Propiedades de Semigrupo

Definición. Un conjunto no vacío S se dice que es un *semigrupo* si en S está definida una operación binaria, denotada por $\cdot$, tal que para cualesquiera $a, b, c \in S$ se cumple:

1. $a \cdot b \in S$. (cerradura)
2. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$. (asociatividad)

Propiedades de Grupo

Definición: Un conjunto no vacío de elementos G se dice que forma un *grupo* si en G está definida una operación binaria, ~~llamada producto y~~ denotada por $(\cdot)$ tal que:

1. $a, b \in G$ implica que $a \cdot b \in G$ (cerradura).
2. $a, b, c \in G$ implica que $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (ley asociativa).
3. Existe un elemento $e \in G$ tal que $a \cdot e = e \cdot a = a$ para todo $a \in G$ (existencia de un elemento identidad en G).
4. Para todo $a \in G$ existe un elemento $a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ (existencia de inversos en G).

Además, un grupo G se dice que es *abeliano* (o conmutativo) si para cualesquiera $a, b \in G$ se tiene: $a \cdot b = b \cdot a$.

Propiedades de Anillo

Definición. Un conjunto no vacío R se dice que es un anillo asociativo si en R están definidas dos operaciones, denotadas por " $+$ " y " $\cdot$ " respectivamente tales que para cualesquiera a, b, c de R :

1. $a + b$ está en R. (cerradura para $+$)
2. $a + b = b + a$. (conmutatividad)
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$. (asociatividad)
4. Hay un elemento 0 en R tal que $a + 0 = a$ (para todo a en R).
5. Existe un elemento $-a$ en R tal que $a + (-a) = 0$.
6. $a \cdot b$ está en R.
7. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
8. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ y $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ (las dos leyes distributivas).

En caso que exista un elemento 1 en R tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ para toda a en R; si tal elemento existe diremos que R es un *anillo con elemento unitario.*

Si la multiplicación de R es tal que $a \cdot b = b \cdot a$ para todo a, b en R entonces llamamos a R *anillo conmutativo.*

Propiedades de Campo

DEFINICIÓN. Un conjunto no vacío F se dice que es un *campo* si en F están definidas dos operaciones, denotadas por " $+$ " y " $\cdot$ ", respectivamente, tales que para cualesquiera $a, b, c \in F$:

1. $a + b$ está en F. (cerradura para $+$)
2. $a + b = b + a$. (conmutatividad para $+$)
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$. (asociatividad para $+$)
4. Hay un elemento 0 en F tal que $a + 0 = a$ (para todo a en F).
5. Existe un elemento $-a$ en F tal que $a + (-a) = 0$.
6. $a \cdot b$ está en F. (cerradura para $\cdot$)
7. $a \cdot b = b \cdot a$. (conmutatividad para $\cdot$)
8. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$. (asociatividad para $\cdot$)
9. Hay un elemento $1 \neq 0$ en F tal que $a \cdot 1 = a$ para todo a en F.
10. Para todo $a \neq 0$ en F, existe un elemento a^{-1} en F tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.
11. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ y $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ (las dos leyes distributivas).