Optimointi 1 Harjoitustyö no. 1043

## Tehtävän muotoilu

Tehtävänä on suunnitella mahdollisimman vähäkustanteinen autonvuokrausagenttien koulutusohjelma. Tammi-toukokuussa voidaan kuukausittain ottaa tietty määrä oppilaita kurssille. Jokaista 15 oppilasta kohti pitää kyseisenä kuukautena olla yksi koulutuksen aiemmin käynyt opettaja varattuna opetustehtäviin. Kurssia eivät läpäise kaikki, ja joka kuukausi koulutetuista agenteista poistuu tietty prosenttiosuus. Tiedetään etukäteen tarvittavien agenttien määrä vuokraustoimintaan sekä eri henkilöille maksettavat palkat.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Muuttuja** | **Kuukausi** | **Agenttien** **kysyntä** |
|  | Tammikuu | 135 |
|  | Helmikuu | 125 |
|  | Maaliskuu | 150 |
|  | Huhtikuu | 170 |
|  | Toukokuu | 160 |
|  | Kesäkuu | 180 |

Taulukko 1 - Agenttien kysynnät Taulukko 2 - Työtehtävien palkat

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Muuttuja** | **Työtehtävä** | **Palkka** |
|  | Oppilas | 350 |
|  | Agentti töissä | 600 |
|  | Agentti vapaalla | 500 |

Valitaan päätösmuuttujiksi xi = koulutettavien määrä kuukaudessa i.  
Lisäksi valitaan seuraavat parametrit

Taulukko 3 - Tehtävän parametrit

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Parametri** | **Merkitys** | **Arvo** |
|  | Agenttien määrä alussa | 145 |
|  | Agenttien valmistumisosuus |  |
|  | Seuraavana kuukautena jatkavien agenttien osuus | 0,92 |
|  | Tarvittavien opettajien määrä oppilasta kohti |  |

Valmiiden agenttien määrät saadaan seuraavilla lausekkeilla

Taulukko 4 - Valmiiden agenttien määrät

|  |  |
| --- | --- |
| **Kuukausi** | **Valmiiden agenttien määrä** |
| Tammikuu |  |
| Helmikuu |  |
| Maaliskuu |  |
| Huhtikuu |  |
| Toukokuu |  |
| Kesäkuu |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Kuukausi** | **Vaatimus** |
| Tammikuu |  |
| Helmikuu |  |
| Maaliskuu |  |
| Huhtikuu |  |
| Toukokuu |  |
| Kesäkuu |  |

Kun edellisistä tuloksista vähennetään opettajina toimivien agenttien määrät, saadaan seuraavat vaatimukset:

Taulukko 5 – Vaatimukset

Eri työtehtäville saadaan kokonaiskustannukset kyseistä tehtävää suorittavien henkilöiden määrien ja kyseisen tehtävän palkan avulla.

Taulukko 6 - Eri työtehtävien kokonaiskustannukset

|  |  |
| --- | --- |
| **Työtehtävä** | **Kokonaiskustannus** |
| Oppilas |  |
| Työtä tekevä (opettaja tai myyjä) |  |
| Vapaalla |  |

Saadaan optimointitehtävä

## Linearisointi

Saatu optimointitehtävä on kuitenkin epälineaarinen. Tehtävää voidaan linearisoida ottamalla käyttöön käsitteet agentin peruspalkka ja lisäpalkka, joka maksetaan työtä tekeville agenteille.

Taulukko 7 - Palkat kustannuslisäajattelulla

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Muuttuja** | **Työtehtävä** | **Palkka** |
|  | Oppilas | 350 |
|  | Agentti töissä -lisä | 100 |
|  | Agentti palkkalistalla | 500 |

Tehtävä voidaan ajatella siten, että lasketaan kuukaudessa i otetun oppilaan kustannuksia. Tällöin huomioidaan suorat kustannukset oppilaan palkka ja opettajan työlisä sekä epäsuora valmistuneiden agenttien palkkakustannus kaikilta tulevilta kuukausilta. Koulutettujen agenttien määrä voidaan laskea geometrisen summan avulla. Vuokraustyötä tekevien agenttien määrä ei riipu uusien oppilaiden määrästä vaan niitä on täsmälleen kysynnän verran.

Taulukko 8 - Kokonaiskustannukset kustannuslisäajattelulla

|  |  |
| --- | --- |
| **Kustannuslaji** | **Kokonaiskustannus** |
| Oppilaan palkka |  |
| Opettajan lisäpalkka |  |
| Koulutettavien agenttien peruspalkka tulevilta kuukausilta |  |
| Vuokraustyön lisäkustannus |  |
| Alussa olevien agenttien peruspalkka tulevilta kuukausilta |  |

Päätösmuuttujista riippuvat lausekkeet voidaan helposti yhdistää. Kaksi viimeisintä ovat parametrien arvoista riippuvia vakioita. Parametrit M ja di voidaan kuitenkin lisätä muuttujiksi, jolloin niiden muutoksia voidaan tarkastella paremmin herkkyysanalyysissä. Tuloksena saadaan lineaarinen optimointimalli, kun muut parametrit ovat vakioita.

Kun parametrit *p1*, *p2, p3, T, v* ja *p* kiinnitetään, voidaan päätösmuuttujille laskea vakiokertoimiset kustannukset.

Taulukko 9 - Kustannusfunktion vakiokertoimet

|  |  |
| --- | --- |
| **Päätösmuuttuja** | **Kerroin** |
|  |  |
|  | 1775 |
|  | 1463 |
|  | 1125 |
|  | 757 |
|  |  |
|  |  |

Vastaavasti rajoitteet voidaan kirjoittaa vakiokertoimisina. M voidaan jättää muuttujaksi lisäämällä rajoite M =145, vastaavasti di.

Taulukko 10 - Parametrikertoimien lukuarvot

|  |  |
| --- | --- |
| **Kerroin** | **Lukuarvo** |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  | 0,6771 |
|  | 0,6230 |
|  | 0,5731 |
|  | 0,92 |
|  | 0,8464 |
|  | 0,7787 |
|  | 0,7164 |
|  | 0,6591 |

Saatu optimointitehtävä on lineaarinen ja se voidaan syöttää esimerkiksi CPLEX-ohjelmistoon:

\ENCODING=ISO-8859-1

\Problem name: optimointi1harkka

Minimize

obj: 2061.259 x1 + 1774.702 x2 + 1463.227 x3 + 1124.667 x4 + 756.667 x5

+ 2460.281 m + 100 d1 + 100 d2 + 100 d3 + 100 d4 + 100 d5 + 100 d6

Subject To

jan: m - 0.06667 x1 - d1 >= 0

feb: 0.8 x1 - 0.06667 x2 + 0.92 m - d2 >= 0

mar: 0.736 x1 + 0.8 x2 - 0.06667 x3 + 0.8464 m - d3 >= 0

apr: 0.6771 x1 + 0.736 x2 + 0.8 x3 - 0.06667 x4 + 0.778688 m - d4 >= 0

may: 0.623 x1 + 0.6771 x2 + 0.736 x3 + 0.8 x4 - 0.06667 x5 + 0.7164 m - d5 >= 0

jun: 0.5731 x1 + 0.623 x2 + 0.6771 x3 + 0.736 x4 + 0.8 x5 + 0.6591 m - d6 >= 0

Bounds

m = 145

d1 = 135

d2 = 125

d3 = 150

d4 = 170

d5 = 160

d6 = 180

Generals

x1 x2 x3 x4 x5

End

## Tulokset

Optimoinnin tulokseksi saadaan kokonaiskustannus 608408,06200 $ muuttujien arvoilla:

Taulukko 11 - Optimoinnin tulos

|  |  |
| --- | --- |
| **Muuttuja** | **Arvo** |
|  | 0 |
|  | 38 |
|  | 38 |
|  | 7 |
|  | 38 |
|  | 145 |
|  | 135 |
|  | 125 |
|  | 150 |
|  | 170 |
|  | 160 |
|  | 180 |

Tuloksen oikeellisuus voidaan vielä varmistaa simuloimalla.

Taulukko 12 - Optimointituloksen simulointi Excelillä

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Kuukausi** | **Oppilaat (xi)** | **Opettajat** | **Agentteja** | **Käytettävissä** | **Kysyntä (di)** | **Ylimäärä** | **Kustannus** |
| January | 0 | 0 | 145 | 145 | 135 | 10 | 86000 |
| February | 38 | 3 | 133 | 130 | 125 | 5 | 92600 |
| March | 38 | 3 | 153 | 150 | 150 | 0 | 105100 |
| April | 7 | 1 | 171 | 170 | 170 | 0 | 105050 |
| May | 38 | 3 | 163 | 160 | 160 | 0 | 111100 |
| June |  | 0 | 180 | 180 | 180 | 0 | 108000 |
|  |  |  |  |  |  | **Yhteensä** | **607850** |

Kokonaiskustannus poikkeaa hieman CPLEX-versiosta pyöristyserojen takia. Simuloinnissa opettajat esimerkiksi pyöristetään ylöspäin, koska alle 15 oppilaalle kuitenkin tarvitaan opettaja.

## Herkkyysanalyysi ja tulosten arviointi

Herkkyysanalyysiä varten muokataan hieman CPLEX-syötettä: laatikkorajoitteet muutetaan normaaleiksi ja kaikki muuttujat ovat liukulukuja. Herkkyysanalyysi ajetaan komennolla display sensitivity rhs \*:

Taulukko 13 - Rajoitteiden herkkyysanalyysi CPLEX-ohjelmistosta

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Constraint Name** | **Dual Price** | **Down** | **Current** | **Up** |
| jan | 0 | −∞ | 0 | 10 |
| feb | 0 | −∞ | 0 | 5,9177 |
| mar | 497,4555 | -32,0694 | 0 | 35,2991 |
| apr | 536,049 | -34,965 | 0 | 6,6721 |
| may | 539,0133 | -6,6089 | 0 | 35,6484 |
| jun | 990,7538 | 147,2035 | 0 | 153303,5873 |
| m | 582,6648 | 139,0257 | 145 | 180,191 |
| d1 | 100 | 0 | 135 | 145 |
| d2 | 100 | 0 | 125 | 130,9177 |
| d3 | 597,4555 | 117,9306 | 150 | 185,2991 |
| d4 | 636,049 | 135,035 | 170 | 176,6721 |
| d5 | 639,0133 | 153,3911 | 160 | 195,6484 |
| d6 | 100 | 0 | 180 | ∞ |

Herkkyysanalyysistä nähdään, että tammikuun ja helmikuun vaatimusrajoitteen duaalin hinta on 0, joten rajoite ei ole aktiivinen. Vastaavien kysyntärajoitteiden duaalin hinta on silloin 100, joka on lisäkustannus sille, että agentti on töissä. Muulloin kysynnän kasvaminen yhdellä agentilla lisäisi kustannuksia 597…639 $. Alussa olevien agenttien määrä (m) voi pienimmillään olla 140, muulloin ei löydetä sallittua ratkaisua. Kysyntä voi vaihdella melko pienissä rajoissa, jonka jälkeen duaalin hinta muuttuu. Lisäksi on huomattava, että ratkaisu muuttuu, kun minkä tahansa kuukauden, paitsi tammi- tai helmikuun, kysyntä muuttuu. Malli on siis erittäin altis markkinatilanteen muuttumiselle, eikä siten soveltuisi päätöksentekijäksi todellisessa tilanteessa.

Kustannusten (lue palkkojen) muuttuminen ei muuta päätösmuuttujien arvoja, koska rajoitteet sitovat ne tarkasti. Eli vaikka kouluttaminen maksaisi kuinka paljon tahansa, se tehtäisiin. Autonvuokraus liiketoimintana ei kuitenkaan ole niin kriittistä, että sitä pitäisi pyörittää tappiollisuudesta huolimatta. Tämän ongelmakohdan voisi kiertää menetetyn tuoton avulla. Samalla kysynnät pitäisi muuttaa satunnaismuuttujiksi. Tuloksena olisi paljon monimutkaisempi stokastinen, todennäköisesti epälineaarinen optimointitehtävä.