

Realiza los siguientes tres ejercicios de manera individual. Se requiere que la entrega sea en un documento PDF. Puedes escribir tus respuestas en el documento mediante algún software o completamente a mano. Si lo haces a mano debe ser legible y toma una foto de manera separada para cada ejercicio e incluye dichas fotos adentro del documento PDF.

1. [3 puntos] Inducción en sentido contrario

Considera que la siguiente desigualdad  $P(n)$  se cumple para cierto valor de  $n \geq 1$  (puedes comprobar para alguna  $n > 1$  que se cumple)

$P(n)$  :

$$x_1 x_2 \dots x_n \leq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^n}{n^n}. \quad (1)$$

- (a) Partiendo de que  $P(n)$  es cierta, demuestra que  $P(n) \rightarrow P(n-1)$  para  $n > 1$  (mostrando que puedes obtener  $P(n-1)$  partiendo de  $P(n)$ ). Para ello considera también que

$$x_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}. \quad (2)$$

2. [3 puntos] Inducción sobre árboles

Considera el caso de un árbol binario denso  $\mathcal{T}$ , es decir en donde hay la cantidad máxima de nodos en el mismo.

- (a) Define una función recursiva  $CH(\mathcal{T})$  para contar el número de hojas en el árbol denso  $\mathcal{T}$ .
- (b) Considera otra función recursiva  $CN(\mathcal{T})$  para contar el número de nodos internos en el árbol denso  $\mathcal{T}$  como la del ejemplo visto en clase.
- (c) En base a los dos puntos anteriores demuestra usando inducción que

$$CH(\mathcal{T}) = CN(\mathcal{T}) + 1. \quad (3)$$

3. [4 puntos] **Recorriendo el árbol y obteniendo información**

Define una función recursiva que siempre reciba tres argumentos: un árbol, una lista y un número, y devuelve una lista.

- (a) El argumento árbol  $\mathcal{T}$  de la función puede estar vacío o tener nodos inicialmente, y el primer nodo  $c$  de  $\mathcal{T}$  que se inspecciona en la función es la raíz de  $\mathcal{T}$ .
- (b) El argumento lista  $\ell$ , en donde se concatenará información del árbol, se le pasa vacío inicialmente, pero puede ser no vacío si se está llamando recursivamente después de concatenar información.
- (c) El argumento tipo número se le pasa con valor de 0 inicialmente, pero deberá ir aumentando en las llamadas recursivas para contar la cantidad total de pasos hasta llegar a una hoja.
- (d) **El propósito de la función es devolver una lista con todas las hojas en el árbol y la profundidad a la que se encuentra cada hoja** (cantidad de pasos desde la raíz a la hoja). Por ejemplo, si se le pasa el siguiente árbol de la figura, la función debe devolver la lista  $[D2, E2, H3, I3, G2]$ , indicando que  $D, E$  y  $G$  están a profundidad 2, y  $H$  e  $I$  están a profundidad 3. El orden en que se añada cada elemento de la lista no importa.

