Economia Matemática

Equações diferenciais ordinárias

Roteiro de aula 6 e 7

Professor: Josimar Gonçalves de Jesus

A natureza fundamental da análise dinâmica é encontrar uma trajetória temporal a partir de algum determinado padrão de variação de uma variável y ao longo do tempo. No contexto do tempo contínuo, o padrão de variação de uma variável é incorporado nas derivadas.

Neste capítulo vamos discutir a solução de equações diferenciais de primeira ordem. Neste contexto, a palavra ordem se refere a ordem mais alta das derivadas que aparecem na equação diferencial. Uma equação diferencial de primeira ordem pode conter apenas a derivada primeira, conforme a equação abaixo:

$$\frac{dy}{dt} + u(t)y = w(t) \tag{1}$$

onde $u(t)$, $w(t)$ e $y = f(t)$ são todas funções de t.

Como a primeira derivada está elevada ao expoente um, o mesmo acontecendo com y, e não há nenhum produto da forma $y(dy/dt)$, então diz que está é uma equação diferencial linear de primeira ordem. Não há nenhuma restrição sobre as formas das funções $u(t)$ e $w(t)$.

Resolver uma equação diferencial é encontrar uma função que, juntamente com suas derivadas, satisfaça a equação.

Coeficientes e termos constantes

Se $u(t) = a$ e $w(t) = b$ forem funções constantes, a equação passa a ser denominada de EDO com coeficiente e termo constante.

$$\frac{dy}{dt} + ay = b \tag{2}$$

O caso homogêneo

Se por acaso $b = 0$ a equação (2) se tornará

(3)

e essa EDO é dita homogênea. A característica de uma equação homogênea é que, quando todas as variáveis é multiplicada por uma constante, a equação permanece a mesma.

De (3) segue que

(4)

Ora, que tipo de função tem a propriedade de sua derivada ser função da própria função?

De (4) temos que

E integrando em relação a t, tem-se que

(5)

A solução de (3) é uma função exponencial! Uma função cuja derivada é função dela própria. Note que em (5) aparece uma constante arbitrária A. Por conseguinte, (5) é uma solução geral. Quando A for substituída por qualquer valor a solução se torna uma solução particular de (5).

Se $y = y(0)$ quando $t = 0$, então temos $A = y(0)$. Neste caso específico em que $A = y(0)$ a solução é denominada de solução definida

$$y = y(0)e^{-at}$$

A escolha $A = y(0)$ tem um significado especial: y(0) é o único valor que faz com que a solução satisfaça a condição inicial.

Note que a solução não é um valor numérico, mas uma função. A solução é livre que quaisquer expressões de modo que, logo que t for substituído nela um valor correspondente a y pode ser calculado.

O caso não homogêneo

Quando $b \neq 0$, temos uma EDO não homogênea por (2):

$$\frac{dy}{dt} + ay = b$$

A solução dessa equação é dada por dois termos, a função complementar (y_c) e a solução particular (y_p). Cada um deles tem uma interpretação econômica significativa.

A função complementar nada mais é do que a solução da equação homogênea associada.

$$y_c -= Ae^{-at}$$

A solução particular é qualquer solução da equação completa. Podemos tentar a solução mais simples, a saber, $y\ = k$ constante

Logo a solução particular é

A solução completa é então dada por

Se $y = y(0)$ quando $t = 0$, então temos

E a solução definida é dada por

Quando $a = 0$, temos que

e por integração direta concluímos que

Se $y = y(0)$ quando $t = 0$, então temos $A = y(0)$ e, portanto, que

Coeficiente variável e termo variável.

No caso mais geral de um EDO,

$$\frac{dy}{dt} + u(t)y = w(t)$$

$u(t)$ e $w(t)$ representam um coeficiente variável e um termo variável, respectivamente. Como encontrar a trajetória temporal $y(t)$ neste caso?

O caso homogêneo

Para o caso homogêneo, com $w(t) = 0$, a solução ainda é fácil de obter. Visto que a equação diferencial está na forma

Temos, integrando cada um dos lados em relação a t

O caso não-homogêneo

Para o caso não homogêneo a solução não é tão fácil de obter, exige o conhecimento de equações diferenciais exatas, que não está no nosso escopo. Contudo, não fará mal algum enunciar o resultado aqui:

$$y = e^{-\int u(t)dt}(A + \int w(t)e^{\int u(t)dt}dt)$$

Abordagem gráfico-qualitativa

Nem sempre é possível encontrar uma solução algébrica para uma equação diferencial. Nestes casos, ainda assim pode ser possível averiguar as propriedade qualitativas da trajetória temporal, principalmente se y(t) converge, analisando diretamente a própria equação diferencial ou seu gráfico. Mesmo quando há soluções quantitativas podemos aplicar as técnicas qualitativas.

O diagrama de fase

Dada uma equação diferencial de primeira ordem na forma geral

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

linear ou não linear da variável y podemos desenhar o gráfico de dy/dt em função de y. Essa representação geométrica, viável sempre que dy/dt é função apenas de y, é denominada de diagrama de fase e o gráfico que representa a função, linha de fase. Uma vez conhecida a linha de fase, sua configuração comunicará informações qualitativas significativas a respeito da trajetória temporal de $y(t)$.

Qualquer ponto acima do eixo horizontal y tem que estar crescendo ao longo do tempo e vice-versa.

A discussão sugere que, em geral, a inclinação da linha de fase em sua intersecção é a chave da estabilidade dinâmica de equilíbrio ou de convergência da trajetória temporal. (negativa, trajetória convergente; positiva, trajetória divergente). Em suma, para o estuda da estabilidade dinâmica de equilíbrio, temos a alternativa de inferir a trajetória por meio da linha de fase.

Modelo de Solow

O modelo de crescimento de Solow, agraciado com prêmio Nobel, mostra, entre outras coisas, que a trajetória de crescimento do fio da navalha do modelo de Domar é primordialmente um resultado da premissa específica da função de produção nele adotada.

No modelo de Domar, a produção é enunciada explicitamente como uma função apenas do capital. A ausência de um insumo trabalho na função de produção acarreta implicação de que o trabalho sempre está combinado com o capital segundo uma proporção fixa. Solow, ao contrário, procura analisar o caso em que capital e trabalho podem ser combinados em proporções variáveis.

A função de produção adotada por Solow aparece na forma

$$Q = f(K, L) \; (K, L > 0)$$

Supõe-se que

$$\frac{\partial Q}{\partial K} > 0, \frac{\partial Q}{\partial L} > 0, \frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} < 0, \frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} < 0,$$

Ou seja, os produtos marginais são positivos e representam retornos decrescentes para cada insumo. Ademais, a função de produção é linearmente homogenea, de forma que podemos escrever:

$$Q = Lf\left(\frac{K}{L}, 1\right) = L\phi(k)$$

Com $\phi'(k) > 0$ e $\phi''(k) < 0$

Dado que Q depende de K e L, é necessário estipular como essas duas variáveis são estipuladas:

$$\frac{dK}{dt} = sQ \quad [proporção\ constante\ de\ Q\ é\ investida]$$

$$\frac{dL/dt}{L} = \lambda > 0 \quad [A\ força\ de\ trabalho\ cresce\ expoencialmente]$$

As três equações constituem um modelo completo e podemos escrever

$$\frac{dK}{dt} = sL\phi(k)$$

Com $K = kL$, temos que

$$\frac{dK}{dt} = L\frac{dk}{dt} + k\frac{dL}{dt} = L\frac{dk}{dt} + k\lambda L$$

$$L\frac{dk}{dt} + k\lambda L = sL\phi(k) \Rightarrow \frac{dk}{dt} = s\phi(k) - k\lambda$$

Essa é a equação fundamental do modelo de Solow.

Uma vez alcançado o ponto de equilíbrio (relação capital trabalho invariável no tempo), dali em diante o capital deve crescer para a par com o trabalho a uma taxa idêntica λ. Isso quer dizer que o investimento tem de crescer a uma taxa λ. Assim, o modelo de Solow serve para mostrar que, dada uma taxa de crescimento do fator trabalho λ, a economia, por si só, e sem o delicado balanceamento ao modo domar, pode em seu devido tempo, chegar a um estado de crescimento constante, no qual o investimento crescera a taxa λ, a mesma de K e L. Além do mais, Q deve crescer a mesma taxa. Tal situação, na qual todas as variáveis relevantes crescem a uma taxa idêntica, é denominada de um estado estacionário.

A função de produção, pode, ainda, ser variável ao longo do tempo, permitindo que o estado da tecnologia seja melhorado, aumentando assim a produtividade do trabalho.