Parte I

Conceptos básicos

Capítulo 1

Introducción

Modelo de un sistema no lineal

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1\left(t, x_1, \cdots, x_n; u_1, \cdots, u_p\right)\\ \dot{x}_2 &= f_2\left(t, x_1, \cdots, x_n; u_1, \cdots, u_p\right)\\ &\vdots\\ \dot{x}_n &= f_n\left(t, x_1, \cdots, x_n; u_1, \cdots, u_p\right)\end{aligned}$$

dónde

$\dot{x}_i$	denota la derivada con respecto al tiempo (t) de la variable x_i
$u_1, \cdots, u_p$	son las variables de entrada
$x_1, \cdots, x_n$	son las variables de estado

o en forma breve

$$\dot{x} = f\left(t, x, u\right)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \; u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \; f(t, x, u) = \begin{bmatrix} f_1(t, x, u) \\ f_2(t, x, u) \\ \vdots \\ f_n(t, x, u) \end{bmatrix}$$

Para sistemas con salidas

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u) \\ y &= h(t, x, u) \end{aligned}$$

dónde x es el estado, u es la entrada, y es la salida (vector de dimensión

q)

1.1. Casos especiales

1.1.1. Sistemas lineales

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)\,x + B(t)\,u \\ y &= C(t)\,x + D(t)\,u \end{aligned}$$

1.1.2. Ecuación de estado sin entrada (no forzada)

$$\dot{x} = f(t, x)$$

Resulta de aplicar un control

$$u = \gamma\left(t, x\right)$$

al sistema con entrada de control

$$\dot{x} = f\left(t, x, u\right)$$

1.1.3. Sistema autónomo

$$\dot{x} = f\left(x\right)$$

1.1.4. Sistema Invariante en el tiempo

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f\left(x, u\right) \\
y &= h\left(x, u\right)
\end{aligned}
$$

Un sistema invariante en el tiempo tiene una propiedad de invarianza en el tiempo con respecto al desplazamiento del tiempo inicial de t_0 a $t_0 + a$, siempre y cuando la señal de entrada sea aplicada a partir del instante $t_0 + a$, en vez del instante t_0.

1.2. Existencia y unicidad de soluciones

$$\dot{x} = f(t, x)$$

$f(t, x)$ es contínua a tramos en t y localmente Lipschitz en x sobre el *dominio* de interés.

- $f(t, x)$ es contínua a tramos en t en un intervalo $J \subset \mathbb{R}$ si para todo subintervalo acotado $J_0 \subset J$, f es contínua en t para toda $t \in J_0$, excepto, posiblemente, en un número finito de puntos, en los cuales f puede tener discontinuidades con saltos finitos.

- $f(t,x)$ es localmente Lipschitz en x en un punto x_0 si existe una vecindad (abierta) $N(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\}$ en la cual $f(t,x)$ satisface la condición de Lipschitz

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\| \ , \ L > 0$$

- Una función $f(t,x)$ es localmente Lipschitz en x en un *dominio* (un conjunto abierto y conexo) $D \subset \mathbb{R}^n$ si ella es localmente Lipschitz en cada punto $x_0 \in D$

  – Si $n = 1$ y f depende solo de x

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \leq L$$

  En una gráfica de $f(x)$ contra x una línea recta que una dos puntos cualesquiera de $f(x)$ no puede tener una pendiente cuyo valor absoluto sea mayor que L

- Cualquier función $f(x)$ que tiene una pendiente infinita en algún punto no es localmente Lipschitz en ese punto.

- Una función discontínua no es localmente Lipschitz en los puntos de discontinuidad.

- La función $f(x) = x^{1/3}$ no es localmente Lipschitz en $x = 0$, ya que

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{3x^{2/3}} \rightarrow \infty \text{ cuando } x \rightarrow 0$$

- Por otro lado, si $f'(x)$ es contínua en un punto x_0 entonces $f(x)$ es localmente Lipschitz en ese punto, ya que la continuidad de

$f'(x)$ asegura que $|f'(x)|$ es acotada por una constante k en una vecindad de x_0, lo que implica que $f(x)$ satisface la condición de Lipschtz con $L = k$

- En general, si para $t \in J \subset \mathbb{R}$ y x en un *dominio* $D \subset \mathbb{R}^n$, $f(t,x)$ y sus derivadas parciales $\partial f_i(t,x)/\partial x_i$ son contínuas, entonces $f(t,x)$ es localmente Lipschitz en x en D.

Lema 1 *Sea $f(t,x)$ una función contínua a tramos en t y localmente Lipschitz en x en el punto x_0, para toda $t \in [t_0, t_1]$. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que la ecuación $\dot{x} = f(t,x)$, con $x(t_0) = x_0$ tiene una solución única en $[t_0, t_0 + \delta]$, que se denotará como*

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$$

Sin la condición local de Lipschitz no se puede asegurar la *unicidad* de la solución. Por ejemplo,

$$\dot{x} = x^{1/3}$$

tiene dos soluciones diferentes

$$x(t) = \begin{cases} \left(\frac{2t}{3}\right)^{3/2} \\ 0 \end{cases}$$

cuando el estado inicial es $x(0) = 0$.

El lema es un resultado local porque el garantiza la existencia y unicidad de la solución en un intervalo $[t_0, t_0 + \delta]$, pero este intervalo puede no incluir un intervalo dado $[t_0, t_1]$. De hecho la solución puede cesar de existir después de cierto tiempo

Ejemplo 2

$$\dot{x} = -x^2$$

$f(x) = -x^2$ *es localmente Lipschitz para todo* x

$$x(0) = -1 \Longrightarrow x(t) = \frac{1}{t-1} \Longrightarrow \lim_{t \to 1} x(t) = -\infty$$

La solución tiene un tiempo de escape finito *en* $t = 1$.

En general, si $f(t, x)$ es localmente Lipschitz sobre un dominio D y la solución de $\dot{x} = f(t, x)$ tiene un tiempo de escape finito t_e para la condición inicial x_0, entonces $\varphi(t, t_0, x_0)$ debe abandonar todo subconjunto *compacto* (conjunto cerrado y acotado) de D cuando $t \to t_e$

1.3. Existencia Global y unicidad de soluciones

Una función $f(t,x)$ es globalmente Lipschitz en x si

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\| \ , \ L > 0$$

para toda $x, y \in \mathbb{R}^n$, con la misma constante de Lipschitz L.

Si $f(t,x)$ y sus derivadas parciales $\partial f_i(t,x)/\partial x_i$ son contínuas para toda $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $f(t,x)$ es globalmente Lipschitz en x si y sólo si las derivadas parciales $\partial f_i(t,x)/\partial x_i$ son globalmente acotadas, uniformemente en t.

$f(x) = -x^2$ es localmente Lipschitz para todo x, pero no globalmente Lipschitz porque $f'(x) = -2x$ no es globalmente acotada.

Lema 3 *Sea $f(t,x)$ una función contínua a tramos en t y globalmente Lipschitz en x para toda $t \in [t_0, t_1]$. Entonces, la ecuación $\dot{x} = f(t,x)$, con $x(t_0) = x_0$, tiene una solución única en $[t_0, t_1]$.*

La condición global de Lipschitz es satisfecha por sistemas lineales de la forma

$$\dot{x} = A(t)\,x + g(t)$$

si $A(t)$ es acotada, pero es, en general, una condición muy restrictiva para sistemas no lineales.

Lema 4 *Sea $f(t,x)$ una función contínua a tramos en t y localmente Lipschitz en x para toda $t \geq t_0$, y toda x en un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$. Sea W un subconjunto compacto de D, y suponga que toda solución de*

$$\dot{x} = f(t,x)\ \ ,\ \ x(t_0) = x_0$$

con $x_0 \in W$ se encuentra completamente en W, es decir,

$$x_0 \in W \Longrightarrow \varphi(t, t_0, x_0) \in W \ , \ \forall t \geq t_0 \ .$$

Entonces, existe una solución única para toda $t \geq t_0$.

Ejemplo 5

$$\dot{x} = -x^3 = f(x)$$

$f(x)$ es localmente Lipschitz para todo $x \in \mathbb{R}$, pero no globalmente Lipschitz, ya que $f'(x) = -3x^2$ no es globalmente acotada.

Si, en algún instante de tiempo, $x(t)$ es positiva, la derivada $\dot{x}(t)$ será negativa. En forma similar, si $x(t)$ es negativa, la derivada $\dot{x}(t)$ será positiva.

Por lo tanto, iniciando de alguna condición inicial $x(0) = a$, la solución *no puede abandonar el conjunto compacto* $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq a\}$

Entonces la ecuación tiene una solución única para todo $t \geq 0$.

1.4. Puntos de equilibrio

Un punto $x = x^*$ en el espacio de estado se dice que es un punto de equilibrio del sistema

$$\dot{x} = f(t, x) \ ,$$

si

$$x(t_0) = x^* \Longrightarrow x(t) = \varphi(t, t_0, x^*) \equiv x^* \ , \ \forall t \geq t_0$$

Este es el caso si el vector velocidad en el punto x^* es cero para todo tiempo $t \geq t_0$, es decir, si

$$f(t, x^*) = 0$$

Para el sistema invariante en el tiempo (autónomo) $\dot{x} = f(x)$ los puntos de equilibrio son las soluciones reales de la ecuación

$$f(x) = 0$$

Un punto de equilibrio puede ser:

- Aislado: es decir, no existen otros puntos de equilibrio en su vecindad, o

- No aislado: hay un contínuo de puntos de equilibrio.

Un sistema lineal $\dot{x} = Ax$ puede tener un punto de equilibrio aislado en $x = 0$ (si A es no singular, o sea $\det A \neq 0$), o un continuo de puntos de equilibrio, que corresponde a la variedad de puntos en $\mathbb{R}^n$, en la que se satisface la ecuación $Ax = 0$, denominada el espacio nulo de A (cuando A es singular, o sea $\det A = 0$).

Sin embargo, el sistema lineal no puede tener *múltiples puntos de equilibrio aislados*, ya que si x_a y x_b son puntos de equilibrio, se satisface que $Ax_a = 0$ y $Ax_b = 0$, y entonces, por linealidad para todo punto en la línea que une a x_a y x_b, descrita por $\alpha x_a + (1 - \alpha)\, x_b$, se satisface que $A\left[\alpha x_a + (1 - \alpha)\, x_b\right] = 0$, con lo que es también un punto de equilibrio.

Un sistema no lineal puede poseer múltiples puntos de equilibrio aislados. Por ejemplo, la ecuación de estado

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -a \sin x_1 - b x_2$$

tiene puntos de equilibrio en

$$x = \begin{bmatrix} n\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

1.5. Linealización

Una práctica común en ingeniería al analizar sistemas no lineales es linealizarlo alrededor de un punto de operación nominal y luego analizar el modelo lineal encontrado.

¿Cuáles son las limitaciones de la linealización?

- Ya que la linealización es una aproximación del sistema no lineal en la vecindad del punto de operación, ella solo puede predecir el comportamiento *"local"* del sistema no lineal en la vecindad de tal punto. La linealización no puede predecir el comportamiento *"no local"* o *"global"*.

- Existen *"fenómenos esencialmente no lineales"*, que pueden ocurrir solo en la presencia de la nolinealidad.
  Algunos fenómenos no lineales son:

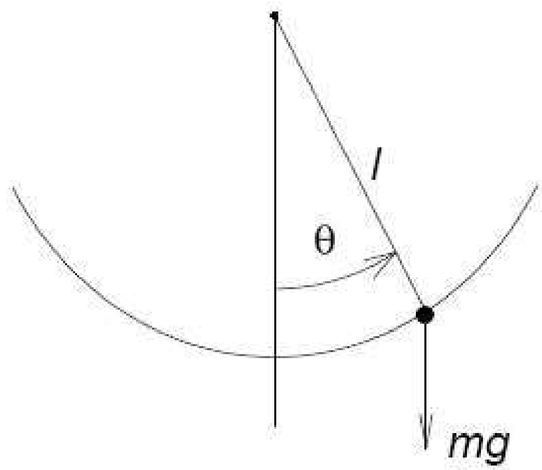
  – Tiempo de escape finito

  – Múltiples puntos de equilibrio

- Ciclos límite
- Oscilaciones subarmónicas, armónicas o cuasiperiódicas
- Caos
- Múltiples modos de comportamiento

Capítulo 2

Ejemplos de sistemas no lineales



2.1. El péndulo simple

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - kl\dot{\theta}$$

$$x_1 = \theta \ , \ x_2 = \dot{\theta}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{k}{m}x_2
\end{aligned}
$$

2.1.1. Puntos de equilibrio

$$
\begin{aligned}
0 &= x_2 \\
0 &= -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{k}{m}x_2
\end{aligned}
$$

$$
x^* = \begin{bmatrix} n\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots
$$

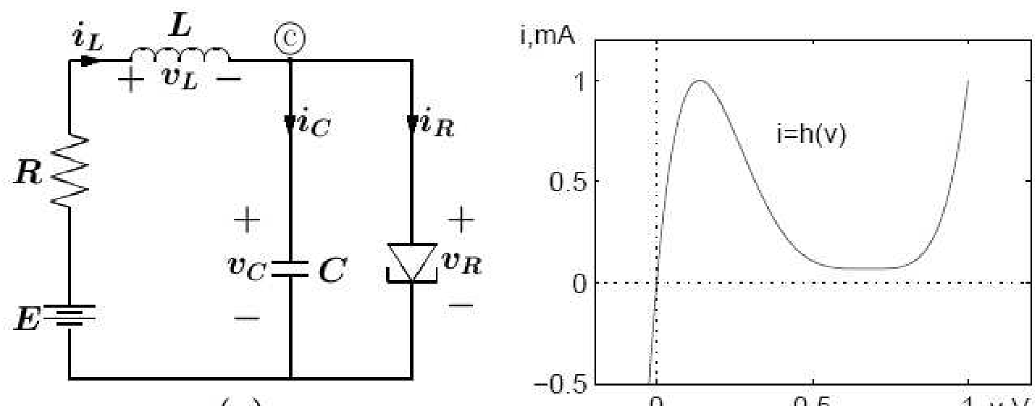
Puntos de equilibrio no triviales en $(0, 0)$ y en $(\pi, 0)$.

2.1.2. Péndulo sin fricción

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\sin x_1
\end{aligned}
$$

2.1.3. Péndulo con torque de entrada

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{k}{m}x_2 + \frac{1}{ml^2}T
\end{aligned}
$$



(a) (b)

2.2. El circuito de Diodo Túnel

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} \ , \ v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

$$x_1 = v_C \ , \ x_2 = i_L \ , \ u = E$$

$$i_C + i_R - i_L = 0 \Longrightarrow i_C = -h\left(x_1\right) + x_2$$

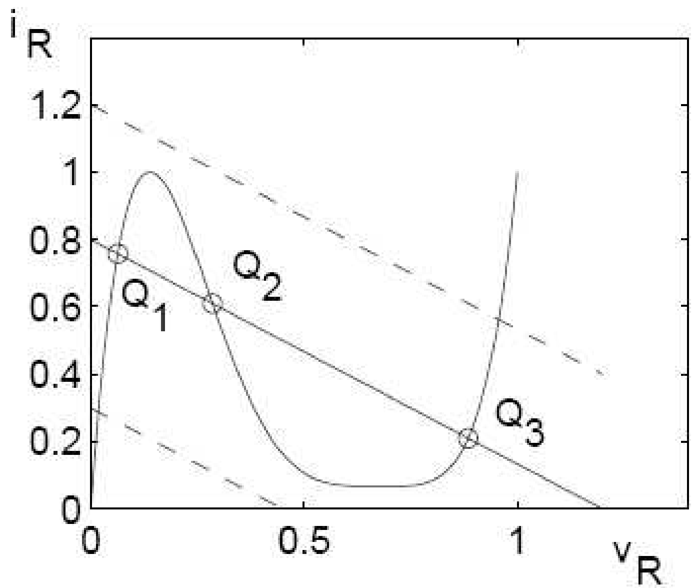
$$v_C - E + Ri_L + v_L = 0 \Longrightarrow v_L = -x_1 - Rx_2 + u$$

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C}\left[-h\left(x_1\right) + x_2\right]$$
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L}\left[-x_1 - Rx_2 + u\right]$$

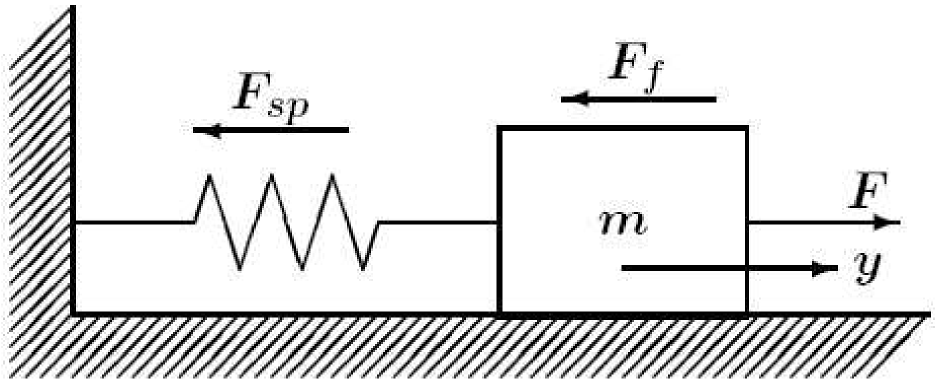
2.2.1. Puntos de equilibrio

$$0 = -h\left(x_1\right) + x_2$$
$$0 = -x_1 - Rx_2 + u$$

$$h\left(x_1\right) = \frac{E}{R} - \frac{1}{R}x_1$$



i R
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.5
1
v R
Q 1
Q 2
Q 3



2.3. Sistema Masa-Resorte

$$m\ddot{y} + F_f + F_{sp} = F$$

Fuentes de no linealidad:

- Fuerza de restitución del resorte no lineal $F_{sp} = g(y)$

$$g(y) = \begin{cases} k\left(1 - a^2y^2\right)y \ , \ |ay| \leq 1 & \text{Resorte suavizante} \\ k\left(1 + a^2y^2\right)y & \text{Resorte endureciente} \end{cases}$$

- Fricción estática o de Coulomb.
  La fuerza de fricción F_f puede tener componentes debidas a la fricción estática, de Coulomb o viscosa.

  Cuando la masa se encuentra en reposo, existe una fricción estática F_s que actúa paralela a la superficie y es limitada por $\pm\mu_s mg$ ($0 < \mu_s < 1$). F_s toma cualquier valor, entre sus límites, para mantener a la masa en reposo.

  Una vez el movimiento se ha iniciado, la fuerza resistiva F_s es modelada como una función de la velocidad de deslizamiento $v = \dot{y}$

2.4. Oscilador de resistencia negativa

$$h(0) = 0 \ , \ h'(0) < 0$$

$$\lim_{v \to \infty} h(v) = \infty \ , \ \text{y} \ , \ \lim_{v \to -\infty} h(v) = -\infty$$

$$i_C + i_L + i = 0$$

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(s)\,ds + h(v) = 0$$

Derivando con respecto a t y multiplicando por L:

$$CL\frac{d^2v}{dt^2} + v(t) + Lh'(v)\frac{dv}{dt} = 0$$

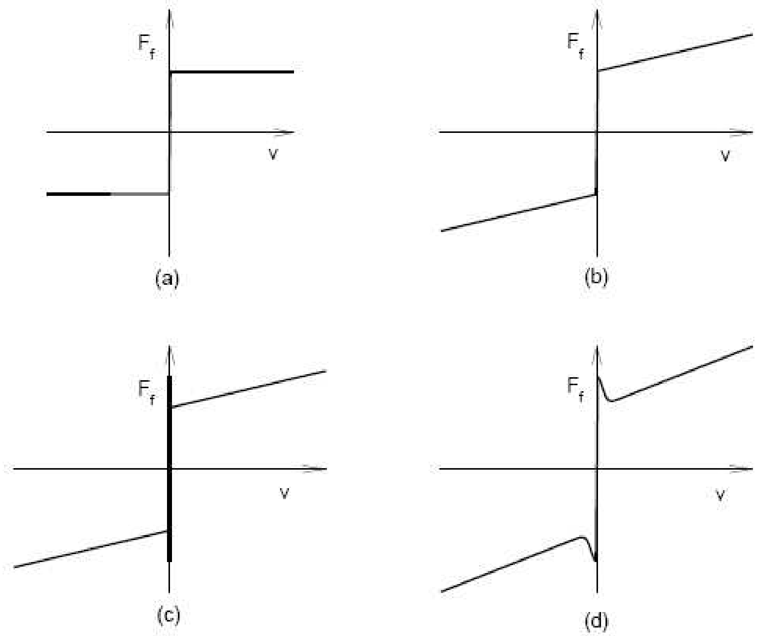
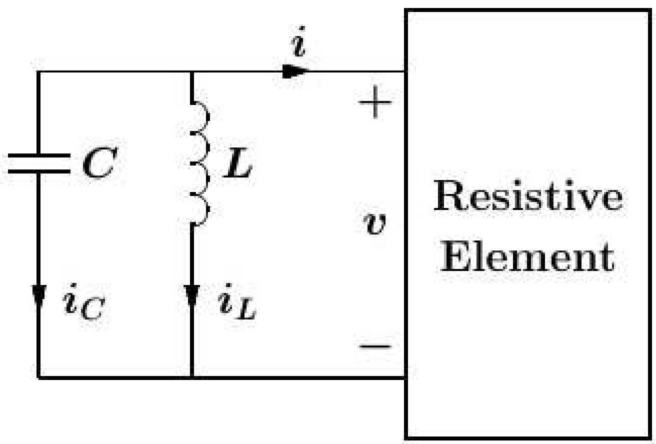
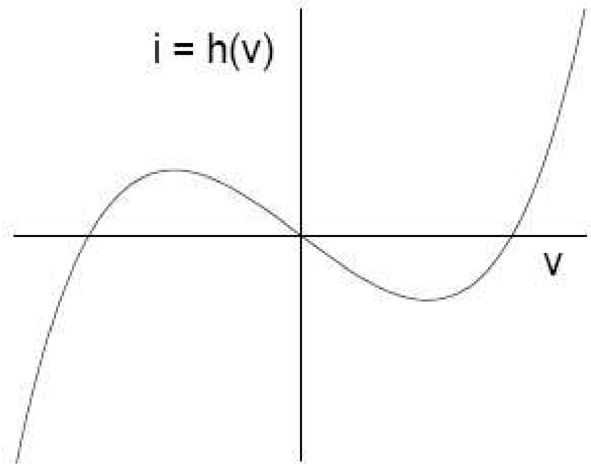


Figura 2.1: (a) Fricción de Coulomb; (b) Fricción de Coulomb con fricción viscosa lineal; (c) Fricciones estática, de Coulomb y viscosa lineal; (d) Fricciones estática, de Coulomb y viscosa lineal – Efecto Stribeck.



(a)



(b)

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{CL}}$$

$$\frac{dv}{d\tau} = \sqrt{CL}\frac{dv}{dt} \ , \ \frac{d^2v}{d\tau^2} = CL\frac{d^2v}{dt^2}$$

Denótese a la derivada de v con respecto a τ por $\dot{v}$

$$\ddot{v} + \varepsilon h'(v)\,\dot{v} + v = 0 \ , \ \varepsilon = \sqrt{L/C}$$

2.4.1. Caso especial: la ecuación de Van der Pol

$$h(v) = -v + \frac{1}{3}v^3$$

$$\ddot{v} - \varepsilon \left(1 - v^2\right) \dot{v} + v = 0$$

2.4.2. Modelo de estados

$$x_1 = v \ , \ x_2 = \dot{v}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - \varepsilon h'(x_1)\, x_2 \end{aligned}$$

2.4.3. Otro modelo de estados

$$z_1 = i_L \ , \ z_2 = v_C$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \tfrac{1}{\varepsilon} z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\varepsilon \left[z_1 + h\left(z_2\right) \right] \end{aligned}$$

2.4.4. Cambio de variables

$$\begin{aligned} x_1 &= v = z_2 \\ x_2 &= \tfrac{dv}{d\tau} = \sqrt{CL}\tfrac{dv}{dt} = \sqrt{\tfrac{L}{C}} \left[-i_L - h\left(v_C\right) \right] = -\varepsilon \left[z_1 + h\left(z_2\right) \right] \end{aligned}$$

$$T(x) = \begin{bmatrix} -h(x_1) - \frac{1}{\varepsilon} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad T^{-1}(z) = \begin{bmatrix} z_2 \\ -\varepsilon \left[z_1 + h(z_2) \right] \end{bmatrix}$$

2.5. Control adaptable

Planta:	$\dot{y}_p = a_p y_p + k_p u$
Modelo de referencia:	$\dot{y}_m = a_m y_m + k_m r$

$$u(t) = \theta_1^* r(t) + \theta_2^* y_p(t)$$

$$\theta_1^* = \frac{k_m}{k_p} \ , \ \theta_2^* = \frac{a_m - a_p}{k_p}$$

Cuando a_p y k_p son desconocidas, se puede usar

$$u(t) = \theta_1(t)\, r(t) + \theta_2(t)\, y_p(t)$$

dónde $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ son ajustadas en línea.

Ley de adaptación (algoritmo de gradiente):

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= -\gamma\,(y_p - y_m)\, r \\ \dot{\theta}_2 &= -\gamma\,(y_p - y_m)\, y_p \ , \ \gamma > 0 \end{aligned}$$

Variables de estado

$$e_0 = y_p - y_m \ , \ \phi_1 = \theta_1 - \theta_1^* \ , \ \phi_2 = \theta_2 - \theta_2^*$$

$$
\begin{aligned}
\dot{y}_m &= a_p y_m + k_p \left(\theta_1^* r + \theta_2^* y_m\right) \\
\dot{y}_p &= a_p y_p + k_p \left(\theta_1 r + \theta_2 y_p\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{e}_0 &= a_p e_0 + k_p \left(\theta_1 - \theta_1^*\right) r + k_p \left(\theta_2 y_p - \theta_2^* y_m\right) \\
&= \cdots + k_p \left[\theta_2^* y_p - \theta_2^* y_p\right] \\
&= \left(a_p + k_p \theta_2^*\right) e_0 + k_p \left(\theta_1 - \theta_1^*\right) r + k_p \left(\theta_2 - \theta_2^*\right) y_p
\end{aligned}
$$

2.5.1. Sistema en lazo cerrado

$$
\begin{aligned}
\dot{e}_0 &= a_m e_0 + k_p \phi_1 r(t) + k_p \phi_2 \left[e_0 + y_m(t)\right] \\
\dot{\phi}_1 &= -\gamma e_0 r(t) \\
\dot{\phi}_2 &= -\gamma e_0 \left[e_0 + y_m(t)\right]
\end{aligned}
$$