Tarea 8

1. Sean G una gráfica conexa y $e \in E$. Demuestre que
   (a) e está en cada árbol generador de G si y sólo si e es un puente de G;
   (b) e no está en árbol generador alguno de G si y sólo si e es un lazo.
2. Sea G una gráfica conexa con conjunto de bloques B y conjunto de vértices de corte C. La *gráfica de bloques y cortes* de G, denotada por $B_C(G)$, esta definida por $V_{B_C(G)} = B \cup C$ y si $u, v \in V_{B_C(G)}$, entonces $uv \in E_{B_C(G)}$ si y sólo si $u \in B$, $v \in C$ y v es un vértice de u. Demuestre que $B_C(G)$ es un árbol.
3. Modifique el algoritmo BFS para que regrese una bipartición de la gráfica (si la gráfica es bipartita) o un ciclo impar (si la gráfica no es bipartita). Su algoritmo debe seguir usando tiempo $O(|V| + |E|)$.
4. Describa un algoritmo basado en BFS para encontrar el ciclo impar más corto en una gráfica. Su algoritmo puede usar tiempo $O(|V||E|)$.
5. Describa un algoritmo de tiempo $O(|V| + |E|)$ para encontrar un bosque generador en una gráfica arbitraria (no necesariamente conexa).

Puntos Extra

1. Demuestre que los algoritmos propuestos en los ejercicios 3, 4 y 5 son correctos (un punto por cada demostracción correcta).
2. Modifique BFS para que sea recursivo en lugar de iterativo.
3. Modifique DFS para que sea recursivo en lugar de iterativo y no utilice una pila (ni otras colecciones).
4. Modifique al algoritmo BFS para que:
   (a) Reciba una gráfica no necesariamente conexa con dos vértices distinguidos r y t.
   (b) El algoritmo empiece en r, y termine cuando encuentre al vértice t, en cuyo caso lo regresa, junto con una trayectoria de longitud mínima de r a t, o cuando decida que el vértice t no puede ser alcanzado desde r, en cuyo caso regresa el valor `false`.
   (c) El primer paso dentro del ciclo `while` sea **eliminar** la cabeza de la cola.