

Optimointi 1 Harjoitustyö no. 1043

Tehtävän muotoilu

Tehtävänä on suunnitella mahdollisimman vähäkustanteinen autonvuokrausagenttien koulutusohjelma. Tammi-toukokuussa voidaan kuukausittain ottaa tietty määrä oppilaita kurssille. Jokaista 15 oppilasta kohti pitää kyseisenä kuukautena olla yksi koulutuksen aiemmin käynyt opettaja varattuna opetustehtäviin. Kurssia eivät läpäise kaikki, ja joka kuukausi koulutetuista agenteista poistuu tietty prosenttiosuus. Tiedetään etukäteen tarvittavien agenttien määrä vuokraustoimintaan sekä eri henkilöille maksettavat palkat.

Taulukko 1 - Agenttien kysynät

Muuttuja	Kuukausi	Agenttien kysyntä
d_1	Tammikuu	135
d_2	Helmikuu	125
d_3	Maaliskuu	150
d_4	Huhtikuu	170
d_5	Toukokuu	160
d_6	Kesäkuu	180

Taulukko 2 - Työtehtävien palkat

Muuttuja	Työtehtävä	Palkka
p_1	Oppilas	350
p_2	Agentti töissä	600
p_3	Agentti vapaalla	500

Valitaan päätösmuuttujiksi x_i = koulutettavien määrä kuukaudessa i .
Lisäksi valitaan seuraavat parametrit

Taulukko 3 - Tehtävän parametrit

Parametri	Merkitys	Arvo
M	Agenttien määrä alussa	145
v	Agenttien valmistumisosuus	$\frac{4}{5}$
p	Seuraavana kuukautena jatkavien agenttien osuus	0,92
T	Tarvittavien opettajien määrä oppilasta kohti	$\frac{1}{15}$

Valmiiden agenttien määrät saadaan seuraavilla lausekkeilla

Taulukko 4 - Valmiiden agenttien määrät

Kuukausi	Valmiiden agenttien määrä
Tammikuu	M
Helmikuu	$Mp + x_1v$
Maaliskuu	$Mp^2 + x_1vp + x_2v$
Huhtikuu	$Mp^3 + x_1vp^2 + x_2vp + x_3v$

Toukokuu	$Mp^4 + x_1vp^3 + x_2vp^2 + x_3vp + x_4v$
Kesäkuu	$Mp^5 + x_1vp^4 + x_2vp^3 + x_3vp^2 + x_4vp + x_5v$

Kun edellisistä tuloksista vähennetään opettajina toimivien agenttien määrät, saadaan seuraavat vaatimukset:

Taulukko 5 – Vaatimukset

Kuukausi	Vaatus
Tammikuu	$M - x_1T \geq d_1$
Helmikuu	$Mp + x_1v - x_2T \geq d_2$
Maaliskuu	$Mp^2 + x_1vp + x_2v - x_3T \geq d_3$
Huhtikuu	$Mp^3 + x_1vp^2 + x_2vp + x_3v - x_4T \geq d_4$
Toukokuu	$Mp^4 + x_1vp^3 + x_2vp^2 + x_3vp + x_4v - x_5T \geq d_5$
Kesäkuu	$Mp^5 + x_1vp^4 + x_2vp^3 + x_3vp^2 + x_4vp + x_5v \geq d_6$

Eri työtehtäville saadaan kokonaiskustannukset kyseistä tehtävää suorittavien henkilöiden määrien ja kyseisen tehtävän palkan avulla.

Taulukko 6 - Eri työtehtävien kokonaiskustannukset

Työtehtävä	Kokonaiskustannus
Oppilas	$\sum_{i=1}^5 x_i p_i$
Työtä tekevä (opettaja tai myyjä)	$\sum_{i=1}^6 (d_i + x_i T)$
Vapaalla	$\sum_{i=1}^6 [Mp^{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} (x_j vp^{i-j-1}) - x_i T - d_i] p_3$ $(M - x_1 T - d_1 + Mp + x_1 v - x_2 T - d_2 + Mp^2 + x_1 vp + x_2 v - x_3 T - d_3 + Mp^3 + x_1 vp^2 + x_2 vp + x_3 v - x_4 T - d_4 + Mp^4 + x_1 vp^3 + x_2 vp^2 + x_3 vp + x_4 v - x_5 T - d_5 + Mp^5 + x_1 vp^4 + x_2 vp^3 + x_3 vp^2 + x_4 vp + x_5 v - d_6) p_3$

Saadaan optimointitehtävä

$$\min \sum_{i=1}^6 x_i p_1 + \sum_{i=1}^6 (d_i + x_i T) p_2 + \sum_{i=1}^6 [Mp^{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} (x_j vp^{i-j-1}) - x_i T - d_i] p_3$$

s. t.

$$M - x_1 T \geq d_1$$

$$Mp + x_1 v - x_2 T \geq d_2$$

$$Mp^2 + x_1 vp + x_2 v - x_3 T \geq d_3$$

$$Mp^3 + x_1 vp^2 + x_2 vp + x_3 v - x_4 T \geq d_4$$

$$Mp^4 + x_1 vp^3 + x_2 vp^2 + x_3 vp + x_4 v - x_5 T \geq d_5$$

$$Mp^5 + x_1 vp^4 + x_2 vp^3 + x_3 vp^2 + x_4 vp + x_5 v \geq d_6$$

Linearisointi

Saatu optimointitehtävä on kuitenkin epälineaarinen. Tehtävää voidaan linearisoida ottamalla käyttöön käsitteet agentin peruspalkka ja lisäpalkka, joka maksetaan työtä tekeville agenteille.

Taulukko 7 - Palkat kustannuslisäajattelulla

Muuttuja	Työtehtävä	Palkka
p_1	Oppilas	350
p_2	Agentti töissä -lisä	100
p_3	Agentti palkkalistalla	500

Tehtävä voidaan ajatella siten, että lasketaan kuukaudessa i otetun oppilaan kustannuksia. Tällöin huomioidaan suorat kustannukset oppilaan palkka ja opettajan työlisä sekä epäsuora valmistuneiden agenttien palkkakustannus kaikilta tulevilta kuukausilta. Koulutettujen agenttien määrä voidaan laskea geometrisen summan avulla. Vuokraustyötä tekevien agenttien määrä ei riipu uusien oppilaiden määrästä vaan niitä on täsmälleen kysynnän verran.

Taulukko 8 - Kokonaiskustannukset kustannuslisäajattelulla

Kustannuslaji	Kokonaiskustannus
Oppilaan palkka	$p_1 \sum_{i=1}^5 x_i$
Opettajan lisäpalkka	$p_2 T \sum_{i=1}^5 x_i$
Koulutettavien agenttien peruspalkka tulevilta kuukausilta	$v \sum_{i=1}^5 \frac{1 - p^{6-i}}{1 - p} x_i$
Vuokraustyön lisäkustannus	$p_2 \sum_{i=1}^6 d_i$
Alussa olevien agenttien peruspalkka tulevilta kuukausilta	$p_3 M \frac{1 - p^6}{1 - p}$

Päätösmuuttujista riippuvat lausekkeet voidaan helposti yhdistää. Kaksi viimeisintä ovat parametrien arvoista riippuvia vakioita. Parametrit M ja d_i voidaan kuitenkin lisätä muuttujiksi, jolloin niiden muutoksia voidaan tarkastella paremmin herkkyyssanalyyysissä. Tuloksena saadaan lineaarinen optimointimalli, kun muut parametrit ovat vakioita.

$$\min \sum_{i=1}^5 (p_1 + p_2 T + p_3 v \frac{1 - p^{6-i}}{1 - p}) x_i + p_3 \frac{1 - p^6}{1 - p} M + p_2 \sum_{i=1}^6 d_i$$

s. t.

$$M - x_1 T \geq d_1$$

$$Mp + x_1 v - x_2 T \geq d_2$$

$$Mp^2 + x_1 vp + x_2 v - x_3 T \geq d_3$$

$$Mp^3 + x_1 vp^2 + x_2 vp + x_3 v - x_4 T \geq d_4$$

$$Mp^4 + x_1 vp^3 + x_2 vp^2 + x_3 vp + x_4 v - x_5 T \geq d_5$$

$$Mp^5 + x_1 vp^4 + x_2 vp^3 + x_3 vp^2 + x_4 vp + x_5 v \geq d_6$$

Kun parametrit p_1 , p_2 , p_3 , T , v ja p kiinnitetään, voidaan päätösmuuttujille laskea vakiokertoimiset kustannukset.

Taulukko 9 - Kustannusfunktion vakiokertoimet

Päätösmuuttuja	Kerroin
x_1	$p_1 + p_2 T + p_3 v \frac{1 - p^{6-1}}{1 - p} = 350 + 100 \times \frac{1}{15} + 500 \times \frac{4}{5} \times \frac{1 - 0,92^5}{1 - 0,92} \approx 2061$
x_2	1775
x_3	1463
x_4	1125
x_5	757
M	$p_3 \frac{1 - p^6}{1 - p} = 500 \times \frac{1 - 0,92^6}{1 - 0,92} = 2460$
d_i	$p_2 = 100$

Vastaavasti rajoitteet voidaan kirjoittaa vakiokertoimisina. M voidaan jättää muuttujaksi lisäämällä rajoite $M = 145$, vastaavasti d_i .

Taulukko 10 - Parametrikertoimien lukuarvot

Kerroin	Lukuarvo
T	$\frac{1}{15} \approx 0,06667$
v	$\frac{4}{5} = 0,8$
vp	$0,8 \times 0,92 = 0,736$
vp^2	0,6771

vp^3	0,6230
vp^4	0,5731
p	0,92
p^2	0,8464
p^3	0,7787
p^4	0,7164
p^5	0,6591

$$\min 2061 x_1 + 1775 x_2 + 1463 x_3 + 1125 x_4 + 757 x_5 + 2460 M + 100 \sum_{i=1}^6 d_i$$

s. t.

$$M - 0,0667 x_1 - d_1 \geq 0$$

$$0,92 M + 0,8 x_1 - 0,0667 x_2 - d_2 \geq 0$$

$$0,8464 M + 0,736 x_1 + 0,8 x_2 - 0,0667 x_3 - d_3 \geq 0$$

$$0,7787 M + 0,6771 x_1 + 0,736 x_2 + 0,8 x_3 - 0,0667 x_4 - d_4 \geq 0$$

$$0,7164 M + 0,6230 x_1 + 0,6771 x_2 + 0,736 x_3 + 0,8 x_4 - 0,0667 x_5 - d_5 \geq 0$$

$$0,6591 M + 0,5731 x_1 + 0,6230 x_2 + 0,6771 x_3 + 0,736 x_4 + 0,8 x_5 - d_6 \geq 0$$

$$M = 145$$

$$d_1 = 135$$

$$d_2 = 125$$

$$d_3 = 150$$

$$d_4 = 170$$

$$d_5 = 160$$

$$d_6 = 180$$

$$x_i \geq 0, \quad i \in \{1, \dots, 5\}$$

Saatu optimointitehtävä on lineaarinen ja se voidaan syöttää esimerkiksi CPLEX-ohjelmistoon:

\ENCODING=ISO-8859-1

\Problem name: optimointiharkka

Minimize

obj: 2061.259 x1 + 1774.702 x2 + 1463.227 x3 + 1124.667 x4 + 756.667 x5
+ 2460.281 m + 100 d1 + 100 d2 + 100 d3 + 100 d4 + 100 d5 + 100 d6

Subject To

jan: m - 0.06667 x1 - d1 >= 0

feb: 0.8 x1 - 0.06667 x2 + 0.92 m - d2 >= 0

mar: 0.736 x1 + 0.8 x2 - 0.06667 x3 + 0.8464 m - d3 >= 0

apr: 0.6771 x1 + 0.736 x2 + 0.8 x3 - 0.06667 x4 + 0.778688 m - d4 >= 0

may: 0.623 x1 + 0.6771 x2 + 0.736 x3 + 0.8 x4 - 0.06667 x5 + 0.7164 m - d5 >= 0

jun: 0.5731 x1 + 0.623 x2 + 0.6771 x3 + 0.736 x4 + 0.8 x5 + 0.6591 m - d6 >= 0

Bounds

m = 145
d1 = 135
d2 = 125
d3 = 150
d4 = 170
d5 = 160
d6 = 180

Generals

x1 x2 x3 x4 x5

End

Tulokset

Optimoinnin tulokseksi saadaan kokonaiskustannus 608408,06200 \$ muuttujien arvoilla:

Taulukko 11 - Optimoinnin tulos

Muuttuja	Arvo
x_1	0
x_2	38
x_3	38
x_4	7
x_5	38
M	145
d_1	135
d_2	125
d_3	150
d_4	170
d_5	160
d_6	180

Tuloksen oikeellisuus voidaan vielä varmistaa simuloimalla.

Taulukko 12 - Optimointituloksen simulointi Excelillä

Kuukausi	Oppilaat (xi)	Opettajat	Agentteja	Käytettävissä	Kysyntä (di)	Ylimäärä	Kustannus
January	0	0	145	145	135	10	86000
February	38	3	133	130	125	5	92600
March	38	3	153	150	150	0	105100
April	7	1	171	170	170	0	105050
May	38	3	163	160	160	0	111100
June		0	180	180	180	0	108000
						Yhteensä	607850

Kokonaiskustannus poikkeaa hieman CPLEX-versiosta pyöristyserojen takia. Simuloinnissa opettajat esimerkiksi pyöristetään ylöspäin, koska alle 15 oppilaalle kuitenkin tarvitaan opettaja.

Herkkyysanalyysi ja tulosten arviointi

Herkkyysanalyysiä varten muokataan hieman CPLEX-syötettä: laatikkorajoitteet muutetaan normaaleiksi ja kaikki muuttujat ovat liukulukuja. Herkkyysanalyysi ajetaan komennolla `display sensitivity rhs *`:

Taulukko 13 - Rajoitteiden herkkyysanalyysi CPLEX-ohjelmistosta

Constraint Name	Dual Price	Down	Current	Up
jan	0	$-\infty$	0	10
feb	0	$-\infty$	0	5,9177
mar	497,4555	-32,0694	0	35,2991
apr	536,049	-34,965	0	6,6721
may	539,0133	-6,6089	0	35,6484
jun	990,7538	147,2035	0	153303,5873
m	582,6648	139,0257	145	180,191
d1	100	0	135	145
d2	100	0	125	130,9177
d3	597,4555	117,9306	150	185,2991
d4	636,049	135,035	170	176,6721
d5	639,0133	153,3911	160	195,6484
d6	100	0	180	∞

Herkkyysanalyysistä nähdään, että tammikuun ja helmikuun vaatimusrajoitteen duaalin hinta on 0, joten rajoite ei ole aktiivinen. Vastaavien kysyntärajoitteiden duaalin hinta on silloin 100, joka on lisäkustannus sille, että agentti on töissä. Muulloin kysynnän kasvaminen yhdellä agentilla lisäisi kustannuksia 597...639 \$. Alussa olevien agenttien määrä (m) voi pienimmillään olla 140, muulloin ei löydetä sallittua ratkaisua. Kysyntä voi vaihdella melko pienissä rajoissa, jonka jälkeen duaalin hinta muuttuu. Lisäksi on huomattava, että ratkaisu muuttuu, kun minkä tahansa kuukauden, paitsi tammi- tai helmikuun, kysyntä muuttuu. Malli on siis erittäin altis markkinatilanteen muuttumiselle, eikä siten soveltuisi päätöksentekijäksi todellisessa tilanteessa.

Kustannusten (lue palkkojen) muuttuminen ei muuta päätösmuuttujien arvoja, koska rajoitteet sitovat ne tarkasti. Eli vaikka kouluttaminen maksaisi kuinka paljon tahansa, se tehtäisiin. Autonvuokraus liiketoimintana ei kuitenkaan ole niin kriittistä, että sitä pitäisi pyörittää tappiollisuudesta huolimatta. Tämän ongelmakohdan voisi kiertää menetetyn tuoton avulla. Samalla kysynnät pitäisi muuttaa satunnaismuuttujiksi. Tuloksena olisi paljon monimutkaisempi stokastinen, todennäköisesti epälineaarinen optimointitehtävä.