

CÁLCULO NÚMÉRICO

Prof.^a Debora Cristina Brandt Costa





Copyright © UNIASSELVI 2011

Elaboração:

Prof.^a Debora Cristina Brandt Costa

Revisão, Diagramação e Produção:

Centro Universitário Leonardo da Vinci – UNIASSELVI

Ficha catalográfica elaborada na fonte pela Biblioteca Dante Alighieri
UNIASSELVI – Indaial.

515.1

C838c Costa, Debora Cristina Brandt.

Cálculo numérico/ Debora Cristina Brandt Costa. 2^a Ed.
Indaial : Uniasselvi, 2011.

247 p. il.

Inclui bibliografia.

ISBN 978-85-7830-499-7

1. Cálculo - Análise.

I. Centro Universitário Leonardo da Vinci

II. Núcleo de Ensino a Distância

APRESENTAÇÃO

Prezado acadêmico!

Ao longo do curso de Matemática, você dever ter lido várias vezes que existiam aplicações práticas para o que você estava aprendendo: equações diferenciais, cálculo, álgebra linear... Vamos agora estudar alguns tópicos de Cálculo Numérico. A diferença desta matéria em relação às outras é que, na verdade, ela não tem nada de novo. Esta disciplina apenas faz a ponte entre o que você já aprendeu e as aplicações práticas. Vamos explicar melhor: o cálculo numérico estuda formas de resolução de problemas matemáticos, de maneira que eles possam ser facilmente calculados e implementados em programas computacionais. Vamos aprender maneiras de encontrar soluções numéricas para equações e sistemas lineares e não lineares, polinômios, integração de funções complicadas e equações diferenciais ordinárias.

Claro que não estudaremos todos os métodos existentes, não teríamos tempo hábil para isso, mesmo porque sempre existem novos métodos e variantes dos que já existem. Optamos por mostrar a você de onde eles surgiram, quais as ideias que estão por trás de cada um deles. Mesmo que tenhamos tentado detalhar todos os passos, essas demonstrações parecerão complicadas algumas vezes, é verdade. Mas não se deixe abalar: lembre-se de que tudo é difícil até que você realmente entenda – daí se torna fácil.

Esperamos que você aprenda um pouco de Cálculo Numérico e possa desenvolver um hábito que será extremamente saudável na sua vida como professor/a de Matemática e formador/a de opinião: sempre se perguntar de onde as coisas surgem, e quais as ideias que estão por trás delas. Ensine seus alunos a pensar desta forma. Além de ajudar a desmistificar esse monstro que muitos acham que a Matemática é, você estará formando cidadãos melhores.

Bons estudos!

Prof.^a Debora Cristina Brandt Costa



Você já me conhece das outras disciplinas? Não? É calouro? Enfim, tanto para você que está chegando agora à UNIASSELVI quanto para você que já é veterano, há novidades em nosso material.

Na Educação a Distância, o livro impresso, entregue a todos os acadêmicos desde 2005, é o material base da disciplina. A partir de 2017, nossos livros estão de visual novo, com um formato mais prático, que cabe na bolsa e facilita a leitura.

O conteúdo continua na íntegra, mas a estrutura interna foi aperfeiçoada com nova diagramação no texto, aproveitando ao máximo o espaço da página, o que também contribui para diminuir a extração de árvores para produção de folhas de papel, por exemplo.

Assim, a UNIASSELVI, preocupando-se com o impacto de nossas ações sobre o ambiente, apresenta também este livro no formato digital. Assim, você, acadêmico, tem a possibilidade de estudá-lo com versatilidade nas telas do celular, tablet ou computador.

Eu mesmo, UNI, ganhei um novo *layout*, você verá frequentemente e surgirei para apresentar dicas de vídeos e outras fontes de conhecimento que complementam o assunto em questão.

Todos esses ajustes foram pensados a partir de relatos que recebemos nas pesquisas institucionais sobre os materiais impressos, para que você, nossa maior prioridade, possa continuar seus estudos com um material de qualidade.

Aproveito o momento para convidá-lo para um bate-papo sobre o Exame Nacional de Desempenho de Estudantes – ENADE.

Bons estudos!



BATE SOBRE O PAPO ENADE!



Olá, acadêmico!



Você já ouviu falar sobre o ENADE?

Se ainda não ouviu falar nada sobre o ENADE, agora você receberá algumas informações sobre o tema.

Ouviu falar? Ótimo, este informativo reforçará o que você já sabe e poderá lhe trazer novidades.



Vamos lá!



Qual é o significado da expressão ENADE?

EXAME NACIONAL DE DESEMPENHO DOS ESTUDANTES

Em algum momento de sua vida acadêmica você precisará fazer a prova ENADE.



Que prova é essa?

É **obrigatória**, organizada pelo INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.

Quem determina que esta prova é obrigatória... O **MEC – Ministério da Educação**.

O objetivo do MEC com esta prova é o de avaliar seu desempenho acadêmico assim como a qualidade do seu curso.



Fique atento! Quem não participa da prova fica impedido de se formar e não pode retirar o diploma de conclusão do curso até regularizar sua situação junto ao MEC.



Não se preocupe porque a partir de hoje nós estaremos auxiliando você nesta caminhada.

Você receberá outros informativos como este, complementando as orientações e esclarecendo suas dúvidas.



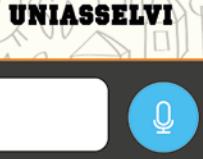
Você tem uma trilha de aprendizagem do ENADE, receberá e-mails, SMS, seu tutor e os profissionais do polo também estarão orientados.



Participará de webconferências entre outras tantas atividades para que esteja preparado para #mandar bem na prova ENADE.

Nós aqui no NEAD e também a equipe no polo estamos com você para vencermos este desafio.

Conte sempre com a gente, para juntos mandarmos bem no ENADE!



SUMÁRIO

UNIDADE 1 - TEORIA DOS ERROS E SISTEMAS DE EQUAÇÕES.....	1
TÓPICO 1 - TEORIA DOS ERROS.....	3
1 INTRODUÇÃO	3
2 ERROS DE MODELAGEM.....	4
3 ERROS NA FASE DE RESOLUÇÃO.....	5
3.1 CONVERSÃO DE BASES	5
3.2 ERROS DE ARREDONDAMENTO	8
3.3 ERROS DE TRUNCAMENTO	11
3.4 PROPAGAÇÃO DE ERROS	12
RESUMO DO TÓPICO 1.....	14
AUTOATIVIDADE	16
TÓPICO 2 - EQUAÇÕES.....	17
1 INTRODUÇÃO	17
2 EQUAÇÕES REAIS DE PRIMEIRO GRAU COM UMA VARIÁVEL	18
3 EQUAÇÕES REAIS DE SEGUNDO GRAU (EQUAÇÃO QUADRÁTICA).....	19
3.1 EQUAÇÃO INCOMPLETA DE SEGUNDO GRAU.....	19
3.2 EQUAÇÃO COMPLETA DO SEGUNDO GRAU.....	21
4 EQUAÇÕES REAIS FRACIONÁRIAS.....	23
5 EQUAÇÕES BIQUADRADAS.....	26
6 EQUAÇÕES COMPLEXAS.....	28
RESUMO DO TÓPICO 2.....	31
AUTOATIVIDADE	32
TÓPICO 3 - SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES.....	33
1 INTRODUÇÃO	33
2 PROPRIEDADES ELEMENTARES.....	33
3 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO	35
3.1 MÉTODOS DIRETOS	35
3.1.1 Regra de Cramer	35
3.1.2 Método de Gauss	37
3.1.3 Método de Gauss-Jordan	44
3.1.4 Decomposição LU ou fatoração LU	49
3.1.5 Cálculo da matriz inversa.....	53
RESUMO DO TÓPICO 3.....	58
AUTOATIVIDADE	60
TÓPICO 4 - SISTEMAS LINEARES – MÉTODOS ITERATIVOS	63
1 INTRODUÇÃO	63
2 MÉTODOS ITERATIVOS.....	63
2.1 MÉTODO DE JACOBI.....	64
2.2 MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL	70
2.3 CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA	73

3 SISTEMAS LINEARES COMPLEXOS	75
LEITURA COMPLEMENTAR.....	76
RESUMO DO TÓPICO 4.....	78
AUTOATIVIDADE	80
UNIDADE 2 - EQUAÇÕES NÃO LINEARES E INTERPOLAÇÃO.....	83
TÓPICO 1 - ZEROS DAS FUNÇÕES.....	85
1 INTRODUÇÃO	85
2 ISOLAMENTO DAS RAÍZES	86
3 REFINAMENTO E CRITÉRIO DE PARADA	93
4 MÉTODOS ITERATIVOS PARA OBTENÇÃO DE RAÍZES.....	94
4.1 MÉTODO DA BISSECÇÃO.....	94
4.1.1 Convergência.....	99
4.2 MÉTODO DAS CORDAS	100
4.2.1 Ordem de convergência.....	105
4.3 MÉTODO DE NEWTON	107
4.3.1 Ordem de convergência.....	110
4.4 MÉTODO DAS SECANTES	110
4.5 MÉTODO DA ITERAÇÃO LINEAR.....	112
5 PRINCIPAIS PRÓS E CONTRAS DE CADA MÉTODO	115
5.1 MÉTODO DA BISSECÇÃO.....	116
5.2 MÉTODO DAS CORDAS	116
5.3 MÉTODO DE NEWTON	116
5.4 MÉTODO DAS SECANTES	116
5.5 MÉTODO DA ITERAÇÃO LINEAR.....	116
RESUMO DO TÓPICO 1.....	118
AUTOATIVIDADE	120
TÓPICO 2 - SISTEMAS DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES.....	123
1 INTRODUÇÃO	123
2 ITERAÇÃO LINEAR	124
3 MÉTODO DE NEWTON.....	129
4 MÉTODO DE NEWTON PARA EQUAÇÕES NÃO LINEARES COMPLEXAS	135
RESUMO DO TÓPICO 2.....	138
AUTOATIVIDADE	140
TÓPICO 3 - EQUAÇÕES POLINOMIAIS.....	141
1 INTRODUÇÃO	141
2 DETERMINAÇÃO DE RAÍZES REAIS	142
3 ALGORITMO QUOCIENTE-DIFERENÇA.....	151
RESUMO DO TÓPICO 3.....	157
AUTOATIVIDADE	158
TÓPICO 4 - INTERPOLAÇÃO.....	159
1 INTRODUÇÃO	159
2 PROBLEMA GERAL DA INTERPOLAÇÃO	160
3 MÉTODOS DE INTERPOLAÇÃO.....	161
3.1 INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL	162
3.1.1 Interpolação polinomial de Lagrange.....	162
3.1.2 Interpolação polinomial de Newton	166
3.1.3 Comparação entre as interpolações polinomiais de Lagrange e Newton	172

3.2 INTERPOLAÇÃO LINEAR.....	173
3.3 INTERPOLAÇÃO INVERSA	174
LEITURA COMPLEMENTAR.....	177
RESUMO DO TÓPICO 4.....	180
AUTOATIVIDADE	181
UNIDADE 3 - APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES, INTEGRAÇÃO	
NUMÉRICA E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS	185
TÓPICO 1 - TEORIA DA APROXIMAÇÃO – MÉTODO DOS	
MÍNIMOS QUADRADOS.....	187
1 INTRODUÇÃO	187
2 REGRESSÃO LINEAR.....	192
2.1 REGRESSÃO LINEAR SIMPLES.....	193
2.2 REGRESSÃO LINEAR MÚLTIPLA	197
3 REGRESSÃO POLINOMIAL.....	200
RESUMO DO TÓPICO 1.....	203
AUTOATIVIDADE	205
TÓPICO 2 - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA	209
1 INTRODUÇÃO	209
2 FÓRMULA DE NEWTON-CÔTES.....	209
2.1 REGRA DO TRAPÉZIO	211
2.2 REGRA DE SIMPSON.....	215
3 QUADRATURA GAUSSIANA.....	217
RESUMO DO TÓPICO 2.....	221
AUTOATIVIDADE	222
TÓPICO 3 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS.....	225
1 INTRODUÇÃO	225
2 PROBLEMAS DE VALOR INICIAL	227
2.1 SOLUÇÃO NUMÉRICA DE UM PVI DE PRIMEIRA ORDEM	228
2.2 MÉTODO DE EULER.....	229
2.3 MÉTODOS ENVOLVENDO SÉRIE DE TAYLOR	231
3 MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA.....	233
3.1 MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE ORDEM 1	234
3.2 MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE ORDEM 2	234
LEITURA COMPLEMENTAR.....	236
RESUMO DO TÓPICO 3.....	240
AUTOATIVIDADE	241
REFERÊNCIAS.....	245

TEORIA DOS ERROS E SISTEMAS DE EQUAÇÕES

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

A partir desta unidade, você será capaz de:

- conhecer o sistema de conversão de bases;
- converter números escritos em uma base para outra;
- diferenciar erros de arredondamento de erros de truncamento;
- compreender como se dá a propagação de erros;
- resolver equações de primeiro, segundo grau, fracionárias e biquadradas;
- conceituar métodos diretos de resolução e métodos iterativos;
- encontrar soluções de sistemas de equações lineares através de métodos diretos;
- encontrar soluções de sistemas de equações lineares através de métodos iterativos;
- encontrar soluções de sistemas de equações lineares complexos;
- familiarizar-se com demonstrações matemáticas.

PLANO DE ESTUDOS

A Unidade 1 está dividida em 4 (quatro) tópicos. Em cada um deles você encontrará exemplos que lhe proporcionarão familiaridade com o conteúdo e exercícios que o/a ajudarão na apropriação dos temas estudados.

TÓPICO 1 – TEORIA DOS ERROS

TÓPICO 2 – EQUAÇÕES

TÓPICO 3 – SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

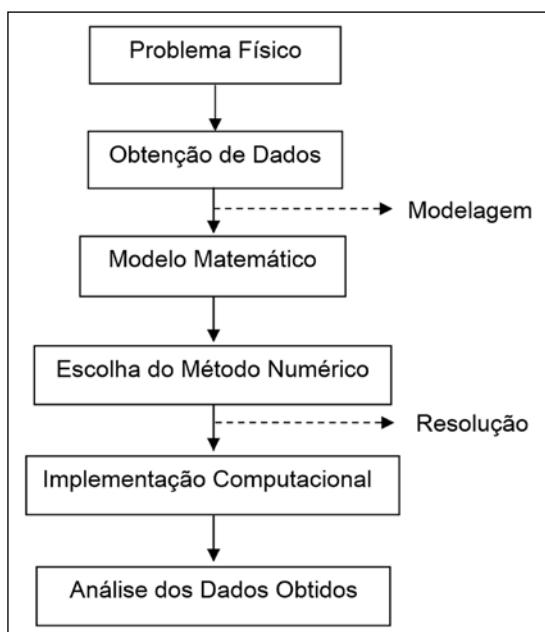
TÓPICO 4 – SISTEMAS LINEARES – MÉTODOS ITERATIVOS

TEORIA DOS ERROS

1 INTRODUÇÃO

O que é Cálculo Numérico? Qual o objetivo desta disciplina?

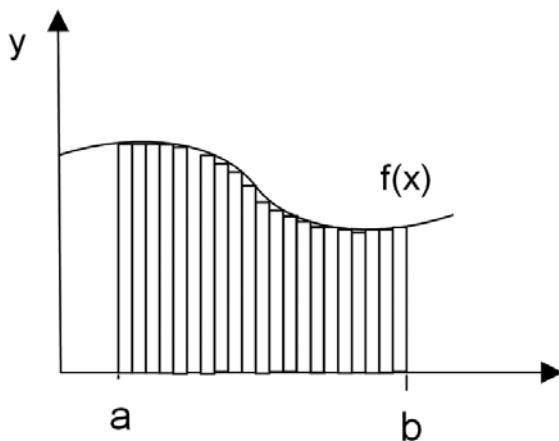
No dia a dia nos deparamos com vários problemas físicos cuja solução numérica gostaríamos de conhecer ou de, pelo menos, encontrar uma aproximação adequada para ela. O esquema a seguir nos mostra, de uma maneira simples, como se dá esse processo:



Qualquer processo de Cálculo Numérico é desenvolvido deste modo, seja na Física, nas engenharias ou em qualquer outra área de aplicação. O Cálculo Numérico surge quando uma resolução analítica torna-se inviável. Como exemplo, sabemos que é fácil resolver um sistema matemático com três equações e três incógnitas. Mas quando o sistema tem 10 equações e 10 incógnitas é aí que entra o cálculo numérico. Agora, podemos esperar que, uma vez encontrado o modelo matemático correto, os resultados obtidos sejam iguais aos esperados. Na verdade, os resultados obtidos são, muitas vezes, bastante diferentes dos esperados, mesmo que todas as etapas da resolução tenham sido aplicadas corretamente. Vamos, a seguir, entender por que isso ocorre.

2 ERROS DE MODELAGEM

Consideremos uma função real contínua f definida sobre um intervalo $[a,b]$ e suponhamos que precisássemos calcular a área delimitada por ela no plano cartesiano. Vimos em Cálculo que a maneira mais precisa de fazer isso é calculando a integral da função f no intervalo $[a,b]$; esse é o modelo matemático mais apropriado. Entretanto, conseguiremos obter aproximações razoáveis para esse valor se dividirmos o intervalo $[a,b]$ em n partes iguais e, de posse do conjunto de pontos $\{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$, somarmos as áreas de todos os retângulos de base n e altura $f(x_j)$, isto é, $A = \sum_{j=0}^{n-1} n.f(x_j)$. Dependendo do grau de dificuldade para calcular a integral da função analiticamente e do grau de precisão que quisermos, esse modelo pode ser apropriado.



Se precisarmos de uma aproximação ainda melhor, podemos considerar, ao invés da soma das áreas dos retângulos, a soma de área dos trapézios de altura n e bases $f(x_j)$ e $f(x_{j+1})$, com $1 \leq j \leq n - 1$.

Outro fator que interfere na precisão do modelo matemático adotado é a viabilidade de se considerar todos os fatores que podem interferir no problema – raramente conseguimos representar um problema físico completamente. Suponhamos, por exemplo, que um engenheiro mecânico queira calcular a distância que um determinado carro, com velocidade de 100 km/h, percorre até parar completamente, sem dispor de uma trena. Através das equações da Cinemática, ele pode fazer isso, já que tem as velocidades inicial e final e pode determinar o tempo gasto durante a frenagem, não levando em consideração no cálculo a resistência do ar, o atrito dos pneus no pavimento (asfalto, cascalho, paralelepípedos...) e a precisão do cronômetro que medirá o tempo gasto

nessa façanha. Na teoria, esses fatores podem parecer desprezíveis, mas na prática... Ou mesmo, calcular a que altura estava um avião no exato momento que um paraquedista pulou, medindo o tempo que ele leva para atingir o solo. Teoricamente, sabendo o tempo de queda, a velocidade inicial e a aceleração da gravidade, poderíamos calcular a altura. Mas onde entra a resistência do ar? Será que ela é tão desprezível assim neste caso?

3 ERROS NA FASE DE RESOLUÇÃO

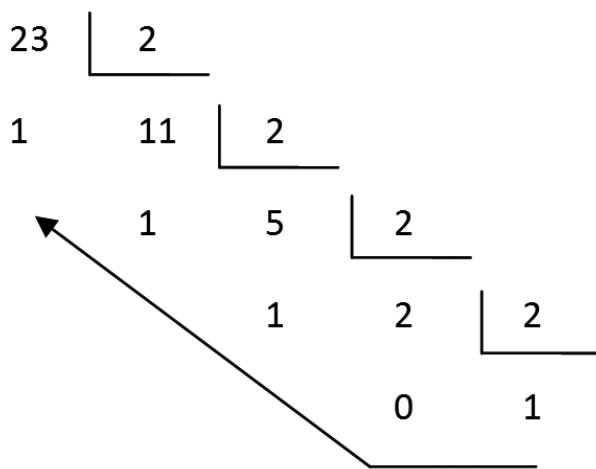
Imaginemos desejar, neste momento, medir o perímetro de uma circunferência de raio 1 (sem se importar com a unidade de medida considerada). Sabemos que a fórmula para se calcular essa medida (modelo matemático) é $P = 2\pi r$, onde r , neste caso, vale 1. O resultado preciso dessa expressão é $P = 2\pi$. Entretanto, sabemos que é impossível obter esse valor numericamente, uma vez que π é um número irracional. Nem a máquina mais precisa fabricada pelo homem é capaz de fornecer o número π completo! Assim, embora tenhamos o modelo matemático ideal, não conseguimos expressar exatamente o valor deste perímetro – sempre trabalharemos com uma aproximação.

Na verdade, para qualquer computador ou calculadora, o conjunto dos números representáveis em um intervalo real $[a,b]$ é finito! Vamos entender um pouco melhor essa afirmação nos tópicos a seguir.

3.1 CONVERSÃO DE BASES

Você já deve ter ouvido falar que os computadores trabalham com base binária. Vamos entender o que significa isso – qualquer dígito que você informa ao computador, ele automaticamente interpreta como uma sequência única de ‘zeros’ e ‘uns’ (0 e 1). No caso dos números, ele faz essa conversão, efetua todos os cálculos que você pedir para que ele faça com os números deste jeito e, ao obter a resposta, converte novamente em um número decimal para exibi-lo e para você poder interpretá-lo. O porquê desta mudança para base binária não vem ao caso neste momento, mas, como ela se dá, é importante que você saiba!

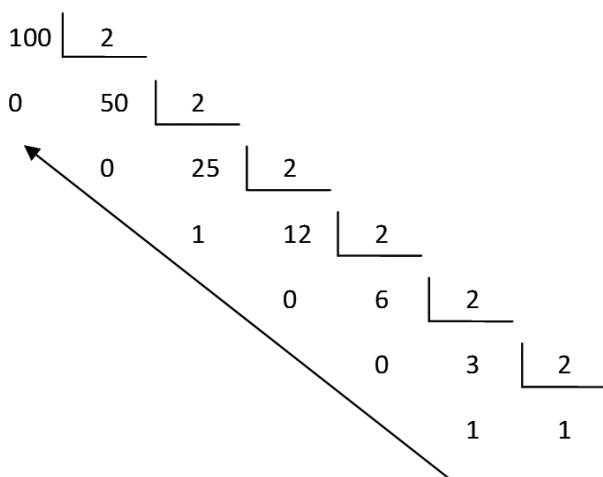
Qualquer número decimal pode ser representado como uma potência de 10, certo? Por exemplo: o número 23 nada mais é do que $2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 = (23)_{10}$ (lembrando que $10^0 = 1$). Da mesma forma, qualquer número pode ser representado como potência de 2. Observe:



Assim $(23)_{10} = (10111)_2$. É com esta sequência de zeros e uns (0 e 1) que o computador interpreta o número decimal 23. Para converter um número na base binária (base 2), procedemos da seguinte forma:

- Dividimos o número considerado por 2 e o quociente por 2 iteradas vezes, até que o quociente encontrado seja menor do que 2.
- Escrevemos os restos obtidos na ordem inversa a que foram encontrados, sendo que o primeiro dígito da sequência será o último quociente (0 ou 1).

Vamos ver mais um exemplo:



Assim, $(100)_{10} = (1100100)_2$.

Para converter um número binário em um número decimal (como o conhecemos), basta multiplicarmos a sequência por potências de 2, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{a)} (1100100)_2 &= 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 \\ &= 2^2 + 2^5 + 2^6 = 4 + 32 + 64 = (100)_{10} \end{aligned}$$

$$\text{b)} (10111)_2 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 = 1 + 2 + 4 + 16 = (23)_{10}$$



Conforme dissemos, o sistema decimal é o sistema que utilizamos no nosso dia a dia. Assim, quando escrevemos $(23)_{10}$, na verdade estamos nos referindo simplesmente ao número 23, conforme o conhecemos.

Vimos anteriormente como funciona a conversão dos números decimais inteiros em números binários e vice-versa. Mas o que acontece se o número considerado for um número real não inteiro? Neste caso, o procedimento é multiplicar a parte decimal por 2 e repetir esse processo com a parte decimal do resultado obtido até obter o número inteiro zero como resposta – ou uma dízima periódica. Vamos entender melhor através de um exemplo:

Exemplo 1: Consideremos o número decimal 0,75.

$$\begin{aligned} 0,75 \times 2 &= 1,50 = 1 + 0,50 \\ 0,50 \times 2 &= 1,00 = 1 + 0,00 \\ 0,00 \times 2 &= 0,00 \\ \therefore (0,75)_{10} &= (0,110)_2 \end{aligned}$$

No caso de números maiores do que 1, trabalhamos com a sua parte inteira e sua parte decimal separadamente: convertemos a parte inteira em número binário e, em seguida, a parte decimal conforme o exemplo acima. Finalmente, somamos os resultados. Observe:

Exemplo 2: Consideremos o número decimal 2,125. Podemos reescrevê-lo como uma parte inteira somada a uma parte decimal, $2,125 = 2 + 0,125$. Trabalhamos com cada uma das partes separadamente.

Como 2 é a mesma coisa que $2 \cdot 1 + 0$, temos que $(2)_{10} = (10)_2$.

Agora, vamos converter a parte decimal da mesma forma que fizemos anteriormente:

$$0,125 \times 2 = 0,25 = 0 + 0,25$$

$$0,25 \times 2 = 0,50 = 0 + 0,50$$

$$0,50 \times 2 = 1,00 = 1 + 0,00$$

$$0,00 \times 2 = 0,00$$

$$\therefore (0,125)_{10} = (0,0010)_2$$

$$\text{Portanto } (2,125)_{10} = (2)_{10} + (0,125)_{10} = (10)_2 + (0,0010)_2 = (10,0010)_2$$

Vamos ver mais um exemplo:

Exemplo 3: Consideremos o número decimal 0,6.

$$0,6 \times 2 = 1,2 = 1 + 0,2$$

$$0,2 \times 2 = 0,40 = 0 + 0,40$$

$$0,40 \times 2 = 0,8 = 0 + 0,80$$

$$0,80 \times 2 = 1,6 = 1 + 0,6$$

$$0,6 \times 2 = 1,2 = 1 + 0,2$$

Observe que os números começaram a se repetir, ou seja, $(0,6)_{10} = (0,100110011\dots)_2$. Podemos concluir que um número finito na base decimal pode muito bem ser um número infinito na base binária!



Optamos por mostrar como trabalhar com uma base binária ($\beta = 2$). Entretanto, o mesmo procedimento pode ser usado para converter números decimais em números de qualquer outra base ($\beta = 3, \beta = 4, \beta = 60 \dots$).

3.2 ERROS DE ARREDONDAMENTO

Vimos como representar um número decimal em base binária e vice-versa. Na verdade, qualquer número x pode ser representado numa base β da seguinte forma:

$$x = \pm \left(\frac{x_1}{\beta^1} + \frac{x_2}{\beta^2} + \frac{x_3}{\beta^3} + \dots + \frac{x_n}{\beta^n} \right) \beta^k$$

onde n e k são inteiros maiores do que 0 e x_i , valem 0, 1, ..., ou $\beta - 1$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Denominamos a sequência $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ de mantissa. Essa parte representa os algarismos significativos do número x . Vamos entender como isso funciona para os casos que já trabalhamos: $\beta = 10$ e $\beta = 2$:

Exemplo 1: Representar 23 na base 10 e base 2.

Como $(23)_{10} = (10111)_2$ temos que:

$$(23)_{10} = 2,3 \cdot 10 = 0,23 \cdot 10 \cdot 10 = 0,23 \cdot 10^2 = \left(\frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \right) \cdot 10^2$$

$$(23)_{10} = (10111)_2 = 0,10111 \cdot 2^5 = \left(\frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} \right) \cdot 2^5$$



Como saber o valor que devemos considerar nos expoentes anteriores? Simples: veja quantos algarismos a parte inteira do número possui. Esse será o valor do respectivo expoente.

Exemplo 2: Representar 2,125 na base 10 e base 2.

Como $(2,125)_{10} = (10,0010)_2$ temos que:

$$(2,125)_{10} = 0,2125 \cdot 10 = \left(\frac{2}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{5}{10^4} \right) \cdot 10^1$$

$$(2,125)_{10} = (10,0010)_2 = 0,100010 \cdot 2^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{0}{2^6} \right) \cdot 2^2$$

Vamos nos restringir novamente no caso em que $\beta = 2$ pois, conforme já mencionamos, a maioria dos computadores e das calculadoras trabalha com essa base (representação binária). Para qualquer número x , temos que sua representação na base 2 é

$$x = \pm \left(\frac{x_1}{2^1} + \frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{2^3} + \dots + \frac{x_n}{2^n} \right) \cdot 2^k \text{ com } x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \{0,1\}.$$

O valor n é chamado de **precisão da máquina** e k é tal que

$$k \in \{-M, -(M - 1), \dots, -1, 0, 1, \dots, M - 1, M\},$$

onde M vai depender da máquina utilizada. Um número não poderá ser representado na máquina se k for menor que $-M$ ou maior que M .

Considere uma máquina que representa um número com precisão de $n = 10$, então a representação de $(23)_{10}$ é:

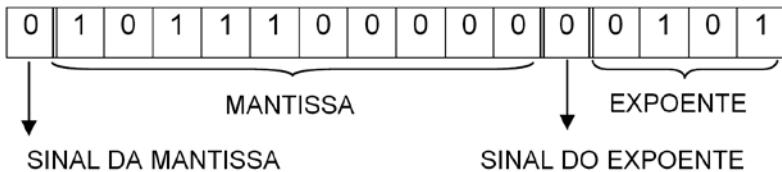
$$(23)_{10} = (10111)_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{0}{2^6} + \frac{0}{2^7} + \frac{0}{2^8} + \frac{0}{2^9} + \frac{0}{2^{10}} \right) \cdot 2^5 \text{ ou de}$$

maneira mais compacta

1	0	1	1	1	0	0	0	0	1
MANTISSA					EXPOENTE				

lembrando que $(5)_{10} = (101)_2$.

Cada dígito da mantissa é chamado de *bit*. Além dos dígitos pertencentes à mantissa e ao expoente, mais dois dígitos são considerados: os responsáveis pelos sinais da mantissa e do expoente respectivamente. Esses *bits* valem 0 se o número for positivo e 1 se for negativo. Assim, 23 é representado por:



Assim, a máquina representada acima utiliza 16 *bits* para representar um número decimal (*byte*).

Exemplo 3: Representar o número -2,125 com n=10:

$$(-2,125)_{10} = (-10,0010)_2 = -\left(\frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{0}{2^6} + \frac{0}{2^7} + \frac{0}{2^8} + \frac{0}{2^9} + \frac{0}{2^{10}}\right) \cdot 2^2 ,$$

lembrando que $(2)_{10} = (10)_2$. Logo a máquina representa o número $(-2,125)_{10}$ na base 2 com 16 bits da seguinte forma:

1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Exemplo 4: Representar o número 0, com n = 10:

$$(0)_{10} = (0)_2 = -\left(\frac{0}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \frac{0}{2^6} + \frac{0}{2^7} + \frac{0}{2^8} + \frac{0}{2^9} + \frac{0}{2^{10}}\right) \cdot 2^0$$

Portanto, a máquina representa o número $(0)_{10}$ na base 2 com 16 bits da seguinte forma:

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Considere, agora, o primeiro número positivo a seguir:

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

O objetivo é encontrar o número decimal correspondente. Note que a máquina apresenta o expoente 0000. Sabendo que $(0)_2 = (0)_{10}$,

$$\left(\frac{0}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \frac{0}{2^6} + \frac{0}{2^7} + \frac{0}{2^8} + \frac{0}{2^9} + \frac{1}{2^{10}}\right) \cdot 2^0 = \frac{1}{2^{10}} = 0,0009765625$$

Assim, qualquer número pertencente ao intervalo $(0; 0,0009765625)$ não pode ser representado por este computador! Qualquer número intermediário será arredondado pelo computador para um dos extremos do intervalo acima, provocando um erro de arredondamento nos cálculos. Observe:

$$\begin{aligned}0,00098 \times 2 &= 0,00196 = 0 + 0,00196 \\0,00196 \times 2 &= 0,00392 = 0 + 0,00392 \\0,00392 \times 2 &= 0,00784 = 0 + 0,00784 \\0,00784 \times 2 &= 0,01568 = 0 + 0,01568 \\0,01568 \times 2 &= 0,03136 = 0 + 0,03136 \\0,03136 \times 2 &= 0,06272 = 0 + 0,06272 \\0,06272 \times 2 &= 0,12544 = 0 + 0,12544 \\0,12544 \times 2 &= 0,25088 = 0 + 0,25088 \\0,25088 \times 2 &= 0,50176 = 0 + 0,50176 \\0,50176 \times 2 &= 1,00352 = 1 + 0,00352\end{aligned}$$

Assim, $(0,00098)_{10} = (0,0000000001)_2$

Como a precisão da máquina em questão é de 10 dígitos, segue que, para este computador, $0,00098 = 0,000976525$.

Vimos no fim da seção anterior que um número finito na base decimal pode ter representação infinita na base binária. Também acabamos de ver que, por mais preciso que seja o computador, ele possui um número finito de *bits* para sua representação numérica. Esses fatos explicam por que cálculos envolvendo números decimais finitos, ao serem feitos por um computador ou por uma calculadora, às vezes apresentam erros aparentemente inexplicáveis.

3.3 ERROS DE TRUNCAMENTO

Cada vez que precisamos parar um processo simplesmente pelo fato de ele ser infinito ou muito grande, surge o erro de truncamento. Truncar significa exatamente isso: parar abruptamente um processo. Por exemplo, a função exponencial pode ser escrita em termos de um somatório:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$



Lembre-se de que $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Fazendo $x = 1$, temos:

$$x = 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \dots + \frac{1^n}{n!} + \dots$$

Como é impossível obter essa soma infinita, truncase o somatório para um n suficientemente grande, obtendo uma aproximação para 'e'. Note que só faz sentido truncar o somatório apresentado para um n de tal forma que o erro de truncamento seja da mesma ordem que o erro de arredondamento. A partir deste ponto, o erro de arredondamento será dominante.

3.4 PROPAGAÇÃO DE ERROS

Descrevemos anteriormente os tipos de erro que podemos encontrar. Esses erros podem influenciar bastante o resultado dos cálculos. Em um exemplo simples, se somarmos números que possuam algum tipo de erro, o resultado encontrado conterá a soma de todos esses erros. Observe o exemplo a seguir para ter uma ideia da dimensão deste problema.

Sabemos que, algebricamente falando, $(x_1 + x_2) - x_2 = x_1 + (x_2 - x_2)$, para quaisquer números reais x_1 e x_2 ; em particular, para $x_1 = 0,2345$ e $x_2 = 0,3491 \times 10^4$. Entretanto, se utilizarmos, para efetuar esse cálculo, uma máquina que trabalha apenas com 4 dígitos significativos, teremos os seguintes valores, segundo Barroso et al.:

$$\begin{aligned} & (x_1 + x_2) - x_2 \\ &= (0,2345 + 0,3491 \times 10^4) - 0,3491 \times 10^4 \\ &= 0,3491 \times 10^4 - 0,3491 \times 10^4 \\ &= 0,0000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x_1 + (x_2 - x_2) \\ &= 0,2345 + (0,3491 \times 10^4 - 0,3491 \times 10^4) \\ &= 0,2345 \end{aligned}$$

Isso ocorre porque, como a máquina considera apenas 4 dígitos significativos, interpreta, neste caso, $(x_1 + x_2) = x_2$. É claro que normalmente trabalhamos com máquinas muito mais precisas, que levam em conta um número bem superior de algarismos significativos, mas dependendo da precisão que procuramos, é possível que nos deparemos com erros similares.

RESUMO DO TÓPICO 1

Vamos, agora, relembrar sucintamente o conteúdo que estudamos neste primeiro tópico.

- O Cálculo Numérico visa resolver problemas em que a resolução analítica não é possível.
- Erros de modelagem aparecem quando o modelo escolhido, embora descreva o problema físico, não é o mais apropriado ou quando é inviável considerar no modelo matemático todos os fatos que poderiam interferir no problema físico.
- Os números decimais digitados em um computador ou calculadora são interpretados pela máquina como sequências de 0 (zeros) e 1 (uns), chamadas binárias.
- Para encontrar a representação binária de um número decimal inteiro, o dividimos por 2, e o mesmo fazemos com o quociente obtido, até que ele seja 0 ou 1. Feito isso, escrevemos os restos obtidos na ordem inversa a que foram encontrados, colocando o último quociente como primeiro dígito da sequência.
- A representação binária de um número decimal entre 0 e 1 é obtida multiplicando este número por 2, separando a parte inteira da decimal e repetindo o procedimento para esta segunda parte. Repete-se esse processo até que se obtenha o número inteiro zero como resposta, ou uma dízima periódica. Finalmente, a representação binária será dada pelas partes inteiras encontradas ao longo das multiplicações.
- Um número finito na representação decimal pode ser um número infinito na base binária.
- Qualquer número decimal x pode ser representado numa base β da forma $x = \pm \left(\frac{x_1}{\beta^1} + \frac{x_2}{\beta^2} + \frac{x_3}{\beta^3} + \dots + \frac{x_n}{\beta^n} \right) \cdot \beta^k$, onde n e k são inteiros maiores do que 0, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ valem 0, 1, ..., ou $\beta - 1$. A sequência $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ é chamada de **mantissa**. O valor n é chamado de **precisão da máquina** e k é tal que $k \in \{-M, -(M - 1), \dots, -1, 0, 1, \dots, M - 1, M\}$, onde M vai depender da máquina utilizada. Um número não poderá ser representado na máquina se k for menor que $-M$ ou maior que M .
- Quando $\beta = 2$, $x = \pm \left(\frac{x_1}{2^1} + \frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{2^3} + \dots + \frac{x_n}{2^n} \right) \cdot 2^k$, com $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \{0, 1\}$. Cada dígito da mantissa é chamado de **bit**.

- Além dos dígitos pertencentes à mantissa e ao exponente, são considerados mais dois dígitos, responsáveis pelos sinais da mantissa e do expoente respectivamente. Esses *bits* valem 0 se o número for positivo, e 1 se for negativo.
- Um número finito na base decimal é infinito na base binária não será corretamente representado pela máquina e pode ocasionar erros nos cálculos aparentemente inexplicáveis.
- Os erros de resolução podem ser classificados como erros de arredondamento e erros de truncamento.
- Os erros de truncamento surgem da necessidade de truncarmos um processo infinito ou muito grande.
- Os erros de arredondamento ou truncamento serão propagados ao longo dos cálculos posteriores.

AUTOATIVIDADE



Vamos fixar os conteúdos vistos neste tópico resolvendo alguns exercícios.

- 1 Para que serve o Cálculo Numérico?
- 2 Quais os tipos de erros que podem surgir durante um processo de Cálculo Numérico?
- 3 Converta os seguintes números decimais em números na base binária:
 - a) $(28)_{10}$
 - b) $(53)_{10}$
 - c) $(120)_{10}$
 - d) $(64)_{10}$
 - e) $(0,64)_{10}$
 - f) $(3,12)_{10}$
- 4 Converta os seguintes números binários em números decimais:
 - a) $(10)_2$
 - b) $(101)_2$
 - c) $(110)_2$
 - d) $(1101100)_2$
 - e) $(1,101100)_2$
 - f) $(0,101)_2$
- 5 Por que cálculos envolvendo números decimais finitos podem apresentar erros quando implementados num computador ou calculadora?
- 6 O que são erros de truncamento?

EQUAÇÕES

1 INTRODUÇÃO

Para implementar o Cálculo Numérico em um problema físico, isto é, do nosso dia a dia, precisamos primeiramente encontrar um modelo matemático que o descreva, ou seja, transformar o problema real, formado por palavras e números, em uma ou mais sentenças matemáticas. Para isso, precisamos detectar os fatores relacionados ao problema que não mudam no decorrer do experimento (constantes) e os fatores que, ao serem variados, afetam o problema. Vamos tentar entender o que acabamos de ler através de um exemplo bem simples.

Suponha que uma empresa de viação esteja estudando a viabilidade de implantar uma nova linha de ônibus entre dois bairros A e B. A prefeitura quer que o tempo de espera do usuário no ponto não seja superior a 45 minutos. Bom, a empresa sabe que a velocidade média com que cada ônibus anda é de 35 km/h, levando em conta o tempo de parada nos pontos de ônibus e o tempo de descanso do motorista entre uma viagem e outra. Assim, basta averiguar se com 3 carros por trajeto, que é o que a empresa pretende dispor para esta linha, consegue implantar o serviço. Então, dado que a distância a ser percorrida será de 75 km, a empresa precisa garantir que, em menos de 45 minutos, um ônibus consiga percorrer um terço do trajeto, ou seja, 25 km. Da Física, conhecemos a relação $x(t) = v_m \cdot t$, onde x é a distância a ser percorrida, v_m é a velocidade média que o ônibus anda e t é o tempo gasto no percurso. Vamos aplicar a fórmula ao nosso problema.

$$x(t) = v_m \cdot t$$

$$25 = 35t \Rightarrow 35t - 25 = 0$$

$$t = \frac{25}{35} = 0,714286 \text{ h}$$

$$0,714286 \cdot h = 0,714286 \cdot 60 \text{ min} \cong 43 \text{ min}$$

De posse deste resultado, a empresa pode decidir se prefere trabalhar com os 3 (três) ônibus por trajeto e correr o risco de, eventualmente, atrasar, ou se prefere dispor de mais um ônibus e, assim, atender a exigência da prefeitura com tranquilidade, diminuindo o tempo de espera do usuário nos pontos de ônibus.

Note que esses resultados foram obtidos através da equação $35t - 25 = 0$, que traduziu o nosso problema físico em linguagem matemática. Na verdade, $35t - 25 = 0$ é uma equação algébrica, onde a incógnita é o tempo t .

Uma equação algébrica real está em sua forma canônica (forma geral) quando está escrita da seguinte forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

onde n é um número inteiro positivo, a_j são números reais, para $j = 0, 1, \dots, n$, e $a_n \neq 0$. O valor n (ou seja, o maior expoente) é chamado de grau da equação e determina o número de raízes que esta equação possui, ou seja, o número de valores que, ao substituírem a variável x , satisfazem a equação. Já o coeficiente a_n é denominado coeficiente do termo dominante.



Existem equações de mais de uma variável, como, por exemplo, $4x^2 + y + 4 = 0$ ou $xy^2 + 3zx - 2 = 0$. Não estudaremos estes tipos de equação aqui, apenas as de uma variável.

2 EQUAÇÕES REAIS DE PRIMEIRO GRAU COM UMA VARIÁVEL

Considere a seguinte sentença matemática: $4x + 12 = 0$.

Note que esta sentença é uma equação algébrica, pois satisfaz a equação canônica ($n = 1, a_1 = 4, a_0 = 12$). Chamamos este tipo de equação, quando $n = 1$, de equação algébrica de primeiro grau. Vamos solucionar a equação, isto é, encontrar o valor de x que satisfaz a equação. Para isso, precisamos isolar a incógnita x .

Se $4x + 12 = 0$ então $4x = -12$. A próxima pergunta a ser feita é: qual o valor de x que, ao ser multiplicado por 4 dá 12? Como $4 \cdot 3 = 12$, segue que $4 \cdot (-3) = -12$; portanto, $x = -3$ satisfaz a igualdade.

De fato, $4 \cdot (-3) + 12 = -12 + 12 = 0$. Assim, para solucionar uma equação de primeiro grau, basta isolar a incógnita x .

Considerando agora a equação de primeiro grau na sua forma geral $a_1x + a_0 = 0$, o valor $x = -\frac{a_0}{a_1}$ fornece a solução para tal equação.

Exemplo: Um pequeno *shopping* em construção disporá de uma praça de alimentação com 160m^2 de área construída, com 3 restaurantes de mesmo tamanho. Qual a área que cada restaurante deverá ter se a área comum será de 100m^2 ?

Resolução: Vamos indicar cada área pela letra x , uma vez que elas são todas iguais. Então a sentença que traduz o problema real em matemática é dada pela equação de primeiro grau $3 \cdot x + 100 = 160$.

Assim, $3 \cdot x + 100 - 160 = 3 \cdot x - 60 = 0$. Comparando com a forma geral ($a_1x + a_0 = 0$), temos que $a_1 = 3$ e $a_0 = -60$. Deste modo, o valor da área x de cada restaurante será de $x = -\frac{(-60)}{3} = 20\text{ m}^2$.

3 EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU COM COEFICIENTES REAIS (EQUAÇÃO QUADRÁTICA)

Uma equação de segundo grau, ou equação quadrática, é aquela que possui a forma $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, com $a_2 \neq 0$. Note que tanto a_1 como a_0 podem ser nulos. Vamos estudar cada uma destas possibilidades mais detalhadamente. Entretanto, para facilitar a notação, consideraremos a fórmula geral da equação quadrática como sendo $ax^2 + bx + c = 0$ ($a = a_2$, $b = a_1$, $c = a_0$).

A equação quadrática tem em geral duas soluções (x_1 e x_2), chamadas raízes. Estudaremos como encontrá-las a seguir.

3.1 EQUAÇÃO INCOMPLETA DE SEGUNDO GRAU

Uma equação de segundo grau é dita incompleta se os coeficientes b ou c forem nulos, isto é, as equações forem do tipo $ax^2 + c = 0$, $ax^2 + bx = 0$ ou $ax^2 = 0$.

Exemplos: São equações incompletas do segundo grau:

$$4x^2 + 6x = 0$$

$$3x^2 - 9 = 0$$

$$2x^2 = 0$$

É fácil encontrar as soluções para estas equações. Vamos estudar cada um dos casos.

1) Equações do tipo: $ax^2 = 0$.

Sabemos que, se a multiplicação de dois números reais é igual a zero, um dos números precisa necessariamente valer zero. Como $ax^2 = (ax)x = 0$, temos que $ax = 0$ ou $x = 0$. Aplicando o mesmo princípio em $ax = 0$, segue que a equação $ax^2 = 0$ possui duas raízes iguais a zero ($x_1 = x_2 = 0$).

2) Equações do tipo: $ax^2 + bx = 0$.

Para encontrar a solução deste tipo de equação, utilizamos o mesmo princípio enunciado anteriormente. Note que $ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0$ e, portanto, $x = 0$ ou $ax + b = 0$. Desta forma, temos duas soluções para este tipo de equação: $x_1 = 0$ e $x_2 = -\frac{b}{a}$.

3) Equações do tipo: $ax^2 + c = 0$.

Note que, se $ax^2 + c = 0$, então $ax^2 = -c$, ou seja, $x^2 = -\frac{c}{a}$ e, portanto, $x = \sqrt{-\frac{c}{a}}$. Sabemos que essa divisão existe, já que $a \neq 0$, por definição. Agora, se $c > 0$, então $-\frac{c}{a} < 0$ e, portanto, não existem raízes reais para esta equação. Se $c < 0$, então $-\frac{c}{a} > 0$ e, neste caso, a equação quadrática terá duas raízes reais $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ e $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.



Caro/a acadêmico/a!!! Você não precisa se preocupar em decorar nenhuma das fórmulas acima, pois elas surgem naturalmente durante a resolução da equação. Na verdade, elas apenas indicam a "cara" da solução.

Vamos resolver as equações do exemplo anterior de duas formas: a primeira, utilizando as fórmulas exibidas e a segunda, de maneira natural, nos preocupando apenas em isolar as variáveis. Você perceberá que, no fundo, o processo é o mesmo.

Primeiro modo:

$$\left. \begin{array}{l} 4x^2 + 6x = 0 \\ \text{Equação do tipo } a \cdot x^2 + b \cdot x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 4 \text{ e } b = 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{6}{4} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x^2 = 0 \\ \text{Equação do tipo } ax^2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x^2 - 9 = 0 \\ \text{Equação do tipo } a \cdot x^2 - c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 3 \text{ e } b = -9$$

$$\text{Então} \quad \left. \begin{array}{l} x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} = \sqrt{-\frac{(-9)}{3}} = \sqrt{3} \\ x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} = -\sqrt{-\frac{(-9)}{3}} = -\sqrt{3} \end{array} \right.$$

Segundo modo:

$$\begin{array}{lll} 4x^2 + 6x = 0 & 2x^2 = 0 & 3x^2 - 9 = 0 \\ x(4x + 6) = 0 & x^2 = 0 & 3x^2 = 9 \\ x_1 = 0 & x_1 = x_2 = 0 & x^2 = \frac{9}{3} \\ 4x_2 + 6 = 0 & & \\ x_2 = \frac{-6}{4} & & x^2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{3} \\ x_2 = -\sqrt{3} \end{cases} \end{array}$$

3.2 EQUAÇÃO COMPLETA DO SEGUNDO GRAU

Dizemos que uma equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ é completa se todos os seus coeficientes forem não nulos, isto é, $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$.

Para encontrar as raízes de uma equação quadrática completa, contamos com uma importante forma de resolução. Segue a demonstração:

Seja:

$$\left. \begin{array}{l} ax^2 + bx + c = 0 \\ \frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 \\ x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 \\ x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a} \end{array} \right.$$

Usando o produto notável

$$\left. \begin{array}{l} \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \\ \text{logo} \\ x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \\ \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}} \\ x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \\ \text{onde } \Delta = b^2 - 4ac. \end{array} \right.$$



O termo Δ é chamado de discriminante.

Como precisaremos tirar a raiz quadrada do Δ , temos que observar em qual das seguintes situações ele se encontra:

- Se $\Delta > 0$, teremos duas raízes distintas para a equação, a saber, $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Se $\Delta = 0$, $\sqrt{\Delta} = 0$ e, portanto, teremos duas raízes iguais para a equação: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$. Neste caso, dizemos que a raiz é de multiplicidade dois.
- Se $\Delta < 0$ a equação possui duas raízes complexas. Isto acontece porque não existe raiz real de um número negativo ($\sqrt{\Delta}$).

Exemplos: Resolva as equações do segundo grau:

a) $-x^2 + 2x + 3 = 0$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3$$

$$\Delta = 4 + 12$$

$\Delta = 16 > 0$ ← Duas raízes reais distintas.

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm 4}{(-2)} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-2 + 4}{(-2)} = -1 \\ x_2 = \frac{-2 - 4}{(-2)} = 3 \end{cases}$$

b) $x^2 - 2x + 1 = 0$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\Delta = 4 - 4$$

$\Delta = 0$ ← Uma raiz real

$$x_1 = x_2 = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1$$

Assim, a raiz -1 da equação $x^2 - 2x + 1 = 0$ é de multiplicidade dois.

c) $-x^2 + 2x - 2 = 0$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = -2 \end{cases}$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2)$$

$$\Delta = 4 - 8$$

$$\Delta = -4$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{-2 \pm 2i}{-2}$$

$$x_1 = 1 + i$$

$$x_2 = 1 - i$$

Em que um é o conjugado do outro

Logo, possui duas raízes complexas



As equações incompletas de segundo grau podem ser resolvidas pela fórmula de Bhaskara também. É um ótimo exercício deduzir as fórmulas simplificadas desta fórmula.

4 EQUAÇÕES REAIS FRACIONÁRIAS

As equações fracionárias são aquelas em que a incógnita aparece no denominador. Como por exemplo:

$$\frac{1}{x} + \frac{x}{4} = 1$$

Observe que o maior grau da incógnita no denominador não necessariamente é o grau da equação: ele só aparece quando “eliminamos” o problema dos denominadores das frações. Mas como fazer isso?

Você deve lembrar que só podemos somar duas frações se elas tiverem o mesmo denominador. Quando duas frações que devem ser somadas possuem denominadores diferentes, temos que trabalhar com frações equivalentes a elas de mesmo denominador. No caso das equações fracionárias, a ideia é a mesma.

Vamos entender melhor como isso funciona resolvendo a equação dada como exemplo anterior.

$$\frac{1}{x} + \frac{x}{4} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{x}{4} - 1 = 0$$

Primeiramente, note que obrigatoriamente $x \neq 0$: caso contrário, teríamos uma divisão por zero, o que é um absurdo! Além disso, observe que o maior grau da equação aparentemente é 1. Será que é mesmo? Vamos prosseguir.

Não conhecemos o valor de x para saber se ele vale 4 ou não. Então a única possibilidade de realizarmos esse cálculo é se trabalharmos com duas frações equivalentes a $\frac{1}{x}$, $\frac{x}{4}$ e 1 de mesmo denominador. Uma forma de descobrir quem será esse denominador comum é multiplicar os denominadores das frações, no caso, $4 \cdot x \cdot 1 = 4x$. Como:

$$\frac{1}{x} = \frac{4}{4x} \quad \frac{x}{4} = \frac{x^2}{4x} \quad 1 = \frac{4x}{4x},$$

$$\frac{1}{x} + \frac{x}{4} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{4}{4x} + \frac{x^2}{4x} - \frac{4x}{4x} = 0$$

Agora ambos os denominadores são iguais. Podemos então efetuar a adição:

$$\frac{4}{4x} + \frac{x^2}{4x} - \frac{4x}{4x} = 0$$

$$\frac{4 + x^2 - 4x}{4x} = 0 \Rightarrow \text{Como } x \neq 0 \text{ temos}$$

$$4 + x^2 - 4x = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

Temos então uma equação quadrática (grau 2) completa que pode, facilmente, ser resolvida através da fórmula já apresentada.



Se você não se sentir confortável com a definição de frações equivalentes ou com a soma de frações, dê uma olhada no AVA em Curso de Nívelamento em Matemática. Lá há um bom material sobre isso!!!

Vamos resolver mais alguns exemplos.

Exemplo: Encontre o grau das equações fracionárias:

$$a) \frac{1}{x} + 3 = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} + 3 - \frac{x}{2} = 0$$

Precisamos trabalhar com frações de mesmo denominador, no caso, o denominador é $x \cdot 1 \cdot 2 = 2x$ e temos as seguintes frações equivalentes.

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{2x} \quad 3 = \frac{6x}{2x} \quad -\frac{x}{2} = -\frac{x^2}{2x}.$$

Substituindo as frações equivalentes na equação,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + 3 - \frac{x}{2} &= 0 \Rightarrow \frac{2}{2x} + \frac{6x}{2x} - \frac{x^2}{2x} = 0 \\ \Rightarrow \frac{2 + 6x - x^2}{2x} &= 0 \quad \text{como } x \neq 0, \text{ temos} \\ \Rightarrow 2 + 6x - x^2 &= 0 \Rightarrow -x^2 + 6x + 2 = 0 \end{aligned}$$

Assim, o grau da equação é 2.

$$\begin{aligned} b) \frac{3}{x^2} - \frac{1}{2x} &= x + 2 \\ \Rightarrow \frac{3}{x^2} - \frac{1}{2x} - (x + 2) &= 0. \end{aligned}$$

O denominador comum é: $x^2 \cdot 2 = 2x^2$. Então:

$$\frac{3}{x^2} = \frac{6}{2x^2} \quad -\frac{1}{2x} = -\frac{x}{2x^2} \quad -(x + 2) = -\frac{(x + 2) \cdot 2x^2}{2x^2} = -\frac{(2x^3 + 4x^2)}{2x^2}$$

Substituindo as frações equivalentes na equação,

$$\begin{aligned} \frac{6}{2x^2} - \frac{x}{2x^2} - \frac{2x^3 + 4x^2}{2x^2} &= 0 \Rightarrow \frac{6 - x - (2x^3 + 4x^2)}{2x^2} = 0 \\ \text{como } x \neq 0 \text{ temos} \\ 6 - x - (2x^3 + 4x^2) &= 0 \Rightarrow -2x^3 - 4x^2 - x + 6 = 0 \end{aligned}$$

Assim, o maior grau da equação é 3.

5 EQUAÇÕES BIQUADRADAS

Equações biquadradas são equações de quarto grau com a forma geral $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Conforme mencionamos na introdução deste tópico, esse tipo de equação pode ter até 4 raízes reais. Mas como encontrá-las? Utilizando a propriedade da potenciação em que $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$ quaisquer que sejam m e n, observe:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

$$ax^{2 \cdot 2} + bx^2 + c = 0$$

$$a(x^2)^2 + bx^2 + c = 0$$

Assim, se utilizarmos a substituição $y = x^2$, teremos $ay^2 + by + c = 0$, ou seja, uma equação do segundo grau, que sabemos como resolver. De modo geral, vamos encontrar 2 raízes y_1 e y_2 . Depois, temos que desfazer a substituição $y = x^2$. Seguem as 4 raízes da equação (caso todas existam):

$$S = \{-\sqrt{y_1}, -\sqrt{y_2}, \sqrt{y_2}, \sqrt{y_1}\}$$

Exemplo:

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Fazendo a substituição $y = x^2$, encontraremos a seguinte equação:

$$y^2 - 13y + 36 = 0$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -13 \\ c = 36 \end{cases}$$

$$\Delta = (-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 25$$

$$y = \frac{13 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 9 \\ y_2 = 4 \end{cases}$$

Desfazendo $y = x^2$,

$$y_1 = 9$$

$$y_2 = 4$$

$$\Rightarrow x^2 = 9$$

$$\Rightarrow x^2 = 4$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{9}$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{4}$$

$$\Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -2 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

Portanto, as raízes da equação estão no conjunto solução abaixo:

$$S = \{-3, -2, 2, 3\}.$$

b) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

Fazendo a substituição $y = x^2$, encontraremos a seguinte equação:

$$y^2 - 5y - 36 = 0$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \\ c = -36 \end{cases}$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36) = 169$$

$$y = \frac{5 \pm 13}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 9 \\ y_2 = -4 \end{cases}$$

Desfazendo $y = x^2$,

$$y_1 = 9$$

$$\Rightarrow x^2 = 9$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{9}$$

$$\Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$$y_2 = -4$$

$$\Rightarrow x^2 = -4$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{-4}$$

$$\Rightarrow x = \pm 2i.$$

Estas raízes são complexas!

Portanto, as raízes da equação estão no conjunto solução abaixo:

$$S = \{-3, 3, 2i, -2i\}.$$

$$\text{c)} \quad x^4 + 13x^2 + 36 = 0$$

Fazendo a substituição $y = x^2$, encontraremos a seguinte equação:

$$y^2 + 13y + 36 = 0$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 13 \\ c = 36 \end{cases}$$

$$\Delta = (13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 25$$

$$y = \frac{-13 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -9 \\ y_2 = -4 \end{cases}$$

Desfazendo $y = x^2$,

$$y_1 = -9$$

$$\Rightarrow x^2 = -9$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{-9}$$

$$\Rightarrow x = \pm 3i$$

$$y_2 = -4$$

$$\Rightarrow x^2 = -4$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{-4}$$

$$\Rightarrow x = \pm 2i$$

Estas raízes são todas complexas!

Portanto, o conjunto solução real desta equação é dado pelo conjunto vazio: $S = \{ \}$ ou $S = \emptyset$.

6 EQUAÇÕES O SEGUNDO GRAU COM COEFICIENTES COMPLEXOS

Agora que já estudamos as equações com coeficientes reais, iremos tratar de um tipo de equações bem especiais: as equações complexas. Equações complexas são aquelas em que os coeficientes pertencem ao conjunto dos números complexos. Vamos detalhar este conceito?

Sabemos que a forma canônica de uma equação algébrica é dada por $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$. Como agora, para cada j ($j = 0, 1, \dots, n$), a_j é um número complexo, existem b_j, c_j números reais tais que $a_j = b_j + i \cdot c_j$. Lembre-se de que i é a constante imaginária: $i^2 = -1$. Assim, podemos reescrever a forma canônica da equação algébrica como:

$$(b_n + i \cdot c_n) \cdot x^n + (b_{n-1} + i \cdot c_{n-1}) \cdot x^{n-1} + \dots + (b_1 + i \cdot c_1) \cdot x + (b_0 + i \cdot c_0) = 0$$

Há mais uma coisa que precisamos entender. Nas equações algébricas reais, tínhamos $a_n \neq 0$, onde n era o grau da equação. Isso significa que

$$b_n + i \cdot c_n \neq 0 + i \cdot 0, \text{ ou seja, } b_n \neq 0 \text{ ou } c_n \neq 0.$$

Por outro lado, você se lembra como calculamos o módulo de um número complexo? É parecido com a forma que calculamos a distância de um ponto $a = (b, c)$ à origem:

$$|a| = |(b, c)| = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Como podemos fazer uma analogia entre os números complexos e os pares ordenados, o módulo de um número complexo é calculado como:

$$|a_n| = |b_n + i \cdot c_n| = \sqrt{b_n^2 + c_n^2}.$$

Agora sim, podemos enunciar as equações algébricas complexas de uma maneira análoga a que tínhamos enunciado equações algébricas reais:

Uma equação algébrica complexa está em sua forma canônica (forma geral) quando está escrita da seguinte forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

onde n é um número inteiro positivo, a_j são números complexos, para $j = 0, 1, \dots, n$ e $|a_n| \neq 0$. O valor n (ou seja, o maior expoente) é chamado de grau da equação e o coeficiente a_n é denominado coeficiente do termo dominante.

A essa altura, você já deve estar se perguntando “Como eu vou encontrar as soluções deste negócio?” Do mesmo jeito que fazia com as equações algébricas reais, com uma vantagem: agora, sempre existirão soluções! Vamos aos exemplos.

Exemplo: Resolva a equação a seguir:

$$\text{a)} -x^2 + x - 1 = 0$$

$$\begin{cases} \mathbf{a} = -1 = -1 + i \cdot 0 \\ \mathbf{b} = 1 = 1 + i \cdot 0 \\ \mathbf{c} = -1 = -1 + i \cdot 0 \end{cases}$$

$$-x^2 + (2-i)x + i = 0$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 - i \\ c = i \end{cases}$$

Utilizando do método completo para equações do segundo grau, obtemos:

$$\Delta = (2-i)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot i$$

$$\Delta = 4 - 4i - 1 + 4i$$

$$\Delta = 3$$

Logo

$$x = \frac{-(2-i) \pm \sqrt{3}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{-2+i \pm \sqrt{3}}{-2}$$

Sendo assim, as raízes são

$$x_1 = \frac{-2+i+\sqrt{3}}{-2}$$

$$x_2 = \frac{-2+i-\sqrt{3}}{-2}$$

Observe que mesmo as raízes sendo complexas, x_1 não é o conjugado de x_2 , isso ocorre devido os coeficientes da equação serem complexos.



Vamos nos restringir, neste material, às equações algébricas que possuem coeficientes reais. Conforme você viu há pouco, isto não significa que as raízes serão sempre reais! Isso vai depender do discriminante.

RESUMO DO TÓPICO 2

Chegou a hora de relembrar tudo o que estudamos neste segundo tópico. Vamos ao resumo!!!

- Uma equação algébrica real está na sua forma canônica quando escrita como $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, onde n é um número inteiro positivo, a_j são números reais, para $j = 0, 1, \dots, n$, e $a_n \neq 0$. O valor n (ou seja, o maior expoente) é chamado de grau da equação e o coeficiente a_n é denominado coeficiente do termo dominante.
- Uma equação algébrica complexa está na sua forma canônica quando escrita como $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, onde n é um número inteiro positivo, a_j são números complexos, para $j = 0, 1, \dots, n$, e $|a_n| \neq 0$.
- Quando $n = 1$, chamamos a equação algébrica de equação de primeiro grau, e quando $n = 2$, equação algébrica de segundo grau, ou quadrática.
- As equações algébricas quadráticas podem ser completas ($ax^2 + bx + c = 0$) ou incompletas ($ax^2 = 0$, $ax^2 + bx = 0$, $ax^2 + c = 0$).
- Para encontrar as raízes de uma equação algébrica quadrática, utilizamos a fórmula de Bhaskara $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$. Note que:
 - $\Delta > 0$ implica que a equação possui duas raízes reais distintas,
 - $\Delta = 0$ implica que a equação possui duas raízes reais iguais,
 - $\Delta < 0$ implica que a equação não possui raízes reais. Neste caso, as raízes são complexas!
- O termo Δ é chamado de discriminante.
- Para encontrar as raízes de equações fracionárias é necessário multiplicar os denominadores das frações envolvidas e encontrar frações equivalentes a elas com o mesmo denominador. Lembre-se de que os denominadores precisam ser necessariamente diferentes de zero.
- As equações de quarto grau que possuem a forma geral $ax^4 + bx^2 + c = 0$ podem ser resolvidas como equações de segundo grau através da substituição $y = x^2$. Feito isso, basta aplicar a fórmula de Bhaskara na equação $ay^2 + by + c = 0$, calcular suas raízes e, depois, desfazer a substituição $y = x^2$.

AUTOATIVIDADE



Vamos fixar os conteúdos vistos neste tópico através de alguns exercícios.

1 Resolva as equações:

- a) $2y + 15 - y = 22$
- b) $9h - 2 = 16 + 2h$

2 Resolva as equações de segundo grau:

- a) $x^2 + 6x = 0$
- b) $9x^2 = 0$
- c) $5x^2 - 9 = 0$
- d) $x^2 - 25 = 0$
- e) $x^2 - 3x + 2 = 0$
- f) $2y^2 - 14y + 12 = 0$

3 Determine o valor de k nas equações, de modo que:

- a) $x^2 - 12x + k = 0$ tenha duas raízes reais e distintas;
- b) $2x^2 - 6x + 3k = 0$ não tenha raízes reais.

4 Resolva as equações fracionárias:

- a) $3 + \frac{5}{x-2} = \frac{x+1}{x}$
- b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{3}{2}$

5 Dê o conjunto solução das seguintes equações biquadradas:

- a) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$
- b) $5x^4 = 405$

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

1 INTRODUÇÃO

Como você deve lembrar, já estudamos sistemas lineares na disciplina de Álgebra Linear.

Para justificar a necessidade de abordar este assunto novamente, agora em Cálculo Numérico, veja a seguir algumas aplicações desta importante ferramenta no dia a dia de algumas áreas:

- na Matemática, na resolução de equações diferenciais parciais;
- em empresas, na área de pesquisa operacional, auxiliando na decisão de onde aportar recursos, por exemplo;
- na Engenharia Elétrica, no cálculo de redes elétricas;
- no planejamento de produção: o que e quando deve ser produzido;
- na robótica, em problemas como no posicionamento das juntas de um robô;
- em programas de atividades físicas, para saber quantas calorias são queimadas por hora;
- em controle do fluxo de veículos.

Agora que você já deve estar convencido/a da importância dos sistemas de equações lineares, vamos relembrar algumas das suas propriedades e estudar métodos diretos e iterativos de resolução, que são extremamente úteis para sistemas com um número considerável de equações e incógnitas.

2 PROPRIEDADES ELEMENTARES

Um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas pode ser escrito como

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

onde os elementos a_{ij} e b_i são constantes reais ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$). Qualquer n -upla (x_1, x_2, \dots, x_n) que satisfaça o sistema é solução do mesmo.

Em notação matricial, podemos escrever o sistema como $A \cdot X = B$, onde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Chamamos de matriz estendida ou ampliada do sistema linear à matriz S dada por:

$$S = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right].$$

Através da matriz estendida de um sistema linear, podemos obter suas soluções – quando existirem – utilizando o processo de escalonamento, visto detalhadamente em Álgebra Linear.



Na verdade, há vários processos de resolução de um sistema linear, quando existirem soluções. O processo de escalonamento é uma destas maneiras.

Quando escalonamos a matriz S , na verdade, encontramos uma matriz S' equivalente a S , ou seja, encontramos um novo sistema linear, cujas matrizes A' e B' são diferentes de A e B respectivamente, mas com o mesmo número de incógnitas, e mesma solução ($X = X'$).

Um sistema de equações lineares pode ter várias soluções, uma única solução, ou nem mesmo ter solução. Quando pelo menos uma solução existir, dizemos que o sistema é possível ou consistente. Já quando não há

solução, o sistema é dito impossível ou inconsistente. Na verdade, para que o sistema admita uma única solução, a matriz A precisa ser quadrada ($n = m$) e o determinante de A precisa ser não nulo ($\det A \neq 0$).

3 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

3.1 MÉTODOS DIRETOS

Chamamos de métodos diretos aqueles que, depois de um número finito de operações aritméticas, fornecem a solução exata do sistema linear; há menos erros de arredondamento. Vamos, a seguir, conhecer alguns métodos diretos de resolução de sistemas de equações lineares.

3.1.1 Regra de Cramer

A regra de Cramer é um método direto que utiliza cálculo de determinantes para encontrar a solução. Consideremos o sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

e sua representação matricial $A \cdot X = B$, com

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Para cada j , com $j = 1, 2, \dots, n$, temos que $x_j = \frac{\det D_j}{\det A}$, onde D_j é a matriz composta pelos elementos de A, menos da j -ésima coluna (correspondente a X_j no sistema), que será substituída pelos elementos da matriz B.

Vamos entender melhor como essa regra funciona através de um exemplo.

Consideremos o sistema:

$$\begin{cases} 4y + 3z = 1 \\ x + y + z = 0 \text{ ou, na forma matricial,} \\ x - 2z = 2 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 3 & x \\ 1 & 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & -2 & z \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 2 \end{array} \right].$$

Para utilizar a regra de Cramer, inicialmente precisamos calcular o determinante da matriz A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (0 \cdot 1 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 3) - (1 \cdot 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 4 \cdot (-2)) \\ = 4 - 3 + 8 = 9.$$

Agora, vamos encontrar as incógnitas x, y e z.

- $x = \frac{\det D_x}{\det A}$, onde D_x é a matriz composta pelos elementos de A, menos da primeira coluna (correspondente a x no sistema), que é substituída pelos elementos da matriz B, logo

$$\det D_x = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (1 \cdot 1 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \cdot 3) - (2 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4 \cdot (-2)) \\ = -2 + 8 - 6 = 0$$

Portanto,

$$x = \frac{\det D_x}{\det A} = \frac{0}{9} = 0$$

- $y = \frac{\det D_y}{\det A}$, onde D_y é a matriz composta pelos elementos de A, menos da segunda coluna (correspondente a y no sistema), que é substituída pelos elementos da matriz B, logo

$$\det D_y = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (0 \cdot 0 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1) - (1 \cdot 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot (-2)) \\ = 6 + 1 + 2 = 9$$

Portanto,

$$y = \frac{\det D_y}{\det A} = \frac{9}{9} = 1$$

- $z = \frac{\det D_z}{\det A}$, onde D_z é a matriz composta pelos elementos de A, menos da terceira coluna (correspondente a z no sistema), que é substituída pelos elementos da matriz B, logo

$$\det D_z = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Down}} = (0 \cdot 1 \cdot 2 + 4 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 1) - (1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \cdot 2) \\ = -1 - 8 = -9$$

Portanto,

$$z = \frac{\det D_z}{\det A} = \frac{-9}{9} = -1$$

Pela Regra de Cramer, temos que o sistema linear tem uma única solução $(0, 1, -1)$.

Que tal tirar a prova real?

$$\begin{cases} 4y + 3z = 4 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = 4 - 3 = 1 \\ x + y + z = 0 + 1 - 1 = 0 \\ x - 2z = 0 - 2(-1) = 2 \end{cases}$$



Como $\det A \neq 0$, o sistema tenha uma, e apenas uma, solução. Isso significa que podemos efetuar essa divisão entre os determinantes sem nenhum tipo de receio.

A Regra de Cramer funciona bem para sistemas pequenos. Agora, para sistemas de grande porte, se torna inviável. É possível mostrar que o número máximo de operações aritméticas na resolução de um sistema $n \times n$ é $(n+1) \cdot (n!n - 1) + n$. Assim, um computador que leva 10,8 segundos por operação aritmética levaria cerca de 36 dias para resolver um sistema 15×15 ! Pensando nesses casos, vamos estudar os métodos de Eliminação de Gauss e Eliminação de Gauss-Jordan, que utilizam um número bem inferior de operações.

3.1.2 Método de Gauss

A ideia do método de Gauss é transformar o sistema linear original em um sistema triangular equivalente, que pode ser classificado em triangular superior ou triangular inferior. Quando falamos em sistema triangular superior, estamos nos referindo a sistemas que possuam a forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0 + 0 + 0 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

ou matricialmente falando, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

Já sistema triangular inferior possui a forma:

$$\begin{cases} 0 + 0 + 0 + \dots + 0 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + 0 + \dots + 0 = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

ou matricialmente falando, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$.

Podemos transformar qualquer sistema de equações lineares em um sistema equivalente triangular. Para isso, basta efetuarmos uma sequência de operações elementares (pivotamentos) entre as linhas da matriz estendida. A vantagem do sistema triangular é que, supondo que o sistema possua uma solução, é mais fácil encontrá-la, uma vez que uma das variáveis é obtida imediatamente. Vamos entender como ele funciona através de exemplos?

Exemplo 1: Encontre a solução do sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Resolução: O sistema pode ser reescrito na forma Matricial, $A \cdot X = B$,

com $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, e a matriz estendida é dada por

$$S = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{array} \right].$$

Para encontrar um sistema triangular superior equivalente, temos que “zerar” os elementos que ocupam as posições correspondentes a a_{21} , a_{31} e a_{32} através dos pivotamentos.

1º Pivoteamento, para zerar as posições a_{21} e a_{31} :

A primeira linha vai continuar com os mesmos valores, ou seja,

$$L_1 \leftarrow L_1 \Rightarrow \begin{cases} a_{11} \leftarrow 2 \\ a_{12} \leftarrow 3 \\ a_{13} \leftarrow -1 \\ b_1 \leftarrow 5 \end{cases}$$

A segunda linha vai receber o resultado do seguinte cálculo:

$$L_2 \leftarrow \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}} \right) \cdot L_1 + L_2 = \left(-\frac{4}{2} \right) \cdot L_1 + L_2 = -2 \cdot L_1 + L_2 \Rightarrow \begin{cases} a_{21} \leftarrow -2 \cdot 2 + 4 = 0 \\ a_{22} \leftarrow -2 \cdot 3 + 4 = -2 \\ a_{23} \leftarrow -2 \cdot (-1) + (-3) = -1 \\ b_2 \leftarrow -2 \cdot 5 + 3 = -7 \end{cases}$$

Obs.: Multiplicamos L_1 por $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ justamente para zerar a_{31} .

A nova matriz estendida é $S_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & -6 & 2 & -6 \end{bmatrix}$. Conseguimos “zerar”

os elementos correspondentes às posições a_{21} e a_{31} . Falta zerarmos a posição a_{32} .

2º Pivoteamento, para zerar a_{32} :

$$L_1 \leftarrow L_1 \Rightarrow \begin{cases} a_{11} \leftarrow 2 \\ a_{12} \leftarrow 3 \\ a_{13} \leftarrow -1 \\ b_1 \leftarrow 5 \end{cases}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 \Rightarrow \begin{cases} a_{21} \leftarrow 0 \\ a_{22} \leftarrow -2 \\ a_{23} \leftarrow -1 \\ b_2 \leftarrow -7 \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow \left(-\frac{a_{32}}{a_{22}} \right) \cdot L_2 + L_3 = \left(-\frac{(-6)}{(-2)} \right) \cdot L_2 + L_3 = -3 \cdot L_2 + L_3 \Rightarrow \begin{cases} a_{31} \leftarrow -3 \cdot 0 + 0 = 0 \\ a_{32} \leftarrow -3 \cdot (-2) + (-6) = 0 \\ a_{33} \leftarrow -3 \cdot (-1) + 2 = 5 \\ b_3 \leftarrow -3 \cdot (-7) + (-6) = 15 \end{cases}$$

Obs.: Multiplicamos L_2 por $-\frac{a_{32}}{a_{22}}$ justamente para zerar a_{32} .

A nova matriz estendida é $S_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{bmatrix}$. Reescrevendo a matriz

em forma de sistema de equações, obtemos:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 1x_3 = 5 \\ -2x_2 - 1x_3 = -7 \\ 5x_3 = 15 \end{cases}$$

É fácil perceber que, na terceira equação, $5x_3 = 15 \Rightarrow x_3 = 3$.

Substituindo $x_3 = 3$ na segunda equação, encontramos x_2 :

$$\begin{aligned} -2x_2 - x_3 &= -7 \\ \Rightarrow -2x_2 - 3 &= -7 \\ \Rightarrow x_2 &= \frac{-4}{-2} \\ \Rightarrow x_2 &= 2. \end{aligned}$$

E por fim,

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 1x_3 &= 5 \\ \Rightarrow 2x_1 + 3 \cdot 2 - 1 \cdot 3 &= 5 \\ \Rightarrow x_1 &= \frac{5 - 6 + 3}{2} \\ \Rightarrow x_1 &= 1. \end{aligned}$$

Portanto a solução do sistema triangular é $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$. Note que a solução do sistema triangular também é solução do sistema original:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 3 = 5 \\ 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 3 \\ 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 3 = -1 \end{cases}$$

Exemplo 2: Encontre a solução do sistema linear.

$$\begin{cases} 3x + 5y - 8z = -11 \\ 5x - 2y + 4z = 13 \\ 7x + 5y - 3z = 8 \end{cases}$$

Resolução: Sendo $S = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -8 & -11 \\ 5 & -2 & 4 & 13 \\ 7 & 5 & -3 & 8 \end{bmatrix}$ a matriz estendida, vamos novamente encontrar o sistema equivalente triangular superior, “zerando” as posições

correspondentes a a_{21} , a_{31} e a_{32} através dos pivotamentos.

1º Pivoteamento, para zerar as posições a_{21} e a_{31} :

$$L_1 \leftarrow L_1 \Rightarrow \begin{cases} a_{11} \leftarrow 3 \\ a_{12} \leftarrow 5 \\ a_{13} \leftarrow -8 \\ b_1 \leftarrow -11 \end{cases}$$

$$L_2 \leftarrow \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}} \right) \cdot L_1 + L_2 = \left(-\frac{5}{3} \right) \cdot L_1 + L_2 \Rightarrow \begin{cases} a_{21} \leftarrow \left(-\frac{5}{3} \right) \cdot 3 + 5 = 0 \\ a_{22} \leftarrow \left(-\frac{5}{3} \right) \cdot 5 + (-2) = -\frac{31}{3} \\ a_{23} \leftarrow \left(-\frac{5}{3} \right) \cdot (-8) + 4 = \frac{52}{3} \\ b_2 \leftarrow \left(-\frac{5}{3} \right) \cdot (-11) + 13 = \frac{94}{3} \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow \left(-\frac{a_{31}}{a_{11}} \right) \cdot L_1 + L_3 = \left(-\frac{7}{3} \right) \cdot L_1 + L_3 \Rightarrow \begin{cases} a_{31} \leftarrow \left(-\frac{7}{3} \right) \cdot 3 + 7 = 0 \\ a_{32} \leftarrow \left(-\frac{7}{3} \right) \cdot 5 + 5 = -\frac{20}{3} \\ a_{33} \leftarrow \left(-\frac{7}{3} \right) \cdot (-8) + (-3) = \frac{47}{3} \\ b_3 \leftarrow \left(-\frac{7}{3} \right) \cdot (-11) + 8 = \frac{77}{3} + 8 = \frac{101}{3} \end{cases}$$

A nova matriz estendida é $S_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -8 & -11 \\ 0 & -31/3 & 52/3 & 94/3 \\ 0 & -20/3 & 47/3 & 101/3 \end{array} \right]$

2º Pivoteamento, para zerar a posição a_{32} :

$$L_1 \leftarrow L_1 \Rightarrow \begin{cases} a_{11} \leftarrow 3 \\ a_{12} \leftarrow 5 \\ a_{13} \leftarrow -8 \\ b_1 \leftarrow -11 \end{cases}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 \Rightarrow \begin{cases} a_{21} \leftarrow 0 \\ a_{22} \leftarrow -31/3 \\ a_{23} \leftarrow 52/3 \\ b_2 \leftarrow 94/3 \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow \left(-\frac{a_{32}}{a_{22}} \right) \cdot L_2 + L_3 = \left(-\frac{-20}{3} \right) \cdot L_2 + L_3 = \left(-\frac{20}{3} \right) \cdot L_2 + L_3 \Rightarrow \begin{cases} a_{31} \leftarrow \left(-\frac{20}{31} \right) \cdot 0 + 0 = 0 \\ a_{32} \leftarrow \left(-\frac{20}{31} \right) \cdot \left(-\frac{31}{3} \right) + \left(-\frac{20}{3} \right) = 0 \\ a_{33} \leftarrow \left(-\frac{20}{31} \right) \cdot \frac{52}{3} + \frac{47}{3} = \frac{139}{31} \\ a_{34} \leftarrow \left(-\frac{20}{31} \right) \cdot \frac{94}{3} + \frac{101}{3} = \frac{417}{31} \end{cases}$$

A nova matriz estendida é $S_2 = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -8 & -11 \\ 0 & -\cancel{31}/3 & \cancel{52}/3 & \cancel{94}/3 \\ 0 & 0 & \cancel{139}/31 & \cancel{417}/31 \end{bmatrix}$. Vamos resolver o sistema de equações associado a esta matriz:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 8x_3 = -11 \\ -\frac{31}{3}x_2 + \frac{52}{3}x_3 = \frac{94}{3} \\ \frac{139}{31}x_3 = \frac{417}{31} \end{cases}$$

$$\text{Assim, } \frac{139}{31}x_3 = \frac{417}{31} \Rightarrow x_3 = \frac{\cancel{417}/31}{\cancel{139}/31} \Rightarrow x_3 = 3$$

Substituindo $x_3 = 3$ na segunda equação temos,

$$\begin{aligned} -\frac{31}{3}x_2 + \frac{52}{3}x_3 &= \frac{94}{3} \\ \Rightarrow -\frac{31}{3}x_2 + \frac{52}{3} \cdot 3 &= \frac{94}{3} \\ \Rightarrow x_2 &= \frac{\cancel{94}/3 - \cancel{52}}{\cancel{-31}/3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_2 = 2$$

E por fim, substituindo $x_3 = 3$ e $x_2 = 2$ na primeira equação, obtemos

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 8x_3 &= -1 \\ \Rightarrow 3x_1 + 5 \cdot 2 - 8 \cdot 3 &= -1 \\ \Rightarrow x_1 &= \frac{-1 - 10 + 24}{3} \\ \Rightarrow x_1 &= 1 \end{aligned}$$



Você entendeu a ideia do processo todo? Tenha sempre em mente a "cara" da matriz que está procurando e faça os pivotamentos pensando nela. Desta forma, você saberá o que precisa ser feito. Lembre-se: Matemática não é mágica nem decoreba!

Observe que, para aplicarmos o método de Gauss, os elementos da diagonal principal da matriz de coeficientes A não podem ser nulos! Mas sempre haverá um rearranjo das linhas de A de tal forma que a diagonal principal seja não nula – trocar as equações de lugar no sistema não interferirá na resposta, certo? Na teoria funciona, mas na prática (computacionalmente falando) isso pode não ser viável. Para esses casos, existem outros métodos mais eficientes, que não iremos abordar neste Livro Didático, mas que você pode encontrar em vários livros de Cálculo Numérico que estão na biblioteca do seu polo.

Exemplo 3: Aplique o método de Gauss para o sistema no qual aplicamos a regra de Cramer.

$$\begin{cases} 4y + 3z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ x - 2z = 2 \end{cases}$$

Resolução: Matricialmente falando,

$$\left[\begin{array}{ccc} 0 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Obs.: Trocamos a primeira pela segunda linha do sistema apenas para que a posição a_{11} seja diferente de zero e possamos ter uma matriz diagonal superior.

Matriz estendida associada ao sistema: $S_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right]$.

1º Pivoteamento:

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}} \right) \cdot L_1 + L_2 = \left(-\frac{0}{1} \right) \cdot L_1 + L_2 = L_2$$

$$L_3 \leftarrow \left(-\frac{a_{31}}{a_{11}} \right) \cdot L_1 + L_3 = \left(-\frac{1}{1} \right) \cdot L_1 + L_3 = (-1) \cdot L_1 + L_3$$

Nova matriz estendida associada ao sistema: $S_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{array} \right]$.

2º Pivoteamento:

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2$$

$$L_3 \leftarrow \left(-\frac{a_{32}}{a_{22}} \right) \cdot L_2 + L_3 = \left(-\frac{1}{4} \right) \cdot L_2 + L_3$$

Nova matriz estendida associada ao sistema: $S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 4 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & -2,25 & | & 2,25 \end{bmatrix}$.

Resta-nos resolver o sistema resultante,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2,25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2,25 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ conforme queríamos encontrar.}$$

3.1.3 Método de Gauss-Jordan

Vimos que o método de Gauss consiste em transformar um sistema em um outro equivalente, triangular, e que a vantagem de se trabalhar com este novo sistema é que uma das variáveis é obtida imediatamente. Isso ocorre porque em uma das linhas apenas um coeficiente será não nulo. Agora, não seria perfeito se esse sistema equivalente tivesse todas as linhas com essa cara, ou seja, se cada linha deste sistema equivalente tivesse apenas um coeficiente não nulo? Obviamente, a matriz dos coeficientes teria que ser diagonal. Essa é a ideia do método de Gauss-Jordan: transformar o sistema original em um sistema equivalente diagonal. Essa transformação é feita através de operações elementares sobre as linhas (ou colunas).

Vamos trabalhar com um exemplo, para entender como este método funciona.

Exemplo 1: Encontre a solução no sistema linear usando o método de Gauss-Jordan

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

Resolução: Podemos reescrever o sistema na forma matricial $A \cdot X = B$,

com $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, e a matriz estendida é dada por

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 4 \\ 2 & -1 & -1 & | & 0 \\ 1 & -1 & -1 & | & -1 \end{bmatrix}. \text{ Vamos encontrar um sistema equivalente cuja matriz}$$

A' é diagonal através dos pivotamentos. A ideia agora é zerar, além das posições a_{21} , a_{31} e a_{32} , as posições a_{12} , a_{13} e a_{23} .

1º Pivotamento, para zerar a_{21} e a_{31} :

$$L_1 \leftarrow L_1 \Rightarrow \begin{cases} a_{11} \leftarrow 1 \\ a_{12} \leftarrow 1 \\ a_{13} \leftarrow 2 \\ b_1 \leftarrow 4 \end{cases}$$

$$L_2 \leftarrow \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}} \right) \cdot L_1 + L_2 = \left(-\frac{2}{1} \right) \cdot L_1 + L_2 = (-2) \cdot L_1 + L_2 \Rightarrow \begin{cases} a_{21} \leftarrow (-2) \cdot 1 + 2 = 0 \\ a_{22} \leftarrow (-2) \cdot 1 + (-1) = -3 \\ a_{23} \leftarrow (-2) \cdot 2 + (-1) = -5 \\ b_2 \leftarrow (-2) \cdot 4 + 0 = -8 \end{cases}$$

Obs.: Multiplicamos L_1 por $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ justamente para zerar a_{21} .

$$L_3 \leftarrow \left(-\frac{a_{31}}{a_{11}} \right) \cdot L_1 + L_3 = \left(-\frac{1}{1} \right) \cdot L_1 + L_3 = (-1) \cdot L_1 + L_3 \Rightarrow \begin{cases} a_{31} \leftarrow (-1) \cdot 1 + 1 = 0 \\ a_{32} \leftarrow (-1) \cdot 1 + (-1) = -2 \\ a_{33} \leftarrow (-1) \cdot 2 + (-1) = -3 \\ b_3 \leftarrow (-1) \cdot 4 + (-1) = -5 \end{cases}$$

Obs.: Multiplicamos L_1 por $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ justamente para zerar a_{31} .

$$\text{A nova matriz estendida é } S_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -5 & -8 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \end{array} \right]$$

2º Pivotamento, para zerar a_{12} e a_{32} (Muita atenção aqui!).

$$L_1 \leftarrow \left(-\frac{a_{12}}{a_{22}} \right) \cdot L_2 + L_1 = \left(\frac{1}{3} \right) \cdot L_2 + L_1 \Rightarrow \begin{cases} a_{11} \leftarrow \left(\frac{1}{3} \right) \cdot 0 + 1 = 1 \\ a_{12} \leftarrow \left(\frac{1}{3} \right) \cdot (-3) + 1 = 0 \\ a_{13} \leftarrow \left(\frac{1}{3} \right) \cdot (-5) + 2 = \frac{1}{3} \\ b_1 \leftarrow \left(\frac{1}{3} \right) \cdot (-8) + 4 = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Obs.: Multiplicamos L_2 por $-\frac{a_{12}}{a_{22}}$ justamente para zerar a_{12} .

$$L_2 \leftarrow L_2 \Rightarrow \begin{cases} a_{21} \leftarrow 0 \\ a_{22} \leftarrow -3 \\ a_{23} \leftarrow -5 \\ b_2 \leftarrow -8 \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow \left(-\frac{a_{32}}{a_{22}} \right) \cdot L_2 + L_3 = \left(-\frac{2}{3} \right) \cdot L_2 + L_3 \Rightarrow \begin{cases} a_{31} \leftarrow \left(-\frac{2}{3} \right) \cdot 0 + 0 = 0 \\ a_{32} \leftarrow \left(-\frac{2}{3} \right) \cdot (-3) + (-2) = 0 \\ a_{33} \leftarrow \left(-\frac{2}{3} \right) \cdot (-5) + (-3) = \frac{1}{3} \\ b_3 \leftarrow \left(-\frac{2}{3} \right) \cdot (-8) + (-5) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Obs.: Multiplicamos L_2 por $-\frac{a_{32}}{a_{22}}$ justamente para zerar a_{32} .

A nova matriz estendida é $S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cancel{\frac{1}{3}} & \cancel{\frac{4}{3}} \\ 0 & -3 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & \cancel{\frac{1}{3}} & \cancel{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}$. Observe que estamos

zerando todas as posições acima e abaixo da diagonal principal. Vamos prosseguir neste caminho.

3º Pivoteamento, para zerar a_{13} e a_{23} :

$$L_1 \leftarrow \left(-\frac{a_{13}}{a_{33}} \right) \cdot L_3 + L_1 = \left(-\frac{\cancel{\frac{1}{3}}}{\cancel{\frac{1}{3}}} \right) \cdot L_3 + L_1 = -L_3 + L_1 \Rightarrow \begin{cases} a_{11} \leftarrow (-1) \cdot 0 + 1 = 1 \\ a_{12} \leftarrow (-1) \cdot 0 + 0 = 0 \\ a_{13} \leftarrow (-1) \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0 \\ b_1 \leftarrow (-1) \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = 1 \end{cases}$$

Obs.: Multiplicamos L_3 por $-\frac{a_{13}}{a_{33}}$ justamente para zerar a_{13} .

$$L_2 \leftarrow \left(-\frac{a_{23}}{a_{33}} \right) \cdot L_3 + L_2 = \left(-\frac{(-5)}{\cancel{\frac{1}{3}}} \right) \cdot L_3 + L_2 = 15 \cdot L_3 + L_2 \Rightarrow \begin{cases} a_{21} \leftarrow 15 \cdot 0 + 0 = 0 \\ a_{22} \leftarrow 15 \cdot 0 + (-3) = -3 \\ a_{23} \leftarrow 15 \cdot \frac{1}{3} + (-5) = 0 \\ b_2 \leftarrow 15 \cdot \frac{1}{3} + (-8) = -3 \end{cases}$$

Obs.: Multiplicamos L_3 por $-\frac{a_{23}}{a_{33}}$ justamente para zerar a_{23} .

$$L_3 \leftarrow L_3 \Rightarrow \begin{cases} a_{31} \leftarrow 0 \\ a_{32} \leftarrow 0 \\ a_{33} \leftarrow \frac{1}{3} \\ b_3 \leftarrow \frac{1}{3} \end{cases}$$

A nova matriz estendida é $S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & -3 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & | & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, cuja matriz associada é

diagonal. Reescrevendo-a na forma de sistemas de equações,

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ -3x_2 = -3 \Rightarrow x_2 = 1 \\ \left(\frac{1}{3}\right) \cdot x_3 = \frac{1}{3} \Rightarrow x_3 = 1 \end{cases}$$



Novamente, não perca de vista a "cara" que você quer dar para o seu sistema – no caso, a da matriz diagonal. É mais fácil entender o processo do que ficar decorando fórmulas.

Exemplo 2: O exemplo a seguir já foi calculado utilizando o método de Gauss.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Sendo $S = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & | & 5 \\ 4 & 4 & -3 & | & 3 \\ 2 & -3 & 1 & | & -1 \end{bmatrix}$ a matriz estendida, vamos encontrar um

sistema equivalente diagonal através dos pivotamentos.

1º Pivoteamento, para zerar a_{21} e a_{31} :

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) \cdot L_1 + L_2 = \left(-\frac{4}{2}\right) \cdot L_1 + L_2 \Rightarrow \begin{cases} a_{11} \leftarrow 0 \\ a_{12} \leftarrow -2 \\ a_{13} \leftarrow -1 \\ b_1 \leftarrow -7 \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow \left(-\frac{a_{31}}{a_{11}} \right) \cdot L_1 + L_3 = \left(-\frac{2}{2} \right) \cdot L_1 + L_3 = -L_1 + L_3 \Rightarrow \begin{cases} a_{31} \leftarrow 0 \\ a_{32} \leftarrow -6 \\ a_{33} \leftarrow 2 \\ b_3 \leftarrow -6 \end{cases}$$

A nova matriz estendida é $S_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & -6 & 2 & -6 \end{array} \right]$. Conseguimos “zerar” os elementos correspondentes às posições a_{21} e a_{31} . Falta zerarmos a posição a_{32} .

2º Pivoteamento, para zerar a_{12} e a_{32} :

$$L_1 \leftarrow \left(-\frac{a_{12}}{a_{22}} \right) \cdot L_2 + L_1 = \left(-\frac{3}{(-2)} \right) \cdot L_2 + L_1 = \frac{3}{2} \cdot L_2 + L_1 \Rightarrow \begin{cases} a_{11} \leftarrow 2 \\ a_{12} \leftarrow 0 \\ a_{13} \leftarrow -\frac{5}{2} \\ b_1 \leftarrow -\frac{11}{2} \end{cases}$$

$$L_2 \leftarrow L_2$$

$$L_3 \leftarrow \left(-\frac{a_{32}}{a_{22}} \right) \cdot L_2 + L_3 = \left(-\frac{(-6)}{(-2)} \right) \cdot L_2 + L_3 = -3 \cdot L_2 + L_3 \Rightarrow \begin{cases} a_{31} \leftarrow 0 \\ a_{32} \leftarrow 0 \\ a_{33} \leftarrow 5 \\ b_3 \leftarrow 15 \end{cases}$$

A nova matriz estendida é $S_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array} \right]$.

3º Pivoteamento, para zerar a_{13} e a_{23} :

$$L_1 \leftarrow \left(-\frac{a_{13}}{a_{33}} \right) \cdot L_3 + L_1 = \left(-\frac{-\frac{5}{2}}{5} \right) \cdot L_3 + L_1 = \frac{1}{2} \cdot L_3 + L_1 \Rightarrow \begin{cases} a_{11} \leftarrow 2 \\ a_{12} \leftarrow 0 \\ a_{13} \leftarrow 0 \\ b_1 \leftarrow 2 \end{cases}$$

$$L_2 \leftarrow \left(-\frac{a_{23}}{a_{33}} \right) \cdot L_3 + L_2 = \left(-\frac{(-1)}{5} \right) \cdot L_3 + L_2 = \frac{1}{5} \cdot L_3 + L_2 \Rightarrow \begin{cases} a_{21} \leftarrow 0 \\ a_{22} \leftarrow -2 \\ a_{23} \leftarrow 0 \\ b_2 \leftarrow -4 \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow L_3$$

A nova matriz estendida é $S_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array} \right]$ que nada mais é do que a matriz diagonal. Logo,

$$\begin{cases} 2x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = 1 \\ -2x_2 = -4 \Rightarrow x_2 = 2 \\ 5x_3 = 15 \Rightarrow x_3 = 3 \end{cases}$$

3.1.4 Decomposição LU ou fatoração LU

A decomposição LU é o método mais utilizado para se resolver sistemas. Considerando um sistema linear $A \cdot X = B$, a ideia é decompor a matriz A em produto de duas novas matrizes L e U mais “simples” e, em seguida, resolver uma sequência de sistemas lineares. Observe que, se $A = L \cdot U$,

$$A \cdot X = B \Rightarrow (L \cdot U) \cdot X = B \Rightarrow L \cdot (U \cdot X) = B.$$

Logo, podemos resolver primeiro o sistema $L \cdot Y = B$ e depois o sistema $U \cdot X = Y$. A grande vantagem deste método é que as matrizes L e U são construídas de forma a tornar a resolução destes dois novos sistemas mais simples que a do original. Além disso, computacionalmente falando, podemos resolver qualquer sistema linear que possua A como matriz de coeficientes, isto é, não importa quem seja B , a resolução do sistema será imediata.

As matrizes L e U que devemos encontrar são da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow A = (L \cdot U) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Observe que L é uma matriz triangular inferior (em inglês *lower*) e U é uma matriz triangular superior (em inglês *upper*).

Para encontrarmos os valores dos elementos das matrizes L e U , podemos simplesmente multiplicar as matrizes L e U e igualar à matriz A . Outra forma é utilizar o método de Gauss: a matriz U vai ser exatamente a matriz triangular superior obtida pelo método e a matriz L será construída ao longo do processo! Observe o exemplo a seguir:

Exemplo 1: Resolva o sistema linear usando a decomposição LU.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Resolução: Já resolvemos esse sistema utilizando o método de Gauss. Vamos construir as matrizes L e U revendo os pivotamentos, sem nos preocuparmos com B .

$$\text{Matriz original dos coeficientes: } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

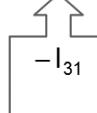
1º Pivoteamento, para zerar a_{21} e a_{31} :

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}} \right) \cdot L_1 + L_2 = (-2) \cdot L_1 + L_2 \Rightarrow \begin{cases} a_{21} \leftarrow 0 \\ a_{22} \leftarrow -2 \\ a_{23} \leftarrow -1 \end{cases}$$



$$L_3 \leftarrow \left(-\frac{a_{31}}{a_{11}} \right) \cdot L_1 + L_3 = (-1) \cdot L_1 + L_3 \Rightarrow \begin{cases} a_{31} \leftarrow 0 \\ a_{32} \leftarrow -6 \\ a_{33} \leftarrow 2 \end{cases}$$



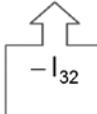
Nova matriz de coeficientes: $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -6 & 2 \end{bmatrix}$

2º Pivoteamento, para zerar a_{32} :

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2$$

$$L_3 \leftarrow \left(-\frac{a_{32}}{a_{22}} \right) \cdot L_2 + L_3 = (-3) \cdot L_2 + L_3 \Rightarrow \begin{cases} a_{31} \leftarrow 0 \\ a_{32} \leftarrow 0 \\ a_{33} \leftarrow 5 \end{cases}$$



Nova matriz dos coeficientes, triangular superior: $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Conforme explicamos, definimos U como sendo essa nova matriz de coeficientes:

$$U = A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

A matriz L será constituída pelos quocientes l_{21} , l_{31} e l_{32} :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos tirar a prova real?

$$\begin{aligned}
 L \cdot U &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 5 \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 5 \\ 1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & (6-2) & (-2-1) \\ 2 & (3-6) & (-1-3+5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} = A
 \end{aligned}$$

De posse das matrizes L e U, podemos agora resolver o sistema inicial:

$$A \cdot X = B \Rightarrow (L \cdot U) \cdot X = B \Rightarrow L \cdot (U \cdot X) = B.$$

Vamos considerar $U \cdot X = Y$. Então:

$$L \cdot Y = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 5 \\ 2y_1 + y_2 = 3 \Rightarrow y_2 = 3 - 10 = -7 \\ y_1 + 3y_2 + y_3 = -1 \Rightarrow y_3 = -1 - 5 + 21 = 15 \end{cases}$$

logo,

$$U \cdot X = Y \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 15 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}(5 - 6 + 3) = 1 \\ -2x_2 - x_3 = -7 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2}(-7 + 3) = 2 \\ 5x_3 = 15 \Rightarrow x_3 = 3 \end{cases}$$

Você já viu essa matriz Y em outro lugar? Volte ao método de Jordan e verifique o sistema linear triangular encontrado.

Outra vantagem deste método é que fica muito mais fácil calcular o determinante de A, uma vez que ele será exatamente a multiplicação dos elementos da diagonal da matriz U!

Exemplo 2: Encontre a solução do sistema linear usando a composição LU.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$$

Resolução: A matriz A associado ao sistema é

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos encontrar as matrizes L e U tais que $L \cdot U = A$ através dos pivotamentos:

1º Pivotamento, para zerar a_{21} e a_{31} :

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}} \right) \cdot L_1 + L_2 = \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot L_1 + L_2 \Rightarrow \begin{cases} a_{21} \leftarrow 0 \\ a_{22} \leftarrow -1 \\ a_{23} \leftarrow \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{-I_{21}}$$

$$L_3 \leftarrow \left(-\frac{a_{31}}{a_{11}} \right) \cdot L_1 + L_3 = \left(-\frac{5}{2} \right) \cdot L_1 + L_3 \Rightarrow \begin{cases} a_{31} \leftarrow 0 \\ a_{32} \leftarrow -7 \\ a_{33} \leftarrow -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{-I_{31}}$$

Nova matriz de coeficientes: $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & -7 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

2º Pivotamento, para zerar a_{32} :

$$L_1 \leftarrow L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2$$

$$L_3 \leftarrow \left(-\frac{a_{32}}{a_{22}} \right) \cdot L_2 + L_3 = 7 \cdot L_2 + L_3 \Rightarrow \begin{cases} a_{32} \leftarrow 0 \\ a_{33} \leftarrow -12 \end{cases}$$

$$\boxed{-I_{32}}$$

Nova matriz de coeficientes, triangular: $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$

Logo $U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$ e $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & 7 & 1 \end{bmatrix}$. Agora podemos resolver o sistema.

Sendo $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$, $A \cdot X = B \Rightarrow (L \cdot U) \cdot X = B \Rightarrow L \cdot (U \cdot X) = B$.

Então

$$L \cdot Y = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & 7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ \frac{1}{2}y_1 + y_2 = 5 \Rightarrow y_2 = 5 - 1 = 4 \\ \frac{5}{2}y_1 + 7y_2 + y_3 = 9 \Rightarrow y_3 = 9 - 5 - 28 = -24 \end{cases}$$

Logo, a solução do sistema é a tripla $(2, -1, 2)$.

$$\det A = \det(L \cdot U) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot u_{33} = 2 \cdot (-1) \cdot (-12) = 24.$$



Que tal tirar a prova real? Calcule o determinante da matriz A pelo método tradicional e veja se o resultado coincide.

3.1.5 Cálculo da matriz inversa

Em Álgebra Linear, vimos que toda matriz quadrada A cujo determinante é não nulo ($\det A \neq 0$) possui matriz inversa A^{-1} . Você deve lembrar que encontrar essa matriz inversa não era um processo muito simples: tínhamos que considerar A e a matriz identidade I e ir escalonando A até transformá-la em I . Simultaneamente, aplicávamos as mesmas operações elementares em I e a matriz resultante dessas aplicações era exatamente a matriz inversa A^{-1} . Nada trivial... Imagine agora implementar esse método computacionalmente!

Agora vamos mostrar uma forma mais simples de encontrar a inversa de uma matriz, justamente através da fatoração LU. Como Matemática não é mágica, vamos primeiro entender por que funciona?

Considere

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

tais que $\det A \neq 0$ e $L \cdot U = A$. Das propriedades de multiplicação de matrizes, sabemos que $L \cdot U = A \Rightarrow A^{-1} = (L \cdot U)^{-1} \Rightarrow A^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1}$.

Vamos encontrar a matriz L^{-1} , sabendo que $L \cdot L^{-1} = I$ e como L é uma matriz triangular inferior L^{-1} também será. Para facilitar a notação, considere $L^{-1} = Y$.

Sabemos que Y é da forma

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & 0 & \dots & 0 \\ y_{21} & y_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{bmatrix}$$

e como $L \cdot Y = I$, temos que

$$L \cdot Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_{11} & 0 & \dots & 0 \\ y_{21} & y_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, se chamarmos a i -ésima coluna de Y de Y_i e a i -ésima coluna de I de e_i , segue que $L \cdot Y_i = e_i$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Esse fato implica que podemos encontrar os elementos de Y resolvendo n sistemas triangulares:

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ y_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

As soluções dos sistemas assim são:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_{11} = 1 \\ l_{21} \cdot y_{11} + y_{21} = 0 \Rightarrow y_{21} = -l_{21} \cdot y_{11} \\ l_{31} \cdot y_{11} + l_{32} \cdot y_{21} + y_{31} = 0 \Rightarrow y_{31} = -(l_{31} \cdot y_{11} + l_{32} \cdot y_{21}) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk} \cdot y_{k1} + y_{n1} = 0 \Rightarrow y_{n1} = -\sum_{k=1}^{n-1} l_{nk} \cdot y_{k1} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_{22} = 1 \\ l_{32} \cdot y_{22} + y_{32} = 0 \Rightarrow y_{32} = -l_{32} \cdot y_{22} \\ \vdots \\ \sum_{k=2}^{n-1} l_{nk} \cdot y_{k2} + y_{n2} = 0 \Rightarrow y_{n1} = -\sum_{k=2}^{n-1} l_{nk} \cdot y_{k2} \end{cases}$$

:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ y_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow y_{nn} = 1$$

Generalizando, para todo $j = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{cases} y_{jj} = 1 \\ y_{ij} = -\sum_{k=j}^{i-1} l_{ik} y_{kj} \end{cases} \text{ para cada } i = j+1, j+2, \dots, n.$$

Vamos agora encontrar U^{-1} . Sabemos que $U \cdot U^{-1} = I$ e como U é uma matriz triangular superior, U^{-1} também será. Repetindo a ideia anterior, chamaremos U^{-1} de Z e de Z_i a i -ésima coluna de Z . Então $U \cdot Z_i = e_i$ e ainda

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow z_{11} = \frac{1}{u_{11}}$$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_{12} \\ z_{22} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z_{12} = -\frac{u_{12}}{u_{11}} z_{22} \\ z_{22} = \frac{1}{u_{22}} \end{cases}$$

:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_{1n} \\ z_{2n} \\ \vdots \\ z_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z_{1n} = -\sum_{k=2}^n \frac{u_{1k}}{u_{11}} z_{kn} \\ z_{2n} = -\sum_{k=3}^n \frac{u_{2k}}{u_{22}} z_{kn} \\ \vdots \\ z_{nn} = \frac{1}{u_{nn}} \end{cases}$$

Generalizando,

$$\begin{cases} z_{jj} = \frac{1}{u_{jj}} \\ z_{ij} = -\sum_{k=i+1}^j \frac{u_{ik}}{u_{ii}} z_{kj} \end{cases}, \text{ para todos } j = 1, 2, \dots, n \text{ e } i = 1, 2, \dots, j-1.$$

Visto a demonstração matemática anterior, vamos aplicar esse método em um exemplo.

Exemplo: Calcule a inversa da matriz a seguir, usando a decomposição LU.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolução: Já calculamos as matrizes L e U tais que $A = L \cdot U$ no tópico anterior. São elas:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Vamos construir as matrizes $Y = L^{-1}$ e $Z = U^{-1}$ com as fórmulas que encontramos anteriormente. Sabemos que a ordem das matrizes é 3. Então:

$$j=1 \Rightarrow \begin{cases} y_{11} = 1 \\ y_{21} = -\sum_{k=1}^{2-1} l_{2k} \cdot y_{k1} = -l_{21} \cdot y_{11} = -l_{21} = -2 \\ y_{31} = -\sum_{k=1}^{3-1} l_{3k} \cdot y_{k1} = -(l_{31} \cdot y_{11} + l_{32} \cdot y_{21}) = -(1 \cdot 1 + 3 \cdot (-2)) = 5 \end{cases}$$

$$j=2 \Rightarrow \begin{cases} y_{22} = 1 \\ y_{32} = -\sum_{k=2}^{3-1} l_{3k} \cdot y_{k2} = -l_{32} \cdot y_{22} = -3 \cdot 1 = -3 \end{cases}$$

$$j=3 \Rightarrow y_{33} = 1$$

Encontramos a matriz $Y = L^{-1}$:

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos agora construir a matriz $Z = U^{-1}$:

$$j=1 \Rightarrow z_{11} = \frac{1}{u_{11}} = \frac{1}{2}$$

$$j=2 \Rightarrow \begin{cases} z_{12} = -\sum_{k=2}^2 \frac{u_{1k}}{u_{11}} \cdot z_{k2} = -\frac{u_{12}}{u_{11}} \cdot z_{22} = -\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \\ z_{22} = \frac{1}{u_{22}} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$j=3 \Rightarrow \begin{cases} z_{13} = -\sum_{k=2}^3 \frac{u_{1k}}{u_{11}} z_{k3} = -\frac{u_{12}}{u_{11}} z_{23} - \frac{u_{13}}{u_{11}} z_{33} = -\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) - \frac{(-1)}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \\ z_{23} = -\sum_{k=3}^3 \frac{u_{2k}}{u_{22}} z_{k3} = -\frac{u_{23}}{u_{22}} z_{33} = -\frac{(-1)}{(-2)} \cdot \frac{1}{5} = -\frac{1}{10} \\ z_{33} = \frac{1}{u_{33}} = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Encontramos a matriz $Z = U^{-1}$:

$$Z = U^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,75 & 0,25 \\ 0 & -0,5 & -0,1 \\ 0 & 0 & 0,2 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$A^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,75 & 0,25 \\ 0 & -0,5 & -0,1 \\ 0 & 0 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0,25 \\ 0,5 & -0,2 & -0,1 \\ 1 & -0,6 & 0,2 \end{bmatrix}.$$

Que tal você verificar que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$?

RESUMO DO TÓPICO 3

Vamos rever sucintamente, neste resumo, o conteúdo apresentado neste terceiro tópico.

- Um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas pode ser escrito como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \text{ ou } A \cdot X = B, \text{ com}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \text{ onde os elementos } a_{ij} \text{ e } b_i \text{ são constantes}$$

reais ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$). Qualquer n-upla (x_1, x_2, \dots, x_n) que satisfaça o sistema é

solução do mesmo. A matriz $S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$ é a matriz estendida do sistema.

- Métodos Diretos de Resolução: aqueles que, depois de um número finito de operações aritméticas, fornecem a solução exata do sistema linear; há menos de erros de arredondamento.
- Regra de Cramer: é um método direto que utiliza determinantes para encontrar a solução. Para cada j , $j = 1, 2, \dots, n$, temos que $x_j = \frac{\det D_j}{\det A}$, onde D_j é a matriz composta pelos elementos de A , a menos da j -ésima coluna (correspondente a x_j no sistema), que será composta pelos elementos da matriz B .
- Método de Gauss: é um método direto que transforma o sistema linear original em um sistema triangular superior ou inferior equivalente através de pivotamentos.
- Método de Gauss-Jordan: é um método direto que transforma o sistema linear original em um sistema diagonal equivalente através de pivotamentos.
- Decomposição LU ou fatoração LU: é um método direto que decompõe a matriz A em um produto de duas novas matrizes L e U :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow A = (L \cdot U) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = B \Rightarrow (L \cdot U) \cdot X = B \Rightarrow L \cdot (U \cdot X) = B$$

Para encontrar a solução do sistema original, resolvemos primeiro o sistema $L \cdot Y = B$ e depois o sistema $U \cdot X = Y$.

- Podemos calcular a matriz inversa de toda matriz quadrada A cujo determinante é não nulo ($\det A \neq 0$) através da fatoração LU

$$L \cdot U = A \Rightarrow A^{-1} = (L \cdot U)^{-1} \Rightarrow A^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1}$$

Chamando $L^{-1} = Y = (y_{ij})_{nxn}$ e $U^{-1} = Z = (z_{ij})_{nxn}$, encontramos tais matrizes através das seguintes expressões:

$$\text{Para todo } j = 1, 2, \dots, n, \quad \begin{cases} y_{jj} = 1 \\ y_{ij} = -\sum_{k=j}^{i-1} l_{ik} y_{kj} \end{cases}, \text{ com } i = j + 1, j + 2, \dots, n \text{ e} \quad \begin{cases} z_{jj} = \frac{1}{u_{jj}} \\ z_{ij} = -\sum_{k=i+1}^j \frac{u_{ik}}{u_{ii}} z_{kj} \end{cases},$$

para todos $j = 1, 2, \dots, n$ e $i = 1, 2, \dots, j - 1$.

AUTOATIVIDADE



Através destes exercícios vamos fixar o conteúdo que estudamos neste tópico.

1 Resolva os sistemas lineares através da regra de Cramer:

a)
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ -4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -13 \end{cases}$$

b)
$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 27 \\ 33 \end{bmatrix}$$

2 Resolva os sistemas lineares que seguem através do método de eliminação de Gauss:

a)
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

b)
$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix}$$

c)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,7917595 \end{bmatrix}$$

3 Resolva os sistemas pelo método de Gauss-Jordan:

a)
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- 4 Resolva os sistemas a seguir através do método de decomposição LU. Em seguida, calcule o determinante e a inversa da matriz de coeficientes A.

a)
$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

SISTEMAS LINEARES – MÉTODOS ITERATIVOS

1 INTRODUÇÃO

Além dos métodos exatos estudados no tópico anterior, podemos resolver sistemas lineares utilizando métodos iterativos. Esses métodos são mais eficientes quando a matriz dos coeficientes do sistema possui muitos elementos nulos, por exemplo. Além disso, eles utilizam menos memória do computador e autocorrigem eventuais erros cometidos ou mesmo de arredondamento.

Dizemos que um método é iterativo quando fornece uma sequência de aproximações para a solução, obtida das anteriores pela repetição do mesmo processo (processo iterativo), até atingir a tolerância desejada (erro).

Já estudamos os diferentes tipos de erros no Tópico 1, essa tolerância desejada ou erro, queremos dizer que a partir deste ponto os valores obtidos, apesar de serem diferentes, serão considerados iguais – a diferença será muito pequena, insignificante para o que pretendemos. Esse valor de tolerância, ou erro, deve ser definido antes de iniciarmos o processo iterativo. Assim, uma vez que a diferença entre o valor obtido para um determinado k e o valor obtido para o passo $k+1$ for menor do que esse erro, não nos interessa mais seguirmos com o processo.

Neste tópico, vamos adotar a convenção de trabalharmos com 3 casas decimais e uma tolerância de 10^{-2} . O arredondamento, quando necessário, utilizará as regras de arredondamento já estudadas na disciplina de Estatística. Se você não lembra muito bem como elas eram, sugerimos que dê uma olhada no seu caderno de estudos.

2 MÉTODOS ITERATIVOS

2.1 MÉTODO DE JACOBI

Considere o seguinte sistema linear $A \cdot X = B$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Onde os elementos da forma a_{jj} são não nulos, para $j = 1, 2, \dots, n$. Então, em cada uma das equações acima, podemos isolar a variável x_j :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n) \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n) \\ \vdots \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{n(n-1)}x_{n-1}) \end{cases}$$

Vamos ver como ficaria a representação matricial do problema?

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Essa igualdade nos fornece a ideia do processo iterativo do método de Jacobi:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \text{ onde } k \text{ corresponde a } k\text{-ésima iteração.}$$

Na primeira iteração ($k = 1$), consideraremos $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \dots = x_n^{(0)} = 0$ por conveniência. Substituindo esses valores na matriz X do lado direito da igualdade, encontramos os valores para $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$. O erro em cada etapa será calculado da seguinte forma:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_{x_1}^{(k)} = \|x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)}\| \\ \Delta_{x_2}^{(k)} = \|x_2^{(k)} - x_2^{(k-1)}\| \\ \vdots \\ \Delta_{x_n}^{(k)} = \|x_n^{(k)} - x_n^{(k-1)}\| \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta^{(k)} = \max \{\Delta_{x_1}^{(k)}, \Delta_{x_2}^{(k)}, \dots, \Delta_{x_n}^{(k)}\}$$

Iremos repetir o processo até que o erro do processo k , $\Delta^{(k)}$ seja suficientemente pequeno.

Vamos exemplificar para entendermos melhor o processo.

Exemplo: Resolver o sistema a seguir, para um erro menor ou igual a 10^{-2} .

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 5 \end{cases}$$

Resolução: Isolando x_1 , x_2 e x_3 nas equações acima,

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5 + 2x_2 - x_3}{6} \\ x_2 = \frac{9 - 2x_1 + x_3}{8} \\ x_3 = \frac{5 - x_1 + 3x_2}{7} \end{cases}$$

Assim, nosso problema tem a seguinte cara:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{9}{8} \\ \frac{5}{7} \end{bmatrix}$$

ou, considerando as frações como números decimais,

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0,333 & -0,1667 \\ -0,250 & 0 & 0,125 \\ -0,143 & 0,429 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,833 \\ 1,125 \\ 0,714 \end{bmatrix}$$

Resolveremos explicitamente esse exemplo com o maior número de detalhes possível para que você possa entender todo o procedimento. Feito isso, colocaremos os valores obtidos em cada passo numa tabela. Esse recurso é mais interessante para sistematizar o processo.

Passo k = 0 :

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

Passo k = 1:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0,333 & -0,167 \\ -0,250 & 0 & 0,125 \\ -0,143 & 0,429 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,833 \\ 1,125 \\ 0,714 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + 0,333 \cdot 0 - 0,167 \cdot 0 \\ -0,250 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0,125 \cdot 0 \\ -0,143 \cdot 0 + 0,429 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,833 \\ 1,125 \\ 0,714 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,833 \\ 1,125 \\ 0,714 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,833 \\ 1,125 \\ 0,714 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^{(1)} = 0,833 \\ x_2^{(1)} = 1,125 \\ x_3^{(1)} = 0,714 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_{x_1^{(1)}} = \|0,833 - 0\| = 0,833 \\ \Delta_{x_2^{(1)}} = \|1,125 - 0\| = 1,125 \\ \Delta_{x_3^{(1)}} = \|0,714 - 0\| = 0,714 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta_{x^{(1)}} = \max \{0,833; 1,125; 0,714\} = 1,125.$$

Note que o erro encontrado é maior do que o que estamos dispostos a tolerar, que é de 0,01. Então precisamos de outra iteração.

Passo k = 2 :

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0,333 & -0,167 \\ -0,250 & 0 & 0,125 \\ -0,143 & 0,429 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,833 \\ 1,125 \\ 0,714 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,833 \\ 1,125 \\ 0,714 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \cdot 0,833 + 0,333 \cdot 1,125 - 0,167 \cdot 0,714 \\ -0,250 \cdot 0,833 + 0 \cdot 1,125 + 0,125 \cdot 0,714 \\ -0,143 \cdot 0,833 + 0,429 \cdot 1,125 + 0 \cdot 0,714 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,833 \\ 1,125 \\ 0,714 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,255 \\ -0,119 \\ 0,364 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,833 \\ 1,125 \\ 0,714 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,088 \\ 1,006 \\ 1,078 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(2)} = 1,088 \\ x_2^{(2)} = 1,006 \\ x_3^{(2)} = 1,078 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_{x_1^{(2)}} = \|1,088\| - \|0,833\| = 0,255 \\ \Delta_{x_2^{(2)}} = \|1,006\| - \|1,125\| = 0,119 \\ \Delta_{x_3^{(2)}} = \|1,078\| - \|0,714\| = 0,364 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta_{x^{(2)}} = \max \{0,255; 0,119; 0,364\} = 0,364.$$

O erro encontrado ainda é maior do que 0,01, implicando a necessidade de uma nova iteração.

Passo k = 3 :

$$\begin{bmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0,333 & -0,167 \\ -0,250 & 0 & 0,125 \\ -0,143 & 0,429 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,088 \\ 1,006 \\ 1,078 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,833 \\ 1,125 \\ 0,714 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \cdot 1,088 + 0,333 \cdot 1,006 - 0,167 \cdot 1,078 \\ -0,250 \cdot 1,088 + 0 \cdot 1,006 + 0,125 \cdot 1,078 \\ -0,143 \cdot 1,088 + 0,429 \cdot 1,006 + 0 \cdot 1,078 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,833 \\ 1,125 \\ 0,714 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,155 \\ -0,137 \\ 0,276 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,833 \\ 1,125 \\ 0,714 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,988 \\ 0,988 \\ 0,990 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(3)} = 0,988 \\ x_2^{(3)} = 0,988 \\ x_3^{(3)} = 0,990 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_{x_1^{(3)}} = \|0,988\| - \|1,088\| = 0,100 \\ \Delta_{x_2^{(3)}} = \|0,988\| - \|1,006\| = 0,018 \\ \Delta_{x_3^{(3)}} = \|0,990\| - \|1,078\| = 0,088 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta_{x^{(3)}} = \max \{0,100; 0,018; 0,088\} = 0,100.$$

Como 0,100 é maior do que 0,01, vamos a uma nova iteração.

Passo k = 4 :

$$\begin{bmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \\ x_3^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0,333 & -0,167 \\ -0,250 & 0 & 0,125 \\ -0,143 & 0,429 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,988 \\ 0,988 \\ 0,990 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,833 \\ 1,125 \\ 0,714 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \cdot 0,988 + 0,333 \cdot 0,988 - 0,167 \cdot 0,990 \\ -0,250 \cdot 0,988 + 0 \cdot 0,988 + 0,125 \cdot 0,990 \\ -0,143 \cdot 0,988 + 0,429 \cdot 0,988 + 0 \cdot 0,990 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,833 \\ 1,125 \\ 0,714 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,164 \\ -0,123 \\ 0,283 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,833 \\ 1,125 \\ 0,714 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,997 \\ 1,002 \\ 0,997 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(4)} = 0,997 \\ x_2^{(4)} = 1,002 \\ x_3^{(4)} = 0,997 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{x_1^{(4)}} &= \|0,997| - |0,988\| = 0,009 \\ \Delta_{x_2^{(4)}} &= \|1,002| - |0,988\| = 0,014 \\ \Delta_{x_3^{(4)}} &= \|0,997| - |0,990\| = 0,007 \end{aligned} \Rightarrow \Delta_{x^{(4)}} = \max \{0,009; 0,014; 0,007\} = 0,014.$$

Ainda temos um erro maior do que 0,01, mas observe que a diferença agora é pequena. Isso significa que nosso processo deve estar próximo do fim. Vamos a mais uma iteração:

Passo k = 5 :

$$\begin{bmatrix} x_1^{(5)} \\ x_2^{(5)} \\ x_3^{(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0,333 & -0,167 \\ -0,250 & 0 & 0,125 \\ -0,143 & 0,429 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,997 \\ 1,002 \\ 0,997 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,833 \\ 1,125 \\ 0,714 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \cdot 0,997 + 0,333 \cdot 1,002 - 0,167 \cdot 0,997 \\ -0,250 \cdot 0,997 + 0 \cdot 1,002 + 0,125 \cdot 0,997 \\ -0,143 \cdot 0,997 + 0,429 \cdot 1,002 + 0 \cdot 0,997 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,833 \\ 1,125 \\ 0,714 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,167 \\ -0,125 \\ 0,287 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,833 \\ 1,125 \\ 0,714 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,000 \\ 1,000 \\ 1,001 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(5)} = 1,000 \\ x_2^{(5)} = 1,000 \\ x_3^{(5)} = 1,001 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{x_1^{(5)}} &= \|1,000| - |0,997\| = 0,003 \\ \Delta_{x_2^{(5)}} &= \|1,000| - |1,002\| = 0,002 \\ \Delta_{x_3^{(5)}} &= \|1,001| - |0,997\| = 0,004 \end{aligned} \Rightarrow \Delta_{x^{(5)}} = \max \{0,003; 0,002; 0,004\} = 0,004.$$

Como $0,004 = 4 \cdot 10^{-3} \leq 10^{-2}$ e, portanto, finalizamos nosso processo em k = 5. Os valores encontrados foram $x_1 = 1,000$, $x_2 = 1,000$ e $x_3 = 1,001$.

Vamos colocar os valores obtidos numa tabela. Conforme já mencionamos, esse recurso é utilizado para sistematizar os cálculos.

K	x ₁	x ₂	x ₃	Δ _{x₁}	Δ _{x₂}	Δ _{x₃}	Δ _{Total}
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0,833	1,125	0,714	0,833	1,125	0,714	1,125
2	1,088	1,006	1,078	0,255	0,119	0,364	0,364
3	0,988	0,988	0,990	0,100	0,018	0,088	0,100
4	0,997	1,002	0,997	0,009	0,014	0,007	0,014
5	1,000	1,000	1,001	0,003	0,002	0,004	0,004

Caro acadêmico, que tal verificar a veracidade desta solução?

Exemplo 2: Resolva o sistema linear.

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}'$$

para um erro menor ou igual a 10^{-2} .

Resolução: Isolando as variáveis x e y na primeira e segunda equação respectivamente, temos

$$\begin{cases} x = \frac{1+y}{2} \\ y = \frac{3-x}{2} \end{cases},$$

a representação matricial do nosso sistema é:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \text{ ou}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ -0,5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1,5 \end{bmatrix}.$$

Assim, a expressão para a iteração k é dada por:

$$\begin{cases} k=0 \Rightarrow x^{(0)} = y^{(0)} = 0 \\ k \geq 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ -0,5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(k-1)} \\ y^{(k-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1,5 \end{bmatrix}, \end{cases}$$

Vamos à tabela:

K	x	y	Δ_x	Δ_y	Δ_{Total}
0	0	0	0	0	0
1	0,5	1,5	0,5	1,5	1,5
2	1,25	1,25	0,75	0,25	0,75
3	1,125	0,875	0,125	0,375	0,375
4	0,938	0,938	0,187	0,063	0,187
5	0,969	1,031	0,031	0,093	0,093
6	1,016	1,016	0,047	0,015	0,047
7	1,008	0,992	0,008	0,024	0,024
8	0,996	0,996	0,012	0,004	0,012
9	0,998	1,002	0,002	0,006	0,006

Como $0,006 = 6 \cdot 10^{-3} \leq 10^{-2}$, paramos o processo em $k = 9$, encontrando os valores $x = 0,998$ e $y = 1,002$.

Que tal tentar resolver esse exemplo? Mais uma dica: resolva-o em termos de frações também. Os valores que você encontrará serão um pouco diferentes dos valores da tabela acima. Isso ocorre pois, quando trabalhamos com as frações, estamos levando em conta todos os algarismos do número, sem truncamentos nem arredondamentos.

2.2 MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL

Vimos que a cada iteração k pelo método de Jacobi, nos aproximamos mais do valor da solução do sistema. E se alterarmos o método de Jacobi para acelerar essa convergência? Essa é a ideia do Método de Gauss-Seidel. A diferença entre esses dois métodos consiste no segundo levar em conta os valores das demais variáveis da iteração k. Vamos reescrever isso matematicamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(k)} = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)} = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k-1)}) \\ \vdots \\ x_n^{(k)} = \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - a_{n3}x_3^{(k)} - \dots - a_{n(n-1)}x_{n-1}^{(k)}) \end{array} \right.$$

Observe que a primeira variável é calculada exatamente da mesma forma que pelo método de Jacobi: leva em conta os valores obtidos para as demais variáveis na iteração k-1. Já o cálculo da segunda variável leva em conta o valor encontrado para a primeira na iteração k e os das demais variáveis, da iteração k-1. No cálculo da terceira variável, são levados em conta os valores encontrados para a primeira e segunda variável, e assim sucessivamente. Desta forma, a n-ésima variável é calculada utilizando todas as outras variáveis obtidas já na iteração k. Sem dúvida, o processo se torna muito mais rápido.

Vamos aplicar o método de Gauss-Seidel no primeiro exemplo do método de Jacobi.

Exemplo: Resolver, para um erro menor ou igual a 10^{-2} , o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} 6x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 5 \end{array} \right.$$

Vamos reescrever o sistema na forma matricial para aplicarmos o novo método.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 2 & 8 & -1 \\ 1 & -3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Fazendo a comparação com a forma geral, nosso problema tem a seguinte cara:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(k)} = \frac{1}{6} (5 + 2x_2^{(k-1)} - x_3^{(k-1)}) = \frac{5 + 2x_2^{(k-1)} - x_3^{(k-1)}}{6} \\ x_2^{(k)} = \frac{1}{8} (9 - 2x_1^{(k)} + x_3^{(k-1)}) = \frac{9 - 2x_1^{(k)} + x_3^{(k-1)}}{8} \\ x_3^{(k)} = \frac{1}{7} (5 - x_1^{(k)} + 3x_2^{(k)}) = \frac{5 - x_1^{(k)} + 3x_2^{(k)}}{7} \end{array} \right.$$

Como feito anteriormente, aplicaremos o método explicitamente para as duas primeiras iterações.

$k = 0:$

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

$k = 1:$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(1)} = \frac{5 + 2x_2^{(0)} - x_3^{(0)}}{6} = \frac{5 + 2.0 - 0}{6} = \frac{5}{6} = 0,833 \\ x_2^{(1)} = \frac{9 - 2x_1^{(1)} + x_3^{(0)}}{8} = \frac{9 - 2.0,833 + 0}{8} = 0,917 \\ x_3^{(1)} = \frac{5 - x_1^{(1)} + 3x_2^{(1)}}{7} = \frac{5 - 0,833 + 3.0,917}{7} = 0,988 \\ \Delta_{x_1^{(1)}} = \|0,833| - |0\| = 0,833 \\ \Delta_{x_2^{(1)}} = \|0,917| - |0\| = 0,917 \\ \Delta_{x_3^{(1)}} = \|0,988| - |0\| = 0,988 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta_{x^{(1)}} = \max \{0,833; 0,917; 0,988\} = 0,988$$

$k = 2:$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(2)} = \frac{5 + 2x_2^{(1)} - x_3^{(1)}}{6} = \frac{5 + 2.0,833 - 0,988}{6} = 0,946 \\ x_2^{(2)} = \frac{9 - 2x_1^{(2)} + x_3^{(1)}}{8} = \frac{9 - 2.0,946 + 0,988}{8} = 1,012 \\ x_3^{(2)} = \frac{5 - x_1^{(2)} + 3x_2^{(2)}}{7} = \frac{5 - 0,946 + 3.1,012}{7} = 1,013 \\ \Delta_{x_1^{(2)}} = \|0,946| - |0,833\| = 0,113 \\ \Delta_{x_2^{(2)}} = \|1,012| - |0,917\| = 0,095 \\ \Delta_{x_3^{(2)}} = \|1,013| - |0,988\| = 0,025 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta_{x^{(2)}} = \max \{0,113; 0,095; 0,025\} = 0,113$$

Vamos à tabela:

k	X_1	X_2	X_3	Δ_{x_1}	Δ_{x_2}	Δ_{x_3}	Δ_{Total}
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0,833	0,917	0,988	0,833	0,917	0,988	0,988
2	0,946	1,012	1,013	0,113	0,095	0,025	0,113
3	1,002	1,001	1,000	0,056	0,012	0,013	0,056
4	1,000	1,000	1,000	0,002	0,001	0,000	0,002

Observe que $0,002 = 2 \cdot 10^{-3} \leq 10^{-2}$ e, portanto, finalizamos nosso processo em $k = 4$. Os valores encontrados foram $x_1 = 1,000$, $x_2 = 1,000$ e $x_3 = 1,000$.

Note que, ao resolver esse sistema via método de Jacobi, tivemos que considerar uma iteração a mais do que utilizando o método de Gauss-Seidel. Além do fato de este segundo método ser mais rápido, outra vantagem diz respeito à operacionalidade na hora da implementação computacional: não é necessário armazenar na memória de cálculo os dois vetores $x^{(k)}$ e $x^{(k-1)}$ simultaneamente em cada passo k . Para sistemas grandes, essa particularidade é muito bem-vinda.

2.3 CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

Nos dois métodos iterativos anteriores, consideramos os valores das variáveis do sistema na iteração $k = 0$ como sendo zero. Na verdade, essa escolha foi feita por conveniência: a convergência ou não das soluções obtidas por meio de um método iterativo para as soluções exatas do sistema independe desta escolha. Existem critérios que nos garantem essa convergência. O primeiro que iremos mencionar se chama Critério de Linhas e diz o seguinte: para cada linha k da matriz de coeficientes de um sistema, considere a soma dos elementos desta linha em seus valores absolutos com exceção do valor que pertence à diagonal principal – esse irá dividir a soma. Chame o resultado desta equação de α_k . Feito isso para todas as linhas, verifica-se se o maior deles é menor do que 1. Se for, a sequência de elementos que encontraremos no processo de iteração converge para a solução do sistema. A seguir, enunciaremos matematicamente o critério de linhas.

Critério de Linhas: consideremos o sistema linear $A \cdot X = B$, com

$A = (a_{ij})_{n \times n}$ a matriz dos coeficientes, e seja $\alpha_k = \frac{1}{|a_{kk}|} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| \right)$. Se $\alpha = \max_{1 \leq k \leq n} \alpha_k < 1$, então o método de Jacobi gera uma sequência $\{x^{(k)}\}$ convergente para a solução do sistema, independentemente da escolha da aproximação inicial $x^{(0)}$.

Exemplo: Analise a matriz $A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{bmatrix}$, usando o critério de linhas.

Resolução: Vamos calcular os α_i , $i = 1, 2, 3$.

$$\left. \begin{array}{l} k=1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}|}{|a_{11}|} = \frac{|2| + |1|}{|10|} = \frac{3}{10} < 1 \\ k=2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{|a_{21}| + |a_{23}|}{|a_{22}|} = \frac{|1| + |1|}{|5|} = \frac{2}{5} < 1 \\ k=3 \Rightarrow \alpha_3 = \frac{|a_{31}| + |a_{32}|}{|a_{33}|} = \frac{|2| + |3|}{|10|} = \frac{5}{10} < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \max_{1 \leq k \leq 3} \alpha_k = \frac{5}{10} < 1.$$

Portanto, pelo critério de linhas, o método de Jacobi aplicado para o sistema linear $A \cdot X = B$ é convergente.

É possível encontrarmos sistemas lineares para os quais o critério de linhas não é satisfeito, apesar de, uma vez aplicado o método de Jacobi, esse convergir para a solução exata. Isso acontece porque o critério acima é suficiente para garantir a convergência, mas não necessário.

Embora o critério de linhas também valha para o método de Gauss-Seidel, outro critério de convergência para esse método é conhecido como Critério de Sassenfeld, e diz o seguinte:

Critério de Sassenfeld: consideremos o sistema linear $A \cdot X = B$, com $A = (a_{ij})_{n \times n}$ a matriz dos coeficientes, e sejam $\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + \dots + |a_{1n}|}{|a_{11}|}$, e $\beta_j = \frac{|a_{j1}| \beta_1 + |a_{j2}| \beta_2 + \dots + |a_{j(j-1)}| \beta_{j-1} + |a_{j(j+1)}| + \dots + |a_{jn}|}{|a_{jj}|}$, com $1 < j \leq n$.

Se $\beta = \max_{1 \leq k \leq n} \beta_k < 1$, então o método de Gauss-Siedel gera uma sequência $\{x^{(k)}\}$ convergente para a solução do sistema, independentemente da escolha da aproximação inicial $x^{(0)}$. Além disso, quanto menor for β , mais rápida será a convergência.

Exemplo: Analise novamente a matriz $A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{bmatrix}$, agora usando o critério de Sassenfeld.

Resolução: Vamos calcular os β_i , $i = 1, 2, 3$.

$$\left. \begin{array}{l} k=1 \Rightarrow \beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}|}{|a_{11}|} = \frac{|2| + |1|}{|10|} = \frac{3}{10} < 1 \\ k=2 \Rightarrow \beta_2 = \frac{|a_{21}| \cdot \beta_1 + |a_{23}|}{|a_{22}|} = \frac{1}{|5|} \cdot \left(|1| \cdot \frac{3}{10} + |1| \right) = \frac{13}{50} < 1 \\ k=3 \Rightarrow \beta_3 = \frac{|a_{31}| \cdot \beta_1 + |a_{32}| \cdot \beta_2}{|a_{33}|} = \frac{1}{|10|} \cdot \left(|2| \cdot \frac{3}{10} + |3| \cdot \frac{13}{50} \right) = \frac{69}{500} < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \max_{1 \leq k \leq 3} \alpha_k = \frac{3}{10} < 1.$$

Portanto, pelo critério de Sassenfeld, o método de Gauss-Siedel aplicado para o sistema linear $A \cdot X = B$ também é convergente.

3 SISTEMAS LINEARES COMPLEXOS

No item anterior, estudamos sistemas lineares reais. Considerando agora os sistemas lineares complexos, mostraremos que podemos reduzi-los ao caso anterior e aplicar qualquer dos métodos de resolução já vistos.

Seja $A \cdot X = B$ um sistema linear complexo, ou seja, um sistema linear cujas matrizes A , X e B são complexas. Assim, existem matrizes reais M , N , C , D , S e T tais que

$$\begin{cases} A = M + i \cdot N, \\ B = C + i \cdot D, \\ X = S + i \cdot T, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A \cdot X &= B \\ \Rightarrow (M + i \cdot N) \cdot (S + i \cdot T) &= C + i \cdot D \\ \Rightarrow (M \cdot S - N \cdot T) + i \cdot (N \cdot S + M \cdot T) &= C + i \cdot D \\ \Rightarrow \begin{cases} M \cdot S - N \cdot T = C \\ N \cdot S + M \cdot T = D \end{cases} \end{aligned}$$

Podemos então reescrever o sistema matricialmente da seguinte forma:

$$\left[\begin{array}{c|c} M & -N \\ \hline N & M \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}$$

Assim, temos agora um sistema real que já sabemos como podemos resolver.

Vamos aplicar num exemplo para entendermos como funciona?

Exemplo: Reescreva o sistema linear complexo.

$$\begin{cases} (1 + 2 \cdot i) \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = -5 + 4 \cdot i \\ -x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$$

na forma de um sistema real.

Resolução: Podemos escrever o sistema da forma matricial.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1+2 \cdot i & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} -5+4 \cdot i \\ -1 \end{bmatrix}}_B$$

$$\Rightarrow \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_N + i \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_M \right) \cdot \left(\underbrace{\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}}_S + i \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}}_T \right) = \underbrace{\begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}}_C + i \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}}_D$$

Reescrevendo o sistema, na forma real temos

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ \hline t_1 \\ t_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} -5 \\ -1 \\ \hline 4 \\ 0 \end{array} \right]$$

Agora podemos resolver esse sistema 4×4 utilizando um dos métodos já

vistos. A solução para tal sistema é $\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \hline t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \hline 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, ou seja, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ -1+i \end{bmatrix}$.

LEITURA COMPLEMENTAR

ORIGEM DOS SISTEMAS LINEARES E DETERMINANTES

Hygino H. Domingues

* Enviado pelo usuário Jaime Batista

Na matemática ocidental antiga são poucas as aparições de sistemas de equações lineares. No Oriente, contudo, o assunto mereceu atenção bem maior. Com seu gosto especial por diagramas, os chineses representavam os sistemas lineares por meio de seus coeficientes escritos com barras de bambu sobre os quadrados de um tabuleiro. Assim acabaram descobrindo o método de resolução por eliminação – que consiste em anular coeficientes por meio de operações elementares. Exemplos desse procedimento encontram-se nos nove capítulos sobre a arte da matemática, um texto que data provavelmente do século 111 a.C.

Mas foi só em 1683, num trabalho do japonês Seki Kowa, que a ideia de determinante (como polinômio que se associa a um quadrado de números) veio à luz. Kowa, considerado o maior matemático japonês do século XVII, chegou a essa noção através do estudo de sistemas lineares, sistematizando o velho procedimento chinês (para o caso de duas equações apenas).

O uso de determinantes no Ocidente começou dez anos depois num trabalho de Leibniz, ligado também a sistemas lineares. Em resumo, Leibniz estabeleceu a condição de compatibilidade de um sistema de três equações a duas incógnitas em termos do determinante de ordem 3 formado pelos coeficientes e pelos termos independentes (este determinante deve ser nulo). Para tanto criou até uma notação com índices para os coeficientes: o que hoje, por exemplo, escreveríamos como a_{12} , Leibniz indicava por 12.

A conhecida regra de Cramer para resolver sistemas de n equações a n incógnitas, por meio de determinantes, é na verdade uma descoberta do escocês Colin Maclaurin (1698-1746), datando provavelmente de 1729, embora só publicada postumamente em 1748 no seu *Treatise of algebra*. Mas o nome do suíço Gabriel Cramer (1704-1752) não aparece nesse episódio de maneira totalmente gratuita. Cramer também chegou à regra (independentemente), mas depois, na sua *Introdução à análise das curvas planas* (1750), em conexão com o problema de determinar os coeficientes da cônica geral $A + By + Cx + Dy^2 + Exy + x^2 = 0$.

O francês Étienne Bézout (1730-1783), autor de textos matemáticos de sucesso em seu tempo, sistematizou em 1764 o processo de estabelecimento dos sinais dos termos de um determinante. E coube a outro francês, Alexandre Vandermonde (1735-1796), em 1771, empreender a primeira abordagem da teoria dos determinantes independente do estudo dos sistemas lineares – embora também os usasse na resolução destes sistemas. O importante teorema de Laplace, que permite a expansão de um determinante através dos menores de r filas escolhidas e seus respectivos complementos algébricos, foi demonstrado no ano seguinte pelo próprio Laplace num artigo que, a julgar pelo título, nada tinha a ver com o assunto: “Pesquisas sobre o cálculo integral e o sistema do mundo”.

O termo determinante, com o sentido atual, surgiu em 1812 num trabalho de Cauchy sobre o assunto. Neste artigo, apresentado à Academia de Ciências, Cauchy sumariou e simplificou o que era conhecido até então sobre determinantes, melhorou a notação (mas a atual com duas barras verticais ladeando o quadrado de números só surgiria em 1841 com Arthur Cayley) e deu uma demonstração do teorema da multiplicação de determinantes – meses antes J. F. M. Binet (1786-1856) dera a primeira demonstração deste teorema, mas a de Cauchy era superior.

Além de Cauchy, quem mais contribuiu para consolidar a teoria dos determinantes foi o alemão Carl G. J. Jacobi (1804-1851), cognominado às vezes “o grande algorista”. Deve-se a ele a forma simples como essa teoria se apresenta hoje elementarmente. Como algorista, Jacobi era um entusiasta da notação de determinante, com suas potencialidades. Assim, o importante conceito de jacobiano de uma função, salientando um dos pontos mais característicos de sua obra, é uma homenagem das mais justas.

FONTE: Disponível em: <<http://www.somatematica.com.br/historia/sistemas.php>>. Acesso em: 15 maio 2011.

RESUMO DO TÓPICO 4

Vamos, agora, rever resumidamente o conteúdo estudado neste quarto tópico.

- MÉTODO ITERATIVO DE RESOLUÇÃO: fornece uma sequência de aproximações para a solução, obtidas das anteriores pela repetição do mesmo processo (processo iterativo), até atingir a tolerância desejada (erro).
- Método Iterativo de Jacobi: Na primeira iteração ($k=0$), consideraremos $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \dots = x_n^{(0)} = 0$ por conveniência. Para $k>0$,

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

- O erro em cada etapa é dado por:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_{x_1}^{(k)} = \|x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)}\| \\ \Delta_{x_2}^{(k)} = \|x_2^{(k)} - x_2^{(k-1)}\| \\ \vdots \\ \Delta_{x_n}^{(k)} = \|x_n^{(k)} - x_n^{(k-1)}\| \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta^{(k)} = \max \left\{ \Delta_{x_1}^{(k)}, \Delta_{x_2}^{(k)}, \dots, \Delta_{x_n}^{(k)} \right\}$$

- Método Iterativo de Gauss-Siedel: acelera o método de Jacobi.
- Na primeira iteração ($k=0$), consideraremos $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \dots = x_n^{(0)} = 0$ por conveniência. Para $k>0$,

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)} = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k-1)}) \\ \vdots \\ x_n^{(k)} = \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - a_{n3}x_3^{(k)} - \dots - a_{n(n-1)}x_{n-1}^{(k)}) \end{cases}$$

- O erro em cada etapa é obtido da mesma maneira que pelo método de Jacobi.
- Critérios de convergência: garantem a convergência ou não das soluções obtidas via um método iterativo para as soluções exatas do sistema independe desta escolha.
- Sistemas lineares complexos: Se $A \cdot X = B$ for um sistema linear complexo, existem matrizes reais M, N, C, D, S e T tais que $A = M + iN$, $B = C + iD$ e $X = S + iT$. Podemos então reescrever o sistema matricialmente como $\begin{bmatrix} M & -N \\ N & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}$ e resolvê-lo como um sistema linear real.

AUTOATIVIDADE



Vamos fixar o conteúdo que estudamos neste tópico por meio de alguns exercícios.

- 1 Calcule o sistema linear através do método de Jacobi e, em seguida, pelo método de Gauss-Seidel, com precisão de 10^{-2} .

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,792 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix}$

- 2 Calcule o sistema linear através do método de Gauss-Seidel, formado pela situação-problema descrita a seguir. Note que há partes do exercício que precisam ser completadas. Preencha-as com base nas informações da tabela. Em um concurso em que os candidatos eram avaliados por 4 provas de pesos diferenciados, obteve-se o quadro informativo abaixo. Qual é o peso de cada prova para obter as médias especificadas?

Candidatos	Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 4	Média
Candidato 1	8,7	6,2	7,5	5,1	7,35
Candidato 2	5,6	9,2	6,1	7,5	6,97
Candidato 3	5,1	4,5	9,4	4,5	5,72
Candidato 4	6,1	4,5	5,3	8,9	5,74

Sistema:

$$\begin{cases} 8,7x_1 + 6,2x_2 + \underline{\quad}x_3 + 5,1x_4 = \underline{\quad} \\ \underline{\quad}x_1 + 9,2x_2 + 6,1x_3 + \underline{\quad}x_4 = 6,97 \\ 5,1x_1 + \underline{\quad}x_2 + 9,4x_3 + 4,5x_4 = 5,72 \\ \underline{\quad}x_1 + \underline{\quad}x_2 + \underline{\quad}x_3 + \underline{\quad}x_4 = \underline{\quad} \end{cases}, \text{ para um erro menor ou igual a } 10^{-2}.$$

I	X_1	X_2	X_3	X_4	Δ_{x_1}	Δ_{x_2}	Δ_{x_3}	Δ_{x_4}	Δ_{Total}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0,845	0,243		-0,072					
2			0,091						
3		0,429		-0,028					
4	0,430	0,422	0,187	0,026					
5	0,368		0,210						
6		0,350		0,101					
7	0,347		0,220						
8	0,361	0,298	0,215						
9	0,377	0,289							
10				0,111					
11		0,289							

3 Resolva os seguintes sistemas complexos:

a)
$$\begin{cases} (3+4i) \cdot x_1 + x_2 = -2 + 3i \\ ix_1 + (-2-3i) \cdot x_2 = 13 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 = 2i \end{cases}$$

UNIDADE 2

EQUAÇÕES NÃO LINEARES E INTERPOLAÇÃO

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Nessa unidade vamos:

- localizar as raízes de equações e sistemas não lineares, tanto reais como complexos, e obter aproximações para tais valores quando não for possível encontrá-los explicitamente;
- identificar a melhor função que se aproxima de outra para estimar valores;
- estimar raízes de equações polinomiais;
- entender como se dá a interpolação de valores através de métodos numéricos e utilizá-los com propriedade;
- trabalhar com interpolação inversa;
- familiarizar-se com demonstrações matemáticas.

PLANO DE ESTUDOS

A Unidade 2 está dividida em quatro tópicos. Em cada um deles você encontrará exemplos que lhe proporcionarão familiaridade com o conteúdo e exercícios que o/a ajudarão na apropriação dos temas estudados.

TÓPICO 1 – ZEROS DAS FUNÇÕES

TÓPICO 2 – SISTEMAS DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

TÓPICO 3 – EQUAÇÕES POLINOMIAIS

TÓPICO 4 – INTERPOLAÇÃO

ZEROS DAS FUNÇÕES

1 INTRODUÇÃO

Um dos problemas que mais frequentemente ocorrem em trabalhos científicos de diferentes áreas é encontrar números x que zerem uma determinada função f , isto é, tais que $f(x) = 0$.

Por exemplo, no circuito a seguir, conforme Ruggiero e Lopes (1997), a função g que fornece a tensão em função da corrente não é uma função linear.



De acordo com a lei de Kirchoff, dados E , R e conhecendo a característica do dispositivo $v = g(i)$, temos que resolver a equação $E - R \cdot i - g(i) = 0$ que, na prática, se parece com um polinômio de grau 3.

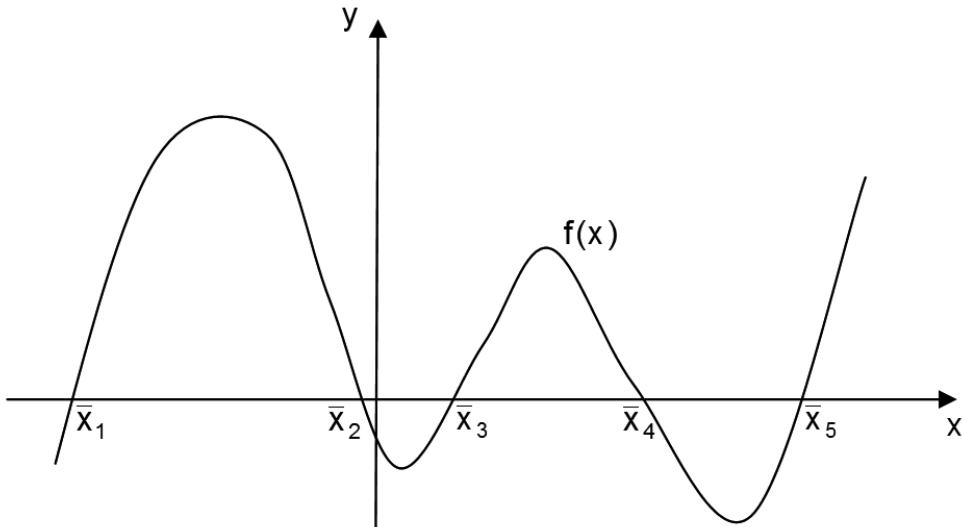
Neste tópico, estudaremos diferentes métodos iterativos de resolução de equações não lineares como esta, mas, antes, precisamos estabelecer alguns conceitos.



Não se preocupe se não entender o exemplo anterior. Ele está aqui apenas para mostrar a você a utilização dos métodos numéricos nos problemas do dia a dia.

Inicialmente, vamos entender o que são zeros de funções: dada uma função qualquer f , todos os números \bar{x} para os quais $f(\bar{x}) = 0$ são chamados de **zeros da função f** ou ainda, de **raízes da função f** . Note que não demos maiores detalhes sobre f nem sobre \bar{x} : se são reais ou complexos, se f é linear ou não linear. Na verdade, o caso em que f é linear já foi estudado na unidade anterior. Aqui, estaremos interessados em estudar funções reais f não lineares com zeros reais \bar{x} .

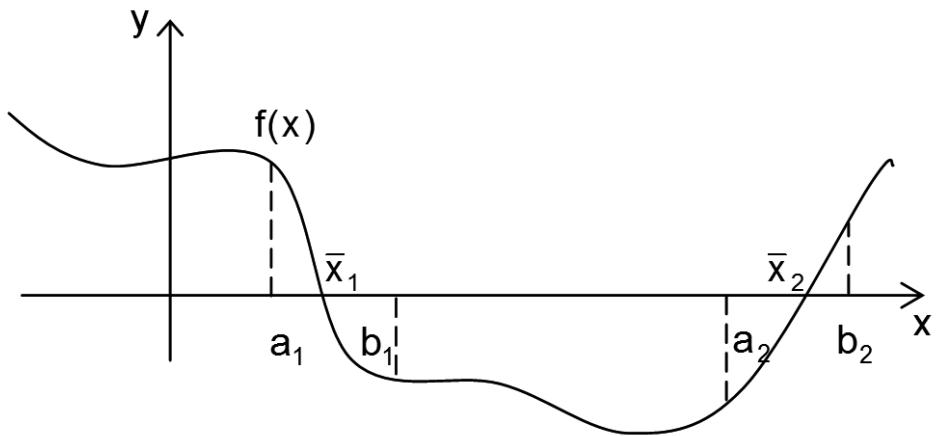
Como encontrar esses valores? Graficamente, são os valores x para os quais o gráfico da função f intercepta o eixo Ox ($y = 0$).



Analiticamente, existem algumas fórmulas que nos permitem encontrar os zeros para determinados tipos de funções não lineares, como, por exemplo, a fórmula de Bhaskara para funções quadráticas (que obviamente não são lineares). Entretanto, para outros tipos de funções não é tão fácil encontrarmos esses valores e acabamos tendo que nos contentar, muitas vezes, com aproximações. A boa notícia é que na maioria das vezes isso é suficiente, uma vez que conseguimos valores tão próximos dos zeros quanto for necessário, através dos métodos iterativos que estudaremos.

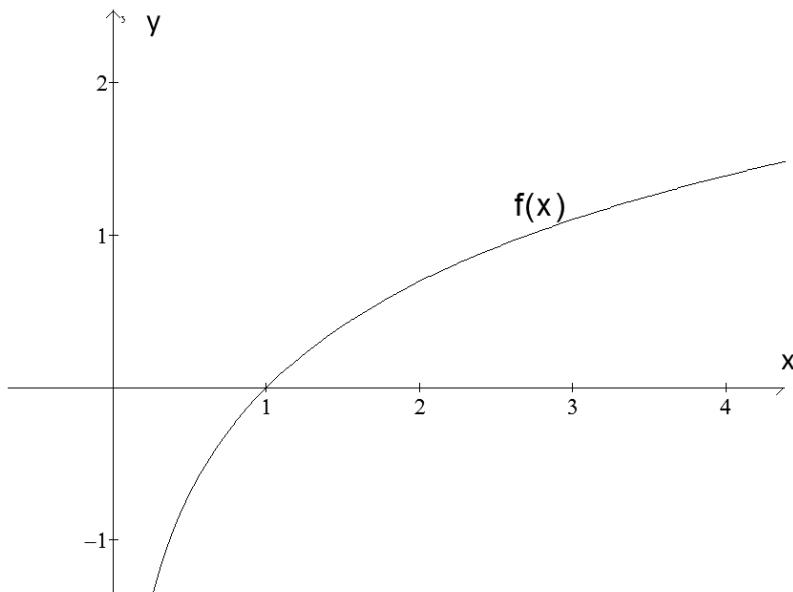
2 ISOLAMENTO DAS RAÍZES

Dada uma função real f contínua não linear qualquer, o primeiro passo para encontrarmos aproximações satisfatórias para cada uma de suas raízes \bar{x} é conseguir determinar um intervalo $[a, b]$ que a contenha.



Uma forma de fazermos isso é traçarmos o gráfico da função e analisarmos os pontos em que a curva intercepta o eixo OX.

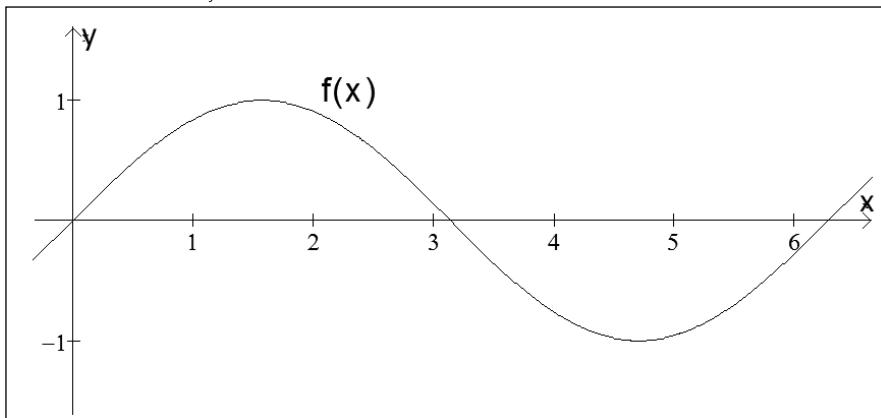
Exemplo 1: Consideremos a função $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x)$. Vejamos a seguir o gráfico da função f .



É fácil ver que a curva intercepta o eixo OX exatamente no ponto $x = 1$. Assim, podemos considerar qualquer intervalo real $[a, b]$ que contenha o número 1.

Exemplo 2:

GRÁFICO 1 – FUNÇÃO SENO



FONTE: A autora

O Gráfico 1 representa a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin x$.

Podemos notar que os intervalos $[-0,5;0,5]$, $[3;3,5]$ e $[6;6,5]$ possuem zeros da função seno.

Algumas vezes, porém, não é tão fácil esboçar o gráfico de uma função (por exemplo, a função real $f(x) = (x + 1)^2 e^{(x^2 - 2)} - 1$). Nesses casos, podemos tentar rearranjar a expressão $f(x) = 0$ como uma igualdade entre duas outras funções $g_1(x) = g_2(x)$, cujos gráficos são mais fáceis de serem esboçados. Os zeros de f serão exatamente os pontos em que os gráficos de g_1 e g_2 se interceptam.

Exemplo 3: Vamos estudar a função citada no parágrafo anterior: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x + 1)^2 e^{(x^2 - 2)} - 1$.

Inicialmente, fazemos $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0$$

$$\Rightarrow (x + 1)^2 e^{(x^2 - 2)} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 1)^2 e^{(x^2 - 2)} = 1$$

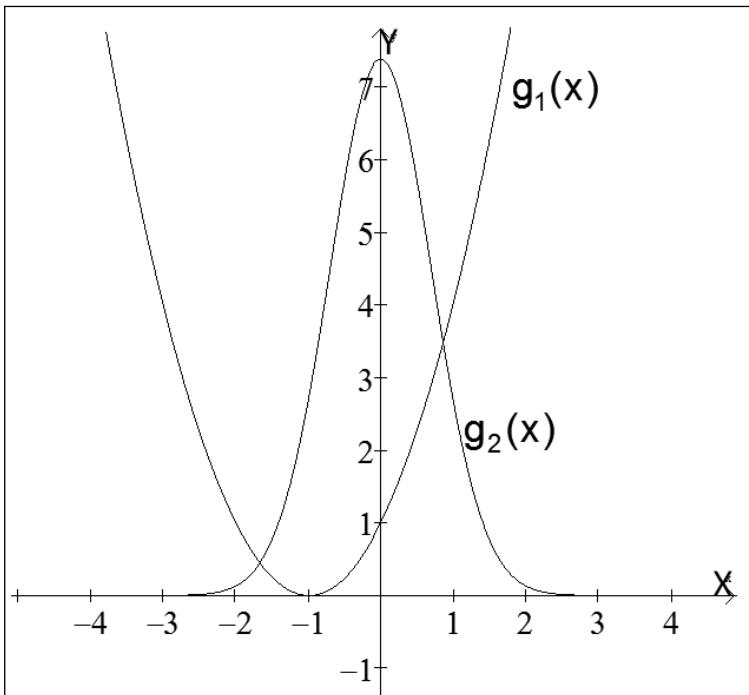
$$\Rightarrow (x + 1)^2 = \frac{1}{e^{(x^2 - 2)}}$$

$$\Rightarrow (x + 1)^2 = (e^{(x^2 - 2)})^{-1}$$

$$\Rightarrow (x + 1)^2 = e^{-1 \cdot (x^2 - 2)}$$

$$\Rightarrow (x + 1)^2 = e^{(2 - x^2)}$$

Consideremos agora as duas funções $g_1, g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas como $g_1(x) = (x+1)^2$ e $g_2(x) = e^{(2-x^2)}$. Note que, pela igualdade anterior, $g_1(x) = g_2(x)$. Vamos então traçar os gráficos de ambas as funções.



As curvas das funções g_1 e g_2 se interceptam em dois pontos, pertencentes aos intervalos $[-2, -1]$ e $[0, 5; 1, 5]$. Podemos então concluir que ambos os intervalos possuem raízes de f . Mas atenção: as raízes de f **não são** as raízes de g_1 e g_2 , e sim os pontos de intersecção destas funções!



Tente traçar o gráfico das funções reais $f(x) = (x + 1)^2 e^{(2-x^2)} - 1$, $g_1(x) = (x+1)^2$ e $g_2(x) = e^{(2-x^2)}$ com o auxílio de algum software, por exemplo, o Winplot. Verifique que f realmente possui seus zeros nos pontos em que g_1 e g_2 se interceptam.

Ao contrário dos exemplos anteriores, no exemplo 3 é bastante difícil precisar os exatos valores de x para os quais $f(x) = 0$. Esse exemplo ilustra bem a necessidade de estudarmos métodos numéricos que nos permitam determinar os zeros de funções não lineares. Nesse sentido, veja que interessante o resultado a seguir:

Dado um intervalo $[a, b]$ e uma função f contínua neste intervalo, se $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe pelo menos uma raiz \bar{x} de f em $[a, b]$.

Observe que, para que $f(a) \cdot f(b) < 0$, esses valores necessariamente precisam ter sinais trocados, isto é, ou $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$ ou $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Esse resultado nos dá um caminho simples de isolarmos raízes de f . Voltaremos para os exemplos anteriores:

Exemplo 1: Sabemos que a função $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x)$ é contínua em $(0, \infty)$. Consideraremos então alguns valores $x \in (0, \infty)$ e analisemos o sinal de f aplicada nestes valores:

x	0,5	1,5	2,5	3,5	10	1000	100000	1000000
$f(x)$	-0,693	0,405	0,916	1,253	2,303	6,908	11,513	13,816

Note que a função mudou de sinal apenas no intervalo $[0,5; 1,5]$:

$$f(0,5) \cdot f(1,5) = \ln(0,5) \cdot \ln(1,5) = -0,693 \cdot 0,405 < 0$$

Logo existe pelo menos um zero $\bar{x} \in [0,5; 1,5]$ para a função f . Na verdade sabemos mais: como a função logaritmo neperiano é crescente ($f'(x) = \frac{1}{x} > 0, \forall x \in (0, +\infty)$), esse ponto \bar{x} é o único zero da função f .



O fato de a derivada de uma função preservar o sinal dentro de um determinado intervalo significa que a função é sempre crescente ou decrescente neste intervalo. Isso nos garante que haverá apenas uma raiz da função neste intervalo. Se achar necessário, volte ao caderno de Cálculo e revise o conceito de derivada.

Exemplo 2: Voltando à função seno $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin x$, consideraremos alguns valores $x \in \mathbb{R}$ e analisemos o sinal de f aplicada nestes valores:

x	-0,5	0,5	1,5	3,0	3,5	5,0	6,0	6,5	7,0
$f(x)$	-0,479	0,479	0,997	0,141	-0,351	-0,959	-0,279	0,215	0,657

Note que a função mudou de sinal nos intervalos $[-0,5; 0,5]$, $[3,0; 3,5]$ e $[6,0; 6,5]$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(-0,5) \cdot f(0,5) = \sin(-0,5) \cdot \sin(0,5) = -0,479 \cdot 0,479 < 0 \\ f(3,0) \cdot f(3,5) = \sin(3,0) \cdot \sin(3,5) = 0,141 \cdot (-0,351) < 0 \\ f(6,0) \cdot f(6,5) = \sin(6,0) \cdot \sin(6,5) = -0,279 \cdot 0,215 < 0 \end{array} \right.$$

Assim, existem pontos $-0,5 < \bar{x}_1 < 0,5$, $3 < \bar{x}_2 < 3,5$ e $6 < \bar{x}_3 < 6,5$ tais que $f(\bar{x}_1) = f(\bar{x}_2) = f(\bar{x}_3) = 0$.

Vamos agora analisar a derivada de f , $f'(x) = \cos x$. Com base no gráfico desta função, e lembrando que $\pi \approx 3,1416$, temos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x) = \cos x > 0, \quad \forall x \in (-0,5; 0,5) \\ f'(x) = \cos x < 0, \quad \forall x \in (3,0; 3,5) \\ f'(x) = \cos x > 0, \quad \forall x \in (6,0; 6,5) \end{array} \right.$$

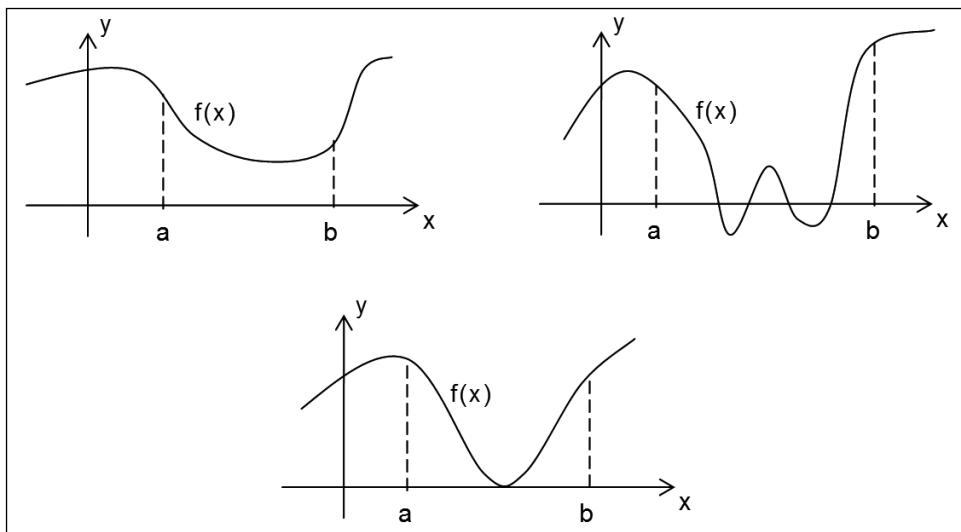
Logo existe apenas uma raiz de f em cada um destes intervalos. De fato, sabemos que $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = \pi \approx 3,1416$ e $\bar{x}_3 = 2\pi \approx 6,2832$ são zeros da função seno.

Exemplo 3: Voltaremos à função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x+1)^2 e^{(x^2-2)} - 1$ e observemos a tabela a seguir.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	4385,5	6,4	-1,0	-0,9	0,5	65,5	17545,1

A função possui zeros nos intervalos $[-2, -1]$ e $[0, 1]$, conforme vimos no gráfico.

Obs.: Se dado um intervalo $[a, b]$ onde f é contínua e $f(a) \cdot f(b) > 0$, não podemos tirar nenhuma conclusão: f pode não ter raízes neste intervalo, f pode ter uma raiz neste intervalo ou mesmo, várias raízes, conforme você pode observar nos exemplos gráficos a seguir.



Exemplo 4: Consideremos o polinômio $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $p(x) = x^2 + 5x + \frac{25}{4}$.

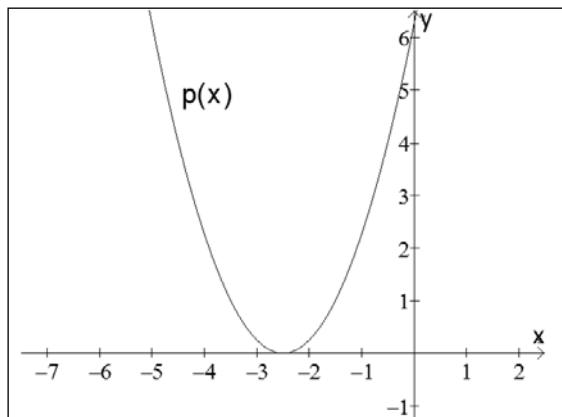
Vamos estudar o sinal da função.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$p(x)$	5	2	1	2	5	10	17	26	37

O estudo de sinais não nos leva a nenhuma conclusão, pois não houve alteração de sinal em nenhum intervalo. Entretanto, sabemos que

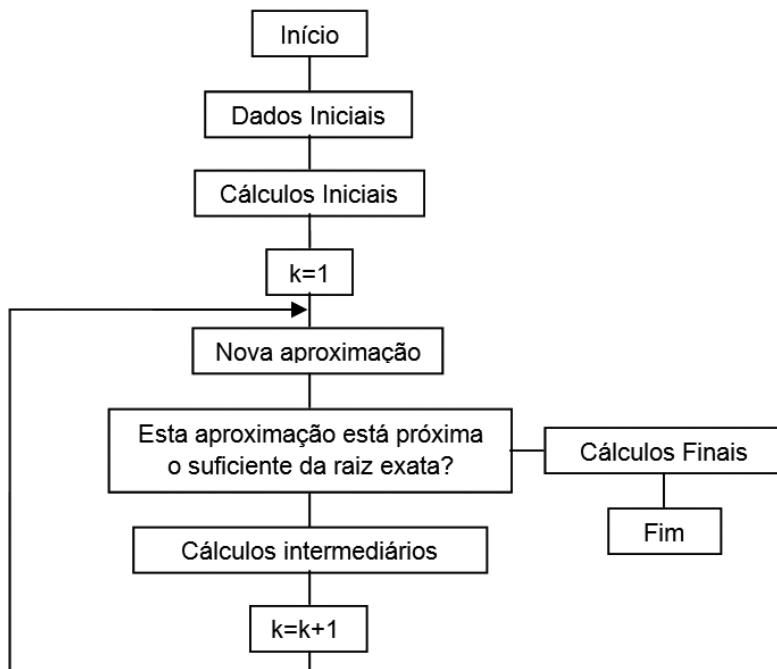
$$p(x) = x^2 + 5x + \frac{25}{4} = \left(x + \frac{5}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{5}{2}\right).$$

Logo, o polinômio possui uma raiz de multiplicidade 2 igual a $-5/2$:



3 REFINAMENTO E CRITÉRIO DE PARADA

Dada uma função f , já estudamos algumas formas de obtermos intervalos reais onde f é contínua e que contenham pelo menos um zero de f . A ideia agora é, de posse destes intervalos, aplicarmos métodos numéricos que reduzam os seus tamanhos de forma sistemática, obtendo uma boa aproximação para os zeros de f . De acordo com Ruggiero e Lopes (1997), existem vários métodos que fazem esta aproximação e eles diferem entre si pela maneira como efetuam este refinamento. Entretanto, todos eles respeitam o seguinte processo de resolução:



Todo este processo serve para responder a uma única pergunta: A aproximação x_k está próxima o suficiente da raiz exata \bar{x} ? Para responder a esta pergunta, precisamos saber primeiro o que significa “estar próximo o suficiente”. Na prática, dado um número $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, diremos que x_k (para algum k) está próximo o suficiente da raiz exata \bar{x} se $\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} < \varepsilon$. Neste caso, tomaremos x_{k+1} como a aproximação suficiente próxima à raiz \bar{x} .

Os métodos numéricos que estudaremos foram desenvolvidos a fim de, depois de uma determinada iteração, satisfazer a condição acima. Em outras palavras, este será o seu critério de parada.

Algumas observações precisam ser feitas:

- 1) Chamamos esta razão acima de erro relativo.

- 2) Ao implementarmos um método computacionalmente, devemos considerar o erro relativo escrito como $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon \cdot \max\{1, |x_{k+1}|\}$. Isso garante que o processo sempre estacionará, mesmo que x_{k+1} seja muito pequeno.
- 3) Quando nada for mencionado, é de praxe considerar $\varepsilon = 10^{-m}$, onde m é o número máximo de casas decimais que queremos corretas no resultado.



Em programas computacionais, também devemos estipular um número máximo de iterações K a serem feitas, para que não corramos o risco de o computador entrar em *looping*.

4 MÉTODOS ITERATIVOS PARA OBTENÇÃO DE RAÍZES

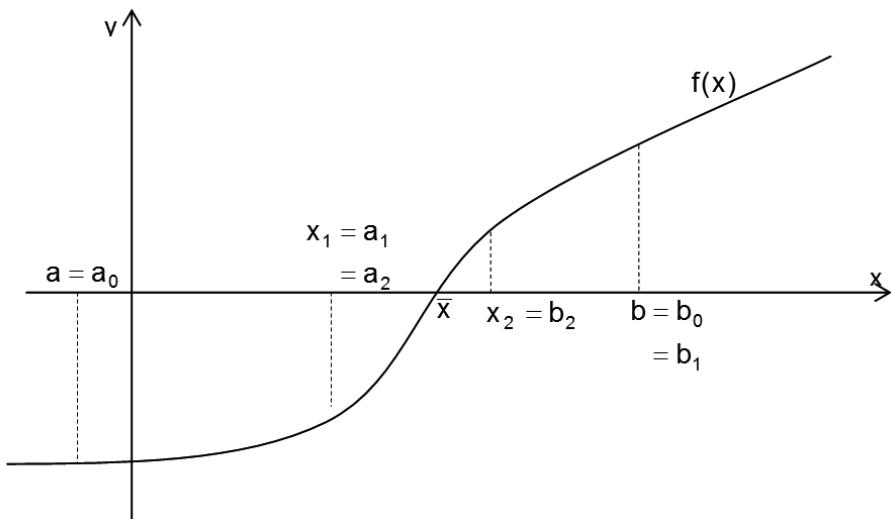
4.1 MÉTODO DA BISSECÇÃO

Consideremos uma função f e um intervalo $[a, b]$ para o qual f é contínua em todos os pontos do intervalo e $f(a) \cdot f(b) < 0$. O método da bissecção consiste em dividir o intervalo $[a, b]$ ao meio sistematicamente até que, para um dado $\varepsilon > 0$, o critério de parada seja satisfeito. Vamos entender melhor como isso irá acontecer.

Para $k = 0$, consideraremos $a_0 = a$ e $b_0 = b$. Tomamos $x_1 = \frac{(a+b)}{2}$. Então uma das três situações a seguir pode ocorrer:

- 1) A primeira situação que pode ocorrer é $f(x_1) = 0$. Neste caso, tivemos sorte e encontramos exatamente a raiz de f , $\bar{x} = x_1$, e não há mais nada a ser feito.
- 2) Outra possibilidade é $f(a) \cdot f(x_1) < 0$. Então repetimos o procedimento para o intervalo $[a_1, b_1]$, com $a_1 = a$ e $b_1 = x_1$.
- 3) A terceira situação é $f(a) \cdot f(x_1) > 0$. Neste caso, $f(a)$ e $f(x_1)$ tem o mesmo sinal e, portanto, $f(x_1) \cdot f(b) < 0$. Repetimos assim o procedimento para o intervalo $[a_1, b_1]$, com $a_1 = x_1$ e $b_1 = b$.

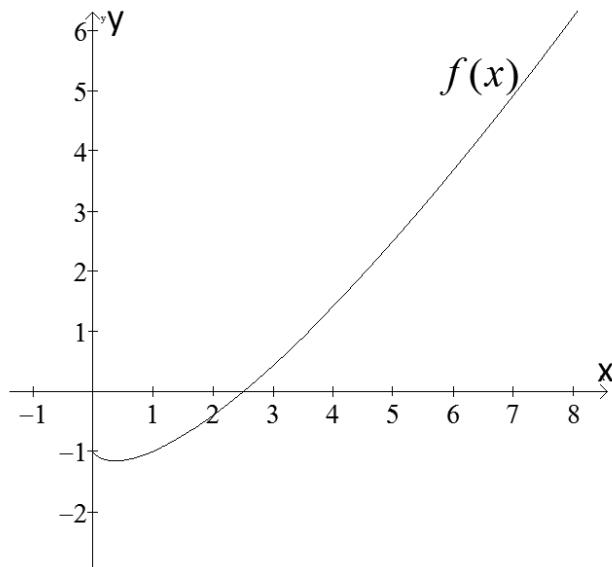
Observe que, desta forma, o intervalo $[a_k, b_k]$ vai ficando cada vez menor e a raiz de f continua pertencente ao intervalo. Iremos proceder da mesma maneira repetidas vezes, até encontrarmos a raiz de f ou satisfazermos o critério de parada.



Exemplo 1: Consideremos a função real $f(x) = x \cdot \log(x) - 1$, e vamos estudar o seu sinal em alguns pontos:

x	1	2	3	4
f(x)	-1	-0,398	0,431	1,408

GRÁFICO 2 – GRÁFICO DA FUNÇÃO: $f(x) = x \cdot \log(x) - 1$



FONTE: A autora

Note que função f há uma raiz no intervalo $(2,3)$. Além disso, a função é contínua e crescente neste intervalo, implicando que esta raiz é única em $(2,3)$. Vamos aproximá-la através do método da bissecção. Como consideraremos até 3 casas decimais, utilizaremos a precisão 10^{-3} .

$$\begin{array}{l} \text{Passo } k = 0: \\ \left\{ \begin{array}{l} a_0 = 2 \\ b_0 = 3 \\ x_1 = \frac{(a_0 + b_0)}{2} = \frac{(2+3)}{2} = 2,5 \end{array} \right. \end{array}$$

Passo $k = 1$:

Conhecidos os valores de a_0 , b_0 e x_1 , vamos ver que valores a função assume nestes pontos:

$$\begin{cases} f(a_0) = f(2) = 2 \cdot \log 2 - 1 = -0,398 < 0 \\ f(b_0) = f(3) = 3 \cdot \log 3 - 1 = 0,431 > 0 \\ f(x_1) = f(2,5) = 2,5 \cdot \log 2,5 - 1 = -0,005 < 0 \end{cases}$$

Observe que x_1 e b_0 têm sinais opostos. Assim

$$\begin{cases} a_1 = x_1 = 2,5 \\ b_1 = b_0 = 3 \end{cases} \text{ e } x_2 = \frac{(a_1 + b_1)}{2} = \frac{(2,5+3)}{2} = 2,75.$$

Vamos verificar o erro relativo, para ver se prosseguimos com nosso método ou se já encontramos uma aproximação razoável para a raiz de f .

$$\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} = \frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} = \frac{|2,75 - 2,5|}{|2,75|} = 0,091, \text{ que é maior do que } 10^{-3}.$$

Passo $k = 2$:

$$\begin{cases} f(a_1) = -0,005 < 0 \\ f(b_1) = 0,431 > 0 \Rightarrow x_2 \text{ e } a_1 \text{ têm sinais opostos} \\ f(x_2) = 0,208 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = a_1 = 2,5 \\ b_2 = x_2 = 2,75 \end{cases}$$

$$\text{Então } x_3 = \frac{(a_2 + b_2)}{2} = \frac{(2,5 + 2,75)}{2} = 2,625$$

$$\text{e } \frac{|x_{K+1} - x_K|}{|x_{K+1}|} = \frac{|x_3 - x_2|}{|x_3|} = \frac{|2,625 - 2,75|}{|2,625|} = 0,048 \text{ que é maior do que } 10^{-3}.$$

Passo $k = 3$:

$$\begin{cases} f(a_2) = -0,005 < 0 \\ f(b_2) = 0,208 > 0 \Rightarrow x_3 \text{ e } a_2 \text{ têm sinais opostos} \\ f(x_3) = 0,100 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = a_2 = 2,5 \\ b_3 = x_3 = 2,625 \end{cases}$$

$$x_4 = \frac{(a_3 + b_3)}{2} = \frac{(2,5 + 2,625)}{2} = 2,563 \text{ e } \frac{|x_4 - x_3|}{|x_4|} = \frac{|2,563 - 2,625|}{|2,563|} = 0,024 > 10^{-3}.$$

Vamos preencher os valores encontrados até agora na tabela a seguir e prosseguir com o cálculo até que atinjamos a precisão desejada.

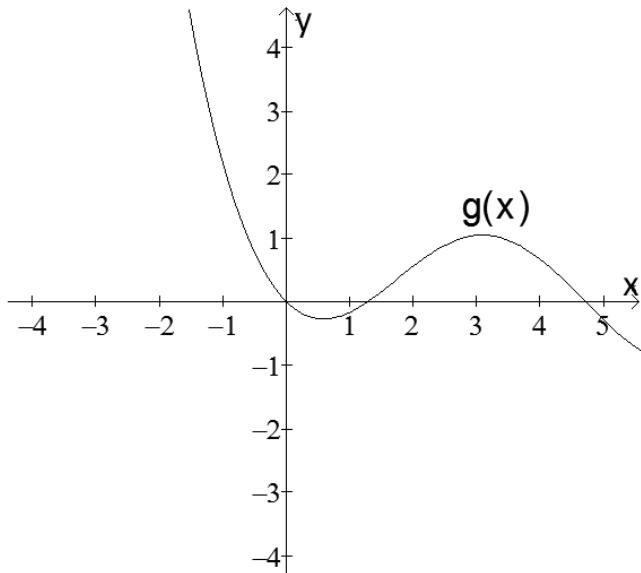
k	f(a_{k-1})	f(b_{k-1})	f(x_k)	a_k	b_k	x_{k+1}	Erro
0	-	-	-	2,000	3,000	2,500	-
1	-0,398	0,431	0,005	2,500	3,000	2,750	0,091
2	-0,005	0,431	0,208	2,500	2,750	2,625	0,048
3	-0,005	0,208	0,100	2,500	2,625	2,563	0,024
4	-0,005	0,100	0,048	2,500	2,563	2,532	0,012
5	-0,005	0,048	0,022	2,500	2,532	2,516	0,006
6	-0,005	0,022	0,008	2,500	2,516	2,508	0,003
7	-0,005	0,008	0,002	2,500	2,508	2,504	0,002
8	-0,005	0,002	-0,002	2,504	2,508	2,506	0,001
9	-0,002	0,002	0,000	2,506	2,506	2,506	0,000

Como $0 < 10^{-3}$, atingimos a resolução esperada e, portanto, o valor encontrado para aproximação da raiz \bar{x} é 2,506.

Exemplo 2: Consideremos agora a função real $g(x) = e^{-x} - \cos x$, e vamos estudar o seu sinal em alguns pontos do intervalo $[1,4]$:

x	1	2	3	4
g(x)	-0,17	0,55	1,04	0,67

Note que g tem uma raiz no intervalo $(1,2)$. Além disso, a função é contínua e crescente neste intervalo, implicando esta raiz ser única em $(1,2)$. Vamos aproximá-la através do método da bissecção. Como consideraremos até 2 casas decimais, queremos que a precisão seja de 10^{-2} .

GRÁFICO 3 – FUNÇÃO $g(x) = e^{-x} - \cos x$ 

FONTE: A autora

Passo k = 0:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 2 \\ x_1 = \frac{(a_0 + b_0)}{2} = \frac{(1+2)}{2} = 1,5 \end{cases}$$

Passo k = 1

Conhecidos os valores de a_0 , b_0 e x_1 , vamos ver que valores a função assume nestes pontos:

$$\begin{cases} g(a_0) = g(1) = e^{-1} - \cos(1) = -0,17 < 0 \\ g(b_0) = g(2) = e^{-2} - \cos(2) = 0,55 > 0 \\ g(x_1) = g(1,5) = e^{-1,5} - \cos(1,5) = 0,15 > 0 \end{cases}$$

Observe que x_1 e a_0 têm sinais opostos. Assim

$$\begin{cases} a_1 = a_0 = 1 \\ b_1 = x_1 = 1,5 \end{cases} \text{ e } x_2 = \frac{(a_1 + b_1)}{2} = \frac{(1+1,5)}{2} = 1,25 .$$

Vamos verificar o erro relativo para ver se prosseguimos com nosso método ou se paramos, por já encontrar uma aproximação razoável para a raiz de g.

$$\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} = \frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} = \frac{|1,25 - 1,5|}{|1,25|} = 0,2, \text{ que é maior do que } 10^{-2}.$$

Passo k = 2:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \Rightarrow g(a_1) = -0,17 < 0 \\ b_1 = 1,5 \Rightarrow g(b_1) = 0,15 > 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 \text{ e } b_1 \text{ têm sinais opostos} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = x_2 = 1,25 \\ b_2 = b_1 = 1,5 \end{cases}$$

$$x_2 = 1,25 \Rightarrow g(x_2) = -0,03 < 0$$

$$\text{Então } x_3 = \frac{(a_2 + b_2)}{2} = \frac{(1,25 + 1,5)}{2} = 1,38$$

$$\text{e } \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} = \frac{|x_3 - x_2|}{|x_3|} = \frac{|1,38 - 1,25|}{|1,38|} = 0,09 \text{ que é maior do que } 10^{-2}.$$

Passo k = 3:

$$\begin{cases} a_2 = 1,25 \Rightarrow g(a_2) = -0,03 < 0 \\ b_2 = 1,5 \Rightarrow g(b_2) = 0,15 > 0 \end{cases} \Rightarrow x_3 \text{ e } a_2 \text{ têm sinais opostos} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = a_2 = 1,25 \\ b_3 = x_3 = 1,38 \end{cases}$$

$$x_3 = 1,38 \Rightarrow g(x_3) = 0,06 > 0$$

$$x_4 = \frac{(a_3 + b_3)}{2} = \frac{(1,25 + 1,38)}{2} = 1,32 \text{ e } \frac{|x_4 - x_3|}{|x_4|} = \frac{|1,38 - 1,32|}{|1,32|} = 0,05 > 10^{-2}.$$

Vamos preencher os valores encontrados até agora na tabela a seguir e prosseguir com o cálculo até que atinjamos a precisão desejada.

K	g(a_{k-1})	g(b_{k-1})	g(x_k)	a_k	b_k	x_{k+1}	Erro
0	-	-	-	1,00	2,00	1,50	-
1	-0,17	0,55	0,15	1,00	1,50	1,25	0,20
2	-0,17	0,15	-0,03	1,25	1,5	1,38	0,09
3	-0,03	0,15	0,06	1,25	1,38	1,32	0,05
4	-0,03	0,06	0,02	1,25	1,32	1,29	0,02
5	-0,03	0,02	0	1,29	1,29	1,29	0,00

Como $g(x_5) = 0$, atingimos a resolução esperada, e o valor encontrado para aproximação da raiz \bar{x} é 1,29.

4.1.1 Convergência

Intuitivamente, percebemos que sempre encontraremos uma aproximação para o zero da função. Vamos mostrar que, de fato, este processo converge.



Caro/a acadêmico/a! A demonstração a seguir pode não parecer muito fácil. Por outro lado, acompanhando-a você terá uma boa ideia de como se demonstram as coisas em Matemática.

Pela forma como construímos os intervalos, temos duas sequências a_1, a_2, \dots, a_n e b_1, b_2, \dots, b_n , a primeira não decrescente e a segunda não crescente, ambas limitadas pelos extremos. Como $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, segue que

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{2^n} \right) = (b-a) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^n} \right) = 0 \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n\end{aligned}$$

Chamando de \bar{x} este limite comum, e visto que f é contínua,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \bar{x} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\bar{x}).$$

Por outro lado, $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$ para cada n . Então

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\bar{x}) \\ f(a_n) \cdot f(b_n) < 0, \forall n \end{array} \right\} \Rightarrow f(\bar{x}) \cdot f(\bar{x}) \leq 0 \Rightarrow [f(\bar{x})]^2 \leq 0.$$

Agora qualquer número elevado ao quadrado é não negativo. Ou seja, $[f(\bar{x})]^2 \leq 0 \Rightarrow f(\bar{x}) = 0$. Portanto, o limite \bar{x} é raiz da função f , como queríamos demonstrar.

O ponto negativo do método da bissecção é a lentidão para se encontrar uma aproximação satisfatória. Assim, é indicado apenas para diminuir o intervalo que contém a raiz.

4.2 MÉTODO DAS CORDAS

Seja f uma função contínua em um intervalo $[a, b]$, cuja derivada segunda neste intervalo possua sinal constante, e tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Já sabemos que esta última condição implica existir pelo menos uma raiz $\bar{x} \in [a, b]$ de f . Vamos supor também que esta raiz seja única neste intervalo.

A ideia do método das cordas é, ao invés de trabalhar com a curva $y = f(x)$, utilizar uma reta (corda) que passe pelos pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$. O ponto $x_1 \in [a, b]$ onde esta reta cortar o eixo OX será nossa primeira aproximação para a raiz $\bar{x} \in [a, b]$.

Observe que as hipóteses que impomos sobre o intervalo $[a, b]$ ($f(a) \cdot f(b) < 0$) e de f'' ter sinal constante nos garantem a existência deste ponto x_1 .

Vamos entender melhor, como isso funciona, utilizando o que aprendemos em Geometria Analítica sobre como encontrar a equação de uma reta r que passa por dois pontos. Você lembra como realizar este procedimento?

Sabemos que a equação geral pode ser dada por $y - f(a) = m \cdot (x - a)$, uma vez que $A \in r$, onde m é o coeficiente angular da reta e (x, y) é qualquer outro ponto da reta r . Como o ponto $B(b, f(b))$ também pertence a r , conseguimos obter facilmente o valor de m em função de A e B :

$$\left. \begin{array}{l} r : (y - f(a)) = m \cdot (x - a) \\ B(b, f(b)) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow (f(b) - f(a)) = m \cdot (b - a) \Rightarrow m = \frac{(f(b) - f(a))}{(b - a)}$$

Assim, a equação geral de r pode ser escrita como:

$$r : (y - f(a)) = \frac{(f(b) - f(a))}{(b - a)} \cdot (x - a)$$

Estamos interessados no ponto $X_1(x_1, 0)$ onde r cruza o eixo OX : essa será nossa primeira aproximação para a raiz de f .

$$\left. \begin{array}{l} r : (y - f(a)) = \frac{(f(b) - f(a))}{(b - a)} \cdot (x - a) \\ X_1(x_1, 0) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow (0 - f(a)) = \frac{(f(b) - f(a))}{(b - a)} \cdot (x_1 - a)$$

$$\Rightarrow (0 - f(a)) \cdot (b - a) = (f(b) - f(a)) \cdot (x_1 - a)$$

$$\Rightarrow -f(a) \cdot (b - a) = (f(b) - f(a)) \cdot x_1 - (f(b) - f(a)) \cdot a$$

$$\Rightarrow (f(b) - f(a))a - f(a)(b - a) = (f(b) - f(a))x_1$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{(f(b) - f(a))a - f(a) \cdot (b - a)}{(f(b) - f(a))}$$

$$\Rightarrow x_1 = a - \frac{f(a)}{(f(b) - f(a))} \cdot (b - a)$$

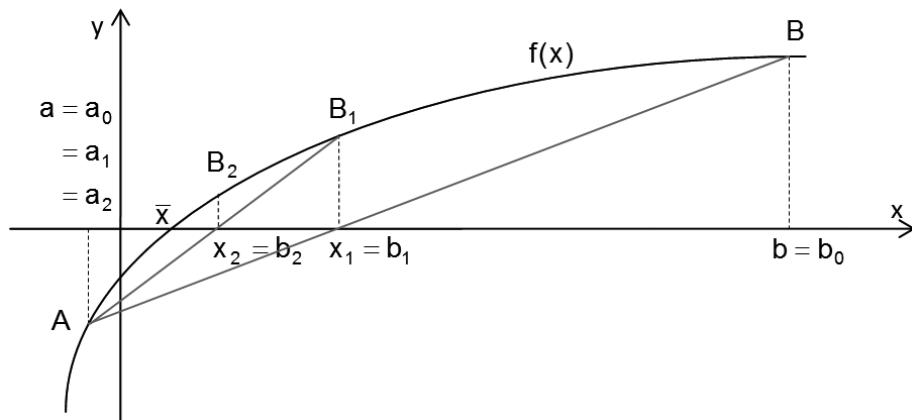
Assim, encontramos a primeira aproximação para a raiz \bar{x} de f no intervalo $[a, b]$.

Assim, como no método da bissecção, temos então três situações para analisar em relação à aproximação x_1 :

- 1) $f(x_1) = 0$: neste caso, x_1 é exatamente a raiz \bar{x} de f e, portanto, encontramos o que queríamos encontrar.
- 2) $f(a) \cdot f(x_1) < 0$: nesse caso, repetimos o procedimento ($k = 2$) para o intervalo $[a_1, b_1]$, com $a_1 = a$ e $b_1 = x_1$.
- 3) $f(a) \cdot f(x_1) > 0$: $f(a)$ e $f(x_1)$ tem o mesmo sinal e, portanto, $f(x_1) \cdot f(b) < 0$. Repetimos assim o procedimento ($k = 2$) para o intervalo $[a_1, b_1]$, agora com $a_1 = x_1$ e $b_1 = b$.

Novamente, procedendo iteradas vezes desta forma, vamos encontrando intervalos $[a_k, b_k]$ cada vez menores contendo a raiz de f e o processo só irá parar quando encontrarmos a raiz de f ou satisfizermos o critério de parada.

GRÁFICO 4 – MÉTODO DAS CORDAS



FONTE: A autora



Observe que o que decide qual das situações anteriores vai ocorrer não depende tanto da aproximação encontrada x_1 , mas sim dos sinais de $f(a)$, $f(b)$ e da derivada segunda de f . Essa verificação, aliás, é um exercício bem interessante. Tente fazer!

Vamos aos exemplos.

Exemplo 1: Voltemos à função real $f(x) = x \cdot \log(x) - 1$ já estudada anteriormente. Vimos que esta função tem uma única raiz no intervalo $(2, 3)$ (reveja o Gráfico 2 – método da bissecção). Novamente, utilizaremos a precisão 10^{-3} .

Passo $k = 0$: $\begin{cases} a_0 = 2 \Rightarrow f(a_0) = f(2) = -0,398 < 0 \\ b_0 = 3 \Rightarrow f(b_0) = f(3) = 0,431 > 0 \end{cases}$

Vamos calcular x_1 :

$$\begin{aligned} x_1 &= a_0 - \frac{f(a_0)}{(f(b_0) - f(a_0))} \cdot (b_0 - a_0) \\ &= 2 - \frac{f(2)}{(f(3) - f(2))} \cdot (3 - 2) \\ &= 2 - \frac{-0,398}{(0,431 - (-0,398))} \cdot (3 - 2) \\ &= 2,480 \end{aligned}$$

Passo $k = 1$:

Conhecido o valor de x_1 , vamos ver que valor a função assume neste ponto:

$$f(x_1) = f(2,480) = 2,480 \cdot \log 2,480 - 1 = -0,022 < 0$$

Note que $f(x_1)$ e $f(b_0)$ têm sinais opostos. Assim, estamos prontos para definir o nosso próximo intervalo de investigação:

$$\begin{cases} a_1 = x_1 = 2,480 \\ b_1 = b_0 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= a_1 - \frac{f(a_1)}{(f(b_1) - f(a_1))} \cdot (b_1 - a_1) \\ &= 2,480 - \frac{f(2,480)}{(f(3) - f(2,480))} \cdot (3 - 2,480) \\ &= 2,480 - \frac{-0,022}{(0,431 - (-0,022))} \cdot (3 - 2,480) \\ &= 2,505 \end{aligned}$$

Vamos verificar o erro relativo para ver se prosseguimos com nosso método ou se paramos por termos encontrado uma aproximação razoável para a raiz de f .

$$\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} = \frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} = \frac{|2,505 - 2,480|}{|2,505|} = 0,01, \text{ que é maior do que } 10^{-3}.$$

Passo k = 2:

Calculemos $f(x_2)$ para compararmos com $f(a_1)$ e $f(b_1)$

$$f(x_2) = f(2,505) = 2,505 \cdot \log 2,505 - 1 = -0,001 < 0$$

Novamente, $f(x_2)$ e $f(b_1)$ têm sinais opostos. Assim, o nosso próximo intervalo de investigação será:

$$\begin{cases} a_2 = x_2 = 2,505 \\ b_2 = b_1 = 3 \end{cases} \text{ e}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= a_2 - \frac{f(a_2)}{(f(b_2) - f(a_2))} \cdot (b_2 - a_2) \\ &= 2,505 - \frac{f(2,505)}{(f(3) - f(2,505))} \cdot (3 - 2,505) \\ &= 2,505 - \frac{-0,001}{(0,431 - (-0,001))} \cdot (3 - 2,505) \\ &= 2,506 \end{aligned}$$

Vamos verificar o erro relativo para ver se prosseguimos com nosso método ou se paramos por termos encontrado uma aproximação razoável para a raiz de f.

$$\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} = \frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} = \frac{|2,505 - 2,506|}{|2,506|} = 0,000, \text{ que é menor do que } 10^{-3}.$$

Portanto, encontramos a aproximação desejada para a raiz da função f: 2,506.

Exemplo 2: Voltemos agora à função real $g(x) = e^{-x} - \cos x$. Vimos que esta função tem uma única raiz no intervalo (1,2) (reveja o Gráfico 3 – Função $g(x) = e^{-x} - \cos x$). Vamos aproximá-la através do método das cordas, utilizando uma precisão de 10^{-2} .

Passo k=0:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \Rightarrow g(a_0) = g(1) = -0,17 < 0 \\ b_0 = 2 \Rightarrow g(b_0) = g(2) = 0,55 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= a_0 - \frac{g(a_0)}{(g(b_0) - g(a_0))} \cdot (b_0 - a_0) \\ &= 1 - \frac{g(1)}{(g(2) - g(1))} \cdot (2 - 1) \\ &= 1 - \frac{-0,17}{(0,55 - (-0,17))} \cdot (2 - 1) \\ &= 1,24 \end{aligned}$$

Passo k = 1:

Vamos ver que valor a função assume em x_1 :

$$g(x_1) = g(1,24) = e^{-1,24} - \cos(1,24) = -0,04 < 0$$

Note que $g(x_1)$ e $g(b_0)$ têm sinais opostos. Assim, estamos prontos para definir o nosso próximo intervalo de investigação:

$$\begin{cases} a_1 = x_1 = 1,24 \\ b_1 = b_0 = 2 \end{cases} \text{ e}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= a_1 - \frac{g(a_1)}{(g(b_1) - g(a_1))} \cdot (b_1 - a_1) \\ &= 1,24 - \frac{g(1,24)}{(g(2) - g(1,24))} \cdot (2 - 1,24) \\ &= 1,24 - \frac{-0,04}{(0,55 - (-0,04))} \cdot (2 - 1,24) \\ &= 1,28 \end{aligned}$$

Vamos verificar o erro relativo para ver se prosseguimos com nosso método ou se paramos por termos encontrado uma aproximação razoável para a raiz de g.

$$\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} = \frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} = \frac{|1,28 - 1,24|}{|1,28|} = 0,04, \text{ que é maior do que } 10^{-2}.$$

Passo k = 2:

Calculemos $g(x_2)$ para compararmos com $g(a_1)$ e $g(b_1)$

$$g(x_2) = g(1,28) = e^{1,28} - \cos(1,28) = 0,009$$

Segue que encontramos a aproximação para a raiz de g que desejávamos, dada a precisão de 10^{-2} : 1,28.

4.2.1 Ordem de convergência

Vamos mostrar que o método das cordas sempre fornece uma aproximação para o zero \bar{x} da f, desde que esta função satisfaça as condições iniciais: f contínua em $[a, b]$ com $f(a) \cdot f(b) < 0$, a derivada segunda neste intervalo possui sinal constante, e \bar{x} é a única raiz de f em $[a, b]$.



Caro/a acadêmico/a. Novamente, você pode sentir certa dificuldade de entender o que faremos a seguir, mas para valorizar seu processo de aprendizagem, recomendamos que você siga todos os passos deste item.

Consideremos a sequência de aproximações para \bar{x} , $(x_k)_{k \geq 1}$. Como esta sequência é limitada e monótona, sabemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ existe. Vamos chamá-lo de y . Obviamente, $y \in [a, b]$. Mais ainda: como a função f é contínua,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = y \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(y).$$

Por outro lado, para um dado k ,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(b_k) - f(x_k)} \cdot (b_k - x_k) \text{ ou } x_{k+1} = a_k - \frac{f(a_k)}{f(x_k) - f(a_k)} \cdot (x_k - a_k)$$

Calculando o limite de ambos os lados da igualdade,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(x_k - \frac{f(x_k)}{f(b) - f(x_k)} \cdot (b - x_k) \right) \\ &\downarrow \\ y &= \lim_{k \rightarrow \infty} x_k - \frac{\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k)}{\lim_{k \rightarrow \infty} (f(b) - f(x_k))} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} (b - x_k) \\ &\downarrow \\ y &= y - \frac{\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k)}{\lim_{k \rightarrow \infty} (f(b) - f(x_k))} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} (b - x_k) \\ &\downarrow \\ \frac{\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k)}{\lim_{k \rightarrow \infty} (f(b) - f(x_k))} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} (b - x_k) &= 0 \end{aligned}$$

Como $b \neq x_k$, segue que $\frac{\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k)}{\lim_{k \rightarrow \infty} (f(b) - f(x_k))} = 0$, ou seja, $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = 0$.

Vamos à outra igualdade:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(a - \frac{f(a)}{f(x_k) - f(a)} \cdot (x_k - a) \right)$$

$$y = a - \frac{f(a)}{\lim_{k \rightarrow \infty} (f(x_k) - f(a))} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} (x_k - a)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} - a = - \left(\frac{f(a)}{\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) - \lim_{k \rightarrow \infty} f(a)} \right) \cdot (\lim_{k \rightarrow \infty} x_k - \lim_{k \rightarrow \infty} a)$$

$$y - a = - \frac{f(a)}{(f(y) - f(a))} \cdot (y - a)$$

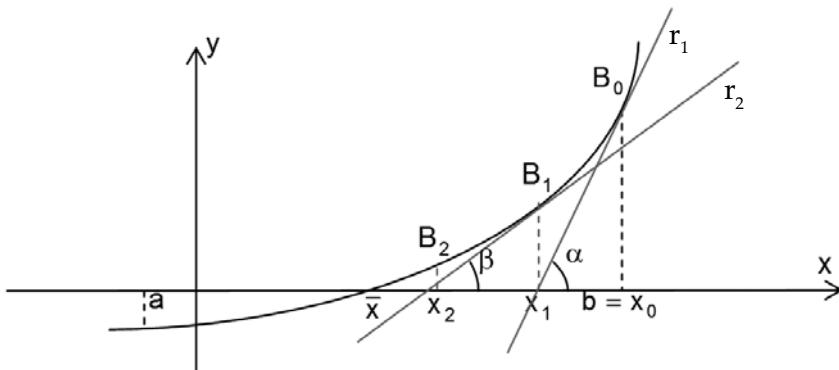
$$\text{Logo } \frac{f(a)}{(f(y) - f(a))} = 1 \Rightarrow f(a) = f(y) - f(a) \Rightarrow f(y) = 0.$$

Assim, em qualquer um dos casos, y é raiz de f no intervalo $[a, b]$. Agora, por hipótese, \bar{x} é a única raiz de f neste intervalo. Portanto, $y = \bar{x}$.

4.3 MÉTODO DE NEWTON

O método de Newton talvez seja a técnica mais usada para encontrar zeros de equações não lineares. Essencialmente, no método de Newton, substituímos um pequeno arco da curva por uma reta tangente a partir de um ponto desta curva.

GRÁFICO 5 – MÉTODO DE NEWTON



FONTE: A autora

Suponhamos que f é uma função contínua com derivada contínua e que possui uma única raiz \bar{x} em $[a, b]$. Seja também x_0 um ponto pertencente a $[a, b]$, e consideremos $B_0 = (x_0, f(x_0))$ um ponto da curva. Traçamos então a reta tangente r_1 a curva que passa por este ponto e chamamos de x_1 o ponto em que esta reta intercepta o eixo OX. Neste ponto, pela Lei das Tangentes, teremos

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_0) - 0}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \quad (\text{Veja o Gráfico 5 - método de Newton})$$

Por outro lado, a definição geométrica da derivada nos garante que $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$.

$$\text{Assim, temos } f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

$$x_0 - x_1 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Consideremos agora $B_1 = (x_1, f(x_1))$. Traçando a reta tangente r_2 a curva que passa exatamente por B_1 , obteremos o ponto x_2 : o ponto em que r_2 intercepta o eixo OX.

Pelos mesmos argumentos anteriores,

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{f(x_1) - 0}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} = f'(x_1)$$

$$x_1 - x_2 = \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

O processo é repetido até encontrarmos x_k com a precisão desejada, e podemos generalizá-lo através da equação

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

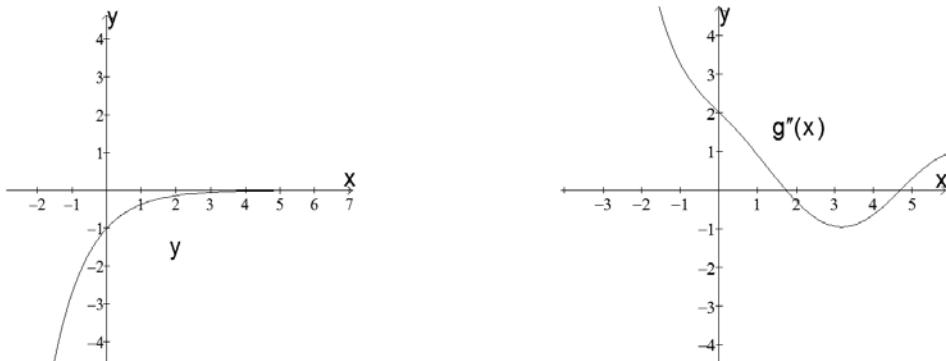
Obviamente para que essas iterações estejam bem definidas, $f'(x_k)$ precisa ser diferente de zero, para todo x_k . Por outro lado, partimos da suposição que f possui uma única raiz \bar{x} em $[a, b]$: isso nos garante que $f'(\bar{x}) \neq 0$. Como $x_k \rightarrow \bar{x}$ e f' é contínua, $f'(x_k) \neq 0$ para todo x_k próximo de \bar{x} .

Como todo método de obtenção de zeros de funções, precisamos partir de um valor x_0 para dar início ao processo. Dependendo da escolha, podemos encontrar um ponto x_1 que não pertença ao intervalo $[a, b]$, por exemplo, se no Gráfico 5 – Método de Newton tivéssemos escolhido $x_0 = a$. Por outro lado, ao escolhermos $x_0 = b$, conseguimos uma sequência de pontos $(x_k)_{k \geq 0}$ convergindo para \bar{x} . Como garantir então que, escolhido x_0 , conseguiremos a sequência desejada? Na verdade, isso é garantido se as derivadas primeira e segunda de f , f' e f'' , forem não nulas, preservarem o sinal no intervalo $[a, b]$ e se, para o x_0 escolhido, $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. Note que o fato de estas condições não serem satisfeitas, não implica não existir tal x_0 ; porém, nesse caso, teremos que contar com um pouco de sorte.

Exemplo: Voltamos à função real $g(x) = e^{-x} - \cos x$ já estudada anteriormente, que sabemos possuir uma única raiz no intervalo $[1; 1,5]$

(reveja o Gráfico 3 – Função $g(x) = e^{-x} - \cos x$). Novamente, utilizaremos a precisão 10^{-2} , conforme dito no início desta unidade. Para começarmos o processo, precisamos determinar g' e definir um ponto x_0 para começarmos nosso processo de iteração.

Dado que $g'(x) = -e^{-x} + \sin x$ e $g''(x) = e^{-x} + \cos x$, observe que g' e g'' preservam o sinal no intervalo $[1; 1,5]$.



- Gráfico 1.2.13 -

Tomemos $x_0 = 1,5$. Note que

$$\left. \begin{array}{l} g(x_0) = e^{-1,5} - \cos 1,5 = 0,152 \\ g''(x_0) = e^{-1,5} + \cos 1,5 = 0,294 \end{array} \right\} \Rightarrow g(x_0) \cdot g''(x_0) > 0 .$$

Encontramos então nosso elemento $x_0 = 1,5$.

$$\text{Passo } k=1: x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)}$$

$$x_1 = 1,5 - \frac{0,152}{0,774} = 1,303.$$

Vamos verificar o erro relativo para ver se prosseguimos com nosso método ou se paramos por termos encontrado uma aproximação razoável para a raiz de g .

$$\frac{|x_1 - x_0|}{|x_1|} = \frac{|1,303 - 1,5|}{|1,303|} = 0,151, \text{ que é maior do que } 10^{-2} .$$

$$\text{Passo } k = 2: x_2 = x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)}$$

$$x_1 = 1,303 - \frac{g(1,303)}{g'(1,303)} = 1,303 - \frac{e^{(-1,303)} - \cos(1,303)}{-e^{(-1,303)} + \sin(1,303)} = 1,303 - \frac{0,007}{0,693} = 1,293 .$$

Verificando o erro relativo,

$$\frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} = \frac{|1,293 - 1,303|}{|1,293|} = 0,008, \text{ que é menor do que } 10^{-2}.$$

Portanto, encontramos a aproximação que queríamos para a raiz de g.

4.3.1 Ordem de convergência

Vamos mostrar que o método de Newton sempre fornece uma aproximação para o zero \bar{x} da f, desde que esta função satisfaça as condições iniciais: f contínua em $[a, b]$, a derivada segunda neste intervalo possui sinal constante, e \bar{x} é a única raiz de f em $[a, b]$.

Consideremos a sequência de aproximações $(x_k)_{k \geq 1}$. Como esta sequência é limitada e monótona, sabemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ existe. Vamos chamá-lo de y. Obviamente, $y \in [a, b]$. Mais ainda: como a função f e f' são contínuas,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = y \Rightarrow \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(y) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} f'(x_k) = f'(y) \end{cases}.$$

Por outro lado, para um dado k,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k - \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k - \frac{\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k)}{\lim_{k \rightarrow \infty} f'(x_k)}$$

$$\text{Logo } y = y - \frac{f(y)}{f'(y)} \Rightarrow \frac{f(y)}{f'(y)} = 0 \Rightarrow f(y) = 0$$

Como \bar{x} é a única raiz de f em $[a, b]$, segue que $y = \bar{x}$.

4.4 MÉTODO DAS SECANTES

Você deve ter observado que ao aplicarmos o método de Newton para encontrarmos a raiz de uma função f, precisamos calcular sua derivada em cada iteração k. O método da Secante nada mais é do que um aprimoramento do método de Newton: em cada iteração k, trocamos $f'(x_k)$ do processo de iteração pelo quociente $\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$. Observe que à medida que k vai ficando grande, esse quociente vai se aproximando cada vez mais da definição formal de $f'(x_k)$. Assim, não temos grandes perdas ao fazer essa substituição. Neste caso, nosso processo de iteração será dado por

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \right)}.$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

A desvantagem deste método em relação ao método de Newton é que, na primeira iteração, teremos que fornecer o valor dos pontos x_0 e x_1 .

Exemplo: Mais uma vez, analisaremos a função real $g(x) = e^{-x} - \cos x$ no intervalo $[1; 1,5]$, utilizando a precisão 10^{-2} . Para começarmos o processo de iteração, precisamos definir nossos pontos de partida x_0 e x_1 .

Vimos ao longo do método de Newton por que podíamos escolher $x_0 = 1,5$. Utilizando o mesmo argumento, vamos considerar $x_1 = 1,45$ (verifique que este ponto satisfaz a condição $g(x_1) \cdot g''(x_1) > 0$).

$$\begin{cases} g(x_0) = e^{-1,5} - \cos(1,5) = 0,152 \\ g(x_1) = e^{-1,45} - \cos(1,45) = 0,114 \end{cases}$$

Passo $k = 1$:

$$x_2 = x_1 - \frac{g(x_1)(x_1 - x_0)}{g(x_1) - g(x_0)} = 1,45 - \frac{g(1,45)(1,45 - 1,5)}{g(1,45) - g(1,5)} = 1,45 - \frac{0,114 \cdot (-0,05)}{0,114 - 0,152} = 1,3$$

Observe que $g(1,3) = e^{-1,3} - \cos(1,3) = 0,005$.

Vamos verificar o erro relativo para ver se prosseguimos com nosso método ou se paramos por termos encontrado uma aproximação razoável para a raiz de g .

$$\frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} = \frac{|1,3 - 1,45|}{|1,3|} = 0,115, \text{ que é maior do que } 10^{-2}.$$

Passo $k = 2$:

$$x_3 = x_2 - \frac{g(x_2)(x_2 - x_1)}{g(x_2) - g(x_1)} = 1,3 - \frac{g(1,3) \cdot (1,3 - 1,45)}{g(1,3) - g(1,45)} = 1,293.$$

Sendo assim, $g(1,293) = e^{-1,293} - \cos(1,293) = 0,0002$.

Assim, nem precisamos calcular o erro relativo, pois já encontramos a aproximação que queríamos para a raiz de g que é 1,293.

4.5 MÉTODO DA ITERAÇÃO LINEAR

Seja f uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ e suponhamos existir pelo menos uma raiz $\bar{x} \in [a, b]$ de f . Para aplicarmos o método da iteração linear, precisamos encontrar uma função F tal que $F(x) = x$ utilizando para isso a igualdade $f(x) = 0$. Parece complicado? Vamos mostrar que, além de possível, é relativamente fácil encontrar vários candidatos à função F .

Exemplo: Consideremos à função $f(x) = x^3 - x + 2$ e a igualemos a zero.

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - x + 2 = 0$$

Vamos às candidatas a F :

Primeira candidata:

$$x^3 - x + 2 = 0$$

$$x = x^3 + 2 \Rightarrow F_1(x) = x^3 + 2$$

Segunda candidata:

$$x^3 - x + 2 = 0$$

$$x^3 = x - 2$$

$$x = \sqrt[3]{x - 2} \Rightarrow F_2(x) = \sqrt[3]{x - 2}$$

Terceira candidata:

$$x^3 - x + 2 = 0$$

$$x^3 = x - 2$$

$$x^2 = \frac{x - 2}{x}$$

$$x^2 = 1 - \frac{2}{x}$$

$$x = \sqrt{1 - \frac{2}{x}} \Rightarrow F_3(x) = \sqrt{1 - \frac{2}{x}}$$

Quarta candidata:

$$x^3 - x + 2 = 0$$

$$x^3 = x - 2$$

$$x = \frac{x - 2}{x^2}$$

$$x = \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}$$

$$x = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \Rightarrow F_4(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$$

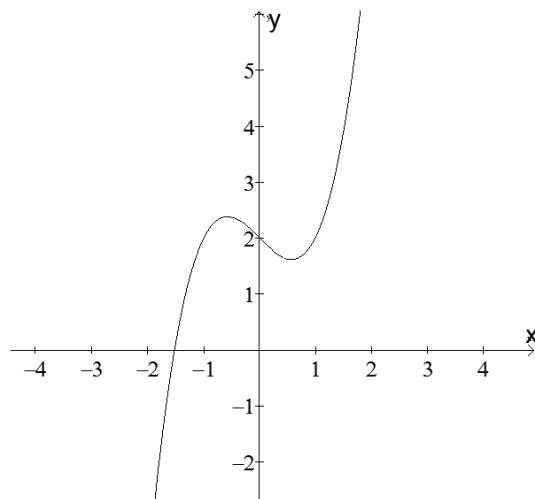
Assim, apenas manipulando um pouco a igualdade original, conseguimos encontrar quatro possibilidades para a função F . A função F é chamada de função de iteração.

Vamos voltar ao método. Qualquer valor x que satisfaça $F(x) = x$ é chamado de ponto fixo de F . Desta forma, transformamos o problema inicial, que era encontrar a raiz de f , no problema de encontrar o ponto fixo de F . Assim, sabendo que tal ponto fixo pertence ao intervalo $[a, b]$, vamos encontrar a aproximação adequada tomado inicialmente $x_0 \in [a, b]$. Se $F(x_0) = x_0'$, encontramos o ponto fixo de F e, portanto, a raiz de f . Por outro lado, se $F(x_0) \neq x_0'$, chamaremos $x_1 = F(x_0)$ e repetiremos a análise: se $F(x_1) = x_1'$, encontramos o que precisávamos, caso contrário, tomamos $x_2 = F(x_1)$. Vamos procedendo desta maneira até satisfazermos o critério de parada para um dado $\varepsilon > 0$.

A essa altura, você já deve estar se perguntando se, qualquer que seja F , o processo funciona. A resposta é não. Na verdade, F precisa ser tal que garanta que o processo terá fim, isto é, que a sequência de valores $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ encontrada convergirá para o ponto \bar{x} . Para que isso aconteça, basta que F seja contínua no intervalo $[a, b]$ e $|F'(x)| < 1$, para todo $x \in [a, b]$.

Voltemos ao exemplo anterior.

GRÁFICO 6 – FUNÇÃO $f(x) = x^3 - x + 2$



FONTE: A autora

Note que $f(x) = x^3 - x + 2$ possui uma raiz no intervalo $[-2, -1]$. Vamos procurar uma aproximação para esta raiz, utilizando uma das funções F encontradas anteriormente.

Primeira candidata: $F_1(x) = x^3 + 2$. Observe que F_1 é contínua e $F_1'(x) = 3x^2$. Entretanto, temos que $|F_1'(x)| = |3x^2| < 1 \Leftrightarrow 3x^2 < 1 \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Agora o intervalo $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ não tem ponto em comum com $[-2, -1]$ (verifique!). Logo $F_1'(x) > 1$, para todo $x \in [-2, -1]$ e, portanto, F_1 não é a função de iteração que usaremos.

Segunda candidata: $F_2(x) = \sqrt[3]{x-2}$. Esta função também é contínua e $F_2'(x) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x-2)^2}}$. Agora, para todo $x \in [-2, -1]$,

$$|F_2'(x)| < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x-2)^2}} \right| < 1$$

$$\Leftrightarrow \left| \sqrt[3]{(x-2)^2} \right| > 1$$

$$\Leftrightarrow \left| \sqrt[3]{(x-2)^2} \right| > \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 > \frac{1}{3^3}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 > \frac{1}{27}$$

$$\Leftrightarrow \left(x-2 > \frac{1}{\sqrt{27}} \text{ ou } x-2 < -\frac{1}{\sqrt{27}} \right)$$

$$\Leftrightarrow (x > 2,19 \text{ ou } x < -1,81)$$

$$\Leftrightarrow x \in (2,19, \infty) \text{ ou } x \in (-\infty, -1,81)$$

Note que o intervalo $[-2, -1]$ está contido no intervalo $(-\infty ; 1,81)$. Portanto, acabamos de encontrar nossa função de iteração. Assim, precisamos encontrar o ponto fixo de F_2 .

Passo k = 0: Vamos começar supondo $x_0 = -1,5$. Então:

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = -1,5 \\ F_2(x_0) = \sqrt[3]{x_0 - 2} \end{array} \right\} \Rightarrow F_2(-1,5) = \sqrt[3]{-1,5 - 2} = \sqrt[3]{-3,5} = -1,518.$$

Como $F_2'(x_0) \neq x_0$, vamos prosseguir.

Passo k = 1: Tomemos $x_1 = F_2'(x_0) = -1,518$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = -1,518 \\ F_2(x_1) = \sqrt[3]{x_1 - 2} \end{array} \right\} \Rightarrow F_2(-1,518) = \sqrt[3]{-1,518 - 2} = \sqrt[3]{-3,518} = -1,521.$$

Novamente, $F_2'(x_1) \neq x_1$. Prosseguiremos.

Passo k = 2:

$$\left. \begin{array}{l} x_2 = -1,521 \\ F_2(x_2) = \sqrt[3]{x_2 - 2} \end{array} \right\} \Rightarrow F_2(-1,521) = \sqrt[3]{-1,521 - 2} = -1,521.$$

Passo k = 3:

$$\left. \begin{array}{l} x_3 = -1,521 \\ F_2(x_3) = \sqrt[3]{x_3 - 2} \end{array} \right\} \Rightarrow F_2(-1,521) = \sqrt[3]{-1,521 - 2} = -1,521.$$

Passo k = 4:

$$\left. \begin{array}{l} x_4 = -1,521 \\ F_2(x_4) = \sqrt[3]{x_4 - 2} \end{array} \right\} \Rightarrow F_2(-1,521) = \sqrt[3]{-1,521 - 2} = -1,521.$$

Observe que os valores para a aproximação de \bar{x} estão convergindo. Mas quando para o processo? Bom, depende da exatidão que se queira. Se, no caso do nosso exemplo, desejássemos uma aproximação correta até a quarta casa decimal, poderíamos parar nesse momento, e tomariamos $\bar{x} = -1,521$.

5 PRINCIPAIS PRÓS E CONTRAS DE CADA MÉTODO

Estudamos nas seções anteriores cinco métodos iterativos de obtermos aproximações para raízes de uma dada função real f. Vamos resumir agora os prós e contras de cada um dos métodos para termos uma ideia de quando é vantajoso utilizar um ou outro.

5.1 MÉTODO DA BISSECÇÃO

A vantagem deste método é que ele não exige que se conheçam as derivadas da função analisada. Entretanto, para chegarmos a uma aproximação da raiz que nos seja razoável, precisamos realizar várias iterações. Assim, ele acaba sendo mais indicado para refinarmos o intervalo que contém a raiz do que para determiná-la propriamente dita.

5.2 MÉTODO DAS CORDAS

Para utilizarmos esse método, precisamos garantir que o sinal da segunda derivada da função se mantenha constante. Mesmo isso não sendo difícil de averiguar (uma análise gráfica é o suficiente), esse método também possui uma convergência bastante lenta.

5.3 MÉTODO DE NEWTON

A desvantagem do método de Newton é que precisamos conhecer explicitamente a forma analítica da derivada da função – isso, às vezes, pode ser bem complicado. A grande vantagem é a velocidade de convergência. Seguramente, é o método em que é possível encontrar a aproximação desejada utilizando-se o menor número de iterações.

5.4 MÉTODO DAS SECANTES

É uma variação do método de Newton. A vantagem é que não precisamos mais conhecer a forma analítica da derivada da função. A desvantagem é que precisaremos informar dois pontos iniciais para só então podermos dar início às iterações.

5.5 MÉTODO DA ITERAÇÃO LINEAR

A grande dificuldade deste método é encontrar a função de iteração apropriada. A vantagem é que a convergência é relativamente rápida.

Resumindo, cada método tem suas peculiaridades, vantagens e limitações. Cabe ao pesquisador escolher qual deles será mais conveniente para aplicar na sua situação-problema.



Apresentamos alguns métodos para a obtenção de aproximações de raízes de uma função não linear, porém existem vários outros, por exemplo, Método Regula-Falsi, Método Pégaso, Método do Ponto Fixo etc. Você pode encontrá-los em vários livros de Cálculo Numérico. Que tal aprofundar seus conhecimentos e fazer uma pequena pesquisa a respeito?

RESUMO DO TÓPICO 1

Vamos, agora, relembrar brevemente o que estudamos neste tópico.

- Zeros ou raízes de uma função qualquer f : todos os números \bar{x} para os quais $f(\bar{x}) = 0$.
- Análise gráfica: permite encontrar um intervalo $[a, b]$ que contenha a raiz de uma função real f contínua qualquer.
- Quando encontrarmos dificuldades em traçar o gráfico de uma função, podemos tentar rearranjar a expressão $f(x) = 0$ como uma igualdade entre duas outras funções $g_1(x) = g_2(x)$, cujos gráficos são mais fáceis de serem esboçados: os zeros de f serão exatamente os pontos em que os gráficos de g_1 e g_2 se interceptarem.
- Dado um intervalo $[a, b]$ e uma função f contínua neste intervalo, se $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe, pelo menos, uma raiz \bar{x} de f em $[a, b]$. Esse resultado nos dá um caminho simples de isolarmos raízes de f .
- Objetivo dos métodos numéricos: reduzir o tamanho dos intervalos que contêm uma raiz da função estudada de forma sistemática, obtendo assim uma boa aproximação.
- Critério de parada: dado um número $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, diremos que x_k (para algum k) está próximo o suficiente da raiz exata \bar{x} se $\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} < \varepsilon$. Neste caso, tomaremos x_{k+1} como a aproximação suficiente próxima à raiz \bar{x} .
- Precisão: quando o problema não mencionar o valor da precisão $\varepsilon > 0$ que devemos tomar, é de praxe considerar $\varepsilon = 10^{-m}$, onde m é o número máximo de casas decimais que queremos corretas no resultado.
- Método da Bissecção: dada uma função f e um intervalo $[a, b]$ para o qual f é contínua em todos os pontos do intervalo e $f(a) \cdot f(b) < 0$, o método da bissecção consiste em dividir o intervalo $[a, b]$ ao meio sistematicamente até que, para um dado $\varepsilon > 0$, o critério de parada seja satisfeito.
- Método das Cordas: dada f uma função contínua em um intervalo $[a, b]$, cuja derivada segunda neste intervalo possua sinal constante, e tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, traçamos uma reta (corda) que passe pelos pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$. O ponto $x_1 \in [a, b]$ onde esta reta cortar o eixo OX será nossa

primeira aproximação para a raiz $\bar{x} \in [a, b] : x_1 = a - \frac{f(a)}{(f(b) - f(a))} \cdot (b - a)$. Se

$f(x_1)$ e $f(a)$ tiverem o mesmo sinal, prosseguimos o procedimento tomando $a_1 = x_1$ e $b_1 = b$. Caso tenham sinais contrários, prosseguimos com $a_1 = a$ e $b_1 = x_1$.

- Método de Newton: dada f , o processo de iteração será dado por $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$. Uma condição suficiente – mas não necessária - para o ponto inicial da iteração x_0 pertencente ao intervalo ser apropriado é $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, desde que f' e f'' , forem não nulas.
- Método das Secantes: o processo de iteração será dado por $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$. A desvantagem deste método é que precisamos de dois pontos iniciais.
- Método da Iteração Linear: a ideia é mudar o foco do problema. Ao invés de procurar a raiz \bar{x} para f , procuramos o ponto fixo de uma função F contínua no intervalo ($F(\bar{x}) = \bar{x}$). Essa função é obtida manipulando a expressão $f(x) = 0$ e deve satisfazer $|F'(x)| < 1$ para todo $x \in [a, b]$.

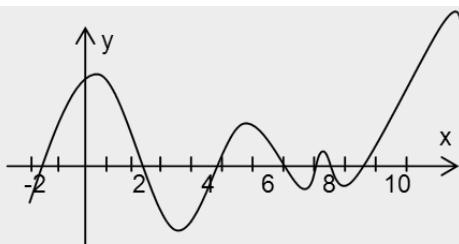
AUTOATIVIDADE



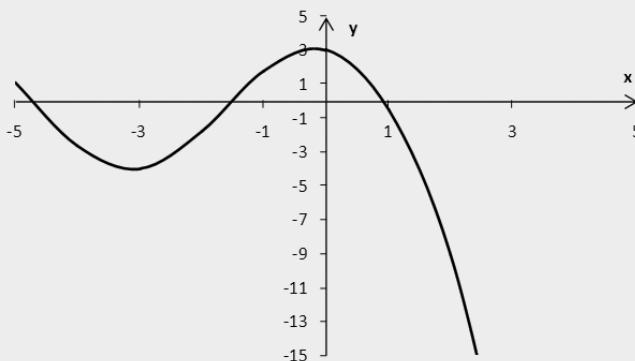
Em qualquer área da Matemática, só conseguimos realmente aprender um assunto depois de praticá-lo bastante, através da resolução de exercícios. Que tal fixar agora o conteúdo que vimos neste tópico?

- 1 Analise os gráficos a seguir e indique os intervalos que contêm as raízes das funções:

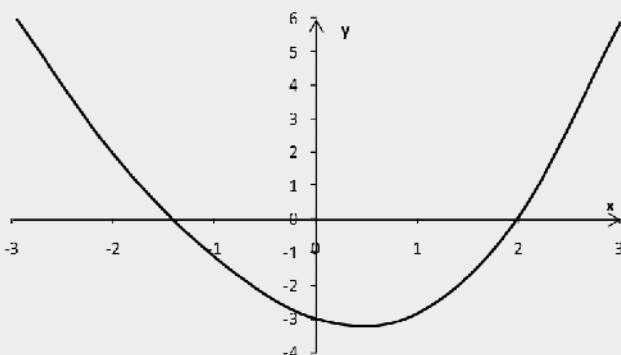
a)



b)



c)



- 2 Esboce os gráficos a seguir e determine em quais intervalos estão as raízes destas funções.
- $f(x) = e^x - 2x$
 - $p(x) = x^3 - 3x + 3$
 - $h(x) = \cos x - e^x$
 - $g(x) = x - 2\sin x$
- 3 Encontre aproximações para as raízes das funções abaixo através do método da bissecção, considerando a precisão de 10^{-2} .
- $f(x) = 4\sin x - e^x$, no intervalo $(-4, -3)$
 - $g(x) = e^x - 4x + 1$, no intervalo $(1, 2)$
 - $h(x) = x^2 - \sin x - 3$, no intervalo $(1, 2)$
- 4 Repita o exercício anterior utilizando a precisão de 10^{-3} .
- 5 Encontre aproximações para as raízes das funções do exercício 3 através do método das cordas, considerando a precisão de 10^{-2} .
- 6 Repita o exercício anterior utilizando a precisão de 10^{-3} .
- 7 Encontre aproximações para as raízes das funções do exercício 3 através do método de Newton, considerando a precisão de 10^{-2} .
- 8 Repita o exercício acima utilizando a precisão de 10^{-3} .
- 9 Considere a equação $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$, cujas raízes são 0,5 e 2,0 (FRANCO, 2006). Considere ainda os processos iterativos:

a) $x_{k+1} = \frac{2x_k^2 + 2}{5}$

b) $x_{k+1} = \sqrt{\frac{5x_k}{2} - 1}$

Qual dos dois processos você utilizaria para obter a raiz 0,5? Por quê?

SISTEMAS DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

1 INTRODUÇÃO

Já estudamos anteriormente algumas formas de encontrarmos aproximações para raízes de funções não lineares. Agora, vamos aprender a obter zeros de sistemas de equações não lineares através de processos iterativos.

Um sistema de equações não lineares possui a forma $\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \end{cases}$, onde

para cada $j = 1, 2, \dots, m$, f_j é uma função não linear de m variáveis x_1, x_2, \dots, x_m reais.



Apesar de parecer complicado observe que se substituirmos, na definição acima, o termo "não linear" simplesmente por "linear", nos depararemos com a definição de sistema de equações lineares, que tão bem conhecemos.

Neste Caderno de Estudos, iremos nos restringir aos sistemas com duas equações não lineares de duas incógnitas.

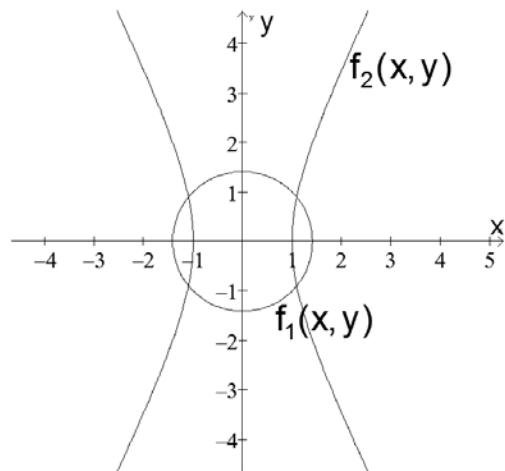
$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$, com f_1, f_2 equações não lineares com variáveis x_1, x_2 reais.

Para resolver sistemas maiores, o procedimento é semelhante.

Exemplo 1:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ x^2 - \frac{y^2}{4} - 1 = 0 \end{cases}$$

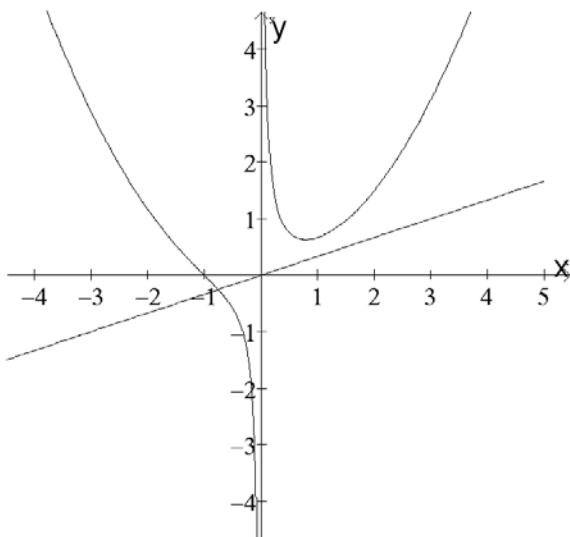
Neste sistema, temos duas equações não lineares reais $f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 2$ e

$$f_2(x, y) = x^2 - \frac{y^2}{4} - 1.$$



As soluções do sistema são exatamente os pontos em que os dois gráficos se interceptam: no caso do sistema acima, são 4 soluções reais.

Exemplo 2: $\begin{cases} x^3 - 3xy + 1 = 0 \\ 3x^2y - x^3 = 0 \end{cases}$



O sistema acima possui apenas uma solução real.

2 ITERAÇÃO LINEAR

Vimos no tópico anterior como funciona o método de iteração linear para equações não lineares. A forma de aplicar este método em um sistema de equações não lineares é bastante similar.

Dado um sistema não linear $\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$, precisamos encontrar funções de iteração linear F e G contínuas tais que $\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(x,y) = x \\ G(x,y) = y \end{cases}$.

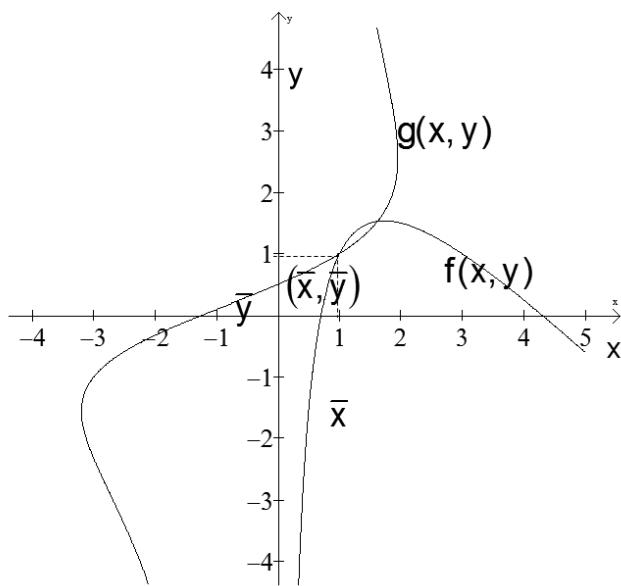
Como no caso das equações de apenas uma variável, nem todas as funções F e G possíveis de serem encontradas servem para aplicar o método. Para podermos utilizá-las, temos que ter satisfeitas as seguintes condições:

- i. F , G e suas derivadas parciais de primeira ordem $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial x}$ e $\frac{\partial G}{\partial y}$ precisam ser contínuas próximas à solução do sistema.
- ii. $\left| \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \right| + \left| \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \right| < 1$ e $\left| \frac{\partial G}{\partial x}(x,y) \right| + \left| \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) \right| < 1$ para todo ponto (x,y) próximos à solução.
- iii. O ponto inicial (x_0, y_0) precisa estar próximo da solução do sistema.

Exemplo 1: Consideremos o sistema não linear $\begin{cases} x^2 + xy - 5x + 3 = 0 \\ 4x + xy^2 - 10y + 5 = 0 \end{cases}$.

Sabemos que as funções $f(x, y) = x^2 + xy - 5x + 3$ e $g(x, y) = 4x + xy^2 - 10y + 5$ são contínuas e, pelo gráfico a seguir, o sistema tem uma raiz próxima ao ponto $(0,9; 0,9)$.

GRÁFICO 7 – FUNÇÕES $f(x, y) = x^2 + xy - 5x + 3$ e $g(x, y) = 4x + xy^2 - 10y + 5$



FONTE: A autora

Encontremos uma aproximação para esta raiz utilizando o método da iteração linear. Inicialmente, precisamos encontrar as funções contínuas F e G que farão o papel de nossas funções de iteração, isto é, que serão obtidas através de uma manipulação das equações $f(x,y) = 0$ e $g(x,y) = 0$ com as propriedades $F(x,y) = x$ e $G(x,y) = y$.

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \Rightarrow x^2 + xy - 5x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{x^2 + xy + 3}{5} \\ g(x,y) = 0 \Rightarrow 4x + xy^2 - 10y + 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{4x + xy^2 + 5}{10} \end{cases}$$



Observe com atenção como essas expressões foram obtidas!

Consideremos $\begin{cases} F(x,y) = \frac{x^2 + xy + 3}{5} \\ G(x,y) = \frac{4x + xy^2 + 5}{10} \end{cases}$. Claramente ambas as funções são

contínuas e satisfazem as condições $F(x,y) = x$ e $G(x,y) = y$ por construção. Precisamos verificar agora que elas satisfazem as condições i, ii e iii. A condição iii já sabemos ser válida; basta olharmos novamente o Gráfico 7 – Funções $f(x, y) = x^2 + xy - 5x + 3$ e $g(x, y) = 4x + xy^2 - 10y + 5$. Verifiquemos então a condição i.

Já mencionamos que F e G são contínuas. Verifiquemos agora se as suas derivadas parciais também o são. $g(x,y)$

$$F(x,y) = \frac{x^2 + xy + 3}{5} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{5} + \frac{y}{5} \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{5} \end{cases}$$

$$G(x,y) = \frac{4x + xy^2 + 5}{10} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = \frac{2}{5} + \frac{y^2}{10} \\ \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = \frac{xy}{5} \end{cases}$$



Caro/a acadêmico/a!!! Se você achar necessário, volte ao Caderno de Estudos de Equações Diferenciais para aproveitar melhor esses estudos.

Observe que todas as derivadas parciais são contínuas. Logo, a condição i é satisfeita.

Vamos à terceira:

Observe que

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \right| + \left| \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right| = \left| \frac{2x}{5} + \frac{y}{5} \right| + \left| \frac{x}{5} \right| \leq \left(\frac{2|x|}{5} + \frac{|y|}{5} \right) + \frac{|x|}{5} = \frac{3|x|}{5} + \frac{|y|}{5}$$

$$\left| \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) \right| + \left| \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) \right| = \left| \frac{2}{5} + \frac{y^2}{10} \right| + \left| \frac{xy}{5} \right| \leq \frac{2}{5} + \frac{y^2}{10} + \frac{|xy|}{5}$$

Sabemos que a solução do sistema está próxima do ponto $(0,9; 0,9)$. Então a continuidade das derivadas parciais garante que, mostrando que as somas acima são menores do que 1 quando calculadas em $(0,9; 0,9)$, teremos mostrado a terceira propriedade. Agora:

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x}(0,9; 0,9) \right| + \left| \frac{\partial F}{\partial y}(0,9; 0,9) \right| \leq \frac{3 \cdot 0,9}{5} + \frac{0,9}{5} = \frac{3,6}{5} < 1$$

$$\left| \frac{\partial G}{\partial x}(0,9; 0,9) \right| + \left| \frac{\partial G}{\partial y}(0,9; 0,9) \right| \leq \frac{2}{5} + \frac{0,9^2}{10} + \frac{0,9 \cdot 0,9}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{6,43}{10} < 1$$

Portanto, a terceira propriedade é válida. Isso significa que encontramos nossas funções de iteração. Podemos, então, iniciar nosso processo: tomemos $(x_0, y_0) = (0,9; 0,9)$. Então:

$K = 1$:

$$\begin{cases} F(x_0, y_0) = F(0,9; 0,9) = \frac{(0,9)^2 + 0,9 \cdot 0,9 + 3}{5} = 0,924 \Rightarrow x_1 = 0,924 \\ G(x_0, y_0) = G(0,9; 0,9) = \frac{4 \cdot 0,9 + 0,9 \cdot (0,9)^2 + 5}{10} = 0,933 \Rightarrow y_1 = 0,933 \end{cases}$$

$$\frac{|x_1 - x_0|}{|x_1|} = \frac{|0,924 - 0,9|}{|0,924|} = 2,6 \cdot 10^{-2}$$

$$\frac{|y_1 - y_0|}{|y_1|} = \frac{|0,933 - 0,9|}{|0,933|} = 3,5 \cdot 10^{-2}$$

$K = 2:$

$$\begin{cases} F(x_1, y_1) = F(0,924; 0,933) = \frac{(0,924)^2 + 0,924 \cdot 0,933 + 3}{5} = 0,957 \Rightarrow x_2 = 0,943 \\ G(x_1, y_1) = G(0,924; 0,933) = \frac{4 \cdot 0,924 + 0,924 \cdot (0,933)^2 + 5}{10} = 0,962 \Rightarrow y_2 = 0,950 \end{cases}$$

$$\frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} = \frac{|0,943 - 0,924|}{|0,943|} = 2,03 \cdot 10^{-2}$$

$$\frac{|y_2 - y_1|}{|y_2|} = \frac{|0,950 - 0,933|}{|0,950|} = 1,79 \cdot 10^{-2}$$

 $k = 3:$

$$\begin{cases} F(x_2, y_2) = F(0,943; 0,950) = \frac{(0,943)^2 + 0,943 \cdot 0,950 + 3}{5} = 0,957 \Rightarrow x_3 = 0,957 \\ G(x_2, y_2) = G(0,943; 0,950) = \frac{4 \cdot 0,943 + 0,943 \cdot (0,950)^2 + 5}{10} = 0,962 \Rightarrow y_3 = 0,962 \end{cases}$$

$$\frac{|x_3 - x_2|}{|x_3|} = \frac{|0,957 - 0,943|}{|0,957|} = 1,46 \cdot 10^{-2}$$

$$\frac{|y_3 - y_2|}{|y_3|} = \frac{|0,962 - 0,950|}{|0,962|} = 1,28 \cdot 10^{-2}$$

 $k = 4:$

$$\begin{cases} F(x_3, y_3) = F(0,957; 0,962) = \frac{(0,957)^2 + 0,957 \cdot 0,962 + 3}{5} = 0,967 \Rightarrow x_4 = 0,967 \\ G(x_3, y_3) = G(0,957; 0,962) = \frac{4 \cdot 0,957 + 0,957 \cdot (0,971)^2 + 5}{10} = 0,971 \Rightarrow y_4 = 0,971 \end{cases}$$

$$\frac{|x_4 - x_3|}{|x_4|} = \frac{|0,967 - 0,957|}{|0,967|} = 1,06 \cdot 10^{-2}$$

$$\frac{|y_4 - y_3|}{|y_4|} = \frac{|0,971 - 0,962|}{|0,971|} = 9,64 \cdot 10^{-3}$$



Note que na iteração 4 obtivemos para y um erro relativo inferior a 10^{-2} , mas não para x . Só devemos parar o processo de iteração quando todas as variáveis envolvidas no sistema tiverem a precisão prefixada.

$k = 5$:

$$\begin{cases} F(x_4, y_4) = F(0,967; 0,971) = \frac{(0,967)^2 + 0,967 \cdot 0,971 + 3}{5} = 0,975 \Rightarrow x_5 = 0,975 \\ G(x_4, y_4) = G(0,967; 0,971) = \frac{4 \cdot 0,967 + 0,967 \cdot (0,971)^2 + 5}{10} = 0,978 \Rightarrow y_5 = 0,978 \end{cases}$$

$$\frac{|x_4 - x_3|}{|x_4|} = \frac{|0,975 - 0,967|}{|0,975|} = 8,01 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{|y_4 - y_3|}{|y_4|} = \frac{|0,978 - 0,971|}{|0,978|} = 7,13 \cdot 10^{-3}$$

Observe que a sequência (x_n, y_n) está convergindo para $(1,1)$ a medida que $n \rightarrow \infty$. Assim, como desejamos um erro inferior a 10^{-2} , podemos parar nesta iteração e, dado que utilizamos uma precisão de duas casas decimais, utilizamos o ponto $(0,98; 0,98)$ como solução do sistema.

3 MÉTODO DE NEWTON

Vimos que o método da iteração linear era de fácil adaptação para sistemas não lineares. Entretanto, este método continua de difícil implementação, pois nem sempre é fácil encontrar funções de iteração para o sistema. No caso do método de Newton, não dependemos de tais funções, apenas das funções envolvidas no sistema original e suas derivadas parciais. Esse, e a rapidez na convergência, são motivos que tornam esse método o mais utilizado para encontrar soluções de sistemas não lineares.

Vamos entender como.

Consideremos o sistema $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ onde f e g são funções não lineares

contínuas cuja solução é o ponto $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$. Seja $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ uma aproximação de (\bar{x}, \bar{y}) . Representaremos agora as funções f e g através da Função de Taylor para duas variáveis em torno do ponto (x_0, y_0) :

$$\begin{cases} f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + \dots \\ g(x, y) = g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + \dots \end{cases}$$



Caro/a acadêmico/a!!! Que tal ir até a biblioteca e pesquisar nos livros de Cálculo a respeito da Fórmula de Taylor?

Como estamos supondo que o ponto (x_0, y_0) está bem próximo de (\bar{x}, \bar{y}) , podemos desconsiderar as derivadas de ordem superior a 1 e supor a seguinte igualdade:

$$\begin{cases} f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \\ g(x, y) = g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \end{cases}$$

Por outro lado, $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$. Então podemos reescrever o sistema como

$$\begin{cases} -f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \\ -g(x_0, y_0) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \end{cases}$$

Note que $f(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), g(x_0, y_0), \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)$ são números reais. Assim, o sistema não linear que tínhamos anteriormente se tornou linear.

Considerando $A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} (x - x_0) \\ (y - y_0) \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -f(x_0, y_0) \\ -g(x_0, y_0) \end{bmatrix}$,

podemos aplicar a regra de Cramer para resolvê-lo:

$$(x - x_0) = \begin{vmatrix} -f(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ -g(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -f(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) + g(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) - \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

$$(y - y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & -f(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & -g(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -g(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + f(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) - \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

A solução deste novo sistema nos dá uma nova aproximação para a solução do sistema não linear original:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_0 - \frac{f(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) - g(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) - \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} \\ \\ y_1 = y_0 - \frac{g(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - f(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) - \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} \end{array} \right.$$

Assim, nosso processo de iteração será dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k, y_k) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x_k, y_k) - g(x_k, y_k) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_k, y_k)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x_k, y_k) - \frac{\partial g}{\partial x}(x_k, y_k) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_k, y_k)} \\ \\ y_{k+1} = y_k - \frac{g(x_k, y_k) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k) - f(x_k, y_k) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x_k, y_k)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x_k, y_k) - \frac{\partial g}{\partial x}(x_k, y_k) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_k, y_k)} \end{array} \right.$$

As condições para podermos aplicar o método de Newton sobre um sistema não linear é que suas derivadas parciais sejam contínuas até segunda ordem e limitadas próximas à solução do sistema. Além disso, $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right) \neq \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$ para todo (x, y) próximo de (\bar{x}, \bar{y}) .

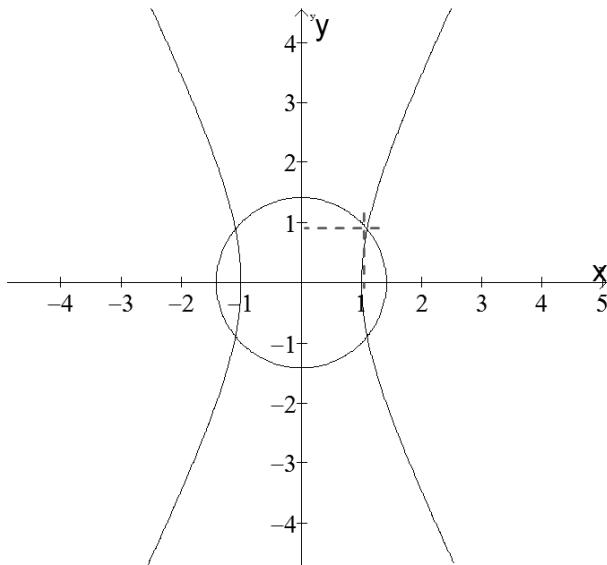
Não se deixe impressionar pelo tamanho das equações do Método de Newton. O fato de ele envolver derivadas parciais as torna grandes, mas isso não significa que seja difícil de aplicá-lo. Pelo contrário, a sua facilidade o torna o método mais utilizado para encontrar soluções de um sistema não linear. Observe o exemplo a seguir.

Exemplo 1: Encontraremos uma aproximação para a solução do sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ x^2 - \frac{y^2}{4} - 1 = 0 \end{cases}$$

utilizando uma precisão de 10^{-3} . Tomemos $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2$ e $g(x, y) = x^2 - \frac{y^2}{4} - 1$,

GRÁFICO 8 – FUNÇÕES $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2$ E $g(x, y) = x^2 - \frac{y^2}{4} - 1$.



FONTE: A autora

Observe que o sistema acima tem uma solução próxima ao ponto $(1,1)$. Vamos tomar esse ponto como (x_0, y_0) . Determinemos agora as derivadas parciais de f e g .

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\frac{y}{2} \end{cases}$$

Aplicando as derivadas e as funções no ponto $(x_0, y_0) = (1,1)$,

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1,1) = 1^2 + 1^2 - 2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} g(1,1) = 1^2 - \frac{1^2}{4} - 1 = -0,25 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(1,1) = 2 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(1,1) = -0,5 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_0 - \frac{f(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) - g(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) - \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} \\ y_1 = y_0 - \frac{g(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - f(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) - \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 - \frac{0 \cdot (-0,5) - (-0,25) \cdot 2}{2 \cdot (-0,5) - 2 \cdot 2} = 1,1 \\ y_1 = 1 - \frac{(-0,25) \cdot 2 - 0 \cdot 2}{2 \cdot (-0,5) - 2 \cdot 2} = 0,9 \end{array} \right. \Rightarrow (x_1, y_1) = (1,1; 0,9)$$

Calculemos o erro relativo de ambas variáveis para saber se devemos parar ou prosseguir com o processo de iteração.

$$\frac{|x_1 - x_0|}{|x_1|} = \frac{|1,1 - 1|}{|1,1|} = 9,1 \cdot 10^{-2} \quad \frac{|y_1 - y_0|}{|y_1|} = \frac{|0,9 - 1|}{|0,9|} = 1,1 \cdot 10^{-1}$$

Note que ambos os valores são maiores do que a precisão que gostaríamos de ter (10^{-3}). Assim, devemos encontrar uma nova aproximação (x_2, y_2) .

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1,1; 0,9) = (1,1)^2 + (0,9)^2 - 2 = 0,02 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(1,1; 0,9) = 2,2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1; 0,9) = 1,8 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} g(1,1; 0,9) = (1,1)^2 - \frac{(0,9)^2}{4} - 1 = -0,0075 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(1,1; 0,9) = 2,2 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(1,1; 0,9) = -0,45 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = x_1 - \frac{f(x_1, y_1) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x_1, y_1) - g(x_1, y_1) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x_1, y_1) - \frac{\partial g}{\partial x}(x_1, y_1) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1)} \\ y_2 = y_1 - \frac{g(x_1, y_1) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1) - f(x_1, y_1) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x_1, y_1)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x_1, y_1) - \frac{\partial g}{\partial x}(x_1, y_1) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = 1,1 - \frac{0,02 \cdot (-0,45) - (-0,0075) \cdot 1,8}{2,2 \cdot (-0,45) - 2,2 \cdot 1,8} = 1,0955 \\ y_2 = 0,9 - \frac{(-0,0075) \cdot 2,2 - 0,02 \cdot 2,2}{2,2 \cdot (-0,45) - 2,2 \cdot 1,8} = 0,8944 \end{array} \right.$$

$$(x_2, y_2) = (1,0955; 0,8944)$$

Calculemos o erro relativo de ambas variáveis novamente:

$$\frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} = \frac{|1,0955 - 1,1|}{|1,0955|} = 4,15 \cdot 10^{-3} \quad \frac{|y_2 - y_0|}{|y_2|} = \frac{|0,8944 - 0,9|}{|0,8944|} = 6,21 \cdot 10^{-3}$$

Os valores ainda são maiores do que (10^{-3}). Vamos encontrar a nova aproximação (x_3, y_3).

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1,0955; 0,8944) = 0,00005 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(1,0955; 0,8944) = 2,191 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,0955; 0,8944) = 1,789 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} g(1,0955; 0,8944) = 0,00001 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(1,0955; 0,8944) = 2,191 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(1,0955; 0,8944) = -0,447 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 = 1,0955 - \frac{0,00005 \cdot (-0,447) - (-0,00001) \cdot 1,789}{2,191 \cdot (-0,447) - 2,191 \cdot 1,789} = 1,0954 \\ y_3 = 0,8944 - \frac{(-0,00001) \cdot 2,191 - 0,00005 \cdot 2,191}{2,191 \cdot (-0,447) - 2,191 \cdot 1,789} = 0,8944 \end{array} \right.$$

Calculemos o erro relativo de ambas as variáveis novamente:

$$\frac{|x_3 - x_1|}{|x_3|} = \frac{|1,0954 - 1,0955|}{|1,0954|} = 8,61 \cdot 10^{-6} \quad \frac{|y_3 - y_0|}{|y_3|} = \frac{|0,8944 - 0,8944|}{|0,8944|} = 0$$

Ambos os valores são menores do que (10^{-3}); portanto, encontramos a aproximação final para a solução do sistema: (1,0954; 0,8944).

4 MÉTODO DE NEWTON PARA EQUAÇÕES NÃO LINEARES COMPLEXAS

Você deve estar se perguntando por que voltar ao assunto de uma única equação não linear depois de estudarmos sistemas de equações. A resposta é simples e já foi respondida em parte na Unidade 1. Qualquer equação complexa pode ser separada em partes real e imaginária, tornando-se, então, um sistema de equações não lineares de duas equações e duas variáveis. De fato, consideremos uma função não linear complexa $f(z) = 0$, contínua com derivada primeira contínua. Aplicando o método de Newton nesta função, da mesma forma que em uma equação não linear real, teríamos:

$$z_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)}, \text{ para } k=0,1,2,3\dots$$

Entretanto, estamos trabalhando com uma função complexa. Sabemos que, para cada z complexo, existem x, y reais tais que $z = x + i \cdot y$, e podemos reescrever f como $f(z) = U(x, y) + i \cdot V(x, y)$, onde U e V são funções de duas variáveis reais, contínuas, com derivadas parciais de primeira ordem também contínuas. Também existe um resultado da Análise Complexa – área da Matemática que estuda os números e funções complexas – que nos garante que:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) + i \cdot \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) - i \cdot \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) \\ \text{Assim, } z_{k+1} &= z_k - \frac{U(x_k, y_k) + i \cdot V(x_k, y_k)}{\frac{\partial U}{\partial x}(x_k, y_k) + i \cdot \frac{\partial V}{\partial x}(x_k, y_k)} \\ \Rightarrow x_{k+1} + i \cdot y_{k+1} &= x_k + i \cdot y_k - \frac{U(x_k, y_k) + i \cdot V(x_k, y_k)}{\frac{\partial U}{\partial x}(x_k, y_k) + i \cdot \frac{\partial V}{\partial x}(x_k, y_k)} \cdot \frac{\frac{\partial U}{\partial x}(x_k, y_k) - i \cdot \frac{\partial V}{\partial x}(x_k, y_k)}{\frac{\partial U}{\partial x}(x_k, y_k) - i \cdot \frac{\partial V}{\partial x}(x_k, y_k)} \\ \Rightarrow x_{k+1} + i \cdot y_{k+1} &= x_k + i \cdot y_k - \frac{(U(x_k, y_k) + i \cdot V(x_k, y_k)) \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial x}(x_k, y_k) - i \cdot \frac{\partial V}{\partial x}(x_k, y_k) \right)}{\left(\frac{\partial U}{\partial x}(x_k, y_k) \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}(x_k, y_k) \right)^2} \\ \Rightarrow \begin{cases} x_{k+1} = x_k - \frac{\left(U(x_k, y_k) \cdot \frac{\partial U}{\partial x}(x_k, y_k) + V(x_k, y_k) \cdot \frac{\partial V}{\partial x}(x_k, y_k) \right)}{\left(\frac{\partial U}{\partial x}(x_k, y_k) \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}(x_k, y_k) \right)^2} \\ y_{k+1} = y_k - \frac{\left(V(x_k, y_k) \cdot \frac{\partial U}{\partial x}(x_k, y_k) - U(x_k, y_k) \cdot \frac{\partial V}{\partial x}(x_k, y_k) \right)}{\left(\frac{\partial U}{\partial x}(x_k, y_k) \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}(x_k, y_k) \right)^2} \end{cases} \end{aligned}$$

O método de Newton deve ser aplicado sempre que a função complexa não for um polinômio. Nestes casos, existem métodos que exigem menor esforço computacional e, portanto, mais eficientes. Vamos abordar esse assunto com maior propriedade no próximo tópico. Agora, aplicaremos o método de Newton em um exemplo.

Exemplo: Determinemos a raiz complexa da equação $e^z - z^2 = 0$ próxima ao ponto $z^0 = 1,6 + i \cdot 1,5$.

O primeiro passo é separarmos a parte real da imaginária da equação acima. Para isso, consideremos $z = x + i \cdot y$. Então:

$$\begin{aligned} e^z - z^2 = 0 &\Rightarrow e^{(x+iy)} - (x+iy)^2 = 0 \Rightarrow e^{(x+iy)} - (x^2 - y^2 + i \cdot 2xy) = 0 \\ &\Rightarrow e^{(x+iy)} - x^2 + y^2 - i \cdot 2xy = 0 \end{aligned}$$

Por outro lado, vimos na matéria de Trigonometria e Números Complexos que $e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i \cdot \operatorname{sen}(y)) = e^x \cos(y) + ie^x \operatorname{sen}(y)$. Assim,

$$\begin{aligned} e^z - z^2 = 0 &\Rightarrow e^x \cos(y) + ie^x \operatorname{sen}(y) - x^2 + y^2 - i \cdot 2xy = 0 \\ &\Rightarrow (e^x \cos(y) - x^2 + y^2) + i \cdot (e^x \operatorname{sen}(y) - 2xy) = 0 \end{aligned}$$

Acabamos de encontrar as funções $U(x,y)$ e $V(x,y)$ que procurávamos:

$$\begin{cases} U(x,y) = e^x \cos(y) - x^2 + y^2 \\ V(x,y) = e^x \operatorname{sen}(y) - 2xy \end{cases}, \text{ sendo } \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = e^x \cos(y) - 2x \\ \frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = e^x \operatorname{sen}(y) - 2y \end{cases}$$

Vamos agora começar nosso processo de iteração, partindo do ponto $(x_0, y_0) = (1,6; 1,5)$, de acordo com o enunciado do exemplo.

$$\begin{cases} x_1 = x_0 - \frac{\left(U(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial U}{\partial x}(x_0, y_0) + V(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial V}{\partial x}(x_0, y_0) \right)}{\left(\frac{\partial U}{\partial x}(x_0, y_0) \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}(x_0, y_0) \right)^2} \\ y_1 = y_0 - \frac{\left(V(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial U}{\partial x}(x_0, y_0) - U(x_0, y_0) \frac{\partial V}{\partial x}(x_0, y_0) \right)}{\left(\frac{\partial U}{\partial x}(x_0, y_0) \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}(x_0, y_0) \right)^2} \\ x_1 = 1,6 - \frac{(0,0404 \cdot (-2,8496) + 0,1406 \cdot 1,9406)}{(-2,8496)^2 + (1,9406)^2} = 1,5867 \\ y_1 = 1,5 - \frac{(0,1406 \cdot (-2,8496) - 0,0404 \cdot 1,9406)}{(-2,8496)^2 + (1,9406)^2} = 1,5403 \end{cases}$$

Verificando o erro da aproximação:

$$\frac{|x_1 - x_0|}{|x_1|} = \frac{|1,5867 - 1,6|}{|1,5867|} = 8,37 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{|y_1 - y_0|}{|y_1|} = \frac{|1,5403 - 1,5|}{|1,5403|} = 2,62 \cdot 10^{-2}$$

Embora a variável x já satisfaça a precisão desejada, isso não ocorre com y. Então precisamos continuar com o processo de iteração:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = x_1 - \frac{\left(U(x_1, y_1) \cdot \frac{\partial U}{\partial x}(x_1, y_1) + V(x_1, y_1) \cdot \frac{\partial V}{\partial x}(x_1, y_1) \right)}{\left(\frac{\partial U}{\partial x}(x_1, y_1) \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}(x_1, y_1) \right)^2} \\ y_2 = y_1 - \frac{\left(V(x_1, y_1) \cdot \frac{\partial U}{\partial x}(x_1, y_1) - U(x_1, y_1) \cdot \frac{\partial V}{\partial x}(x_1, y_1) \right)}{\left(\frac{\partial U}{\partial x}(x_1, y_1) \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}(x_1, y_1) \right)^2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = 1,5867 - \frac{(0,0039 \cdot (-3,0244) + (-0,0026) \cdot 1,8048)}{(-3,0244)^2 + (1,8048)^2} = 1,5880 \\ y_2 = 1,5403 - \frac{((-0,0026) \cdot (-3,0244) - 0,0039 \cdot 1,8048)}{(-3,0244)^2 + (1,8048)^2} = 1,5402 \end{array} \right.$$

Verificando o erro da aproximação:

$$\frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} = \frac{|1,5880 - 1,5867|}{|1,5880|} = 8,38 \cdot 10^{-4}$$

$$\frac{|y_2 - y_1|}{|y_2|} = \frac{|1,5402 - 1,5403|}{|1,5402|} = 5,23 \cdot 10^{-5}$$

Como o erro relativo de ambas as variáveis é inferior a 10^{-3} , segue que encontramos a aproximação que procurávamos: $(x_2, y_2) = (1,5880; 1,5402)$, ou a raiz da equação $f(z)$ próxima ao ponto $z^0 = 1,6 + i \cdot 1,5$ para precisão 10^{-3} é $z = 1,5880 + i \cdot 1,5402$.

RESUMO DO TÓPICO 2

Agora, vamos rever sucintamente o que estudamos neste segundo tópico:

- Definição de sistema de equações não lineares:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \end{cases}$$

onde, para cada $j = 1, 2, \dots, m$, f_j é uma função não linear de m variáveis x_1, x_2, \dots, x_m reais. As soluções do sistema são os pontos onde as equações não lineares que o compõem se interceptam.

- Método de Iteração Linear: dado um sistema não linear $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$, encontramos funções de iteração linear F e G contínuas, com derivadas parciais de primeira ordem também contínuas próximas à solução do sistema, tais que $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$
 $\Rightarrow \begin{cases} F(x, y) = x \\ G(x, y) = y \end{cases}$. Além disso, $\left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \right| + \left| \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right| < 1$, $\left| \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) \right| + \left| \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) \right| < 1$ para todo (x, y) próximo à solução do sistema e o ponto inicial (x_0, y_0) precisa estar próximo desta solução.
- Erro relativo para um sistema não linear de 2 variáveis: dada uma precisão $\varepsilon > 0$, só consideramos um ponto (x, y) próximo suficiente da solução (\bar{x}, \bar{y}) se ambas as variáveis x e y estiverem próximas de \bar{x} e \bar{y} respectivamente.

- Método de Newton: dado um sistema não linear $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ com derivadas parciais contínuas até segunda ordem e limitadas próximas à solução do sistema, e tais que $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \right) \neq \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$ para todo (x, y) próximo de (\bar{x}, \bar{y}) , a aproximação (x_{k+1}, y_{k+1}) é obtida pela fórmula

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k, y_k) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x_k, y_k) - g(x_k, y_k) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_k, y_k)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x_k, y_k) - \frac{\partial g}{\partial x}(x_k, y_k) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_k, y_k)} \\ y_{k+1} = y_k - \frac{g(x_k, y_k) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k) - f(x_k, y_k) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x_k, y_k)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x_k, y_k) - \frac{\partial g}{\partial x}(x_k, y_k) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_k, y_k)} \end{cases}$$

- Método de Newton para equações não lineares complexas: dada uma função não linear complexa $f(z)=0$, contínua cuja derivada de primeira ordem também seja contínua, reescrevemos f como $f(z) = U(x,y) + i \cdot V(x,y)$, onde U e V são funções de duas variáveis reais, contínuas, com derivadas parciais de primeira ordem também contínuas, e x e y são os números reais para os quais $z = x + i \cdot y$. O processo de iteração k será dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = x_k - \frac{\left(U(x_k, y_k) \cdot \frac{\partial U}{\partial x}(x_k, y_k) + V(x_k, y_k) \cdot \frac{\partial V}{\partial x}(x_k, y_k) \right)}{\left(\frac{\partial U}{\partial x}(x_k, y_k) \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}(x_k, y_k) \right)^2} \\ \\ y_{k+1} = y_k - \frac{\left(V(x_k, y_k) \cdot \frac{\partial U}{\partial x}(x_k, y_k) - U(x_k, y_k) \frac{\partial V}{\partial x}(x_k, y_k) \right)}{\left(\frac{\partial U}{\partial x}(x_k, y_k) \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}(x_k, y_k) \right)^2} \end{array} \right.$$

AUTOATIVIDADE



Em qualquer área da Matemática, só conseguimos realmente aprender um assunto depois de praticá-lo bastante, através da resolução de exercícios. Que tal fixar agora o conteúdo que vimos neste tópico?

- 1 Encontre uma aproximação para a solução dos sistemas a seguir, utilizando o método de iteração linear para uma precisão de 10^{-3} .

a)
$$\begin{cases} \frac{1}{7}\sin(x) + \frac{1}{5}\cos(y) - x = 0 \\ \frac{1}{7}\cos(x) - \frac{1}{5}\sin(y) - y = 0 \end{cases}, \text{ com } (x_0, y_0) = (0,5; 0,5)$$

- 2 Encontre uma solução dos sistemas não lineares a seguir através do método de Newton, utilizando como precisão de 10^{-3} :

a)
$$\begin{cases} 3x^2y - y^3 = 4 \\ x^2 + xy^3 = 9 \end{cases}, \text{ com } (x_0, y_0) = (-1, -2).$$

b)
$$\begin{cases} x^2 + xy - 5x + 3 = 0 \\ 4x + xy^2 - 10y + 5 = 0 \end{cases}, \text{ com } (x_0, y_0) = (0,9; 0,9).$$

c)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x + y = 3 \end{cases}, \text{ com } (x_0, y_0) = (1,5).$$

d)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 0,5 \end{cases}, \text{ com } (x_0, y_0) = (0,5; 0,8).$$

e)
$$\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + (y - 1)^2 = 4 \end{cases}, \text{ com } (x_0, y_0) = (2,1).$$

f)
$$\begin{cases} 3x^2 + y = 3,5 \\ x + y^3 = 1,625 \end{cases}, \text{ com } (x_0, y_0) = (0,8; 0,8)$$

- 3 Encontre uma aproximação para a raiz da equação complexa $\sqrt{z} - \ln(z) = 0$ com precisão de 10^{-3} , partindo do ponto $z = 0,5 + i \cdot 0,5$.

EQUAÇÕES POLINOMIAIS

1 INTRODUÇÃO

No Tópico 1, estudamos as equações não lineares de uma variável. Agora vamos conhecer alguns métodos de resolução de um tipo especial destas equações chamadas equações polinomiais. O que as torna tão especiais? O fato de podermos escrevê-las através de uma fórmula geral, e de elas terem algumas características bem interessantes.

Uma equação polinomial, ou polinômio, de grau n é uma equação não linear da forma $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ onde $a_n \neq 0$.



Você deve estar lembrado que já estudamos métodos de resolução para equações polinomiais de graus 1 e 2 na Unidade 1.

Observe que nada falamos sobre x ou mesmo sobre a_j , $j = 1, \dots, n$. Na verdade, esta definição acima vale tanto quando x assume valores reais como quando assume valores complexos.

- i - Todo polinômio possui pelo menos uma raiz (real ou complexa).
- ii - P_n possui exatamente n raízes, distintas entre si ou não. Quando, destas n , existem k raízes iguais, dizemos que tal raiz tem multiplicidade k .
- iii - Sendo x_1, x_2, \dots, x_n as raízes de P_n , podemos reescrever este polinômio como $P_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$.
- iv - Se a_j for um número real para todo $j = 1, \dots, n$ e $z = a + i \cdot b$ for uma raiz de P_n , então $\bar{z} = a - i \cdot b$ também será raiz de P_n . Nesse caso, poderemos reescrever $P_n(x) = (x - a - ib)(x - a + bi)$, onde a e b são números reais positivos, e z e \bar{z} são raízes de $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$.
- v - Se o grau de um polinômio for ímpar, este polinômio tem, pelo menos, uma raiz real.

vi - Dado um polinômio Q_n de grau menor ou igual a n tal que existam mais de n valores reais y_j ($j > n$) para os quais $Q_n(y_j) = P_n(y_j)$, então $Q_n = P_n$.

Conforme mencionamos, os polinômios são casos particulares de equações não lineares. Portanto, todos os métodos estudados nesta unidade podem ser aplicados para encontrar aproximações para suas raízes. Entretanto, justamente pelas peculiaridades deste tipo de equação, existem outros métodos mais eficientes para os polinômios. É nesses métodos que estamos interessados agora.

Vamos começar o nosso estudo tratando dos polinômios cujos coeficientes são reais. Nossa última seção será sobre os polinômios de coeficientes complexos.

2 DETERMINAÇÃO DE RAÍZES REAIS

Mencionamos acima que todos os métodos iterativos estudados nesta unidade podem ser aplicados para encontrar zeros de um polinômio $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$, em particular, o método de Newton, que ficaria da forma:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{P_n(x_k)}{P'_n(x_k)}.$$

Como o grau do polinômio pode ser relativamente grande, calcular o polinômio e sua derivada aplicados a um ponto em cada iteração pode não ser muito simples e nem muito barato, operacionalmente falando. Por outro lado, existe um algoritmo incrível que nos permite calcular $P_n(x)$ e $P'_n(x)$ ao mesmo tempo, economizando uma enorme quantidade de tempo. Observe a forma de reescrevermos $P_n(x)$ para $n = 5$:

$$\begin{aligned} P_5(x) &= a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ &= x \cdot (a_5 x^4 + a_4 x^3 + a_3 x^2 + a_2 x + a_1) + a_0 \\ &= x \cdot (x \cdot (a_5 x^3 + a_4 x^2 + a_3 x^1 + a_2) + a_1) + a_0 \\ &= x \cdot (x \cdot (x \cdot (a_5 x^2 + a_4 x^1 + a_3) + a_2) + a_1) + a_0 \\ &= x \cdot (x \cdot (x \cdot (x \cdot (a_5 x + a_4) + a_3) + a_2) + a_1) + a_0 \end{aligned}$$

Vamos definir b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 e b_5 da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_5 = a_5 \\ b_4 = x \cdot b_5 + a_4 \\ b_3 = x \cdot b_4 + a_3 \\ b_2 = x \cdot b_3 + a_2 \\ b_1 = x \cdot b_2 + a_1 \\ b_0 = x \cdot b_1 + a_0 \end{array} \right.$$

Note que $b_0 = P_5(x)$. De fato:

$$\begin{aligned} b_0 &= x \cdot b_1 + a_0 \\ &= x \cdot (x \cdot b_2 + a_1) + a_0 \\ &= x \cdot (x \cdot (x \cdot b_3 + a_2) + a_1) + a_0 \\ &= x \cdot (x \cdot (x \cdot (x \cdot b_4 + a_3) + a_2) + a_1) + a_0 \\ &= x \cdot (x \cdot (x \cdot (x \cdot (x \cdot b_5 + a_4) + a_3) + a_2) + a_1) + a_0 \\ &= x \cdot (x \cdot (x \cdot (x \cdot (x \cdot a_5 + a_4) + a_3) + a_2) + a_1) + a_0 \\ &= P_5(x) \end{aligned}$$

Vamos agora proceder de modo análogo com os coeficientes b_k , $k=0,1,2,3,4,5$: definamos c_1, c_2, c_3, c_4 e c_5 da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_5 = b_5 \\ c_4 = x \cdot c_5 + b_4 \\ c_3 = x \cdot c_4 + b_3 \\ c_2 = x \cdot c_3 + b_2 \\ c_1 = x \cdot c_2 + b_1 \end{array} \right.$$

O interessante é que c_1 será igual à derivada de $P_5(x)$, ou seja, $P'_5(x)$!



Note que, utilizando o mesmo processo, poderíamos definir a partir de c_1, c_2, \dots, c_n elementos d_2, d_3, \dots, d_n e, a partir destes, elementos e_3, e_4, \dots, e_n . Ou seja, esse procedimento, conhecido como Algoritmo de Briot-Ruffini-Horner nos permite calcular não só $P_n(x)$ e $P'_n(x)$, mas, também $P''_n(x), P'''_n(x)$ e assim por diante. Assim, esse algoritmo pode ser útil também em outras abordagens de estudo dos polinômios, diferentes dos métodos de obtenção de raízes.

Definimos os elementos b_k e c_j (com $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ e $j = 1, 2, 3, 4, 5$) para $P_5(x)$. Utilizando o mesmo processo, podemos definir esses elementos para o polinômio de grau n , $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$. Nesse caso,

$$\begin{cases} b_n = a_n \\ b_{n-k} = x \cdot b_{n-k+1} + a_{n-k} \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

lembrando que $b_0 = P_n(x)$, e

$$\begin{cases} c_n = b_n \\ c_{n-k} = x \cdot c_{n-k+1} + b_{n-k} \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

com $c_1 = P'_n(x)$.

Assim, podemos utilizar o seguinte esquema pra calcular $P_n(y)$ e $P'_n(y)$, onde y é um número real qualquer:

FIGURA 1 – DETERMINAÇÃO DE RAÍZES

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_2	a_1	a_0
y	\downarrow	+	+		+	+	+
		$y \cdot b_n$	$y \cdot b_{n-1}$...	$y \cdot b_3$	$y \cdot b_2$	$y \cdot b_1$
	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	...	b_2	b_1	b_0
y	\downarrow	+	+	...	+	+	
		$y \cdot c_n$	$y \cdot c_{n-1}$		$y \cdot c_3$	$y \cdot c_2$	
	c_n	c_{n-1}	c_{n-2}		c_2	c_1	

FONTE: (FRANCO, 2006)

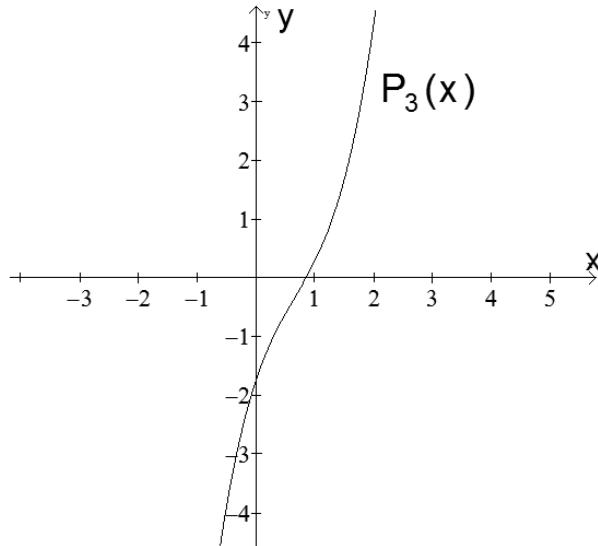
Observe que, como y pode ser qualquer número real, podemos substituí-lo por $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$.

Agora, podemos voltar ao método de Newton para polinômios:

$x_{k+1} = x_k - \frac{P_n(x_k)}{P'_n(x_k)} = x_k - \frac{b_0(x_k)}{c_1(x_k)}$, onde $b_0(x_k)$ e $c_1(x_k)$ são pegos diretamente da tabela anterior (Figura 1 – Determinação de Raízes) quando aplicada a x_k .

A tabela anterior parece complicada, certo? Vamos aplicar este método em um polinômio, detalhadamente para entendermos melhor como ele funciona.

Exemplo: Procuremos a raiz do polinômio $P_3(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1,719$ com precisão 10^{-3} . Para isso, precisamos de um valor inicial próximo da raiz para começarmos, certo? Vamos observar o gráfico do polinômio para inferirmos um valor.

GRÁFICO 9 – FUNÇÃO $P_3(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1,719$ 

FONTE: A autora

Note que existe uma raiz do polinômio próxima ao ponto $x = 1$. Vamos considerá-lo como sendo nosso x_0 e construir nossa primeira tabela do algoritmo de Briot-Ruffini-Horner.

$x_0 = 1$	$a_3 = 1$	$a_2 = -2$	$a_1 = 3$	$a_0 = -1,719$
	$b_3 = 1$	$b_2 = a_2 + x_0 \cdot b_3$ = $(-2) + 1 \cdot 1$ = -1	$b_1 = a_1 + x_0 \cdot b_2$ = $3 + 1 \cdot (-1)$ = 2	$b_0 = a_0 + x_0 \cdot b_1$ = $-1,719 + 1 \cdot 2$ = $0,281$
	$c_3 = 1$	$c_2 = b_2 + x_0 \cdot c_3$ = $-1 + 1 \cdot 1$ = 0	$c_1 = b_1 + x_0 \cdot c_2$ = $2 + 1 \cdot 0$ = 2	

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{b_0(x_0)}{c_1(x_0)} \\ &= 1 - \frac{b_0(1)}{c_1(1)} \\ &= 1 - \frac{0,281}{2} \\ &= 0,860 \end{aligned}$$

Vamos ver se o valor encontrado pode ser admitido, levando-se em conta a precisão.

$$\frac{|x_1 - x_0|}{|x_1|} = \frac{|0,860 - 1|}{|0,860|} = 0,163 \text{ e } 0,163 > 10^{-3}.$$

Continuando o processo de iteração,

$x_1 = 0,860$	$a_3 = 1$	$a_2 = -2$	$a_1 = 3$	$a_0 = -1,719$
	$b_3 = 1$	$b_2 = a_2 + x_1 \cdot b_3$ $= -1,140$	$b_1 = a_1 + x_1 \cdot b_2$ $= 2,020$	$b_0 = a_0 + x_1 \cdot b_1$ $= 0,0180$
	$c_3 = 1$	$c_2 = -0,280$	$c_1 = 1,779$	

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{b_0(x_1)}{c_1(x_1)} \\ &= 0,860 - \frac{0,0180}{1,779} \\ &= 0,850 \end{aligned}$$

Calculando o erro relativo,

$$\frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} = \frac{|0,850 - 0,860|}{|0,850|} = 0,011 \text{ e } 1,1 \cdot 10^{-2} > 10^{-3}.$$

Vamos para a iteração 3.

$x_2 = 0,850$	$a_3 = 1$	$a_2 = -2$	$a_1 = 3$	$a_0 = -1,719$
	$b_3 = 1$	$b_2 = -1,150$	$b_1 = 2,022$	$b_0 = 0,000$
	$c_3 = 1$	$c_2 = -0,300$	$c_1 = 1,767$	

Como $b_0(0,850) = 0,000 = P_3(0,850)$, encontramos nossa primeira raiz: 0,850.

Uma vez tendo encontrado esta raiz, e sabendo que o polinômio de grau 3 tem três raízes, facilmente podemos encontrar as outras duas. Vamos entender como, teoricamente, e depois voltaremos para este exemplo.

Vimos que, utilizando o algoritmo de Briot-Ruffini-Horner, conseguimos determinar a raiz do polinômio $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$, que denotaremos por α_1 . Você deve se lembrar de ter aprendido no Ensino Médio que, de posse desta raiz, a divisão de $P_n(x)$ por $(x - \alpha_1)$ será exata, isto é, o resto desta divisão será zero. Podemos então reescrevê-lo como $P_n(x) = Q_{n-1}(x) \cdot (x - \alpha_1)$.

- a_1), onde $Q_{n-1}(x)$ é um polinômio de grau $n-1$. Em particular, $Q_{n-1}(x) = \frac{P_n(x)}{(x - \alpha_1)}$. O mais interessante é que os coeficientes deste novo polinômio $Q_{n-1}(x)$ são exatamente b_n, b_{n-1}, \dots, b_2 e b_1 . De fato,

$$\begin{aligned} Q_{n-1}(x) \cdot (x - \alpha_1) &= (b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \dots + b_2 x + b_1) \cdot (x - \alpha_1) \\ &= b_n x^{n-1} (x - \alpha_1) + b_{n-1} x^{n-2} (x - \alpha_1) + \dots + b_2 x (x - \alpha_1) + b_1 (x - \alpha_1) \\ &= x^{n-1} (b_n x - b_n \alpha_1) + x^{n-2} (b_{n-1} x - b_{n-1} \alpha_1) + \dots + x (b_2 x - b_2 \alpha_1) + (b_1 x - b_1 \alpha_1) \\ &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 \\ &= P_n(x) \end{aligned}$$

A conclusão imediata disto é que as demais $n - 1$ raízes de $P_n(x)$ são exatamente as $n - 1$ raízes de $Q_{n-1}(x)$, ou seja, houve uma redução de grau no nosso problema. Chamamos este processo de deflação.

Vamos ver na prática o que isto significa. Voltemos ao exemplo

$$P_3(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1,719,$$

que sabemos possuir uma das raízes no ponto 0,85. De acordo com o que acabamos de demonstrar, podemos reescrever $P_3(x)$ como:

$$\begin{aligned} P_3(x) &= (b_3 x^2 + b_2 x + b_1) \cdot (x - 0,85) \\ &= (x^2 - 1,150x + 2,022) \cdot (x - 0,85) \end{aligned}$$

Assim as outras duas raízes de $P_3(x)$ são exatamente as duas raízes do polinômio de segundo grau $Q_2(x) = x^2 - 1,150x + 2,022$, que podem ser encontradas através do método:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{-(-1,150) + \sqrt{(-1,150)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2,022)}}{2} = 0,575 + 1,300i \\ \alpha_2 = \frac{-(-1,150) - \sqrt{(-1,150)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2,022)}}{2} = 0,575 - 1,300i \end{cases}$$

Obs.: Note que, pelo Gráfico 9 – Função $P_3(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1,719$ já poderíamos esperar que este polinômio só possuísse uma raiz real.

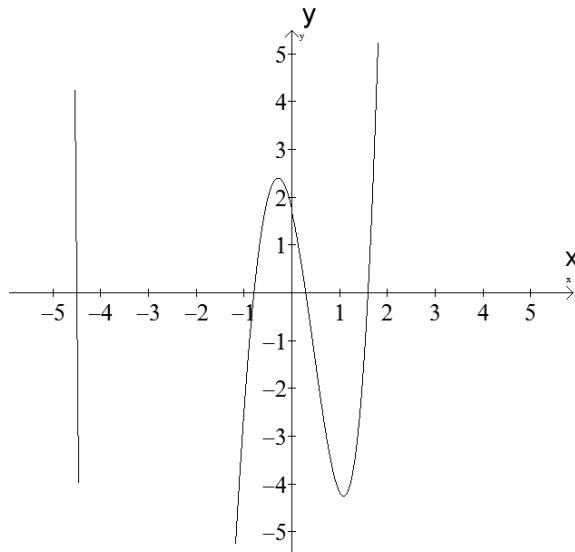
Vamos resolver mais um exemplo para consolidar este método de resolução?

Exemplo: Encontremos as raízes do polinômio a seguir com precisão de 10^{-2} :

$$P_4(x) = x^4 + 3,4x^3 - 5,99x^2 - 4,30x + 1,73$$

Como o polinômio tem grau 4, significa que ele possui 4 raízes. Vamos encontrá-las pelo método de Newton, utilizando o algoritmo de Briot-Ruffini-Horner.

Inicialmente, precisamos localizar pelo menos uma das raízes, analisando o gráfico do polinômio:

GRÁFICO 10 – FUNÇÃO $P_4(x) = x^4 + 3,4x^3 - 5,99x^2 - 4,30x + 1,73$ 

FONTE: A autora

Note que uma das raízes fica próxima ao ponto $x = 1,5$. Vamos começar procurando esta raiz, utilizando para isso $x_0 = 1,5$. Não usaremos o mesmo grau de detalhamento dos cálculos feito no exercício anterior. Por isso, sugerimos que você acompanhe esse exemplo tentando reproduzi-lo com o auxílio de uma calculadora ou mesmo de uma planilha.

$$k = 0:$$

$x_0 = 1,5$	$a_4 = 1$	$a_3 = 3,4$	$a_2 = -5,99$	$a_1 = -4,38$	$a_0 = 1,73$
	$b_4 = 1$	$b_3 = a_3 + x_0 \cdot b_4$ $= 4,9$	$b_2 = a_2 + x_0 \cdot b_3$ $= 1,36$	$b_1 = a_1 + x_0 \cdot b_2$ $= -2,34$	$b_0 = a_0 + x_0 \cdot b_1$ $= -1,78$
	$c_4 = 1$	$c_3 = b_3 + x_0 \cdot c_4$ $= 6,4$	$c_2 = b_2 + x_0 \cdot c_3$ $= 10,96$	$c_1 = b_1 + x_0 \cdot c_2$ $= 14,18$	

$$x_1 = x_0 - \frac{b_0(x_0)}{c_1(x_0)} = 1,5 - \frac{(-1,78)}{14,18} = 1,63.$$

Vamos ver se o valor encontrado pode ser admitido, levando-se em conta a precisão.

$$\frac{|x_1 - x_0|}{|x_1|} = \frac{|1,63 - 1,5|}{|1,63|} = 0,08 > 10^{-2}$$

$$k = 1:$$

$x_1 = 1,63$	1	3,4	-5,99	-4,38	1,73
	1	5,03	2,21	-0,78	0,46
	1	6,66	13,06	20,52	

$$x_2 = x_1 - \frac{b_0(x_1)}{c_1(x_1)} = 1,63 - \frac{(0,46)}{20,52} = 1,61$$

Calculando o erro relativo: $\frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} = \frac{|1,61 - 1,63|}{|1,61|} = 0,012 > 10^{-2}$.

$k = 2$:

$x_1 = 1,61$	1	3,4	-5,99	-4,38	1,73
	1	5,01	2,08	-1,04	0,06
	1	6,62	12,73	19,46	

$$x_3 = x_2 - \frac{b_0(x_2)}{c_1(x_2)} = 1,63 - \frac{0,06}{19,46} = 1,61$$

Calculando o erro relativo: $\frac{|x_3 - x_2|}{|x_3|} = \frac{|1,61 - 1,61|}{|1,61|} = 0 < 10^{-2}$

Sendo assim, encontramos nossa primeira raiz: 1,61.

Como $P_4(x) = x^4 + 3,4x^3 - 5,99x^2 - 4,30x + 1,73$ e

$$P_4(x) = (b_4x^3 + b_3x^2 + b_2x + b_1) \cdot (x - 1,61)$$

$$P_4(x) = (x^3 + 5,01x^2 - 2,08x - 1,04) \cdot (x - 1,61),$$

para encontrarmos as outras raízes, precisaremos agora aplicar o processo no polinômio $Q_3(x) = x^3 + 5,01x^2 - 2,08x - 1,04$.

Note que as raízes de $Q_3(x)$ são raízes de $P_4(x)$. Então, de acordo com o $P_4(x) = x^4 + 3,4x^3 - 5,99x^2 - 4,30x + 1,73$, $Q_3(x)$ tem uma raiz próxima ao ponto $x = -1$. Tomemos $x_0 = -1$.

$x_0 = -1$	1	5,01	2,08	-1,04
	1	4,01	-1,93	0,89
	1	3,01	-4,94	

$$x_1 = x_0 - \frac{b_0(x_0)}{c_1(x_0)} = -1 - \frac{0,89}{(-4,94)} = -0,82$$

Erro relativo: $\frac{|x_1 - x_0|}{|x_1|} = \frac{|-0,82 - (-1)|}{|-0,82|} = 0,22 > 10^{-2}$

$k = 1$:

$x_1 = -0,82$	1	5,01	2,08	-1,04
	1	4,19	-1,36	0,07
	1	3,37	-4,12	

$$x_2 = -0,82 - \frac{0,07}{(-4,12)} = -0,80$$

Erro relativo: $\frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} = \frac{|-0,80 - (-0,82)|}{|-0,80|} = 0,02 > 10^{-2}$

$k = 2$:

$x_2 = -0,80$	1	5,01	2,08	-1,04
	1	4,21	-1,29	-0,01
	1	3,41	-4,02	

$$x_3 = -0,80 - \frac{-0,01}{-4,02} = -0,80$$

Calculando o erro relativo: $\frac{|x_3 - x_2|}{|x_3|} = \frac{|-0,80 - (-0,80)|}{|-0,80|} = 0 < 10^{-2}$

Sendo assim, encontramos nossa segunda raiz: -0,80.

Como $P_4(x) = x^4 + 3,4x^3 - 5,99x^2 - 4,30x + 1,73$ e

$$P_4(x) = (b_3x^2 + b_2x + b_1) \cdot (x - 1,61) \cdot (x + 0,8)$$

$$P_4(x) = (x^3 + 5,01x^2 - 2,08x - 1,04) \cdot (x - 1,61) = (x^2 + 4,21x - 1,29) \cdot (x - 1,61) \cdot (x + 0,8)$$

para encontrarmos as outras duas raízes de $P_4(x)$, basta resolvemos a equação $x^2 + 4,21x - 1,29 = 0$ (deixamos como exercício para você resolver a equação).

Portanto, as raízes de $P_4(x)$ são 1,61, -0,80, 0,29 e -4,5.



Existe uma variação do algoritmo de Briot-Ruffini-Horner que permite também encontrar as raízes complexas de um polinômio. Esse método é conhecido como Método de Newton-Bairstow, e não trataremos dele aqui. Entretanto, você pode encontrá-lo muito bem explicado no livro Cálculo Numérico, de N. B. Franco.

3 ALGORITMO QUOCIENTE-DIFERENÇA

Até agora, todos os métodos de obtenção de raízes que estudamos exigiam que conhecêssemos pelo menos um ponto suficientemente próximo de cada raiz para que pudéssemos iniciar o processo de iteração. Esse fato poderia dificultar bastante nosso trabalho, a aplicação dos métodos, uma vez que precisávamos utilizar algum tipo de programa para traçar o gráfico do polinômio ou, pelo menos, fazermos um estudo de sinais em um intervalo para encontrar tais pontos.

O método que veremos agora não exige esse conhecimento, ou seja, não precisamos procurar um intervalo que contenha a raiz do polinômio em questão, mesmo que as raízes sejam complexas. Ele é tão eficiente que nos permite obter aproximações para TODAS as raízes do polinômio SIMULTANEAMENTE. Esse método foi desenvolvido por um matemático chamado H. Rutishauser e é conhecido como Algoritmo Quociente-Diferença ou Algoritmo Q-D.

Obviamente, esse método não pode ser aplicado para todos os polinômios – caso contrário, para que estudar outros métodos, não é mesmo? Na verdade, o Algoritmo Q-D só pode ser aplicado para polinômios cujos coeficientes sejam todos não nulos. Vamos entender como o método funciona e você entenderá o porquê dessa exigência.

Consideremos um polinômio de grau maior ou igual a 1,

$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$, tal que $a_k \neq 0$ para todo $0 \leq k \leq n$. Iremos construir uma tabela a partir destes coeficientes da seguinte forma:

Formaremos n colunas designadas pela letra 'q' e $n+1$ colunas designadas pela letra 'e', intercalando-as, totalizando $2n+1$ colunas (lembrando que n é o grau do polinômio).

$e^{(0)}$	$q^{(1)}$	$e^{(1)}$	$q^{(2)}$	$e^{(2)}$	$q^{(3)}$...	$e^{(n-1)}$	$q^{(n)}$	$e^{(n)}$
-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----	-------------	-----------	-----------

Nas linhas ímpares, preencheremos os valores relativos às posições 'q' e nas linhas pares, os valores relativos às posições 'e' da seguinte forma:

Linha 1 de 'q's:
$$\begin{cases} q^{(1)} = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ q^{(k)} = 0, k = 2, \dots, n \end{cases}$$

Linha 1 de 'e's:
$$\begin{cases} e^{(0)} = 0 \\ e^{(k)} = \frac{a_{n-(k+1)}}{a_{n-k}}, k = 1, 2, \dots, n-1 \\ e^{(n)} = 0 \end{cases}$$

Logo, as duas primeiras linhas da tabela terão os seguintes valores:

$e^{(0)}$	$q^{(1)}$	$e^{(1)}$	$q^{(2)}$	$e^{(2)}$	$q^{(3)}$...	$e^{(n-1)}$	$q^{(n)}$	$e^{(n)}$
	$-\frac{a_{n-1}}{a_n}$		0		0			0	
0		$\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$		$\frac{a_{n-3}}{a_{n-2}}$			$\frac{a_0}{a_1}$		0

Demais linhas de 'q's: $q^{(k)} = e^{(k)} - e^{(k-1)} + q^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Valores pegos nas
linhas imediatamente

Demais linhas de 'e's:
$$\begin{cases} e^{(0)} = 0 \\ e^{(k)} = \frac{q^{(k+1)}}{q^{(k)}} e^{(k)}, k = 1, 2, \dots, n-1 \\ e^{(n)} = 0 \end{cases}$$

Valores pegos nas
linhas imediatamente
anteriores

As fórmulas acima são utilizadas até que os valores 'e's tendam a zero. Neste momento, os valores 'q's tenderão às raízes do polinômio.

Para entender melhor como esse processo funciona, vamos aplicá-lo em um exemplo.

Exemplo: Encontremos as raízes do polinômio a seguir através do algoritmo Q-D:

$$P_4(x) = x^4 + 3,4x^3 - 5,99x^2 - 4,30x + 1,73$$

$$a_4 = 1, \quad a_3 = 3,4, \quad a_2 = -5,99, \quad a_1 = -4,30, \quad a_0 = 1,73$$

Vamos calcular os valores que deverão ser postos em cada linha primeiro (pelo menos, as 3 linhas iniciais) e depois os colocaremos na tabela. Observe que, a partir da quarta linha em diante, os cálculos repetem o procedimento feito para a terceira.

$$\begin{aligned} \text{Linha 1 de 'q's: } & \left\{ \begin{array}{l} q^{(1)} = -\frac{a_{4-1}}{a_4} = -\frac{a_3}{a_4} = -\frac{3,4}{1} = -3,4 \\ q^{(2)} = 0, \quad q^{(3)} = 0, \quad q^{(4)} = 0 \\ e^{(0)} = 0 \end{array} \right. \\ \text{Linha 1 de 'e's: } & \left\{ \begin{array}{l} e^{(k)} = \frac{a_{4-(k+1)}}{a_{4-k}}, \quad k = 1, 2, 3 \Rightarrow \begin{array}{l} e^{(1)} = \frac{a_{4-(1+1)}}{a_{4-1}} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{-5,99}{3,4} = -1,762 \\ e^{(2)} = \frac{a_{4-(2+1)}}{a_{4-2}} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{-4,30}{-5,99} = 0,718 \\ e^{(3)} = \frac{a_{4-(3+1)}}{a_{4-3}} = \frac{a_0}{a_1} = \frac{1,73}{-4,30} = -0,402 \end{array} \\ e^{(4)} = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Linha 2 de 'q's:

$$\begin{aligned} q^{(k)} &= e^{(k)} - e^{(k-1)} + q^{(k)}, \quad k = 1, 2, 3, 4 \Rightarrow \begin{array}{l} q^{(1)} = e^{(1)} - e^{(1-1)} + q^{(1)} = e^{(1)} - e^{(0)} + q^{(1)} \\ \quad = -1,762 - 0 + (-3,4) = -5,162 \\ q^{(2)} = e^{(2)} - e^{(2-1)} + q^{(2)} = e^{(2)} - e^{(1)} + q^{(2)} \\ \quad = 0,718 - (-1,762) + 0 = 2,480 \\ q^{(3)} = e^{(3)} - e^{(3-1)} + q^{(3)} = e^{(3)} - e^{(2)} + q^{(3)} \\ \quad = -0,402 - 0,718 + 0 = -1,120 \\ q^{(4)} = e^{(4)} - e^{(4-1)} + q^{(4)} = e^{(4)} - e^{(3)} + q^{(4)} \\ \quad = 0 - (-0,402) + 0 = 0,402 \end{array} \\ \text{Valores pegos nas} \\ \text{linhas imediatamente} \\ \text{anteriores} \end{aligned}$$

Linha 2 de 'e's:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} e^{(0)} = 0 \\ e^{(k)} = \frac{q^{(k+1)}}{q^{(k)}} e^{(k)}, \quad k = 1, 2, 3 \Rightarrow \begin{array}{l} e^{(1)} = \frac{q^{(1+1)}}{q^{(1)}} e^{(1)} = \frac{q^{(2)}}{q^{(1)}} e^{(1)} = \left(\frac{2,479}{-5,161} \right) \cdot (-1,762) = 0,842 \\ e^{(2)} = \frac{q^{(2+1)}}{q^{(2)}} e^{(2)} = \frac{q^{(3)}}{q^{(2)}} e^{(2)} = \left(\frac{-1,120}{2,479} \right) \cdot (0,718) = -0,324 \\ e^{(3)} = \frac{q^{(3+1)}}{q^{(3)}} e^{(3)} = \frac{q^{(4)}}{q^{(3)}} e^{(3)} = \left(\frac{0,402}{-1,120} \right) \cdot (-0,402) = 0,144 \end{array} \\ \text{Valores pegos nas} \\ \text{linhas imediatamente} \\ \text{anteriores} \\ e^{(4)} = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Linha 3 de 'q's:

$$q^{(k)} = e^{(k)} - e^{(k-1)} + q^{(k)}, \quad k = 1, 2, 3, 4 \Rightarrow$$

Valores pegos nas linhas imediatamente anteriores

$$\begin{aligned} q^{(1)} &= e^{(1)} - e^{(1-1)} + q^{(1)} = e^{(1)} - e^{(0)} + q^{(1)} \\ &= 0,846 - 0 + (-5,161) = -4,315 \\ q^{(2)} &= e^{(2)} - e^{(2-1)} + q^{(2)} = e^{(2)} - e^{(1)} + q^{(2)} \\ &= -0,324 - 0,846 + 2,479 = 1,309 \\ q^{(3)} &= e^{(3)} - e^{(3-1)} + q^{(3)} = e^{(3)} - e^{(2)} + q^{(3)} \\ &= 0,144 - (-0,324) + (-1,120) = -0,652 \\ q^{(4)} &= e^{(4)} - e^{(4-1)} + q^{(4)} = e^{(4)} - e^{(3)} + q^{(4)} \\ &= 0 - 0,144 + 0,402 = 0,258 \end{aligned}$$

Linha 3 de 'e's:

$$\begin{cases} e^{(0)} = 0 \\ e^{(k)} = \frac{q^{(k+1)}}{q^{(k)}} e^{(k)}, \quad k = 1, 2, 3 \\ e^{(4)} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Valores pegos nas linhas imediatamente anteriores

$$\begin{aligned} e^{(1)} &= \frac{q^{(1+1)}}{q^{(1)}} e^{(1)} = \frac{q^{(2)}}{q^{(1)}} e^{(1)} = \left(\frac{1,309}{-4,315} \right) \cdot 0,846 = -0,257 \\ e^{(2)} &= \frac{q^{(2+1)}}{q^{(2)}} e^{(2)} = \frac{q^{(3)}}{q^{(2)}} e^{(2)} = \left(\frac{-0,652}{1,309} \right) \cdot (-0,324) = 0,161 \\ e^{(3)} &= \frac{q^{(3+1)}}{q^{(3)}} e^{(3)} = \frac{q^{(4)}}{q^{(3)}} e^{(3)} = \left(\frac{0,258}{-10,652} \right) \cdot 0,144 = -0,057 \end{aligned}$$

Vamos agora colocar os números que encontramos até agora na tabela e preenchê-la com mais alguns valores que você encontrará seguindo o procedimento acima.

$e^{(0)}$	$q^{(1)}$	$e^{(1)}$	$q^{(2)}$	$e^{(2)}$	$q^{(3)}$	$e^{(3)}$	$q^{(4)}$	$e^{(4)}$
{	-3,4		0		0		0	
0		-1,762		0,718		-0,402		0
{	-5,162		2,480		-1,120		0,402	
0		0,847		-0,324		0,144		0
{	-4,315		1,309		-0,652		0,258	
0		-0,257		0,161		-0,057		0
	-4,572		1,727		-0,87		0,315	
0		0,097		-0,081		0,021		0
	-4,475		1,549		-0,768		0,294	
0		-0,034		0,040		-0,008		0
	-4,509		1,623		-0,816		0,302	

Claramente as colunas correspondentes a 'e's tendem a zero, e as colunas 'q's tendem a -4,50, 1,60, -0,80 e 0,30, que são as raízes do polinômio.

Pode acontecer de uma coluna 'e' não tender a zero, mas ficar oscilando ao redor de um determinado número. Isso acontece quando o polinômio tem raízes complexas. Nesse caso, consideramos um polinômio de grau 2 na forma $Q_2(x) = x^2 - rx - s$, tal que as raízes de $Q_2(x)$ sejam as raízes complexas de $P_n(x)$. Obteremos os valores de r e s da seguinte forma:

$q^{(k)} + q^{(k+1)} \rightarrow r$ ou seja, r é a soma dos dois valores de q abaixo (direita e esquerda), um de cada lado do valor de e.

 $q^{(k)} \cdot q^{(k+1)} \rightarrow -s$ ou seja, -s (oposto de s) é o produto do valor de q acima e à esquerda, pelo valor de q abaixo e a direita.

Valor pego na linha
imediatamente
anterior

Encontrados os valores de r e -s, basta substituir e resolver a equação $x^2 - rx - s = 0$.

Exemplo: Encontremos as raízes do polinômio a seguir através do algoritmo Q-D:

$$P_3(x) = x^3 - 7x^2 + 18x - 15$$

$$a_3 = 1, \quad a_2 = -7, \quad a_1 = 18, \quad a_0 = -15$$

$e^{(0)}$	$q^{(1)}$	$e^{(1)}$	$q^{(2)}$	$e^{(2)}$	$q^{(3)}$	$e^{(3)}$
	7		0		0	
0		-2,571		-0,833		0
	4,429		1,738		0,833	
0		-1,009		-0,399		0
	3,420		2,348		1,232	
0		-0,693		-0,209		0
	2,727		2,832		1,441	
0		-0,72		-0,106		0
	2,007		3,446		1,547	
0		-1,236		-0,048		0
	* 0,771		4,634		1,595	
0		* -7,429		* -0,017		0
	* -6,658		* 12,046		* 1,612	

* 0,771: $q^{(1)}$ esquerda acima * -0,017: tendendo a zero

* -6,658: $q^{(1)}$ esquerda abaixo * 1,612: raiz

* -7,429: oscilando

* 12,046: $q^{(2)}$ direita abaixo

Observe que, enquanto $e^{(2)} \rightarrow 0$, a coluna $e^{(1)}$ assume valores que oscilam. Assim, concluímos que uma das raízes do polinômio é 1,612 (ou algo próximo disto) e as outras duas raízes devem ser complexas. Vamos determiná-las.

$$(q^{(k)} + q^{(k+1)} \rightarrow r) \Rightarrow -6,658 + 12,046 = 5,388$$

$$\left(\underbrace{q^{(k)} \cdot q^{(k+1)}}_{\text{Valor pego na}} \rightarrow -s \right) \Rightarrow 0,771 \cdot 12,046 = 9,287$$

Valor pego na

linha anterior

Considerando então o polinômio $Q_2(x) = x^2 - 5,388 + 9,287$ e resolvendo a equação, chegamos às seguintes raízes complexas: $2,694 - 1,425i$ e $2,694 + 1,425i$.

Portanto, as raízes do polinômio em questão são 1,612; $2,694 - 1,425i$ e $2,694 + 1,425i$.

Observe que o algoritmo Q-D nos fornece aproximações para as raízes de qualquer polinômio. Se quisermos obter valores mais precisos, devemos aplicar o algoritmo Q-D para encontrar tais aproximações e refinar esses valores através do Algoritmo de Briot-Ruffini-Horner para cada valor encontrado. Desta forma, podemos afirmar que esses dois métodos de obtenção de raízes são complementares.

RESUMO DO TÓPICO 3

**Chegou a hora de rever o conteúdo apresentado neste terceiro tópico:
leia com atenção.**

- Uma equação polinomial, ou polinômio, de grau n é uma equação não linear da forma $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$, onde $a_n \neq 0$.
- O método de Newton para polinômios pode ser escrito como sendo $x_{k+1} = x_k - \frac{P_n(x_k)}{P'_n(x_k)} = x_k - \frac{b_0(x_k)}{c_1(x_k)}$, onde $b_0(x_k)$ e $c_1(x_k)$ são obtidos via algoritmo de Briot-Ruffini-Horner.
- Se o polinômio $P_n(x)$ tiver grau maior do que 3, uma vez encontrada uma raiz α , reapplymos o algoritmo de Briot-Ruffini-Horner para o polinômio $\frac{P_n(x)}{x - \alpha} = Q_{n-1}(x)$. Obviamente, todas as raízes de $Q_{n-1}(x)$ serão raízes de $P_n(x)$.
- Algoritmo Quociente-Diferença ou algoritmo Q-D: fornece aproximações para TODAS as raízes do polinômio SIMULTANEAMENTE. Só pode ser aplicado para polinômios cujos coeficientes sejam todos não nulos.
- Se quisermos obter valores mais precisos, devemos aplicar o algoritmo Q-D para encontrar as aproximações das raízes de um determinado polinômio e refiná-las através do algoritmo de Briot-Ruffini-Horner para cada valor encontrado. Desta forma, podemos afirmar que esses dois métodos de obtenção de raízes são complementares.

AUTOATIVIDADE



Em qualquer área da Matemática, só conseguimos realmente aprender um assunto depois de praticá-lo bastante, através da resolução de exercícios. Que tal fixar agora o conteúdo que vimos neste tópico?

- 1 Aplique o método de Newton para determinar as raízes dos polinômios a seguir, com precisão 10^{-3} .

a) $P_3(x) = x^3 - 0,8x^2 - 9,32x + 12,24$, com $x_0 = 3$

b) $P_4(x) = x^4 + 1,5x^3 - 39,5x^2 - 1,5x + 38,5$, com $x_0 = 6$ e $x_0 = 1,5$.

- 2 Aplique o algoritmo Q-D para determinar todas as raízes dos polinômios a seguir:

a) $P_4(x) = x^4 + 0,6x^3 - 6,13x^2 + 7,96x - 3,16$

b) $P_3(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 6$

- 3 Aplique o algoritmo Q-D para determinar todas as raízes dos polinômios a seguir, e as refine através do método de Newton, dada a precisão 10^{-2} :

a) $P_3(x) = x^3 + 2x^2 - 11x - 12$

b) $P_4(x) = x^4 - 5,3x^3 + 9,96x^2 - 7,812x + 2,117$

INTERPOLAÇÃO

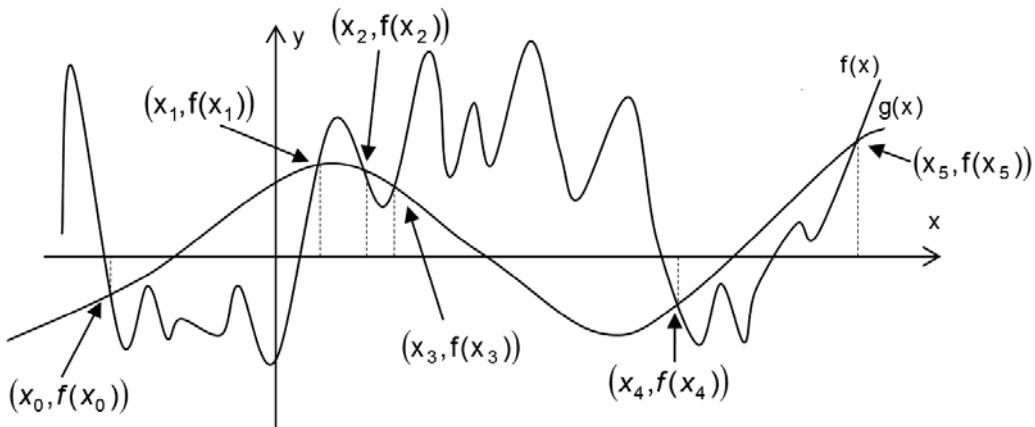
1 INTRODUÇÃO

Considere a seguinte tabela, que relaciona o número de habitantes da cidade de Belém/PA ao longo dos anos:

Ano	1991	1996	2000	2007
Habitantes	1.244.689	1.140.349	1.280.614	1.408.847

Suponhamos que desejássemos saber qual era a população de Belém em 1993. Infelizmente, não temos essa informação na tabela, mas poderíamos tentar inferir esse valor. Pela tabela, há um decréscimo populacional entre os anos de 1991 e 1996, o que poderia nos levar a crer que o número de habitantes em 1993 fosse maior do que 1.244.689 e menor do que 1.140.349, certo? Se sua resposta foi sim, você acabou de fazer mentalmente um processo que chamamos de interpolação. Vamos explicar: você supôs que entre esses dois pontos, o gráfico da função que relaciona o número de habitantes ao ano é decrescente, o que não necessariamente é verdade: nada impede que a população de 1993 seja maior do que 1.244.689 e só então tenha decrescido; ou mesmo que seja inferior a 1.140.349, tendo havido um acréscimo depois de 1993.

Quando não conhecemos uma função f que descreve um fenômeno, mas temos seus valores em determinados pontos x_0, x_1, \dots, x_n , podemos criar uma função g com certas características definidas *a priori*, com $g(x_0) = f(x_0)$, $g(x_1) = f(x_1), \dots, g(x_n) = f(x_n)$ e de forma que, se desejarmos saber o valor de f em um determinado ponto \tilde{x} , poderemos calcular $g(\tilde{x})$ e trabalhar com o resultado desta aplicação como se fosse $f(\tilde{x})$.



A vantagem de fazer essa substituição é que, muitas vezes, não conhecemos a função f que descreve um fenômeno, ou ela tem um comportamento que não nos permite calcular sua derivada ou sua integral. Fazendo essa troca, podemos escolher g de tal forma que consigamos contornar todos esses problemas.

Observe que quanto maior for a quantidade de pontos em que conhecemos o valor de f , mais g se aproximarará de f . Chamamos a esse processo de interpolação e os pontos x_0, x_1, \dots, x_n onde essas funções irão coincidir ($g(x_0) = f(x_0), g(x_1) = f(x_1), \dots, g(x_n) = f(x_n)$) são chamados nós da interpolação.

As melhores funções para fazerem este papel sem dúvida nenhuma são as funções polinomiais. A grande vantagem destas funções é que elas são contínuas, de fácil resolução numérica, ou seja, conhecemos várias formas de encontrar seus zeros, pontos de máximos e mínimos, e suas derivadas e integrais também são polinômios. Desta forma, podemos afirmar que polinômios são funções muito bem comportadas.

Neste tópico, estudaremos alguns métodos de interpolação via polinômios.

2 PROBLEMA GERAL DA INTERPOLAÇÃO

Vamos considerar f uma função que não conhecemos, mas conhecemos seu valor em alguns pontos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. O problema geral da interpolação é, dados estes pontos, encontrarmos um polinômio de grau no máximo n , $P(x)$ tal que $P(x_0) = f(x_0), P(x_1) = f(x_1), \dots, P(x_n) = f(x_n)$. A existência de tal polinômio interpolador é garantida por um teorema importantíssimo da Análise Matemática:

TEOREMA DE WEIRSTRASS: se f é uma função contínua num intervalo fechado $[a,b]$, então, existe alguma função polinomial $P(x)$ de grau m , para algum m natural, tal que $P(x)$ esteja tão próximo de f quanto se queira.

Não demonstraremos este teorema aqui simplesmente pelo fato de a demonstração não nos acrescentar nada (ela não nos dá pistas de como construir esse polinômio, só garante que ele existe), mas você pode encontrá-la em qualquer bom livro de análise.

Outro fato interessante é que esse polinômio, uma vez construído, é único! Essa afirmação, sim, merece ser demonstrada:

Consideremos os pontos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ distintos entre si e sejam $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ os valores relacionados a $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ por uma função desconhecida $f(y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n))$. Consideremos também o polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ tal que $P(x_0) = y_0, P(x_1) = y_1, \dots, P(x_n) = y_n$. Então podemos montar o seguinte sistema linear de $(n+1)$ linhas e $(n+1)$ incógnitas $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$:

$$\begin{cases} a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 = y_1 \\ \vdots \\ a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \dots + a_2 x_n^2 + a_1 x_n + a_0 = y_n \end{cases}$$

Assim, a matriz dos coeficientes do sistema é dada por

$$A = \begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n^2 & x_n & 1 \end{bmatrix}.$$

Agora esta matriz é uma matriz de Vandermonde e, visto que os pontos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ são distintos entre si, $\det A \neq 0$. Portanto, o sistema possui solução única, implicando o polinômio $P(x_n)$ ser único.

3 MÉTODOS DE INTERPOLAÇÃO

Já sabemos que, mesmo não conhecendo uma função f explicitamente, mas sabemos seu valor em alguns pontos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ distintos entre si, existe um único polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ tal que $P(x_0) = f(x_0), P(x_1) = f(x_1), \dots, P(x_n) = f(x_n)$. Também vimos anteriormente que podemos encontrar os coeficientes deste polinômio através da “simples” resolução de um sistema linear. Aparentemente, o problema da obtenção do polinômio está resolvido. Por outro lado, mencionamos também que quanto maior for o número n de pontos em que conhecemos o valor de f , melhor conseguimos aproxima-la por um polinômio. Ou seja, quanto maior for o n , melhor. Mas daí a “simples”

resolução de um sistema linear passa a não ser mais tão simples assim: imagine resolver um sistema linear com 500 equações e 500 incógnitas! Ainda bem que certos matemáticos, ao se depararem com esse tipo de problema, criaram outras formas de se obter esse polinômio interpolador.

Vamos estudá-las a seguir.

3.1 INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

3.1.1 Interpolação polinomial de Lagrange

Sejam $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ pontos distintos entre si, e consideremos $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ os valores de uma função desconhecida f aplicada a $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. Consideremos também o polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ tal que $P(x_0) = y_0, P(x_1) = y_1, \dots, P(x_n) = y_n$.

Na seção anterior, montamos um sistema linear com $(n+1)$ linhas e $(n+1)$ incógnitas $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$, e evidenciamos o quanto pode ser complicado resolvê-lo.

A ideia agora é, antes de considerar o polinômio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

definirmos $(n+1)$ polinômios escritos da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \\ p_1(x) = (x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n) \\ \vdots \\ p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \end{array} \right.$$

Esses polinômios possuem como propriedade o fato de $p_j(x_j) \neq 0$ para todo $j = 0, 1, 2, \dots, n$ e $p_j(x_k) = 0$ quando $j \neq k$ ($j, k = 0, 1, 2, \dots, n$). Chamamos tais polinômios de polinômios de Lagrange.

Construiremos agora o nosso polinômio $P(x)$ de grau n como combinação linear dos polinômios de Lagrange. Logo, existem b_0, b_1, \dots, b_n números reais tais que $P(x) = b_0 \cdot p_0(x) + b_1 \cdot p_1(x) + \dots + b_n \cdot p_n(x)$.

Precisamos agora determinar os valores dos coeficientes b_0, b_1, \dots, b_n . Para isso, aplicamos o polinômio $P(x)$ nos pontos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ e usamos as propriedades dos polinômios de Lagrange.

$$\left. \begin{array}{l} P(x_k) = b_0 \cdot p_0(x_k) + b_1 \cdot p_1(x_k) + \dots + b_n \cdot p_n(x_k) \\ p_j(x_k) = 0, j \neq k \\ p_k(x_k) \neq 0 \\ P(x_k) = y_k \end{array} \right\} \Rightarrow y_k = b_k \cdot p_k(x_k) \Rightarrow b_k = \frac{y_k}{p_k(x_k)}$$

para cada $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Portanto,

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{y_0}{p_0(x_0)} \cdot p_0(x) + \frac{y_1}{p_1(x_1)} \cdot p_1(x) + \dots + \frac{y_n}{p_n(x_n)} \cdot p_n(x) \\ &= y_0 \cdot \frac{p_0(x)}{p_0(x_0)} + y_1 \cdot \frac{p_1(x)}{p_1(x_1)} + \dots + y_n \cdot \frac{p_n(x)}{p_n(x_n)} \\ &= y_0 \cdot L_0(x) + y_1 \cdot L_1(x) + \dots + y_n \cdot L_n(x), \end{aligned}$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} L_0(x) = \frac{p_0(x)}{p_0(x_0)} = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} \\ L_1(x) = \frac{p_1(x)}{p_1(x_1)} = \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} \\ \vdots \\ L_n(x) = \frac{p_n(x)}{p_n(x_n)} = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})} \end{array} \right.$$

O polinômio $P(x)$ é chamado de Polinômio Interpolador de Lagrange.

Observe que $L_j(x_j) = 1$ para todo $j = 0, 1, 2, \dots, n$ e $L_j(x_k) \neq 0$ quando $j \neq k$ ($j, k = 0, 1, 2, \dots, n$), implicando em $P(x_j) = y_0 \cdot L_0(x_j) + y_1 \cdot L_1(x_j) + \dots + y_n \cdot L_n(x_j) = y_j$, para todo $j = 0, 1, 2, \dots, n$.

Exemplo 1: Considere a tabela a seguir:

x	-1	0	1	2
f(x)	4	2	1	5

Note que temos os valores da função (que desconhecemos) para quatro valores (x_0, x_1, x_2, x_3). Assim, nosso polinômio interpolador terá grau 3,

$$\begin{aligned} P(x) &= y_0 \cdot L_0(x) + y_1 \cdot L_1(x) + y_2 \cdot L_2(x) + y_3 \cdot L_3(x) \\ &= 4 \cdot L_0(x) + 2 \cdot L_1(x) + 1 \cdot L_2(x) + 5 \cdot L_3(x) \end{aligned}$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} L_0(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = \frac{(x - 0)(x - 1)(x - 2)}{(-1 - 0)(-1 - 1)(-1 - 2)} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{-6} \\ L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{(x - (-1))(x - 1)(x - 2)}{(0 - (-1))(0 - 1)(0 - 2)} = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{2} \\ L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{(x - (-1))(x - 0)(x - 2)}{(1 - (-1))(1 - 0)(1 - 2)} = \frac{x^3 - 1x^2 - 2x}{-2} \\ L_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(x - (-1))(x - 0)(x - 1)}{(2 - (-1))(2 - 0)(2 - 1)} = \frac{x^3 - x}{6} \end{array} \right.$$

Logo,

$$\begin{aligned} P(x) &= 4 \cdot \frac{(x^3 - 3x^2 + 2x)}{-6} + 2 \cdot \frac{(x^3 - 2x^2 - x + 2)}{2} + 1 \cdot \frac{(x^3 - 1x^2 - 2x)}{-2} + 5 \cdot \frac{(x^3 - x)}{6} \\ &= \frac{-4(x^3 - 3x^2 + 2x) + 6(x^3 - 2x^2 - x + 2) - 3(x^3 - 1x^2 - 2x) + 5(x^3 - x)}{6} \\ &= \frac{-4x^3 + 12x^2 - 8x + 6x^3 - 12x^2 - 6x + 12 - 3x^3 + 3x^2 + 6x + 5x^3 - 5x}{6} \\ &= \frac{4x^3 + 3x^2 - 13x + 12}{6} \\ &= \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{13x}{6} + 2 \end{aligned}$$

Assim, encontramos o polinômio interpolador de Lagrange para esta função:

$$P(x) = \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{13x}{6} + 2$$

A título de curiosidade, vamos considerar uma função f conhecida, encontrar o polinômio interpolador de Lagrange para essa função e observar a diferença entre seus gráficos.

Exemplo 2: Consideremos a função $f(x) = e^{x^2}$ e vamos calculá-la no ponto $x = 0,25$, uma vez que sabemos seu valor nos pontos abaixo:

x	0,1	0,3	0,4
f(x)	1,01005	1,094174	1,173511

Note que, como conhecemos os valores da função aplicada em três pontos (x_0, x_1, x_2) , nosso polinômio interpolador terá grau 2.

$$\begin{aligned} P(x) &= y_0 \cdot L_0(x) + y_1 \cdot L_1(x) + y_2 \cdot L_2(x) \\ &= 1,01005 \cdot L_0(x) + 1,094174 \cdot L_1(x) + 1,173511 \cdot L_2(x) \end{aligned}$$

onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0,3)(x - 0,4)}{(0,1 - 0,3)(0,1 - 0,4)} = \frac{x^2 - 0,7x + 0,12}{0,06} \\ \\ L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 0,1)(x - 0,4)}{(0,3 - 0,1)(0,3 - 0,4)} = \frac{x^2 - 0,5x + 0,04}{-0,02} \\ \\ L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 0,1)(x - 0,3)}{(0,4 - 0,1)(0,4 - 0,3)} = \frac{x^2 - 0,4x + 0,03}{0,03} \end{array} \right.$$

Logo:

$$\begin{aligned} P(x) &= 1,01005 \cdot \frac{(x^2 - 0,7x + 0,12)}{0,06} + 1,094174 \cdot \frac{(x^2 - 0,5x + 0,04)}{-0,02} + 1,173511 \cdot \frac{(x^2 - 0,4x + 0,03)}{0,03} \\ &= 16,83417(x^2 - 0,7x + 0,12) - 54,7087(x^2 - 0,5x + 0,04) + 39,11703(x^2 - 0,4x + 0,03) \\ &= 1,2425 \cdot x^2 - 0,07638x + 1,005263 \end{aligned}$$

Vamos agora estimar o valor de $f(0,25)$ através do polinômio interpolador de Lagrange:

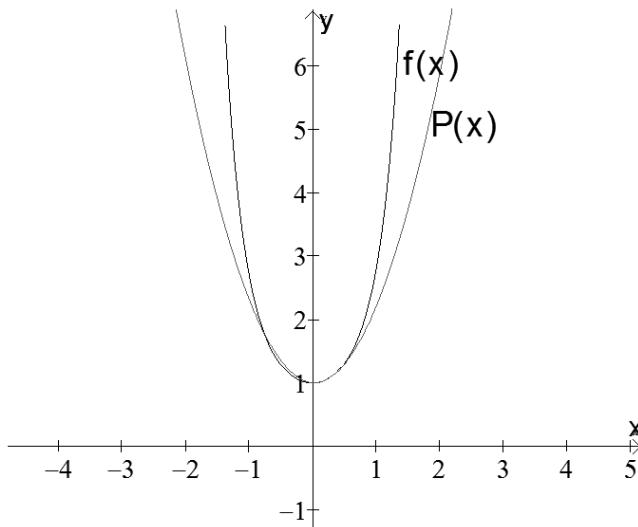
$$P(0,25) = 1,2425 \cdot (0,25)^2 - 0,07638 \cdot (0,25) + 1,005263 = 1,063824$$

Por outro lado, conhecemos a função f . Vamos aplicá-la ao ponto 0,25 e observar a diferença entre os valores.

$$f(0,25) = e^{(0,25)^2} = 1,064494.$$

O erro que cometemos pode ser calculado da seguinte forma:

$$\frac{|f(0,25) - P(0,25)|}{|f(0,25)|} = \frac{|1,064494 - 1,063825|}{|1,064494|} = 6,29 \cdot 10^{-4}.$$



3.1.2 Interpolação polinomial de Newton

Acabamos de aprender uma forma de interpolar uma função f apenas conhecendo seu valor numérico em um número n de pontos distintos entre si. Vimos que aplicar a Interpolação de Lagrange é mais eficiente que simplesmente resolver o sistema linear que surge quando igualamos a forma geral do polinômio interpolador com o valor de f nos n pontos. Entretanto, o método de Lagrange também tem um inconveniente. Se, por alguma razão, descobrirmos o valor de f para mais um ponto (ao invés de n , para $n+1$) e quisermos adicioná-lo na obtenção do polinômio interpolador, teremos que repetir todo o processo: criar $n+1$ polinômios de Lagrange para depois conseguir obter a forma geral do polinômio interpolador. Seria bem mais interessante se conseguíssemos um método onde pudéssemos aproveitar os passos já feitos, de preferência, apenas adicionar um termo ao polinômio interpolador, não é? Essa é a ideia do método de Newton. A partir de agora, todas as definições e resultados apresentados serão no intuito de construir o polinômio interpolador de Newton.

Suponhamos que existam x_0, x_1, \dots, x_n pontos distintos entre si para os quais temos o valor de uma função f , embora não a conheçamos explicitamente. Por um instante, vamos supor também que essa função, embora desconhecida, seja contínua. Você deve se lembrar da definição formal da derivada de f no ponto x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

sendo que a derivada nos fornece a taxa de variação de uma função num determinado ponto. Para obtermos a derivada de uma função, além de conhecê-la, é imprescindível que ela seja contínua, certo?

Voltemos agora para o nosso caso. Não conhecemos a função f e não sabemos se ela é realmente contínua e, portanto, não tem sentido falarmos em derivada de f . Então vamos agora definir o operador diferença dividida finita (DDF) de ordem 1 da função f em x_0 , que tem por objetivo aproximar o valor da derivada:

$$f[x, x_0] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Por outro lado, a única coisa que sabemos de f é seu valor quando aplicada aos pontos x_0, x_1, \dots, x_n . Assim, vamos tomar $x = x_1$ e considerar o operador DDF de primeira ordem da função f nos pontos x_0 e x_1 :

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Como sabemos que $x_1 \neq x_0$, a razão acima está bem definida. Também é fácil ver que $f[x_0, x_1] = f[x_1, x_0]$.

Definimos DDF de primeira ordem baseado no conceito de derivada. Então é natural pensarmos em DDF de ordens superiores, assim como fazemos com as derivadas. Vamos defini-las, assim, como fazemos com as derivadas, em termos das DDFs de ordens inferiores:

$$\text{DDF de ordem 2: } f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0}$$

$$\text{DDF de ordem 3: } f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_3, x_2, x_1] - f[x_2, x_1, x_0]}{x_3 - x_0}$$

⋮

$$\text{DDF de ordem } n: f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1] - f[x_{n-1}, \dots, x_1, x_0]}{x_n - x_0}.$$

As DDFs de qualquer ordem possuem a mesma propriedade da de ordem 1: não importa se calcularmos $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$ ou $f[x_1, x_3, x_2, x_0]$ por exemplo, o resultado será o mesmo.

Assim, podemos construir a seguinte tabela de DDF:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	...	Ordem n
x_0	$f[x_0]$				
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$			
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		
x_3	$f[x_3]$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	\ddots	$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	
x_{n-1}	$f[x_{n-1}]$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
x_n	$f[x_n]$				



Por convenção e ainda no intuito de proceder como no caso de derivadas, o operador de diferenças divididas de ordem 0 em um determinado ponto nada mais é do que a função aplicada neste ponto.

Exemplo: Considere os seguintes valores:

x	-1	0	1	2
f(x)	4	2	1	5

Vamos construir a tabela de DDFs para essa função, sabendo que:

$$\begin{cases} x_0 = -1 \Rightarrow f[x_0] = f(x_0) = 4 \\ x_1 = 0 \Rightarrow f[x_1] = f(x_1) = 2 \\ x_2 = 1 \Rightarrow f[x_2] = f(x_2) = 1 \\ x_3 = 2 \Rightarrow f[x_3] = f(x_3) = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{2 - 4}{0 - (-1)} = -2 \\ f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 2}{1 - 0} = -1 \\ f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2} = \frac{5 - 1}{2 - 1} = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{-1 - (-2)}{1 - (-1)} = \frac{1}{2} \\ f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_3, x_2] - f[x_2, x_1]}{x_3 - x_1} = \frac{4 - (-1)}{2 - 0} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_3, x_2, x_1] - f[x_2, x_1, x_0]}{x_3 - x_0} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{1}{2}}{2 - (-1)} = \frac{2}{3}$$

Assim, a tabela das DDFs fica como:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
-1	4			
0	2	-2		
1	1	-1		
2	5	4	$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{3}$

Vamos agora construir o polinômio interpolador de Newton. Não se assuste com o desenvolvimento a seguir. O objetivo não é assustar, mas mostrar que nada surge como mágica e sim como um processo.

Para o desenvolvimento desta demonstração, suponhamos sem perda de generalidade que os pontos x_0, x_1, \dots, x_n possuem uma relação de ordem, isto é, que $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n$ (podemos supor isso porque, caso não seja verdade, basta um reordenamento dos pontos em questão para torná-la válida) e consideraremos novamente f contínua em $[x_0, x_n]$, com tantas derivadas contínuas neste intervalo quantas forem necessárias.

Seja $P_0(x)$ o polinômio de grau 0 que interpola f no ponto x_0 . Obviamente, como o polinômio possui grau 0, ele é do tipo $P_0(x) = a_0$, onde a_0 é uma constante real. Mais ainda: como $P_0(x_0) = f[x_0]$ e $f(x_0) = f[x_0]$, segue que $a_0 = f[x_0]$ e, portanto, $P_0(x) = f[x_0]$ para todo x real. Assim, para todo $x \in (x_0, x_n]$,

$$\begin{aligned} f[x_0, x] &= \frac{f[x] - f[x_0]}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ \Rightarrow f(x) &= f(x_0) + f[x_0, x] \cdot (x - x_0) \\ \Rightarrow f(x) &= P_0(x) + E_0(x) \end{aligned}$$

onde $E_0(x) = f[x_0, x] \cdot (x - x_0) = f(x) - P_0(x)$ será a função erro que inevitavelmente aparecerá ao tentarmos aproximar f por P_0 .



Caro/a acadêmico/a, você lembra o que significa $x \in (x_0, x_n]$? Significa que x é tal que $x_0 < x \leq x_n$, ou seja, x pode assumir qualquer valor maior do que x_0 (mas não x_0 !) e menor ou igual a x_n .

Vamos agora construir o polinômio de grau 1, $P_1(x)$, que interpola f nos pontos x_0 e x_1 . Sabemos que $P_1(x) = a_0 + a_1 x$, para alguns a_0, a_1 reais – note que esse a_0 não tem nada a ver com o $P_0(x)$ definido anteriormente; apenas utilizamos a mesma letra para não carregar a notação.

Então:

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x] &= f[x_1, x_0, x] = \frac{f[x, x_0] - f[x_0, x_1]}{x - x_1} \\ &= \frac{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) - f[x_0, x_1]}{x - x_1} \\ &= \frac{(f(x) - f(x_0)) - f[x_0, x_1] \cdot (x - x_0)}{(x - x_0) \cdot (x - x_1)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f[x_0, x_1, x] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) = (f(x) - f(x_0)) - f[x_0, x_1] \cdot (x - x_0)$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1] \cdot (x - x_0) + f[x_0, x_1, x] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1)$$

Definimos então $P_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1] \cdot (x - x_0)$ e $E_1(x) = f[x_0, x_1, x] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1)$

Note que o polinômio está bem definido, porque

$$\begin{cases} P_1(x_0) = f(x_0) + f[x_0, x_1] \cdot (x_0 - x_0) = f(x_0) \\ P_1(x_1) = f(x_0) + f[x_0, x_1] \cdot (x_1 - x_0) = f(x_0) + \left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right) \cdot (x_1 - x_0) = f(x_1) \end{cases}$$

$$\text{Mais ainda: } P_1(x) = P_0(x) + f[x_0, x_1] \cdot (x - x_0)$$

Vamos agora construir o polinômio de grau 2, $P_2(x)$, que interpola f nos pontos x_0, x_1 e x_2 ($P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, para alguns a_0, a_1, a_2 reais). Então:

$$\begin{aligned}
f[x_0, x_1, x_2, x] &= f[x_2, x_1, x_0, x] = \frac{f[x, x_1, x_0] - f[x_0, x_1, x_2]}{x - x_2} \\
&= \frac{\left(\frac{f[x_0, x] - f[x_0, x_1]}{x - x_1} \right) - f[x_0, x_1, x_2]}{x - x_2} \\
&= \frac{\left(\frac{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) - f[x_0, x_1]}{x - x_1} \right) - f[x_0, x_1, x_2]}{x - x_2} \\
&= \frac{\left(\frac{f(x) - f(x_0) - f[x_0, x_1] \cdot (x - x_0)}{(x - x_0) \cdot (x - x_1)} \right) - f[x_0, x_1, x_2]}{x - x_2} \\
&= \frac{f(x) - f(x_0) - f[x_0, x_1] \cdot (x - x_0) - f[x_0, x_1, x_2] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1)}{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)}
\end{aligned}$$

Definimos então $P_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1] \cdot (x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1)$ e $E_1(x) = f[x_0, x_1, x_2, x] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

É fácil mostrar que o polinômio $P_2(x)$ está bem definido e que $P_2(x) = P_1(x) + f[x_0, x_1, x_2] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1)$.

Procedendo da mesma forma feita até agora para os pontos $x_0, x_1, x_2, x_3, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$ e $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, definiremos o polinômio de Newton de grau n como sendo:

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1] \cdot (x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + \\
&\quad + f[x_0, x_1, x_2, x_3] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) + \dots + \\
&\quad + f[x_0, x_1, \dots, x_n] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \dots (x - x_{n-1})
\end{aligned}$$

Sendo o erro dado por:

$$E_n(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \dots (x - x_{n-1}) \cdot (x - x_n).$$

Exemplo: Vamos voltar ao exemplo anterior, onde calculamos a tabela das DDFs, e utilizemos aqueles resultados para encontrar o polinômio interpolador de Newton.

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
-1	4			
0	2	-2		
1	1	-1	5/2	
2	5	4	2/3	

Como conhecíamos a função aplicada nos pontos x_0, x_1, x_2, x_3 , segue que o polinômio interpolador terá grau 3:

$$P_3(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1] \cdot (x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Substituindo os valores, temos que:

$$\begin{aligned} P_3(x) &= 4 + (-2) \cdot (x - (-1)) + \frac{1}{2} \cdot (x - (-1)) \cdot (x - 0) + \frac{2}{3} \cdot (x - (-1)) \cdot (x - 0) \cdot (x - 1) \\ &= 4 - 2(x + 1) + \frac{1}{2} \cdot (x + 1) \cdot x + \frac{2}{3} \cdot (x + 1) \cdot x \cdot (x - 1) \\ &= 4 - 2x - 2 + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{2x^3}{3} - \frac{2x}{3} \\ &= 2 - \frac{13x}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} \end{aligned}$$

3.1.3 Comparação entre as interpolações polinomiais de Lagrange e Newton

No quadro a seguir, exibiremos uma tabela comparativa entre os dois métodos de interpolação polinomial vistos neste tópico:

QUADRO 1 – COMPARAÇÃO ENTRE AS INTERPOLAÇÕES POLINOMIAIS

	Número de adições	Número de multiplicações	Número de divisões	Total
LAGRANGE	$n^2 + n - 1$	$n^2 - 1$	$2n$	$2n^2 + 3n - 2$
NEWTON	$n^2 + n - 2$	$2n - 3$	$\frac{n^2 - n}{2}$	$\frac{3n^2 + 5n - 10}{2}$

FONTE: Barroso et al. (1987)

Observe que, pela tabela, o número de operações a serem realizadas pelo método de Newton é consideravelmente inferior ao número pelo método de

Lagrange. Também, quando começamos a falar sobre a interpolação polinomial de Newton, utilizamos como motivação o seguinte fato: dada uma função f para a qual conhecemos seu valor aplicado a n pontos distintos e se, por alguma razão, descobrirmos o valor de f para mais um ponto (ao invés de n , para $n+1$), para adicioná-lo na obtenção do polinômio interpolador de Lagrange, teríamos que repetir todo o processo: criar $n+1$ polinômios de Lagrange para depois conseguir obter a forma geral do polinômio interpolador. Já no caso do método de Newton não: bastaria calcular DDFs de ordem $1, 2, \dots, n$ em $n+1$ que utilizariam esse novo ponto e somar o novo coeficiente $f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \dots (x - x_n)$ ao polinômio interpolador. Mas se o método de Newton é mais vantajoso do que o de Lagrange, por que o estudamos?

Suponha que para o mesmo conjunto de pontos $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ tenhamos associado mais do que um conjunto de pontos $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$. Nesse caso, seria mais interessante aplicar o método de Lagrange, uma vez que os valores da imagem de f só entram no cálculo na hora da construção do polinômio interpolador propriamente dito. Já para construir o polinômio interpolador de Newton, teríamos que repetir todo o processo cada vez que entrássemos com um novo conjunto $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$.

3.2 INTERPOLAÇÃO LINEAR

Consideremos a seguinte situação: para cada um dos pontos distintos entre si $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, temos associados valores $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$. Podemos então supor que existe uma função desconhecida f que, quando aplicada a $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, gera a imagem $f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \dots (x - x_n)$. Já vimos algumas formas de obtermos um polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ tal que $P(x_0) = y_0, P(x_1) = y_1, \dots, P(x_n) = y_n$.

Suponhamos agora que estamos interessados em conhecer o valor desta função em apenas um determinado ponto $\tilde{x} \in (x_0, x_n)$. Não faz muito sentido (e fica caro, computacionalmente falando) obter o polinômio interpolador desta função levando em conta todos os pontos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ para conhecê-la – a menos de um pequeno erro – em um único ponto. Por outro lado, como $\tilde{x} \in (x_0, x_n)$, existe $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ para o qual $x_j < \tilde{x} < x_{j+1}$. Então podemos restringir o nosso problema para este intervalo (x_j, x_{j+1}) : como não existe nenhum outro ponto $x_k \in \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ com $x_j < x_k < x_{j+1}$, o polinômio interpolador neste intervalo terá grau 1 e possibilitará, sem nenhum tipo de perda adicional, aproximar $f(\tilde{x})$. Chamamos a esse processo de interpolação linear.



É possível também obter uma boa aproximação para $f(\tilde{x})$ quando $\tilde{x} > x_n$ mas, para isso, precisamos utilizar a técnica de EXTRAPOLAÇÃO. Não abordaremos esse assunto neste Caderno de Estudos, mas você pode procurar saber mais a respeito.

Exemplo: Considerando a tabela a seguir, suponhamos que estejamos interessados em obter o valor de f no ponto 0,25.

x	-1	0	1	2
f(x)	4	2	1	5

A tabela não nos fornece o valor de $f(0,25)$, mas $0 < 0,25 < 1$ e $f(0) = 2$ e $f(1) = 1$. Vamos então interpolar f linearmente entre esses dois pontos:

Seja $P(x) = a_0 + a_1 x$ um polinômio de grau um para o qual $P(0) = f(0) = 2$ e $P(1) = f(1) = 1$. Então

$$\begin{cases} P(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 = 2 \Rightarrow a_0 = 2 \\ P(1) = a_0 + a_1 \cdot 1 = 1 \end{cases}$$

$$a_0 + a_1 = 1 \Rightarrow 2 + a_1 = 1 \Rightarrow a_1 = -1$$

Logo o polinômio interpolador de f no intervalo $[0,1]$ é $P(x) = 2 - x$ e, portanto, $f(0,25) \approx P(0,25) = 2 - 0,25 = 1,75$.

3.3 INTERPOLAÇÃO INVERSA

Nas seções anteriores vimos como, conhecendo o valor de uma função f aplicada em determinados pontos distintos entre si $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, ordenados do maior para o menor, podíamos encontrar um polinômio $P(x)$ tal que, quando aplicado nestes pontos, coincidisse com f . Fazíamos isso para que, de posse deste polinômio, pudéssemos obter aproximações muito boas para $f(x)$, qualquer que fosse $x \in (x_0, x_n)$.

Consideremos agora o seguinte problema: de posse da tabela que relaciona o número de habitantes da cidade de Belém/PA ao longo dos anos (IBGE), gostaríamos de saber em que ano o número de habitantes de Belém alcançou a marca dos 1.350.000:

Ano	1991	1996	2000	2007
Habitantes	1.244.689	1.140.349	1.280.614	1.408.847

Matematicamente, podemos traduzir o problema acima como dado $y \in \text{Im}(f)$, obter o valor x do domínio para o qual $y = f(x)$.

Outra aplicação bastante corriqueira deste tipo de problema é encontrar uma aproximação dos zeros de uma função f que não conheçamos explicitamente, só para alguns valores numéricos. Para resolver esse tipo de problema, precisamos aplicar a chamada interpolação inversa.



Também poderíamos solucionar esse tipo de problema encontrando o polinômio interpolador de f , P e depois resolvendo a equação $P(x) = y$. A questão é que, geralmente, existirão valores distintos que satisfazem essa equação e, além disso, se o grau do polinômio for superior a 2, não temos uma fórmula ou método de fácil aplicação para determinar esses valores. Assim, a interpolação inversa é bem mais interessante.

A interpolação inversa consiste em obter a interpolação para a função inversa de f , f^{-1} , ou seja, ao invés de considerar os valores tabelados $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, inverter a ordem dos mesmos e encontrar a interpolação para os valores $(y_0, x_0), (y_1, x_1), \dots, (y_n, x_n)$.

Por outro lado, sabemos que nem toda a função admite inversa. Assim, para podermos aplicar este método, temos que garantir que a função f seja monótona, crescente ou descrescente. Matematicamente falando, isso significa que $f(x_j) < f(x_k) \Leftrightarrow x_j < x_k$ ou $f(x_j) > f(x_k) \Leftrightarrow x_j < x_k$.

Tendo garantida a existência de f^{-1} , podemos inverter a tabela de valores de f conforme explicamos anteriormente e procurar o polinômio interpolador para f^{-1} utilizando qualquer um dos métodos já vistos: via resolução do sistema linear, polinômio interpolador de Lagrange, polinômio interpolador de Newton ou até mesmo, interpolação linear.

Exemplo: Voltemos à tabela que relaciona o número de habitantes da cidade de Belém/PA ao longo dos anos, e procuremos o ano em que o número de habitantes de Belém alcançou a marca de 1.350.000.

Ano	1991	1996	2000	2007
Habitantes	1.244.689	1.140.349	1.280.614	1.408.847

Como a variável independente da função f que descreve a relação da tabela corresponde ao ano (variável x), precisamos interpolar a inversa f^{-1} : tomando a inversa, a variável ano será a variável independente, ou seja, passará a fazer parte da imagem de f^{-1} . Entretanto, vimos que uma função só admitirá inversa se for monótona, característica que f não possui: $1991 < 1996$ e $f(1991) > f(1996)$, mas $1996 < 2000$ e $f(1996) < f(2000)$.

Por outro lado, sabemos que $f(2000) < 1.350.000 < f(2007)$. Vamos então restringir nossa tabela a esses valores.

Ano	2000	2007
Habitantes	1.280.614	1.408.847
Ano	2000	2007

Agora temos uma função monotonamente crescente. O próximo passo então será inverter as linhas da tabela e determinar o polinômio interpolador para f^{-1} .

Habitantes	1.280.614	1.408.847
Ano	2000	2007

O polinômio que estamos procurando possui a forma $P(x) = a_0 + a_1x$ e é tal

que $\begin{cases} 2000 = f^{-1}(1.280.614) = P(1.280.614) = a_0 + a_1(1.280.614) \\ 2007 = f^{-1}(1.408.847) = P(1.408.847) = a_0 + a_1(1.408.847) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2000 = a_0 + a_1(1.280.614) \\ 2007 = a_0 + a_1(1.408.847) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2000 = -a_0 - a_1(1.280.614) \\ 2007 = a_0 + a_1(1.408.847) \end{cases}$$

$$\Rightarrow -2000 + 2007 = -a_0 - a_1(1.280.614) + a_0 + a_1(1.408.847)$$

$$\Rightarrow 7 = a_1(1.408.847 - 1.280.614)$$

$$\Rightarrow 7 = a_1(128.233)$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{7}{128.233} = 5,46 \cdot 10^{-5}$$

$$2007 = a_0 + 5,46 \cdot 10^{-5} \cdot (1.408.847) \Rightarrow a_0 = 2007 - 76,92 = 1930,08 .$$

Logo $P(x) = 1930,08 + 5,46 \cdot 10^{-5} \cdot x$ é o polinômio de interpolação de f^1 . Portanto, a população de Belém atingiu a marca de 1.350.000 habitantes em $P(1.350.000) = 1930,08 + 5,46 \cdot 10^{-5} \cdot (1.350.000) = 2003,79$, ou seja, no final de 2003.

LEITURA COMPLEMENTAR

A TEORIA DO CAOS

Dra. Salete Souza de Oliveira

Quando os gregos queriam se referir a um vazio abissal, usavam a palavra *cháos*.

Caos nem sempre é uma coisa ruim. No sentido de pura desordem, realmente, pouco se pode dizer a seu favor. Mas o que o matemático James Yorke estava querendo dizer quando tomou este termo emprestado em 1975, era desordem ordenada – um padrão de organização existindo por trás da aparente casualidade.

E isso é uma coisa muito boa.

A “teoria do caos” – o estudo dessa desordem organizada – entrou em vigor somente nos anos 80, mas suas sementes foram lançadas em 1960, quando um meteorologista do M. I. T., Edward Lorenz, desenvolveu modelos computacionais dos padrões do tempo. Como todo mundo sabe, é muito difícil fazer uma previsão de tempo a longo prazo, ainda que possamos isolar muitos dos fatores que causam as mudanças. Lorenz, como outros, pensava que tudo o que era preciso para uma melhor previsão era um modelo mais abrangente. Então, escreveu um programa baseado em doze equações simples que em linhas gerais modelava os principais fatores que influenciam o tempo.

Lorenz descobriu algo surpreendente: pequenas mudanças ou pequenos erros em um par de variáveis produziam efeitos tremendamente desproporcionais. Para um período de uns dois dias, elas mal faziam diferença; mas extrapolando-se para um mês ou mais, as mudanças produziam padrões completamente diferentes. Lorenz chamou sua descoberta de “efeito borboleta”, tirado do título de artigo que ele publicou em 1979.

“Previsibilidade: pode o bater de asas de uma borboleta no Brasil desencadear um tornado no Texas?”.

Em outras palavras: fatores insignificantes, distantes, podem eventualmente produzir resultados catastróficos imprevisíveis? Lorenz se permitiu uma pequena hipérbole porque queria dramatizar seu ponto de vista. Virtualmente todos os físicos antes dos anos 70 fixaram-se nos chamados processos “lineares” – processos em que pequenas mudanças produziam resultados proporcionalmente pequenos. Mas um grande número de fenômenos – não só na meteorologia e na física, como também na biologia, ecologia, economia, e assim por diante – não obedeciam a leis lineares nem seguiam fórmulas lineares. Processos “não lineares” são aqueles em que as equações envolvem taxas variáveis de mudança, e não taxas fixas, em que as mudanças são multiplicadas, em vez de adicionadas, e pequenos desvios podem ter vastos efeitos.

O próximo passo em direção à teoria do caos foi dado nos anos 70, quando Yorke e seu amigo, o biólogo Robert May, começaram a examinar as propriedades da assim chamada “equação logística” que, entre outras coisas, fornece um modelo

simples para o crescimento da população. A maneira como essa equação funciona é que os resultados vão sempre alimentando a equação de modo a se obterem novos resultados. O interessante é que, dependendo de como você utiliza um certo fator, os resultados podem se tornar altamente previsíveis ou altamente caóticos.

Mas até mesmo o caos da equação logística tem seu próprio tipo de padrão. Embora você não possa sempre prever qual será o resultado particular da equação, você sabe que ele vai cair em uma determinada faixa. (Se você fizesse um gráfico dos resultados, veria surgir um padrão ou uma tendência determinada.) Muitas outras equações se comportam de forma semelhante, produzindo o caos com uma tendência ou um modelo de organização – entre estas, estão as equações que predizem a turbulência em líquidos ou a subida e a queda dos preços do algodão.

Tais equações são o reverso da fórmula do tempo de Lorenz: até onde vão chegar os preços do algodão em um dia particular é imprevisível (ou ficaríamos todos ricos jogando no mercado de futuros); mas a história dos preços do algodão mostram uma certa ordem. O nome dado a essa ordem é “fractal”. Se você fizer um diagrama das flutuações de preço minuto a minuto, semana a semana, mês a mês e ano a ano, a tendência mostrada no diagrama mais geral (ano a ano) se refletirá nos diagramas mais detalhados (de mês a mês para baixo). Um diagrama fractal pode ser ampliado para qualquer magnificação que você quiser, e vai claramente parecer, e algumas vezes reproduzir exatamente, o padrão do quadro mais amplo.

Esse comportamento da curva do preço do algodão foi descoberto no princípio dos anos 60 pelo eclético erudito Benoit Mandelbrot. Nascido na Lituânia e educado na França, Mandelbrot nacionalizou-se americano, e trabalhava para a IBM quando descobriu que outros fenômenos também apresentavam a característica fractal dos preços do algodão – por exemplo, a distribuição de “ruídos” (erros) nas transmissões eletrônicas. Gradualmente, Mandelbrot achou outros exemplos do mesmo comportamento, abordando até a geografia, no inovador artigo “Qual a extensão da costa britânica?” A ideia básica desse artigo é que todos os tipos de objetos naturais, a exemplo do litoral britânico, têm um grau de imprecisão que parece o mesmo, não importa o quanto você se aproxime deles. Vista de um ponto distante ou examinada através de um microscópio, uma costa vai parecer igualmente irregular – de modo que, na ausência de um sinal indicador da distância em que a imagem da costa foi obtida, seria difícil, senão impossível, discernir este aspecto.

Para descrever essa irregularidade ou imprecisão recursiva, autorreflexiva, Mandelbrot ampliou a noção da dimensão matemática. Estábamos acostumados a pensar em termos de dimensões integrais – uma linha de dimensão 1, um plano de dimensão 2, um cubo de dimensão 3. Mas Mandelbrot introduziu o conceito de dimensões fracionais - 1,3; 2,7; 12,2 - para descrever a recorrência ou imprecisão que observou nos contornos do litoral e nas curvas de preço. (Pense em uma dimensão fracional como uma medida de quanto uma linha ou uma forma consome de uma dimensão total. Quanto mais irregular uma forma, mais espaço ela consome.) Em 1975, ele cunhou o termo “fractal” para nomear essa nova geometria dimensional fracional.

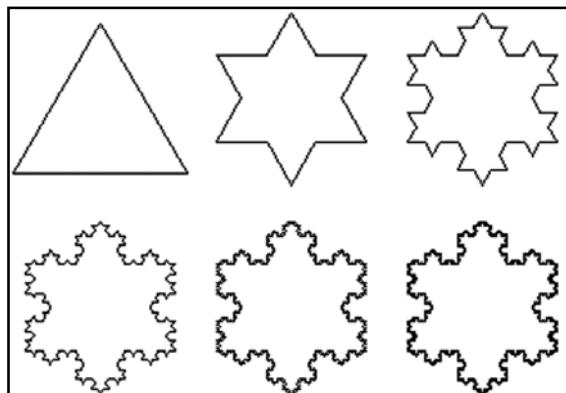
A geometria fractal e o caos teriam permanecido como meras curiosidades não fosse a descoberta do físico Mitchell Feigenbaum, nos meados da década de setenta, de que muitos sistemas não lineares, aparentemente não relacionados,

comportam-se de modos claramente semelhantes. Isso sugere que deveria existir uma teoria unificada para explicar o comportamento caótico dos sistemas e equações em uma faixa ampla de setores. E foi aí que os cientistas realmente começaram a prestar atenção.

A teoria do caos é algo recente e ainda está sendo refinada. Novas aplicações estão sendo descobertas ou inventadas, artigos continuam a ser publicados, dúvidas e demonstrações alternam-se rapidamente. Apesar disso, a teoria do caos lançou alguma luz no comportamento dos sistemas, sistemas quintessenciais de líquidos fluindo, os quais são propícios a sofrer mudanças rápidas de um comportamento estável para um comportamento aparentemente caótico, no modo como a água passa de líquido fixo a líquido em ebulição, à medida que a temperatura é ligeiramente aumentada. (A 99,5°C, a água é apenas água quente; a 100,5°C, ela passa a mudar de estado, tornando-se gasosa.) O jargão pode ser intimidante – coisas do tipo “estranhos atratores” são difíceis de explicar. (Eles são basicamente formas que restringem curvas não reproduutíveis, se é que isso ajuda.) E ideias tais como “dimensões fracionais” tendem a parecer bizarras ou inutilmente abstratas – mas na realidade a geometria fractal tem muitas aplicações práticas.

Como salienta James Gleick em seu “popular” livro sobre o caos, medir a dimensão fractal de uma superfície metálica pode nos fornecer uma informação a respeito de sua resistência. A superfície da terra tem uma dimensão fractal, da mesma forma que os vasos sanguíneos em nosso corpo. Até o cérebro humano e sua consciência podem ter formas fractais.

Geometria fractal tem sido adotada em setores tais como General Electric, Esso e estúdios de Hollywood, na Engenharia Civil na análise de instabilidade paramétrica de estruturas e em outras áreas.



- Fractal Floco de Neve de Koch –

FONTE: Disponível em: <<http://www.ceticismoaberto.com/imagens4/fractalkoch.gif>>.

FONTE: Disponível em: <<http://www.professores.uff.br/salete/caos.htm>>. Acesso em: 15 maio 2011.

RESUMO DO TÓPICO 4

Chegou a hora de revermos o conteúdo estudado no quarto tópico:

- Se f é uma função que descreve um fenômeno e que, embora não conheçamos explicitamente, temos seus valores em determinados pontos distintos entre si x_0, x_1, \dots, x_n , então existe um único polinômio P de grau n , com $P(x_0) = f(x_0), P(x_1) = f(x_1), \dots, P(x_n) = f(x_n)$ e de forma que, se desejarmos saber o valor de f em um determinado ponto \tilde{x} , poderemos calcular $P(\tilde{x})$ e trabalhar com o resultado desta aplicação como se fosse $f(\tilde{x})$.
- Podemos encontrar o polinômio interpolador via resolução de sistema linear, via interpolação de Lagrange ou via interpolação de Newton.
- Interpolação polinomial de Lagrange: construímos os polinômios de Lagrange $L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$ e, de posse deles, construímos o polinômio interpolador de Lagrange $P(x) = y_0 \cdot L_0(x) + y_1 \cdot L_1(x) + \dots + y_n \cdot L_n(x)$
- Interpolação polinomial de Newton: construímos a tabela de Diferenças Divididas Finitas e, de posse dela, exibimos o polinômio interpolador de Newton:

$$\begin{aligned} P_n(x) = & f(x_0) + f[x_0, x_1] \cdot (x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + \\ & + f[x_0, x_1, x_2, x_3] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) + \dots + \\ & + f[x_0, x_1, \dots, x_n] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \dots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

- Interpolação linear: quando estamos interessados em obter $f(\tilde{x})$ para apenas um determinado ponto $\tilde{x} \in (x_j, x_{j+1})$, encontramos $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ para o qual $x_j < \tilde{x} < x_{j+1}$ e obtemos o polinômio de interpolação de grau 1 no intervalo (x_j, x_{j+1}) .
- Interpolação inversa: quando, dado $y \in \text{Im}(f)$, procuramos o valor x do domínio para o qual $y = f(x)$, invertemos os dados da tabela e calculamos o polinômio interpolador para a função inversa de f , f^{-1} , DESDE QUE EXISTA!
- Para existir f^{-1} , f precisa necessariamente ser monótona crescente ou monótona descrescente.

AUTOATIVIDADE



Em qualquer área da Matemática, só conseguimos realmente aprender um assunto depois de praticá-lo bastante, através da resolução de exercícios. Que tal fixar agora o conteúdo que vimos neste tópico?

- 1 Encontre o polinômio interpolador de Lagrange da função f que relaciona os seguintes valores:

x	-1	0	1	2
$f(x)$	0,5	2	-0,9	3

- 2 Encontre o polinômio interpolador de Newton da função g que relaciona os seguintes valores:

x	-1	0	1	2
$g(x)$	1	-0,4	0,2	-1

- 3 Com base na tabela a seguir, estime $f(0,3)$:

x	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	1,25	3,25	3,75	-1,05	0,2	400

- 4 Considere a seguinte tabela:

x	-1	0	1	2
$g(x)$	1	0,6	0,4	0

Encontre o valor de x para o qual $g(x) = 0,35$.

- 5 Com base na seguinte tabela,

x	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	0,6	0,64	1,0

encontre o valor de x para o qual $f(x) = 0,35$.

- 6 A seguir, temos dois quadros relacionando a quantidade de alcatrão e a quantidade de nicotina (em miligramas) de várias marcas de cigarro, com e sem filtro:

QUADRO I – CIGARROS COM FILTRO				
Alcatrão (mg)	8,3	18,6	27,3	35,9
Nicotina (mg)	0,32	1,10	1,42	2,23

QUADRO II – CIGARROS SEM FILTRO				
Alcatrão (mg)	32,5	37,2	43,4	
Nicotina (mg)	1,69	2,12	2,65	

- a) Encontre o polinômio interpolador de Lagrange para a Quadro I.
- b) Encontre o polinômio interpolador de Newton para a Quadro II.
- c) Através da interpolação linear, obtenha a quantidade de nicotina associada a 21 mg de alcatrão nos cigarros com filtro (Quadro I).
- d) Através da interpolação linear, obtenha a quantidade de ALCATRÃO associada a 2,5 mg de NICOTINA nos cigarros sem filtro (Quadro II).

- 7 Considere a tabela a seguir:

x	0,5	0,7	1,0	1,2	1,5	1,6
f(x)	-2,63	-2,57	-2,00	-1,23	0,63	0,79

- a) Determine a raiz de $f(x)$ utilizando interpolação inversa sobre três pontos.
- b) Determine a raiz de $f(x)$ utilizando interpolação inversa sobre dois pontos (linear).

- 8 De 1960 a 2000, o consumo de água (A) nos Estados Unidos em bilhões de galões por dia foi o seguinte:

Ano	1960	1970	1980	1990	2000
(A)	136,43	202,70	322,90	411,20	494,10

De acordo com essa distribuição de valores, em que ano podemos estimar que foram consumidos 250 bilhões de galões?

- 9 A resistência à compressão do concreto, σ , decresce com o aumento da razão água/cimento ($\frac{w}{c}$) em galões por saco de cimento.

σ	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5
$(\frac{w}{c})$	7000	5237	4123	3107	2580

- a) Determine o polinômio interpolador de Lagrange para a função f que relaciona estas duas variáveis.
- b) Determine o polinômio interpolador de Newton.
- c) Qual a razão água/cimento necessária para obter uma compressão do concreto de 6,0 galões por saco de cimento?

DICA: Ao invés de trabalhar com os valores de $(\frac{\omega}{c})$ conforme aparecem na tabela, divida-os por 1.000 e trabalhe com esta razão.

- 10 A tabela a seguir apresenta um histórico do número de acidentes no Brasil envolvendo veículos motorizados.

Ano	1980	1990	1997	2006
Número de Acidentes (em milhares)	8.300	10.400	13.600	14.600

De acordo com a tabela, nesses 26 anos houve um aumento de 78,3% no número de acidentes. Em que ano podemos dizer que esse acréscimo foi de 50%?

APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES, INTEGRAÇÃO NUMÉRICA E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

A partir desta unidade você será capaz de:

- compreender como se dá a aproximação de funções;
- aprender a utilizar as técnicas de aproximação de funções;
- identificar a melhor função que se aproxima de outra para estimar valores;
- calcular integrais por métodos numéricos;
- encontrar soluções numéricas para equações diferenciais ordinárias;
- familiarizar-se com demonstrações matemáticas.

PLANO DE ESTUDOS

A Unidade 3 está dividida em três tópicos. Em cada um deles você encontrará exemplos e exercícios que o/a familiarizarão com o assunto.

TÓPICO 1 – TEORIA DA APROXIMAÇÃO – MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

TÓPICO 2 – INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

TÓPICO 3 – EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

TEORIA DA APROXIMAÇÃO – MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

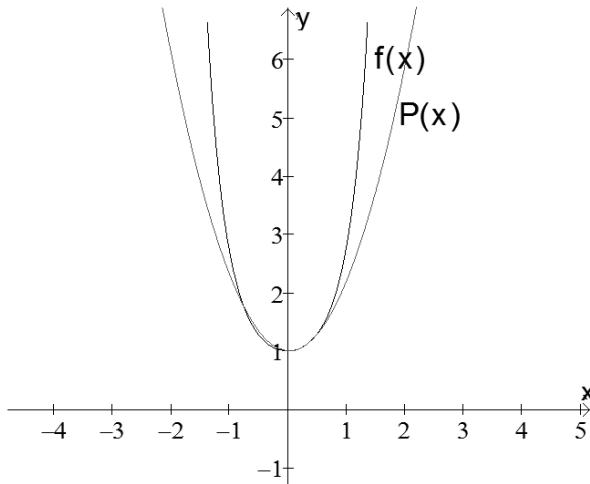
1 INTRODUÇÃO

Vimos na unidade anterior que, se f é uma função que descreve um fenômeno e que, embora não conheçamos explicitamente, temos seus valores em determinados pontos ordenados distintos entre si x_1, x_2, \dots, x_n , então existe um único polinômio P de grau n , com $P(x_1) = f(x_1), P(x_2) = f(x_2), \dots, P(x_n) = f(x_n)$ tal que, se desejarmos saber o valor de f em um determinado ponto \tilde{x} , poderemos calcular $P(\tilde{x})$ e trabalhar com o resultado desta aplicação como se fosse $f(\tilde{x})$. Aprendemos algumas formas de encontrar esse polinômio através da interpolação polinomial, que consiste em “ligar” esses pontos através de uma função polinomial.



Ao contrário do que foi feito nas unidades anteriores, vamos começar a contagem dos elementos x_k (e consequentemente de y_k) a partir do número 1 ao invés de 0. Faremos isso com o único objetivo de não carregar a notação das fórmulas que veremos adiante.

Suponhamos, agora, que precisássemos encontrar o valor de tal função f para um valor \hat{x} maior (ou menor) do que os valores x_1, x_2, \dots, x_n . Neste caso, não convém determinarmos $f(\hat{x})$ via interpolação linear. Para entender melhor essa afirmação, vamos voltar a um exemplo da unidade anterior, onde encontramos o polinômio interpolador da função $f(x) = e^{x^2}$ conhecendo seu valor nos pontos $(0,1; 1,01005), (0,3; 1,094174)$ e $(0,4; 1,173511)$, $P(x) = 1,2425 \cdot x^2 - 0,07638 \cdot x + 1,005263$, e representamos graficamente ambas as funções:

GRÁFICO 11 – INTERPOLAÇÃO DE f POR P 

FONTE: A autora

Podemos ver no Gráfico 11 – Interpolação de f por P que, embora o polinômio aproxime bem a função f no intervalo $[-1, 1]$, isso não ocorre no ponto $x = 2$, por exemplo:

$$\begin{cases} f(2) = e^{2^2} = e^4 \approx 54,598 \\ P(2) = 1,2425 \cdot 2^2 - 0,07638 \cdot 2 + 1,005263 = 5,8225 \end{cases}$$

Outra situação em que a interpolação polinomial não convém é quando os valores $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ da tabela foram obtidos por algum processo experimental, e, desta forma, podem conter erros inerentes ao processo. Além disso, outras variáveis que não estão evidentes na tabela podem apresentar variação.

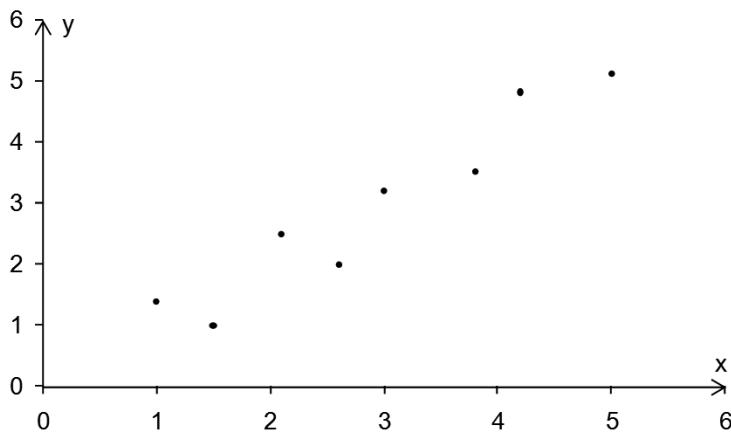
Veremos agora outros métodos de aproximação de funções, que nos permitam lidar com as situações citadas acima da melhor maneira possível. Para isso, iremos aproximar a função f por uma combinação linear de funções conhecidas $f(x) \approx a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x) + \dots + a_m g_m(x) = F(x)$, de tal modo que a distância entre f e F seja a menor possível. Agora, duas perguntas surgem naturalmente:

Como determinar tais funções $g_0(x), g_1(x), \dots, g_m(x)$? E o que significa menor distância possível neste contexto? Vamos responder a ambas, cada uma no seu tempo.

Comecemos com a primeira questão: como escolheremos tais funções? Uma forma de fazer isso é observar o comportamento dos pontos da tabela em um gráfico. Vamos aos exemplos:

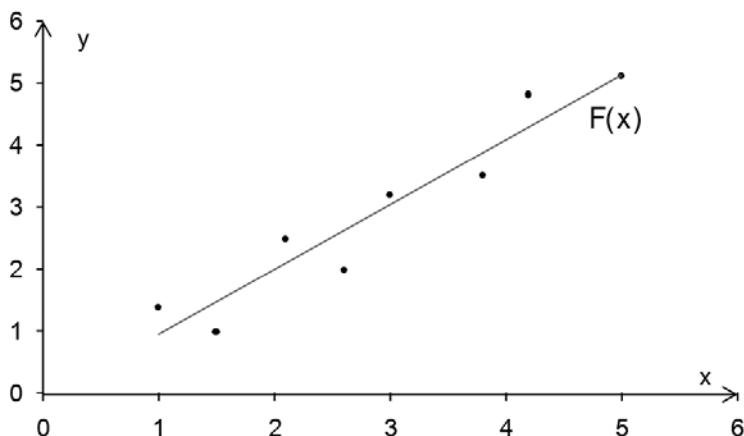
Exemplo 1: Considere os dados da tabela obtidos através de um experimento.

x	1	1,5	2,1	2,6	3	3,8	4,2	5
y	1,4	1	2,5	2	3,2	3,5	4,8	5,1

GRÁFICO 12 – DISPERSÃO DOS PONTOS (x, y) (a)

FONTE: A autora

Observamos, grosso modo no Gráfico 12, que os pontos distribuem-se em torno de uma linha reta. Assim, poderíamos aproximar a função que descreve a tabela por uma função F do tipo $F(x) = a_0g_0(x) + a_1g_1(x)$, com $g_0(x)$ sendo a função constante 1 ($g_0(x) = 1$) e $g_1(x)$ a função identidade ($g_1(x) = x$). Assim, $F(x) = a_0 + a_1x$.

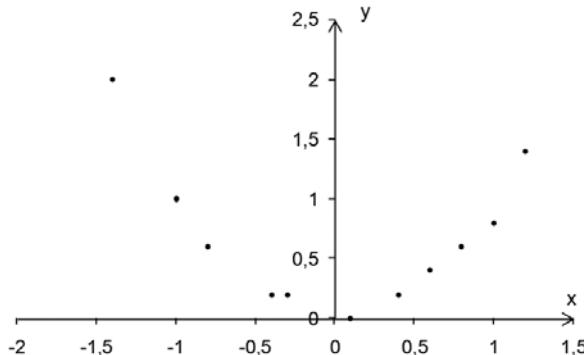


Exemplo 2: Considere agora os dados da tabela seguinte.

x	-1,4	-1	-0,8	-0,4	-0,3	0,1	0,4	0,6	0,8	1	1,2
y	2	1	0,6	0,2	0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,4

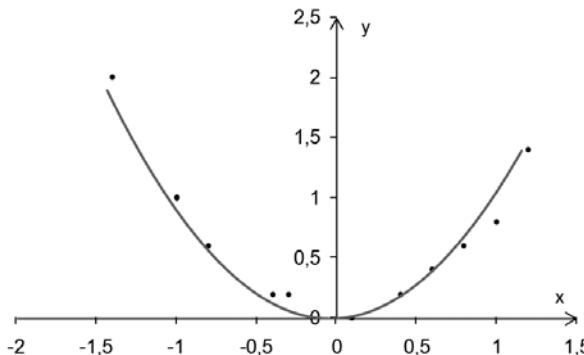
O gráfico de dispersão destes dados é:

GRÁFICO 13 – DISPERSÃO DOS DADOS (x, y) (b)



FONTE: A autora

Claramente, a melhor função que aproxima os dados do Gráfico 13, é a função quadrática $g_0(x) = x^2$. Assim, $F(x) = x^2$.



Respondida a primeira pergunta, vamos à segunda: o que significa menor distância possível? Note que estamos falando em distância entre funções e não entre números. Se fosse entre dois números a e b , consideraríamos a distância como sendo o módulo da diferença entre eles: $d(a,b) = |a - b|$. Poderíamos então definir a distância entre duas funções de maneira parecida: não conhecemos a função f que rege a tabela explicitamente, mas sabemos quanto ela vale nos pontos x_1, x_2, \dots, x_n e y_1, y_2, \dots, y_n respectivamente. Nesses pontos, podemos definir para cada $k = 1, 2, \dots, n$,

$$\begin{aligned} d_k(f, F) &= |f(x_k) - F(x_k)| \\ &= |y_k - F(x_k)| \\ &= |y_k - (a_0 g_0(x_k) + a_1 g_1(x_k) + \dots + a_m g_m(x_k))| \end{aligned}$$

Note que a definição está bem feita, uma vez que, se conseguirmos encontrar F tal que ela coincida com f , $d_k(f, F) = 0$, para todo $k = 1, 2, \dots, n$.

Nosso objetivo então é encontrar os coeficientes a_0, a_1, \dots, a_m tais que $d_k(f, F)$ seja a menor possível para todos os $k = 1, 2, \dots, n$. Você deve se lembrar do Cálculo

Diferencial, que podemos encontrar os pontos mínimos encontrando seus pontos críticos, por meio da sua derivada. Por outro lado, a distância está definida em termos da função módulo, que não é diferenciável no ponto 0. Vamos então substituí-la por uma outra função que faça o mesmo papel, mas que não possua esse inconveniente: Vamos elevar ambos os lados da igualdade ao quadrado. Nesse caso, teremos uma função sempre positiva e diferenciável em toda a reta real:

$$d_k^2(f, F) = (y_k - a_0 g_0(x_k) - a_1 g_1(x_k) - \dots - a_m g_m(x_k))^2, \text{ para cada } k=1, 2, \dots, n.$$

Consideremos então:

$$Q^2(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{k=1}^n d_k^2(f, F) = \sum_{k=1}^n (y_k - a_0 g_0(x_k) - a_1 g_1(x_k) - \dots - a_m g_m(x_k))^2$$

O método de procurar os coeficientes a_0, a_1, \dots, a_m que minimizem a função Q^2 é chamado de Método dos Mínimos Quadrados. Neste caso, quando a única informação que temos sobre a f e quanto ela vale em determinados pontos, estamos trabalhando o caso discreto de aplicação do método.

Podemos encontrar os coeficientes a_0, a_1, \dots, a_m que minimizam Q^2 resolvendo

a expressão $\frac{\partial Q^2}{\partial a_j}(a_0, a_1, \dots, a_m) = 0$, para cada $j = 0, 1, 2, \dots, n$. Assim,

$$\frac{\partial Q^2}{\partial a_j}(a_0, a_1, \dots, a_m) = \frac{\partial}{\partial a_j} \left(\sum_{k=1}^n (y_k - a_0 g_0(x_k) - a_1 g_1(x_k) - \dots - a_m g_m(x_k))^2 \right) = 0$$

para cada $j = 0, 1, 2, \dots, n$. Resolvendo a derivada anterior por meio da Regra da Cadeia, temos

$$2 \sum_{k=1}^n [-g_j(x_k)] \cdot (y_k - a_0 g_0(x_k) - a_1 g_1(x_k) - \dots - a_m g_m(x_k)) = 0$$

para cada $j = 0, 1, 2, \dots, n$. Como o produto de dois pelo somatório acima é zero e 2 é diferente de zero, segue que o somatório é necessariamente zero, ou seja,

$$\sum_{k=1}^n [-g_j(x_k)] \cdot (y_k - a_0 g_0(x_k) - a_1 g_1(x_k) - \dots - a_m g_m(x_k)) = 0, \text{ para cada } j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Assim,

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^n [-g_0(x_k)] \cdot (y_k - a_0 g_0(x_k) - a_1 g_1(x_k) - \dots - a_m g_m(x_k)) = 0 \\ \sum_{k=1}^n [-g_1(x_k)] \cdot (y_k - a_0 g_0(x_k) - a_1 g_1(x_k) - \dots - a_m g_m(x_k)) = 0 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n [-g_m(x_k)] \cdot (y_k - a_0 g_0(x_k) - a_1 g_1(x_k) - \dots - a_m g_m(x_k)) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^n (-g_0(x_k)y_k - [-g_0(x_k)] \cdot [a_0g_0(x_k) + a_1g_1(x_k) + \dots + a_mg_m(x_k)]) = 0 \\ \sum_{k=1}^n (-g_1(x_k)y_k - [-g_1(x_k)] \cdot [a_0g_0(x_k) + a_1g_1(x_k) + \dots + a_mg_m(x_k)]) = 0 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n (-g_m(x_k)y_k - [-g_m(x_k)] \cdot [a_0g_0(x_k) + a_1g_1(x_k) + \dots + a_mg_m(x_k)]) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^n (a_0g_0^2(x_k) + a_1g_1(x_k)g_0(x_k) + \dots + a_mg_m(x_k)g_0(x_k)) = \sum_{k=1}^n y_k g_0(x_k) \\ \sum_{k=1}^n (a_0g_0(x_k)g_1(x_k) + a_1g_1^2(x_k) + \dots + a_mg_m(x_k)g_1(x_k)) = \sum_{k=1}^n y_k g_1(x_k) , \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n (a_0g_0(x_k)g_m(x_k) + a_1g_1(x_k)g_m(x_k) + \dots + a_mg_m^2(x_k)) = \sum_{k=1}^n y_k g_m(x_k) \end{cases}$$

que é um sistema linear com m equações e m incógnitas a_0, a_1, \dots, a_m .

O sistema acima parece bem complicado, certo? E de fato o é, quando utilizamos várias funções $g_k(x)$ na composição de F. A boa notícia é que, uma vez de posse do sistema acima, aprendemos várias técnicas de resolução para ele na Unidade 1, o que o torna de fácil resolução computacionalmente falando. Por outro lado, existem certos tipos de funções que são mais comumente usadas, como a função linear, polinomial ou mesmo exponencial. Nesses casos, devido às características de cada tipo acima, conseguimos simplificar a aparência deste sistema e, portanto, facilitar sua resolução. Vamos a seguir estudar alguns destes casos.



Quando conhecemos f em intervalo $[a, b]$ e queremos aproxima-la por outra função qualquer, temos o modo contínuo do método dos mínimos quadrados. Não trataremos deste caso aqui, mas você pode encontrar uma boa explicação no livro Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais, de M. A. G. Ruggiero e V. L. R. Lopes.

2 REGRESSÃO LINEAR

O modelo mais simples de aproximar uma função f que descreve um fenômeno e que, embora não a conheçamos explicitamente, tenha seus valores em determinados pontos ordenados distintos entre si x_1, x_2, \dots, x_n , é através de uma reta.

2.1 REGRESSÃO LINEAR SIMPLES

O modelo mais simples de regressão linear é o de regressão linear simples, quando a função F é uma reta do tipo $F(x) = a_0 + a_1x$, com determinados números reais a_0, a_1 .

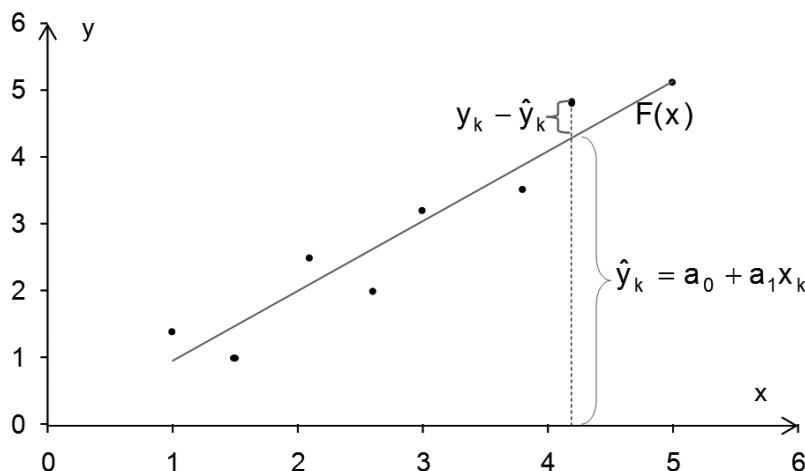
Poderíamos traçar várias retas que tentassem aproximar os pontos y_1, y_2, \dots, y_n . Mas qual seria a mais indicada? Conforme já mencionamos, para encontrar a reta que melhor aproxima este gráfico, precisamos determinar quais os valores de a_0 e a_1 que minimizam a função:

$$Q^2(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{k=1}^n d_k^2(f, F) = \sum_{k=1}^n (y_k - a_0 g_0(x_k) - a_1 g_1(x_k) - \dots - a_m g_m(x_k))^2.$$

Neste caso particular de F , poderemos reescrever Q^2 como sendo:

$$Q^2(a_0, a_1) = \sum_{k=1}^n (y_k - a_0 - a_1 x_k)^2$$

GRÁFICO 14 – REGRESSÃO LINEAR SIMPLES



FONTE: A autora

O Gráfico 14 nos mostra exatamente o que queremos quando minimizamos Q^2 : tornar $y_k - \hat{y}_k$ o mais próximo possível de 0, isso para todos os k .



Chamamos a diferença $y_k - \hat{y}_k = y_k - a_0 - a_1 x_k$ de resíduo.

Da mesma forma com que particularizamos Q^2 , podemos particularizar o sistema que devemos resolver (lembrando que $g_0(x_k) = 1$ e $g_1(x_k) = x_k$):

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n (a_0 g_0^2(x_k) + a_1 g_1(x_k) g_0(x_k)) = \sum_{k=1}^n y_k g_0(x_k) \\ \sum_{k=1}^n (a_0 g_0(x_k) g_1(x_k) + a_1 g_1^2(x_k)) = \sum_{k=1}^n y_k g_1(x_k) \end{array} \right. \\ & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n (a_0 \cdot 1^2 + a_1 \cdot x_k \cdot 1) = \sum_{k=1}^n y_k \cdot 1 \\ \sum_{k=1}^n (a_0 \cdot 1 \cdot x_k + a_1 x_k^2) = \sum_{k=1}^n y_k x_k \end{array} \right. \\ & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n a_0 + \sum_{k=1}^n a_1 x_k = \sum_{k=1}^n y_k \\ \sum_{k=1}^n a_0 x_k + \sum_{k=1}^n a_1 x_k^2 = \sum_{k=1}^n y_k x_k \end{array} \right. \\ & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n \cdot a_0 + a_1 \cdot \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n y_k \\ a_0 \cdot \sum_{k=1}^n x_k + a_1 \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 = \sum_{k=1}^n y_k x_k \end{array} \right. \end{aligned}$$

Isolando as variáveis a_0 na primeira equação e a_1 na segunda equação, temos

$$\begin{cases} a_0 = \frac{\left(\sum_{k=1}^n y_k - a_1 \cdot \sum_{k=1}^n x_k \right)}{n} \\ a_1 \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 = \sum_{k=1}^n y_k x_k - a_0 \cdot \sum_{k=1}^n x_k \end{cases}$$

Substituindo a_0 da segunda equação pela primeira, encontramos as seguintes expressões para a_0 e a_1 :

$$a_1 = \frac{\left(n \cdot \sum_{k=1}^n y_k x_k - \sum_{k=1}^n y_k \cdot \sum_{k=1}^n x_k \right)}{n \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2}$$

$$a_0 = \frac{\left(\sum_{k=1}^n y_k - a_1 \cdot \sum_{k=1}^n x_k \right)}{n}$$



O desenvolvimento maçante destas fórmulas complicadas não está aqui por acaso. Mais importante do que guardá-las é saber como obtê-las. Mais uma vez, matemática não é mágica, mas um processo lógico de pensamento. Lembre-se sempre disso quando estiver em sala de aula.

Exemplo 1: Já vimos que a função f que rege os dados da tabela a seguir pode ser aproximada por uma função $F(x) = a_0 + a_1 x$.

x	1	1,5	2,1	2,6	3	3,8	4,2	5
y	1,4	1	2,5	2	3,2	3,5	4,8	5,1

Determinemos os valores dos coeficientes a_0 e a_1 através do método os mínimos quadrados, sabendo que temos o valor de f em oito pontos distintos.

$$a_0 = \frac{\left(\sum_{k=1}^8 y_k - a_1 \cdot \sum_{k=1}^8 x_k \right)}{8}$$

$$a_1 = \frac{\left(8 \cdot \sum_{k=1}^8 y_k x_k - \sum_{k=1}^8 y_k \cdot \sum_{k=1}^8 x_k \right)}{8 \cdot \sum_{k=1}^8 x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^8 x_k \right)^2}$$

Para resolver as equações acima, consideremos a seguinte tabela auxiliar:

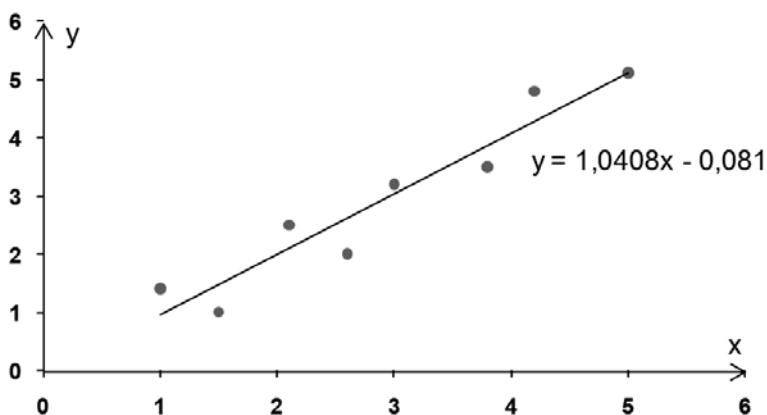
k	x	$y = f(x)$	$x \cdot y$	x^2
1	1	1,4	1,4	1
2	1,5	1	1,5	2,25
3	2,1	2,5	5,25	4,41
4	2,6	2	5,2	6,76
5	3	3,2	9,6	9
6	3,8	3,5	13,3	14,44
7	4,2	4,8	20,16	17,64
8	5	5,1	25,5	25
Soma	23,2	23,5	81,91	80,5

Substituindo os valores da tabela nas equações, encontramos:

$$a_1 = \frac{\left(8 \cdot \sum_{k=1}^8 y_k x_k - \sum_{k=1}^8 y_k \cdot \sum_{k=1}^8 x_k \right)}{8 \cdot \sum_{k=1}^8 x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^8 x_k \right)^2} = \frac{(8 \cdot 81,91 - 23,5 \cdot 23,2)}{8 \cdot 80,5 - (23,2)^2} = 1,0408$$

$$a_0 = \frac{\left(\sum_{k=1}^8 y_k - a_1 \cdot \sum_{k=1}^8 x_k \right)}{8} = \frac{(23,5 - 1,0408 \cdot 23,2)}{8} = -0,0810$$

Assim, a função que melhor aproxima f é $F(x) = -0,0810 + 1,0408x$.



Exemplo 2: Consideremos novamente a tabela que relaciona o número de habitantes da cidade de Belém/PA ao longo dos anos (IBGE):

Ano	1991	1996	2000	2007
Habitantes (milhões)	1,244	1,140	1,281	1,409

Supondo que possamos aproximar a função f que rege os dados acima por uma função linear F , qual será a população de Belém em 2050?

Para resolver esta questão, precisamos primeiramente determinar quem são as constantes a_0 e a_1 que minimizam a distância de f a F .

Obs.: Para facilitar nossos cálculos, faremos algumas mudanças de variáveis: ao invés de trabalhar com os anos 1991, 1996, 2000..., consideraremos 1 no lugar de 1991, 6 no lugar de 1996, 10 no lugar de 2000 e assim por diante, como se tivéssemos subtraindo 1990 de todos os valores de x . Note que isso não irá mudar em nada o resultado da nossa reta – só facilitará as contas, uma vez que a proporção entre os anos será mantida.

k	x	y = f(x)	x · y	x ²
1	1	1,244	1,244	1
2	6	1,140	6,84	36
3	10	1,281	12,81	100
4	17	1,409	23,953	6,76
Soma	34	5,074	44,847	426

Substituindo os valores da tabela nas equações, encontramos:

$$a_1 = \frac{\left(4 \cdot \sum_{k=1}^4 y_k x_k - \sum_{k=1}^4 y_k \cdot \sum_{k=1}^4 x_k \right)}{4 \cdot \sum_{k=1}^4 x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^4 x_k \right)^2} = \frac{(4 \cdot 44,847 - 5,074 \cdot 34)}{4 \cdot 426 - (34)^2} = 0,0125$$

$$a_0 = \frac{\left(\sum_{k=1}^4 y_k - a_1 \cdot \sum_{k=1}^4 x_k \right)}{4} = \frac{(5,074 - 0,0125 \cdot 34)}{4} = 1,1623$$

Assim, a função que melhor aproxima f é $F(x) = 1,1623 + 0,0125x$.

Vamos agora responder à questão: quantos habitantes a cidade de Belém terá em 2050?

Lembrando da mudança de variável que fizemos para determinar a_0 e a_1 , vamos aplicar a fórmula de F para $x = 2050 - 1990 = 60$:

$$F(60) = 1,1623 + 0,0125 \cdot 60 = 1,9123$$

Portanto, Belém terá cerca de 1.912.300 habitantes em 2050.

2.2 REGRESSÃO LINEAR MÚLTIPLA

Acabamos de estudar o caso em que podemos aproximar a função f que, embora não a conheçamos explicitamente, temos seus valores em determinados pontos ordenados distintos entre si x_1, x_2, \dots, x_n por uma reta do tipo $F(x) = a_0 + a_1x$, com determinados números reais a_0, a_1 .

Imaginemos agora o caso em que tenhamos mais do que uma variável independente no processo. Ou seja, que f seja uma função que dependa de mais variáveis além de x para chegar em y. Bom, se supusermos que essas outras variáveis estejam fixas, que não interferem na obtenção de y, seria como se f apenas dependesse de x para chegar em y. Mas e se não pudermos supor isso? Se,

com essa suposição, perdermos muita informação? Nesses casos, não tem jeito: temos que levar essas outras variáveis em consideração para determinarmos $F(x)$.

Para entender como se dará esse processo, vamos mudar um pouco nossa notação. Chamaremos as p variáveis independentes de x_1, x_2, \dots, x_p e os pontos para os quais conhecemos o valor de f de $Z_1 = (X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1p})$, $Z_2 = (X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2p})$, ..., $Z_n = (X_{n1}, X_{n2}, \dots, X_{np})$. Do mesmo modo que no caso de uma variável, não conheceremos explicitamente f , mas saberemos que:

$$\begin{cases} f(Z_1) = f(X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1p}) = Y_1 \\ f(Z_2) = f(X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2p}) = Y_2 \\ \vdots \\ f(Z_n) = f(X_{n1}, X_{n2}, \dots, X_{np}) = Y_n \end{cases} \quad \text{e } F \text{ será uma função linear}$$

$$F(Z) = F(X_1, X_2, \dots, X_p) = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_p X_p.$$

Novamente, teremos um caso particular para Q^2 :

$$Q^2(a_0, a_1, \dots, a_p) = \sum_{k=1}^n d_k^2(f, F) = \sum_{k=1}^n (Y_k - a_0 X_{k1} - a_1 X_{k2} - \dots - a_p X_{kp})^2.$$

Aplicando o método dos mínimos quadrados da mesma forma que fizemos para o caso da regressão linear simples, teremos o seguinte sistema, escrito de maneira matricial:

$$\left(\begin{array}{ccccc} n & \sum_{k=1}^n X_{k1} & \sum_{k=1}^n X_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n X_{kp} \\ \sum_{k=1}^n X_{k1} & \sum_{k=1}^n X_{k1}^2 & \sum_{k=1}^n X_{k2} X_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^n X_{kp} X_{k1} \\ \sum_{k=1}^n X_{k2} & \sum_{k=1}^n X_{k1} X_{k2} & \sum_{k=1}^n X_{k2}^2 & \dots & \sum_{k=1}^n X_{kp} X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^n X_{kp} & \sum_{k=1}^n X_{k1} X_{kp} & \sum_{k=1}^n X_{k2} X_{kp} & \dots & \sum_{k=1}^n X_{kp}^2 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n Y_k \\ \sum_{k=1}^n X_{k1} Y_k \\ \sum_{k=1}^n X_{k2} Y_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n X_{kp} Y_k \end{pmatrix}$$

Exemplo: Uma rede de lojas populares quer saber se vale a pena continuar trabalhando com cartões de crédito, visto que eles têm um custo. Para isso, está analisando o número de vendas a vista no cartão e em cheque pré-datado em relação ao total de vendas (em dinheiro, parcelado no cartão ou cheque e boleto bancário). No último ano, observou os seguintes números:

Bimestres	Jan/Fev	Mar/Abr	Mai/Jun	Jul/Ago	Set/Out	Nov/Dez
Cartão	184	201	225	243	232	556
Cheque pré	169	160	218	256	202	560
Total	403	672	708	684	535	1200

Observe que o volume total de vendas ($y = F(x_1, x_2)$) depende tanto do número de vendas à vista no cartão (x_1) como no cheque pré-datado (x_2). Então podemos afirmar que a função f que rege essa tabela possui essas duas variáveis, que chamaremos de x_1 e x_2 . Assim, vamos encontrar as constantes a_0 , a_1 e a_2 cuja função linear $F(X_1, X_2) = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2$ melhor aproxima f de acordo com o método dos mínimos quadrados, resolvendo o sistema:

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{k=1}^n X_{k1} & \sum_{k=1}^n X_{k2} \\ \sum_{k=1}^n X_{k1} & \sum_{k=1}^n X_{k1}^2 & \sum_{k=1}^n X_{k2} X_{k1} \\ \sum_{k=1}^n X_{k2} & \sum_{k=1}^n X_{k1} X_{k2} & \sum_{k=1}^n X_{k2}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n Y_k \\ \sum_{k=1}^n X_{k1} Y_k \\ \sum_{k=1}^n X_{k2} Y_k \end{pmatrix}$$

Sabendo que $n = 6$, determinemos os somatórios acima, através da tabela auxiliar:

k	X_1	X_2	Y	$X_1 \cdot X_2$	X_1^2	X_2^2	$X_1 \cdot Y$	$X_2 \cdot Y$
1	184	169	403	31.096	33.856	28.561	74.152	68.107
2	201	160	672	32.160	40.401	25.600	135.072	107.520
3	225	218	708	49.050	50.625	47.524	159.300	154.344
4	243	256	684	62.208	59.049	65.536	166.212	175.104
5	232	202	535	46.864	53.824	40.804	124.120	108.070
6	556	560	1.200	311.360	309.136	313.600	667.200	672.000
Soma	1.641	1.565	4.202	532.738	546.891	521.625	1.326.056	1.285.145

Assim, o sistema linear a ser resolvido é:

$$\begin{pmatrix} 6 & 1.641 & 1.565 \\ 1.641 & 546.891 & 532.738 \\ 1.565 & 532.738 & 521.625 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.202 \\ 1.326.056 \\ 1.285.145 \end{pmatrix}$$

Utilizando qualquer meio de resolução de sistema dos vistos na Unidade 1, encontraremos os seguintes valores: $a_0 = 214,1069$, $a_1 = 1,5689$ e $a_2 = 0,219$, ou seja, $F(x_1, X_2) = 214,1069 + 1,5689X_1 + 0,219X_2$.



Tanto a regressão linear simples como a múltipla são muito utilizadas em estatísticas, conforme você pode perceber no exemplo anterior. Isso dá uma ideia da importância deste tipo de estudo, uma vez que praticamente todas as áreas utilizam modelos estatísticos no seu dia a dia.

3 REGRESSÃO POLINOMIAL

Estudamos o caso em que podemos aproximar a função f que, embora não a conheçamos explicitamente, temos seus valores em determinados pontos ordenados distintos entre si x_1, x_2, \dots, x_n , por uma função linear, simples ou múltipla (regressão Linear). Vamos agora aproximar f por uma função polinomial F e ver como, de acordo com o método dos mínimos quadrados, encontramos os coeficientes de F . Note que a ideia é a mesma do que já foi feito anteriormente: precisamos encontrar os coeficientes a_0, a_1, \dots, a_m da função $F(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$ que minimizem a função $Q^2(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{k=1}^n d_k^2(f, F) = \sum_{k=1}^n (y_k - a_0 - a_1x_k - \dots - a_mx_k^m)^2$, resolvendo para isso o sistema:

$$\frac{\partial Q^2}{\partial a_j}(a_0, a_1, \dots, a_m) = \frac{\partial}{\partial a_j} \left(\sum_{k=1}^n (y_k - a_0 - a_1x_k - \dots - a_mx_k^m)^2 \right) = 0$$

para cada $j = 0, 1, 2, \dots, n$. Resolvendo a derivada anterior por meio da Regra da Cadeia, temos:

$$\Rightarrow 2 \sum_{k=1}^n [-x_k^j] \cdot (y_k - a_0 - a_1x_k - \dots - a_mx_k^m) = 0$$

para cada $j = 0, 1, 2, \dots, n$. Como o produto de dois pelo somatório acima é zero e 2 é diferente de zero, segue que o somatório é necessariamente zero, ou seja:

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n [-x_k^j] \cdot (y_k - a_0 - a_1x_k - \dots - a_mx_k^m) = 0,$$

para cada $j = 0, 1, 2, \dots, n$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^n (a_0 + a_1 x_k + \dots + a_m x_k^m) = \sum_{k=1}^n y_k \\ \sum_{k=1}^n (a_0 x_k + a_1 x_k^2 + \dots + a_m x_k^{m+1}) = \sum_{k=1}^n x_k y_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n (a_0 x_k^m + a_1 x_k^{m+1} + \dots + a_m x_k^{2m}) = \sum_{k=1}^n x_k^m y_k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n a_0 + a_1 \sum_{k=1}^n x_k + \dots + a_m \sum_{k=1}^n x_k^m = \sum_{k=1}^n y_k \\ a_0 \sum_{k=1}^n x_k + a_1 \sum_{k=1}^n x_k^2 + \dots + a_m \sum_{k=1}^n x_k^{m+1} = \sum_{k=1}^n x_k y_k \\ \vdots \\ a_0 \sum_{k=1}^n x_k^m + a_1 \sum_{k=1}^n x_k^{m+1} + \dots + a_m \sum_{k=1}^n x_k^{2m} = \sum_{k=1}^n x_k^m y_k \end{cases}$$

que é um sistema linear com m equações e m incógnitas a_0, a_1, \dots, a_m . Matricialmente falando,

$$\left(\begin{array}{ccccc} n & \sum_{k=1}^n x_k & \sum_{k=1}^n x_k^2 & \dots & \sum_{k=1}^n x_k^m \\ \sum_{k=1}^n x_k & \sum_{k=1}^n x_k^2 & \sum_{k=1}^n x_k^3 & \dots & \sum_{k=1}^n x_k^{m+1} \\ \sum_{k=1}^n x_k^2 & \sum_{k=1}^n x_k^3 & \sum_{k=1}^n x_k^4 & \dots & \sum_{k=1}^n x_k^{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^n x_k^m & \sum_{k=1}^n x_k^{m+1} & \sum_{k=1}^n x_k^{m+2} & \dots & \sum_{k=1}^n x_k^{2m} \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n y_k \\ \sum_{k=1}^n x_k y_k \\ \sum_{k=1}^n x_k^2 y_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n x_k^m y_k \end{pmatrix}$$



Note que a regressão linear simples nada mais é do que um caso particular da regressão polinomial: basta tomar $a_2 = a_3 = \dots = a_m = 0$.

Exemplo: Vamos aproximar os dados da tabela a seguir por uma função quadrática.

x	0,2	0,5	0,6	0,7	1,0
y	9,4	11,4	12,3	10,2	11,9

Sabemos que uma função quadrática tem a forma $F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Assim, precisamos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{k=1}^n x_k & \sum_{k=1}^n x_k^2 \\ \sum_{k=1}^n x_k & \sum_{k=1}^n x_k^2 & \sum_{k=1}^n x_k^3 \\ \sum_{k=1}^n x_k^2 & \sum_{k=1}^n x_k^3 & \sum_{k=1}^n x_k^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n y_k \\ \sum_{k=1}^n x_k y_k \\ \sum_{k=1}^n x_k^2 y_k \end{pmatrix}$$

Como nos exemplos anteriores, vamos lançar mão aqui de uma tabela auxiliar:

k	x	y	$x \cdot y$	x^2	$x^2 \cdot y$	x^3	x^4
1	0,2	9,4	1,88	0,04	0,376	0,008	0,0016
2	0,5	11,4	5,7	0,25	2,85	0,125	0,0625
3	0,6	12,3	7,38	0,36	4,428	0,216	0,1296
4	0,7	10,2	7,14	0,49	4,998	0,343	0,2401
5	1,0	11,9	11,9	1	11,9	1	1
Soma	3,0	55,2	34	2,14	24,552	1,692	1,4338

Substituindo no sistema, $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2,14 \\ 3 & 2,14 & 1,692 \\ 2,14 & 1,692 & 1,4338 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55,2 \\ 34 \\ 24,552 \end{pmatrix}$, ou seja,

$a_0 = 8,149$, $a_1 = 8,0875$ e $a_2 = -4,583$, isto é, $F(x) = 8,149 + 8,085x - 4,583x^2$.

RESUMO DO TÓPICO 1

Vamos, neste momento, rever os principais assuntos estudados neste tópico.

- Estudamos métodos de aproximação de uma função f por uma combinação linear de funções conhecidas, $f(x) \approx a_0g_0(x) + a_1g_1(x) + \dots + a_mg_m(x) = F(x)$, de tal modo que a distância entre f e F seja a menor possível.
- O Método dos Mínimos Quadrados consiste em determinar os valores de a_0, a_1, \dots, a_m de forma a minimizar a função quadrática

$$Q^2(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{k=1}^n d_k^2(f, F) = \sum_{k=1}^n (y_k - a_0 g_0(x_k) - a_1 g_1(x_k) - \dots - a_m g_m(x_k))^2.$$

- Regressão Linear Simples: quando a função F é uma reta do tipo $F(x) = a_0 + a_1x$, com determinados números reais a_0, a_1 , com:

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{k=1}^n x_k \\ \sum_{k=1}^n x_k & \sum_{k=1}^n x_k^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n y_k \\ \sum_{k=1}^n y_k x_k \end{pmatrix}$$

- Regressão Linear Múltipla: Quando conhecemos o valor de f nos pontos $Z_1 = (X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1p})$, $Z_2 = (X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2p})$, ..., $Z_n = (X_{n1}, X_{n2}, \dots, X_{np})$ isto é, temos mais de uma variável independente, F será uma função linear do tipo $F(Z) = F(X_1, X_2, \dots, X_p) = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_p X_p$.
- Para encontrarmos seus coeficientes, precisamos resolver o sistema:

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{k=1}^n X_{k1} & \sum_{k=1}^n X_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n X_{kp} \\ \sum_{k=1}^n X_{k1} & \sum_{k=1}^n X_{k1}^2 & \sum_{k=1}^n X_{k2} X_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^n X_{kp} X_{k1} \\ \sum_{k=1}^n X_{k2} & \sum_{k=1}^n X_{k1} X_{k2} & \sum_{k=1}^n X_{k2}^2 & \dots & \sum_{k=1}^n X_{kp} X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^n X_{kp} & \sum_{k=1}^n X_{k1} X_{kp} & \sum_{k=1}^n X_{k2} X_{kp} & \dots & \sum_{k=1}^n X_{kp}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n Y_k \\ \sum_{k=1}^n X_{k1} Y_k \\ \sum_{k=1}^n X_{k2} Y_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n X_{kp} Y_k \end{pmatrix}$$

- Regressão Polinomial: quando a função F é do tipo polinomial, ou seja, da função $F(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$, precisamos resolver o sistema:

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{k=1}^n x_k & \sum_{k=1}^n x_k^2 & \dots & \sum_{k=1}^n x_k^m \\ \sum_{k=1}^n x_k & \sum_{k=1}^n x_k^2 & \sum_{k=1}^n x_k^3 & \dots & \sum_{k=1}^n x_k^{m+1} \\ \sum_{k=1}^n x_k^2 & \sum_{k=1}^n x_k^3 & \sum_{k=1}^n x_k^4 & \dots & \sum_{k=1}^n x_k^{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^n x_k^m & \sum_{k=1}^n x_k^{m+1} & \sum_{k=1}^n x_k^{m+2} & \dots & \sum_{k=1}^n x_k^{2m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n y_k \\ \sum_{k=1}^n x_k y_k \\ \sum_{k=1}^n x_k^2 y_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n x_k^m y_k \end{pmatrix}$$

AUTOATIVIDADE



Em qualquer área da Matemática, só conseguimos realmente aprender um assunto depois de praticá-lo bastante através da resolução de exercícios. Que tal fixar agora o conteúdo que vimos neste tópico?

- 1 A tabela a seguir relaciona as alturas e os pesos de uma amostra de 9 homens entre as idades de 25 e 39 anos, extraída ao acaso entre os funcionários de uma grande indústria (RUGGIERO; LOPES, 1997):

Altura (cm)	183	173	168	188	158	163	193	163	178
Peso (kg)	79	69	70	81	61	63	79	71	73

- a) Faça o diagrama de dispersão dos dados e observe que parece existir uma relação linear entre peso e altura.
b) Ajuste uma reta que descreva o comportamento do peso em função da altura, isto é, peso = f (altura).
c) Estime o peso de um funcionário com 175 cm de altura; e estime a altura de um funcionário com 80 kg.
d) Ajuste agora a reta que descreve o comportamento da altura em função do peso, isto é, altura = f (peso).
e) Resolva o item c) agora com essa nova função e compare os resultados obtidos. Tente encontrar uma explicação.
f) Coloque num gráfico as equações b) e d) e compare-as.
- 2 Baseado na tabela a seguir, encontre a regressão polinomial de grau 2:

x	-1,8	-1,4	0	1	2,3	3,2
y	-25	-20,2	-3,1	9,2	15,1	20,4

- 3 A tabela a seguir relaciona o número de acidentes em veículos motorizados no Brasil em alguns anos entre 1980 e 2006 (FRANCO, 2006):

Ano	Numero de Acidentes (em milhares)	Acidentes por 10.000 veículos
1980	8.300	1.688
1985	9.900	1.577
1990	10.400	1.397
1993	13.200	1.439
1997	13.600	1.418
2000	13.700	1.385
2006	14.600	1.415

- a) Calcule a regressão linear do número de acidentes no tempo. Use-a para estimar o número de acidentes no ano de 2010 (isto é chamado de análise temporal, visto que é uma regressão no tempo, e é usada para prognosticar o futuro).
- b) Calcule uma regressão quadrática do número de acidentes por 10.000 veículos. Use esta para prognosticar o número de acidentes por 10.000 veículos no ano de 2007.
- c) Compare os resultados das partes a) e b). Em qual delas você está mais propenso a acreditar?

4 Encontre a regressão linear que melhor aproxima os seguintes valores:

X_1	-3	-1	0	1	3
X_2	0,2	0,3	0,5	0,7	0,8
Y	5,9	6,5	8,9	9,5	10,1

5 Em um estudo, determinou-se que a vazão de água em uma tubulação está relacionada com o diâmetro e com a inclinação dessa tubulação (em relação à horizontal). Os dados experimentais estão na tabela a seguir (FRANCO, 2006):

Experimento	Diâmetro	Inclinação	Vazão (m^3/s)
1	1	0,001	1,4
2	2	0,001	8,3
3	3	0,001	24,2
4	1	0,01	4,7
5	2	0,01	28,9
6	3	0,01	84,0

7	1	0,05	11,1
8	2	0,05	200,0

Encontre a regressão linear que descreve a tabela acima pelo método dos mínimos quadrados.

Dica: Utilize x_1 para o diâmetro e x_2 para a inclinação.

- 6 Aproxime os pontos abaixo por uma regressão polinomial do tipo $F(x) = a_0 + a_1x^2$:

x	-0,6	-0,5	-0,3	0	0,4	0,8
y	0,45	0,4	0,5	0	0,6	1,4

- 7 A tabela a seguir relaciona o teor de ferro na capacidade de carga de vigas de concreto.

Ferro (% peso)	6,8	7,3	7,7	8,1	8,5	8,6
Carga (ton/m ²)	2,2	2,9	3,0	3,1	3,1	3,4

- a) Encontre, através do método dos mínimos quadrados, a regressão linear que melhor aproxima estes pontos.
- b) Encontre, através do método dos mínimos quadrados, a regressão polinomial que melhor aproxima estes pontos.

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

1 INTRODUÇÃO

Consideremos f uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$. O Teorema Fundamental do Cálculo nos diz que existe uma função F contínua tal que $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. A função F é chamada de primitiva de f , e $F'(x) = f(x)$.

Assim quando queremos determinar a integral de uma função em um intervalo basta encontrar a sua primitiva. Parece simples, não é? Mas você deve lembrar do Cálculo que, infelizmente, não é. Existem funções f bastante complicadas, a tal ponto que não fazemos ideia de quem seja sua primitiva. Também temos outra situação a ser considerada: quando não conhecemos a função f explicitamente, apenas seu valor quando aplicada em determinados valores x_0, x_1, \dots, x_n . Nesses casos, é necessário utilizarmos um método alternativo de integração: a integração numérica. Integrar numericamente uma função em um dado intervalo significa integrar o polinômio que melhor se aproxime desta função neste mesmo intervalo. Neste tópico, estudaremos algumas formas de integração numérica partindo dos polinômios de Lagrange, vistos na unidade anterior.

2 FÓRMULA DE NEWTON-CÔTES

Sejam x_0, x_1, \dots, x_n os $n + 1$ pontos para os quais conhecemos o valor de f em um intervalo $[a, b]$. Vamos supor também, sem perda de generalidade, que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ e que esses pontos estão igualmente espaçados, isto é, $x_j - x_{j-1} = h$, para todo $j = 1, 2, \dots, n$. Então, a menos de um pequeno erro de interpolação, podemos considerar $f(x) \approx f(x_0) \cdot L_0(x) + f(x_1) \cdot L_1(x) + \dots + f(x_n) \cdot L_n(x)$, onde $L_j(x)$ são os polinômios de Lagrange, cuja fórmula é dada por:

$$L_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\dots(x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)\dots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\dots(x_j - x_n)}.$$

Desta forma, integrar f no intervalo $[a, b]$ é praticamente a mesma coisa que integrar $f(x_0) \cdot L_0(x) + f(x_1) \cdot L_1(x) + \dots + f(x_n) \cdot L_n(x)$, a menos de um pequeno erro. Logo,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \int_{x_0}^{x_n} (f(x_0) \cdot L_0(x) + f(x_1) \cdot L_1(x) + \dots + f(x_n) \cdot L_n(x)) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_n} f(x_0) \cdot L_0(x) dx + \int_{x_0}^{x_n} f(x_1) \cdot L_1(x) dx + \dots + \int_{x_0}^{x_n} f(x_n) \cdot L_n(x) dx \\ &= f(x_0) \cdot \int_{x_0}^{x_n} L_0(x) dx + f(x_1) \cdot \int_{x_0}^{x_n} L_1(x) dx + \dots + f(x_n) \cdot \int_{x_0}^{x_n} L_n(x) dx \end{aligned}$$

Por outro lado, supomos que os pontos x_0, x_1, \dots, x_n estão uniformemente espaçados a uma distância h . Vamos então fazer uma mudança de variável: tomando $u = \frac{x - x_0}{h}$, teremos $dx = h \cdot du$. Olhando agora para o intervalo de integração,

$$\begin{cases} x = x_0 \rightarrow u = 0 \\ x = x_n \rightarrow u = \frac{x_n - x_0}{h} = \frac{x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - \dots - x_1 + x_1 - x_0}{h} = \frac{n \cdot h}{h} = n \end{cases}$$

Temos mais um passo a ser dado antes de exibirmos nossa integral mediante esta mudança de variável: temos que escrever nossos polinômios de Lagrange em função de u . Note que:

$$\begin{cases} x - x_0 = h \cdot u \\ x - x_1 = x - x_0 + x_0 - x_1 = x - x_0 - h = h \cdot u - h = h \cdot (u - 1) \\ x - x_2 = x - x_1 + x_1 - x_2 = h \cdot (u - 1) - h = h \cdot (u - 2) \\ \vdots \\ x - x_n = x - x_{n-1} + x_{n-1} - x_n = h \cdot (u - (n - 1)) - h = h \cdot (u - n) \end{cases}$$

Assim,

$$L_j(x) = L_j(u \cdot h + x_0)$$

$$= \frac{h \cdot u \cdot h \cdot (u - 1) \cdot \dots \cdot h \cdot (u - (j - 1)) \cdot h \cdot (u - (j + 1)) \cdots h \cdot (u - n)}{h \cdot j \cdot h \cdot (j - 1) \cdots h \cdot (j - (j - 1)) \cdot h \cdot (j - (j + 1)) \cdots h \cdot (j - n)}.$$

$$= \frac{u \cdot (u - 1) \cdot \dots \cdot (u - (j - 1)) \cdot (u - (j + 1)) \cdots (u - n)}{j \cdot (j - 1) \cdots (j - (j - 1)) \cdot (j - (j + 1)) \cdots (j - n)}$$

Portanto, a integral numérica da função f depois da mudança de variável se torna

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \int_0^n h \cdot (f(x_0) \cdot \lambda_0(u) + f(x_1) \cdot \lambda_1(u) + \dots + f(x_n) \cdot \lambda_n(u))du \\ &= \sum_{j=0}^n h \cdot f(x_j) \int_0^n \lambda_j(u)du\end{aligned}$$

Essa expressão complicada acima é a generalização dos métodos de integração numérica que veremos a seguir.

2.1 REGRA DO TRAPÉZIO

Baseado na fórmula para a integral numérica da função f vista acima, vamos considerar o caso em que $n = 1$, isto é, o caso em que conhecemos o valor de f apenas nos extremos do intervalo $a = x_0$ e $b = x_1$. Então:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \sum_{j=0}^1 h \cdot f(x_j) \int_0^1 \lambda_j(u)du \\ &= h \cdot f(x_0) \int_0^1 \lambda_0(u)du + h \cdot f(x_1) \int_0^1 \lambda_1(u)du\end{aligned}$$

Por outro lado,

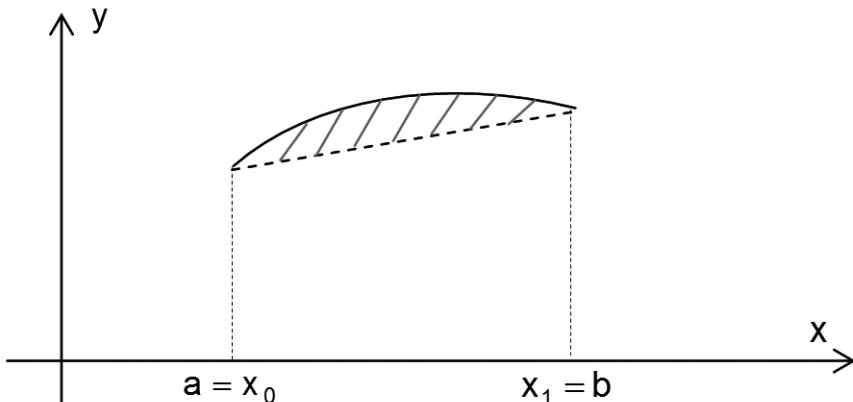
$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_0(u) = \frac{(u-1)}{(0-1)} \Rightarrow \int_0^1 \lambda_0(u)du = \int_0^1 (1-u)du = \frac{1}{2} \\ \lambda_1(u) = \frac{(u-0)}{(1-0)} \Rightarrow \int_0^1 \lambda_1(u)du = \int_0^1 u du = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Logo $\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot f(x_0) \cdot \frac{1}{2} + h \cdot f(x_1) \cdot \frac{1}{2}$, ou seja,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \cdot (f(a) + f(b)).$$

Essa expressão é conhecida como Regra do Trapézio. Mas por que esse nome? Observe a interpretação geométrica desta situação:

GRÁFICO 15 – REGRA DO TRAPÉZIO (a)



FONTE: A autora

Observe que a integral numérica resume-se a calcular a área do trapézio de bases $f(x_0)$ e $f(x_1)$, e altura $(x_1 - x_0) = h$, daí o nome regra do trapézio.

A área hachurada no Gráfico 15, indica exatamente a diferença entre a integral da função f e a do trapézio, ou seja, é o erro cometido ao fazermos a aproximação. Sendo assim, quanto menor for o valor de h , isto é, quanto mais próximos estiverem x_0 e x_1 , menor será o erro cometido e melhor a aproximação.

Exemplo 1: Seja f uma função cuja fórmula explícita não conhecemos, mas sabemos que vale 2 no ponto 1 e 14 no ponto 3 ($f(1) = 2$ e $f(3) = 14$). Calcule o valor da integral desta função no intervalo $[1, 3]$.

Como conhecemos o valor da função para exatos dois pontos, aplicaremos a regra do trapézio:

$$\int_1^3 f(x)dx \approx \frac{(3-1)}{2} \cdot (f(1) + f(3)) = \frac{2}{2} \cdot (2 + 14) = 16 .$$

Exemplo 2: Determine a integral da função $g(x) = x^2e^{3x}$ no intervalo $[0,2]$.

Sabemos que calcular diretamente a integral $\int_0^2 x^2 e^{3x} dx$ é meio complicado.

Vamos então calcular a integral numericamente, via Regra do Trapézio.

O primeiro passo é calcular a função $g(x) = x^2e^{3x}$ nos pontos 0 e 2:

$$\begin{cases} g(0) = 0^2 e^{3 \cdot 0} = 0 \\ g(2) = 2^2 e^{3 \cdot 2} = 4e^6 \approx 1.613,7 \end{cases}$$

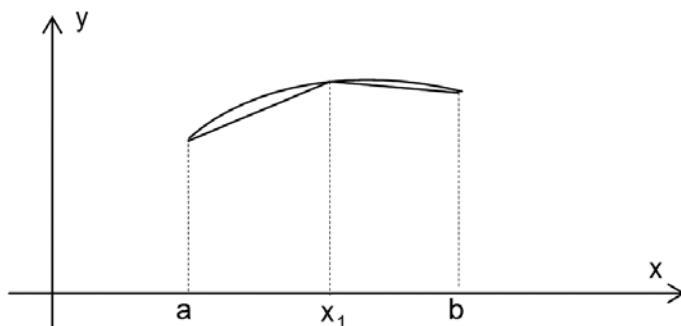
Feito isso, temos que

$$\int_0^2 g(x)dx \approx \frac{(2-0)}{2} \cdot (0 + 1.613,7) = 1.613,7$$

Utilizar a regra do trapézio para calcular a integral numérica de uma função f em um intervalo $[a, b]$, então, consiste em calcular a área do trapézio formado pelos lados $f(a)$ e $f(b)$ e altura $b - a$. Por outro lado, poderíamos tomar um ponto intermediário x_1 entre os pontos a e b tal que $b - x_1 = x_1 - a = h$, e calcular a integral numérica de f em $[a, b]$ como sendo a seguinte soma:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^b f(x)dx \\ &\approx \left[\frac{h}{2} \cdot (f(a) + f(x_1)) \right] + \left[\frac{h}{2} \cdot (f(x_1) + f(b)) \right] \\ &= \frac{h}{2} \cdot (f(a) + 2f(x_1) + f(b))\end{aligned}$$

GRÁFICO 16 – REGRA DO TRAPÉZIO (b)



FONTE: A autora



Você deve ter estranhado o fato de chamarmos a distância de x_1 a a (e, consequentemente, de x_1 a b) de h pois, se fôssemos ser bem honestos, deveríamos chamá-la de $\frac{h}{2}$. Entretanto, como h é uma constante, para não carregarmos a notação, fizemos o que os matemáticos chamam de abuso de linguagem, e substituímos o $\frac{h}{2}$ por h . Só precisamos ficar atentos a essa mudança e não confundirmos os dois valores como sendo os mesmos!

Note, pelo Gráfico 16, que o erro cometido é menor quando fazemos esse passo intermediário. Seguindo este raciocínio, se dividirmos o intervalo em mais

pedaços, o erro será menor ainda. Vamos então dividir o intervalo $[a,b]$ em m subintervalos $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{m-1}, x_m]$ de tamanho $h = \frac{b-a}{m}$, de tal forma que $a = x_0$ e $x_m = b$ e aplicar a regra do trapézio em cada um desses subintervalos,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{m-1}}^{x_m} f(x) dx \\ \approx \left[\frac{h}{2} \cdot (f(x_0) + f(x_1)) \right] + \left[\frac{h}{2} \cdot (f(x_1) + f(x_2)) \right] + \dots + \left[\frac{h}{2} \cdot (f(x_{m-1}) + f(x_m)) \right],$$

ou seja,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \cdot [f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{m-1})) + f(x_m)]$$

Esse método é conhecido como Regra do Trapézio Generalizada.

Exemplo: Determine a integral da função $f(x) = x^2 e^{3x}$ no intervalo $[0, 2]$, considerando $h = 0,25$.

Para calcularmos essa integral via Regra do Trapézio Generalizada, precisamos, inicialmente, dividir o intervalo acima em subintervalos de altura $h = 0,25$. Assim, $x_0 = 0 \rightarrow f(x_0) = f(0) = 0^2 e^{3 \cdot 0} = 0$

$$x_1 = 0 + 0,25 = 0,25 \rightarrow f(x_1) = f(0,25) = (0,25)^2 e^{3 \cdot (0,25)} = 0,13$$

$$x_2 = 0,25 + 0,25 = 0,5 \rightarrow f(x_2) = f(0,5) = (0,5)^2 e^{3 \cdot (0,5)} = 1,12$$

$$x_3 = 0,5 + 0,25 = 0,75 \rightarrow f(x_3) = f(0,75) = (0,75)^2 e^{3 \cdot (0,75)} = 5,34$$

$$x_4 = 0,75 + 0,25 = 1 \rightarrow f(x_4) = f(1) = (1)^2 e^{3 \cdot (1)} = 20,09$$

$$x_5 = 1 + 0,25 = 1,25 \rightarrow f(x_5) = f(1,25) = (1,25)^2 e^{3 \cdot (1,25)} = 66,44$$

$$x_6 = 1,25 + 0,25 = 1,5 \rightarrow f(x_6) = f(1,5) = (1,5)^2 e^{3 \cdot (1,5)} = 202,54$$

$$x_7 = 1,5 + 0,25 = 1,75 \rightarrow f(x_7) = f(1,75) = (1,75)^2 e^{3 \cdot (1,75)} = 583,61$$

$$x_8 = 1,75 + 0,25 = 2 \rightarrow f(x_8) = f(2) = (2)^2 e^{3 \cdot (2)} = 1613,72$$

Aplicando a fórmula,

$$\int_0^2 (x^2 e^{3x}) dx \approx \frac{h}{2} \cdot [f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + f(x_6) + f(x_7)) + f(x_8)] \\ = \frac{0,25}{2} \cdot [0 + 2(0,13 + 1,12 + 5,34 + 20,09 + 66,44 + 202,54 + 583,61) + 1613,72]$$

$$\begin{aligned}
 &= 0,125 \cdot [0 + 1758,52 + 1613,72] \\
 &= 421,53
 \end{aligned}$$

Obs.: Se resolvemos a integral acima analiticamente, teremos:

$$\int_0^2 (x^2 e^{3x}) dx = \frac{e^{3x}}{27} \cdot (9x^2 - 6x + 2) \Big|_0^2 = 388,49$$

Sem sombra de dúvida, a regra do trapézio generalizada nos fornece uma aproximação melhor do que a do trapézio simples. Na verdade, quanto menor for a amplitude dos subintervalos utilizados no cálculo, mais exato será o resultado encontrado.

2.2 REGRA DE SIMPSON

Para deduzirmos as fórmulas da Regra do Trapézio, consideramos $n = 1$, isto é, supomos que conhecíamos o valor da função em apenas dois pontos – justamente os extremos do intervalo – e aplicamos a fórmula de Newton-Côtes utilizando os polinômios de Lagrange de primeiro grau. Vamos supor agora que conhecemos o valor de f em três pontos distintos consecutivos x_0, x_1 e x_2 e apliquemos novamente tal fórmula, utilizando agora os polinômios de Lagrange de segundo grau.

Assim,

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \sum_{j=0}^2 h \cdot f(x_j) \int_0^1 \lambda_j(u) du \\
 &= h \cdot f(x_0) \int_0^1 \lambda_0(u) du + h \cdot f(x_1) \int_0^1 \lambda_1(u) du + h \cdot f(x_2) \int_0^1 \lambda_2(u) du
 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\left\{
 \begin{aligned}
 \lambda_0(u) &= \frac{(u-1)(u-2)}{(0-1)(0-2)} \Rightarrow \int_0^1 \lambda_0(u) du = \int_0^1 \frac{(u-1)(u-2)}{2} du = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 (u^2 - 3u + 2) du = \frac{1}{3} \\
 \lambda_1(u) &= \frac{(u-0)(u-2)}{(1-0)(1-2)} \Rightarrow \int_0^1 \lambda_1(u) du = -1 \cdot \int_0^1 (u^2 - 2u) du = \frac{4}{3} \\
 \lambda_2(u) &= \frac{(u-0)(u-1)}{(2-0)(2-1)} \Rightarrow \int_0^1 \lambda_2(u) du = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 (u^2 - u) du = \frac{1}{3}
 \end{aligned}
 \right.$$

Logo $\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot f(x_0) \cdot \frac{1}{3} + h \cdot f(x_1) \cdot \frac{4}{3} + h \cdot f(x_2) \cdot \frac{1}{3}$, ou seja, $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \cdot (f(a) + 4f(x_1) + f(b))$.

Essa expressão é conhecida como Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson.

Do mesmo modo que fizemos para a Regra do Trapézio, podemos dividir o intervalo $[a, b]$ em um número PAR de subintervalos $2m$ de amplitude $h = \frac{b-a}{2m}$ de tal forma que $a = x_0$ e $x_{2m} = b$. Então:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_{2m}} f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \dots + \int_{x_{2(m-1)}}^{x_{2m}} f(x)dx \\ &\approx \left[\frac{h}{3} \cdot (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) \right] + \left[\frac{h}{3} \cdot (f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) \right] + \dots \\ &\quad \dots + \left[\frac{h}{3} \cdot (f(x_{2m-2}) + 4f(x_{2m-1}) + f(x_{2m})) \right] \\ &= \frac{h}{3} \cdot [(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + (f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) + \dots \\ &\quad \dots + (f(x_{2m-2}) + 4f(x_{2m-1}) + f(x_{2m}))] \end{aligned},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_{2m}} f(x)dx &\approx \frac{h}{3} \cdot [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots \\ &\quad \dots + 2f(x_{2m-2}) + 4f(x_{2m-1}) + f(x_{2m})] \end{aligned}$$

Chamamos esta expressão de Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson Generalizada.



Para deduzirmos a Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson, supomos conhecer o valor da função f em 3 pontos consecutivos distintos, isto é, em 2 subintervalos consecutivos ($[x_0, x_1]$ e $[x_1, x_2]$). Esse fato explica o porquê de termos imposto na generalização da regra um número par de subintervalos.

Exemplo: Determinemos novamente a integral da função $f(x) = x^2e^{3x}$ no intervalo $[0,2]$, agora via Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson, sabendo que $f(1) = 20,09$, e $\frac{1}{3}$ de Simpson Generalizada, para $m = 4$, ou seja, $2 \cdot m = 8$.

Já vimos anteriormente que $f(0) = 0$ e $f(2) = 1613,72$. Assim, pela Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson,

$$\int_0^2 f(x)dx \approx \frac{(2-0)}{3} \cdot (f(0) + 4f(1) + f(2)) = \frac{2}{3} \cdot (0 + 80,32 + 1613,72) = 1129,37$$

Para $m = 4$, temos $h = \frac{b-a}{2m} = \frac{2-0}{8} = 0,25$, e também já vimos que

$$x_0 = 0 \rightarrow f(0) = 0$$

$$x_1 = 0,25 \rightarrow f(0,25) = 0,13$$

$$x_2 = 0,5 \rightarrow f(0,5) = 1,12$$

$$x_3 = 0,75 \rightarrow f(0,75) = 5,34$$

$$x_4 = 1 \rightarrow f(1) = 20,09$$

$$x_5 = 1,25 \rightarrow f(1,25) = 66,44$$

$$x_6 = 1,5 \rightarrow f(1,5) = 202,54$$

$$x_7 = 1,75 \rightarrow f(1,75) = 583,61$$

$$x_8 = 2 \rightarrow f(2) = 1613,72$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_8} f(x)dx &\approx \frac{0,25}{3} \cdot [f(0) + 4f(0,25) + 2f(0,5) + 4f(0,75) + 2f(1) + \\ &+ 4f(1,25) + 2f(1,5) + 4f(1,75) + f(2)] \\ &= 0,0833 \cdot [0 + 0,52 + 2,24 + 21,346 + 40,178 + \\ &+ 265,76 + 405,08 + 2334,44 + 1613,72] \\ &= 390,19 \end{aligned}$$

Observe que o valor encontrado via Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson Generalizada se aproxima muito mais do valor obtido integrando a função analiticamente, mesmo quando comparado ao obtido via Regra do Trapézio Generalizada. E isso já era esperado, uma vez que trabalhamos com os polinômios de Lagrange de grau 2. Na verdade, quanto maior o grau do polinômio de Lagrange considerado e maior o número de pontos utilizados no cálculo generalizado, mais próximo do valor real será nossa aproximação.

3 QUADRATURA GAUSSIANA

Vamos agora conhecer outra forma de calcular a integral numérica de uma função f que fornece um resultado bem mais preciso do que os vistos anteriormente, originários da Fórmula de Newton-Côtes, utilizando o mesmo número de pontos. Nesse método, os pontos não são mais escolhidos ao acaso, pela pessoa que está implementando o método, mas obedecem a um critério bem

definido, que veremos mais a frente. Esse método é chamado de Quadratura Gaussiana.

Nosso objetivo continua sendo resolver $\int_a^b f(x)dx$ e, para isso, vamos continuar trabalhando com uma aproximação do tipo $\int_a^b f(x)dx \approx f(x_0) \cdot A_0 + f(x_1) \cdot A_1 + \dots + f(x_n) \cdot A_n$, o que lembra muito a cara da Fórmula de Newton-Côtes: lá, $A_j = \int_0^1 \lambda_j(x)dx$ para cada $j = 0, 1, \dots, n$ que, por sua vez, dependiam de x_0, x_1, \dots, x_n . Agora, vamos tomar outro tipo de A_j , que independam da escolha destes pontos. Assim, precisamos encontrar as constantes A_0, A_1, \dots, A_n e os pontos x_0, x_1, \dots, x_n .

Nesse intuito, o primeiro passo que daremos será substituir o intervalo de integração de $[a, b]$ para $[-1, 1]$ através de uma mudança de variável:

Consideremos $x = \frac{1}{2}(b-a) \cdot t + \frac{1}{2}(b+a)$. Então $f(x) = f\left(\frac{1}{2}(b-a) \cdot t + \frac{1}{2}(b+a)\right)$. Além disso, note que:

$$\begin{cases} t = -1 \rightarrow x = \frac{1}{2}(b-a) \cdot (-1) + \frac{1}{2}(b+a) = \frac{1}{2}(a-b) + \frac{1}{2}(b+a) = \frac{1}{2}(a-b+b+a) = a \\ t = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}(b-a) \cdot 1 + \frac{1}{2}(b+a) = \frac{1}{2}(b-a+b+a) = b \end{cases}$$

e $dx = \frac{1}{2}(b-a)dt$. Desta forma,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{1}{2}(b-a) \cdot t + \frac{1}{2}(b+a)\right) \cdot \frac{1}{2}(b-a)dt = \int_{-1}^1 F(t)dt,$$

onde $F(t) = \frac{1}{2}(b-a) \cdot f\left(\frac{1}{2}(b-a) \cdot t + \frac{1}{2}(b+a)\right)$. Mais ainda:

$$\int_a^b f(x)dx \approx f(x_0) \cdot A_0 + f(x_1) \cdot A_1 + \dots + f(x_n) \cdot A_n$$

\Leftrightarrow

$$\int_{-1}^1 F(t)dt \approx F(t_0) \cdot A_0 + F(t_1) \cdot A_1 + \dots + F(t_n) \cdot A_n$$

Daqui por diante, consideraremos $n = 1$, isto é, trabalharemos com apenas dois pontos. A demonstração para $n > 1$ é parecida.



Você pode encontrar a fórmula geral da quadratura gaussiana no livro Cálculo Numérico (com aplicações), de Barroso, L. C. et al. (1987).

Vamos determinar A_0 , A_1 , t_0 e t_1 . Para encontrar esses valores, precisamos de um sistema de quatro equações que relate as incógnitas. Por outro lado, como elas independentes da função f , podemos considerar quatro funções quaisquer F_0 , F_1 , F_2 e F_3 e montar um sistema com as equações resultantes. Só precisamos ter um cuidado com a escolha que fizemos: elas precisam ser linearmente independentes, pois precisamos ter certeza que o sistema formado terá uma solução e que esta solução será única. Consideremos então $F_0(t) = t^0$, $F_1(t) = t^1$, $F_2(t) = t^2$ e $F_3(t) = t^3$. Substituindo esses valores na nossa equação, temos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^1 t^0 dt = (t_0)^0 \cdot A_0 + (t_1)^0 \cdot A_1 \rightarrow \int_{-1}^1 1 dt = A_0 + A_1 \\ \int_{-1}^1 t^1 dt = (t_0)^1 \cdot A_0 + (t_1)^1 \cdot A_1 \rightarrow \int_{-1}^1 t dt = t_0 A_0 + t_1 A_1 \\ \int_{-1}^1 t^2 dt = (t_0)^2 \cdot A_0 + (t_1)^2 \cdot A_1 \rightarrow \int_{-1}^1 t^2 dt = t_0^2 A_0 + t_1^2 A_1 \\ \int_{-1}^1 t^3 dt = (t_0)^3 \cdot A_0 + (t_1)^3 \cdot A_1 \rightarrow \int_{-1}^1 t^3 dt = t_0^3 A_0 + t_1^3 A_1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_0 + A_1 = 2 \\ t_0 A_0 + t_1 A_1 = 0 \\ t_0^2 A_0 + t_1^2 A_1 = \frac{2}{3} \\ t_0^3 A_0 + t_1^3 A_1 = 0 \end{array} \right.$$

Resolvendo o sistema por algum dos métodos estudados na Unidade 1, chegamos aos seguintes valores:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = 1 \\ A_1 = 1 \\ t_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ t_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array} \right.$$

Portanto, a fórmula de Gauss para dois pontos é dada por:

$$\int_a^b f(x) dx = F\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \text{ com } F(t) = \frac{1}{2}(b-a) \cdot f\left(\frac{1}{2}(b-a) \cdot t + \frac{1}{2}(b+a)\right)$$



Pela forma como foram encontradas as constantes A_0 , A_1 , t_0 e t_1 , podemos afirmar que a fórmula da quadratura gaussiana para dois pontos nos fornece um resultado EXATO para polinômios de até terceiro grau.

Exemplo: Determinemos novamente a integral da função $f(x) = x^2e^{3x}$ no intervalo $[0,2]$ via quadratura gaussiana.

O primeiro passo é fazer a mudança de variável do intervalo $[0,2]$ para $[-1,1]$ e, portanto, determinar $F(t)$:

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \frac{1}{2}(2-0) \cdot f\left(\frac{1}{2}(2-0) \cdot t + \frac{1}{2}(2+0)\right) = f(t+1) = (t+1)^2 e^{3(t+1)} \text{ e, assim,} \\
 \int_0^2 f(x) dx &= F\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\
 &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right)^2 e^{3\left(-\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right)} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right)^2 e^{3\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right)} \\
 &= 0,635 + 282,462 \\
 &= 283,097
 \end{aligned}$$

Se você comparar esse valor obtido via quadratura gaussiana com a integral de f (a saber, 388,41), perceberá que existe um erro razoável. Entretanto, comparando-o com os outros resultados obtidos da integração numérica via Regra do Trapézio e Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson (1.613,7 e 1.129,37 respectivamente), esse valor passa a ser bem mais interessante. Isso nos dá uma ideia do quanto melhor é a aproximação via quadratura gaussiana! Por outro lado, ela só pode ser aplicada quando conhecemos a função a ser integrada. Nos casos em que possuímos apenas uma tabela de valores, não temos como escapar dos métodos via fórmula de Newton-Côtes.

RESUMO DO TÓPICO 2

Ao longo deste tópico, estudamos os métodos de resolução numérica da integral definida de uma função f desconhecida explicitamente – temos apenas seu valor quando aplicadas em alguns pontos consecutivos e equidistantes – ou cuja primitiva não conhecemos. São eles:

- Regra do Trapézio: $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \cdot (f(a) + f(b))$, onde $h = (b - a)$.
- Regra do Trapézio Generalizada: Dividindo o intervalo $[a,b]$ em m subintervalos $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{m-1}, x_m]$ de tamanho $h = \frac{b-a}{m}$, de tal forma que $a = x_0$ e $x_m = b$,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \cdot [f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{m-1})) + f(x_m)]$$

- Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson: conhecendo o valor de f em três pontos distintos consecutivos x_0, x_1 e x_2 , $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \cdot (f(a) + 4f(x_1) + f(b))$, onde $h = \frac{b-a}{2}$
- Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson Generalizada: dividindo o intervalo $[a,b]$ em um número PAR de subintervalos $2m$ de amplitude $h = \frac{b-a}{2m}$ de tal forma que $a = x_0$ e $x_{2m} = b$,

$$\int_{x_0}^{x_{2m}} f(x)dx \approx \frac{h}{3} \cdot [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 2f(x_{2m-2}) + 4f(x_{2m-1}) + f(x_{2m})]$$

- Quadratura gaussiana para dois pontos:

$$\int_a^b f(x)dx = F\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \text{ com } F(t) = \frac{1}{2}(b-a) \cdot f\left(\frac{1}{2}(b-a) \cdot t + \frac{1}{2}(b+a)\right)$$

- A fórmula da quadratura gaussiana para dois pontos nos fornece um resultado EXATO para polinômios de até terceiro grau.
- A quadratura gaussiana só pode ser aplicada quando conhecemos a função a ser integrada. Nos casos em que possuímos apenas uma tabela de valores, utilizamos um dos outros métodos acima.

AUTOATIVIDADE



1 Com base na tabela a seguir:

x_i	0	1	2	3	4
y_i	1	0,5	0,3	0,8	0,2

- a) Calcule a integral numérica da função implícita no intervalo $[0,3]$ via regra do trapézio.
- b) Calcule a integral numérica da função implícita no intervalo $[2,4]$ regra $\frac{1}{3}$ de Simpson.
- c) Calcule a integral numérica da função implícita no intervalo $[1,3]$ via regra do trapézio generalizada.
- d) É possível calcular a regra $\frac{1}{3}$ de Simpson generalizada no intervalo $[1,4]$? Se sim, calcule, caso contrário, justifique.
- e) É possível calcular a regra $\frac{1}{3}$ de Simpson generalizada no intervalo $[0,4]$? Se sim, calcule, caso contrário, justifique.
- f) É possível calcular a quadratura gaussiana no intervalo $[0,4]$? Se sim, calcule, caso contrário, justifique.

2 Com base na tabela a seguir:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_i	1	7	13	20	22	31	35	42	44

- a) Calcule a integral numérica da função implícita no intervalo $[1,9]$ via regra do trapézio.
- b) Calcule a integral numérica da função implícita no intervalo $[1,9]$ via regra $\frac{1}{3}$ de Simpson.
- c) Calcule a integral numérica da função implícita no intervalo $[1,9]$ via regra do trapézio generalizada.
- d) É possível calcular a regra $\frac{1}{3}$ de Simpson generalizada no intervalo $[1,9]$? Se sim, calcule, caso contrário, justifique.

3 Calcule $\int_0^1 \sin x^2 dx$ via regras do trapézio e $\frac{1}{3}$ de Simpson.

- 4 Calcule $\int_3^{4,8} \ln x^2 dx$ via regras do trapézio e $\frac{1}{3}$ de Simpson generalizadas, utilizando n=6.
- 5 Calcule $\int_3^{4,8} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$ via quadratura gaussiana.
- 6 Calcule $\int_1^4 8x^2 - 5dx$ via regras do trapézio, $\frac{1}{3}$ de Simpson, quadratura gaussiana e analiticamente, e compare os resultados.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

1 INTRODUÇÃO

A matéria vista antes de Cálculo Numérico foi Equações Diferenciais. Lá, fomos apresentados às equações diferenciais ordinárias (EDOs), algumas formas de resolução – pelo menos, para alguns casos específicos – e várias aplicações. O enfoque que daremos neste tópico será outro: não estaremos interessados na resolução analítica das equações diferenciais, mas, sim, na numérica.

Vamos relembrar o que são equações diferenciais ordinárias?

Equações diferenciais são aquelas que envolvem as derivadas da função. Quando a função possui apenas uma variável independente, a equação é chamada de equação diferencial ordinária. Algebricamente falando, são equações do tipo:

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \text{ onde}$$

$\left\{ \begin{array}{l} x \text{ é a variável independente,} \\ y \text{ é a variável dependente (de } x\text{),} \\ y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)} \text{ são as derivadas de } y \text{ de ordem } 1, 2, \dots, n - 1 \text{ e } n \\ \text{respectivamente.} \end{array} \right.$

Existem ainda as equações diferenciais parciais. Elas se caracterizam por envolverem funções de mais de uma variável e, consequentemente, as suas derivadas parciais. Não trataremos deste assunto neste Caderno de Estudos. Caso você se sinta motivado/a a conhecer um pouco mais sobre esse tema, recomendamos o livro Cálculo Numérico, de N. B. Franco.



Ao longo deste tópico, você irá se deparar com várias representações para derivadas. Todos os símbolos y' , \dot{y} , $\frac{dy}{dx}$ significam a mesma coisa: a derivada de primeira ordem da função $y(x)$.

Vejamos alguns exemplos de EDOs:

$$\dot{y} = x + 2y$$

$$y'' = 3x + 2y - y'$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} = x - \frac{du}{dx}$$

Dizemos que encontramos uma solução para uma dada EDO quando a função encontrada satisfaz a EDO, isto é, quando $f(x)$ é tal que

$$f^{(n)}(x) = F(x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x)).$$

O maior grau de derivada envolvida na equação – no caso, n – é chamado de grau da EDO.

Exemplo 1: qualquer polinômio de grau 1 satisfaz a equação diferencial $y'' = 0$: de fato, se $p(x) = ax + b$ é um polinômio, então $p'(x) = a$ e $p''(x) = 0$.

Exemplo 2: A função $f(x) = c \cdot e^x + d$ é solução da equação diferencial $\dot{y} = y$, uma vez que a derivada da função exponencial é a própria função exponencial.

Resolver uma equação diferencial pode não ser simples. Algumas vezes, a teoria nos garante pelo menos a existência e a unicidade da solução, mas não nos diz quem ela é. Isso não nos ajuda muito na vida real, nos problemas práticos: precisamos de um resultado! Daí entra a resolução numérica.



Caro/a acadêmico/a!!! Que tal dar uma revisada no seu Caderno de Estudos de Equações Diferenciais no que tange ao Teorema de Existência e Unicidade de soluções?

2 PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

Em ambos os exemplos anteriores, não fornecemos uma função específica como solução da EDO, mas TIPOS de função, uma vez que não nos preocupamos em dizer quais eram os números envolvidos nas funções – mantivemos constantes quaisquer a, b, c, d. Isso acontece porque, no caso das equações diferenciais, não existe apenas uma função que seja solução, mas uma família de funções. Voltando ao exemplo 1, ambos os polinômios $p(x) = -x$ e $q(x) = 3x + \sqrt{2}$ são soluções de $y'' = 0$. Assim, se estivermos interessados em apenas uma função, precisamos cercar mais o problema, isto é, precisamos de condições adicionais sobre a função solução. Quando o número de condições adicionais coincide com a ordem da EDO e tais condições se referem a um único valor x , dizemos que temos um problema de valor inicial (PVI).

$$\text{Exemplo 1: } \begin{cases} \ddot{y}(x) = 0 \\ \dot{y}(0) = 1 \\ y(0) = -4 \end{cases}$$

Note que o grau da EDO é 2 e temos duas condições a respeito do valor $x = 0$. Logo, estamos lidando com um PVI. Vamos ver o que podemos concluir das condições impostas. Consideremos $p(x) = a \cdot x + b$ a solução da EDO $\ddot{y}(x) = 0$. A primeira condição é que $\dot{y}(0) = 1$, ou seja:

$$\dot{p}(0) = 1 \rightarrow \frac{dp}{dx}(0) = 1 \rightarrow a = 1$$

Assim, já sabemos que $p(x) = 1 \cdot x + b$. Vamos à segunda condição, $y(0) = -4$:

$$p(0) = -4 \rightarrow 1 \cdot 0 + b = -4 \rightarrow b = -4$$

Portanto, a solução que procurávamos para esta EDO era a função $p(x) = x - 4$.

$$\text{Exemplo 2: } \begin{cases} y' = y \\ y(2) = \sqrt{3} \end{cases}$$

Vimos que as soluções da EDO acima são funções do tipo $f(x) = c \cdot e^x$, onde c é uma constante. Agora, a condição imposta no PVI é $y(2) = \sqrt{3}$:

$$y(2) = \sqrt{3} \rightarrow c \cdot e^2 = \sqrt{3} \rightarrow c = \frac{\sqrt{3}}{e^2} \Rightarrow c = \sqrt{3}e^{-2}$$

Portanto, a função que procurávamos é dada por $f(x) = \sqrt{3}e^{-2} \cdot e^x = \sqrt{3}e^{x-2}$.

Quando o número de condições fornecidas pelo problema é menor do que o grau da EDO ou quando as condições não são sobre o mesmo ponto, dizemos que o problema é de valor de contorno – PVC.

Exemplo 1: $\begin{cases} \dot{y}(x) = 0 \\ \dot{y}(0) = 1 \\ y(2) = 8 \end{cases}$

Ao contrário dos PVI, os PVC não necessariamente têm solução. Nesse sentido, estudaremos neste tópico soluções numéricas para PVI de primeira ordem, isto é, problemas do tipo:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases},$$

onde $f(x, y)$ possua uma e somente uma solução.



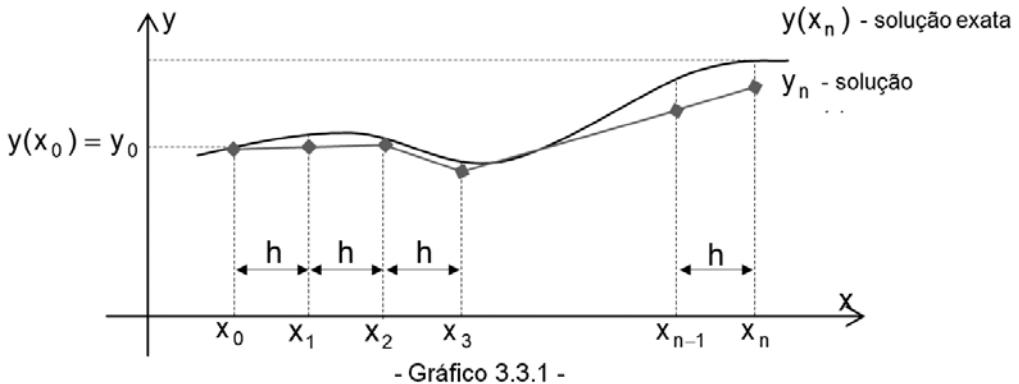
Existe um teorema chamado Teorema de Existência e Unicidade de soluções que garante a equações diferenciais ordinárias com certas características, que existe uma e somente uma solução para ela. Que tal visitar a biblioteca do seu polo e procurar informações a respeito em livros de Equações Diferenciais?

2.1 SOLUÇÃO NUMÉRICA DE UM PVI DE PRIMEIRA ORDEM

Consideremos o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Para encontrarmos uma solução numérica deste problema, consideraremos pontos x_0, x_1, \dots, x_n igualmente espaçados, tais que $x_j - x_{j-1} = h$, ou seja, $x_j - x_0 = j \cdot h$, para todo $j = 1, 2, \dots, n$. O conjunto $I_h = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é chamado de malha ou rede. De posse desta malha, calculamos as aproximações $y_j \approx y(x_j)$, e a aproximação numérica y_m será dada por uma função linear por partes, cujo gráfico é uma poligonal com vértices nos pontos (x_j, y_j) :



Denotaremos por $y(x_j)$ o valor de y aplicado a x_j , e por y_j a aproximação numérica, para todo $x_j \in I_h$.

2.2 MÉTODO DE EULER

Sabemos que o PVI nos fornece as seguintes informações: $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$.

O método de Euler consiste em, uma vez que conhecemos o valor de y no ponto $x_0 - y_0$ - e, portanto, o valor de $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, considerar a reta $r_0(x)$ que passa pelo ponto (x_0, y_0) e cujo coeficiente angular é $y'(x_0)$:

$$r_0(x) = y_0 + (x - x_0) \cdot y'(x_0) \rightarrow r_0(x) = y(x_0) + (x - x_0) \cdot y'(x_0)$$

Escolhido o valor da distância h entre os pontos de I_h , definiremos $y_j \approx y(x_j)$ como sendo $y_1 = r_0(x_1)$, ou seja,

$$y_1 = y(x_0) + (x_1 - x_0) \cdot y'(x_0) \rightarrow y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$$

Assim, temos novamente um ponto (x_1, y_1) , e podemos definir y_2 como sendo:

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1).$$

Repetindo o argumento, temos o termo geral do método de Euler:

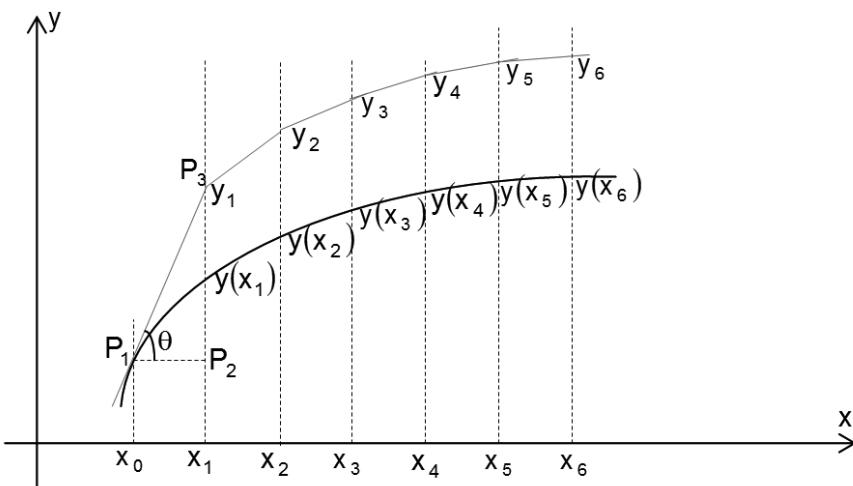
$$y_j = y_{j-1} + h \cdot f(x_{j-1}, y_{j-1}), \text{ com } j = 1, 2, \dots, n.$$

Geometricamente falando, considere o Gráfico 17 – Método de Euler – a seguir:



O Gráfico 17 – Método de Euler – baseia-se no apresentado no livro **Cálculo numérico**, de Sperandio, Mendes, Monken e Silva (2003, p. 238).

GRÁFICO 17 – MÉTODO DE EULER



FONTE: A autora

Com base no triângulo $P_1P_2P_3$ e nas relações trigonométricas, temos que $\frac{P_2P_3}{h} = \operatorname{tg}\theta$, isto é, $P_2P_3 = h \cdot \operatorname{tg}\theta = h \cdot y'(x_0) = h \cdot f(x_0, y_0)$. Então $y_1 = y(x_0) + h \cdot f(x_0, y_0)$. Repetindo o argumento para os demais pontos, chegamos na fórmula do método de Euler: $y_j = y_{j-1} + h \cdot f(x_{j-1}, y_{j-1})$, com $j = 1, 2, \dots, n$.

Exemplo 1: Considere o PVI $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1,2 \end{cases}$ e determine a solução numérica no intervalo $[0,1]$ com $h = 0,2$:

Consideremos $f(x,y) = y$ e a malha criada a partir de

$$x_0 = a = 0$$

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0,2 = 0,2$$

$$x_2 = x_1 + h = 0,2 + 0,2 = 0,4$$

$$x_3 = x_2 + h = 0,4 + 0,2 = 0,6$$

$$x_4 = x_3 + h = 0,6 + 0,2 = 0,8$$

$$x_5 = x_4 + h = 0,8 + 0,2 = 1,0 = b$$

Isto é, $I_{0,2} = \{0; 0,1; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1\}$. Pelo método de Euler, definimos y_0 como sendo exatamente $y(x_0)$ dado pelo PVI, no caso, $y_0 = Y(0) = 1,2$, e $y'(x_0)$

$= f(x_0, y_0) = y_0$, no caso, $y'(0) = f(0; 1,2) = 1,2$. Agora, estamos em condições de calcular y_1, y_2, y_3, y_4 e y_5 :

$$\begin{cases} y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1,2 + 0,2 \cdot 1,2 = 1,44 \\ y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 1,44 + 0,2 \cdot f(0,2; 1,44) = 1,44 + 0,2 \cdot (1,44) = 1,728 \\ y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) = 1,728 + 0,2 \cdot f(0,4; 1,728) = 1,728 + 0,2 \cdot (1,728) = 2,074 \\ y_4 = y_3 + h \cdot f(x_3, y_3) = 2,074 + 0,2 \cdot f(0,6; 2,074) = 2,074 + 0,2 \cdot (0,6 + 2,074) = 2,488 \\ y_5 = y_4 + h \cdot f(x_4, y_4) = 2,488 + 0,2 \cdot f(0,8; 2,488) = 2,488 + 0,2 \cdot (0,8 + 2,488) = 2,986 \end{cases}$$

Vamos calcular o erro obtido? No caso deste PVI é fácil, uma vez que conhecemos a função $y(x) = 1,2 \cdot e^x$. De fato,

$$\begin{cases} y'(x) = 1,2 \cdot e^x = y(x) \\ y(0) = 1,2 \cdot e^0 = 1,2 \cdot 1 = 1,2 \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{cases} y(x_0) = y(0) = 1,2 \rightarrow |y(x_0) - y_0| = |1,2 - 1,2| = 0 \\ y(x_1) = y(0,2) = 1,2 \cdot e^{0,2} = 1,466 \rightarrow |y(x_1) - y_1| = |1,466 - 1,44| = 0,026 \\ y(x_2) = y(0,4) = 1,2 \cdot e^{0,4} = 1,790 \rightarrow |y(x_2) - y_2| = |1,790 - 1,728| = 0,062 \\ y(x_3) = y(0,6) = 1,2 \cdot e^{0,6} = 2,187 \rightarrow |y(x_3) - y_3| = |2,187 - 2,074| = 0,113 \\ y(x_4) = y(0,8) = 1,2 \cdot e^{0,8} = 2,671 \rightarrow |y(x_4) - y_4| = |2,671 - 2,488| = 0,182 \\ y(x_5) = y(1,0) = 1,2 \cdot e^{1,0} = 3,262 \rightarrow |y(x_5) - y_5| = |3,262 - 2,986| = 0,276 \end{cases}$$

Note que o erro vai aumentando à medida que seguimos com o cálculo. Isso era esperado, pois o que estamos fazendo, na verdade, é propagando o erro cometido no passo anterior: para calcular y_j , utilizamos y_{j-1} para cada $j = 1, 2, \dots, n$.

Também é óbvio que geralmente não sabemos qual é a função y procurada – caso contrário, não teríamos porque calcular as aproximações numéricas! Então precisamos encontrar uma forma de sabermos qual o erro que estamos cometendo em cada passo $j = 1, 2, \dots, n$ do método de Euler sem depender de y . Voltaremos a falar nisso mais à frente.

2.3 MÉTODOS ENVOLVENDO SÉRIE DE TAYLOR

Antes de tratar dos métodos propriamente ditos, vamos lembrar a expansão de Taylor, já vista no curso. Para expandir uma solução $y(x)$ em torno de um determinado ponto x_j , fazemos:

$$y(x) = y(x_j) + y'(x_j) \cdot (x - x_j) + \frac{y''(x_j)}{2!} \cdot (x - x_j)^2 + \frac{y'''(x_j)}{3!} \cdot (x - x_j)^3 + \dots$$

Ou ainda,

$$y(x) = y(x_j) + y'(x_j) \cdot (x - x_j) + \dots + \frac{y^{(k)}(x_j)}{k!} \cdot (x - x_j)^k + \frac{y^{(k+1)}(\xi_x)}{(k+1)!} \cdot (x - x_j)^{k+1},$$

onde ξ_x é um número entre x e x_j . Trocando na fórmula x por x_j e x_j por x_{j-1} , temos a seguinte situação:

$$\begin{aligned} y(x_j) &= y(x_{j-1}) + y'(x_{j-1}) \cdot \underbrace{(x_j - x_{j-1})}_{h} + \dots + \frac{y^{(k)}(x_{j-1})}{k!} \cdot \underbrace{(x_j - x_{j-1})^k}_{h} + \frac{y^{(k+1)}(\xi_{x_j})}{(k+1)!} \cdot \underbrace{(x_j - x_{j-1})^{k+1}}_{h} \\ &\Rightarrow y(x_j) \approx y(x_{j-1}) + y'(x_{j-1}) \cdot h + \dots + \frac{y^{(k)}(x_{j-1})}{k!} \cdot h^k, \text{ onde } \phi(x_j) = \frac{y^{(k+1)}(\xi_{x_j})}{(k+1)!} \cdot h^{k+1} \end{aligned}$$

será o erro de truncamento cometido na aproximação.

Suponhamos agora que a função y tem derivada contínua de ordem $(k+1)$ no intervalo onde estão todos os valores da malha $I_h = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Então, se considerarmos o conjunto de números reais formado pelos valores $\{y^{(k+1)}(x_0), y^{(k+1)}(x_1), \dots, y^{(k+1)}(x_n)\}$ para algum ℓ ,

$$y^{(k+1)}(x_\ell) = \max \{y^{(k+1)}(x_0), y^{(k+1)}(x_1), \dots, y^{(k+1)}(x_n)\}$$

Assim, fazendo $M_{k+1} = y^{(k+1)}(x_\ell)$, teremos $|y^{(k+1)}(\xi_x)| \leq M_{k+1}$ para todo $\xi_x \in I_h$. Note que:

$$\left. \begin{aligned} \phi(x_j) &= \frac{y^{(k+1)}(\xi_{x_j})}{(k+1)!} \cdot h^{k+1} \\ |y^{(k+1)}(\xi_x)| &\leq M_{k+1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow |e(x_j)| \leq \max_{x \in I} |\phi(x)| \leq \frac{M_{k+1}}{(k+1)!} \cdot h^{k+1} = C \cdot h^{k+1}$$

Ou seja, existe um número real que é maior do que o erro de truncamento cometido com essa aproximação. Isso significa que, mesmo que não consigamos calcular esse erro analiticamente, ele sempre existe e é um número finito. Por isso faz sentido fazermos esse tipo de aproximação.

Dizemos que um método numérico é de ordem p se existe uma constante C tal que $|\phi(x_{j+1})| < C \cdot h^{p+1}$. Assim, o método de Taylor que estamos vendo é de ordem k .

Voltemos à série de Taylor de ordem k :

$$y(x_j) \approx y(x_{j-1}) + y'(x_{j-1}) \cdot h + \dots + \frac{y^{(k)}(x_{j-1})}{k!} \cdot h^k.$$

Considerando $y(x_j) \approx y_j$, podemos reescrever a série como sendo

$$y_j = y_{j-1} + h \cdot y'_{j-1} + \dots + \frac{h^k}{k!} \cdot y^{(k)}_{j-1}$$

Por outro lado, $y'(x) = f(x, y(x))$. Então, pela Regra da Cadeia,

$$y''(x) = f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x)) \cdot y'(x) = f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x)) \cdot f(x, y(x))$$

Logo, a expansão de Taylor de ordem 2 fica $y_j = y_{j-1} + h \cdot f(x_{j-1}, y_{j-1}) + \frac{h^2}{2!} \cdot [f_x(x_{j-1}, y_{j-1}) + f_y(x_{j-1}, y_{j-1}) \cdot f(x_{j-1}, y_{j-1})]$, para cada $j = 1, 2, \dots, n$, com erro $\phi(x_j) = \frac{y'''(\xi_{x_j})}{3!} \cdot h^3$.

Do mesmo modo, você pode tentar calcular a derivada terceira de $y'''(x)$. Entretanto, o cálculo já se torna bem mais complicado!

Observe a expansão de Taylor de ordem 1:

$$y_j = y_{j-1} + h \cdot f(x_{j-1}, y_{j-1}), \text{ com } \phi(x_j) = \frac{y''(\xi_{x_j})}{2} \cdot h^2 \text{ para cada } j = 1, 2, \dots, n.$$

A expansão de Taylor de ordem 1 é exatamente o método de Euler, e acabamos de exibir a fórmula para o cálculo do erro deste método.



Seguindo a filosofia deste caderno, optamos por colocar a fórmula do erro para que você saiba que ele existe, que é finito e, muitas vezes, calculável. Entretanto, não nos preocuparemos com o seu cálculo propriamente dito neste material.

3 MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA

Vimos que os métodos de Taylor têm uma limitação considerável: calcular as derivadas de $f(x, y)$. A ideia dos métodos de Runge-Kutta é aproveitar o que os métodos de Taylor têm de melhor e eliminar esse problema das derivadas.

3.1 MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE ORDEM 1

Na verdade, já estudamos o método de Runge-Kutta de ordem 1: ele nada mais é do que o método de Euler:

$$y_j = y_{j-1} + h \cdot f(x_{j-1}, y_{j-1}), \text{ para cada } j = 1, 2, \dots, n.$$

3.2 MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE ORDEM 2

Vamos trabalhar aqui com um caso particular de método de Runge-Kutta de ordem 2, chamado de Euler Aperfeiçoado, Euler Modificado ou ainda de Método de Heun.

Você deve se lembrar que, quando trabalhamos com o método de Euler, começávamos o processo calculando a inclinação da reta tangente à curva $y(x)$ no ponto $(x_0, y(x_0))$, isto é, o valor $f(x_0, y_0)$. Generalizando, para calcular o valor de y_j , precisávamos apenas calcular o valor da inclinação da reta em (x_{j-1}, y_{j-1}) , $f(x_{j-1}, y_{j-1})$. Uma forma de melhorar essa aproximação é considerar não apenas a inclinação no ponto (x_{j-1}, y_{j-1}) , mas a média das inclinações nos pontos (x_{j-1}, y_{j-1}) e (x_j, \bar{y}_j) , onde $\bar{y}_j = y_{j-1} + h \cdot f(x_{j-1}, y_{j-1})$. Assim, o método é dividido em duas etapas:

$$\begin{cases} \bar{y}_j = y_{j-1} + h \cdot f(x_{j-1}, y_{j-1}) \\ y_j = y_{j-1} + \frac{h}{2} \cdot [f(x_{j-1}, y_{j-1}) + f(x_j, \bar{y}_j)] \end{cases}, \text{ para } j = 1, 2, \dots, n$$

Podemos ainda escrever esse método da seguinte forma:

$$\begin{cases} K_1 = f(x_{j-1}, y_{j-1}) \\ K_2 = f(x_{j-1} + h, y_{j-1} + h \cdot K_1) \\ y_j = y_{j-1} + \frac{h}{2} \cdot [K_1 + K_2] \end{cases}$$



É possível mostrar que, se expandirmos a função $f(x,y)$ em uma série de Taylor de duas variáveis, o desenvolvimento irá coincidir com a série de Taylor de $y(x)$ de ordem 2.

Assim, o erro de truncamento do método de Runge-Kutta neste caso será $\phi(x) = \frac{y'''(\xi_{x_1})}{3!} h^3$.

Exemplo 1: Vamos voltar ao PVI $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1,2 \end{cases}$ e determinemos a solução numérica no intervalo $[0,1]$ com $h = 0,2$ pelo método de Runge-Kutta de ordem 2:

Já conhecemos a malha que utilizaremos: $I_{0,2} = \{0;0,1;0,2;0,4;0,6;0,8;1\}$ e, assim, como no método de Euler, definimos y_0 como sendo exatamente $y(x_0)$ dado pelo PVI, no caso, $y_0 = y(0) = 1,2$, e $y'(x_0) = f(x_0, y_0) = y_0$, no caso, $y'(0) = f(0; 1,2) = 1,2$. Agora, estamos em condições de calcular y_1, y_2, y_3, y_4 e y_5 :

$$\text{Passo 1: } K_1 = f(x_0, y_0) = y_0 \rightarrow K_1 = f(0; 1,2) = 1,2$$

$$K_2 = f(x_0 + h, y_0 + h \cdot K_1) = f(x_1, y_0 + h \cdot K_1)$$

$$K_2 = f(0,2; 1,2 + 0,2 \cdot 1,2) = 1,2 + 0,2 \cdot 1,2 = 1,44$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} \cdot (K_1 + K_2) = \left(1,2 + \frac{0,2}{2} \cdot (1,2 + 1,44) \right) = 1,464$$

$$\text{Passo 2: } K_1 = f(x_1, y_1) = y_1 \rightarrow K_1 = f(0,2; 1,464) = 1,464$$

$$K_2 = f(x_1 + h, y_1 + h \cdot K_1) = f(x_2, y_1 + h \cdot K_1)$$

$$K_2 = f(0,4; 1,464 + 0,2 \cdot 1,464) = 1,464 + 0,2 \cdot 1,464 = 1,757$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2} \cdot (K_1 + K_2) = \left(1,464 + \frac{0,2}{2} \cdot (1,464 + 1,757) \right) = 1,786$$

$$\text{Passo 3: } K_1 = f(x_2, y_2) = y_2 = 1,786$$

$$K_2 = f(x_3, y_2 + h \cdot K_1) = f(0,6; 1,786 + 0,2 \cdot 1,786) = 1,464 + 0,2 \cdot 1,464 = 2,143$$

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{2} \cdot (K_1 + K_2) = \left(1,786 + \frac{0,2}{2} \cdot (1,786 + 2,143) \right) = 2,179$$

Passo 4: $K_1 = f(x_3, y_3) = y_3 = 2,179$

$$K_2 = f(x_4, y_3 + h \cdot K_1) = f(0,8; 2,179 + 0,2 \cdot 2,179) = 2,615$$

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{2} \cdot (K_1 + K_2) = 2,179 + \frac{0,2}{2} \cdot (2,179 + 2,615) = 2,658$$

Passo 5: $K_1 = f(x_4, y_4) = y_4 = 2,658$

$$K_2 = f(x_5, y_4 + h \cdot K_1) = f(1,0; 2,658 + 0,2 \cdot 2,658) = 3,190$$

$$y_5 = y_4 + \frac{h}{2} \cdot (K_1 + K_2) = 2,658 + \frac{0,2}{2} \cdot (2,658 + 3,190) = 3,243$$

Vamos calcular o erro obtido?

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x_0) = y(0) = 1,2 \Rightarrow |y(x_0) - y_0| = |1,2 - 1,2| = 0 \\ y(x_1) = y(0,2) = 1,2 \cdot e^{0,2} = 1,466 \Rightarrow |y(x_1) - y_1| = |1,466 - 1,464| = 0,002 \\ y(x_2) = y(0,4) = 1,2 \cdot e^{0,4} = 1,790 \Rightarrow |y(x_2) - y_2| = |1,790 - 1,786| = 0,004 \\ y(x_3) = y(0,6) = 1,2 \cdot e^{0,6} = 2,187 \Rightarrow |y(x_3) - y_3| = |2,187 - 2,179| = 0,008 \\ y(x_4) = y(0,8) = 1,2 \cdot e^{0,8} = 2,671 \Rightarrow |y(x_4) - y_4| = |2,671 - 2,658| = 0,013 \\ y(x_5) = y(1,0) = 1,2 \cdot e^{1,0} = 3,262 \Rightarrow |y(x_5) - y_5| = |3,262 - 3,243| = 0,019 \end{array} \right.$$

Note que o erro obtido é bem menor do que o cometido pelo método de Euler. Na verdade, quanto maior a ordem do método de Runge-Kutta, melhor será a aproximação e, consequentemente, menor o erro de truncamento.

LEITURA COMPLEMENTAR

DECAIMENTO RADIOATIVO

Fatos experimentais mostram que materiais radioativos desintegram a uma taxa proporcional à quantidade presente do material. Se $Q = Q(t)$ é a quantidade presente de um certo material radioativo no instante t , então a taxa de variação de $Q(t)$ com respeito ao tempo t , aqui denotada por $\frac{dQ}{dt}$, é dada por

$\frac{dQ}{dt}(t) = k \cdot Q(t)$, onde k é uma constante negativa bem definida do ponto de vista físico. Por exemplo, para o Carbono 14 o valor aproximado é $k = -1,244 \cdot 10^{-4}$, para o Rádio o valor aproximado é $k = -1,4 \cdot 10^{-11}$.

Normalmente consideramos $Q(0) = Q_0$ a quantidade inicial do material radioativo considerado. Quando não conhecemos o material radioativo, devemos determinar o valor da constante k , o que pode ser feito através da característica de “meia-vida” do material. A “meia-vida” é o tempo necessário para desintegrar a metade do material. Portanto, se nós conhecemos a meia-vida do material, podemos obter a constante k e vice-versa. Em livro de Química podemos obter as “meias-vidas” de vários materiais radioativos. Por exemplo, a meia-vida do Carbono-14 está entre 5.538-5.598 anos, numa média de 5.568 anos com um erro para mais ou para menos de 30 anos. O Carbono-14 é uma importante ferramenta em Pesquisa Arqueológica conhecida como teste do radiocarbono.

Crescimento Populacional: Malthus

Problemas populacionais nos levam fatalmente às perguntas:

Qual será a população de um certo local ou meio ambiente em alguns anos?

Como poderemos proteger os recursos deste local ou deste meio ambiente para que não ocorra a extinção de uma ou de várias espécies?

Para apresentar uma aplicação de equações diferenciais relacionado com este problema, consideraremos o modelo matemático mais simples para tratar sobre o crescimento populacional de algumas espécies. Ele é chamado o Modelo de Crescimento Exponencial, isto é, a taxa de variação da população em relação ao tempo, aqui denotada por $\frac{dP}{dt}$, é proporcional à população presente. Em outras palavras, se $P = P(t)$ mede a população, nós temos $\frac{dP}{dt} = k \cdot P$ onde a taxa k é uma constante. É simples verificar que se $k > 0$, nós teremos crescimento e se $k < 0$, nós teremos decaimento. Esta é uma EDO linear que quando resolvida nos dá $P(t) = P_0 \cdot e^{kt}$, onde P_0 é a população inicial, isto é $P(0) = P_0$. Portanto, concluímos o seguinte:

1. Se $k > 0$, a população cresce e continua a expandir para +infinito.
2. Se $k < 0$, a população se reduzirá e tenderá a zero. Em outras palavras, a população será extinta.

O primeiro caso, $k > 0$, não é adequado e o modelo pode não funcionar bem a longo prazo. O argumento principal para isto vem das limitações do ambiente. A complicação é que o crescimento populacional é eventualmente limitado por algum fator, usualmente dentre aqueles recursos essenciais. Quando uma população está muito distante de seu limite de crescimento ela pode crescer de forma exponencial, mas quando está próxima do seu limite o tamanho da população pode variar.

Crescimento Populacional: Verhulst

Existe um outro modelo proposto para remediar este problema do modelo exponencial. Ele é chamado o Modelo Logístico ou modelo de Verhulst-Pearl. A EDO para este modelo é

$$\frac{dP}{dt} = k \cdot P \left(1 - \frac{P}{L}\right)$$

onde L é o limite máximo para a população (também chamado a capacidade do ambiente). Se $P = P(t)$ é pequeno quando comparado com L , a EDO se reduz à equação exponencial.

Este é um exemplo de uma EDO não linear separável. As soluções constantes são $P = 0$ e $P = L$. As soluções não constantes podem ser obtidas pela separação das variáveis, seguido do uso de integração com o uso da técnica das frações parciais.

Com algumas manipulações algébricas, teremos:

$$P(t) = \frac{LCe^{kt}}{(L + Ce^{kt})}$$

onde C é uma constante e L é o limite do ambiente.

Considerando $P(0) = P_0$ e assumindo que P_0 não é igual a 0 nem igual a L , obteremos:

$$P(t) = \frac{L \cdot P_0}{P_0 + (L - P_0) \cdot e^{-kt}}$$

Com cálculos simples de limites podemos mostrar que quando t cresce para mais infinito, então $\lim P(t) = L$. Esta solução já diz muito mais que a outra, entretanto este modelo ainda é satisfatório, pois não nos diz quando uma população estará extinta. Mesmo começando com uma população pequena, a população sempre tenderá para a capacidade L do ambiente. Embora este modelo ainda possua falhas, ele é bastante apropriado para a análise de crescimento populacional de cidades, assim como de populações de lactobacilos e outros.

Lei do resfriamento de Newton

Sobre a condução do calor: Um modelo real simples que trata sobre a troca de calor de um corpo com o meio ambiente em que o mesmo está colocado, aceita três hipóteses básicas:

1. A temperatura $T = T(t)$ depende do tempo e é a mesma em todos os pontos do corpo.
2. A temperatura T_m do meio ambiente permanece constante no decorrer da experiência.
3. A taxa de variação da temperatura com relação ao tempo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o meio ambiente.

Montagem da EDO: Assumiremos verdadeiras as hipóteses acima, observando que: $\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - T_m)$, onde $T = T(t)$ é a temperatura do corpo no instante t , T_m é a temperatura constante do meio ambiente, $T - T_m$ é a diferença de temperatura e k é uma constante que depende do material com que o corpo foi construído, sendo que o sinal negativo indica que a temperatura do corpo está diminuindo com o passar do tempo, em relação à temperatura do meio ambiente.

Esta é uma EDO separável, que pode ser transformada em:

$$\frac{1}{(T - T_m)} dT = -k dt$$

Integrando ambos os membros em relação à variável tempo, teremos $\ln(T - T_m) = -kt + k_0$. Aplicando a função exponencial a ambos os membros e tomando as constantes embutidas em uma só, teremos $T - T_m = C \cdot e^{-kt}$. Logo, a solução da EDO será:

$$T(t) = T_m + C \cdot e^{-kt}$$

Quando temos a temperatura inicial do corpo é $T(0) = T_0$, então podemos obter a constante C que aparece na solução, pois $T_0 = T_m + C$.

Assim $C = T_0 - T_m$ e a solução do PVI $\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - T_m)$, $T(0) = T_0$ será $T(t) = T_m + (T_0 - T_m) \cdot e^{-kt}$.

FONTE: Disponível em: <<http://www.interaula.com/matweb/superior/edo/edoaplic.htm>>. Acesso em: 23 nov. 2010.

RESUMO DO TÓPICO 3

Vamos agora rever o que aprendemos neste tópico:

- Equações diferenciais são aquelas que envolvem as derivadas da função. Quando a função possui apenas uma variável independente, a equação é chamada de equação diferencial ordinária.
- Dizemos que encontramos uma solução para uma dada EDO quando a função encontrada satisfaz a EDO, isto é, quando $f(x)$ é tal que $f^{(n)}(x) = F(x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x))$. O maior grau de derivada envolvida na equação – no caso, n – é chamado de grau da EDO.
- Quando o número de condições adicionais sobre uma EDO coincide com a sua ordem e tais condições se referem a um único valor x , dizemos que temos um problema de valor inicial (PVI).
- Para encontrar uma solução numérica de um PVI, consideramos pontos x_0, x_1, \dots, x_n igualmente espaçados ($x_j - x_{j-1} = h$, para todo $j = 1, 2, \dots, n$) e, de posse da malha, ou rede, $I_h = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, calculamos as aproximações $y_j \approx y(x_j)$. A aproximação numérica y_m será dada por uma função linear por partes, cujo gráfico é uma poligonal com vértices nos pontos (x_j, y_j) .
- Dado um PVI $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, o termo geral do método de Euler é dado por:
$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ y_j = y_{j-1} + h \cdot f(x_{j-1}, y_{j-1}) \end{cases} \text{ com } j = 1, 2, \dots, n.$$
- Método de Runge-Kutta de ordem 2:

$$\begin{cases} K_1 = f(x_{j-1}, y_{j-1}) \\ K_2 = f(x_{j-1} + h, y_{j-1} + h \cdot K_1) \\ y_j = y_{j-1} + \frac{h}{2} \cdot (K_1 + K_2) \end{cases}$$

AUTOATIVIDADE



Chegou a hora de praticar o que aprendemos!

- 1 Calcule as EDO a seguir no intervalo $[0;1]$ com $h=0,1$ pelo método de Euler e pelo método de Euler Modificado:

a) $\begin{cases} y' = -y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Euler:

n	x_n	y_n
0	0	1
1	0,1	
2		0,81
3		
4		
5		0,59
6		0,53
7		
8	0,8	0,43
9	0,9	
10	1,0	

Euler Modificado:

j	x_j	$K_1 = f(x_{j-1}, y_{j-1})$	$K_2 = f(x_{j-1} + h, y_{j-1} + h \cdot K_1)$	$y_j = y_{j-1} + \frac{h}{2} \cdot (K_1 + K_2)$
0	0			1
1		-1	-0,9	
2				0,81
3				
4		-0,73		
5	0,5			0,6
6	0,6		-0,54	
7				
8		-0,49		0,44
9				
10	1,0		-0,2	

$$b) \begin{cases} y' = x - y + 2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Euler:

n	x _n	y _n
0	0	
1		2
2		
3		2,03
4		
5	0,5	
6		2,13
7		2,18
8		
9	0,9	
10		

Euler Modificado:

j	x _j	K ₁ = f(x _{j-1} , y _{j-1})	K ₂ = f(x _{j-1} + h, y _{j-1} + h · K ₁)	y _j = y _{j-1} + $\frac{h}{2} \cdot (K_1 + K_2)$
0	0			
1			0,1	
2				
3		0,19		2,03
4			0,34	2,06
5	0,5	0,34	0,41	
6				2,14
7				
8	0,8	0,51		2,24
9	0,9		0,6	
10	1,0			

$$c) \begin{cases} y' = y - \frac{2x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Euler:

n	x _n	y _n
0	0	1
1		
2		
3		
4		-1,7
5		
6		
7	0,7	
8	0,8	1,87
9	0,9	1,01
10		

Euler Modificado:

j	x _j	K ₁ = f(x _{j-1} , y _{j-1})	K ₂ = f(x _{j-1} + h, y _{j-1} + h · K ₁)	y _j = y _{j-1} + $\frac{h}{2} \cdot (K_1 + K_2)$
0	0			1
1			0,92	
2		0,92		
3				
4		0,8		
5	0,5			1,42
6			0,72	1,49
7		0,68		
8				
9			0,61	
10	1,0			

2 Calcule o valor de $y(0,5)$ para cada um dos problemas a seguir via método de Euler e método de Heun, tomando $h = 0,1$:

a) $\begin{cases} \dot{y} = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Euler:

n	x_n	y_n
0	0	0
1		0,1
2		
3		0,04
4		
5	0,5	

Método de Heun:

j	x_j	$K_1 = f(x_{j-1}, y_{j-1})$	$K_2 = f(x_{j-1} + h, y_{j-1} + h \cdot K_1)$	$y_j = y_{j-1} + \frac{h}{2} \cdot (K_1 + K_2)$
0	0			0
1	0,1	0		0
2	0,2		0,04	
3	0,3		0,09	
4	0,4	0,09		0,02
5	0,5	0,16		

b) $\begin{cases} \dot{y} = x - y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dot{y} = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

REFERÊNCIAS

BARROSO, L. C. et al. **Cálculo numérico** (com aplicações). 2. ed. São Paulo: Harbra, 1987.

FRANCO, N. B., **Cálculo numérico**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R., **Cálculo numérico – aspectos teóricos e computacionais**. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 1997.

SPERANDIO, D.; MENDES, J. T.; SILVA, L. H. M. **Cálculo numérico:** características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA – IBGE. Disponível em : <<http://www.ibge.gov.br/cidadesat/topwindow.htm?1>>. Acesso em: 10 jun. 2011.

ANOTAÇÕES

