UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Tarea 01

PRESENTA

Gael Bensussen Gonzalez, José Ángel Olmedo Guevara, Jimènez Rivera Emiliano Kaleb

PROFESOR

César Hernández Cruz

ASIGNATURA

Gráficas y Juegos

March 17, 2025

1 Inciso 1 de la tarea

$(a) \to (b)$

Sea G una gráfica, sabemos que no tiene puentes, por lo tanto no puede ser un árbol ni una trayectoria, entonces necesariamente toda arista e de G está contenida en al menos un ciclo.

Sean u y v dos vértices distintos de G, al ser conexa existe por lo menos una trayectoria de u a v, si sólo existiera una única trayectoria, todas las aristas de esa trayectoria serían necesariamente puentes, contradiciendo a G, por lo que necesariamente deben existir dos trayectorias internamente ajenas por aristas en G, y tiene sentido ya que al toda arista de G estar contenida en almenos un ciclo, trivialmente en un ciclo siempre existen dos trayectorias internamente ajenas por aristas.

$(b) \to (a)$

Sea G una gráfica, sabemos que cualesquiera dos vértices u y v están conectados por al menos dos trayectorias internamente ajenas por aristas.

Supongamos que existe una arista que es un puente que tiene como extremos a u y a v, es decir $e = uv$, esto implicaría que existe una única trayectoria que conecta a u y a v, contradiciendo a G, por lo tanto G necesariamente no tiene aristas.

2 Inciso 2 de la tarea

Caso base: Si un bloque es K_1 implica que es un vértice aislado, por lo que no tiene aristas, si un bloque es K_2 son dos vértices conectados por una arista, lo cual no es un ciclo par.

Podemos construir a G como una descomposición por bloques, por lo cual por nuestros casos base sabemos que al menos contiene a K_1 y K_2 como bloques, empleando el concepto de descomposición por orejas definimos a una oreja como una subgráfica inducida, máxima por contención con la propiedad de tener 3 vértices, los cuales los vértices que son extremos forman parte de la unión de los elementos de la descomposición de G y el vértice adyacente a los extremos con la característica de ser nuevo (que no pertenezca a ninguna otra subgráfica inducida).

Al ser G una gráfica que no contiene ciclos pares, podemos construir a G como una descomposición que contiene al menos a K_1, K_2 y una descomposición por orejas, al unir los elementos de dicha composición notaremos que no contiene ciclos pares.

Además, por casos base y por hipótesis (G no contiene ciclos pares), necesariamente cada elemento de la descomposición de G debe ser por lo menos K_1, K_2 y un ciclo impar, la cual es una oreja.

3 Inciso 3 de la tarea

Construcción de la trayectoria P: Tomemos a un vértice arbitrario $x_1 \in X$ como extremo y a otro vértice arbitrario $y_1 \in Y$, trivialmente la trayectoria tendría una arista, en caso contrario si existe algún vértice que pertenezca a $X \cup Y$, podemos descartarlo y debería seguir existiendo la trayectoria, ya que G al ser un bloque, no tiene vértices de corte y no pueden aumentar el número de componentes conexas, además si existiera algún otro vértice que pertenezca a la trayectoria Q nuevamente podríamos descartarlo y debería seguir existiendo una manera de llegar a Y_2, ya que nuevamente G no tiene vértices de corte y no puede aumentar el número de componentes conexas descartando ningún vértice.

Construcción de la trayectoria Q: Tomemos a un vértice arbitrario $x_1 \in X$ como extremo y a otro vértice arbitrario $y_1 \in Y$, trivialmente la trayectoria tendría una arista, en caso contrario si existe algún vértice que pertenezca a $X \cup Y$, podemos descartarlo y debería seguir existiendo la trayectoria, ya que G al ser un bloque, no tiene vértices de corte y no pueden aumentar el número de componentes conexas, además si existiera algún otro vértice que pertenezca a la trayectoria P nuevamente podríamos descartarlo y debería seguir existiendo una manera de llegar a Y_2, ya que nuevamente G no tiene vértices de corte y no puede aumentar el número de componentes conexas descartando ningún vértice.

De esta manera construimos a P Y Q, dos trayectorias internamente ajenas de G, que es un bloque (no tiene vértices de corte) que cumplen: Que sus vértices iniciales pertenezcan a X, que sus vértices finales pertenezcan a Y y que ningún vértice interno de P y Q pertenzcan a $X \cup Y$.

4 Inciso 4 de la tarea

$(a) \to (b)$

Si G es un bloque, sabemos que no tiene vértices de corte, entonces por la participación de puentes (entregada el 13 de marzo) sabemos que (empleando la contrapositiva) si G es una gráfica distinta de K_2, si no tiene vértices de corte, entonces tampoco tiene puentes.

Sea G una gráfica, sabemos que no tiene puentes, por lo tanto no puede ser un árbol ni una trayectoria, entonces necesariamente toda arista e de G está contenida en al menos un ciclo.

Sean u y v dos vértices distintos de G, al ser conexa existe por lo menos una trayectoria de u a v, si sólo existiera una única trayectoria, todas las aristas de esa trayectoria serían necesariamente puentes, contradiciendo a G, por lo que necesariamente deben existir dos trayectorias internamente ajenas por aristas en G, y tiene sentido ya que al toda arista de G estar contenida en almenos un ciclo, trivialmente en un ciclo siempre existen dos trayectorias internamente ajenas

$(b) \to (c)$

Sabemos que entre cualesquiera dos vértices distintos existen dos trayectorias internamente ajenas, por lo cual entre cualesquiera dos vértices distintos está contenido un ciclo necesariamente.

$(c) \to (d)$

Sabemos que para cualesquiera dos vértices de G existe un ciclo que los contiene, entonces si tomamos a un vértice arbitrario $u \in V_G$ y tomamos una arista arbitraria $e \in E_G$ que tenga como extremo a cualquier vértice $v \in V_G$ debe existir un ciclo que contenga a u y a v, conteniendo de esta manera a la arista e que originalmente era adyacente a v.

$(d) \to (e)$

Sabemos que cualquier vértice $u \in V_G$ y cualquier arista $e \in E_G$ G existe un ciclo que los contiene, entonces sea x cualquier arista adyacente a u, y sea v un vértice arbitrario que contenga a e, entonces por por lo que sabemos, necesariamente existe un ciclo que contiene a x y a e, que son cualquier arista arbitraria de G.

$(e) \to (f)$

Sabemos que para cualesquiera dos aristas de G existe un ciclo que los contiene, entonces sea u un vértice aleatorio de G que tenga conectado una arista aleatoria e de G, sea v otro vértice aleatorio de G distinto de u que tenga conectado a a otra arista aleatoria x de G distinta de e, entonces por lo que sabemos, necesariamente existe una uv-trayectoria que pasa por e.

$(f) \to (g)$

Sabemos que dados dos vértices u, $v \in V(G)$ y una arista $e \in E_G$, existe una uv-trayectoria que pasa por e, entonces sea u, v, $w \in V_)$ y una arista $e \in E_G$ tal que $e = uw$, entonces por lo que sabemos existe una $uv-$trayectoria de u a v que necesariamente pasará por w, porque es adyacente a u.

$(g) \to (h)$

Sabemos que para cualesquiera tres vértices distintos de G, existe una trayectoria que une a cualesquiera dos de ellos y que pasa por el tercero, entonces sea u, v, $w \in V_G$ y sea un vértice $z \in V_G$ distintos de u, v, w, entonces por lo que sabemos, podemos generar una trayectoria que contenga u, v y w, tal que tenga como extremos a cualquier pareja que se pueda formar de dicho conjunto de 3 vértices, pero por lo mismo, podemos asegurar la existencia de un cuarto vértice z tal que sea ajeno a la trayectoria anterior, que es lo que queremos demostrar.

$(h) \to (a)$

Sabemos que para cualesquiera tres vértices distintos de G, existe una trayectoria que une a cualesquiera dos de ellos que no pasa por el tercero, entonces sean u, v, $w \in V_G$, vértices distintos aleatorios distintos entre si mismos, por lo cual necesariamente existen las trayectorias $uv{-}w, uw{-}v, vw{-}u$, supongamos que G no es un bloque, por lo cual al remover un vértice aleatorio, digamos v, aumentarían en número las componentes conexas y la trayectoría $uv - w$, $vw - u$ dejaría de existir, pero por lo que sabemos (para cualesquiera tres vértices distintos de G, existe una trayectoria que une a cualesquiera dos de ellos que no pasa por el tercero), no es posible, entrará en una contradicción, haciendo que G sea necesariamente un bloque.

Por transitividad, se muestra que los resultados son equivalentes.