

# Participación nuevo vértice

José Angel Olmedo Guevara

11 de Marzo de 2025

Sea  $G$  un bloque con al menos dos vértices. Demuestre que si  $H$  es la gráfica obtenida de  $G$  al agregar un vértice nuevo  $x$ , y hacerlo adyacente a dos vértices distintos en  $G$ , digamos  $u$  y  $v$ , entonces  $H$  es un bloque.

Demostraremos por medio de Inducción

Caso base:  $G$  es una gráfica de dos vértices, es decir  $K_2$ , al subdividir la única arista que existe, agregaremos un nuevo vértice  $x$ , que será adyacente tanto a  $u$  como a  $v$ , por lo que seguirá siendo un bloque necesariamente.

Hipótesis inductiva: Si agregamos subdivisiones a cualquier arista de  $G$ , que es un bloque, formaremos una nueva gráfica  $H$ , que seguirá siendo un bloque

Paso inductivo: Sea  $G$  una gráfica de grado máxima que es un bloque.

Caso 1: Subdividimos una arista aleatoria de  $G$ , es decir agregamos un nuevo vértice  $x$  adyacente a los dos vértices  $u, v$  que contenían a la arista aleatoria en  $G$ , por hipótesis inductiva la nueva gráfica generada  $H$ , seguirá siendo un bloque, porque por definición  $G$  no tiene vértices de corte y por lo tanto no tiene puentes (empleando la contrapositiva de la participación de puentes, que ya entregué), es decir que ninguna subdivisión de cualquier arista aleatoria en  $G$  que es un bloque podría generar una nueva gráfica  $H$  que no sea un bloque ya que originalmente  $G$  no tiene puentes.

Caso 2: Subdividimos todas las aristas de  $G$ , es decir que agregamos un nuevo vértice  $x$  adyacente a los dos vértices  $u, v$  que contenían a la arista de  $G$ , se sigue análogamente el caso 1, ya que nuevamente por definición  $G$  es un bloque y al no tener vértices de corte, tampoco puede tener puentes, así que cualquier subdivisión de aristas de  $G$  generará una nueva gráfica  $H$  que necesariamente será un bloque.