

# Participación puentes

José Angel Olmedo Guevara

11 de Marzo de 2025

Sea  $G$  una gráfica distinta de  $K_2$ . Demuestre que si  $G$  tiene puentes, entonces también tiene vértices de corte.

Demostraremos por medio de inducción:

Caso base: Sea  $G$  es una gráfica de tres vértices, que forman una trayectoria, se puede observar que el vértice de grado 2 es un vértice de corte y cualquiera de las dos aristas de  $G$  son puentes.

Hipótesis inductiva: Si existe algún puente en una gráfica, implica la existencia de al menos un vértice de corte.

Paso inductivo: Sea  $G$  una gráfica con más de tres vértices y con al menos un puente  $e = uv$ , si removemos dicha arista, entonces tendremos dos componentes conexas  $(C_1, C_2)$ . Como  $G$  originalmente contiene más de tres vértices, entonces podemos asumir que alguna de sus dos componentes conexas  $(C_1, C_2)$  al eliminar el puente tiene más de un vértice.

Asumamos sin pérdida de generalidad que  $C_1$  tiene más de un vértice, por lo que al eliminar  $u$ , es decir  $G_{-u}$  generariamos a  $C_2$ , además, podría generar más componentes conexas dentro de  $C_1$ , lo que implica necesariamente la existencia de un vértice de corte en  $G$  cuando existe una arista.