Álgebra superior I
Tarea 6

Profesor: Israel Zamorano Romero
Ayudante: Alfredo López Castillo.

28 de marzo de 2025

Fecha de entrega: 4 de marzo de 2025

1. Definimos $\mathbb{R}^+$como el conjunto de números reales positivos. Para cada $x, y \in \mathbb{R}^+$definiremos la suma de vectores como el producto habitual en $\mathbb{R}$,

$$x + y = x \cdot y$$

Ejemplo: $5 + 6 = 5 \cdot 6 = 30$. Y definiremos el producto por un escalar como la potenciación habitual en $\mathbb{R}$

$$\lambda x = x^\lambda$$

Ejemplo: $5(2) = 2^5 = 32$ ¿Es $\mathbb{R}^+$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con estas operaciones? Justifique su respuesta.

2. Sea $V = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. Para $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se define

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + 2b_1, a_2 + 3b_2) \text{ y } \lambda (a_1, a_2) = (\lambda a_1, \lambda a_2)$$

¿Es V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con estas operaciones? Justifique su respuesta.

3. Sea $V = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ Para $(x, y, z), (x', y', z') \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se define

$$(x, y, z) + \left(x', y', z'\right) = \left(x + x', y + y', z + z'\right) \text{ y } \lambda(x, y, z) = (\lambda x, y, z)$$

¿Es V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con estas operaciones? Justifique su respuesta.

4. Sean A, B, C vectores de un espacio vectorial V, demuestre que si

$$A + B = A + C \Rightarrow B = C$$

5. Determine cuales de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ con las operaciones habituales de suma y multiplicación por escalar en $\mathbb{R}$ son subespacios vectoriales:

   a) $W_1 = \left\{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 = 3a_2 \text{ y } a_3 = -a_2\right\}$.

   b) $W_2 = \left\{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 = a_3 + 2\right\}$.

   c) $W_3 = \left\{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 - 4a_2 - a_3 = 0\right\}$.

   d) $W_4 = \left\{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 5a_1^2 - 3a_2^2 + 6a_3^2 = 0\right\}$.

6. Pruebe que un plano de $\mathbb{R}^3$ por el origen *i.e.*, un conjunto de la forma $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$ es un subespacio vectorial.

7. Pruebe que $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 3y + z = 0\right\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

8. Pruebe que $W = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\right\}$ es un subespacio vectorial.

9. Pruebe que la intersección de 2 subespacios vectoriales en $\mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial.