，这就是二次型的实际背景 .

在讨论某些问题时，我们经常会碰到 n 个变量的二次齐次多项式，即所谓的二次型 . 在这一节，我们简单地讨论一下二次型 .

定义 4.4.1 含有 n 个变量 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 的二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = {} & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

称为 n 元二次型 .

从二次型(4.4.1)

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

来表达一个二次型．设 $A^T=A$，利用矩阵乘法，二次型(4.4.1)

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=X^T AX \tag{4.4.2}$$

其中

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{且 } a_{ij}=a_{ji} \quad (i, j=1, 2, \cdots, n)$$

例如二次型

$$f(x_1, x_2, x_3)=8x_1^2+12x_1x_2+5x_2^2-6x_2x_3+16x_1x_3-3x_3^2$$

为要写成矩阵形式，把 $12x_1x_2$， $-6x_2x_3$， $16x_1x_3$ 这些项分别改写成 $6x_1x_2+6x_2x_1$，$-3x_2x_3-3x_3x_2$， $8x_1x_3+8x_3x_1$，即

$$f(x_1, x_2, x_3)=8x_1^2+6x_1x_2+8x_1x_3+6x_2x_1+5x_2^2-3x_2x_3+8x_3x_1-3x_3x_2-3x_3^2$$

其矩阵表示式为

$$f(x_1, x_2, x_3)=[x_1, x_2, x_3]\begin{pmatrix} 8 & 6 & 8 \\ 6 & 5 & -3 \\ 8 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

或简单地就用对称矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 8 & 6 & 8 \\ 6 & 5 & -3 \\ 8 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

来表示．

4.4.2 化二次型为标准形

在平面解析几何中，为了便于研究二次曲线

$$ax^2+2bxy+cy^2=1$$

的几何性质，往往采用通过坐标变换化成标准形

$$a'x'^2+b'y'^2=1$$

的方法．根据标准形就可作出曲线形状的判断，以及得到诸如圆的半径，椭圆的长半轴、短半轴等数据．

在这里，我们对二次型也进行类似的讨论．

若我们作变量代换，如设

$$X=CY \tag{4.4.3}$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 是一个已知可逆的 n 阶方阵，则二次型 4.4.2)

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX} = (\boldsymbol{CY})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ACY} = \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ACY} \tag{4.4.4}$$

即同一个二次型若用变量 $\boldsymbol{Y}$ 表示，其对应的矩阵就成为

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC} \tag{4.4.5}$$

于是我们所关心的是如何寻找适当的可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}$ 变成最简单的形式——对角矩阵．也即如何通过满秩变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{CY}$，使得二次型用 y_1，y_2，$\cdots$，y_n 表示时，只有平方项而没有交叉乘积项，即化为 $d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$，我们简称这个问题为化二次型为标准形．

4.4.2.1　用配方法化二次型为标准形

我们举例来加以说明．

例 4.4.1　化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 8x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

为标准形．

解　先将含 x_1 的各项配成一个关于 x_1 的完全平方项，即

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2[x_1^2 - 2x_1(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] - 2(x_2 - x_3)^2 + x_2^2 - 8x_3^2 - 8x_2x_3$$

$$= 2(x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - 10x_3^2 - 4x_2x_3$$

再将含 x_2 的各项配成完全平方，即

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1 - x_2 + x_3)^2 - (x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2) - 6x_3^2$$

$$= 2(x_1 - x_2 + x_3)^2 - (x_2 + 2x_3)^2 - 6x_3^2$$

令

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 &= x_2 + 2x_3 \\ y_3 &= x_3 \end{aligned} \tag{4.4.6}$$

即得

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2y_1^2 - y_2^2 - 6y_3^2 \tag{4.4.7}$$

(4.4.7)　4.4.6)　**$\boldsymbol{X}$ 与变量 $\boldsymbol{Y}$ 之间的关系，从** 4.4.6)

x_1，x_2，x_3，**即**

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_2 - 3y_3 \\ x_2 &= y_2 - 2y_3 \\ x_3 &= y_3 \end{aligned} \tag{4.4.8}$$

若用矩阵来表示，即二次型用变量 $\boldsymbol{X}$ 表示的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

现作变换 4.4.8)

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{CY}$$

则二次型用变量 Y 表示的矩阵即为对角矩阵

$$C^{T}AC=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-6\end{pmatrix}$$

易知，上述配方法总是可行的．所以有下面的结论．

定理 4.4.1　任何一个二次型都可化为标准形．即任何一个对称矩阵 A，总能找到可逆矩阵 C，使得 $C^{T}AC$ 成为对角矩阵．

例 4.4.2　化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + 7x_2x_3 \tag{4.4.9}$$

为标准形，并求所作之变换．

解　因为二次型中没有平方项，所以先作一个满秩变换，使其出现平方式，根据平方差公式，令

$$\begin{aligned}x_1&=y_1+y_2\\x_2&=y_1-y_2\\x_3&=y_3\end{aligned} \tag{4.4.10}$$

把 4.4.10)　　4.4.9)

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=(y_1+y_2)(y_1-y_2)+(y_1+y_2)y_3+7(y_1-y_2)y_3\\&=y_1^2-y_2^2+8y_1y_3-6y_2y_3\end{aligned}$$

把含 y_1 的项配成完全平方，再把含 y_2 的项配成完全平方，得到

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=y_1^2+8y_1y_3+16y_3^2-16y_3^2-y_2^2-6y_2y_3\\&=(y_1+4y_3)^2-16y_3^2-[y_2^2+6y_2y_3+(3y_3)^2-(3y_3)^2]\\&=(y_1+4y_3)^2-16y_3^2-[(y_2+3y_3)^2-9y_3^2]\\&=(y_1+4y_3)^2-(y_2+3y_3)^2-7y_3^2\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}z_1&=y_1+4y_3\\z_2&=y_2+3y_3\\z_3&=y_3\end{aligned}$$

解出 y_1，y_2，y_3，得

$$\begin{aligned}y_1&=z_1-4z_3\\y_2&=z_2-3z_3\\y_3&=z_3\end{aligned} \tag{4.4.11}$$

于是二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$

$$f(x_1,x_2,x_3)=z_1^2-z_2^2-7z_3^2 \tag{4.4.12}$$

把 4.4.10)　　4.4.11)

$$\begin{aligned}x_1&=z_1+z_2-7z_3\\x_2&=z_1-z_2-z_3\\x_3&=z_3\end{aligned} \tag{4.4.13}$$

4.4.2.2 用正交变换法化二次型为标准形

上面我们介绍了用配方法把二次型化为标准形.除了这个方法以外还有更重要的方法——正交变换法.

在这一节的前面我们曾指出，平面上二次曲线的分类问题关键是要把 x，y 的二次型

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

经过变量代换

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y &= x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{aligned} \tag{4.4.14}$$

化为平方和的形式

$$a'x'^2 + b'y'^2$$

这里变量变换 4.4.14)

$$C = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

是一个正交矩阵.

如果变量代换的系数矩阵是正交矩阵，则称之为正交变换.现在我们将说明对二次型一定可以经过正交变换把它化成标准形.

定理 4.4.2 对于任何一个二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $\boldsymbol{T}$，使得经过正交变换

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{Y}$$

把它化为标准形 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.

证 二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，由定理 4.3.5 知，一定能找到一个正交矩阵 $\boldsymbol{T}$，使得

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.因为 $\boldsymbol{T}$ 是正交矩阵，所以 $\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$，于是由上式得到

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

令

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{Y}$$

由前面所述，易知

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})\boldsymbol{Y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

这就是 $f \quad x_1, x_2, \cdots, x_n)$

用正交变换把二次型化为标准形，这在理论上和实际应用上都是非常重要的 .

例 4.4.3 求一个正交变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{Y}$，把二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$$

化为标准形 .

解 $f \quad x_1, x_2, x_3)$

$$\boldsymbol{A} = \begin{matrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{matrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$\det \quad \lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = \begin{matrix} \lambda-3 & -1 & -2 \\ -1 & \lambda-3 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda \end{matrix} \overset{①+②}{\quad} \begin{vmatrix} \lambda-4 & \lambda-4 & 0 \\ -1 & \lambda-3 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$②+①\cdot \quad \begin{vmatrix} \lambda-4 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 2 \\ -2 & 4 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 \\ 4 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-4)^2(\lambda+2)$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值为 $\lambda_1 = 4$ (二重) $\quad \lambda_2 = -2$.

对于 $\lambda_1 = 4$ (二重) $\qquad 4\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{O}$，由

$$4\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = \begin{matrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{matrix} \overset{\substack{②+① \\ ③+①\cdot 2}}{\quad} \begin{matrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

求得一个基础解系为

$$\alpha_1 = \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}, \quad \alpha_2 = \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

先正交化，令

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} - \frac{2}{2}\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}$$

再单位化，令

$$\gamma_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1 = \begin{matrix} 1/\ 2 \\ 1/\ 2 \\ 0 \end{matrix}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2 = \begin{matrix} 1/\ 3 \\ -1/\ 3 \\ 1/\ 3 \end{matrix}$$

对于 $\lambda_2 = -2$，求解齐次线性方程组 $(-2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{O}$，由

$$-2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -2 \\ -1 & -5 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(①,②)} \begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -5 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[③+①\cdot(-2)]{②+①\cdot(-5)} \begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ 0 & 24 & -12 \\ 0 & 12 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{③+②\cdot(-1/2)} \begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ 0 & 24 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

求得它的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

再单位化，得

$$\boldsymbol{\gamma}_3 = \frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

令

$$\boldsymbol{T} = [\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3] = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{T}$ 是正交矩阵，并且有

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

于是，令 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{Y}$，得

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2$$

以上我们用配方法和正交变换法，把一个二次型化为标准形．但是一般地说，化二次型为标准形不是唯一的．例如，例 4.4.2 中的二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + 7x_2x_3$$

若把变换 4.4.13)

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + 2z_2 - 7z_3 \\ x_2 = z_1 - 2z_2 - z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$$

则 4.4.12)

$$f(x_1, x_2, x_3) = z_1^2 - 4z_2^2 - 7z_3^2 \tag{4.4.15}$$

(4.4.12) 4.4.15) $f(x_1, x_2, x_3)$

式也不同．但是可以看到，4.4.12) 4.4.15)

都是相同的．一般地，有

定理 4.4.3　二次型 $f\ \ x_1, x_2, \cdots, x_n)$

一确定的，与所作的满秩变换无关．

证　设二次型 $f\ \ x_1, x_2, \cdots, x_n)$　　　　$\boldsymbol{A}$，设 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{CY}$，$\boldsymbol{C}$ 为满秩矩阵。把 $\boldsymbol{A}$ 化为标准形

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC} = \begin{array}{ccccccc} d_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & d_s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}$$

即

$$f\ \ x_1, x_2, \cdots, x_n) = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_s y_s^2 \quad (d_i \neq 0;\ i = 1, 2, \cdots, s)$$

由于 $\boldsymbol{C}$ 为满秩矩阵，由第 2 章知

$$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}) = s$$

s 等于二次型 $f\ \ x_1, x_2, \cdots, x_n)$　　　　$\boldsymbol{A}$ 的秩，s 是唯一确定的，与所作的满秩变换无关．

我们把二次型 $f\ \ x_1, x_2, \cdots, x_n)$　　　　$\boldsymbol{A}$ 的秩称为二次型 $f\ \ x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的秩．上述表明：二次型 $f\ \ x_1, x_2, \cdots, x_n)$

二次型的秩．

比较例 4.4.2 中的二次型的标准形(4.4.12)　 4.4.15)

的平方项都是一项，系数为负的平方项都是两项．这一点又是它们的相同之处，这个规律对二次型是普遍成立的．下面，我们将不加以证明给出一个定理．为了说明这个定理，先给出一些有关的概念．

定义 4.4.2　二次型 $f\ \ x_1, x_2, \cdots, x_n)$　　　　p 称为 $f\ \ x_1, x_2, \cdots, x_n)$　正惯性指数；系数为负的平方项个数 $s - p$ 称为 $f\ \ x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 负惯性指数，其中 s 为 $f\ \ x_1, x_2, \cdots, x_n)$

定理 4.4.4 (惯性定理)　二次型 $f\ \ x_1, x_2, \cdots, x_n)$

平方项是唯一确定的，它等于 $f\ \ x_1, x_2, \cdots, x_n)$

个数也是唯一确定的，它等于 $f\ \ x_1, x_2, \cdots, x_n)$

4.4.3　正定二次型

4.4.3.1　正定二次型的概念

有一种特殊的二次型，它在研究数学的其他分支及物理、力学等领域中是很有用的，即正定二次型．下面，我们将介绍正定二次型的基本概念及性质．

由于二次型 $f\ \ x_1, x_2, \cdots, x_n)$　$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的实系数二次型齐次多项式，因此当 x_1，

$x_2, \cdots, x_n$ 取一组实数值 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 时，这个多项式就有一个实数值 $f\quad c_1, c_2, \cdots, c_n)$

例如，二次型

$$f\quad x_1, x_2) = x_1^2 + 7x_2^2 - 4x_1x_2$$

当 $x_1 = -1$，$x_2 = 2$ 时，得

$$f\quad -1, 2) = (-1)^2 + 7\cdot 2^2 - 4\cdot(-1)\cdot 2 = 37$$

当 $x_1 = -3$，$x_2 = 0$ 时，得

$$f\quad -3, 0) = (-3)^2 + 7\cdot 0^2 - 4\cdot(-3)\cdot 0 = 9$$

因为

$$f\quad x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 3x_2^2 = (x_1 - 2x_2)^2 + 3x_2^2$$

$$f\quad c_1, c_2) = (c_1 - 2c_2)^2 + 3c_2^2 > 0$$

像这样的二次型称为正定二次型.

定义 4.4.3 二次型 $f\quad x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $c_1, c_2, \cdots, c_n$,

$$f\quad c_1, c_2, \cdots, c_n) > 0$$

则称 $f\quad x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 正定二次型.

给出一个二次型，除了用定义外，还有没有别的方法判断它是不是正定二次型呢？回答是肯定的.

首先给出最简单二次型，来判断它是否为正定的.

定理 4.4.5 二次型 $f\quad x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2$ 是正定的充分必要条件是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 全大于零.

证 必要性

若 $f\quad x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2$ 正定，取一组数 $x_1 = 0$，$\cdots$，$x_{i-1} = 0$，$x_i = 1$，$x_{i+1} = 0$，$\cdots$，$x_n = 0$，代入得

$$f\quad 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) = a_1\cdot 0^2 + \cdots + a_{i-1}\cdot 0^2 + a_i\cdot 1^2 + a_{i+1}\cdot 0^2 + \cdots + a_n\cdot 0^2 = a_i$$

因为 $f\quad x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $i = 1, 2, \cdots, n$ $a_i = f\quad 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) > 0$. 即得 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 全大于零.

充分性

若 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 全大于零，则对任一组不全为零的实数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$,

$$f\quad c_1, c_2, \cdots, c_n) = a_1c_1^2 + a_2c_2^2 + \cdots + a_nc_n^2$$

因为至少有一个 $c_j \neq 0$，于是 $a_jc_j^2 > 0$，而其余的 $a_ic_i^2 \geq 0$，所以

$$f\quad c_1, c_2, \cdots, c_n) = a_1c_1^2 + a_2c_2^2 + \cdots + a_nc_n^2 > 0$$

这就证明了 $f\quad x_1, x_2, \cdots, x_n)$

由于任何一个二次型都可以经过满秩变换化为平方和的形式，我们自然希望通过二次型的标准形是否正定来判定原二次型是否正定. 而这就需要先来研究满秩变换会不会改变二次型的正定性.

定理 4.4.6 满秩变换不改变二次型的正定性.

证 设二次型 $f\quad x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{CY}$ 变成的新二次型 $g\quad y_1, y_2, \cdots, y_n)$

现在设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 取任意一组不全为零的实数 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 时，有

$$g(l_1, l_2, \cdots, l_n) > 0$$

因为 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{CY}$，即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{C} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{4.4.16}$$

当 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 取任意一组不全为零的实数 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 时，代入 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 式可得到相应的一组数值 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdots \\ k_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{C} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \cdots \\ l_n \end{pmatrix} \tag{4.4.17}$$

因为 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 不全为零，$\boldsymbol{C}$ 为满秩矩阵，所以 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 也一定不全为零．由于 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$f(k_1, k_2, \cdots, k_n) > 0$$

因为

$$g(y_1, y_2, \cdots, y_n) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

其中 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{CY}$，由 4.4.17)

$$g(l_1, l_2, \cdots, l_n) = f(k_1, k_2, \cdots, k_n) > 0$$

这就证明了 $g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$

由于 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{X}$ 得到．因此由刚才证明的结论知，如果 $g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

综上所述，可知道满秩变换不改变二次型的正定性．

4.4.3.2 正定二次型的判别

对于给定的二次型，可用定义来判别它是否正定，但一般说来，这种判别方法是比较麻烦的．下面介绍几个判别定理．

定理 4.4.7 n 元二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 数等于 n．

证 必要性

若二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 4.4.6 知，它经过满秩变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{CY}$ 变成的标准形

$$d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

也正定．再根据定理 4.4.5，知 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 全大于零，因此它的正惯性指数为 n．

充分性

若二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ n，它经过满秩变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{CY}$ 变成的标

准形

$$d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$$

中 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 全大于零, 由定理 4.4.5 知, $d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$ 正定. 由定理 4.4.6 知, 原二次型 $f\quad x_1, x_2, \cdots, x_n)$

下面研究正定二次型的矩阵的特征.

定义 4.4.4　实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为正定的, 如果二次型

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{X}$$

是正定二次型.

由定理 4.4.7 容易得到以下定理:

定理 4.4.8　n 元二次型 $f\quad x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 　　　　　　　　　　$\boldsymbol{A}$ 的特征值全大于零.

证　因为对二次型 $f\quad x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{Y}$$

得到标准形

$$f\quad x_1, x_2, \cdots, x_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $f\quad x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 　　　　$\boldsymbol{A}$ 的特征值. 由定理 4.4.7 可得, $f\quad x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 　　　　　　　　$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 全大于零.

推论 4.4.1　正定矩阵的行列式大于零.

证　设 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵, 于是有正交矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使得

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{T} = \begin{matrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{matrix}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 全大于零.

由于 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{T}^{-1}$, 故有

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T} \begin{matrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{matrix} \boldsymbol{T}^{-1}$$

所以

$$\det \boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{T}) \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \det \boldsymbol{T}^{-1} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n (\det \boldsymbol{T})^2 > 0$$

反过来, 如果一个对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式大于零, 那么 $\boldsymbol{A}$ 是否是正定矩阵呢? 不一定.

例如

$$\boldsymbol{A} = \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}$$

显然, $\det \boldsymbol{A} = 1 > 0$, 但是二次型

$$X^{\mathrm{T}} AX = - x_1^2 - x_2^2$$

显然不是正定的　　　4.4.5)

那么一个行列式大于零的对称矩阵 A, 还应该满足什么条件才能是正定矩阵呢 ? 为了研究这个问题, 还需要引入一些新的概念 .

定义 4.4.5　在 n 阶方阵 A 中, 取第 i_1, i_2, …, i_k 行及第 i_1, i_2, …, i_k 列 行标与列标相同)　　k 阶子式 $k \leq n$)　　A 的 k 阶主子式 .

例如, 设

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -5 & 0 & 6 \\ 8 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

取第 1, 3 行及第 1, 3 列得到二阶子式

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 8 & 7 \end{vmatrix}$$

就是一个二阶主子式 .

定义 4.4.6　在 n 阶方阵 A 中, 取第 $1, 2, \cdots, k$　　$1, 2, \cdots, k$　　k 阶子式 ($k \leq n$)　　A 的 k 阶顺序主子式 .

例如, 上例中的 A, 1 阶顺序主子式 $|-2| = -2$, 二阶顺序主子式是

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 0 \end{vmatrix}$$

三阶顺序主子式是 $\det A$.

与正定二次型相仿, 还有下面的概念 .

定义 4.4.7　设 f　$x_1, x_2, \cdots, x_n$)　　$c_1, c_2, \cdots, c_n$, 都有 f　$c_1, c_2, \cdots, c_n) < 0$, 则称 f　$x_1, x_2, \cdots, x_n$)　负定的; 如果都有 f　$c_1, c_2, \cdots, c_n) \geq 0$, 则称 f　$x_1, x_2, \cdots, x_n$)　半正定的; 如果都有 f　$c_1, c_2, \cdots, c_n) \leq 0$, 称 f　$x_1, x_2, \cdots, x_n$)　半负定的 .

定义 4.4.8　实对称矩阵 A 称为负定(半正定, 半负定)的, 如果二次型 $X^{\mathrm{T}} AX$ 是负定(半正定, 半负定)的 .

定理 4.4.9　二次型 f　$x_1, x_2, \cdots, x_n$)　　A 的所有顺序主子式全大于零 . 即对称矩阵 A 为正定的充分必要条件是: 它的所有顺序主子式全大于零 . 即

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \cdots, \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

对称矩阵 A 为负定的充分必要条件是: 它的所有奇数阶顺序主子式全小于零, 而偶数阶顺序主子式全大于零 . 即

$$(-1)^s \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} \end{vmatrix} > 0 \quad (s = 1, 2, \cdots, n)$$

证明略.

例 4.4.4　判别下列二次型的正定性:

$f \quad x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$

(2)　$f \quad x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 - 8x_2x_3 + x_3^2$

(3)　$f \quad x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3$

解　(1)　$f \quad x_1, x_2, x_3)$

$$\boldsymbol{A} = \begin{matrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{matrix}$$

因为

$$|3| = 3 > 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 > 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 28 > 0$$

所以, **从定理** 4.4.9 **知**, $f \quad x_1, x_2, x_3)$　　　　$\boldsymbol{A}$ **也正定**.

(2)　$f \quad x_1, x_2, x_3)$

$$\boldsymbol{A} = \begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \end{matrix}$$

因为

$$|1| = 1 > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -39 < 0$$

所以, **从定理** 4.4.9 **知**, $f \quad x_1, x_2, x_3)$

(3)　$f \quad x_1, x_2, x_3)$

$$\boldsymbol{A} = \begin{matrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{matrix}$$

因为

$$|-2| = -2 < 0, \quad \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 8 > 0, \quad \begin{matrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{matrix} = -26 < 0$$

所以, **从定理** 4.4.9 **知**, $f \quad x_1, x_2, x_3)$　　　　　　$\boldsymbol{A}$ **也负定**.

例 4.4.5　试证: **若** $\boldsymbol{A}$ **是正定矩阵**, **则** $\boldsymbol{A}^{-1}$ **也是正定矩阵**.

证　**因为** $\boldsymbol{A}$ **是对称矩阵**, **所以** $\boldsymbol{A}^{-1}$ **也是对称矩阵**. **又因** $\boldsymbol{A}$ **是正定的**, **所以有正交矩阵** $\boldsymbol{T}$, **使得**

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{matrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{matrix}$$

其中 $\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,n)$

由于 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}^{-1}$，所以 $(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})^{-1}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{T}$，于是

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\lambda_1^{-1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2^{-1} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^{-1}\end{pmatrix}$$

易知 $\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1}$ 也全大于零，所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是正定的 .

例 4.4.6 试证：若 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，则伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正定矩阵 .

证 因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，所以 $\det\boldsymbol{A}>0$，又有

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=(\det\boldsymbol{A})\boldsymbol{E}$$

因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，故得

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\det\boldsymbol{A})\boldsymbol{E}=(\det\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\qquad\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}$$

由定理 4.4.6 知，因 $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵，所以 $\boldsymbol{A}^*$ 与 $\boldsymbol{A}$ 有相同的正定性，从 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，可知 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正定矩阵 .

习题 4.4

1. 写出下列二次型的矩阵：

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+3x_2^2-2x_3^2+4x_1x_2-x_1x_3+6x_2x_3$

(2) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_3-x_2x_3+x_3x_4$

(3) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=6x_1^2+3x_1x_2-2x_1x_3+5x_1x_4+2x_2^2-x_2x_3+3x_3x_4+x_3^2$

2. 把下列二次型用配方法化为标准型，并写出所作的变换：

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_3$

(2) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2-2x_3x_4$

(3) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2x_1x_2$
$+4x_1x_3-2x_1x_4+6x_2x_3-4x_2x_4-4x_3x_4$

3. 用正交变换把下列二次型化成标准型，并且写出所作的变换：

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$

(2) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2-2x_3x_4$

(3) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+4x_1x_2+4x_1x_3$
$+4x_1x_4-4x_2x_3-4x_2x_4-4x_3x_4$

4. 判断下列二次型是否正定：

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2+2x_2x_3$

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=99x_1^2-12x_1x_2+48x_1x_3+130x_2^2-60x_2x_3+71x_3^2$

(4) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2+4x_3^2+7x_4^2+6x_1x_3$
$+4x_1x_4-4x_2x_3+2x_2x_4+4x_3x_4$

5. t 满足什么条件时，下列二次型是正定的。

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$

(2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$

6. 试证：任一 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵 .

7. 试证：若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶正定矩阵，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也是正定矩阵 .

8. 试证：若 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，则存在一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$.

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个对称矩阵，求证：t 充分大之后，$t\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵 .

10. 试证：若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶半正定矩阵，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵 .

11. 试证：二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $\boldsymbol{A}$ 的特征值全大于或等于零 .

本章内容提要

1. 向量的内积、正交、长度，正交矩阵等概念 .
2. 相似矩阵的概念及其性质 .
3. 方阵的特征值与特征向量的概念及其求法 .
4. 方阵可对角化的条件，对称矩阵的对角化的方法 .
5. 二次型的定义及矩阵表示 .
6. 二次型化为标准型的配方法和正交变换法 .
7. 惯性定理 .
8. 正定二次型和正定矩阵的定义及其判断方法 .

习题参考答案

第 1 章　行　列　式

习题 1.1

1. (　　　　　　　　　$abc - a^3 - b^3 - c^3$.

2. $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

3. $M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, $A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

4. $M_{13} = \begin{vmatrix} b & -a & 6 \\ c & 5 & a \\ b & -3 & 1 \end{vmatrix}$, $A_{13} = \begin{vmatrix} b & -a & 6 \\ c & 5 & a \\ b & -3 & 1 \end{vmatrix} = M_{13}$.

5. -8 .

6. (1) 24;　2) 522 .

习题 1.2

1. 　　　　$abcdef$;　3) $2(x^3 + y^3)$　4) $1 + ab + ad + cd + abcd$;　5) 160 .

3. (1) -2;　2) $a^2 b^2$;　3) $1/2[(x+a)^n + (x-a)^n]$　4) $-2\cdot(n-2)$

习题 1.3

1. 　$x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = -3/2$;　2) $x_1 = 3$, $x_2 = -4$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$.

2. (1) $a = -1/5$;　2) $ab + 2b + 1 = 4a$.

3. f　$x) = x^2 - 6x + 3$.

第 2 章　矩　　阵

习题 2.2

1. $x_1 = 5/2$, $x_2 = 1/2$.

2. $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{matrix} 1 & 4 & 4 & 7 \\ 4 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \end{matrix}$, $2\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{B} = \begin{matrix} 2 & 10 & 9 & 17 \\ 12 & 1 & 10 & 10 \\ 4 & -3 & 8 & 15 \end{matrix}$.

3. 不对，因不符合数乘矩阵的规则 .

4. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_4 \\ 4x_1 + 2x_3 + x_4 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} -3 & 4 & -7 \\ 8 & 11 & -8 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} -2/3 & -2 \\ -2 & 4/3 \end{pmatrix}$.

7. (1) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$;

(2) $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + (a_{13} + a_{31})x_1x_3 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. $\boldsymbol{A}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$.

11. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

13. det $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}$) $\boldsymbol{A}$ + det $\boldsymbol{B}$ = -2, det $\boldsymbol{A}$) = -270.

习题 2.3

1. 不一定可逆.

2. 当 $k \neq 0$ 时, $(k\boldsymbol{A})^{-1} = (1/k)\boldsymbol{A}^{-1}$.

3. 当 $ad - bc \neq 0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

4. (1) $\begin{pmatrix} -3/4 & 3/4 & 1/4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5/4 & -1/4 & -3/4 \end{pmatrix}$; 2) 3) $\begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 5/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

5. (1) $\begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 18 & -32 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -15/8 & -17/4 \\ 5/8 & 7/4 \end{pmatrix}$.

6. $x_1 = 1/6$, $x_2 = -13/6$, $x_3 = 1/2$.

7. 用定理 2.3.2 和可逆矩阵的表达式.

8. 用定理 2.3.2 和逆矩阵的定义.

9. $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{4}(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})$, $(\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{E})^{-1} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})$

习题 2.4

1. $A=\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} E_2 & O \\ B_1 & B_2 \end{bmatrix}$

其中 $A_1=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

所以
$$AB=\begin{bmatrix} A_1 & O \\ A_2B_1 & A_2B_2 \end{bmatrix}$$

其中 $A_2B_1=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $A_2B_2=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(2) $A=\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{bmatrix}$, $ABA=\begin{bmatrix} A_1B_1A_1 & O \\ O & A_2B_2A_2 \end{bmatrix}$

其中 $A_1B_1A_1=\begin{bmatrix} \alpha^3 & 2\alpha^2 \\ 0 & \alpha^3 \end{bmatrix}$, $A_2B_2A_2=\begin{bmatrix} \beta^3 & 0 \\ -2\beta^2 & \beta^3 \end{bmatrix}$

2. 设 $A=[A_1, A_2]$ A_1 为四阶矩阵，由条件得，$A_1C+A_2D=E_4$，解得，$A_1=(E_4-A_2D)C^{-1}$得，$A=[(E_4-A_2D)C^{-1}, A_2]$ $A_2=O$，有 $A=[C^{-1}, O]$ 从中看到，满足已知条件的 4×7 矩阵 A 有无穷多个 .

3. 设 $A=\begin{bmatrix} A_1 & O & O \\ O & A_2 & O \\ O & O & A_3 \end{bmatrix}$，其中 $A_1=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $A_2=[4]$ $A_3=\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$，有 $A^{-1}=$

$\begin{bmatrix} A_1^{-1} & O & O \\ O & A_2^{-1} & O \\ O & O & A_3^{-1} \end{bmatrix}$，其中 $A_1^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $A_2^{-1}=1/4$, $A_3^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

4. (1) 2.3.2 验证 .

(2) 1)

5. 由 $\begin{bmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}$，再利用公式 1.1.10) 即可得 .

习题 2.5

1. 利用 $A^{-1})^{\mathrm{T}}= A^{\mathrm{T}})^{-1}=A^{-1}$.

2. (1) 2)

3. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, $A^2=(c_{ij})_{n\times n}$, $c_{ii}=a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2=0\ (i=1,2,\cdots,n)$ a_{ij}是实数，故 $a_{ij}=0\ (i,j=1,2,\cdots,n)$

4. 用矩阵乘法 .

5. 用对称和反对称的定义进行证明 .

6. $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

习题 2.6

1. ($\begin{pmatrix} -3/85 & -7/85 & 28/85 \\ -1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 13/85 & 2/85 & -8/85 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 9 & 5 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

($\begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$;

($\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$.

3. 提示: 设 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{B}) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{E}\cdots\boldsymbol{X})$ $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 20 & -52 & -77 \\ -15 & 38 & 57 \\ 13 & -30 & -46 \end{pmatrix}$.

习题 2.7

1.

2. $r\ \boldsymbol{A}) = r\ \boldsymbol{B}) + r\ \boldsymbol{C})$

3. 提示: 用定理 2.6.1 进行证明.

4. 提示: 当 $r\ \boldsymbol{A}) = n - 1$, 用第 3 题的结论.

5. 提示: 用分块矩阵进行证明.

第 3 章 线性方程组

习题 3.1

1. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/11 \\ 3 \\ 64/11 \end{pmatrix}$.

2. 无解.

3. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/7 \\ -5/7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1/7 \\ 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1/7 \\ -9/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 k_1, k_2 为任意常数.

4. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$, k_1 为任意常数.

习题 3.2

1.

2. 当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时，方程组有唯一解，当 $\lambda = 1$ 时，有无穷多解.

3. $a = 0$ 且 $b = 2$ 时，方程组相容.

习题 3.3

1. $\alpha - \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$，$3\alpha + 2\beta - \gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

2. $[1,2,3,4]^T$.

3. $\beta = 2\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3$，表出方式唯一;

(2) β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出;

(3) $\beta = -\alpha_1 - 5\alpha_2$，表出方式有无穷多种.

4. 用反证法.

5. $\beta = (a_1 - a_2)\alpha_1 + (a_2 - a_3)\alpha_2 + (a_3 - a_4)\alpha_3 + a_4\alpha_4$.

6. (1) 2) 3)

7. (1) $\alpha = (5/4)\alpha_1 + (1/4)\alpha_2 - (1/4)\alpha_3 - (1/4)\alpha_4$;

(2) $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$.

8. 用反证法.

习题 3.4

1. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$ $\alpha_3 = \alpha_1 - 5\alpha_2$;

(2) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$ $\alpha_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2$;

(3) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ $\alpha_4 = -3\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3$.

2. (1) $\boldsymbol{A} = [\alpha_1, \alpha_4]$ r $\boldsymbol{A}) = 2$，知 α_1, α_4 线性无关; 2) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$

4. 提示: 用 β_i $(i = 1, 2, \cdots, r)$ α_i $(i = 1, 2, \cdots, r)$

习题 3.5

1.

2. ^{T};

3. $_1$ 的基为 $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$，维数为 2;

($_2$ 的基为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，维数为 3;

($_3$ 的基为 $\begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$，维数为 1.

4. 因 α_1，α_2，α_3 线性无关，故它生成的子空间为三维，而 $\mathbf{R}^3$ 也是三维，故两者

相同 .

5. 因为 α_1, α_2 线性无关, β_1, β_2 亦线性无关, 且 $\beta_1 = -\alpha_1 + 3\alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_1 - \alpha_2$, 所以 $V_1 = V_2$.

习题 3.6

1. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数;

(2) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 其中 k 为任意常数;

(3) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8/3 \\ 13/3 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 k 为任意常数;

(4) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 7/8 \\ 5/8 \\ -5/8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 k_1, k_2 为任意常数 .

2. (1) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 k 为任意常数;

(2) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$; 3) 4)

(5) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 5/6 \\ -7/6 \\ 5/6 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 k 为任意常数 .

3. 直接代入方程组验证 .

4. 同第 3 题的方法 .

*第 4 章　相似矩阵与二次型

习题 4.1

1.

2. 26, 0, - 1/ 26, 4/ 26]^T, 30, 1/ 30, - 2/ 30, 0]^T .

4. $\gamma_1 = \begin{matrix} 1/\ 3 \\ 1/\ 3 \\ 1/\ 3 \end{matrix}$, $\gamma_2 = \begin{matrix} 1/\ 6 \\ 1/\ 6 \\ -2/\ 6 \end{matrix}$, $\gamma_3 = \begin{matrix} 1/\ 2 \\ -1/\ 2 \\ 0 \end{matrix}$.

习题 4.2

1. $\lambda_1 = 1$，相应的特征向量为 $k \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix}$ ，k 不为零;

$\lambda_2 = -2$，相应的特征向量为 $k \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$ ，k 不为零 .

(2)

(3) $\lambda_1 = 1$，相应的特征向量为 $k \begin{matrix} 3 \\ -6 \\ 20 \end{matrix}$ ，k 不为零;

$\lambda_2 = -2$，相应的特征向量为 $k \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$ ，k 不为零 .

(4) $\lambda_1 = 2$，相应的特征向量为 $k_1 \begin{matrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{matrix} + k_2 \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{matrix}$ ，k_1, k_2 不全为零;

$\lambda_2 = 11$，相应的特征向量为 $k \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$ ，k 不为零 .

(5) $\lambda = 1$，相应的特征向量为 $k \begin{matrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{matrix}$ ，k 不为零 .

(6) $\lambda_1 = 1$，相应的特征向量为 $k_1 \begin{matrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} + k_2 \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$ k_1，k_2 不全为零;

$\lambda_2 = 10$，相应的特征向量为 $k \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{matrix}$ ，k 不为零 .

(7) $\lambda_1 = a_1$，相应的特征向量为 $k \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$ ，k 不为零;

$\lambda_2 = a_2$，相应的特征向量为 $k\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}$，$k$ 不为零;

$\lambda_3 = a_3$，相应的特征向量为 $k\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}$，$k$ 不为零 .

(8) $\lambda = 2$，相应的特征向量为 $k\begin{matrix}1\\0\\0\\0\end{matrix}$，$k$ 不为零 .

习题 4.3

1.，　2. 用相似矩阵定义证明 .

3. 构造分块矩阵进行验证 .

4. $\boldsymbol{T} = \begin{matrix}2/\ 5 & 2\ 5/15 & 1/3\\ -1/\ 5 & 4\ 5/15 & 2/3\\ 0 & 5/3 & -2/3\end{matrix}$，　$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT} = \begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -8\end{matrix}$

(2) $\boldsymbol{T} = \begin{matrix}1/\ 5 & 4\ 5/15 & 2/3\\ -2/\ 5 & 2\ 5/15 & 1/3\\ 0 & -\ 5/3 & 2/3\end{matrix}$，　$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT} = \begin{matrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{matrix}$

(3) $\boldsymbol{T} = \begin{matrix}2/2 & 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 2/2 & -1/2 & 1/2\\ 2/2 & 0 & -1/2 & -1/2\\ 0 & 2/2 & 1/2 & -1/2\end{matrix}$，　$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT} = \begin{matrix}4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 6\end{matrix}$

(4) $\boldsymbol{T} = \begin{matrix}2/3 & 2/3 & 1/3\\ 1/3 & -2/3 & 2/3\\ -2/3 & 1/3 & 2/3\end{matrix}$，　$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT} = \begin{matrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{matrix}$

6. 利用 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可相似于同一矩阵 .

习题 4.4

1. $\begin{matrix}5 & 2 & -1/2\\ 2 & 3 & 3\\ -1/2 & 3 & -2\end{matrix}$;　$\begin{matrix}0 & 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & -1/2 & 0\\ 1/2 & -1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & 0 & 1/2 & 0\end{matrix}$

($\begin{matrix}6 & 3/2 & -1 & 5/2\\ 3/2 & 2 & -1/2 & 3/2\\ -1 & -1/2 & 1 & 0\\ 5/2 & 3/2 & 0 & 0\end{matrix}$

2.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y_1 - y_3 \\
x_2 &= y_2 \\
x_3 &= y_2 - y_3
\end{aligned}
$$

$$f \quad x_1 , x_2 , x_3) = y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2$$

(2)

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y_1 + y_2 \\
x_2 &= y_1 - y_2 \\
x_3 &= y_3 + y_4 \\
x_4 &= y_3 - y_4
\end{aligned}
$$

$$f \quad x_1 , x_2 , x_3 , x_4) = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 2y_3^2 + 2y_4^2$$

(3)

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y_1 - 2y_2 - (7/3)y_3 + (4/25)y_4 \\
x_2 &= y_3 + (9/25)y_4 \\
x_3 &= y_2 + (5/3)y_3 + (3/5)y_4 \\
x_4 &= y_4
\end{aligned}
$$

$$f \quad x_1 , x_2 , x_3 , x_4) = y_1^2 - 3y_2^2 + (25/3)y_3^2 - (27/25)y_4^2$$

3. (1)

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (2 \quad 5/5)y_1 + (2 \quad 5/15)y_2 + (1/3)y_3 \\
x_2 &= (- \quad 5/5)y_1 + (4 \quad 5/15)y_2 + (2/3)y_3 \\
x_3 &= (\quad 5/3)y_2 - (2/3)y_3
\end{aligned}
$$

$$f \quad x_1 , x_2 , x_3) = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$$

(2)

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (\quad 2/2)y_1 + (\quad 2/2)y_3 \\
x_2 &= (\quad 2/2)y_1 \quad (- \quad 2/2)y_3 \\
x_3 &= (\quad 2/2)y_2 + (\quad 2/2)y_4 \\
x_4 &= (- \quad 2/2)y_2 + (\quad 2/2)y_4
\end{aligned}
$$

$$f \quad x_1 , x_2 , x_3 , x_4) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$$

(3)

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (\quad 2/2)y_1 + (\quad 6/6)y_2 + (\quad 3/6)y_3 + (1/2)y_4 \\
x_2 &= (\quad 2/2)y_1 - (\quad 6/6)y_2 - (\quad 3/6)y_3 - (1/2)y_4 \\
x_3 &= (\quad 6/3)y_2 - (\quad 3/6)y_3 - (1/2)y_4 \\
x_4 &= (\quad 3/2)y_3 - (1/2)y_4
\end{aligned}
$$

$$f \quad x_1 , x_2 , x_3 , x_4) = 3y_1^2 + 3y_2^2 + 3y_3^2 - 5y_4^2$$

4. (1) 3) 2) 4)

5. (1) $-4/5 < t < 0$ 时，二次型正定； $2 < t < 2$时，二次型正定．

6. 因 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，设 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{AX}$ 为满秩变换，那么 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}$，因 $\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}$ 是正定的，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 也正定．

7. 用正定二次型的定义．

9. 取 $\boldsymbol{A}$ 的最小特征值 λ_1，则 $t + \lambda_1$ 是 $t\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}$ 的最小特征值．于是当 $t > -\lambda_1$ 时，$t + \lambda_1 > 0$，从而 $t\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}$ 的特征值全大于零．

10. 可证：对任意 $\alpha \neq \mathbf{0}$，有 $\alpha^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\alpha > 0$．

11. 用二次型标准型证明．

参 考 文 献

1 钱椿林，蒋麟，吴平等．线性代数．北京：电子工业出版社，1997

2 陈维新．线性代数简明教程．北京：科学出版社，2001

3 俞南雁．线性代数教程．南京：东南大学出版社，2000

4 张文忠，杨盛祥，王莉．线性代数．重庆：重庆大学出版社，1997

5 彭玉芳，尹福源．线性代数．北京：高等教育出版社，1993

6 赵德修．线性代数．北京：高等教育出版社，1990

7 同济大学数学教研室．线性代数．第二版．北京：高等教育出版社，1991

8 袁尚明．线性代数．上海：上海交通大学出版社，1988

9 程云鹏．线性代数．北京：国防工业出版社，1988

10 卢树铭，郭敏学．矩阵理论及其应用．沈阳：辽宁科技出版社，1989