Álgebra superior I
Tarea 5

Profesor: Israel Zamorano Romero
Ayudante: Alfredo López Castillo.

19 de marzo de 2025

Fecha de entrega: 26 de marzo de 2025

1. Demuestre las siguientes proposiciones.
   a) Sea A cualquier conjunto y R una relación de equivalencia en $A \times A$, entonces R induce una partición en A.
   b) Sea A un conjunto arbitrario y P una partición en A, entonces P induce una relación de equivalencia en A.
2. Resuelva los siguientes incisos
   a) Dése un ejemplo de relación para la cual valgan las propiedades de reflexividad y simetría. pero no la de transitividad. Justifique su respuesta.
   b) Dése un ejemplo de relación para la cual valgan las propiedades de reflexividad y transitividad, pero no la de simetría. Justifique su respuesta.
3. Sea $k \in \mathbb{N}$. Definimos una relación $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ como sigue:
   $$(n, m) \in R \text{ si } n - m = ks \text{ para algún } s \in \mathbb{Z}.$$
   Demuéstrese que R es una relación de equivalencia.
4. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y considere la relación R en A definida por
   $$(x, y) \text{ si } x - y \text{ es múltiplo de } 3.$$
   Demuestre que R es una relación de equivalencia en A.
5. Sea $\theta \sim \alpha$ si $\theta - \alpha = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Demuestre que es una relación de equivalencia.
6. Determine si cada una de las siguientes colecciones de conjuntos es partición para el conjunto dado A. Si la colección no es partición, indique porque.
   a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ $\quad P = \{\{4, 5, 6\}, \{1, 8\}, \{2, 3, 7\}\}$.
   b) $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ $\quad P = \{\{d, e\}, \{a, c, d\}, \{f, h\}, \{b, g\}\}$.
   c) $A = \{a, b, c, d\}$ $\quad P = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \emptyset\}$.

d) $A = \{\mathbb{Q}\} \quad P = \left\{n \in \mathbb{Q} \mid n^2 > 2\right\}$

7. Determine si la relación dada es una relación de equivalencia, y si es así descríbase la partición inducida.

   a) $n \sim m$ en $\mathbb{Z}$ si $nm \geq 0$.

   b) $x \sim y$ en $\mathbb{R}$ si $|x| = |y|$.

   c) $x \sim y$ en $\mathbb{R}$ si $x^2 + y^2 = 4$.

   d) $n \sim m$ en $\mathbb{N}$ si $n \neq m$