UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Tarea 07

PRESENTA

Gael Bensussen Gonzalez, José Ángel Olmedo Guevara, Jimènez Rivera Emiliano Kaleb

PROFESOR

César Hernández Cruz

ASIGNATURA

Gráficas y Juegos

April 7, 2025

1 Inciso 1 de la tarea

Sea G una gráfica autocomplementaria, entonces sabemos que G es isomorfa a su complemento $\bar{G}$, por lo tanto con la unión de G y $\bar{G}$ obtendremos una nueva gráfica, que es la gráfica completa de G, llamémosla G_c, sabemos también que el máximo número de aristas que puede tener una gŕafica de orden n en es $n(n-1)/2$, por lo tanto G_c tiene $n(n-1)/2$ aristas.

Tanto G como $\bar{G}$ deben de tener la mitad de aristas, es decir $n(n-1)/4$ aristas, para que obtengamos un número entero n o bien $n-1$ deben ser múltiplos de 4

Observación: n y $n-1$ son dos números consecutivos, por lo tanto irán alternando entre valores pares e impares.

Caso 1: n es múltiplo de 4, es decir $n = 4k$, donde $k \in N$:

$4k(4k-1)/4 \rightarrow$(numero par)*(numero anterior, que es impar)/4

Asi pues, obtendremos un número entero.

Caso 2: $n-1$ es múltiplo de 4, es decir $n-1 = 4k$, donde $k \in N$:

$4k + 1(4k)/4 \rightarrow$(numero impar)*(numero anterior, que es par)/4

Asi pues, obtendremos un número entero.

En ambos casos obtendremos un número entero, si $|V_G| = n = 4k$ tenemos que su residuo al dividirlo entre 4, será igual a 0, por otro lado, si $|V_G| = n + 1 = 4k + 1$ tenemos que su residuo al dividirlo entre 4, será igual a 1.

2 Inciso 2 de la tarea

2a)
Sabemos que toda digráfica acíclica tiene un orden (por tarea), adempas de uqe existe un vértice con ingrado cero i.e una fuente, por participación. (contrapositiva de: Si D no tiene vértices con ingrado cero, entones D contiene un ciclo dirigido). Resta ver el sumidero, pero ya sabemos por la tarea que hay un orden y al tener un conjunto de vértices finito por definicion de orden algun maximal V_k i.e no existen V_i tal que $(V_k, V_i) \in A$. Por lo tanto $d^+(v_k) = 0$, Así concluimos que existe tanto la fuente como el sumidero.

2b)
Una digráfica admite un orden topológico si y solo si es acíclica
->] Supongamos que se admite un orden topológico, supongamos por el contrario que contiene un ciclo i.e. $C = (v_1, ..., v_k, v_1)$, dado que $1 < 2 < ... < k$ entonces no puede ocurrir que $1 < k$. Como llegamos a una contradiccion concluimos que es acíclica.

<-] Supongamos que es acíclica, por la tarea sabemos que xiste un orden total, además, por a) existe fuente y sumidero lo cual es suficiente para concluir que admite un orden topológico por su definición.

2c) Algoritmo para encontrar orden topológico:
I: $< D, A_D, V_O >$ D digráfica, A_D lista de flecha; $A_D = (V_i, v_j) : j$
V_D :lista de vértices
O: <l> l lista de vértices ordenados

$ordenLista \longleftarrow \emptyset$
while $V_0 \neq \emptyset$
—-verticefuente $\longleftarrow \emptyset$
—-for($V_i \in V_D$)
——if $\delta^-(v_i) = 0$
——ordenLista.agregar (V_i)
——$V_D = V_D - V_i$ *también se borran sus aristas incidentes*
——verticeFuente $\longleftarrow v_i$
——break
return ordenLIsta.

3 Inciso 3 de la tarea

3(a):

I: $< G >$ G es una gráfica conexa

O: ¿G tiene un ciclo Hamiltoniano?

Verificador:

I: $< G, E_G, l, k >$ G es una gráfica, E_G es un arreglo que contiene las aristas de G E_G= $[u_1v_1, u_2v_2, ..., u_nv_n]$, $l = |V_G|$, y k es un arreglo de vértices $k = [v_1, ..., v_n, v_1]$

O: true si G tiene un ciclo Hamiltoniano, false sino.

1. if longitud(k) $\neq l + 1$ or $k[0] \neq k[l]$:
2. —— return false
3. for $v \in G$:
4. —— if $v \notin k$:
5. ———— return false
6. —— if $v \in k[0 : l - 1]$:
7. ———— return false
8. for i from 0 to $l - 1$:
9. —— if $k[i]k[i + 1] \notin E_G$:
10. ———— return false
11. return true

Se sigue que usa tiempo polinomial, debido a que recorre 2 veces los elementos de mi arreglo de vértices que puede contener al ciclo hamiltoniano $O(n^2)$

3(b):

I: $< G, S >$ G es una gráfica conexa, S un conjunto de vértices de G

O: ¿Toda arista de G tiene al menos un extremo en S?

Verificador:

I: $< G, E_G, S >$ G es una gráfica conexa, E_G es un arreglo que contiene todas las aristas de G, $E_G = [u_1v_1, u_2v_2, ..., u_nv_n]$, y $S \in G$ un arreglo de vértices $S = [v_1, ..., v_n]$

O: true si toda arista de G tiene al menos un extremo en S, false sino.

1. for $u_nv_n \in E_G$:
2. —— if $u_n \notin S$ and $v_n \notin S$:
3. ——— return false
4. return true

Se sigue que usa tiempo lineal, debido a que recorre 1 vez todas las aristas de G, es decir $O(n)$

3(c):

I: $< G, k >$ G es una gráfica conexa, k un número entero positivo

O: ¿G admite una k-coloración en sus vértices tal que ningún par de vértices adyacentes puedan tener el mismo color?

Verificador:

I: $< G, k, S >$ G es una gráfica conexa, k es un número entero positivo, y S un arreglo de longitud k que contiene los colores propuestos de G; $S = [1, 2, 3, ..., n]$

O: true si G es k-coloreable con los colores de S, false sino.

1. for $u \in V_G$:
2. —— if color(u) < 1 or color(u)$>$ k:
3. ——— return false
4. for $u_n v_n \in E_G$:
5. —— if color(u_n) $==$ color(v_n):
6. ——— return false
7. return true

Se sigue que usa tiempo polinomial, debido a que recorre 1 vez todas las aristas de G, y 1 vez todos los vértices de G es decir $O(n + m)$

3(d):

I: $< G, k >$ G es una gráfica conexa, k un entero positivo

O: ¿G admite una partición $D \in G$, de k-vértices, tal que todo vértice que $\notin D$ es adyacente a al menos un vértice en D?

Verificador:

I: $< G, k, D >$ G es una gráfica conexa, k es un número entero positivo, y $D \in G$ es una partición de longitud k que contiene vértices de G; $S = [u_1, ..., u_n]$

O: true si D es un conjunto dominante, false sino.

1. for $u \in V_G$:
2. —— if $u \notin D$:
3. ——— dominado = false
4. ——— for $v \in D$
5. ————— if $u_n v_m \in E_G$
6. ——————— dominado = true
7. ——————— break
8. ——— if dominado == false
9. ————— return false
10. return true

Se sigue que usa tiempo cuadrático (polinomial), debido a que recorre todos los vértices de G y mientras lo hace, recorre cada vértice del subconjunto $D \in G$ $O(n^2)$

4 Puntos extra de la tarea:

1.- Proposición: Toda digráfica sin lazos admite una descomposición en dos digráficas acíclicas

Lo haremos mediante una ordenación topológica para ambos conjuntos. Sea $A = \{(V_i, V_j) : i < j\}$ y $B = \{(v_i, v_j) : i > j\}$ Dado a que no hay lazos $i = j$ es imposible y $A \cap B = \emptyset$ pues $i < j$ y $i > j$ no pueden ocurrir simultáneamente. Esta construcción es mediante la elección de un vértice con ingrado cero, si no existe tomamos uno arbitrario y serpa parte de A, y a partir de la definición de A se construye el orden topológico, análogo es con B. Como $E_A \cup E_B = E_D$ pues cualquier arista (v_i, v_j) cumple $i < j$ o $i > j$. Por punto anterior tanto A como B son acíclicas y concluimos que es una descomposición.

2.- Un torneo es una digr afica en la que entre cualesquiera dos v ertices existe una unica flecha. Demuestre que todo torneo con mas de dos vertices es fuertemente conexo o puede transformarse en un torneo fuertemente conexo al reorientar exactamente una flecha.

NOTA: Una digráfica es fuertemente conexa syss para cualquiera $u, w \in V_D$ entonces existe un uw camino dirigido y un wu camino dirigido. Torneo: es una orientación de gráficas completas.

Observación: Todo torneo tiene una trayectoria hamiltoniana, i.e es trazable.
Sea T el torneo:
Lo demostaremos por inducción:
Sea n = 2 como es un torneo $v_1 \to v_2$ o $v_2 \to v_1$ en cualquier caso se usan ambos vértices y por lo tanto es hamiltoniana.

Supongamos un torneo de orden $n \geq 2$ es trazable.
Sea T un torneo de orden n+1 tomamos un vértice arbitrario w y nos tomamos dos conjuntos $S = \{v_i \in T : w \to v_i\}$ y $R = \{v_i \in T : v_i \to w\}$ como $S < n+1$ y $R < n+1$ entonces existen trayectorias hamiltonianas por H.I. P_1 en S y P_2 en R. Ntemos que $S \cap R \neq \emptyset$ pues solo se puede tomar una direccion desde cualquier vértice a w. Además que $V_S \cup V_R = V_{T-W}$. Así definimos nuestra trayectoria $T' = S_{S_K} W_{r_1} R_{r_m}$ y al recorrer todos los vértices.

$\therefore$Concluimos que T es trazable.

Sea T un torneo, si es fuertemente conexo acabamos. Así supongamos que no es fuertemente conexo, sabemos que T es trazable i.e existe una trayectoria hamiltoniana $P = (v_1, ..., v_k)$, para hacer a este T una diráfica fuertemente conexa, simplemente invertimos la dirección de la flecha entre V_1 y V_k, i.e $V_K \to V_1$, asi formamos un ciclo hamiltoniano y por lo tanto es fuertemente conexa, ya que para v_i, v_j si $i < j$ entonces su camino sería $v_i \to v_{i+1} \to ... \to v_j$, si i > j continuamos hasta el final hasta llegar a v_j i.e $v_j \to v_{j+i} \to ... \to V_1 \to ... \to V_i$.

3.- Proposicion: una digráfica es fuertemente conexa si y solo su contiene un camino cerrado generador

<-] Supongamos que Dcontiene un camino cerrado generador, sea z el inicio y fin de este camino, entonces como utiliza todos los vértices vemos que cualesquiera dos vértices u y w siempre existira un camino en ambas direcciones, ya que siempre podemos ir de uno a otro cruzando por z.

->] Supongamos D es fuertemente conexa, entonces sean $u, w \in V_D$, sabemos que existe un $(u, w) - camino$ y un $(w, u) - camino$, al unir estos caminos obtenemos un camino cerrado $Q = (u, x_1, x_2, ..., x_m, w, y_1, ..., y_k, u)$, si Q cubre todos los vértices terminamos, de lo contrario extendemos el paseo, sea $z \notin Q$, como D es fuertemente conexa, sin pérdida de generalidad tomamos Y_k, así existe (z, y_k) camino y (y_k, z) camino uniendolos obtenemos $P = (y_k, r_1, r_2, ..., r_n, z, t, ..., t_l, y_k)$ Asi formamos el nuevo paseo cerrado $Q! = Q_{y_k} P_{y_k} Q$, como esto se hizo con z arbitrario podemos seguir extendiendo el camino hasta que $E_D = E_Q$ y asi concluimos que existe un camino cerrado gen.