Guía Gráficas

José Angel Olmedo Guevara

March 17, 2025

1 Definiciones

- Una gráfica es una pareja ordenada G(V,E) donde V es un conjunto arbitrario y E tiene asociados dos elementos de V.
- Una gráfica G es **nula** si el conjunto de vértices es nulo $V_G = \emptyset$.
- Una gráfica es **vacía** si $E_G = \emptyset$.
- Si G y H son gráficas, un isomorfismo de G a H es una función $F : V_G \to V_h$ tal que $uv \in E_G$ sí y solo sí $F(u)(v) \in E_H$, osea que dos gráficas son isomorfas si tienen la misma representación gráfica.
- Una gráfica es completa si cualquiera dos de sus vértices son adyacentes.
- Si G es una gráfica el orden de G es la cardinalidad de V; $|V|$.
- El complemento de una grafica G, $\hat{G}$ es agregar todas las aristas para que la gráfica sea completa y después borrar los vértices que tenía previo a que la gráfica fuera completa.
- Una gráfica G es una **trayectoria**, **P** si su conjunto de vértices admite un orden total y dos vértices de G son adyacentes si y solo si son consecutivos en dicho orden.
- Un **ciclo**, **C** si su conjunto de vértices admite un orden total y dos vértices de G son circulares si y solo sí son consecutivos en dicho orden.
- El grado de un vértice es el número de aristas que inciden en él
- Una gráfica es conexa si para cualquier partición (X, Y) de V_G existe una XY arista, es decir una arista con X y el otro extremo Y (Osea que desde cualquier vértice u se puede llegar a cualquier vértice v)
- Una gráfica es K-regular si cada uno de sus vértices tienen grado K
- El máximo número de aristas que puede tener una gŕafica de orden n en es $n(n-1)/2$
- Si G es una gráfica entonces $\sum_{\delta \in V} d(V) = 2|E|$
- Una sucesión de naturales $d = (d_1, ..., dn)$ es gráfica si existe una gráfica G tal que la sucesión de grados de G es d. (1, 1, 1) no es gráfica.
- Una digráfica es una gráfica dirigida.
- Una gráfica G es **bipartita** si V_G adimite una partición X, Y tal que X y Y son independientes, es decir si $u \in X; v \in Y$, entonces u y v no son adyacentes.

- Una gráfica G es **k-partita completa** si cada elemento de una k-partición es adyacente a todos los demás elementos de las otras k-particiones
- Si G y H son gráficas decimos que H es subgráfia de G, $H \subseteq G$ si $V_H \subseteq V_G$ y $E_H \subseteq E_G$
- Una **subgráfica inducida** de G se obtiene tomando un subconjunto S de V_G y considerando únicamente las aristas de G que conectan esos vértices.
- **Longitud:** Número de aristas en un camino.
- Un **camino** es una sucesión alternada de vértices y aristas, su longitud es denotada por l(w)=n.
- **Paseo**: Camino que no repite aristas.
- **Trayectoria**: Camino que no repite vértices.
- Una propiedad P es hereditaria si cumple que $G \in P$ y H sea una subgráfica inducida de G, entonces $H \in P$.
- Una P-obstrucción mínima es una gráfica H que no tiene la propiedad P pero talque toda subgráfica inducida propia de H si tienen la propiead P
- **Distancia**: La longitud del camino más corto entre dos vérties denotado como d(u, v).
- **Excentricidad**: Dado un vértice v es la mayor distancia de v a otro vértice de G.
- **Componente conexo:** Una subgráfica de G; máxima por contención con propiedad de ser conexa.
- **Camino dirigido:** Una sucesión W de vértices en D (digráfica) tal que V_i, $V_{i+1} \in A_D$
- **Conexidad fuerte:** D es fuertemente conexa si para cualesquiera X, Y $\in V_D$ existe un XY camino dirigido.
- **Componente fuertemente conexa:** Una subgráfica de D máxima por contención con la propiedad de ser fuertemente conexa.
- **Ciclo inducido:** Borrar vértices y que quede el ciclo sin borrar aristas.
- Un **vértice** v de G es **de corte** si $C_G < C_{G-v}$
- Una **arista** e de G es **de corte** o un **puente** si $C_G < C_{G-e}$
- Un **árbol** es una gráfica conexa y acíclica
- Un **árbol generador** de G es una subgráfica generadora de G.
- Una **hoja** de un árbol, es un vértice con grado 1.
- Dos trayectorias son **Internamente ajenas** si no tienen vértices en común salvo el primero y el último
- Sea G una gráfica y $K \in Z^+$. Si existe una familia F de $uv-$trayectorias internamente ajenas con $|F|$ par y con $|F| \geq K$ entonces para cualquier subconjunto $S \subseteq V_G - u, v$ tal que $|S| < K$, la gráfica $G - S, u$ alcanza a v.
- Si para cualesquiera $u, v \in V_G$ existe una familia de al menos K $uv-$trayectorias internamente ajenas, entonces G-S es conexa siempre que $S \subseteq V_G$ con $|S| < K$.

- Una **descomposición** de una gráfica G es una familia F de subgráficas de G ajenas por aristas tales que su unión es G.
- Una **separación** de una gráfica conexa G es una descomposición de G en 2 subgráficas conexas no vacías tales que tienen un único vértice en común (este vértice es un **vértice separador** de G)
- Los **vértices separadores** de una gráfica inconexa son los vértices separadores de sus componentes conexas.
- En una gráfica sin lazos un vértice es **de corte** si y solo si es **separador**.
- Sea G una gráfica distinta de K_2, si G tiene puentes, entonces también tiene vértices de corte.
- Decimos que G es **no separable** si es conexa y no tiene vértices separadores.
- Un **bloque** de una gráfica G es una subgráfica de G máxima por contención con la propiedad de ser no separable (no tienen vértices de corte).
- Cualesquiera 2 bloques adyacentes comparten 1 vértice de corte
- Sea G una gráfica conexa y sea B el conjunto de los bloques de G y S el conjunto de los vértices separadores de G. Definimos la gráfica bipartita $R\ (B, S)$ como la gráfica tal que un bloque H de G es adyacente a $s \in S \iff s \in H$. (Árbol de bloques de G).
- **Subdividir una arista:** Borrar una arista y agregarle una trayectoria (normalmente 1 sólo vértice).
- **Teorema de caracterización de bloques**: Sea G una gráfica con al menos 3 vértices. Son equivalentes:
  - G es un bloque
  - Para cualesquiera dos vértices u y v de G existen dos $uv-$trayectorias internamente ajenas
  - Para cualesquiera dos vértices de G hay un ciclo que los contiene.
  - Para cualquier vértice y cualquier arista de G hay un ciclo que nos contiene
  - Para cualesquiera dos aristas de G hay un ciclo que los contiene.
- Sea G una gráfica.
  - Un paseo T es euleriano si $E_T = E_G$ (pasa por todas las aristas de G sin repetirlas.
  - Un circuito C es euleriano si $E_C = E_G$ (Pasa por todas las aristas y regresa donde terminaron).
  - Una gráfica es euleriana si tiene un circuito euleriano.
  - Si existe el circuito euleriano $\iff$ el grado de cada vértice es par.
  - Observación: Si existe un circuito euleriano $\rightarrow$ existe un paseo euleriano.
- **Teorema de gráficas eulerianas**: Sea G una gráfica, son equivalentes:
  - Toda componente conexa de G es euleriana.
  - El grado de cada vértice en G es par.
  - G admite una descomposición en ciclos.

2 Proposiciones

- Todas las gráficas completas de n vértices son únicas salvo isomorfismo.
- Como $|V_G| = |V_H|$; existe una biyección.
- El complemento del complemento de una gráfica es la gráfica original
- Dos gráficas son isomorfas si y solo sí sus complementos también son isomorfos
- Si G es una gráfica con grado mínimo de al menos 2, entonces G tiene un ciclo.
- El número de vértices de grado impar en una gráfica es par (3, 3, 2, 1, 1) $\rightarrow$ gráfica del toro.
- Si una gráfica G tiene un uv camino cerrado de longitud impar, contiene un ciclo impar.
- Se G una gráfica: G es bipartita $\iff$ G no contiene ciclos impares $\iff$ G no contiene ciclos impares inducidos
- Si D no tiene vértices con ingrado cero, entonces D contiene un ciclo dirigido.
- Sea G una gráfica, una arista e de G es un puente si y solo sí e no pertenece a algún ciclo.
- Sea G una gráfica, si es coneza, entonces contiene un **árbol generador**.
- Todo arbol generador tiene el mismo número de aristas
- Cualquier árbol de n vértices tiene n-1 aristas.
- Sea G una gráfica, u y v vértices de G. Si existen dos uv trayectorias distintas P y Q en G, entonces $P \cup Q$ contiene un ciclo
- Sea G una gráfica sin lazos. Son equivalentes G es un árbol $\iff$ existe una única trayectoria entre cualesquiera dos vértices de G.
- Para todo árbol $|E| = |V| - 1$
- Sea G un árbol no trivial (oséa un vértice y ya), G tiene al menos dos hojas ($\delta(v) = 1$).
- Si G satisface cualesquiea de las siguiente tres propiedades, entonces también se satisface la tercera, por lo que es un árbol:
  - G es conexa
  - G es acíclica
  - $|E| = |V| - 1$
- Sea G un árbol no trivial (oséa un vértice y ya), si $v \in V(G)$ entonces v es de corte si y solo sí el grado de v es de al menos 2.
- Sea G una gráfica, entonces:
  - Cualesquiera dos bloques **distintos** de G comparten a lo más un vértice.
  - Los bloques de G conforman una descomposición de G.
  - Cada ciclo de G está contenido en uno de sus bloques.
- Sean G_1 y G_2 dos subgráficas de G no separables distintas. Si G_1 y G_2 comparten al menos dos vérties, entonces alguna de G_1 ó G_2 no es un bloque.

3 Corolarios

- Sea G una gráfica conexa, son **equivalentes** G es un árbol, toda arista de G es un puente.
- Sea G una gráfica no trivial (oséa un vértice y ya), si es conexa, entonces contiene al menos dos vértices que no son de corte.