



# Notas del Curso

## Métodos de Diseño para Sistemas No Lineales

Jaime A. Moreno

Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)

Instituto de Ingeniería, México D.F., México

Email: JMorenoP@ii.unam.mx

12 de Marzo de 2013

# Índice general

I	Algunas propiedades de sistemas	1
1.	Grado Relativo, Forma Normal y Dinámica Cero	2
2.	Forma de Controlador	33

<b>II</b>	<b>Estabilización</b>	<b>121</b>
3.	Estabilización	122
4.	Linealización Parcial	147
5.	Funciones de Lyapunov de control	170
6.	Backstepping	187
7.	Control basado en pasividad	218
8.	Retroalimentación de la salida	254
<b>III</b>	<b>Estabilización Robusta</b>	<b>269</b>
9.	Control por Modos Deslizantes	270

10. Rediseño de Lyapunov (o Control Mini-Max)	305
11. Backstepping robusto	314
<b>IV Seguimiento</b>	<b>321</b>
12. Seguimiento (Tracking)	322
<b>V Regulación robusta estructural: Control Integral</b>	<b>335</b>
13. Control Integral	336

<b>VI</b>	<b>Observabilidad y el Diseño de Observadores</b>	<b>352</b>
14.	Introducción	353
<b>VII</b>	<b>Observabilidad</b>	<b>358</b>
15.	Sistemas estáticos o sin memoria	359
16.	Sistemas lineales	376
17.	Sistemas con parámetros desconocidos (Identificabilidad)	390
18.	Sistemas no lineales	393
19.	Sistemas con estados y parámetros desconocidos	405

VIII Diseño de Observadores para Sistemas Lineales	409
20. El Observador de Kalman	412
21. El observador de Luenberger	423
22. El principio de separación lineal	429
IX Diseño de observadores para sistemas no lineales	434
23. Métodos por aproximación (linealización)	436
24. Métodos exactos	444
25. Control por retroalimentación de salida: Observador de	

<b>Alta Ganancia</b>	<b>477</b>
<b>26.Dissipative Observer Design Method</b>	<b>493</b>

# Parte I

## Algunas propiedades de sistemas

# Lección 1

## Grado Relativo, Forma Normal y Dinámica Cero

## 1.1. Grado Relativo

Sistema No Lineal SISO (Una Entrada Una Salida) afín en la entrada

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x) u \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

dónde

- $f, g, h$  son suficientemente suaves en un dominio  $D \subseteq \mathbb{R}^n$
- $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  son campos vectoriales en  $D$

Tomando la derivada temporal de la salida

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \frac{\partial h(x)}{\partial x} \dot{x} \\ &= \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x) + \frac{\partial h(x)}{\partial x} g(x) u \\ &\triangleq L_f h(x) + L_g h(x) u\end{aligned}$$

dónde

$$L_f h(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x)$$

es la *Derivada de Lie* de  $h$  con respecto a  $f$  o a lo largo de  $f$ .

Nótese

$$L_g L_f h(x) = \frac{\partial (L_f h(x))}{\partial x} g(x)$$

$$L_f^2 h(x) = L_f L_f h(x) = \frac{\partial (L_f h(x))}{\partial x} f(x)$$

$$L_f^k h(x) = L_f L_f^{k-1} h(x) = \frac{\partial (L_f^{k-1} h(x))}{\partial x} f(x)$$

y se define por convención

$$L_f^0 h(x) = h(x)$$

Luego

$$\dot{y} = L_f h(x) + L_g h(x) u$$

Si

$$L_g h(x) = 0$$

entonces

$$\dot{y} = L_f h(x)$$

La primera derivada de la salida no depende de la entrada  $u$ . Tomando una derivada (con respecto al tiempo) adicional de la salida

$$\begin{aligned} y^{(2)} &= \ddot{y} = \frac{\partial (L_f h(x))}{\partial x} [f(x) + g(x) u] \\ &= L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x) u \end{aligned}$$

Si

$$L_g L_f h(x) = 0$$



$$y^{(2)} = L_f^2 h(x)$$

Derivamos con respecto al tiempo una vez más

$$\begin{aligned}y^{(3)} &= \frac{\partial (L_f^2 h(x))}{\partial x} [f(x) + g(x) u] \\&= L_f^3 h(x) + L_g L_f^2 h(x) u\end{aligned}$$

Si

$$\begin{aligned}L_g L_f^2 h(x) &= 0 \\&\Downarrow \\y^{(3)} &= L_f^3 h(x)\end{aligned}$$

Generalizando: Si

$$L_g L_f^{i-1} h(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \rho - 1;$$

$$L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0$$

$\Downarrow$

$$y^{(i)} = L_f^i h(x), \quad i = 1, 2, \dots, \rho - 1;$$

$$y^{(\rho)} = L_f^\rho h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x) u$$

**Definición 1.1** *El sistema SISO*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x) u \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

tiene **grado relativo**  $\rho$ ,  $1 \leq \rho \leq n$ , en  $D_0 \subset D \subset \mathbb{R}^n$  si  $\forall x \in D_0$

$$L_g L_f^{i-1} h(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \rho - 1;$$

$$L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0$$

## Ejemplo 1.2

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon (1 - x_1^2) x_2 + u, \quad \varepsilon > 0$$

$$y = x_1$$

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2$$

$$\ddot{y} = \dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon (1 - x_1^2) x_2 + u$$

Grado relativo = 2 sobre  $\mathbb{R}^2$

## Ejemplo 1.3

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon (1 - x_1^2) x_2 + u, \quad \varepsilon > 0$$

$$y = x_2$$

$$\dot{y} = \dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon (1 - x_1^2) x_2 + u$$

Grado relativo = 1 sobre  $\mathbb{R}^2$

## Ejemplo 1.4

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon (1 - x_1^2) x_2 + u, \quad \varepsilon > 0$$

$$y = x_1 + x_2^2$$

$$\dot{y} = \dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = x_2 - 2x_1x_2 + 2\varepsilon (1 - x_1^2) x_2^2 + 2x_2u$$

Grado relativo = 1 sobre  $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \neq 0\}$

## Ejemplo 1.5 Motor de corriente directa controlado por campo

$$\dot{x}_1 = -ax_1 + u$$

$$\dot{x}_2 = -bx_2 + k - cx_1x_3$$

$$\dot{x}_3 = \theta x_1 x_2$$

$$y = x_3$$

$a, b, c, k, \theta$  son constantes positivas

$$\dot{y} = \dot{x}_3 = \theta x_1 x_2$$

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= \theta \dot{x}_1 x_2 + \theta x_1 \dot{x}_2 \\ &= [-a\theta x_1 x_2 + \theta x_1 (-bx_2 + k - cx_1 x_3)] + \theta x_2 u\end{aligned}$$

Grado relativo = 2 sobre  $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \neq 0\}$

## 1.2. Forma Normal

Para el sistema SISO

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

con **grado relativo**  $\rho$ ,  $1 \leq \rho \leq n$ , en  $D_0 \subset D \subset \mathbb{R}^n$

$$L_g L_f^{i-1} h(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \rho - 1; \quad \forall x \in D_0$$

$$L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0; \quad \forall x \in D_0$$

sea el *cambio de variables*

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_{n-\rho}(x) \\ \hline h(x) \\ \vdots \\ L_f^{\rho-1} h(x) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \phi(x) \\ \hline \psi(x) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix}$$

$\phi_1(x), \dots, \phi_{n-\rho}(x)$  son elegidos de tal forma que  $T(x)$  sea un *difeomorfismo* en un dominio  $\bar{D}_0 \subset D_0 \subset D$ .

Entonces la dinámica del sistema en las nuevas coordenadas es

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} [f(x) + g(x)u] = f_0(\eta, \xi) + g_0(\eta, \xi)u \\ \dot{\xi}_i &= \frac{\partial L_f^{i-1} h(x)}{\partial x} [f(x) + g(x)u] \\ &= L_f^i h(x) + L_g L_f^{i-1} h(x)u = \xi_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq \rho - 1 \\ \dot{\xi}_\rho &= L_f^\rho h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x)u \\ y &= \xi_1\end{aligned}$$

Elíjase  $\phi(x)$  tal que  $T(x)$  sea un *difeomorfismo* y

$$\frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} g(x) = 0, \quad 1 \leq i \leq n - \rho; \quad \forall x \in \bar{D}_0$$

**Comentario 1.6** *Esto siempre es posible, al menos localmente*

**Teorema 1.7** *Suponga que el sistema (SISO)*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

tiene **grado relativo**  $\rho$ ,  $1 \leq \rho \leq n$ , en  $D_0 \subset D \subset \mathbb{R}^n$ .

- Si  $\rho = n$  entonces, para todo  $\bar{x} \in D_0$ , existe una **vecindad**  $\mathcal{N}_{\bar{x}}$  de  $\bar{x}$  tal que el mapa  $\psi(x)$ , restringido a  $\mathcal{N}_{\bar{x}}$ , es un **difeomorfismo** en  $\mathcal{N}_{\bar{x}}$ .
- Si  $\rho < n$  entonces, para todo  $\bar{x} \in D_0$ , existen
  - una **vecindad**  $\mathcal{N}_{\bar{x}}$  de  $\bar{x}$ , y
  - funciones suaves  $\phi_1(x), \dots, \phi_{n-\rho}(x)$

tales que

$$\frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} g(x) = 0, \quad 1 \leq i \leq n - \rho; \quad \forall x \in \mathcal{N}_{\bar{x}}$$

y el mapa

$$T(x) = \begin{bmatrix} \phi(x) \\ \vdots \\ \psi(x) \end{bmatrix},$$

restringido a  $\mathcal{N}_{\bar{x}}$ , es un **difeomorfismo** en  $\mathcal{N}_{\bar{x}}$ .

En tal caso el sistema en las nuevas coordenadas queda en la **Forma Normal**

$$\text{Forma Normal: } \begin{cases} \dot{\eta} = f_0(\eta, \xi) \\ \dot{\xi}_i = \xi_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq \rho - 1 \\ \dot{\xi}_\rho = L_f^\rho h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x) u \\ y = \xi_1 \end{cases}$$

o en forma más compacta

$$\text{Forma Normal: } \begin{cases} \dot{\eta} = f_0(\eta, \xi) \\ \dot{\xi} = A_c \xi + B_c \gamma(x) [u - \alpha(x)] \\ y = C_c \xi \end{cases}$$

dónde

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$C_c = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0]$$

$$\gamma(x) = L_g L_f^{\rho-1} h(x), \quad \alpha(x) = -\frac{L_f^\rho h(x)}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)}$$

Si  $x^*$  es un *punto de equilibrio* con entrada  $u = 0$ , para el cual  $y = 0$ , es

decir,

$$f(x^*) = 0$$

$$h(x^*) = 0$$



$$\psi(x^*) = 0$$

Elija  $\phi(x)$  tal que  $\phi(x^*) = 0$  y entonces  $z = 0$  es un punto de equilibrio con entrada  $u = 0$ .

### 1.3. Dinámica Cero

Sea el sistema SISO en la forma normal

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f_0(\eta, \xi) \\ \dot{\xi} = A_c \xi + B_c \gamma(x) [u - \alpha(x)] \\ y = C_c \xi \end{cases}$$

Si la salida es *cero* durante un intervalo de tiempo  $t \in (0, T)$  entonces durante tal intervalo

$$\begin{aligned}y(t) &\equiv 0 \implies y^{(i)}(t) \equiv 0, \quad i = 1, 2, \dots \implies \xi(t) \equiv 0 \\&\implies u(t) \equiv \alpha(x(t)) \implies \dot{\eta} = f_0(\eta, 0)\end{aligned}$$

**Definición 1.8** *La ecuación*

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$$

*se denomina la **Dinámica Cero (DC)** del sistema.*

*Se dice que el sistema de Fase Mínima si la Dinámica Cero tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable en el dominio de interés (en el origen si  $T(0) = 0$ ).*

**Comentario 1.9** *La Dinámica Cero corresponde a todas las parejas de condiciones iniciales y entradas al sistema que tienen salida cero. En la*

*Forma Normal esto es especialmente simple:*

*Si*  $(\eta_0, \xi_0) = (\eta_0, 0)$  *y*  $u(t) \equiv \alpha(x(t))$ , *dónde*

$$x(t) = T^{-1} \begin{pmatrix} \eta(t) \\ 0 \end{pmatrix} y$$

$$\dot{\eta}(t) = f_0(\eta(t), 0), \quad \eta(0) = \eta_0$$

$\Downarrow$

$$y(t) \equiv 0$$

**Comentario 1.10** *En las coordenadas originales la DC puede caracterizarse de la siguiente manera*

$$Z^* = \{x \in \bar{D}_0 \mid h(x) = L_f h(x) = \dots = L_f^{\rho-1} h(x) = 0\}$$

*Entonces*

$$y(t) \equiv 0 \implies x(t) \in Z^*$$

$$\implies u(t) = u^*(x) \triangleq \alpha(x) \mid_{x \in Z^*}$$

La dinámica restringida del sistema se describe como

$$\dot{x} = f^*(x) \triangleq [f(x) + g(x)\alpha(x)]_{x \in Z^*}$$

### Ejemplo 1.11

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 + u, \quad \varepsilon > 0$$

$$y = x_2$$

$$\dot{y} = \dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 + u \implies \rho = 1$$

$$y(t) \equiv 0 \implies x_2(t) \equiv 0 \implies \dot{x}_1(t) \implies u(t) = x_1(t)$$

El sistema es de Fase No Mínima

### Ejemplo 1.12

$$\dot{x}_1 = -x_1 + \frac{2+x_3^2}{1+x_3^2}u$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = x_1x_3 + u$$

$$y = x_2$$

$$\dot{y} = \dot{x}_2 = x_3$$

$$\ddot{y} = \dot{x}_3 = x_1 x_3 + u \implies \rho = 2$$

$$\gamma(x) = L_g L_f h(x) = 1, \quad \alpha(x) = -\frac{L_f^\rho h(x)}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} = -x_1 x_3$$

$$Z^* = \{x_2 = x_3 = 0\}$$

$$u = u^*(x) = 0$$

$$\dot{x}_1 = -x_1$$

El sistema es de Fase Mínima

¿Cuál es la transformación para llevar al sistema a la Forma Normal?

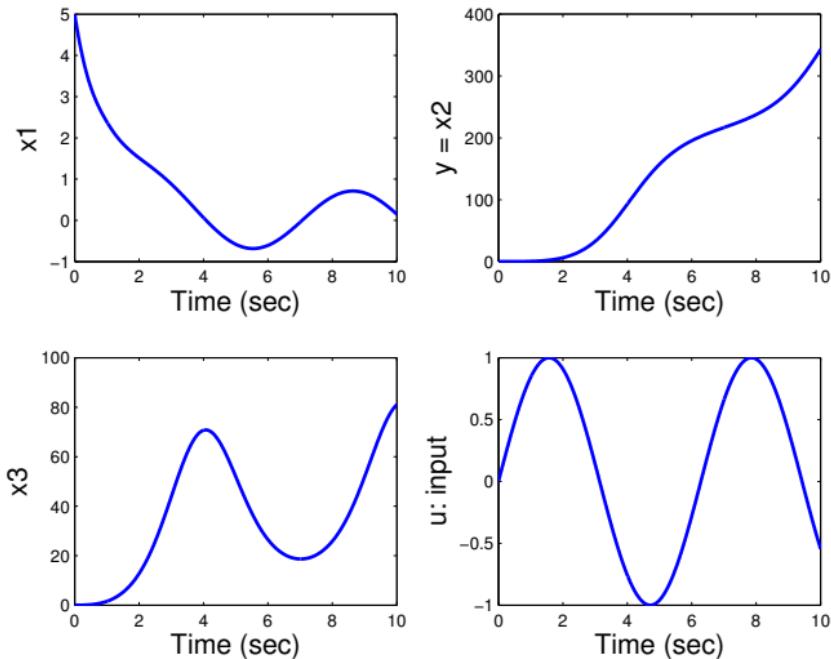


Figura 1.1: Simulación con  $u = \sin t$ ,  $x_0 = [5, 0, 0]$ . Salida  $y(t) \neq 0$ .

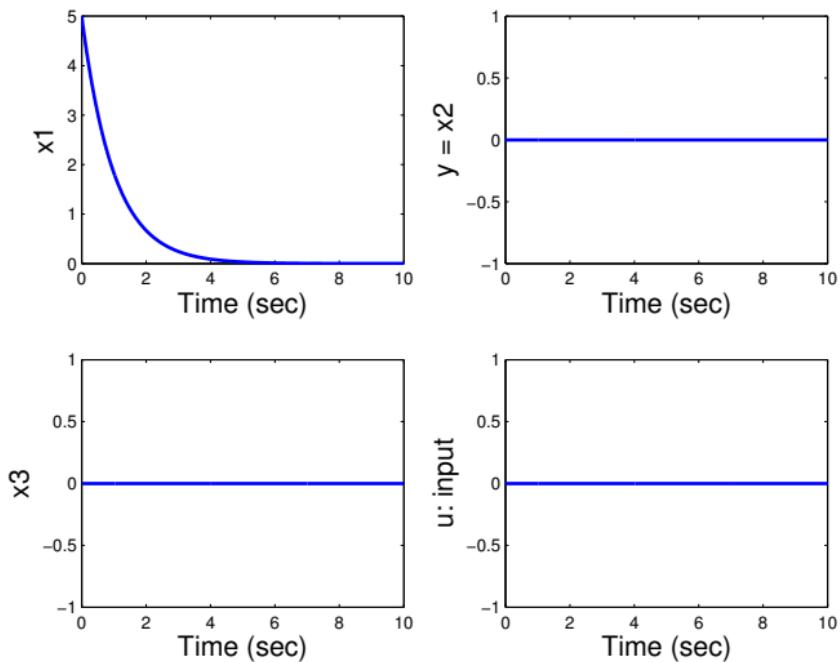


Figura 1.2: Simulación con  $u = 0$ ,  $x_0 = [5, 0, 0]$ . Salida  $y(t) = 0$ .

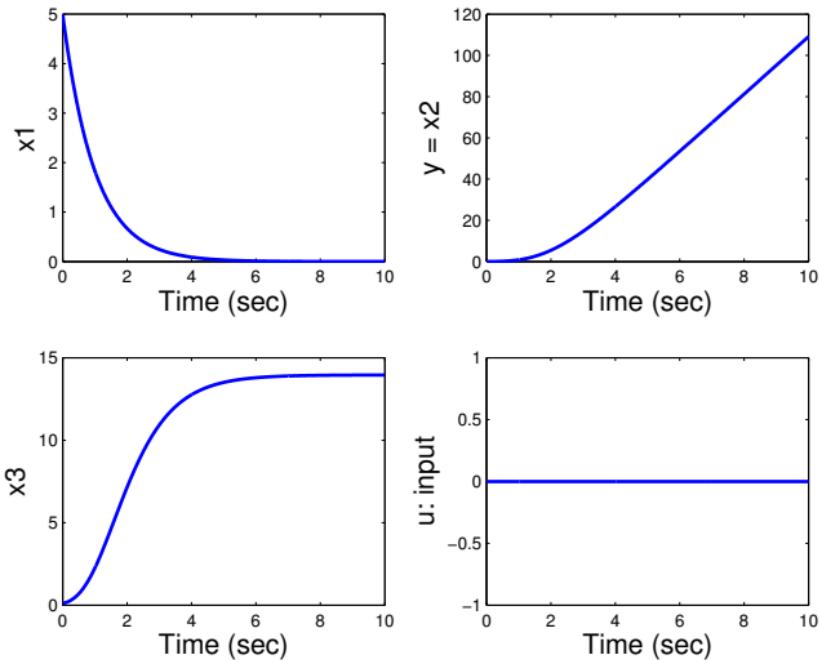


Figura 1.3: Simulación con  $u = 0$ ,  $x_0 = [5, 0.1, 0]$ . Salida  $y(t) \neq 0$ .

*Hay que hallar  $\phi(x)$  tal que*

$$\phi(0) = 0, \quad \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} g(x) = \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_3} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \frac{2+x_3^2}{1+x_3^2} \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] = 0$$

$y$

$$T(x) = \begin{bmatrix} \phi(x) \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

*sea un difeomorfismo.*

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} g(x) = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_1} \frac{2+x_3^2}{1+x_3^2} + \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_3} = 0$$

*La función*

$$\phi(x) = -x_1 + x_3 + \tan^{-1} x_3$$

satisface la EDP y  $\phi(0) = 0$ .

$$T(x) = \begin{bmatrix} \eta \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_3 + \tan^{-1} x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

$$T^{-1}(z) = \begin{bmatrix} -\eta + \xi_2 + \tan_3^{-1} \xi_2 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

es un difeomorfismo global. La Forma Normal es entonces

$$\begin{cases} \dot{\eta} = (-\eta + \xi_2 + \tan^{-1} \xi_2) \left(1 + \frac{2+\xi_2^2}{1+\xi_2^2} \xi_2\right) \\ \dot{\xi}_1 = \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = (-\eta + \xi_2 + \tan^{-1} \xi_2) \xi_2 + u \\ y = \xi_1 \end{cases}$$

## 1.4. El caso lineal SISO

Considere un sistema lineal representado por la función de transferencia

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

con  $m < n$  y  $b_m \neq 0$ . Una representación en variables de estado es

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

dónde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1},$$

$$C = [ b_0 \ b_1 \ \cdots \ \cdots \ b_m \ 0 \ \cdots \ 0 ]$$

Para calcular el grado relativo tomamos las derivadas de la salida. La primera es

$$\dot{y} = C\dot{x} = CAx + CBu .$$

Si  $m = n - 1$  entonces  $CB = b_{n-1} \neq 0$  y el grado relativo es 1. De otra manera  $CB = 0$  y continuamos tomando la segunda derivada. Nótese que  $CA$  es un vector fila obtenido moviendo los elementos de la matriz  $C$  una posición hacia la derecha, mientras que  $CA^2$  se obtiene moviendo

los elementos de  $C$  dos posiciones hacia la derecha, y así sucesivamente. De esta manera se ve que

$$CA^{i-1}B = 0 , \quad i = 1, 2, \dots, n - m - 1 , \quad CA^{n-m-1}B = b_m \neq 0 .$$

Entonces  $u$  aparece solo en la ecuación de  $y^{(n-m)}$  dada por

$$y^{(n-m)} = CA^{n-m}x + CA^{n-m-1}Bu$$

y el grado relativo del sistema es  $\rho = (n - m) = \deg D(s) - \deg N(s)$ , o sea la diferencia entre el grado del polinomio del denominador y del polinomio del numerador de  $H(s)$ .

Usando la división Euclidiana se puede escribir  $D(s)$  como

$$D(s) = Q(s)N(s) + R(s) ,$$

dónde  $Q(s)$  es el polinomio cociente y  $R(s)$  es el polinomio residuo. Se sabe además que

$$\deg Q(s) = n - m = \rho , \quad \deg R(s) < m ,$$

y el coeficiente principal de  $Q(s)$  es  $\frac{1}{b_m}$ . Entonces

$$H(s) = \frac{N(s)}{Q(s)N(s) + R(s)} = \frac{\frac{1}{Q(s)}}{1 + \frac{1}{Q(s)} \frac{R(s)}{N(s)}}$$

así que  $H(s)$  puede representarse como una conexión en retroalimentación negativa, con  $\frac{1}{Q(s)}$  en el lazo directo y  $\frac{R(s)}{N(s)}$  en el lazo de retroalimentación (Ver Figura 1.4).

La función de transferencia  $\frac{1}{Q(s)}$  de orden  $\rho$  no tiene ceros y puede ser realizada mediante el vector de estados

$$\xi = [ y, \dot{y}, \dots, y^{(\rho-1)} ]^T$$

para obtener el modelo de estados

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= (A_c + B_c \lambda^T) \xi + B_c b_m e \\ y &= C_c \xi\end{aligned}$$

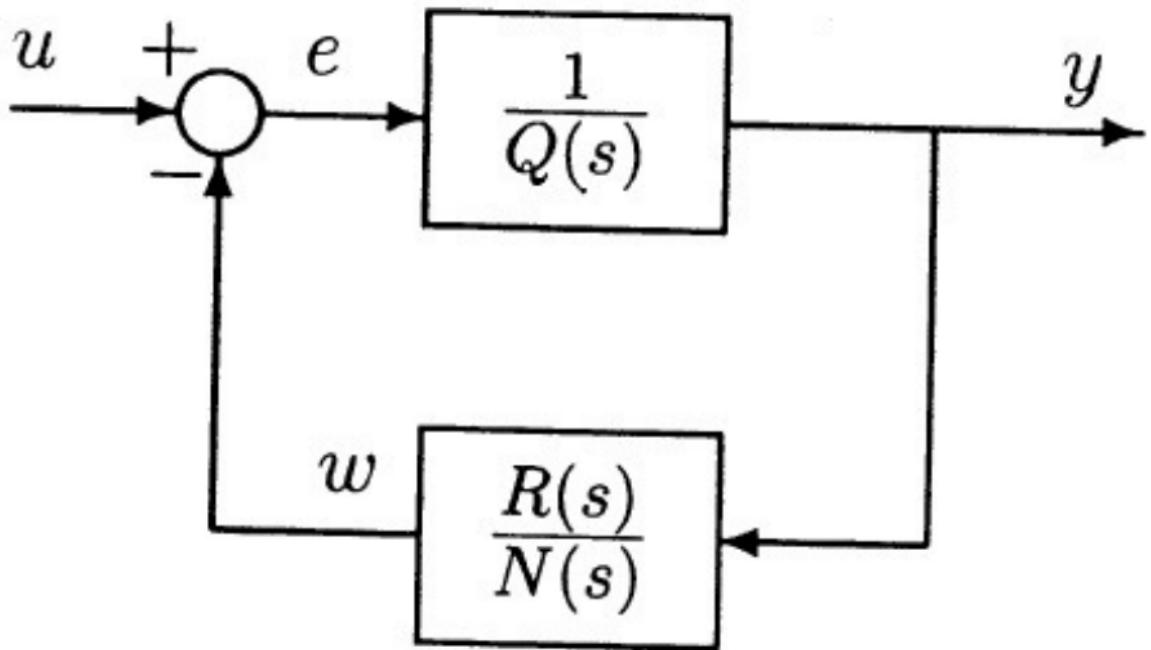


Figura 1.4: Lazo de Retroalimentación.

dónde  $(A_c, B_c, C_c)$  es una forma canónica de representar una cadena de  $\rho$  integradores, es decir,

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_c = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]$$

y  $\lambda \in \mathbb{R}^\rho$ .

Sea  $(A_0, B_0, C_0)$  una representación mínima de la función de transferencia  $\frac{R(s)}{N(s)}$ , es decir,

$$\dot{\eta} = A_0\eta + B_0y$$

$$w = C_0\eta$$

Los valores propios de la matriz  $A_0$  son los raíces del polinomio  $N(s)$ ,

que son los ceros de la función de transferencia  $H(s)$ . De la conexión en retroalimentación se ve que  $H(s)$  puede ser realizado por el modelo de estado

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= A_0\eta + B_0C_c\xi \\ \dot{\xi} &= A_c\xi + B_c(\lambda^T\xi - b_mC_0\eta + b_mu) \\ y &= C_c\xi.\end{aligned}$$

Usando la estructura especial de  $(A_c, B_c, C_c)$  se puede verificar fácilmente que

$$y^{(\rho)} = \lambda^T\xi - b_mC_0\eta + b_mu.$$

La dinámica cero (la salida se anula  $y(t) = 0$ ) consiste en utilizar las condiciones iniciales  $(\xi_0, \eta_0) = (0, \eta_0)$ , y aplicar la entrada

$$u(t) = C_0\eta(t),$$

dónde

$$\dot{\eta}(t) = A_0\eta(t), \quad \eta(0) = \eta_0.$$

# Lección 2

## Forma de Controlador

## 2.1. Forma de Controlador

**Definición 2.1** Se dice que un sistema no lineal (con múltiples entradas) está en la **Forma de Controlador** si

$$\dot{x} = Ax + B\gamma(x)[u - \alpha(x)]$$

dónde

- $(A, B)$  es controlable,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$
- $\gamma(x)$ , con  $\gamma : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{p \times p}$ , es una matriz no singular para cada  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ .

**Comentario 2.2** Nótese que un sistema que está en la Forma de Controlador se puede linealizar exactamente mediante retroalimentación de los estados:

Si se elige

$$u = \alpha(x) + \gamma^{-1}(x)v$$

dónde

$$\begin{aligned}\gamma^{-1}(x) : & \text{ Matriz Inversa de } \gamma(x) \\ v : & \text{ nueva entrada de control}\end{aligned}$$

entonces la dinámica del sistema en lazo cerrado es

$$\dot{x} = Ax + Bv$$

que es lineal en los estados y la entrada  $v$ .

**Definición 2.3** Se dice que un sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u$$

dónde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $G : D \rightarrow \mathbb{R}^{n \times p}$  son suficientemente suaves en un dominio  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , es Linealizable por Retroalimentación (o Linealizable Entrada-Estados) si existe un Difeomorfismo  $T : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tal que

- $D_z = T(D)$  contiene el origen, y

- el cambio de variables  $z = T(x)$  transforma al sistema a la Forma de Controlador.

En el caso de sistemas con una sola entrada ( $p = 1$ ) se tiene que

**Proposición 2.4** *El sistema de dimensión  $n$  y con una entrada ( $p = 1$ )*

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

*puede ser transformado a la Forma de Controlador mediante una transformación de estados  $z = T(x)$  si y solo si existe una función (de salida)  $h(x)$  tal que el sistema SISO*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

*tenga grado relativo  $\rho = n$ .*

**Prueba.**  $\Leftarrow$ : Si el sistema tiene grado relativo  $\rho = n$ , entonces se puede llevar a la Forma Normal, que en este caso se reduce a la Forma de Controlador

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= A_c \xi + B_c \gamma(\xi) [u - \alpha(\xi)] \\ y &= C_c \xi\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ : Si el sistema se puede transformar a la Forma de Controlador mediante una transformación  $z = S(x)$ , entonces

$$\dot{z} = Az + B\bar{\gamma}(z) [u - \bar{\alpha}(z)] .$$

Como  $(A, B)$  es controlable, entonces existe una matriz regular  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que

$$MAM^{-1} = A_c + B_c \lambda^T$$

$$MB = B_c$$

dónde

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto la transformación

$$\xi = Mz = MS(x) \triangleq T(x)$$

transforma al sistema a la forma

$$\dot{\xi} = A_c \xi + B_c \gamma(\xi) [u - \alpha(\xi)]$$

dónde

$$\gamma(x) = \bar{\gamma}(x), \quad \alpha(x) = \bar{\alpha}(x) - \lambda^T M \frac{S(x)}{\gamma(x)}.$$

Eligiendo

$$y = C_c \xi = \xi_1 = T_1(x) = h(x)$$

el sistema tiene Grado Relativo  $\rho = n$ . ■

## 2.2. Condiciones de existencia de $h(x)$

¿Cómo decidir si existe una función suave  $h(x)$  tal que

$$L_g L_f^{i-1} h(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad \forall x \in D_0 \quad (2.1)$$

$$L_g L_f^{n-1} h(x) \neq 0; \quad \forall x \in D_0$$

y

$$T(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix}$$

sea un difeomorfismo?

### 2.2.1. El paréntesis de Lie

**Definición 2.5** *El paréntesis de Lie de dos campos vectoriales  $f, g$  es un tercer campo vectorial definido como*

$$[f, g](x) = \frac{\partial g(x)}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x} g(x)$$

**Notación 2.6** *Para simplificar la escritura se introduce la siguiente notación*

$$\text{ad}_f^0 g(x) = g(x)$$

$$\text{ad}_f g(x) = [f, g](x)$$

$$\text{ad}_f^k g(x) = [f, \text{ad}_f^{k-1} g(x)](x), \quad k \geq 1$$

## Propiedades

- $[f, g] = -[g, f]$
- Para campos vectoriales constantes  $f, g$ ,  $[f, g] = 0$

### Ejemplo 2.7

$$f = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 - x_2 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

*Entonces*

$$\begin{aligned} \text{ad}_f g(x) &= [f, g] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 - x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ad}_f^2 g(x) &= [f, \text{ad}_f g] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 - x_2 \end{bmatrix} + \\
&\quad - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -x_1 - 2x_2 \\ x_1 + x_2 - \sin x_1 - x_1 \cos x_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

## 2.2.2. Distribuciones

**Definición 2.8** Para los campos vectoriales  $f_1, f_2, \dots, f_k$  en  $D \subset \mathbb{R}^n$  sea

$$\Delta(x) = \text{span}\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\}$$

el espacio vectorial generado por los vectores  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ . La colección de espacios vectoriales  $\Delta(x)$  para todo  $x \in D$  se denomina **Distribución** y nos referimos a ella como

$$\Delta = \text{span}\{f_1, f_2, \dots, f_k\} .$$

- Si la  $\dim(\Delta(x)) = k$  para todo  $x \in D$ , se dice que  $\Delta$  es una **distribución no singular** en  $D$ , generada por  $f_1, f_2, \dots, f_k$
- La distribución  $\Delta$  es **involutiva** si

$$g_1 \in \Delta \text{ y } g_2 \in \Delta \implies [g_1, g_2] \in \Delta$$

**Lema 2.9** Si  $\Delta$  es una **distribución no singular** en  $D$ , generada por  $f_1, f_2, \dots, f_k$  entonces es involutiva si y sólo si

$$[f_i, f_j] \in \Delta, \forall 1 \leq i, j \leq k$$

**Ejemplo 2.10**  $D = \mathbb{R}^3$ ;  $\Delta = \text{span}\{f_1, f_2\}$

$$f_1 = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\dim(\Delta(x)) = 2, \forall x \in D$$

$$[f_1, f_2] = \frac{\partial f_2}{\partial x} f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial x} f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank} [f_1(x), f_2(x), [f_1, f_2](x)] = \text{rank} \begin{bmatrix} 2x_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 1 \end{bmatrix} = 3, \forall x \in D$$

$\Delta$  no es involutiva

**Ejemplo 2.11**  $D = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_3^2 \neq 0\}; \Delta = \text{span} \{f_1, f_2\}$

$$f_1 = \begin{bmatrix} 2x_3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, f_2 = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -2x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\dim(\Delta(x)) = 2, \forall x \in D$$

$$[f_1, f_2] = \frac{\partial f_2}{\partial x} f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial x} f_2 = \begin{bmatrix} -4x_3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank} [f_1(x) \ , \ f_2(x) \ , \ [f_1 \ , \ f_2](x)] = \text{rank} \begin{bmatrix} 2x_3 & -x_1 & -4x_3 \\ -1 & -2x_2 & 2 \\ 0 & x_3 & 0 \end{bmatrix} = 2, \forall x \in$$

$\Delta$  es involutiva

**Teorema 2.12** El sistema de dimensión  $n$  con una sola entrada (SI)

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

es transformable a la Forma de Controlador si y solo si existe un dominio  $D_0$  tal que

1.  $\text{rank} [g(x) \ , \ \text{ad}_f g(x) \ , \ \dots \ , \ \text{ad}_f^{n-1} g(x)] = n, \forall x \in D_0$ , y
2.  $\text{span} \{g(x) \ , \ \text{ad}_f g(x) \ , \ \dots \ , \ \text{ad}_f^{n-2} g(x)\}$  es involutiva en  $D_0$

**Ejemplo 2.13**

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a \sin x_2 \\ -x_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\text{ad}_f g(x) = [f, g] = -\frac{\partial f}{\partial x}g = \begin{bmatrix} -a \cos x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nótese que el procedimiento para encontrar difeomorfismo de estados que transforme al sistema a su forma de controlador consiste en los siguientes pasos:

- \* A partir de  $f$  y  $g$  construir los campos vectoriales

$$\text{ad}_f g(x), \dots, \text{ad}_f^{n-2} g(x), \text{ad}_f^{n-1} g(x)$$

y verificar las condiciones (i) y (ii) del teorema.

- \* Si ambas condiciones son satisfechas, halle  $h(x)$  resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales parciales (2.1).
- \* Defina

$$\alpha(x) = -\frac{L_f^n h(x)}{L_g L_f^{n-1} h(x)}, \quad \gamma(x) = L_g L_f h(x).$$

- \* Halle la transformación

$$T(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix} .$$

**Ejemplo 2.14** Considera el sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_3(1+x_2) \\ x_1 \\ x_2(1+x_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1+x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{aligned}
\text{ad}_f g(x) &= [f, g] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3(1+x_2) \\ x_1 \\ x_2(1+x_1) \end{bmatrix} \\
&- \begin{bmatrix} 0 & x_3 & (1+x_2) \\ 1 & 0 & 0 \\ x_2 & (1+x_1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1+x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ -(1+2x_2)(1+x_1) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ad}_f^2 g(x) &= [f, \text{ad}_f g(x)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -(1+2x_2) & -2(1+x_1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3(1+x_2) \\ x_1 \\ x_2(1+x_1) \end{bmatrix} \\
&\quad - \begin{bmatrix} 0 & x_3 & (1+x_2) \\ 1 & 0 & 0 \\ x_2 & (1+x_1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ -(1+2x_2)(1+x_1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -x_1x_3 + (1+2x_2)(1+x_2)(1+x_1) \\ x_3(1+x_2) \\ -(1+2x_2)(1+x_2)x_3 - 3(1+x_1)x_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

En  $x = 0$  la matriz

$$[g(x), \text{ad}_f g(x), \text{ad}_f^2 g(x)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

tiene rango 3 y por lo tanto condición (i) es satisfecha. Nótese que

$$\begin{aligned}
 [g, \operatorname{ad}_f g(x)] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -(1+2x_2) & -2(1+x_1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1+x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix} \\
 &\quad - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ -(1+2x_2)(1+x_1) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1 \\ -(3+4x_2)(1+x_1) \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Como el rango de la matriz

$$\begin{aligned} & [g(x) , \operatorname{ad}_f g(x) , [g , \operatorname{ad}_f g(x)]] = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1+x_2 & x_1 & -x_1 \\ -x_3 & -(1+2x_2)(1+x_1) & -(3+4x_2)(1+x_1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

tiene rango 2 (para puntos cercanos a  $x = 0$ ), la distribución

$$\operatorname{span} \{g(x) , \operatorname{ad}_f g(x)\}$$

es involutiva, con lo que la condición (ii) también es satisfecha. En este caso es fácil ver que una función que satisface la ecuación

$$dh(x) [g(x) , \operatorname{ad}_f g(x)] = 0$$

es

$$h(x) = x_1 .$$

Así que la transformación está dada por

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ L_f^2 h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3(1+x_2) \\ x_1x_3 + (1+x_1)(1+x_2)x_2 \end{bmatrix}.$$

## 2.3. Tres consecuencias del teorema de linearización

Tres consecuencias importantes del anterior teorema serán presentadas [33, Sección 2.2][24]

### 2.3.1. Sistemas en el plano

**Corolario 2.15** *Un sistema no lineal en el plano ( $n = 2$ ) con una sola entrada*

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

*es Linealizable localmente por Retroalimentación (es localmente transformable a la Forma de Controlador) en una vecindad del origen si y solo si su aproximación lineal (linealización) en el origen*

$$\dot{x} = \frac{\partial f(0)}{\partial x}x + g(0)u \triangleq Ax + bu$$

*es controlable.*

### 2.3.2. Sistemas de dimensión $n > 2$

La controlabilidad de la linearización para sistemas de orden  $n \geq 3$  es una condición *necesaria* pero *no suficiente* de Linealizabilidad por

Retroalimentación:

**Corolario 2.16** *Si el sistema no lineal con una sola entrada*

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

*es Linealizable localmente por Retroalimentación (es localmente transformable a la Forma de Controlador) en una vecindad del origen entonces su aproximación lineal (linealización) en el origen*

$$\dot{x} = \frac{\partial f(0)}{\partial x}x + g(0)u \triangleq Ax + bu$$

*es controlable, es decir,*

$$\text{rango } [b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b] = n.$$

**Ejercicio 2.17** *Pruebe el corolario.*

### 2.3.3. Sistemas en forma Triangular

**Corolario 2.18** *El sistema en Forma Triangular*

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= \phi_i(x_1, \dots, x_i) + x_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{x}_n &= \phi_n(x_1, \dots, x_n) + u,\end{aligned}$$

en el cual  $\phi_1, \dots, \phi_n$  son funciones suaves tales que  $\phi_i(0) = 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ , es Linealizable localmente por Retroalimentación.

**Prueba.** Veremos dos pruebas: una verificando directamente las condiciones del teorema y la otra dando una transformación explícita. ■

**Comentario 2.19** Una Forma Triangular más general está dada por

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= \phi_i(x_1, \dots, x_{i+1}), \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{x}_n &= \phi_n(x_1, \dots, x_n) + \beta(x_1, \dots, x_n)u,\end{aligned}$$

con  $\phi_1, \dots, \phi_n$  y  $\beta$  funciones suaves tales que  $\phi_i(0) = 0$ ,  $1 \leq i \leq n$  ,  
 $\beta(0) \neq 0$  , y

$$\frac{\partial \phi_i(0)}{\partial x_{i+1}} \neq 0 \text{ , } 1 \leq i \leq n-1 .$$

*Este sistema es también Linealizable localmente por Retroalimentación.*

**Comentario 2.20** Cuando el control  $u$  entra en forma no lineal en las ecuaciones de estado

$$\dot{x} = f(x, u) \text{ , } f(0, u) = 0 \text{ , } \forall u \in \mathbb{R}$$

el problema de Linealización por Retroalimentación puede ser formulado para el sistema extendido

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ \dot{u} &= w ,\end{aligned}$$

*en el cual  $w$  es el nuevo control y  $(x, u)$  es el estado extendido. Si las condiciones del teorema de linealización se satisfacen para el sistema extendido, entonces el control resultante*

$$\dot{u} = w = \alpha(x, u) + \beta(x, u)v, \quad u(0) = u_0$$

*es un control dinámico linealizante para el sistema original.*

# Algunas Herramientas Geométricas

## 2.4. Objetos importantes

Sea  $U$  un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Algunos objetos geométricos importantes son los siguientes:

### 2.4.1. Funciones (campos) escalares

$h : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , asignan a cada *punto* en  $U$  un escalar (número real), y son *suaves*, es decir, tienen derivadas parciales de cualquier orden, o *analíticas*.

## 2.4.2. Funciones o mapas vectoriales

$F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m > 1$ , asignan a cada punto en  $U$  un punto en  $\mathbb{R}^m$ .

$$F(x) = \begin{bmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_m(x) \end{bmatrix}.$$

La utilidad mayor de los mapas vectoriales será como *transformaciones de coordenadas*: sea

$$z = \Phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix}, \quad \Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

con las siguientes propiedades:

1.  $\Phi(x)$  es invertible, es decir, existe una función  $\Phi^{-1}(z)$  tal que

$$\Phi^{-1}(\Phi(x)) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

2.  $\Phi(x)$  y  $\Phi^{-1}(z)$  son ambos mapeos suaves, es decir, que tienen derivadas parciales de cualquier orden.

Un mapeo de este tipo se denomina *Difeomorfismo Global* en  $\mathbb{R}^n$ . Si las propiedades solo se satisfacen en una vecindad de un punto, entonces el mapeo se denomina un *difeomorfismo local*.

### 2.4.3. Campos vectoriales

$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , asignan a cada *punto* en  $U$  un vector en  $\mathbb{R}^n$ . Es útil identificar a los campos vectoriales con vectores columna ( $n \times 1$ )

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix},$$

dónde cada una de las componentes  $f_i(x)$  es una función escalar. El campo vectorial es suave si cada una de las funciones componentes lo es.

### 2.4.4. Campos Covectoriales

$\omega : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , asignan a cada *punto* en  $U$  un covector en  $(\mathbb{R}^n)^*$ , el *espacio dual* de  $\mathbb{R}^n$ .

Estos son objetos *duales* a los campos vectoriales. Recuerde que el espacio dual  $V^*$  de un *espacio vectorial*  $V$  es el espacio de todas las *funciones escalares lineales* definidas en  $V$ . Este espacio dual de un espacio vectorial de dimensión  $n$  es también un espacio vectorial de dimensión  $n$ , y sus elementos se denominan *covectores*. Como cualquier mapa lineal, estos covectores pueden ser representados por *matrices*. Como un covector  $w^* \in V^*$  asigna a cada covector del espacio de dimensión  $n$  un escalar, la matriz que lo representa es un vector. Es útil identificar  $(\mathbb{R}^n)^*$  con el conjunto de los vectores fila  $(1 \times n)$  y describir cualquier subespacio de  $(\mathbb{R}^n)^*$  como la colección de todas las combinaciones lineales de algún conjunto de vectores fila. Por ejemplo, las filas de alguna matriz con  $n$  columnas.

Nótese que si

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

es el vector columna que representa a un elemento de  $V$  y si

$$w^* = [ w_1 \ w_2 \ \cdots \ w_n ]$$

es el vector fila que representa a un elemento de  $V^*$ , entonces el "valor" de  $w^*$  evaluado en  $v$  está dado por el producto

$$w^*v = \sum_{i=1}^n w_i v_i .$$

Usualmente esto se representa como un *producto interior*  $\langle w^*, v \rangle$  en vez del producto  $w^*v$ .

Entonces un *campo covectorial* se representa usualmente como

$$\omega(x) = [\omega_1(x) \ \ \omega_2(x) \ \ \cdots \ \ \omega_n(x)]$$

donde cada  $\omega_i(x)$  es una *función escalar* suave.

## 2.5. Operaciones diferenciales

Existen diversas operaciones diferenciales de los objetos definidos anteriormente. Veremos algunos de ellos.

## 2.5.1. Matriz Jacobiana de un mapeo vectorial

La derivada de un mapa vectorial  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m > 1$  es en cada punto  $x$  la matriz Jacobiana

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_m(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

El valor de  $\frac{\partial F}{\partial x}$  en un punto  $x = x^0$  se denota a veces como  $\left[ \frac{\partial F}{\partial x} \right]_{x^0}$ .

## 2.5.2. Diferencial o gradiente de una función escalar

Dada una función escalar (suave)  $\lambda : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  su *diferencial* (o *gradiente*)  $d\lambda$  es un *campo covectorial*

$$d\lambda(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x} \quad (2.2)$$

que equivale a la *Matriz Jacobiana* de  $\lambda$ .

### 2.5.2.1. Diferencial exacta

Todo *campo covectorial* que tenga la forma de (2.2), es decir, que sea la diferencial de una función escalar, se denomina *diferencial exacta*.

## 2.5.3. Derivada de Lie

Involucra una *función escalar*  $\lambda(x)$  y un *campo vectorial*  $f(x)$ , ambos definidos en  $U \subset \mathbb{R}^n$ , y genera una nueva *función escalar*  $L_f \lambda : U \subset$

$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , denominada *la derivada de  $\lambda$  a lo largo de  $f$*  y cuyo valor es

$$L_f \lambda(x) = \langle d\lambda(x), f(x) \rangle = \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x} f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x_i} f_i(x) .$$

El uso repetido de esta operación es posible

$$\begin{aligned} L_g L_f \lambda(x) &= \frac{\partial (L_f \lambda(x))}{\partial x} g(x) \\ L_f^k \lambda(x) &= \frac{\partial (L_f^{k-1} \lambda(x))}{\partial x} f(x) \\ L_f^0 \lambda(x) &= \lambda(x) . \end{aligned}$$

## 2.5.4. Paréntesis (o producto) de Lie

Involucra dos campos vectoriales  $f$  y  $g$  y se genera un nuevo campo vectorial denotado  $[f, g] : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y definido como

$$[f, g](x) = \frac{\partial g(x)}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x} g(x) ,$$

dónde

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

y  $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$  son las matrices Jacobianas de los mapas  $f$  y  $g$ .

El uso repetido de esta operación es posible. Si se aplica repetidamente con respecto a un mismo campo vectorial, para evitar una notación

de la forma  $[f, [f, [f, \cdots [f, g]]]]$  y simplificar la escritura se introduce la siguiente notación

$$\text{ad}_f^0 g(x) = g(x)$$

$$\text{ad}_f g(x) = [f, g](x)$$

$$\text{ad}_f^k g(x) = [f, \text{ad}_f^{k-1} g(x)](x), k \geq 1$$

El producto de Lie está caracterizado por propiedades básicas (hacer las pruebas).

**Proposición 2.21** *El producto de Lie de los campos vectoriales tiene las siguientes propiedades:*

1. *Es bilineal sobre  $\mathbb{R}$ , es decir, si  $f_1, f_2, g_1, g_2$  son campos vectoriales y  $r_1, r_2$  son números reales, entonces*

$$[r_1 f_1 + r_2 f_2, g_1] = r_1 [f_1, g_1] + r_2 [f_2, g_1]$$

$$[f_1, r_1 g_1 + r_2 g_2] = r_1 [f_1, g_1] + r_2 [f_1, g_2].$$

2. Es anticomutativa, es decir,

$$[f, g] = -[g, f] .$$

3. Satisface la identidad de Jacobi, es decir,

$$[f, [g, p]] + [g, [p, f]] + [p, [f, g]] = 0 .$$

**Ejemplo 2.22** Para campos vectoriales constantes  $f, g$ ,  $[f, g] = 0$

**Ejemplo 2.23**

$$f = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 - x_2 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \text{ad}_f g(x) &= [f, g] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 - x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ad}_f^2 g(x) &= [f, \text{ad}_f g] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 - x_2 \end{bmatrix} + \\
&\quad - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -x_1 - 2x_2 \\ x_1 + x_2 - \sin x_1 - x_1 \cos x_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

#### 2.5.4.1. Interpretación del paréntesis de Lie

El paréntesis de Lie tiene varias interpretaciones que clarifican (y explican) la definición. Daremos una de ellas que tiene que ver con su relación con la solución de las ecuaciones diferenciales (los *flujos*) correspondientes.

Sean dos campos vectoriales (suaves)  $f, g : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Cada uno de ellos tiene asociado un flujo, correspondiente a la solución de la

ecuación diferencial correspondiente:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t)), \quad x(0) = x_0 \rightarrow x(t) = \phi_f(t, x_0) = \phi_{f,t}(x_0) = e^{tf}x_0 \\ \dot{x}(t) &= g(x(t)), \quad x(0) = x_0 \rightarrow x(t) = \phi_g(t, x_0) = \phi_{g,t}(x_0) = e^{tg}x_0\end{aligned}$$

Nótese que hemos usado tres diferentes notaciones (y equivalentes) del flujo. La última de ellas  $e^{tf}x_0$  es más conveniente cuando se hacen composiciones de los flujos correspondientes a diferentes campos vectoriales. Por ejemplo,

$$e^{t_2 f} e^{t_1 g} x = \phi_f(t_2, \phi_g(t_1, x))$$

corresponde a iniciar en el punto  $x$  y moverse inicialmente a lo largo del flujo de  $g$  durante  $t_1$  segundos (unidades de tiempo) y luego moverse a lo largo del flujo de  $f$  durante  $t_2$  segundos. La notación de la izquierda es más conveniente en este caso. Nótese que, además, si el campo vectorial es lineal, es decir,  $\dot{x} = Ax$  y  $A$  es una matriz, entonces el flujo correspondiente es  $e^{tA}x_0$ , dónde  $e^{tA}$  es la matriz exponencial de  $A$ . Sin embargo, en el caso general  $e^{tf}$  no es más que una convención de notación útil.

**Lema 2.24** *Supóngase que  $f, g : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  son dos campos vectoriales (suaves) y que  $x_0 \in X$ . Entonces*

$$\begin{aligned}[f, g](x_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \{ [\phi_{g, -t} \circ \phi_{f, -t} \circ \phi_{g, t} \circ \phi_{f, t}](x_0) - x_0 \} \quad (2.3) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \{ e^{-tg} e^{-tf} e^{tg} e^{tf} x_0 - x_0 \}.\end{aligned}$$

Supónga que partimos del punto  $x_0$  y seguimos la *curva integral* (*solución, flujo*) del campo vectorial  $f$  durante un tiempo muy corto  $t$ , luego, desde ese punto seguimos el flujo de  $g$  durante un tiempo  $t$ , luego seguimos el flujo de  $f$  *hacia atrás en el tiempo* durante un tiempo  $t$ , y finalmente seguimos el flujo de  $g$  *hacia atrás en el tiempo* durante un tiempo  $t$ . ¿Dónde terminamos?

En una aproximación de primer orden en  $t$  regresaremos al punto  $x_0$ . Sin embargo, en una aproximación de *segundo orden en t*, llegaremos al punto

$$x_0 + t^2 [f, g](x_0).$$

Esto es simplemente lo que afirma el lema.

Nótese que el mapa  $\phi_{f,-t}$  es el inverso del mapa  $\phi_{f,t}$  ( $e^{-tf}$  es el inverso de  $e^{tf}$ ), y de forma similar  $\phi_{g,-t}$  es el inverso del mapa  $\phi_{g,t}$  ( $e^{-tg}$  es el inverso de  $e^{tg}$ ). Por lo tanto si los mapas  $\phi_{f,t}$  y  $\phi_{g,t}$  *conmutan* (es decir,  $\phi_{g,t} \circ \phi_{f,t} = \phi_{f,t} \circ \phi_{g,t}$  o equivalentemente  $e^{tg}e^{tf} = e^{tf}e^{tg}$  para todo tiempo  $t$  suficientemente pequeño), entonces el límite en (2.3) es cero.

Por lo tanto se puede pensar en el paréntesis de Lie  $[f, g]$  como una medida de hasta qué punto los mapas de solución  $\phi_{f,t}$  y  $\phi_{g,t}$  no conmutan.

### Prueba.

Para seguir la prueba sígase la figura Para poder calcular el límite en (2.3) es necesario calcular todas las cantidades hasta el segundo orden en  $t$ .

Por definición

$$\frac{d}{dt} [\phi_{f,t}(x_0)] = f(\phi_{f,t}(x_0)) . \quad (2.4)$$

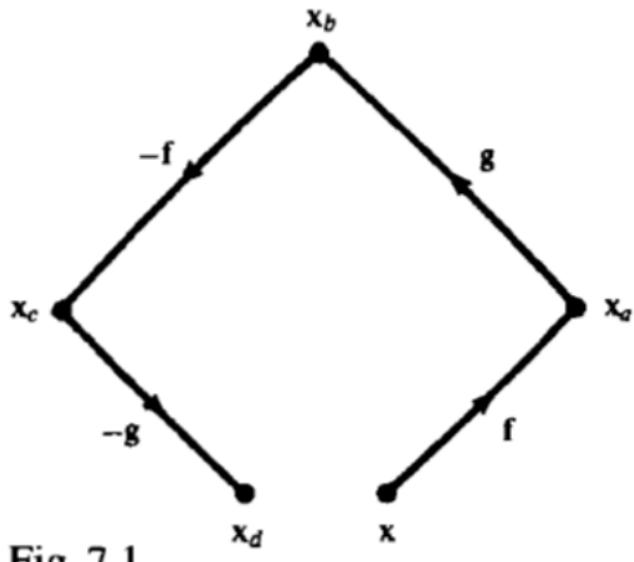


Fig. 7.1

Figura 2.1: Seguimiento de los flujos de  $f$  y  $g$ .

Por lo tanto

$$\frac{d}{dt} [\phi_{f,t}(x_0)]_{t=0} = f(\phi_{f,0}(x_0)) = f(x_0) .$$

Además (2.4) implica que

$$\frac{d^2}{dt^2} [\phi_{f,t}(x_0)]_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x} f(x_0) .$$

Ahora por la serie de Taylor

$$x_a = x_0 + t f(x_0) + \frac{t^2}{2} \frac{\partial f}{\partial x} f(x_0) + o(t^2) . \quad (2.5)$$

Después, análogamente

$$x_b = x_a + t g(x_a) + \frac{t^2}{2} \frac{\partial g}{\partial x} g(x_a) + o(t^2) .$$

Ahora debemos sustituir  $x_a$  de (2.5) y simplificar la expresión despreciando todos los términos que sean de orden mayor a  $t^2$ . Por lo tanto sólo es necesario estimar  $g(x_a)$  hasta el primer orden en  $t$  ya que está multiplicado por  $t$ . También es seguro reemplazar a  $\left[\frac{\partial g}{\partial x}\right](x_a)g(x_a)$  por  $\left[\frac{\partial g}{\partial x}\right](x_0)g(x_0)$  ya que este término está multiplicado por  $\frac{t^2}{2}$ . Ya que

$$\begin{aligned} g(x_a) &= g \left\{ x_0 + tf(x_0) + \frac{t^2}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) + o(t^2) \right\} \\ &= g(x_0) + t \frac{\partial g}{\partial x}(x_0) f(x_0) + o(t) \end{aligned}$$

se sigue que

$$\begin{aligned}
 x_b &= \left[ x_0 + t f(x_0) + \frac{t^2}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) f(x_0) \right] + t \left[ g(x_0) + t \frac{\partial g}{\partial x}(x_0) f(x_0) \right] \\
 &\quad + \frac{t^2}{2} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0) g(x_0) + o(t^2) \\
 &= x_0 + t [f(x_0) + g(x_0)] + \\
 &\quad + t^2 \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) f(x_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0) f(x_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0) g(x_0) \right] + o(t^2).
 \end{aligned}$$

El proceso se repite, y los resultados son los siguientes

$$\begin{aligned}
 x_c &= x_b - t f(x_b) + \frac{t^2}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(x_b) f(x_b) + o(t^2) \\
 &= x_0 + t g(x_0) + \\
 &\quad + t^2 \left[ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0) f(x_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0) g(x_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) g(x_0) \right] + o(t^2),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_d &= x_c - t g(x_c) + \frac{t^2}{2} \frac{\partial g}{\partial x}(x_c) g(x_c) + o(t^2) \\
&= x_0 + t^2 \left[ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0) f(x_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) g(x_0) \right] + o(t^2).
\end{aligned}$$

Esto completa la prueba.

■

El siguiente lema muestra la relación entre la conmutatividad de los flujos (mapas de solución) de los campos vectoriales y su paréntesis de Lie.

**Lema 2.25** *Supóngase que  $f, g : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  son dos campos vectoriales (suaves). Entonces*

$$\begin{aligned}
[f, g] = 0 &\iff \phi_{f,t} \circ \phi_{g,\tau} = \phi_{g,\tau} \circ \phi_{f,t} \tag{2.6} \\
&\iff e^{tf} e^{\tau g} = e^{\tau g} e^{tf} \quad \forall t, \tau \text{ suficientemente pequeños}.
\end{aligned}$$

## 2.5.5. Derivada de Lie de un covector

Involucra un campo covectorial  $\omega$  y un campo vectorial  $f$  y se genera un nuevo campo covectorial denotado  $L_f\omega : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$  y definido como

$$L_f\omega(x) = f^T(x) \left( \frac{\partial \omega^T(x)}{\partial x} \right)^T + \omega(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x},$$

y se denomina la derivada de Lie de  $\omega$  a lo largo de  $f$ .

Algunas propiedades útiles de estas tres operaciones son las siguientes (hacer las pruebas):

**Proposición 2.26** *Las operaciones diferenciales introducidas son tales que:*

1. *Si  $\alpha, \lambda$  son funciones escalares y  $f$  es un campo vectorial, entonces*

$$L_{\alpha f}\lambda(x) = \alpha(x)(L_f\lambda(x)).$$

2. Si  $\alpha, \beta$  son funciones escalares y  $f, g$  son campos vectoriales, entonces

$$[\alpha f, \beta g] = \alpha(x) \beta(x) [f, g](x) + \alpha(x) (L_f \beta(x)) g(x) - (L_g \alpha(x)) \beta(x) f(x)$$

3. Si  $\lambda$  es una función escalar y  $f, g$  son campos vectoriales, entonces

$$L_{[f,g]} \lambda(x) = L_f L_g \lambda(x) - L_g L_f \lambda(x) .$$

4. Si  $\alpha, \beta$  son funciones escalares,  $f$  es un campo vectorial y  $\omega$  es un campo covectorial, entonces

$$\begin{aligned} L_{\alpha f} \beta \omega(x) &= \alpha(x) \beta(x) L_f \omega(x) + \beta(x) \langle \omega(x), f(x) \rangle d\alpha(x) + \\ &\quad (L_f \beta(x)) \alpha(x) \omega(x) . \end{aligned}$$

5. Si  $\lambda$  es una función escalar y  $f$  es un campo vectorial, entonces

$$L_f d\lambda(x) = dL_f \lambda(x) .$$

6. Si  $f, g$  son campos vectoriales y  $\omega$  es un campo covectorial, entonces

$$L_f \langle \omega, g \rangle (x) = \langle L_f \omega (x), g(x) \rangle + \langle \omega (x), [f, g] (x) \rangle .$$

**Ejercicio 2.27** Probaremos que 3 es válida.

$$L_{[f,g]} \lambda (x) = \frac{\partial \lambda (x)}{\partial x} \left( \frac{\partial g (x)}{\partial x} f (x) - \frac{\partial f (x)}{\partial x} g (x) \right)$$

## 2.6. Propiedades de mapeos vectoriales (Transformaciones)

Los siguientes resultados son importantes para establecer propiedades de mapeos vectoriales. En realidad todos son equivalentes entre si.

**Teorema 2.28 Teorema de la función inversa.** Sea  $A$  un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  un mapa  $C^\infty$  (infinitamente diferenciable). Si  $\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{x^0}$  es no singular en algún  $x^0 \in A$  entonces existe una vecindad abierta  $U$  de  $x^0$  contenida en  $A$  tal que  $V = F(U)$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$  y la restricción de  $F$  a  $U$  es un difeomorfismo sobre  $V$ .

**Teorema 2.29 Teorema del rango.** Sean  $A \subset \mathbb{R}^n$  y  $B \subset \mathbb{R}^m$  conjuntos abiertos,  $F : A \rightarrow B$  un mapa  $C^\infty$  (infinitamente diferenciable). Supóngase que  $\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_x$  tiene rango  $k$  para todo  $x \in A$ . Para cada punto  $x^0 \in A$  existe una vecindad  $A_0$  de  $x^0$  en  $A$  y una vecindad  $B_0$  de  $F(x^0)$  en  $B$ , dos conjuntos abiertos  $U \subset \mathbb{R}^n$  y  $V \subset \mathbb{R}^m$  y dos difeomorfismos  $G : U \rightarrow A_0$  y  $H : B_0 \rightarrow V$  tales que  $H \circ F \circ G(U) \subset V$  y tales que para todo  $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$

$$H \circ F \circ G(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) .$$

**Comentario 2.30** Denote como  $P_k$  al mapeo  $P_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definido

por

$$P_k(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) .$$

Entonces, ya que  $G$  y  $H$  son invertibles, la expresión anterior se puede reescribir como

$$F = H^{-1} \circ P_k \circ G^{-1}$$

que es válida en todos los puntos de  $A_0$ .

**Teorema 2.31 Teorema de la función implícita.** Sean  $A \subset \mathbb{R}^m$  y  $B \subset \mathbb{R}^n$  conjuntos abiertos,  $F : A \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$  un mapa  $C^\infty$  (infinitamente diferenciable). Sea

$$(x, y) = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$$

un punto de  $A \times B$ . Supóngase que para algún  $(x^0, y^0) \in A \times B$

$$F(x^0, y^0) = 0$$

y la matriz

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{bmatrix}$$

es no singular en  $(x^0, y^0)$ . Entonces existen vecindades abiertas  $A_0$  de  $x^0$  en  $A$  y  $B_0$  de  $y^0$  en  $B$  y un único mapeo  $G : A_0 \rightarrow B_0$ ,  $C^\infty$ , tales que

$$F(x, G(x)) = 0$$

para todo  $x \in A_0$ .

**Comentario 2.32** Como una aplicación del teorema de la función implícita, considérese el siguiente corolario. Sea  $A$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^n$ , sean  $M$  una matriz  $k \times n$  cuyos elementos son funciones escalares (reales) suaves ( $C^\infty$ ) definidas en  $A$ , y  $b$  un vector de dimensión  $k$  cuyos elementos son también funciones escalares suaves definidas en  $A$ .

Supóngase que para algún  $x^0 \in A$

$$\text{rango } M(x^0) = k.$$

Entonces existe una vecindad abierta  $U$  de  $x^0$  y un mapeo suave  $G : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  tales que

$$M(x)G(x) = b(x)$$

para todo  $x \in U$ . En otras palabras, la ecuación

$$M(x)y = b(x)$$

tiene al menos una solución que es una función suave ( $C^\infty$ ) en  $x$  en una vecindad de  $x^0$ . Si  $k = n$  esta solución es única.

**Comentario 2.33** El teorema de la función inversa puede ser utilizado para determinar si un mapeo suave  $\Phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un difeomorfismo local: si la matriz Jacobiana de  $\Phi$  es no singular en un punto  $x = x^0 \in U$  entonces existe un subconjunto abierto  $U^0$  de  $U$ , que contiene a  $x^0$ , tal que  $\Phi(x)$  define un difeomorfismo local.

**Ejemplo 2.34** Considere la función

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \Phi(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ \sin x_2 \end{bmatrix}$$

que está definida para todo  $(x_1, x_2)$  en  $\mathbb{R}^2$ . La matriz Jacobiana

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \cos x_2 \end{bmatrix}$$

tiene rango 2 en  $x^0 = (0, 0)$ . En el subconjunto

$$U^0 = \{(x_1, x_2) : |x_2| < \pi/2\}$$

esta función define un difeomorfismo. Nótese que en un conjunto más grande el mapeo no define un difeomorfismo ya que se pierde la propiedad de invertibilidad. Ya que para cualquier número  $x_2$  tal que  $|x_2| > \pi/2$  existe  $x'_2$  tal que  $|x'_2| < \pi/2$  y  $\sin x_2 = \sin x'_2$ . Cualquier pareja  $(x_1, x_2)$ ,  $(x'_1, x'_2)$  tales que  $x_1 + x_2 = x'_1 + x'_2$  produce  $\Phi(x_1, x_2) = \Phi(x'_1, x'_2)$ , y por lo tanto el mapeo no es inyectivo.

**Ejemplo 2.35** Considere la función

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \Phi(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - \frac{1}{x_1+1} \end{bmatrix}$$

definida en el conjunto

$$U^0 = \{(x_1, x_2) : x_1 > -1\} .$$

Esta función es un difeomorfismo (sobre su imagen), ya que  $\Phi(x_1, x_2) = \Phi(x'_1, x'_2)$  implica que necesariamente  $x_1 = x'_1$  y  $x_2 = x'_2$ . Sin embargo, esta función no está definida en toda  $\mathbb{R}^2$ .

## 2.7. Distribuciones

**Definición 2.36** Para los campos vectoriales  $f_1, f_2, \dots, f_k$  en  $D \subset \mathbb{R}^n$  sea

$$\Delta(x) = \text{span}\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\}$$

el espacio vectorial generado por los vectores  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ . La colección de espacios vectoriales  $\Delta(x)$  para todo  $x \in D$  se denomina **Distribución** y nos referimos a ella como

$$\Delta = \text{span} \{f_1, f_2, \dots, f_k\} .$$

- Si la  $\dim(\Delta(x)) = k$  para todo  $x \in D$ , se dice que  $\Delta$  es una **distribución no singular** en  $D$ , generada por  $f_1, f_2, \dots, f_k$
- La distribución  $\Delta$  es **involutiva** si

$$g_1 \in \Delta \text{ y } g_2 \in \Delta \implies [g_1, g_2] \in \Delta$$

**Lema 2.37** Si  $\Delta$  es una **distribución no singular** en  $D$ , generada por  $f_1, f_2, \dots, f_k$  entonces es involutiva si y sólo si

$$[f_i, f_j] \in \Delta , \forall 1 \leq i, j \leq k$$

**Ejemplo 2.38**  $D = \mathbb{R}^3; \Delta = \text{span} \{f_1, f_2\}$

$$f_1 = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\dim(\Delta(x)) = 2, \quad \forall x \in D$$

$$[f_1, f_2] = \frac{\partial f_2}{\partial x} f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial x} f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}[f_1(x), f_2(x), [f_1, f_2](x)] = \text{rank} \begin{bmatrix} 2x_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 1 \end{bmatrix} = 3, \quad \forall x \in D$$

$\Delta$  no es involutiva

**Ejemplo 2.39**  $D = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_3^2 \neq 0\}; \Delta = \text{span}\{f_1, f_2\}$

$$f_1 = \begin{bmatrix} 2x_3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -2x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\dim(\Delta(x)) = 2, \quad \forall x \in D$$

$$[f_1, f_2] = \frac{\partial f_2}{\partial x} f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial x} f_2 = \begin{bmatrix} -4x_3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}[f_1(x), f_2(x), [f_1, f_2](x)] = \text{rank} \begin{bmatrix} 2x_3 & -x_1 & -4x_3 \\ -1 & -2x_2 & 2 \\ 0 & x_3 & 0 \end{bmatrix} = 2, \quad \forall x \in D$$

$\Delta$  es involutiva.

**Ejemplo 2.40** Cualquier distribución de dimensión uno (1) es involutiva. Esto se debe a que tal distribución se puede generar (localmente)

por un campo vectorial no nulo  $f$ , y ya que

$$[f, f](x) = \frac{\partial f}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} f(x) = 0 ,$$

así que satisface la condición de involutividad.

## 2.8. Codistribuciones

Es el objeto dual de una distribución: dado un conjunto  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_d$  de campos covectoriales suaves definidos en el mismo subconjunto  $U \subset \mathbb{R}^n$  la codistribución

$$\Omega = \text{span} \{ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_d \}$$

asigna a cada punto de  $U$  el subespacio del espacio dual  $(\mathbb{R}^n)^*$  generado por los covectores. Se pueden fácilmente generalizar las nociones de dimensión de una codistribución y de puntos regulares y singulares.

Si  $W$  es una matriz que tiene  $n$  columnas y cuyos elementos son funciones escalares suaves de  $x$ , entonces sus filas pueden ser consideradas como campos covectoriales suaves. Por lo tanto cualquier matriz de este tipo identifica una codistribución: aquella generada por sus filas.

A veces es posible construir codistribuciones a partir de distribuciones dadas, o viceversa. La forma natural de hacer esto es la siguiente: dada una distribución  $\Delta$ , para cada  $x \in U$  considere el *aniquilador* de  $\Delta(x)$ , es decir, el conjunto de covectores que aniquila todos los vectores en  $\Delta(x)$

$$\Delta^\perp(x) = \{w^* \in (\mathbb{R}^n)^*: \langle w^*, v \rangle = 0 \text{ para todos } v \in \Delta(x)\} .$$

En forma conversa, dada una codistribución  $\Omega$  se puede construir la distribución denotada por  $\Omega^\perp$  y denominada el aniquilador de  $\Omega$ , asignando para cada  $x \in U$

$$\Omega^\perp(x) = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle w^*, v \rangle = 0 \text{ para todos } w^* \in \Omega(x)\} .$$

Si una distribución  $\Delta$  es generada por las columnas de una matriz  $F$ , cuyos elementos son funciones escalares suaves, su aniquilador es identificado, en cada  $x \in U$ , por el conjunto de vectores fila  $w^*$  que satisfacen la condición

$$w^* F(x) = 0 .$$

De igual manera, si una codistribución  $\Omega$  es generada por las filas de una matriz  $W$ , cuyos elementos son funciones escalares suaves de  $x$ , su aniquilador es identificado, para cada  $x$ , por el conjunto de vectores columna que satisfacen

$$W(x)v = 0 .$$

En este caso  $\Omega^\perp(x)$  es el *núcleo* (kernel) de la matriz  $W$  en el punto  $x$

$$\Omega^\perp(x) = \ker(W(x)) .$$

Hay que ser cuidadosos acerca de la diferenciabilidad (suavidad) de las distribuciones o codistribuciones generadas de esta manera, ya que

el aniquilador de una distribución (codistribución) suave puede no ser suave

**Ejemplo 2.41** Considera la distribución suave definida en  $\mathbb{R}^1$

$$\Delta = \text{span} \{x\} .$$

Entonces

$$\Delta^\perp(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } x \neq 0 \\ (\mathbb{R}^1)^* & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

que no es una codistribución suave.

Sin embargo, esto no ocurre en la vecindad de puntos regulares de distribuciones (codistribuciones).

**Lema 2.42** Sea  $x^0$  un punto regular de una distribución suave  $\Delta$ . Entonces  $x^0$  es un punto regular de  $\Delta^\perp$  y existe una vecindad  $U^0$  de  $x^0$  tal que la restricción de  $\Delta^\perp$  a  $U^0$  es una codistribución suave.

## 2.9. El teorema de Frobenius

Sea  $\Delta$  una distribución no singular, definida en un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$ , de dimensión  $d$ . Entonces en una vecindad  $U^0$  de cualquier  $x^0 \in U$  existen  $d$  campos vectoriales suaves  $f_1, \dots, f_d$  todos definidos en  $U^0$  que generan  $\Delta$

$$\Delta(x) = \text{span}\{f_1(x), \dots, f_d(x)\}, \quad \forall x \in U^0.$$

La codistribución  $\Omega = \Delta^\perp$  es también suave y no singular, tiene dimensión  $n - d$  y, localmente alrededor de cada  $x^0$ , es generada por  $n - d$  campos covectoriales  $\omega_1, \dots, \omega_{n-d}$ . Por construcción el campo covectorial  $\omega_j$  es tal que

$$\langle \omega_j(x), f_i(x) \rangle = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq d, \quad 1 \leq j \leq n - d, \quad x \in U^0.$$

En algunas ocasiones nos interesa no cualquier solución de estas

ecuaciones, sino sólo aquellas que tengan la forma

$$\omega_j = \frac{\partial \lambda_j}{\partial x}$$

para funciones escalares suaves  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-d}$ . Esto equivale a solucionar el sistema de ecuaciones diferenciales parciales

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial x} (f_1(x), \dots, f_d(x)) = 0$$

y hallar  $n - d$  soluciones independientes, es decir, tales que los vectores fila

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial \lambda_{n-d}}{\partial x}$$

sean linealmente independientes en cada  $x$ . Es decir, ¿cuándo la distribución  $\Delta$  tiene un aniquilador  $\Delta^\perp$  generado por *diferenciales exactas*?

**Definición 2.43** Una distribución  $\Delta$  no singular, de dimensión  $d$ , definida en un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  se dice que es completamente

integrable si, para cada punto  $x^0 \in U$  existe una vecindad  $U^0$  de  $x^0$ , y  $n-d$  funciones escalares suaves  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-d}$  todas definidas en  $U^0$  tales que

$$\text{span} \{d\lambda_1, \dots, d\lambda_{n-d}\} = \Delta^\perp$$

en  $U^0$ .

**Ejemplo 2.44**  $D = \mathbb{R}^3$ ;  $\Delta = \text{span} \{f_1, f_2\}$

$$f_1 = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\dim(\Delta(x)) = 2, \quad \forall x \in D$$

$$[w_1, w_2, w_3] \begin{bmatrix} 2x_2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} = [2x_2 w_1 + w_2, w_1 + x_2 w_3] = 0$$

$$\begin{aligned}w_1(x) &= -x_2 w_3(x) \\w_2(x) &= 2x_2^2 w_3(x)\end{aligned}$$

y entonces

$$\omega(x) = [-x_2, 2x_2^2, 1] w_3(x)$$

para cualquier función escalar suave  $w_3(x) \neq 0$  es un generador de  $\Delta^\perp$ . Sin embargo, no existe ninguna función escalar suave  $\lambda(x)$  tal que  $d\lambda = \omega$ . Si esto fuera así, la matriz Jacobiana de  $\omega$  debería ser simétrica

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^T$$

ya que es igual a la matriz Hessiana de  $\lambda$ , que es simétrica

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} .$$

*Sin embargo este no es el caso en nuestro ejemplo, ya que*

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \begin{bmatrix} * & -w_3(x) - x_2 \frac{\partial w_3(x)}{\partial x_2} & -x_2 \frac{\partial w_3(x)}{\partial x_3} \\ 2x_2^2 \frac{\partial w_3(x)}{\partial x_1} & * & 2x_2^2 \frac{\partial w_3(x)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial w_3(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial w_3(x)}{\partial x_2} & * \end{bmatrix}$$

*que no es simétrica.*

De la propiedad 3 en la Proposición 2.26 se puede ver que si  $\lambda$  existe y  $f_1, f_2$  son campos vectoriales de  $\Delta$ , entonces

$$L_{[f_1, f_2]} \lambda(x) = L_{f_1} L_{f_2} \lambda(x) - L_{f_2} L_{f_1} \lambda(x) = 0,$$

y entonces debe ocurrir que  $[f_1, f_2] \in \Delta$ . Así que una condición necesaria para que una distribución sea completamente integrable, es que sea involutiva. El teorema de Frobenius muestra que esta condición es también suficiente:

**Teorema 2.45 de Frobenius.** Una distribución no singular es completamente integrable si y sólo si la distribución es involutiva.

**Ejemplo 2.46**  $D = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_3^2 \neq 0\}$ ;  $\Delta = \text{span}\{f_1, f_2\}$

$$f_1 = \begin{bmatrix} 2x_3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -2x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\dim(\Delta(x)) = 2, \quad \forall x \in D$$

$$[f_1, f_2] = \frac{\partial f_2}{\partial x} f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial x} f_2 = \begin{bmatrix} -4x_3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}[f_1(x), f_2(x), [f_1, f_2](x)] = \text{rank} \begin{bmatrix} 2x_3 & -x_1 & -4x_3 \\ -1 & -2x_2 & 2 \\ 0 & x_3 & 0 \end{bmatrix} = 2, \quad \forall x \in D$$

$\Delta$  es involutiva. La función escalar

$$\lambda(x) = (x_1 + 2x_2x_3)x_3$$

es una solución.

### 2.9.1. Prueba de la suficiencia

Esta es constructiva. Considere los campos vectoriales  $f_{d+1}, \dots, f_n$  definidos en  $U^0$  tales que

$$\boxed{\text{span}} \{f_1(x), \dots, f_d(x), f_{d+1}(x), \dots, f_n(x)\} = \mathbb{R}^n, \forall x \in U^0.$$

Denótese por  $\Phi_t^f(x)$  al flujo del campo vectorial  $f$ , es decir, la función suave de  $t, x$  con la propiedad que  $x(t) = \Phi_t^f(x^0)$  resuelve la ecuación diferencial  $\dot{x} = f(x)$  con condición inicial  $x(0) = x^0$ . Así que

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_t^f(x) = f(\Phi_t^f(x)), \quad \Phi_0^f(x) = x.$$

103

Recuérdese que, para cualquier  $x^0$  fijo, existe un  $T > 0$  (suficientemente pequeño) tal que el mapeo

$$\Phi_t^f : x \rightarrow \Phi_t^f(x)$$

está definido para todo  $x$  en una vecindad de  $x^0$  y para todo  $|t| < T$ , es un difeomorfismo local (sobre su imagen) y  $\left[ \Phi_t^f \right]^{-1} = \Phi_{-t}^f$ . Adicionalmente para todo  $t, s$  suficientemente pequeños

$$\Phi_{t+s}^f(x) = \Phi_t^f(\Phi_s^f(x)) .$$

Se puede probar (ver los detalles en [24]) que una solución de la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial x}(f_1(x), \dots, f_d(x)) = 0$$

se puede construir de la siguiente manera:

- Construya el mapeo

$$\begin{aligned}\Psi : U_\varepsilon &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (z_1, \dots, z_n) &\rightarrow \Phi_{z_1}^{f_1} \circ \dots \circ \Phi_{z_n}^{f_n}(x^0)\end{aligned}$$

dónde  $U_\varepsilon = \{z \in \mathbb{R}^n : |z_i| < \varepsilon\}$ , y " $\circ$ " denota la composición con respecto al argumento  $x$ . Si  $\varepsilon$  es suficientemente pequeño  $\Psi$  tiene las siguientes propiedades:

- Está definido para todo  $z = (z_1, \dots, z_n) \in U_\varepsilon$  y es un difeomorfismo sobre su imagen,
- para todo  $z \in U_\varepsilon$  las primeras  $d$  columnas de la matriz Jacobiana

$$\left[ \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right]$$

son vectores linealmente independientes en  $\Delta(\Psi(z))$ .

- Si  $U^0$  denota la imagen del mapa  $\Psi$ ,  $U^0$  es una vecindad abierta de  $x^0$  (ya que  $x^0 = \Psi(0)$ ). Como la inversa  $\Psi^{-1}$  está definida en  $U^0$  asigne

$$\begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{pmatrix} = \Psi^{-1}(x)$$

dónde  $\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$  son funciones escalares suaves, definidas para todo  $x \in U^0$ .

- Las últimas  $n - d$  funciones  $\phi_{d+1}(x), \dots, \phi_n(x)$  son soluciones independientes de la EDP, es decir,

$$\frac{\partial \phi_j(x)}{\partial x} (f_1(x), \dots, f_d(x)) = 0, \quad j = d + 1, \dots, n.$$

Esto se deduce de

$$\left[ \frac{\partial \Psi^{-1}}{\partial x} \right]_{x=\Psi(z)} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right] = I, \quad \forall z \in U_\varepsilon \iff \forall x \in U^0.$$

## 2.9.2. Ejemplos

La prueba de suficiencia muestra que la solución de la EDP

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial x} (f_1(x), \dots, f_d(x)) = 0$$

puede ser reducida a la solución de  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$\dot{x} = f_i(x) \quad 1 \leq i \leq n$$

dónde  $f_1(x), \dots, f_n(x)$  son linealmente independientes, y  $f_1(x), \dots, f_d(x)$  generan la distribución  $\Delta$ .

**Ejemplo 2.47** Considere la distribución en  $\mathbb{R}^2$

$$\Delta(x) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} \exp(x_2) \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

La distribución tiene dimensión 1 para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ , por lo tanto la distribución es no singular e involutiva (por ser de dimensión 1). Sean

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} \exp(x_2) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Los flujos de  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  son muy simples.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \exp(x_2) & x_1(t) &= x_1^0 + \exp(x_2^0)(\exp(t) - 1) \\ \dot{x}_2 &= 1 & x_2(t) &= x_2^0 + t \end{aligned}$$

$$\Phi_{z_1}^{f_1}(x) = \begin{pmatrix} x_1 + \exp(x_2)(\exp(z_1) - 1) \\ x_2 + z_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 1 & x_1(t) &= x_1^0 + t \\ \dot{x}_2 &= 0 & x_2(t) &= x_2^0 \end{aligned}$$

$$\Phi_{z_2}^{f_2}(x) = \begin{pmatrix} x_1 + z_2 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Seleccionando  $(x_1^0, x_2^0) = 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \Psi(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} \exp(z_1) + z_2 - 1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \Psi^{-1}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 - \exp(x_2) + 1 \end{pmatrix}$$

La función  $z_2(x_1, x_2) = x_1 - \exp(x_2) + 1$  es una solución de la EDP

$$\frac{\partial z_2(x_1, x_2)}{\partial x} f_1(x) = 0$$

**Ejemplo 2.48** Considere la distribución en  $\mathbb{R}^2$

$$\Delta(x) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} x_1^2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

La distribución tiene dimensión 1 para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ , por lo tanto la  
109

distribución es no singular e involutiva (por ser de dimensión 1). Sean

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Los flujos de  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  son muy simples.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 & x_1(t) &= \frac{x_1^0}{1-x_1^0 t} \\ \dot{x}_2 &= -1 & x_2(t) &= x_2^0 - t\end{aligned}$$

$$\Phi_{z_1}^{f_1}(x) = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{1-x_1 z_1} \\ x_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

Nótese que este flujo no está definido para  $x_1 z_1 \geq 1$ , es decir, el campo vectorial  $f_1$  no es completo.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 1 & x_1(t) &= x_1^0 + t \\ \dot{x}_2 &= 0 & x_2(t) &= x_2^0\end{aligned}$$

$$\Phi_{z_2}^{f_2}(x) = \begin{pmatrix} x_1 + z_2 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Seleccionando  $(x_1^0, x_2^0) = 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \Psi(z) = \begin{pmatrix} \frac{x_1^0 + z_2}{1 - (x_1^0 + z_2)z_1} \\ x_2^0 - z_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \Psi^{-1}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2^0 - x_2 \\ \frac{x_1 + z_2}{1 + x_1(x_2^0 - x_2)} - x_1^0 \end{pmatrix}$$

La función no está definida globalmente. En una vecindad, de  $x^0$  la función  $z_2(x_1, x_2)$  es una solución de la EDP

$$\frac{\partial z_2(x_1, x_2)}{\partial x} f_1(x) = 0$$

## 2.10. Prueba del Teorema 1.7

Probaremos el teorema en varios pasos.

**Lema 2.49** *Los vectores fila*

$$dh(x) , dL_f h(x) , dL_f^2 h(x) , \dots , dL_f^{\rho-1} h(x)$$

*y los vectores columna*

$$g(x) , \text{ad}_f g(x) , \dots , \text{ad}_f^{\rho-1} g(x)$$

*son linealmente independientes para todo  $x \in D$ .*

Para probar este resultado, probaremos la siguiente propiedad útil.

**Lema 2.50** *Sea  $\phi$  una función escalar y  $f, g$  campos vectoriales, todos definidos en un conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces para cualquier selección de  $s, k, r \geq 0$ ,*

$$\langle dL_f^s \phi(x) , \text{ad}_f^{k+r} g(x) \rangle = \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} L_f^{r-i} \langle dL_f^{s+i} \phi(x) , \text{ad}_f^k g(x) \rangle . \quad (2.7)$$

Como consecuencia, los dos conjuntos de condiciones siguientes son equivalentes

1. (i)  $L_g\phi(x) = L_gL_f\phi(x) = \cdots = L_gL_f^k\phi(x) = 0$  para todo  $x \in U$ .
2. (ii)  $L_g\phi(x) = L_{\text{ad}_f g}\phi(x) = \cdots = L_{\text{ad}_f^k g}\phi(x) = 0$  para todo  $x \in U$ .

**Prueba.** Nótese que por las propiedades 5 y 6 en Proposición 2.26

$$\begin{aligned} \langle dL_f^s\phi(x), \text{ad}_f^{k+r+1}g(x) \rangle &= \langle dL_f^s\phi(x), [f, \text{ad}_f^{k+r}g(x)] \rangle \\ &= L_f \langle dL_f^s\phi(x), \text{ad}_f^{k+r}g(x) \rangle - \langle dL_f^{s+1}\phi(x), \text{ad}_f^{k+r}g(x) \rangle. \end{aligned}$$

La igualdad (2.7) se obtiene por inducción en  $r$ . La equivalencia de (i) y (ii) es una simple consecuencia de (2.7). ■

Ahora procedemos con la prueba del Lema 2.49.

**Prueba.** Nótese que por la definición de grado relativo, usando (2.7) se obtiene para todo  $i, j$  tales que  $i + j \leq \rho - 2$

$$\langle dL_f^j h(x), \text{ad}_f^i g(x) \rangle = 0 \text{ para todo } x \text{ vecino de } x^0$$

y

$$\langle dL_f^j h(x), \text{ad}_f^i g(x) \rangle = (-1)^{\rho-1-j} L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0$$

para todo  $i, j$  tales que  $i + j = \rho - 1$ . Todas estas condiciones muestran que la matriz

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} dh(x) \\ dL_f h(x) \\ \vdots \\ dL_f^{\rho-1} h(x) \end{pmatrix} \left( \begin{array}{cccc} g(x) & \text{ad}_f g(x) & \cdots & \text{ad}_f^{\rho-1} g(x) \end{array} \right) = \\
&= \begin{pmatrix} L_g h(x) & L_{\text{ad}_f g} h(x) & \cdots & \cdots & L_{\text{ad}_f^{\rho-1} g} h(x) \\ L_g L_f h(x) & & & L_{\text{ad}_f^{\rho-2} g} h(x) & \star \\ & & & & \vdots \\ L_g L_f^{\rho-1} h(x) & \star & \cdots & & \star \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \langle dh(x) , \text{ad}_f^{\rho-1} g(x) \rangle \\ 0 & \cdots & \star \\ \vdots & \cdots & \star \\ \langle dL_f^{\rho-1} h(x) , g(x) \rangle & \star & \star \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

tiene rango  $\rho$  y, por lo tanto, los vectores fila  $dh(x^0)$ ,  $dL_f h(x^0)$ ,  $dL_f^2 h(x^0)$ , .. y los vectores columna  $g(x)$ ,  $\text{ad}_f g(x)$ , ...,  $\text{ad}_f^{\rho-1} g(x)$  son linealmente independientes. ■

Este lema prueba que necesariamente  $\rho \leq n$  y que las funciones  $h(x)$ ,  $L_f h(x)$ ,  $L_f^2 h(x)$ , ...,  $L_f^{\rho-1} h(x)$  califican como un conjunto parcial de funciones coordenadas en una vecindad del punto  $x^0$ . Ahora podemos probar el teorema.

El caso  $\rho = n$  se sigue del Lema 2.50, cuya primera afirmación prueba que  $\frac{\partial T}{\partial x}$  es no singular, por lo que  $T$  es un difeomorfismo local.

Considere ahora el caso  $\rho < n$ . La distribución  $\Delta = \text{span}\{g\}$  es no singular, involutiva y tiene dimensión uno. Por el teorema de Frobenius,  $\Delta$  es completamente integrable. Por lo tanto para cada  $x^0 \in D$  existe una vecindad  $U^0$  de  $x^0$  y  $n - 1$  funciones escalares suaves  $\phi_1(x)$ , ...,  $\phi_{n-1}(x)$  con diferenciales linealmente independientes tales que

$$L_g \phi_i(x) = 0, \text{ para } 1 \leq i \leq n - 1, \quad \forall x \in U^0.$$

Ya que

$$L_g L_f^i h(x) = 0, \text{ para } 1 \leq i \leq \rho - 2$$

y  $dh(x)$ ,  $dL_f h(x)$ ,  $dL_f^2 h(x)$ , ...,  $dL_f^{\rho-2} h(x)$  son linealmente independientes, podemos usar  $h(x)$ ,  $L_f h(x)$ ,  $L_f^2 h(x)$ , ...,  $L_f^{\rho-2} h(x)$  como parte de esas  $n - 1$  funciones. En particular las tomamos como  $\phi_{n-\rho+1}(x)$ , ...,  $\phi_{n-1}(x)$ . Debido a que  $L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0$  el vector fila  $dL_f^{\rho-1} h(x^0)$  es linealmente independiente de los vectores fila  $d\phi_1(x^0)$ , ...,  $d\phi_{n-1}(x^0)$ . Por lo tanto

$$\text{rango} \left[ \frac{\partial T}{\partial x} (x^0) \right] = n \implies \frac{\partial T}{\partial x} (x^0) \text{ es no singular}$$

y existe una vecindad  $U^1$  de  $x^0$  tal que  $T(x)$  restringido a  $U^1$  es un difeomorfismo en  $U^1$ . Tomando a  $N = U^0 \cap U^1$  completa la prueba del teorema.

## 2.11. Prueba del Teorema 2.12

### 2.11.1. Necesidad

Supóngase que existe una  $h(x)$  que satisface

$$\begin{aligned} L_g L_f^{i-1} h(x) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad \forall x \in D_0 \\ L_g L_f^{n-1} h(x) &\neq 0; \quad \forall x \in D_0. \end{aligned}$$

El lema 2.50 muestra que  $\text{rango } \mathcal{G} = n$ . Por lo tanto  $\mathcal{D}$  es no singular y tiene dimensión  $n-1$ . Entonces

$$L_g h(x) = L_{\text{ad}_f g} h(x) = \cdots = L_{\text{ad}_f^{n-2} g} h(x) = 0$$

que puede ser escrito como

$$dh(x) \begin{bmatrix} g(x) & \text{ad}_f g(x) & \cdots & \text{ad}_f^{n-2} g(x) \end{bmatrix} = 0.$$

Esta ecuación implica que  $\mathcal{D}$  es completamente integrable y, por el teorema de Frobenius,  $\mathcal{D}$  es involutiva.

## 2.11.2. Suficiencia

Supóngase que las condiciones (1) y (2) del teorema son satisfechas. Entonces  $\mathcal{D}$  es no singular y tiene dimensión  $n - 1$ . Por el teorema de Frobenius existe una  $h(x)$  que satisface

$$L_g h(x) = L_{\text{ad}_f g} h(x) = \cdots = L_{\text{ad}_f^{n-2} g} h(x) = 0.$$

Usando la identidad de Jacobi se puede verificar que

$$L_g L_f^{i-1} h(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad \forall x \in D_0.$$

Además

$$\begin{aligned} dh(x) \mathcal{G}(x) &= dh(x) \left[ \begin{array}{cccc} g(x) & \text{ad}_f g(x) & \cdots & \text{ad}_f^{n-1} g(x) \end{array} \right] = \\ &= \left[ \begin{array}{cccc} 0 & \cdots & 0 & L_{\text{ad}_f^{n-1} g} h(x) \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Ya que  $\text{rango } \mathcal{G} = n$  y  $dh(x) \neq 0$  se requiere que  $L_{\text{ad}_f^{n-1} g} h(x) \neq 0$ . Usando la identidad de Jacobi se puede verificar que  $L_g L_f^{n-1} h(x) \neq 0$ , lo que completa la prueba del teorema.

# Parte II

## Estabilización

# Lección 3

## Estabilización

### 3.1. Conceptos básicos y Linealización

Se desea estabilizar al sistema

$$\dot{x} = f(x, u)$$

en el punto de equilibrio  $x = x_{ss}$

**Problema 3.1** *de estado estacionario: Encuentre un control de estado estacionario  $u_{ss}$  tal que*

$$0 = f(x_{ss}, u_{ss})$$

Definiendo

$$x_\delta = x - x_{ss} , \quad u_\delta = u - u_{ss}$$

la dinámica del sistema satisface

$$\begin{aligned}\dot{x}_\delta &= f(x_{ss} + x_\delta, u_{ss} + u_\delta) \triangleq f_\delta(x_\delta, u_\delta) \\ 0 &= f_\delta(0, 0)\end{aligned}$$

El control

$$u_\delta = \gamma(x_\delta) \implies u = u_{ss} + \gamma(x - x_{ss})$$

**Problema 3.2** de estabilización por retroalimentación de los estados:  
Dado

$$\dot{x} = f(x, u) \quad , \quad f(0, 0) = 0$$

encuentre

$$u = \gamma(x) \quad , \quad \gamma(0) = 0$$

tal que el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable para el sistema

$$\dot{x} = f(x, \gamma(x))$$

$f$  y  $\gamma$  son funciones localmente Lipschitz.

### 3.1.1. Sistemas Lineales

Sea el sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

con  $(A, B)$  estabilizable ( $\Leftrightarrow$  controlable o todo valor propio incontrolable tiene parte real negativa)

Encuentre  $K$  tal que  $(A - BK)$  sea Hurwitz

$$u = -Kx$$

Métodos típicos:

- Colocación de polos (o de valores propios)
- Colocación de valores y vectores propios
- LQR

### 3.1.2. Linealización

Se desea estabilizar al sistema

$$\dot{x} = f(x, u) \quad , \quad f(0, 0) = 0$$

con  $f$  continuamente diferenciable en un dominio  $D_x \times D_u \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  que contiene el origen ( $x = 0$ ,  $u = 0$ )

La linealización es

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) \right|_{x=0, u=0} ; \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) \right|_{x=0, u=0}$$

Suponga que  $(A, B)$  es *estabilizable*. Diseñe una matriz  $K$  tal que  $(A - BK)$  sea Hurwitz

$$u = -Kx$$

Sistema en lazo cerrado:

$$\dot{x} = f(x, -Kx)$$

## Linealización

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, -Kx) - \frac{\partial f}{\partial u}(x, -Kx) K \right]_{x=0} x \\ \dot{x} &= (A - BK)x\end{aligned}$$

Ya que  $(A - BK)$  es Hurwitz, el origen es un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema en lazo cerrado.

### Ejemplo 3.3 Ecuación del péndulo

$$\ddot{\theta} = -a \sin \theta - b\dot{\theta} + cT$$

Estabilice el péndulo en el punto  $\theta = \delta$

$$0 = -a \sin \delta + cT_{ss}$$

$$x_1 = \theta - \delta, \quad x_2 = \dot{\theta}, \quad u = T - T_{ss} = T - \frac{a}{c} \sin \delta$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a [\sin(x_1 + \delta) - \sin \delta] - bx_2 + cu\end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos(x_1 + \delta) & -b \end{bmatrix}_{x_1=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos \delta & -b \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(a \cos \delta + ck_1) & -(b + ck_2) \end{bmatrix} \quad \text{es Hurwitz}$$

$$k_1 > -\frac{a \cos \delta}{c}, \quad k_2 > -\frac{b}{c}$$

$$T = \frac{a}{c} \sin \delta - Kx = \frac{a \sin \delta}{c} - k_1 (\theta - \delta) - k_2 \dot{\theta}$$

### 3.2. Linealización por retroalimentación

Considere el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x) + G(x) u$$

$$f(0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^p$$

Suponga que existe un cambio de variables  $z = T(x)$ , definido para todo  $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ , que transforma al sistema a la Forma de Controlador

$$\dot{z} = Az + B\gamma(x)[u - \alpha(x)]$$

dónde (i)  $(A, B)$  es controlable, y (ii)  $\gamma(x)$  es una matriz no singular para cada  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ .

Si se elige

$$u = \alpha(x) + \gamma^{-1}(x)v$$

entonces la dinámica del sistema en lazo cerrado es

$$\dot{z} = Az + Bv$$

que es lineal en los estados y la entrada  $v$ .

Si además la nueva entrada  $v$  se diseña como

$$v = -Kz$$

con  $K$  tal que la matriz  $(A - BK)$  sea Hurwitz, entonces el origen  $z = 0$  del sistema en lazo cerrado

$$\dot{z} = (A - BK) z$$

es global y exponencialmente estable (GEE).

En las coordenadas originales el control que estabiliza el origen es

$$u = \alpha(x) - \gamma^{-1}(x) KT(x)$$

y la dinámica en lazo cerrado en coordenadas  $x$  es

$$\dot{x} = f(x) + G(x) [\alpha(x) - \gamma^{-1}(x) KT(x)]$$

Nótese que (¡Pruebe las afirmaciones!)

- $x = 0$  es un punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado.
- $x = 0$  es asintóticamente estable (AE), ya que  $T(x)$  es un difeomorfismo.
- $x = 0$  es exponencialmente estable (EE) localmente, ya que  $T(x)$  es un difeomorfismo.
- $x = 0$  **no** es, en general, Global y Asintóticamente Estable (GAE).
- $x = 0$  es Global y Asintóticamente Estable (GAE) si  $T(x)$  es un difeomorfismo global (Ver [28, pag. 508]).
- Si  $T(x)$  es un difeomorfismo global,  $x = 0$  **no** es, en general, Global y Exponencialmente Estable (GEE).
- $x = 0$  es Global y Exponencialmente Estable (GEE) si  $T(x)$  es un difeomorfismo global y es Globalmente Lipschitz.

¿Qué información se requiere para implantar la ley de control

$$u = \alpha(x) - \gamma^{-1}(x) KT(x) \quad ?$$

### 3.2.1. Una nota sobre el cambio en la convergencia de trayectorias ante transformaciones

Considérese el siguiente ejemplo: Sea el sistema escalar

$$\dot{x} = -x^3$$

cuyas trayectorias están dadas por

$$x(t) = \frac{x(t_0)}{\sqrt{1 + 2(t-t_0)x^2(t_0)}} .$$

que convergen global y asintóticamente, pero no lo hacen exponencialmente (¿puede probarlo?). El comportamiento local (exponencial o asintótico) se puede decidir mediante la linealización.

Sea la función continua y diferenciable en todas partes e invertible globalmente (pero no es un difeomorfismo global, ya que en el origen la inversa no es diferenciable)

$$T(x) = x|x|e^{(-\frac{1}{2x^2})}$$

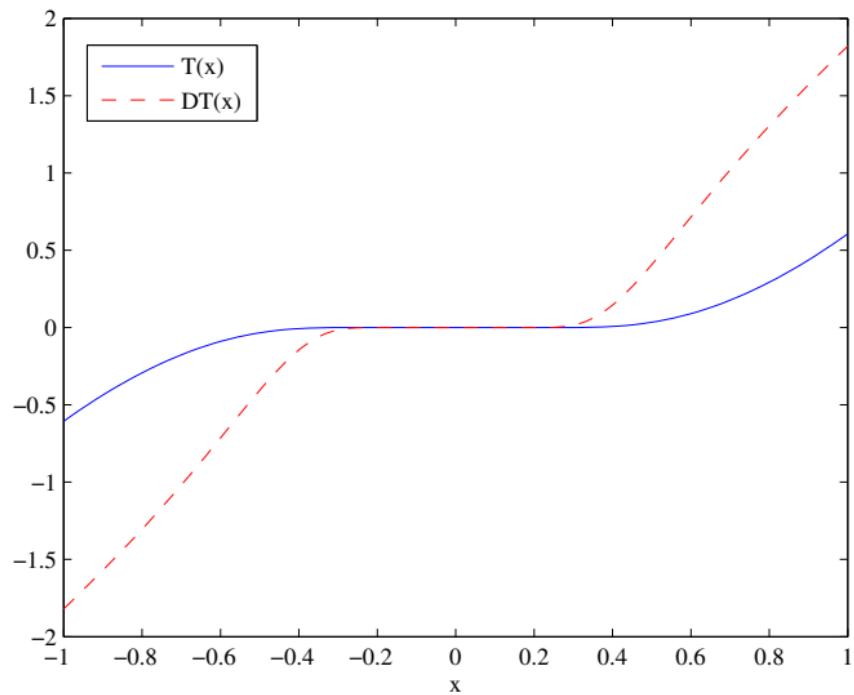
La dinámica del sistema transformado  $z = T(x)$  es

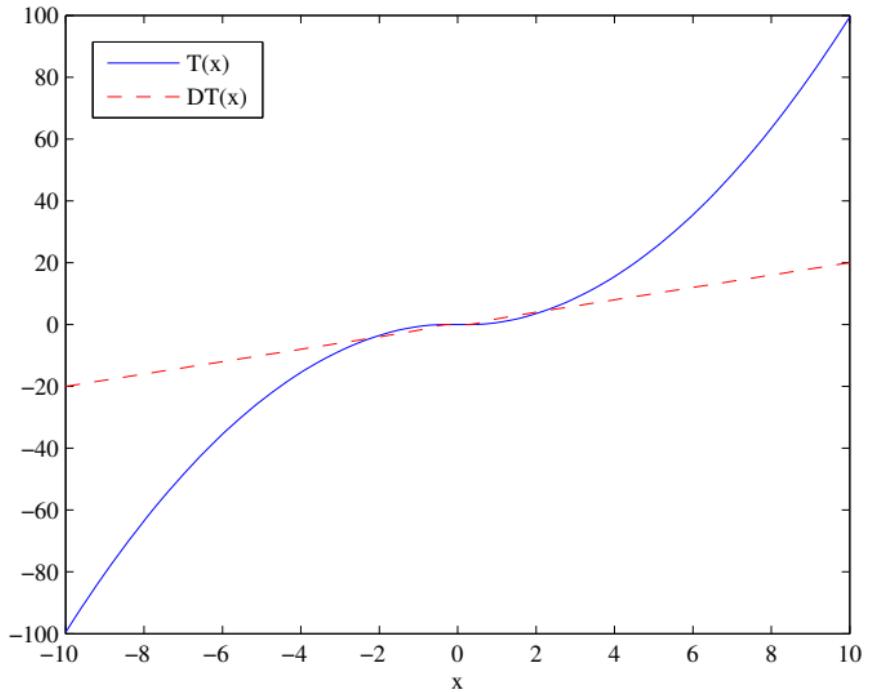
$$\dot{z} = \dot{T}(x) = -x|x|e^{(-\frac{1}{2x^2})} - 2x|x|^3e^{(-\frac{1}{2x^2})} = -z - 2|x|^2z$$

Por lo tanto las trayectorias en  $z$  decrecen más rápido que una exponencial!

$$|z(t)| \leq |z(t_0)|e^{-(t-t_0)}.$$

Nótese que en la vecindad del origen esto no puede ocurrir si la transformación es un difeomorfismo (cerca del origen), ya que en ese caso (teorema de linealización) no hay cambio en el tipo de estabilidad.





En nuestro ejemplo esto fué posible debido a que la transformación es un *homeomorfismo* (transformación continua e invertible, con inversa continua), pero no un *difeomorfismo* (homeomorfismo + diferenciabilidad de la función y su inversa). Sin embargo cerca a infinito (muy lejos del origen), lo que es importante para estabilidad global, un difeomorfismo puede cambiar la estabilidad exponencial en asintótica (o viceversa). Sin embargo esto no puede tampoco ocurrir si el difeomorfismo es, por ejemplo, globalmente Lipschitz.

Si se permiten homeomorfismos, en vez de difeomorfismos, entonces la estabilidad exponencial y la estabilidad asintótica son equivalentes! (Ver [21]).

### 3.2.2. Robustez ante incertidumbres

¿Cuál es el efecto de las incertidumbres en  $\alpha(x)$ ,  $\gamma(x)$ , y  $T(x)$ ?

Sean  $\hat{\alpha}(x)$ ,  $\hat{\gamma}(x)$ , y  $\hat{T}(x)$  modelos nominales de  $\alpha(x)$ ,  $\gamma(x)$ , y  $T(x)$ .

Con la ley de control

$$u = \hat{\alpha}(x) - \hat{\gamma}^{-1}(x) K \hat{T}(x)$$

el sistema en lazo cerrado es (en coordenadas  $z$ )

$$\dot{z} = (A - BK)z + B\delta(z) \quad (3.1)$$

$$\delta = \gamma \left[ \hat{\alpha} - \alpha + \gamma^{-1} KT - \hat{\gamma}^{-1} K \hat{T} \right]$$

Este sistema constituye una perturbación del sistema nominal. Lo analizamos utilizando las herramientas de sistemas perturbados.

**Lema 3.4** *Considere el sistema en lazo cerrado (3.1), donde  $(A - BK)$  es Hurwitz. Sea  $P = P^T > 0$  la solución de la ecuación algebraica de Lyapunov*

$$P(A - BK) + (A - BK)^T P = -I$$

y sea  $k$  una constante tal que

$$0 \leq k < \frac{1}{2\|PB\|_2} .$$

- Si  $\|\delta(z)\| \leq k\|z\|$  para todo  $z$ , entonces el origen de (3.1) será Global y Exponencialmente Estable (GEE).
- Si  $\|\delta(z)\| \leq k\|z\| + \varepsilon$  para todo  $z$ , entonces el estado  $z$  será Global y Finalmente Acotado por  $\varepsilon c$ , para alguna  $c > 0$ .

**Prueba.** Sea

$$V(z) = z^T P z$$

Esta es una función de Lyapunov para el sistema nominal (lineal). Luego, tomando su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema per-

turbado (3.1) se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{V}(z) &= z^T \left( P(A - BK) + (A - BK)^T P \right) z + 2z^T PB\delta(z) \\ &\leq -\|z\|_2^2 + 2\|z\|_2 \|PB\|_2 \|\delta(z)\|_2\end{aligned}$$

Si  $\|\delta(z)\|_2 \leq k\|z\|_2 + \varepsilon$  entonces se tiene

$$\dot{V}(z) \leq -(1 - \theta)\|z\|_2^2 - \theta\|z\|_2^2 + 2k\|PB\|_2\|z\|_2^2 + 2\varepsilon\|PB\|_2\|z\|_2$$

dónde  $\theta \in (0, 1)$  se elige cercana a 1 de tal forma que  $k < \frac{\theta}{2\|PB\|_2}$ . Por lo tanto

$$\dot{V}(z) \leq -(1 - \theta)\|z\|_2^2 + 2\varepsilon\|PB\|_2\|z\|_2$$

Si  $\|\delta(z)\|_2 \leq k\|z\|_2$  hacemos  $\varepsilon = 0$  en la anterior desigualdad y concluimos que el origen es GEE. Si  $\varepsilon > 0$

$$\dot{V}(z) \leq -(1 - \theta)(1 - \bar{\theta})\|z\|_2^2, \quad \forall \|z\|_2 \geq \frac{2\varepsilon\|PB\|_2}{(1 - \theta)\bar{\theta}} \triangleq \varepsilon c_0$$

con  $\bar{\theta} \in (0, 1)$ . Del Teorema 4.18 de [28] se concluye que  $z(t)$  es Global y Finalmente Acotado por  $\varepsilon c_0 \sqrt{\lambda_{\max}(P) / \lambda_{\min}(P)}$  ■

**Comentario 3.5** Es claro de la prueba del Lema que si la cota de  $\delta(z)$  se satisface solo en una vecindad del origen el resultado es válido localmente.

**Ejemplo 3.6** Ecuación del péndulo

$$\ddot{\theta} = -a \sin \theta - b \dot{\theta} + cT$$

$$x_1 = \theta - \delta, \quad x_2 = \dot{\theta}, \quad u = T - T_{ss} = T - \frac{a}{c} \sin \delta$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -a [\sin(x_1 + \delta) - \sin \delta] - bx_2 + cu$$

$$u = \frac{1}{c} \{a [\sin(x_1 + \delta) - \sin \delta] - k_1 x_1 - k_2 x_2\}$$

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -(k_2 + b) \end{bmatrix} \quad \text{es Hurwitz}$$

$$T = u + \frac{a}{c} \sin \delta = \frac{1}{c} [a \sin (x_1 + \delta) - k_1 x_1 - k_2 x_2]$$

Sean  $\hat{a}$  y  $\hat{c}$  modelos nominales de  $a$  y  $c$

$$T = \frac{1}{\hat{c}} [\hat{a} \sin (x_1 + \delta) - k_1 x_1 - k_2 x_2]$$

$$\dot{x} = (A - BK)x + B\delta(x)$$

$$\delta(x) = \left( \frac{\hat{a}c - a\hat{c}}{\hat{c}} \right) \sin (x_1 + \delta) - \left( \frac{c - \hat{c}}{\hat{c}} \right) (k_1 x_1 + k_2 x_2)$$

$$|\delta(x)| \leq k \|x\| + \varepsilon$$

$$k = \left| \frac{\hat{a}c - a\hat{c}}{\hat{c}} \right| + \left| \frac{c - \hat{c}}{\hat{c}} \right| \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \quad \varepsilon = \left| \frac{\hat{a}c - a\hat{c}}{\hat{c}} \right| |\sin \delta|$$

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}, \quad PB = \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix}$$

$$k < \frac{1}{2\sqrt{p_{12}^2 + p_{22}^2}}$$

$$\sin \delta = 0 \implies \varepsilon = 0$$

¿Es la linealización por retroalimentación una buena idea?

### Ejemplo 3.7

$$\dot{x} = ax - bx^3 + u, \quad a, b > 0$$

$$u = -(k + a)x + bx^3, \quad k > 0, \implies \dot{x} = -kx$$

$-bx^3$  es un término de amortiguamiento. ¿Por qué cancelarlo?

$$u = -(k + a)x, \quad k > 0, \implies \dot{x} = -kx - bx^3$$

**Ejemplo 3.8** Consideré el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -h(x_1) + u\end{aligned}$$

con

$$h(0) = 0, \quad x_1 h(x_1) > 0, \quad \forall x_1 \neq 0$$

**Diseño por linealización por retroalimentación:**

$$u = h(x_1) - (k_1 x_1 + k_2 x_2)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} x$$

**Diseño basado en pasividad:** Considere la función de almacenamiento de energía

$$V(x) = \int_0^{x_1} h(z) dz + \frac{1}{2} x_2^2$$

$$\dot{V} = h(x_1)x_2 - x_2h(x_1) + x_2u = x_2u$$

Entonces el sistema es pasivo si la salida es

$$y = x_2$$

La ley de control

$$u = -\sigma(x_2) ,$$

$$\sigma(0) = 0 , \quad x_2\sigma(x_2) > 0 , \quad \forall x_2 \neq 0$$

estabiliza asintóticamente (¿globalmente?) el origen de

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -h(x_1) - \sigma(x_2)\end{aligned}$$

ya que

$$\dot{V} = -x_2\sigma(x_2)$$

$$x_2(t) \equiv 0 \implies \dot{x}_2(t) \equiv 0 \implies h(x_1(t)) \equiv 0 \implies x_1(t) \equiv 0 ,$$

*La estabilidad asintótica es una consecuencia del principio de invariancia de Lasalle.*

*Linealización:*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -h'(0) & -k \end{bmatrix} x, \quad k = \sigma'(0)$$

*El polinomio característico es*

$$s^2 + ks + h'(0) = 0$$

$$s_{1,2} = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - h'(0)}$$

*cuando  $k$  varía entre  $0 \rightarrow \infty$ , una de las raíces no puede moverse a la izquierda del punto  $\text{Re}[s] = -\sqrt{h'(0)}$*

**Ventajas/Desventajas del control basado en pasividad:**

1. *Ventaja: El control basado en pasividad no requiere un modelo de la función no lineal  $h(x_1)$ , por lo que es robusto ante variaciones en ella,*
2. *Ventaja: Flexibilidad en la elección de  $\sigma(x_2)$ , para satisfacer restricciones de la entrada.*
3. *Desventaja: la velocidad de convergencia no puede ser asignada arbitrariamente.*

# Lección 4

## Linealización Parcial

## 4.1. Linealización Parcial (o entrada/salida) por Retroalimentación

Considere el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u$$

$$f(0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^p$$

Suponga que existe un cambio de variables

$$z = \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} = T(x) = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \end{bmatrix}$$

definido para todo  $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ , que transforma al sistema a la Forma (Normal)

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f_0(\eta, \xi) \\ \dot{\xi} = A\xi + B\gamma(x)[u - \alpha(x)] \end{cases}$$

dónde (i)  $(A, B)$  es controlable, y (ii)  $\gamma(x)$  es una matriz no singular para cada  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ .

Si se elige

$$u = \alpha(x) + \gamma^{-1}(x)v$$

entonces la dinámica del sistema en lazo cerrado es

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f_0(\eta, \xi) \\ \dot{\xi} = A\xi + Bv \end{cases}$$

Si además la nueva entrada  $v$  se diseña como

$$v = -K\xi$$

con  $K$  tal que la matriz  $(A - BK)$  sea Hurwitz, entonces el sistema en lazo cerrado es

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f_0(\eta, \xi) \\ \dot{\xi} = (A - BK)\xi \end{cases} \quad (4.1)$$

y el origen  $\xi = 0$  del subsistema lineal

$$\dot{\xi} = (A - BK)\xi$$

es GEE. ¿Es el origen del sistema en lazo cerrado  $(\eta, \xi) = (0, 0)$  asintóticamente estable?

Nótese que una condición *necesaria* para que el origen de (4.1) sea (global y) asintóticamente estable es que el origen del sistema

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$$

sea (global y) asintóticamente estable (¿por qué?). Entonces el sistema (4.1) es una conexión en cascada (o serie) de dos sistemas asintóticamente estables. En el caso lineal e invariante en el tiempo esto es suficiente para asegurar la estabilidad del origen del sistema completo, pero en el caso no lineal la situación es más compleja, como se verá a continuación.

#### 4.1.1. Estabilidad Local de la cascada

**Lema 4.1** *El origen de (4.1) es Asintóticamente Estable (¡localmente!) si el origen  $\eta = 0$  del sistema*

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$$

*es local y asintóticamente estable.*

**Prueba.** Por el teorema converso de Lyapunov [28, Teorema 4.16] existe una función de Lyapunov  $V_1(\eta)$ , continuamente diferenciable, tal que

$$\frac{\partial V_1(\eta)}{\partial \eta} f_0(\eta, 0) \leq -\alpha_3(\|\eta\|)$$

en alguna vecindad de  $\eta = 0$ , donde  $\alpha_3$  es una función tipo  $\mathcal{K}$ . Sea  $P = P^T > 0$  la solución de la ecuación algebraica de Lyapunov

$$P(A - BK) + (A - BK)^T P = -I$$

y use

$$V(\eta, \xi) = V_1(\eta) + k\sqrt{\xi^T P \xi}, \quad k > 0$$

como candidata a función de Lyapunov para (4.1). Nótese que aunque  $V$  no es continuamente diferenciable en la variedad  $\xi = 0$  el teorema de Lyapunov sigue siendo válido en este caso (¿por qué?).

La derivada  $\dot{V}$  está dada por

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{\partial V_1(\eta)}{\partial \eta} f_0(\eta, \xi) + \frac{k}{2\sqrt{\xi^T P \xi}} \xi^T \left[ P(A - BK) + (A - BK)^T P \right] \xi \\ &= \frac{\partial V_1(\eta)}{\partial \eta} f_0(\eta, 0) + \frac{\partial V_1(\eta)}{\partial \eta} [f_0(\eta, \xi) - f_0(\eta, 0)] - \frac{k \xi^T \xi}{2\sqrt{\xi^T P \xi}}\end{aligned}$$

En cualquier vecindad *acotada*  $\mathcal{V}$  del origen, y por la diferenciabilidad

contínua de  $V_1$  y  $f_0$ , es posible acotar

$$\begin{aligned}\|f_0(\eta, \xi) - f_0(\eta, 0)\| &\leq k_1 \|\xi\| \\ \left\| \frac{\partial V_1(\eta)}{\partial \eta} \right\| &\leq k_2\end{aligned}$$

y entonces

$$\dot{V} \leq -\alpha_3(\|\eta\|) + k_1 k_2 \|\xi\| - k k_3 \|\xi\|$$

para algunas constantes positivas  $k_1, k_2, k_3$ . Eligiendo  $k > k_1 k_2 / k_3$  se asegura que  $\dot{V}$  es negativa definida. Por lo tanto el origen es local y asintóticamente estable. ■

**Comentario 4.2** *El lema anterior sólo es válido en regiones acotadas y no puede ser extendido al caso global.*

**Comentario 4.3** *Nótese que la función candidata de Lyapunov más simple, es decir, la suma de las funciones de Lyapunov para cada uno de los sistemas de la cascada,  $W(\eta, \xi) = V_1(\eta) + k \xi^T P \xi$ ,  $k > 0$  no es útil en este caso!*

#### 4.1.2. Estabilidad Global de la cascada

Si el origen  $\eta = 0$  del sistema

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$$

es global y asintóticamente estable ¿será el origen de la cascada

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f_0(\eta, \xi) \\ \dot{\xi} &= (A - BK)\xi\end{aligned}$$

global y asintóticamente estable? En general la respuesta es ¡NO!

**Ejemplo 4.4** Considere el sistema de segundo orden

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= -\eta + \eta^2\xi \\ \dot{\xi} &= v\end{aligned}$$

El origen de

$$\dot{\eta} = -\eta$$

es global y exponencialmente estable, y el origen de

$$\dot{\xi} = -k\xi, \quad k > 0$$

es también global y exponencialmente estable. Sin embargo, el origen de

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= -\eta + \eta^2\xi \\ \dot{\xi} &= -k\xi, \quad k > 0\end{aligned}$$

no es global y asintóticamente estable! (Ver simulaciones en Figura 4.4)

Para calcular la región de atracción del origen, considere la variable  $v = \eta\xi$  y nótese que

$$\dot{v} = \dot{\eta}\xi + \eta\dot{\xi} = -\eta\xi + \eta^2\xi^2 - k\eta\xi = -(1+k)v + v^2$$

- Si  $v_0 = (1+k)$ , entonces  $v(t) = 1+k$  para todo  $t \geq 0$ .
- Si  $v_0 > (1+k)$ , entonces  $v(t) \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

$$\begin{aligned}x' &= -x + x^2 y \\y' &= -2y\end{aligned}$$

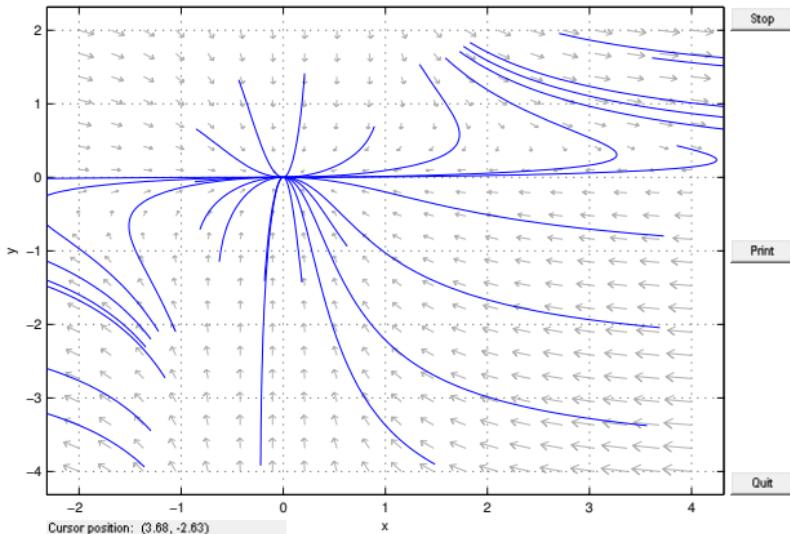


Figura 4.1: Simulaciones con  $k = 2$

- Si  $v_0 < (1 + k)$ , entonces  $v(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Por lo tanto el conjunto  $\{\eta\xi < 1 + k\}$  es invariante positivo y, mediante un análisis adicional, se puede mostrar que corresponde a la región de atracción del sistema.

Podría pensarse que la cascada se puede estabilizar, dado que el sistema maestro ( $\xi$ ) es estable y el esclavo ( $\eta$ ) es también globalmente estable con entrada cero, haciendo que  $\xi(t) \rightarrow 0$  rápidamente. Aunque esto es razonable, y funciona bien en muchas ocasiones, no es siempre cierto debido al *Fenómeno de Pico*.

**Ejemplo 4.5** Considere el sistema de tercer orden

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= -\frac{1}{2}(1 + \xi_2)\eta^3 \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= v\end{aligned}$$

*El origen del subsistema esclavo*

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{2}\eta^3$$

*es global y asintóticamente estable. Si se define el control  $v$  como*

$$v = -k^2\xi_1 - 2k\xi_2 \triangleq -K\xi, \quad k > 0$$

*entonces el subsistema maestro será*

$$\dot{\xi} = (A - BK)\xi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & -2k \end{bmatrix}\xi$$

*cuyos valores propios son  $\{-k, -k\}$ , y la matriz de transición de estados está dada por*

$$e^{(A-BK)t} = \begin{bmatrix} (1+kt)e^{-kt} & te^{-kt} \\ -k^2te^{-kt} & (1-kt)e^{-kt} \end{bmatrix}$$

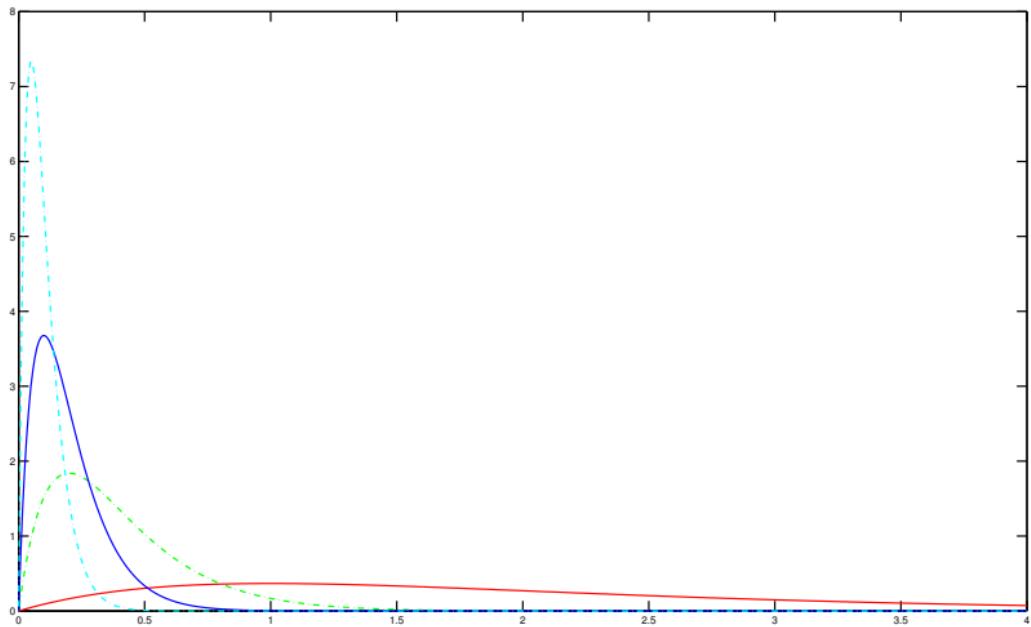


Figura 4.2: Gráficas de la función  $k^2 t e^{-kt}$  para valores de  $k = [1, 5, 10, 20]$

Cuando  $k \rightarrow \infty$  las trayectorias del sistema maestro convergen a cero arbitrariamente rápido. El término  $(2, 1)$  tiene un pico (Ver 4.5)

$$\max_{t \geq 0} \{k^2 t e^{-kt}\} = [k^2 t e^{-kt}]_{t=1/k} = \frac{k}{e} \rightarrow \infty \text{ cuando } k \rightarrow \infty$$

Si

$$\begin{aligned} \xi(0) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \xi(t) = \begin{bmatrix} (1 + kt)e^{-kt} \\ -k^2 t e^{-kt} \end{bmatrix} \\ &\implies \dot{\eta} = -\frac{1}{2} (1 - k^2 t e^{-kt}) \eta^3, \quad \eta(0) = \eta_0 \\ &\implies \eta^2(t) = \frac{\eta_0^2}{1 + \eta_0^2 [t + (1 + kt) e^{-kt} - 1]} \end{aligned}$$

Si  $\eta_0^2 > 1$  el sistema tendrá un escape a infinito en tiempo finito, si  $k$  se selecciona suficientemente grande.

**Lema 4.6** *El origen del sistema en cascada*

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f_0(\eta, \xi) \\ \dot{\xi} &= (A - BK)\xi\end{aligned}$$

*es global y asintóticamente estable si el sistema*

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$$

*es Entrada-a-Estados Estable.*

**Prueba.** Use el Lema 4.7 de [28]: El origen del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_2)\end{aligned}$$

es GAE si el sistema esclavo es ISS y el origen del sistema maestro es GAE. ■

### 4.1.3. Robustez ante incertidumbres

La discusión anterior muestra que todo sistema Linealizable Parcialmente (o linealizable entrada-salida), y que sea de fase mínima, puede ser estabilizado (localmente) mediante la ley de control por retroalimentación de estados

$$u = \alpha(x) - \gamma^{-1}(x) K T_2(x)$$

**Comentario 4.7** Nótese que esta ley de control es independiente de la función  $\phi(x) = T_1(x)$ , que satisface (en el caso de una sola entrada) la ecuación en derivadas parciales (EDP)

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} g(x) = 0$$

¿Cuál es el efecto de las incertidumbres en  $\alpha(x)$ ,  $\gamma(x)$ , y  $T_2(x)$  ?

Sean  $\hat{\alpha}(x)$ ,  $\hat{\gamma}(x)$ , y  $\hat{T}_2(x)$  modelos nominales de  $\alpha(x)$ ,  $\gamma(x)$ , y  $T_2(x)$ . Con la ley de control

$$u = \hat{\alpha}(x) - \hat{\gamma}^{-1}(x) K \hat{T}_2(x)$$

el sistema en lazo cerrado es (en coordenadas  $z$ )

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$$

$$\dot{\xi} = A\xi + B\gamma(x) [\hat{\alpha}(x) - \hat{\gamma}^{-1}(x) K \hat{T}_2(x) - \alpha(x)] + BKT_2(x) - BK\xi$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f_0(\eta, \xi) \\ \dot{\xi} &= (A - BK)\xi + B\delta(z)\end{aligned}\tag{4.2}$$

$$\delta = \gamma [\hat{\alpha} - \alpha + \gamma^{-1}KT_2 - \hat{\gamma}^{-1}K\hat{T}_2]$$

Este sistema constituye una perturbación del sistema nominal. Lo analizamos utilizando las herramientas de sistemas perturbados.

**Lema 4.8** Considera el sistema en lazo cerrado (4.2), donde  $(A - BK)$  es Hurwitz.

- Si  $\|\delta(z)\| \leq \varepsilon$  para todo  $z$ , y  $\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$  es Entrada-a-Estados Estable, entonces el estado  $z$  será Global y Finalmente Acotado por una función clase  $\mathcal{K}$  de  $\varepsilon$ .
- Si  $\|\delta(z)\| \leq k \|z\|$  en alguna vecindad de  $z = 0$ , con  $k$  suficientemente pequeña, y el origen de  $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$  es exponencialmente estable, entonces  $z = 0$  es un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema (4.2).

**Prueba.** Sea

$$V(\xi) = \xi^T P \xi$$

dónde  $P = P^T > 0$  es la solución de la ecuación algebraica de Lyapunov

$$P(A - BK) + (A - BK)^T P = -I .$$

Esta es una función de Lyapunov para el subsistema lineal nominal de (4.2). Luego, tomando su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema perturbado (4.2) se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{V}(\xi) &= \xi^T \left( P(A - BK) + (A - BK)^T P \right) \xi + 2\xi^T PB\delta(z) \\ &\leq -\|\xi\|_2^2 + 2\|PB\|_2 \|\xi\|_2 \|\delta(z)\|_2\end{aligned}$$

Si  $\|\delta(z)\|_2 \leq \varepsilon$  entonces se tiene

$$\dot{V}(\xi) \leq -\|\xi\|_2^2 + 2\varepsilon\|PB\|_2 \|\xi\|_2 \leq -\frac{1}{2}\|\xi\|_2^2, \quad \forall \|\xi\|_2 \geq 4\varepsilon\|PB\|_2$$

Por lo tanto, aplicando el teorema 4.18 de [28] se puede concluir que existen un tiempo finito  $T$  y una constante positiva  $c$  tales que

$$\|\xi(t)\|_2 \leq c\varepsilon, \quad \forall t \geq T$$

De la estabilidad Entrada-a-Estados del sistema  $\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$  se sigue que

$$\begin{aligned}\|\eta(t)\|_2 &\leq \beta(\|\eta(T)\|_2, t - T) + \gamma_0 \left( \sup_{t \geq T} \|\xi(t)\|_2 \right) \\ &\leq \beta(\|\eta(T)\|_2, t - T) + \gamma_0(c\varepsilon)\end{aligned}$$

dónde  $\beta$  es una función tipo  $\mathcal{KL}$ , y  $\gamma_0$  es una función tipo  $\mathcal{K}$ . Después de un cierto tiempo finito se satisface

$$\beta(\|\eta(T)\|_2, t - T) \leq \varepsilon$$

y por lo tanto  $z(t)$  está finalmente acotada

$$\|z(t)\|_2 \leq \|\xi(t)\|_2 + \|\eta(t)\|_2 \leq c\varepsilon + \varepsilon + \gamma_0(c\varepsilon)$$

que es una función tipo  $\mathcal{K}$  de  $\varepsilon$ .

Para probar la segunda parte del lema, recuérdese que por el teorema converso de Lyapunov [28, Teorema 4.16] existe una función de Lyapunov  $V_1(\eta)$ , continuamente diferenciable, tal que

$$\begin{aligned} c_1 \|\eta\|_2^2 &\leq V_1(\eta) \leq c_2 \|\eta\|_2^2 \\ \frac{\partial V_1(\eta)}{\partial \eta} f_0(\eta, 0) &\leq -c_3 \|\eta\|_2^2 \\ \left\| \frac{\partial V_1(\eta)}{\partial \eta} \right\|_2 &\leq c_4 \|\eta\|_2 \end{aligned}$$

en alguna vecindad de  $\eta = 0$ . Usando

$$V(z) = bV_1(\eta) + \xi^T P \xi, \quad b > 0$$

como candidata a función de Lyapunov para (4.2) se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= b \frac{\partial V_1(\eta)}{\partial \eta} f_0(\eta, 0) + b \frac{\partial V_1(\eta)}{\partial \eta} [f_0(\eta, \xi) - f_0(\eta, 0)] + \\
&\quad + \xi^T \left[ P(A - BK) + (A - BK)^T P \right] \xi + 2\xi^T PB\delta(z) \\
&\leq -bc_3 \|\eta\|_2^2 + bc_4 L \|\xi\|_2 \|\eta\|_2 - \|\xi\|_2^2 + \\
&\quad + 2k \|PB\|_2 \|\xi\|_2^2 + 2k \|PB\|_2 \|\xi\|_2 \|\eta\|_2 \\
&= - \begin{bmatrix} \|\eta\|_2 \\ \|\xi\|_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} bc_3 & -\left(\frac{1}{2}bc_4L + k\|PB\|_2\right) \\ -\left(\frac{1}{2}bc_4L + k\|PB\|_2\right) & 1 - 2k\|PB\|_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\eta\|_2 \\ \|\xi\|_2 \end{bmatrix} \\
&\triangleq - \begin{bmatrix} \|\eta\|_2 \\ \|\xi\|_2 \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} \|\eta\|_2 \\ \|\xi\|_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

dónde  $L$  es una constante de Lipschitz de  $f_0(\eta, \xi)$  con respecto a  $\xi$ . Haciendo  $b = k$ , se puede ver que

$$\begin{aligned}\det Q &= kc_3(1 - 2k\|PB\|_2) - \left(\frac{1}{2}kc_4L + k\|PB\|_2\right)^2 \\ &= k \left\{ c_3 - \left[ 2c_3\|PB\|_2 + \left(\frac{1}{2}c_4L + \|PB\|_2\right)^2 \right] k \right\} > 0\end{aligned}$$

si

$$k < \frac{c_3}{\left[ 2c_3\|PB\|_2 + \left(\frac{1}{2}c_4L + \|PB\|_2\right)^2 \right]}$$

Entonces  $Q$  es positiva definida para una  $k$  suficientemente pequeña. Por lo tanto el origen es Exponencialmente Estable. ■

# Lección 5

## Funciones de Lyapunov de control

Motivación:

- Para  $\dot{x} = f(x)$ : Estabilidad asintótica  $\Leftrightarrow$  Existe una función de Lyapunov.
- Para  $\dot{x} = f(x, u)$ : Estabilizabilidad asintótica  $\Leftrightarrow$  Existe una función de Lyapunov de Control.

Considere el sistema SI (El caso MI es análogo)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x) u \\ f(0) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

y suponga que existe una ley de control por retroalimentación de los estados

$$u = \psi(x)$$

continua, tal que el origen del sistema en lazo cerrado

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \psi(x)$$

es asintóticamente estable.

Por el teorema converso de Lyapunov, existe una función de Lyapunov  $V(x)$  tal que

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} [f(x) + g(x)\psi(x)] < 0, \quad \forall x \in D, \quad x \neq 0$$

Si  $u = \psi(x)$  estabiliza globalmente al origen, entonces  $D = \mathbb{R}^n$  y  $V(x)$  es radialmente no acotada.

De la desigualdad

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} [f(x) + g(x)\psi(x)] < 0, \quad \forall x \in D, \quad x \neq 0$$

se concluye que

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} g(x) = 0, \quad \text{para algún } x \in D, \quad x \neq 0 \implies \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) < 0$$

Además, ya que  $\psi(x)$  es continua, y  $\psi(0) = 0$ ,  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $x \neq 0$  y  $\|x\| < \delta$  existe  $u$  con  $\|u\| < \epsilon$  tal que

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} [f(x) + g(x)u] < 0$$

### Propiedad de control pequeño (PCP)

**Definición 5.1** Una función  $V(x)$ , continuamente diferenciable y positiva definida, es una Función de Lyapunov de Control (FLC) para el sistema

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

si

■

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} g(x) = 0, \text{ para algún } x \in D, x \neq 0 \implies \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) < 0 \quad (5.1)$$

- Satisface la propiedad de Control Pequeño (PCP).

*Es una Función de Lyapunov de Control Global si es radialmente no acotada y (5.1) se satisface para  $D = \mathbb{R}^n$ .*

**Teorema 5.2 (Teorema de Arstein)** *Sea el sistema*

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u,$$

*con  $f(0) = 0$ . Entonces el origen  $x = 0$  es Globalmente Estabilizable Asintóticamente por una ley de control retroalimentado  $u = \psi(x)$ , continua en todas partes, excepto posiblemente en  $x = 0$ , si y sólo si este posee una FLC. Si además se satisface la PCP, entonces la ley de control puede ser continua en todas partes.*

**Teorema 5.3** *Sea  $V(x)$  una FLC para el sistema*

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u ,$$

entonces el origen es estabilizable por

$$u = \psi(x) = \begin{cases} -\frac{\frac{\partial V}{\partial x}f + \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}f\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}g\right)^4}}{\left(\frac{\partial V}{\partial x}g\right)} & \text{si } \frac{\partial V(x)}{\partial x}g(x) \neq 0 \\ 0, & \text{si } \frac{\partial V(x)}{\partial x}g(x) = 0. \end{cases}$$

Fórmula de Sontag

La función  $\psi(x)$  es continua para toda  $x \in D_0$  (una vecindad del origen) que incluye  $x = 0$ .

Si  $f$  y  $g$  son suaves, entonces  $\psi(x)$  es suave para  $x \neq 0$ .

Sea  $V(x)$  una FLC global, entonces el control  $u = \psi(x)$  estabiliza globalmente el origen.

**Comentario 5.4** En el caso multivariable ( $u \in \mathbb{R}^m$ ) la fórmula de Son-

tag se puede escribir como

$$u = \psi(x) = \begin{cases} -\frac{L_f V(x) + \sqrt{\left[L_f V(x)\right]^2 + |L_g V(x)|^4}}{|L_g V(x)|^2} [L_g V(x)]^T & \text{si } L_g V(x) \neq 0 \\ 0, & \text{si } L_g V(x) = 0. \end{cases}$$

*Fórmula de Sontag*

Nótese que en este caso  $g(x)$  es una matriz con  $m$  columnas,  $g(x) = [g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)]$ , y

$$L_g V(x) = [L_{g1} V(x), L_{g2} V(x), \dots, L_{gm} V(x)].$$

**Prueba.** Para la prueba de las propiedades de  $\psi$  véase [46, Sección 5.9] o [24, Sección 9.4]. Ahora se probará que el control propuesto efectivamente estabiliza el origen

$$\dot{V} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} [f(x) + g(x) \psi(x)]$$

Consideremos dos casos:

Si  $\frac{\partial V(x)}{\partial x}g(x) = 0$  entonces

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x}[f(x) + g(x)\psi(x)] = \frac{\partial V(x)}{\partial x}f(x) < 0 \text{ para } x \neq 0$$

Si  $\frac{\partial V(x)}{\partial x}g(x) \neq 0$

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial x}f - \frac{\partial V}{\partial x}g \frac{\frac{\partial V}{\partial x}f + \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}f\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}g\right)^4}}{\left(\frac{\partial V}{\partial x}g\right)} \\ &= -\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}f\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}g\right)^4} < 0 \text{ para } x \neq 0\end{aligned}$$



- $\psi(x)$  hace que el punto de equilibrio  $x = 0$  sea global y asintóticamente estable

- $\psi(x)$  es tan suave como  $L_f V$  y  $L_g V$ , excepto posiblemente en el origen ( $x = 0$ ).

Problema: ¿Cómo se puede encontrar una Función de Lyapunov de Control (FLC)?

**Comentario 5.5** *Las propiedades de FLC y PCP se preservan ante transformaciones de retroalimentación, es decir, retroalimentación y cambio de coordenadas (difeomórfica).*

Si se conoce algún control estabilizante y una función de Lyapunov correspondiente  $V$ , entonces  $V$  es una FLC.

- Linealización por retroalimentación

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u, \quad z = T(x), \quad \dot{z} = (A - BK)z$$

$$P(A - BK) + (A - BK)^T P = -Q, \quad Q = Q^T > 0$$

$$V(z) = z^T P z = T^T(x) P T(x) \text{ es una FLC}$$

- Mediante el diseño de Backstepping se obtiene una FLC.

**Comentario 5.6** Una ley de control estabilizante alternativa para sistemas linealizables exactamente se puede obtener de la siguiente manera:

- Encuentre una FLC para el sistema LIT transformado (resolviendo la ecuación algebraica de Lyapunov)
- Use la fórmula de Sontag en vez de la ley de control linealizante.

**Ejemplo 5.7**

$$\dot{x} = ax - bx^3 + u, \quad a, b > 0$$

*Linealización por retroalimentación:*

$$u = -(k + a)x + bx^3, \quad k > 0, \implies \dot{x} = -kx$$

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad \text{es una FLC}$$

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x}g(x) = x, \quad \frac{\partial V(x)}{\partial x}f(x) = x(ax - bx^3)$$

$$-\frac{\frac{\partial V}{\partial x}f + \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}f\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}g\right)^4}}{\left(\frac{\partial V}{\partial x}g\right)} = -\frac{x(ax - bx^3) + \sqrt{x^2(ax - bx^3)^2 + x^4}}{x}$$
$$=$$

$$\psi(x) = -ax + bx^3 - x\sqrt{(a - bx^2)^2 + 1}$$

Compárela con

$$u = -ax + bx^3 - kx , \quad k > 0 .$$

Método	Expresión	pequeño $ x $	gran $ x $
$LR-u$	$-ax + bx^3 - kx$	$-(a + k)x$	$bx^3$
$LR-LC$	$\dot{x} = -kx$	$\dot{x} = -kx$	$\dot{x} = -kx$
$FLC-u$	$-ax + bx^3 - x\sqrt{(a - bx^2)^2 + 1}$	$-(a + \sqrt{a^2 + 1})x$	$-ax$
$FLC-LC$	$\dot{x} = -x\sqrt{(a - bx^2)^2 + 1}$	$\dot{x} = -\sqrt{a^2 + 1}x$	$\dot{x} = -bx^3$

**Lema 5.8** Sea  $V(x)$  una FLC para el sistema

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u ,$$

y supóngase que

$$\frac{\partial V(0)}{\partial x} = 0 .$$

Entonces la fórmula de Sontag tiene un margen de ganancia de  $[\frac{1}{2}, \infty)$ , es decir,  $u = k\psi(x)$  es estabilizante para toda  $k \geq \frac{1}{2}$ .

**Prueba.** Sea

$$q(x) = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\partial V}{\partial x} f + \sqrt{\left( \frac{\partial V}{\partial x} f \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial x} g \right)^4} \right], \quad q(0) = 0.$$

$$\text{Si } \frac{\partial V(x)}{\partial x} g(x) \neq 0 \implies q(x) > 0$$

$$\text{Si } \frac{\partial V(x)}{\partial x} g(x) = 0 \implies q(x) = 0$$

$q(x)$  es positiva semidefinida.

$$u = k\psi(x) \implies \dot{x} = f(x) + g(x)k\psi(x)$$

$$\dot{V} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V(x)}{\partial x} g(x) k\psi(x)$$

$$\text{Si } \frac{\partial V(x)}{\partial x} g(x) = 0 \implies \dot{V} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) < 0 \text{ para } x \neq 0$$

$$\text{Si } \frac{\partial V(x)}{\partial x} g(x) \neq 0 \implies \dot{V} = -q(x) + q(x) + \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V(x)}{\partial x} g(x) k\psi(x)$$

pero

$$q(x) + \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V(x)}{\partial x} g(x) k\psi(x) = \\ - \left( k - \frac{1}{2} \right) \left[ \frac{\partial V}{\partial x} f + \sqrt{\left( \frac{\partial V}{\partial x} f \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial x} g \right)^4} \right]$$

■

# Una modificación de la fórmula de Sontag

Elíjase una función  $\gamma(x)$  tal que

- $\gamma(x) \geq 0$  y  $\gamma(0) = 0$
- Si una solución acotada de la ecuación  $\dot{x} = f(x)$  es tal que  $\gamma(x(t)) \equiv 0$ , entonces  $x(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . (Por ejemplo, esto es cierto si  $\gamma(x) > 0$  para toda  $x \neq 0$ .)

Dada una FLC  $V(x)$  considere la ley de control dada por

$$u = \psi(x) = \begin{cases} -\frac{L_f V(x) + \sqrt{\left[L_f V(x)\right]^2 + \gamma(x)|L_g V(x)|^2}}{|L_g V(x)|^2} [L_g V(x)]^T & \text{si } L_g V(x) \neq 0 \\ 0, & \text{si } L_g V(x) = 0. \end{cases}$$

Obsérvese que

- La elección de  $\gamma(x) = |L_g V(x)|^2$  satisface los requisitos anteriores y resulta en la Fórmula de Sontag.

- Hay muchas otras elecciones posibles de  $\gamma(x)$ : Gran flexibilidad!

¿Cuáles son las propiedades de esta ley de control modificada?

- $\psi(x)$  hace que el punto de equilibrio  $x = 0$  sea global y asintóticamente estable
- $\psi(x)$  es tan suave como  $L_f V$ ,  $L_g V$  y  $\gamma(x)$ , excepto posiblemente dónde  $\gamma(x) = L_f V(x) = 0$ .
- Si  $L_f V$ ,  $L_g V$  y  $\gamma(x)$  son localmente Lipschitz continuas, entonces también lo será  $\psi(x)$ , excepto posiblemente en  $x = 0$ .
- Si  $V(x)$  tiene los mismos conjuntos de nivel que la solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) asociada con la función de costo

$$J = \int_0^{\infty} [\gamma(x(\tau)) + |u(\tau)|^2] d\tau$$

entonces  $\psi(x)$  es óptima globalmente!

- Este hecho se puede usar para diseñar leyes de control localmente óptimas.

## Literatura

Algunas referencia para esta lección son: [12, Capítulo 12], [46, Sección 5.9]

# Lección 6

## Backstepping

Este es un método para construir una Función de Lyapunov de Control (FLC) para una clase especial de sistemas.

## 6.1. El caso más simple: Backstepping de integrador

La idea básica del método conocido como "backstepping" se puede explicar, en su forma más simple, considerando el sistema con entrada escalar

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f(\eta) + g(\eta)\xi \\ \dot{\xi} &= u, \quad \eta \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Nótese que este sistema se puede ver como una conexión en cascada, dónde el maestro es un integrador y el esclavo es el sistema no lineal  $\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\xi$ . El objetivo de control es estabilizar el origen utilizando retroalimentación de los estados. El diseño se divide en dos etapas:

### 6.1.1. Diseño del Control virtual:

Véase a  $\xi$  como una entrada de control *virtual* del sistema

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\xi$$

Suponga que existe una ley de control retroalimentado

$$\xi = \phi(\eta)$$

que estabiliza el origen de

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)$$

y que, además, conocemos una función de Lyapunov  $V(\eta)$  que lo asegura

$$\dot{V}(\eta) = \frac{\partial V(\eta)}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] \leq -W(\eta), \quad \forall \eta \in D$$

## 6.1.2. Diseño del control verdadero por backstepping

**Cambio de coordenadas** Como no se puede implementar el control virtual  $\xi = \phi(\eta)$ , definimos el error como una nueva variable

$$z = \xi - \phi(\eta)$$

Escribiendo el sistema en términos de esta nueva variable se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + g(\eta)z \\ \dot{z} &= u - \frac{\partial\phi(\eta)}{\partial\eta} [f(\eta) + g(\eta)\xi] .\end{aligned}$$

Si se diseña la variable de control como

$$u = \frac{\partial\phi(\eta)}{\partial\eta} [f(\eta) + g(\eta)\xi] + v$$

entonces el sistema se describe como

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + g(\eta)z \\ \dot{z} &= v .\end{aligned}$$

**Comentario 6.1** Nótese que este sistema tiene la misma estructura que el sistema original: Un integrador en cascada con un sistema no lineal. Pero hay una diferencia fundamental: el sistema

$$\dot{\eta} = [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + g(\eta)z$$

tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable cuando la entrada  $z = 0$ . Esto no es siempre el caso en el sistema inicial.

**Diseño del control por Lyapunov** El diseño se realiza proponiendo una función candidata de Lyapunov, en nuestro caso se puede usar

$$V_c(\eta, \xi) = V(\eta) + \frac{1}{2}z^2 .$$

El control  $v$  se elige de tal forma que  $\dot{V}_c$

$$\dot{V}_c = \frac{\partial V(\eta)}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + \frac{\partial V(\eta)}{\partial \eta}g(\eta)z + zv$$

sea negativa definida. Aquí se propone

$$v = -\frac{\partial V(\eta)}{\partial \eta} g(\eta) z - kz, \quad k > 0$$

con lo que

$$\dot{V}_c \leq -W(\eta) - kz^2$$

El control finalmente resulta ser

$$u = \frac{\partial \phi(\eta)}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta) \xi] - \frac{\partial V(\eta)}{\partial \eta} g(\eta) z - kz, \quad k > 0$$

**Comentario 6.2** En este caso, y en contraste con la Linealización Parcial (Lección 4), la suma de las funciones de Lyapunov para los sistemas individuales se convierte en una función de Lyapunov para el sistema en cascada! Esto es gracias a la acción del control!

**Comentario 6.3** También a diferencia de la Linealización Parcial (Lección 4) el subsistema esclavo de la cascada no tiene que ser estable con entrada cero, sino que se puede estabilizar mediante el control virtual!

**Ejemplo 6.4** Considera el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 - x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= u , \quad x_1 , x_2 , u \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Una ley de control virtual para el primer sistema

$$x_2 = \phi(x_1) = -x_1^2 - x_1$$

estabiliza globalmente el origen de

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_1^3$$

como lo prueba la función de Lyapunov

$$V(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2 \implies \dot{V} = -x_1^2 - x_1^4 < 0 , \forall x_1 \in \mathbb{R}$$

Introduciendo el cambio de variables

$$z_2 = x_2 - \phi(x_1) = x_2 + x_1 + x_1^2$$

*el sistema se puede representar como*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 - x_1^3 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= u + (1 + 2x_1)(-x_1 - x_1^3 + z_2)\end{aligned}$$

*Se propone como candidata a Función de Lyapunov*

$$V_c(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2$$

*cuya derivada*

$$\begin{aligned}\dot{V}_c &= x_1(-x_1 - x_1^3 + z_2) + z_2[u + (1 + 2x_1)(-x_1 - x_1^3 + z_2)] \\ &= -x_1^2 - x_1^4 + z_2[x_1 + (1 + 2x_1)(-x_1 - x_1^3 + z_2) + u]\end{aligned}$$

*eligiendo*

$$u = -x_1 - (1 + 2x_1)(-x_1 - x_1^3 + z_2) - z_2$$

se hace negativa definida

$$\begin{aligned}\dot{V}_c &= -x_1^2 - x_1^4 - z_2^2 \\ &= -x_1^2 - x_1^4 - (x_2 + x_1 + x_1^2)^2\end{aligned}$$

¡El método puede ser aplicado recursivamente!

**Ejemplo 6.5** Considera el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 - x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 , \\ \dot{x}_3 &= u ,\end{aligned}$$

Para el sistema esclavo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 - x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 ,\end{aligned}$$

*una ley de control virtual es*

$$x_3 = -x_1 - (1 + 2x_1) (-x_1 - x_1^3 + z_2) - z_2 = \phi(x_1, x_2)$$

*estabiliza globalmente el origen como lo prueba la función de Lyapunov*

$$V = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 \implies \dot{V} = -x_1^2 - x_1^4 - z_2^2 < 0 , \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

*Introduciendo el cambio de variables*

$$z_3 = x_3 - \phi(x_1, x_2)$$

*el sistema se puede representar como*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 - x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= \phi(x_1, x_2) + z_3 , \\ \dot{z}_3 &= u - \frac{\partial \phi}{\partial x_1} (x_1^2 - x_1^3 + x_2) - \frac{\partial \phi}{\partial x_2} (\phi + z_3) ,\end{aligned}$$

Se propone como candidata a Función de Lyapunov

$$V_c(x) = V(x_1, z_2) + \frac{1}{2}z_3^2$$

cuya derivada es

$$\begin{aligned}\dot{V}_c &= \frac{\partial V}{\partial x_1} (x_1^2 - x_1^3 + x_2) + \frac{\partial V}{\partial x_2} (z_3 + \phi) + \\ &\quad + z_3 \left[ u - \frac{\partial \phi}{\partial x_1} (x_1^2 - x_1^3 + x_2) - \frac{\partial \phi}{\partial x_2} (z_3 + \phi) \right] \\ &= -x_1^2 - x_1^4 - (x_2 + x_1 + x_1^2)^2 + \\ &\quad + z_3 \left[ \frac{\partial V}{\partial x_2} - \frac{\partial \phi}{\partial x_1} (x_1^2 - x_1^3 + x_2) - \frac{\partial \phi}{\partial x_2} (z_3 + \phi) + u \right].\end{aligned}$$

Eligiendo

$$u = -\frac{\partial V}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi}{\partial x_1} (x_1^2 - x_1^3 + x_2) + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} (z_3 + \phi) - z_3$$

se hace negativa definida.

## 6.2. Un caso más general

La idea del backstepping puede generalizarse al sistema

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f(\eta) + g(\eta)\xi \\ \dot{\xi} &= f_a(\eta, \xi) + g_a(\eta, \xi)u, \quad g_a(\eta, \xi) \neq 0,\end{aligned}$$

dónde  $\eta \in \mathbb{R}^n$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $u \in \mathbb{R}$ .

Mediante la ley de control

$$u = \frac{1}{g_a(\eta, \xi)} [v - f_a(\eta, \xi)]$$

el sistema se convierte en

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f(\eta) + g(\eta)\xi \\ \dot{\xi} &= v,\end{aligned}$$

que está en la forma original.

### 6.3. Sistemas en la Forma de Retroalimentación Estricta

Aplicando la idea anterior en forma recursiva se puede concluir que la idea de Backstepping puede ser aplicada a sistemas en la forma de retroalimentación estricta, es decir, un sistema descrito por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_0(x) + g_0(x) z_1 \\ \dot{z}_1 &= f_1(x, z_1) + g_1(x, z_1) z_2 , \\ \dot{z}_2 &= f_2(x, z_1, z_2) + g_2(x, z_1, z_2) z_3 , \\ &\vdots \\ \dot{z}_{k-1} &= f_{k-1}(x, z_1, \dots, z_{k-1}) + g_{k-1}(x, z_1, \dots, z_{k-1}) z_k , \\ \dot{z}_k &= f_k(x, z_1, \dots, z_k) + g_k(x, z_1, \dots, z_k) u ,\end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{R}$  y

$$g_i(x, z_1, \dots, z_i) \neq 0 \text{ para } 1 \leq i \leq k$$

**Ejercicio 6.6** *Halle el grado relativo si  $y = z_1$*

**Ejercicio 6.7** *Halle la Dinámica Cero si  $y = z_1$  y*

$$f_i(x, 0) = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq k$$

**Comentario 6.8** *Nótese que el subsistema  $z$  es linealizable por retroalimentación. Así que el sistema en la forma de retroalimentación estricta es linealizable parcialmente (entrada/salida). Así que el Backstepping se aplica esencialmente a la clase de sistemas que son linealizables parcialmente.*

**Ejemplo 6.9** (*Variación del Ejemplo 4.4*) *Considere el sistema*

$$\dot{\eta} = -\eta + \eta^2\xi$$

$$\dot{\xi} = u .$$

*El sistema esclavo*

$$\dot{\eta} = -\eta + \eta^2 \xi$$

*con la ley de control virtual*

$$\xi = 0 \implies \dot{\eta} = -\eta$$

*tiene el punto de equilibrio GEE, y*

$$V_0 = \frac{1}{2}\eta^2 \implies \dot{V}_0 = -\eta^2, \quad \forall \eta \in \mathbb{R}$$

*es una función de Lyapunov. Se propone como candidata a Función de Lyapunov a*

$$V = \frac{1}{2}(\eta^2 + \xi^2)$$

*cuya derivada es*

$$\dot{V} = \eta(-\eta + \eta^2 \xi) + \xi u = -\eta^2 + \xi(\eta^3 + u)$$

*que se puede hacer negativa definida eligiendo el control*

$$u = -\eta^3 - k\xi, \quad k > 0$$

$$\dot{V} = -\eta^2 - k\xi^2 < 0, \quad \forall (\eta, \xi) \in \mathbb{R}^2$$

## 6.4. Backstepping en bloques

La idea del backstepping puede generalizarse al sistema de múltiples entradas

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f(\eta) + G(\eta)\xi \\ \dot{\xi} &= f_a(\eta, \xi) + G_a(\eta, \xi)u, \quad \det G_a(\eta, \xi) \neq 0,\end{aligned}$$

dónde  $\eta \in \mathbb{R}^n$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^p$ ,  $u \in \mathbb{R}^p$ . Suponga que existe una ley de control retroalimentado suave

$$\xi = \phi(\eta), \quad \phi(0) = 0$$

que estabiliza el origen de

$$\dot{\eta} = f(\eta) + G(\eta)\phi(\eta)$$

y que, además, conocemos una función de Lyapunov  $V(\eta)$ , suave y positiva definida, que lo asegura

$$\dot{V}(\eta) = \frac{\partial V(\eta)}{\partial \eta} [f(\eta) + G(\eta)\phi(\eta)] \leq -W(\eta), \quad \forall \eta \in D$$

para alguna función  $W(\eta)$  positiva definida.

Considere la función candidata de Lyapunov

$$V_c(\eta, \xi) = V(\eta) + \frac{1}{2} [\xi - \phi(\eta)]^T [\xi - \phi(\eta)] .$$

El control  $u$  se elige de tal forma que  $\dot{V}_c$

$$\begin{aligned}\dot{V}_c &= \frac{\partial V(\eta)}{\partial \eta} [f(\eta) + G(\eta)\phi(\eta)] + \frac{\partial V(\eta)}{\partial \eta} G(\eta)(\xi - \phi(\eta)) + \\ &+ [\xi - \phi(\eta)]^T \left[ f_a(\eta, \xi) + G_a(\eta, \xi)u - \frac{\partial \phi(\eta)}{\partial \eta} (f(\eta) + G(\eta)\xi) \right]\end{aligned}$$

sea negativa definida. El control

$$\begin{aligned}u &= G_a^{-1}(\eta, \xi) \left[ \frac{\partial \phi(\eta)}{\partial \eta} (f(\eta) + G(\eta)\xi) - \left( \frac{\partial V(\eta)}{\partial \eta} G(\eta) \right)^T \right. \\ &\quad \left. - f_a(\eta, \xi) - k(\xi - \phi(\eta)) \right], \quad k > 0\end{aligned}$$

resulta en

$$\begin{aligned}\dot{V}_c &= \frac{\partial V(\eta)}{\partial \eta} [f(\eta) + G(\eta)\phi(\eta)] - k(\xi - \phi(\eta))^T (\xi - \phi(\eta)) \\ &\leq -W(\eta) - k(\xi - \phi(\eta))^T (\xi - \phi(\eta))\end{aligned}$$

que muestra que el origen  $(\eta, \xi) = (0, 0)$  es asintóticamente estable.

## 6.5. Una versión (ligeramente) más general

### 6.5.1. Agregando un integrador

Supóngase que se tiene un sistema que es equivalente por retroalimentación (transformación + retroalimentación de estados) al sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= F(x_1, \textcolor{red}{x}_2), \quad x_1 \in \mathbb{R}^{n-m}, \quad F(0, 0) = 0 \\ \dot{x}_2 &= u \quad x_2, u \in \mathbb{R}^m \quad F \in C^1\end{aligned}$$

Supóngase que se puede estabilizar al sistema reducido

$$\dot{x}_1 = F(x_1, \textcolor{red}{v}), v = \text{control virtual}$$

con una ley de control  $\textcolor{red}{C}^1$

$$\textcolor{red}{v} = k(\textcolor{red}{x}_1), k(0) = 0$$

y una función de Lyapunov  $V_1(x_1)$ ,  $C^1$ , propia y positiva definida, tales que se cumple

$$\frac{\partial V_1(x_1)}{\partial x_1} F(x_1, k(x_1)) < 0, \text{ para } x_1 \neq 0$$

Entonces se puede construir una FLC (Función de Lyapunov de Control) para el sistema completo...

## 6.5.2. FLC

Una función  $V(x_1, x_2)$ ,  $C^1$ , es FLC para el sistema completo si satisface las dos siguientes condiciones:

$$\frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow x_2 = k(x_1) \quad (6.1)$$

$$x_2 = k(x_1) \Rightarrow \frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial x_1} F(x_1, x_2) = \frac{\partial V_1(x_1)}{\partial x_1} F(x_1, k(x_1))$$

Una solución simple para (6.1-6.2) es

$$V(x_1, x_2) = V_1(x_1) + [x_2 - k(x_1)]^T [x_2 - k(x_1)] \quad (6.3)$$

Otra solución más flexible es:

$$V(x_1, x_2) = \int_0^{V_1(x_1)} \gamma(r) dr + [x_2 - k(x_1)]^T \Gamma(x_1) [x_2 - k(x_1)] \quad (6.4)$$

- $\gamma : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  es  $C^0$ , con  $\gamma(r) > 0$  para  $r > 0$
- $\int_0^\infty \gamma(r) dr = \infty$  (selección simple es  $\gamma \equiv 1$ )
- $\Gamma$  es  $C^1$ , con  $\Gamma^T(x_1) = \Gamma(x_1) > 0$  para todo  $x_1$  (selección simple  $\Gamma \equiv I$ )
- Esto hace a  $V(x_1, x_2)$  una función  $C^1$ , positiva definida y propia.

Verificación de la propiedad de FLC:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(x_1, x_2) &= \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^{V_1(x_1)} \gamma(r) dr + [x_2 - k(x_1)]^T \Gamma(x_1) [x_2 - k(x_1)] \right\} \\
 &= \gamma(V_1(x_1)) \frac{\partial V_1(x_1)}{\partial x_1} F(x_1, x_2) \\
 &\quad + [x_2 - k(x_1)]^T \left\langle \frac{\partial \Gamma(x_1)}{\partial x_1}, F(x_1, x_2) \right\rangle [x_2 - k(x_1)] \\
 &\quad + 2 \underbrace{[x_2 - k(x_1)]^T \Gamma(x_1)}_{\frac{\partial V}{\partial x_2}} \left[ u - \frac{\partial k(x_1)}{\partial x_1} F(x_1, x_2) \right]
 \end{aligned}$$

Si  $\frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0$  entonces  $x_2 = k(x_1)$  y luego

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \gamma(V_1(x_1)) \frac{\partial V_1(x_1)}{\partial x_1} F(x_1, \textcolor{red}{k(x_1)}) < 0, \text{ para } x_1 \neq 0.$$

Adicionalmente  $V(x_1, x_2)$  satisface la Propiedad de Control Pequeño (PCP). Por lo tanto existe una ley de control por retroalimentación continua ( $C^0$ ) que estabiliza globalmente el origen (por ejemplo, úsese la fórmula de Sontag).

Si los datos son suaves, entonces la ley de control es suave.

### 6.5.3. Ejemplo

Sea el sistema en el plano, con control escalar

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^3 + (x_1^2 + \textcolor{red}{x}_2)^3 \\ \dot{x}_2 &= u\end{aligned}$$

- Con  $u = 0$  el origen (punto de equilibrio), es inestable, con escape a infinito en tiempo finito.
- La linealización en el origen no es estabilizable.

Reemplace a  $x_2$  por un control virtual en el subsistema  $x_1$ :

$$\dot{x}_1 = x_1^3 + (x_1^2 + \textcolor{red}{v})^3$$

El control virtual  $v = k(x_1) = -2x_1 - x_1^2$  hace que el sistema

$$\dot{x}_1 = -7x_1^3$$

sea 0-GAE (punto 0 global y asintóticamente estable), con función de Lyapunov  $V(x_1) = x_1^2$

Se propone como FLC para el sistema completo a

$$V(x_1, x_2) = V_1(x_1) + (x_2 - k(x_1))^2 = x_1^2 + (x_2 + 2x_1 + x_1^2)^2$$

- Se puede usar la fórmula de Sontag, o
- Se puede construir un control polinomial que hace  $\dot{V} < 0$

$$\begin{aligned}\dot{V} &= 2x_1 \left[ x_1^3 + (x_1^2 + x_2)^3 \right] \\ &\quad + 2(x_2 + 2x_1 + x_1^2) \left\{ u + 2(1 + x_1) \left[ x_1^3 + (x_1^2 + x_2)^3 \right] \right\}\end{aligned}$$

¿Cómo es el desempeño?

- Hay muchas opciones para el control virtual
- Hay muchas opciones para la FLC
- Hay muchas opciones para la ley de control estabilizante.

¿Cómo explotar estos grados de libertad en el diseño para alcanzar un buen desempeño en lazo cerrado? Problema Abierto.

## 6.6. Desingularización

Cuando la ley de control  $k(x_1)$  no es suficientemente suave (es solo continua  $C^0$  pero no diferenciable  $C^1$ ), entonces la Función  $V(x_1, x_2)$  no es  $C^1$  y el procedimiento anterior no se puede aplicar adecuadamente. En este caso hay dos alternativas:

- Reemplazar al control  $k(x_1)$  por un estabilizador más suave (esto siempre se puede hacer de acuerdo a Arstein). Pero esto en general es complicado.
- Aplicar una técnica de desingularización (ver [40]). En este caso se busca otra FLC suave ( $C^1$ ).

Consideraremos un ejemplo de este segundo procedimiento (para más detalles consúltese el artículo [40]).

Considere el sistema en el plano

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= u.\end{aligned}$$

El sistema linealizado en el origen no es estabilizable, y por lo tanto no existe una ley de control  $C^1$  que estabilice asintóticamente este punto.

Una ley de control (virtual) que estabiliza al “esclavo” es

$$x_2 = k(x_1) = (cx_1)^{\frac{1}{3}}, \quad c > 1,$$

con función de Lyapunov

$$V_1(x_1) = x_1^2, \dot{V}_1 = -2(c-1)x_1^2.$$

### 6.6.1. BS Convencional

Si aplicamos el BS convencional se obtiene que la FLC propuesta (6.3) es

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2) &= x_1^2 + \frac{1}{2} \left( x_2 - (cx_1)^{\frac{1}{3}} \right)^2 \\ &= x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - (cx_1)^{\frac{1}{3}}x_2 + \frac{1}{2}(cx_1)^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Nótese que esta función es  $C^0$  (contínua) pero no es diferenciable en todas partes debido al término  $(cx_1)^{\frac{1}{3}}$ . De hecho, la función no es localmente Lipschitz (la “derivada” en  $x_1 = 0$  es infinita). Si continuamos

con el procedimiento estándar se obtiene que

$$\dot{V} = 2x_1(x_1 - x_2^3) + \left(x_2 - (cx_1)^{\frac{1}{3}}\right) \left(u - \frac{c(x_1 - x_2^3)}{(c|x_1|)^{\frac{2}{3}}}\right)$$

Como

$$\begin{aligned}x_1 - x_2^3 &= x_1 - (x_2 - k(x_1) + k(x_1))^3 \\&= x_1 - (x_2 - k(x_1))^3 - 3(x_2 - k(x_1))^2 k(x_1) \\&\quad - 3(x_2 - k(x_1)) k^2(x_1) - k^3(x_1) \\&= -(1 - c)x_1 - (x_2 - k(x_1)) [x_2^2 + x_2 k(x_1) + k^2(x_1)]\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= -2(1-c)x_1^2 - 2x_1(x_2 - k(x_1)) [x_2^2 + x_2k(x_1) + k^2(x_1)] \\
 &\quad + (x_2 - k(x_1)) \left( u - \frac{c(x_1 - x_2^3)}{(c|x_1|)^{\frac{2}{3}}} \right) \\
 &= -2(1-c)x_1^2 \\
 &\quad + (x_2 - k(x_1)) \left( u - \frac{c(x_1 - x_2^3)}{(c|x_1|)^{\frac{2}{3}}} - 2x_1 [x_2^2 + x_2k(x_1) + k^2(x_1)] \right)
 \end{aligned}$$

Así que una ley de control estabilizante sería

$$u = \frac{c(x_1 - x_2^3)}{(c|x_1|)^{\frac{2}{3}}} + 2x_1 [x_2^2 + x_2k(x_1) + k^2(x_1)] - \alpha \left( x_2 - (cx_1)^{\frac{1}{3}} \right), \quad \alpha > 0.$$

Nótese que esta ley de control es inaceptable, ya que posee una singularidad (discontinuidad infinita) cuando  $x_1 = 0$ .

## 6.6.2. Desingularización

Nótese que cuando se establece la ley de control virtual se cumple

$$x_2 = k(x_1) = (cx_1)^{\frac{1}{3}}, \quad c > 1,$$

que también puede ser expresada en forma equivalente como

$$\varphi(x_1, x_2) \triangleq x_2^{2p-1} - k^{2p-1}(x_1) = x_2^{2p-1} - (cx_1)^{\frac{2p-1}{3}} = 0, \quad p \geq 2.$$

Nótese también que la función

$$\Phi(x_1, x_2) \triangleq \int_0^{x_2} \varphi(x_1, s) ds$$

es  $C^1$  en todas partes y, para toda  $x_1$

$$\lim_{|x_2| \rightarrow \infty} \Phi(x_1, x_2) = \infty.$$

Es posible probar (hacerlo!) que la función

$$V(x_1, x_2) = \Phi(x_1, x_2) - \Phi(x_1, k(x_1)) + \beta V_1^\mu(x_1)$$

es una FLC para el sistema, para toda  $\beta > 0$  y toda  $\mu$  real tal que  $V_1^\mu(x_1)$  sea contínuamente diferenciable ( $C^1$ ). En particular,

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_2^{2p}}{2p} - x_2(cx_1)^{\frac{2p-1}{3}} + \frac{2p-1}{2p}(cx_1)^{\frac{2p}{3}} + \beta(x_1^2)^\mu$$

es un FLC cuando  $\mu \geq \frac{1}{2}$ . Eligiendo  $\mu = \frac{p}{3}$ , la FLC es

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_2^{2p}}{2p} - x_2(cx_1)^{\frac{2p-1}{3}} + \left( \frac{2p-1}{2p}c^{\frac{2p}{3}} + \beta \right) x_1^{\frac{2p}{3}}$$

y es posible probar que la PCP se satisface. Por lo tanto, existe una ley de control continua en todo el espacio que estabiliza el origen.

# Lección 7

Control basado en pasividad

La propiedad de pasividad, que poseen algunos sistemas, puede ser usada para el diseño de controladores.

## 7.1. Idea básica

Considere el sistema

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) , \quad x \in \mathbb{R}^n , \quad u \in \mathbb{R}^p \\ y = h(x) , \quad y \in \mathbb{R}^p \end{cases}$$

$$f(0, 0) = 0 , \quad h(0) = 0$$

**Definición 7.1** *El sistema es **pasivo** si existe una función de almacenamiento de energía  $V(x)$ , continuamente diferenciable y positiva semidefinida, tal que*

$$\dot{V} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, u) \leq u^T y, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n , \quad u \in \mathbb{R}^p$$

**Definición 7.2** *El sistema es de estado cero observable si la única trayectoria del sistema con entrada  $u = 0$*

$$\dot{x} = f(x, 0)$$

*que puede hacer la salida cero, es decir, que puede permanecer en el conjunto  $\{h(x) = 0\}$  es la solución trivial  $x(t) \equiv 0$ .*

Un resultado básico de estabilización asintótica para sistemas pasivos es el siguiente

**Teorema 7.3** *Si el sistema  $\Sigma$  es*

1. *Pasivo, con función de almacenamiento positiva definida y radialmente no acotada, y*
2. *de estado cero observable*

*entonces el origen  $x = 0$  puede ser estabilizado global y asintóticamente mediante la ley de control*

$$u = -\phi(y)$$

*dónde  $\phi$  es cualquier función localmente Lipschitz, tal que  $\phi(0) = 0$  y es pasiva*

$$y^T \phi(y) > 0, \quad \forall y \neq 0$$

**Prueba.** Use la función de almacenamiento  $V(x)$  como candidata a función de Lyapunov para el sistema en lazo cerrado

$$\dot{x} = f(x, -\phi(y))$$

Su derivada es

$$\dot{V} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, u) \leq -y^T \phi(y) \leq 0$$

negativa semidefinida. Además  $\dot{V} = 0$  si y sólo si  $y = 0$ . De la propiedad de estado cero observable se concluye

$$y(t) \equiv 0 \implies u(t) = -\phi(y(t)) \equiv 0 \implies x(t) \equiv 0$$

Por el principio de invariancia de Lasalle el origen es global y asintóticamente estable. ■

Recuérdese que, si la función de almacenamiento es positiva definida, el origen del sistema pasivo es estable, y que la interconexión en retroalimentación negativa de sistemas pasivos es pasiva. Por lo tanto el teorema se puede interpretar de la siguiente manera: la no linealidad pasiva  $\phi$  inyecta amortiguamiento al sistema, haciendo que las trayectorias converjan al origen.

Nótese que hay una gran libertad de elección en la forma de la función de inyección de amortiguamiento  $\phi$ : por ejemplo, se pueden satisfacer restricciones de acotamiento de la entrada.

Ya que el teorema sólo es útil para sistemas pasivos, su utilidad se incrementa si se pueden convertir sistemas no pasivos en pasivos. Hay

dos formas básicas de hacer pasivo a un sistema:

1. Mediante la selección de la salida
2. Por retroalimentación de estados, o

ambos.

## 7.2. Pasivización por elección de la salida

Considere el sistema afín en las entradas

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u$$

y suponga que existe una función  $V(x)$  contínuamente diferenciable, positiva definida, tal que

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq 0, \quad \forall x$$

223

Entonces el sistema es pasivo con respecto a la salida

$$y = h(x) \triangleq \left[ \frac{\partial V(x)}{\partial x} G(x) \right]^T$$

ya que

$$\dot{V} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} [f(x) + G(x)u] \leq \frac{\partial V(x)}{\partial x} G(x)u = y^T u .$$

Si adicionalmente es de estado cero observable, entonces puede utilizarse el teorema para estabilizar asintóticamente el origen.

**Comentario 7.4** *Nótese que no existe una única salida pasiva. Para cada elección de  $V(x)$  se obtiene una salida pasiva (posiblemente) diferente.*

*Considere, por ejemplo, como función de Lyapunov alternativa*

$$W(x) = \gamma(V(x))$$

dónde  $\gamma$  es una función tipo  $\mathcal{K}$ , continuamente diferenciable ( $\mathcal{K}_\infty$  para el caso global). Entonces una salida pasiva con esta función de Lyapunov sería

$$\tilde{y} = \tilde{h}(x) \triangleq \left[ \frac{\partial W(x)}{\partial x} G(x) \right]^T = \gamma'(V(x)) \left[ \frac{\partial V(x)}{\partial x} G(x) \right]^T = \gamma'(V(x)) h(x)$$

### Ejemplo 7.5

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 , \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 + u .\end{aligned}$$

Con  $u = 0$

$$V(x) = \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}x_2^2 \implies \dot{V} = x_1^3 x_2 - x_2 x_1^3 = 0$$

El sistema es pasivo con respecto a la salida

$$y = \frac{\partial V(x)}{\partial x} G(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} = x_2$$

225

*¿Es de estado cero observable? Si*

$$\text{con } u = 0, \quad y(t) \equiv 0 \implies x(t) \equiv 0$$

*Aplicando el teorema el origen se puede estabilizar global y asintóticamente con cualquier  $\phi$  pasiva, como por ejemplo*

$$u = -kx_2, \quad \text{o} \quad u = -\left(\frac{2k}{\pi}\right)\tan^{-1}x_2, \quad k > 0$$

## 7.3. Pasivización por retroalimentación de estados

La pasivización por elección de la salida exige que el sistema tenga un punto de equilibrio estable, por lo que muchos sistemas no pueden ser pasivizados por tal método. Para poder considerar sistemas no estables, se requiere utilizar una retroalimentación preliminar.

**Definición 7.6** *El sistema*

$$\Sigma_A : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + G(x)u, & x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^p \\ y = h(x), & y \in \mathbb{R}^p \end{cases}$$

*es equivalente por retroalimentación a un sistema pasivo si existe*

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

*tal que*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + G(x)\alpha(x) + G(x)\beta(x)v, & x \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^p \\ y &= h(x), & y \in \mathbb{R}^p \end{aligned}$$

*sea pasivo.*

**Comentario 7.7** *Esta definición es análoga a la de sistemas linealizables por retroalimentación. Una diferencia importante es que en la de pasivización no se requiere de una transformación de estados, ya que la pasividad, a diferencia de la linealidad, es una propiedad invariante ante transformaciones del estado.*

No cualquier sistema puede ser pasivizado mediante retroalimentación de estados.

**Teorema 7.8** *El sistema*

$$\Sigma_A : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + G(x)u, & x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^p \\ y = h(x), & y \in \mathbb{R}^p \end{cases}$$

*es localmente equivalente por retroalimentación a un sistema pasivo, con función de almacenamiento positiva definida, si:*

1. *En  $x = 0$  el sistema tiene grado relativo uno, y*
2. *Es de fase mínima débil, es decir, la dinámica cero tiene un punto de equilibrio estable en el origen, con una función de Lyapunov positiva definida.*

**Prueba.** Se hará la prueba para el caso SISO. Si el grado relativo es  $\rho = 1$  se puede llevar a la Forma Normal mediante un difeomorfismo

local  $z = T(x)$

Forma Normal: 
$$\begin{cases} \dot{\eta} = f_0(\eta, \xi) \\ \dot{\xi} = L_f h(x) + L_g h(x) u \\ y = \xi \end{cases}$$

Por la segunda hipótesis la dinámica cero

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$$

tiene un punto de equilibrio estable en  $\eta = 0$  y existe una función de Lyapunov  $W(\eta)$  tal que

$$\dot{W} = \frac{\partial W(\eta)}{\partial \eta} f_0(\eta, 0) \leq 0$$

en una vecindad del origen.

Como se asume que todas las funciones son suaves resulta que, en particular,  $f_0(\eta, \xi)$  es continuamente diferenciable. Por el teorema del

valor medio del cálculo diferencial se sabe que existe una función continua  $F(\eta, \xi)$  tal que

$$\begin{aligned} f_0(\eta, \xi) - f_0(\eta, 0) &= \frac{\partial f_0(\eta, \zeta)}{\partial \xi} \xi, \quad \zeta \in (0, \xi) \\ &= \left[ \int_0^1 \frac{\partial f_0(\eta, \nu \xi)}{\partial \xi} d\nu \right] \xi \\ &\triangleq F(\eta, \xi) \xi \end{aligned}$$

Considere como función de almacenamiento del sistema a

$$V(\eta, \xi) = W(\eta) + \frac{1}{2} \xi^2$$

Su derivada temporal a lo largo de las trayectorias del sistema, cuando se aplica un control por retroalimentación de estados

$$u = \frac{1}{L_g h(x)} \left[ -\frac{\partial W(\eta)}{\partial \eta} F(\eta, y) - L_f h(x) + v \right],$$

es

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{\partial W(\eta)}{\partial \eta} f_0(\eta, \xi) + \xi [L_f h(x) + L_g h(x) u] \\ &= \frac{\partial W(\eta)}{\partial \eta} f_0(\eta, 0) + \frac{\partial W(\eta)}{\partial \eta} [f_0(\eta, y) - f_0(\eta, 0)] + y [L_f h(x) + L_g h(x) u] \\ &= \frac{\partial W(\eta)}{\partial \eta} f_0(\eta, 0) + y \left[ \frac{\partial W(\eta)}{\partial \eta} F(\eta, y) + L_f h(x) + L_g h(x) u \right] \leq yv\end{aligned}$$

■

### Ejemplo 7.9 Manipulador robótico con $p$ articulaciones

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + g(q) = u, \quad q, u \in \mathbb{R}^p$$

dónde

$$M = M^T > 0, \quad (\dot{M} - 2C)^T = -(\dot{M} - 2C), \quad D = D^T \geq 0$$

*El objetivo es estabilizar el sistema en el punto  $q = q_r$ . Definiendo el error de regulación*

$$e = q - q_r , \dot{e} = \dot{q}$$

*la dinámica en estas variables queda*

$$M(q)\ddot{e} + C(q, \dot{q})\dot{e} + D\dot{e} + g(q) = u$$

*Nótese que  $(e, \dot{e}) = (0, 0)$  no es un punto de equilibrio con  $u = 0$ . Con el control*

$$u = g(q) - \phi_p(e) + v$$

*dónde*

$$\phi_p(0) = 0 , e^T \phi_p(e) > 0 , \forall e \neq 0$$

*el sistema en lazo cerrado se convierte en*

$$M(q)\ddot{e} + C(q, \dot{q})\dot{e} + D\dot{e} + \phi_p(e) = v$$

*La función positiva definida*

$$V = \frac{1}{2} \dot{e}^T M(q) \dot{e} + \int_0^e \phi_p^T(\sigma) d\sigma$$

*tiene como derivada*

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{1}{2} \ddot{e}^T M(q) \dot{e} + \frac{1}{2} \dot{e}^T M(q) \ddot{e} + \frac{1}{2} \dot{e}^T \dot{M}(q) \dot{e} + \phi_p^T(e) \dot{e} \\ &= \frac{1}{2} [-C(q, \dot{q}) \dot{e} - D\dot{e} - \phi_p(e) + v]^T \dot{e} + \frac{1}{2} \dot{e}^T [-C(q, \dot{q}) \dot{e} - D\dot{e} - \phi_p(e) + v] \\ &\quad + \frac{1}{2} \dot{e}^T \dot{M}(q) \dot{e} + \phi_p^T(e) \dot{e} \\ &= \frac{1}{2} \dot{e}^T [\dot{M} - 2C] \dot{e} - \dot{e}^T D\dot{e} - \dot{e}^T \phi_p(e) + \phi_p^T(e) \dot{e} + \dot{e}^T v \\ &= -\dot{e}^T D\dot{e} + \dot{e}^T v \leq \dot{e}^T v\end{aligned}$$

*Entonces, si se elige la salida  $y = \dot{e}$  el sistema es pasivo, y  $V$  es una función de almacenamiento positiva definida (¿es radialmente no acotada?)*

¿Es el sistema de estado cero observable? Si, ya que con  $v = 0$   
 $y(t) = \dot{e}(t) \equiv 0 \implies \ddot{e}(t) \equiv 0 \implies \phi_p(e(t)) \equiv 0 \implies e(t) \equiv 0$ .

Entonces se puede aplicar el teorema básico: el origen puede ser estabilizado asintóticamente (¿Globalmente?) aplicando una ley de control

$$v = -\phi_d(\dot{e})$$

dónde

$$\phi_d(0) = 0, \quad \dot{e}^T \phi_d(\dot{e}) > 0, \quad \forall \dot{e} \neq 0.$$

El control final queda

$$u = g(q) - \phi_p(e) - \phi_d(\dot{e})$$

que contiene un término proporcional y uno derivativo. Un caso especial corresponde a funciones lineales

$$u = g(q) - K_p e - K_d \dot{e}, \quad K_p = K_p^T > 0, \quad K_d = K_d^T > 0.$$

¿Cómo se comparan el control basado en pasividad con la linealización por retroalimentación?

**Ejemplo 7.10** Considera el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -h(x_1) + u\end{aligned}$$

con

$$h(0) = 0, \quad x_1 h(x_1) > 0, \quad \forall x_1 \neq 0$$

**Diseño por linealización por retroalimentación:**

$$u = h(x_1) - (k_1 x_1 + k_2 x_2)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} x$$

**Diseño basado en pasividad:** Considere la función de almacenamiento de energía

$$V(x) = \int_0^{x_1} h(z) dz + \frac{1}{2}x_2^2$$

$$\dot{V} = h(x_1)x_2 - x_2h(x_1) + x_2u = x_2u$$

Entonces el sistema es pasivo si la salida es

$$y = x_2$$

¿Es el sistema de estado cero observable? Si, ya que con  $u = 0$

$$y(t) = x_2(t) \equiv 0 \implies h(x_1(t)) \equiv 0 \implies x_1(t) \equiv 0 .$$

Entonces la ley de control

$$u = -\sigma(x_2) ,$$

$$\sigma(0) = 0 , \quad x_2\sigma(x_2) > 0 , \quad \forall x_2 \neq 0$$

estabiliza asintóticamente (¿globalmente?) el origen de

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -h(x_1) - \sigma(x_2)\end{aligned}$$

Linealización:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -h'(0) & -k \end{bmatrix} x, \quad k = \sigma'(0)$$

El polinomio característico es

$$s^2 + ks + h'(0) = 0$$

$$s_{1,2} = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - h'(0)}$$

cuando  $k$  varía entre  $0 \rightarrow \infty$ , una de las raíces no puede moverse a la izquierda del punto  $\text{Re}[s] = -\sqrt{h'(0)}$

## **Ventajas/Desventajas del control basado en pasividad:**

1. *Ventaja: El control basado en pasividad no requiere un modelo de la función no lineal  $h(x_1)$ , por lo que es robusto ante variaciones en ella,*
2. *Ventaja: Flexibilidad en la elección de  $\sigma(x_2)$ , para satisfacer restricciones de la entrada.*
3. *Desventaja: la velocidad de convergencia no puede ser asignada arbitrariamente.*

La desventaja del diseño en el ejemplo anterior puede subsanarse

**Ejemplo 7.11** *Considere el sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -h(x_1) + u\end{aligned}$$

con

$$h(0) = 0 .$$

Nótese que no se requiere la pasividad de  $h$ !

Este sistema no es, en general, pasivo (si  $h$  no lo es), pero es pasivable por retroalimentación de estados, ya que es de grado relativo 1 y de fase mínima, cuando la salida es  $y = x_2$ . La ley de retroalimentación de los estados

$$u = -\phi(x_1) + v$$

dónde

$$\phi(0) = 0 , \quad x_1 [h(x_1) + \phi(x_1)] > 0 , \quad \forall x_1 \neq 0$$

convierte al sistema en lazo cerrado en

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -h(x_1) - \phi(x_1) + v$$

*Este sistema, con salida*

$$y = x_2$$

*es pasivo, con función de almacenamiento de energía*

$$V(x) = \int_0^{x_1} [h(z) + \phi(z)] dz + \frac{1}{2}x_2^2$$

$$\dot{V} = [h(x_1) + \phi(x_1)]x_2 - x_2[h(x_1) + \phi(x_1)] + x_2v = x_2v$$

*Además, el sistema es de estado cero observable, ya que con  $v = 0$*

$$y(t) = x_2(t) \equiv 0 \implies [h(x_1(t)) + \phi(x_1(t))] \equiv 0 \implies x_1(t) \equiv 0 .$$

*Entonces la ley de control*

$$v = -\sigma(x_2) ,$$

$$\sigma(0) = 0 , \quad x_2\sigma(x_2) > 0 , \quad \forall x_2 \neq 0$$

es decir,

$$u = -\phi(x_1) - \sigma(x_2)$$

estabiliza asintóticamente (*¿globalmente?*) el origen de

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -h(x_1) - \phi(x_1) - \sigma(x_2)\end{aligned}$$

Linealización:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -[h'(0) + k_2] & -k_1 \end{bmatrix} x, \quad k_1 = \sigma'(0), \quad k_2 = \phi'(0)$$

El polinomio característico es

$$s^2 + k_1 s + [h'(0) + k_2] = 0$$

*al que se le pueden asignar las raíces!*

*Nótese que siempre es posible elegir  $\phi(x_1)$  de tal forma que la condición*

$$x_1 [h(x_1) + \phi(x_1)] > 0 , \quad \forall x_1 \neq 0$$

*sea satisfecha. Tómese por ejemplo a*

$$\phi(x_1) = -h(x_1) + k_2 x_1 ,$$

$$\phi(x_1) = -h(x_1) + \psi(x_1) , \quad x_1 \psi(x_1) > 0 , \quad \forall x_1 \neq 0$$

## 7.4. Una clase de sistemas en cascada

La pasivización por retroalimentación puede ser aplicada, en particular, a la clase de sistemas en cascada

$$\dot{z} = f_0(z, y)$$

$$\dot{x} = f(x) + G(x) u$$

$$y = h(x)$$

Si  $f_0(z, y)$  es suficientemente suave, por el teorema del valor medio se puede escribir como

$$\begin{aligned}f_0(z, y) &= f_0(z, 0) + [f_0(z, y) - f_0(z, 0)] \\&= f_0(z, 0) + \left[ \int_0^1 \frac{\partial f_0(z, sy)}{\partial y} ds \right] y \\&\triangleq f_a(z) + F(z, y) y\end{aligned}$$

de tal forma que el sistema en cascada adquiere la forma

$$\begin{aligned}\dot{z} &= f_a(z) + F(z, y) y \\ \dot{x} &= f(x) + G(x) u \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

dónde

$$f_a(0) = 0, \quad f(0) = 0, \quad h(0) = 0$$

las funciones  $f_a, F, f, G$  son localmente Lipschitz y  $h$  es continua. Se asume que:

- la representación es global,
- el sistema maestro es pasivo, con una función de almacenamiento  $V(x)$  positiva definida y radialmente no acotada, y
- el origen del sistema esclavo sin entrada  $\dot{z} = f_a(z)$  es un punto de equilibrio estable, y se conoce una función de Lyapunov  $W(z)$ , positiva definida y radialmente no acotada, que satisface

$$\frac{\partial W(z)}{\partial z} f_a(z) \leq 0 , \quad \forall z$$

Usando

$$U(z, x) = W(z) + V(x)$$

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \frac{\partial W(z)}{\partial z} f_a(z) + \frac{\partial W(z)}{\partial z} F(z, y) y + \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V(x)}{\partial x} G(x) u \\ &\leq y^T \left[ u + \left( \frac{\partial W(z)}{\partial z} F(z, y) \right)^T \right]\end{aligned}$$

Mediante el control en retroalimentación

$$u = - \left( \frac{\partial W(z)}{\partial z} F(z, y) \right)^T + v$$

resulta que

$$\dot{U} \leq y^T v$$

Por lo tanto el sistema

$$\begin{aligned}\dot{z} &= f_a(z) + F(z, y) y \\ \dot{x} &= f(x) - G(x) \left( \frac{\partial W(z)}{\partial z} F(z, y) \right)^T + G(x) v \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

es pasivo, con función de almacenamiento  $U$ . Si el sistema es de estado cero observable, entonces se puede estabilizar asintóticamente mediante una retroalimentación pasiva de la salida.

**Ejemplo 7.12** *El movimiento rotacional de un cuerpo rígido que posee tres torques de control escalares independientes puede ser modelado por*

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \frac{1}{2} [I_3 + S(\rho) + \rho\rho^T] \omega \\ M\dot{\omega} &= -S(\omega)M\omega + u\end{aligned}$$

dónde  $\omega \in \mathbb{R}^3$  es el vector de velocidades, y  $\rho \in \mathbb{R}^3$  es una selección particular de los parámetros cinemáticos que conducen a una representación tridimensional del grupo rotacional. La matriz

$$S(x) = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

es antisimétrica,  $M$  es una matriz de inercia simétrica y positiva definida, e  $I_3$  es la matriz identidad de dimensión  $3 \times 3$ .

Tomando  $y = \omega$  el sistema tiene la forma de la cascada, con el sistema maestro

$$\begin{aligned} M\dot{\omega} &= -S(\omega)M\omega + u \\ y &= \omega \end{aligned}$$

y el sistema esclavo

$$\dot{\rho} = \frac{1}{2} [I_3 + S(\rho) + \rho\rho^T] \omega .$$

El sistema maestro es pasivo, con función de almacenamiento

$$V(\omega) = \frac{1}{2}\omega^T M \omega$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2}\dot{\omega}^T M \omega + \frac{1}{2}\omega^T M \dot{\omega} \\ &= \frac{1}{2} [\omega^T M S(\omega) \omega + u^T \omega] + \frac{1}{2} [-\omega^T S(\omega) M \omega + \omega^T u] = y^T u \end{aligned}$$

ya que

$$S(x)x = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3x_2 + x_2x_3 \\ x_3x_1 - x_1x_3 \\ -x_2x_1 + x_1x_2 \end{bmatrix} = 0$$

El sistema esclavo sin entrada ( $\omega = 0$ )

$$\dot{\rho} = 0$$

tiene un punto de equilibrio en  $\rho = 0$  y cualquier función  $W(\rho)$  continuamente diferenciable, positiva definida y radialmente no acotada es una función de Lyapunov.

Por lo tanto, todas las hipótesis son satisfechas y el sistema puede ser pasivizado mediante el control

$$u = -\left( \frac{\partial W(\rho)}{\partial \rho} \frac{1}{2} [I_3 + S(\rho) + \rho \rho^T] \right)^T + v$$

*Eligiendo*

$$W(\rho) = k \ln(1 + \rho^T \rho) , \quad k > 0$$

*se obtiene*

$$u = - \left( \frac{k\rho^T}{1 + \rho^T \rho} [I_3 + S(\rho) + \rho\rho^T] \right)^T + v = -k\rho + v$$

*y el sistema resultante es*

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \frac{1}{2} [I_3 + S(\rho) + \rho\rho^T] y \\ M\dot{\omega} &= -S(\omega)M\omega - k\rho + v \\ y &= \omega\end{aligned}$$

*Este sistema es de estado cero observable, ya que con  $v = 0$*

$$y(t) \equiv 0 \iff \omega(t) \equiv 0 \implies \dot{\omega}(t) \equiv 0 \implies \rho(t) \equiv 0 .$$

*Por lo tanto puede ser estabilizado global y asintóticamente mediante la ley de control*

$$u = -k\rho - \phi(\omega)$$

con

$$\phi(0) = 0, \quad y^T \phi(y) > 0, \quad \forall y \neq 0.$$

## 7.5. Un caso especial

Si se imponen condiciones más fuertes sobre el sistema esclavo, no se requiere probar que el todo el sistema interconectado es de estado cero observable.

**Teorema 7.13** *Para el sistema en cascada*

$$\begin{aligned}\dot{z} &= f_a(z) + F(z, y)y \\ \dot{x} &= f(x) + G(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

*suponga que*

- *el sistema maestro es de estado cero observable*

- el sistema maestro es pasivo, con una función de almacenamiento  $V(x)$  positiva definida y radialmente no acotada, y
- el origen del sistema esclavo sin entrada  $\dot{z} = f_a(z)$  es un punto de equilibrio global y asintóticamente estable, y se conoce una función de Lyapunov  $W(z)$ , positiva definida y radialmente no acotada, que satisface

$$\frac{\partial W(z)}{\partial z} f_a(z) < 0 , \quad \forall z \neq 0 , \quad y \quad \frac{\partial W(0)}{\partial z} = 0$$

entonces el origen  $(z, x) = (0, 0)$  del sistema puede ser global y asintóticamente estabilizado mediante la ley de control

$$u = - \left( \frac{\partial W(z)}{\partial z} F(z, y) \right)^T - \phi(y)$$

con

$$\phi(0) = 0 , \quad y^T \phi(y) > 0 , \quad \forall y \neq 0 .$$

**Prueba.** Usando  $U$  como candidata a función de Lyapunov del sistema del sistema en lazo cerrado se obtiene

$$\dot{U} = \frac{\partial W(z)}{\partial z} f_a(z) - y^T \phi(y) \leq 0$$

Adicionalmente

$$\dot{U}(t) \equiv 0 \implies (z(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0) \implies u(t) \equiv 0 \implies x(t) \equiv 0,$$

dónde la última implicación resulta de la hipótesis de que el sistema maestro es de estado cero observable. Se concluye estabilidad global y asintótica de la aplicación del principio de invariancia de LaSalle. ■

**Ejemplo 7.14** Considere el sistema

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= -\eta + \eta^2 \xi \\ \dot{\xi} &= u\end{aligned}$$

*Con la salida  $y = \xi$  el sistema tiene la forma en cascada. El sistema maestro es pasivo con función de almacenamiento  $V(\xi) = \xi^2/2$  y es claramente de estado cero observable, ya que  $y = \xi$ . El origen del sistema esclavo sin entrada  $\dot{\eta} = -\eta$  es global y exponencialmente estable con función de Lyapunov  $W(\eta) = \eta^2/2$ . Las condiciones del teorema anterior se satisfacen y una ley de control estabilizante es*

$$u = -\eta^3 - k\xi$$

*que es el mismo control obtenido por backstepping.*

# Lección 8

## Retroalimentación de la salida

En general la estabilización por retroalimentación de la salida requiere el uso de observadores. Sin embargo, en algunas ocasiones esto no se requiere explícitamente. Se presentarán aquí tres casos simples, en los cuales no es necesario diseñar un observador:

- Sistemas con grado relativo uno y de fase mínima
- Sistemas pasivos
- Sistemas con mapas pasivos de la entrada a la derivada de la salida

## 8.1. Sistemas con grado relativo uno y de fase mínima

Sea el sistema

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$$y = h(x)$$

$$f(0) = 0, \quad h(0) = 0, \quad L_g h(x) \neq 0, \quad \forall x \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}$$

En su forma normal

$$\phi(0) = 0, \quad L_g \phi(x) \neq 0 \begin{bmatrix} \eta \\ \cdots \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(x) \\ \cdots \\ h(x) \end{bmatrix}$$

Forma Normal:  $\begin{cases} \dot{\eta} = f_0(\eta, y) \\ \dot{y} = \gamma(x)[u - \alpha(x)] \end{cases}, \quad \gamma(x) \neq 0$

Supuestos:

El origen del sistema

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$$

es exponencialmente estable.

$$c_1 \|\eta\|^2 \leq V_1(\eta) \leq c_2 \|\eta\|^2$$

$$\frac{\partial V_1(\eta)}{\partial \eta} f_0(\eta, 0) \leq -c_3 \|\eta\|^2$$

$$\left| \frac{\partial V_1(\eta)}{\partial \eta} \right| \leq c_4 \|\eta\|$$

$$\|f_0(\eta, y) - f_0(\eta, 0)\| \leq L_1 |y|$$

$$|\alpha(x) \gamma(x)| \leq L_2 \|\eta\| + L_3 |y|$$

$$\gamma(x) \geq \gamma_0 > 0$$

Retroalimentación de salida de Alta Ganancia:

$$u = -ky, \quad k > 0$$

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, y)$$

$$\dot{y} = \gamma(x)[u - \alpha(x)], \quad \gamma(x) \neq 0$$

$$V(\eta, y) = V_1(\eta) + \frac{1}{2}y^2$$

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{\partial V_1(\eta)}{\partial \eta} f_0(\eta, y) - k\gamma(x)y^2 - \alpha(x)\gamma(x)y \\ &= \frac{\partial V_1(\eta)}{\partial \eta} f_0(\eta, 0) + \frac{\partial V_1(\eta)}{\partial \eta} [f_0(\eta, y) - f_0(\eta, 0)] - k\gamma(x)y^2 - \alpha(x)\gamma(x)y \\ &\leq -c_3 \|\eta\|^2 + c_4 L_1 \|\eta\| |y| - k\gamma_0 y^2 + L_2 \|\eta\| |y| + L_3 y^2\end{aligned}$$

$$\dot{V} \leq - \left[ \begin{array}{c} \|\eta\| \\ |y| \end{array} \right]^T \underbrace{\left[ \begin{array}{cc} c_3 & \frac{1}{2}(c_4 L_1 + L_2) \\ \frac{1}{2}(c_4 L_1 + L_2) & (k\gamma_0 - L_3) \end{array} \right]}_Q \left[ \begin{array}{c} \|\eta\| \\ |y| \end{array} \right]$$

$$\det Q = c_3 (k\gamma_0 - L_3) - \frac{1}{4} (c_4 L_1 + L_2)^2$$

$$\det Q > 0 \text{ si } k > \frac{L_3}{\gamma_0} + \frac{1}{4c_3\gamma_0} (c_4 L_1 + L_2)^2$$

El origen del sistema en lazo cerrado es exponencialmente estable.

Si la suposición se satisface globalmente, entonces el origen es global y exponencialmente estable

## 8.2. Sistemas pasivos

Supóngase que el sistema

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) , \quad x \in \mathbb{R}^n , \quad u \in \mathbb{R}^p \\ y = h(x, u) , \quad y \in \mathbb{R}^p \end{cases}$$

$$f(0, 0) = 0 , \quad h(0, 0) = 0$$

es **pasivo**, con función de *almacenamiento de energía*  $V(x)$ , continuamente diferenciable y positiva definida

$$\dot{V} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, u) \leq u^T y, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^p,$$

y de *estado cero observable*.

Entonces puede ser estabilizado mediante la ley de control por retroalimentación de la salida

$$u = -\phi(y)$$

$$\phi(0) = 0, \quad y^T \phi(y) > 0, \quad \forall y \neq 0$$

$$\dot{V} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, u) \leq u^T y = -y^T \phi(y) \leq 0,$$

$$\dot{V} = 0 \implies y(t) \equiv 0 \implies u(t) = -\phi(y(t)) \equiv 0 \implies x(t) \equiv 0$$

### 8.3. Sistemas con mapas pasivos de $u$ a $\dot{y}$

Sea el sistema

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) , \quad x \in \mathbb{R}^n , \quad u \in \mathbb{R}^p \\ y = h(x) , \quad y \in \mathbb{R}^p \end{cases}$$

$f(0, 0) = 0$  ,  $h(0) = 0$  ,  $h$  es conínuamente diferenciable

Suponga que el sistema

$$\Sigma_d : \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) , \quad x \in \mathbb{R}^n , \quad u \in \mathbb{R}^p \\ \dot{y} = \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x, u) \triangleq \tilde{h}(x, u) , \quad y \in \mathbb{R}^p \end{cases}$$

es **pasivo**, con función de *almacenamiento de energía*  $V(x)$ , contínuamente diferenciable y positiva definida

$$\dot{V} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, u) \leq u^T \dot{y}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n , \quad u \in \mathbb{R}^p ,$$

y de *estado cero observable*

$$\text{con } u = 0, \dot{y}(t) \equiv 0 \implies x(t) \equiv 0.$$

Entonces el sistema  $\Sigma$  es estabilizable mediante una control de salida *derivativo*

$$u = -\psi(\dot{y}), \psi(0) = 0, z^T \psi(z) > 0, \forall z \neq 0$$

*Problema:* implementación de la derivada  $\dot{y}$

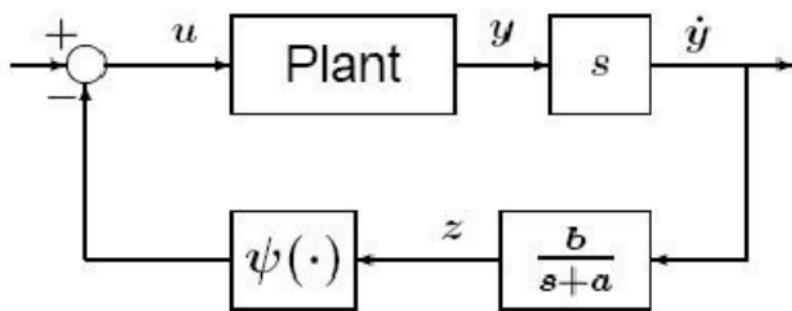
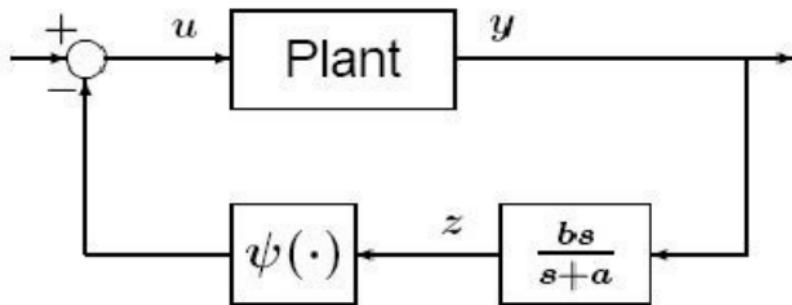
*Solución práctica:* derivada "sucia"

- Caso escalar

$$\dot{y} = sy \approx \frac{bs}{s+a}y, a > 0, b > 0$$

- Caso multivariable: Para  $1 \leq i \leq p$

$$\dot{y}_i = sy_i \approx \frac{b_i s}{s + a_i} y_i, a_i > 0, b_i > 0$$



Implementación:

$z_i$  es la salida de  $\frac{b_i s}{s + a_i}$  con entrada  $y_i$

$$u_i = -\psi_i(z_i) , \psi_i(0) = 0 , z_i^T \psi_i(z_i) > 0 , \forall z_i \neq 0$$

$$\dot{z}_i = -a_i z_i + b_i \dot{y}_i$$

Recuérdese que la cascada del sistema lineal estrictamente pasivo

$$G_i(s) = \frac{b_i s}{s + a_i}$$

con la no linealidad pasiva

$$\psi_i(z_i)$$

es estrictamente pasiva, con función de almacenamiento

$$W_i(z_i) = k_i \int_0^{z_i} \psi_i(\sigma) d\sigma , k_i > 0$$

ya que

$$\dot{W}_i(z_i) = k_i \psi_i(z_i) [-a_i z_i + b_i \dot{y}_i] = -a_i k_i z_i \psi_i(z_i) + b_i k_i \psi_i(z_i) \dot{y}_i$$

Entonces, con la candidata a función de Lyapunov (positiva definida)

$$V_c(x, z) = V(x) + \sum_{i=1}^p \frac{1}{b_i} \int_0^{z_i} \psi_i(\sigma) d\sigma$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_c(x, z) &= \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, u) + \sum_{i=1}^p \frac{1}{b_i} \psi_i(z_i) [-a_i z_i + b_i \dot{y}_i] \\
&\leq u^T \dot{y} + \sum_{i=1}^p \left[ -\frac{a_i}{b_i} \psi_i(z_i) z_i + \psi_i(z_i) \dot{y}_i \right] \\
&= - \sum_{i=1}^p \psi_i(z_i) \dot{y}_i + \sum_{i=1}^p \left[ -\frac{a_i}{b_i} \psi_i(z_i) z_i + \psi_i(z_i) \dot{y}_i \right] \\
&= - \sum_{i=1}^p \frac{a_i}{b_i} \psi_i(z_i) z_i < 0, \quad \forall z \neq 0
\end{aligned}$$

se prueba la estabilidad asintótica del origen del sistema en lazo cerrado.

### **Ejemplo 8.1** Estabilice el péndulo

$$ml\ddot{\theta} + mg \sin \theta = u$$

en  $\theta = \delta_1$  usando retroalimentación de  $\theta$

$$x_1 = \theta - \delta_1 , \quad x_2 = \dot{\theta} , \quad u = T - T_{ss} = T - \frac{a}{c} \sin \delta$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{ml} [-mg \sin(x_1 + \delta_1) + u]\end{aligned}$$

$$u = mg \sin(x_1 + \delta_1) - k_p x_1 + v , \quad k_p > 0$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k_p}{ml} x_1 + \frac{1}{ml} v \\ y &= x_1 \\ \dot{y} &= x_2\end{aligned}$$

$$V = \frac{1}{2} k_p x_1^2 + \frac{1}{2} ml x_2^2$$

$$\begin{aligned}\dot{V} &= k_p x_1 x_2 + mlx_2 \left[ -\frac{k_p}{ml} x_1 + \frac{1}{ml} v \right] \\ \dot{V} &= x_2 v = \dot{y}v \implies \text{Pasivo } v \rightarrow \dot{y}\end{aligned}$$

¿Es de estado cero observable? Si

$$\text{Con } v = 0, \dot{y}(t) = x_2(t) \equiv 0 \implies x_1(t) \equiv 0.$$

*Control-Implementación*

$$F. \text{ de transferencia } G(s) = \frac{bs}{s+a} : y(t) \curvearrowright z(t)$$

*realización*

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= -a\xi + y \\ z &= b(-a\xi + y)\end{aligned}$$

$$v = -k_d z, k_d > 0$$

$$u = mg \sin \theta - k_p (\theta - \delta_1) - k_d z$$

# Parte III

# Estabilización Robusta

# Lección 9

## Control por Modos Deslizantes

## 9.1. Ejemplo introductorio

Considere el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= h(x) + g(x)u, \quad g(x) \geq g_0 > 0\end{aligned}$$

Variedad deslizante (superficie):

$$s = a_1x_1 + x_2 = 0$$

$$s(t) \equiv 0 \implies \dot{x}_1 = -a_1x_1$$

$$a_1 > 0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 0$$

¿Cómo podemos llevar la trayectoria a la variedad  $s = 0$ ?

¿Cómo podemos mantenerla allí?

$$\dot{s} = a_1\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = a_1x_2 + h(x) + g(x)u$$

Supóngase que

$$\left| \frac{a_1 x_2 + h(x)}{g(x)} \right| \leq \varrho(x)$$

$$V = \frac{1}{2} s^2$$

$$\begin{aligned}\dot{V} &= s \dot{s} = s [a_1 x_2 + h(x)] + s g(x) u \\&= s g(x) \left[ \frac{a_1 x_2 + h(x)}{g(x)} \right] + s g(x) u \\&\leq |s| g(x) \varrho(x) + s g(x) u\end{aligned}$$

Si

$$\begin{aligned}\beta(x) &\geq \varrho(x) + \beta_0, \quad \beta_0 > 0 \\s &> 0, \quad u = -\beta(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq |s| g(x) \varrho(x) - |s| g(x) \beta(x) \\ &\leq |s| g(x) \varrho(x) - |s| g(x) (\varrho(x) + \beta_0) = -g(x) \beta_0 |s|\end{aligned}$$

Si

$$s < 0, \quad u = \beta(x)$$

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq |s| g(x) \varrho(x) + s g(x) u = |s| g(x) \varrho(x) - |s| g(x) \beta(x) \\ &\leq |s| g(x) \varrho(x) - |s| g(x) (\varrho(x) + \beta_0) = -g(x) \beta_0 |s|\end{aligned}$$

$$\text{sign}(s) = \begin{cases} 1, & s > 0 \\ -1, & s < 0 \end{cases}$$

$$u = -\beta(x) \text{sign}(s)$$

$$\dot{V} \leq -g(x) \beta_0 |s| \leq -g_0 \beta_0 |s|$$

$$\dot{V} \leq -g_0 \beta_0 \sqrt{2V}$$

$$\frac{dV}{\sqrt{V}} \leq -g_0\beta_0\sqrt{2}dt$$

$$2\sqrt{V}\Big|_{V(s(0))}^{V(s(t))} \leq -g_0\beta_0\sqrt{2}t$$

$$\sqrt{V(s(t))} \leq \sqrt{V(s(0))} - g_0\beta_0 \frac{1}{\sqrt{2}}t$$

$$|s(t)| \leq |s(0)| - g_0\beta_0 t$$

$s(t)$  llega a cero en tiempo finito!

Una vez llega a la superficie  $s = 0$ , la trayectoria no puede abandonarla  
 ¿Cuál es la región de validez?

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= h(x) - g(x)\beta(x)\operatorname{sign}(s) ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -a_1x_1 + s \\ \dot{s} &= a_1x_2 + h(x) - g(x)\beta(x)\operatorname{sign}(s) ,\end{aligned}$$

A diagram illustrating a vector field in the complex plane. A horizontal axis and a vertical axis intersect at the origin. Several vectors originate from the origin, pointing in various directions. One vector points upwards along the positive real axis. Another vector points downwards along the negative real axis. Vectors also point outwards along the positive and negative imaginary axes. A curved line labeled  $s=0$  passes through the origin, sloping downwards from left to right. The number 275 is located at the bottom center of the image.

$s=0$

$$s\dot{s} \leq -g_0\beta_0 |s| , \text{ si } \beta(x) \geq \varrho(x) + \beta_0 , \quad \beta_0 > 0$$

$$V_1 = \frac{1}{2}x_1^2$$

$$\dot{V}_1 = x_1 \dot{x}_1 = -a_1 x_1^2 + x_1 s \leq -a_1 x_1^2 + |x_1| c \leq 0$$

$$\forall |s| \leq c , \text{ y } |x_1| \geq \frac{c}{a_1}$$

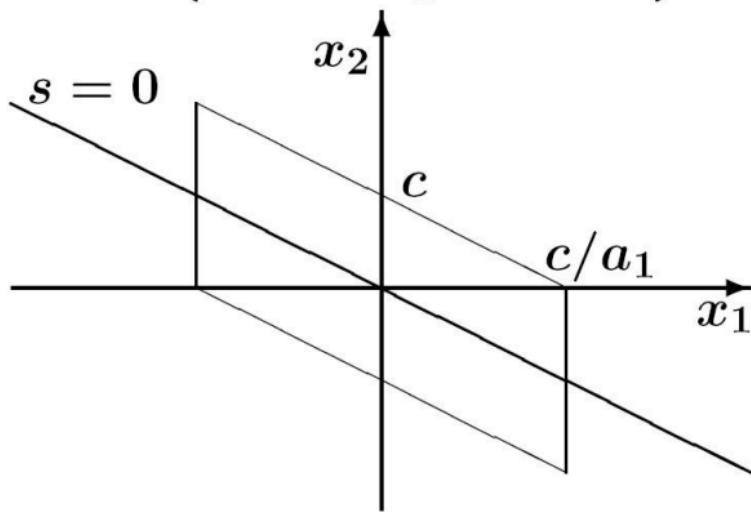
$$\Omega = \left\{ |x_1| \leq \frac{c}{a_1} , \quad |s| \leq c \right\}$$

$$\Omega \quad \text{es invariante positivo si} \quad \left| \frac{a_1 x_2 + h(x)}{g(x)} \right| \leq \varrho(x) \quad \text{en } \Omega$$

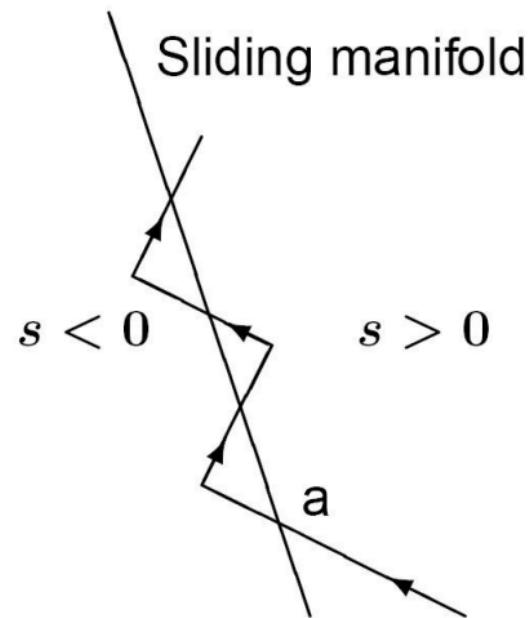
$$\left| \frac{a_1 x_2 + h(x)}{g(x)} \right| \leq k_1 < k , \quad \forall x \in \Omega$$

$$u = -k \operatorname{sign}(s)$$

$$\Omega = \left\{ |x_1| \leq \frac{c}{a_1}, |s| \leq c \right\}$$



## Chattering



¿Cómo se puede reducir o eliminar el "chattering" (castañeo)?

**Reducir la amplitud de la función signo:**

$$\dot{s} = a_1 x_2 + h(x) + g(x) u$$

$$u = - \frac{[a_1 x_2 + \hat{h}(x)]}{\hat{g}(x)} + v$$

$$\dot{s} = \delta(x) + g(x) v$$

$$\delta(x) = a_1 \left[ 1 - \frac{g(x)}{\hat{g}(x)} \right] x_2 + h(x) - \frac{g(x)}{\hat{g}(x)} \hat{h}(x)$$

$$\left| \frac{\delta(x)}{g(x)} \right| \leq \varrho(x) , \quad \beta(x) \geq \varrho(x) + \beta_0$$

$$v = -\beta(x) \operatorname{sign}(s)$$

## Reemplazar el sign por una función de saturación de gran pendiente

$$u = -\beta(x) \operatorname{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)$$

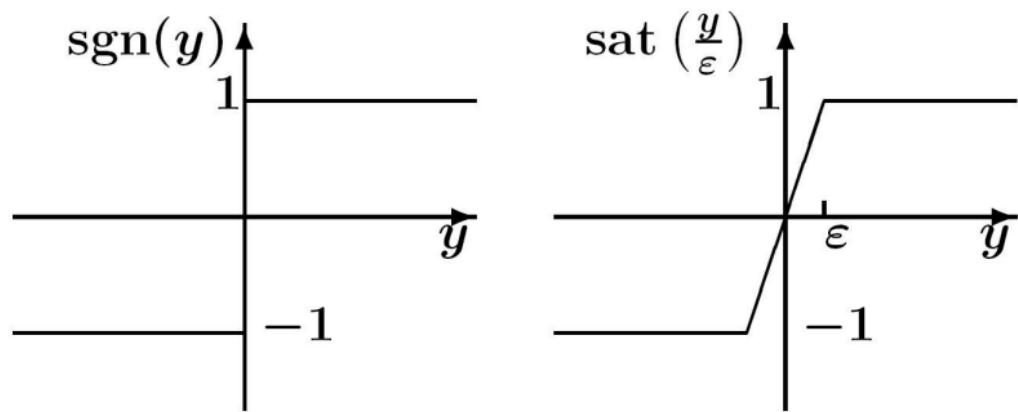
$$\operatorname{sat}(y) = \begin{cases} y, & \text{si } |y| \leq 1 \\ \operatorname{sign}(y), & \text{si } |y| > 1 \end{cases}$$

¿Cómo podemos analizar el sistema?

$$\text{Para } |s| \geq \varepsilon, u = -\beta(x) \operatorname{sign}(s)$$

Con  $c \geq \varepsilon$

- $\Omega = \left\{ |x_1| \leq \frac{c}{a_1}, |s| \leq c \right\}$  es invariante positivo.
- La trayectoria llega a la "boundary layer"  $\{|s| \leq \varepsilon\}$  en tiempo finito.



- La "boundary layer" es invariante positiva.

Dentro de la "boundary layer":

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -a_1 x_1 + s \\ \dot{s} &= a_1 x_2 + h(x) - g(x) \beta(x) \frac{s}{\varepsilon},\end{aligned}$$

$$x_1 \dot{x}_1 \leq -a_1 x_1^2 + |x_1| \varepsilon$$

$$0 < \theta < 1$$

$$x_1 \dot{x}_1 \leq -(1 - \theta) a_1 x_1^2, \quad \forall |x_1| \geq \frac{\varepsilon}{\theta a_1}$$

Las trayectorias llegan al conjunto invariante positivo

$$\Omega_\varepsilon = \left\{ |x_1| \leq \frac{\varepsilon}{\theta a_1}, \quad |s| \leq \varepsilon \right\}$$

en tiempo finito.

¿Qué ocurre dentro de  $\Omega_\varepsilon$ ?

Encuentre los puntos de equilibrio

$$\begin{aligned}0 &= -a_1 x_1 + s = x_2 \\0 &= a_1 x_2 + h(x) - g(x) \beta(x) \frac{s}{\varepsilon},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(x_1) &= \left. \frac{h(x)}{a_1 g(x) \beta(x)} \right|_{x_2=0} \\x_1 &= \varepsilon \phi(x_1)\end{aligned}$$

Supóngase que  $x_1 = \varepsilon \phi(x_1)$  tiene una raíz aislada  $\bar{x}_1 = \varepsilon k_1$

$$h(0) \implies \bar{x}_1 = 0$$

$$z_1 = x_1 - \bar{x}_1, \quad z_2 = s - a_1 \bar{x}_1$$

$$x_2 = -a_1 x_1 + s = -a_1 (x_1 - \bar{x}_1) + s - a_1 \bar{x}_1 = -a_1 z_1 + z_2$$

$$\dot{z}_1 = -a_1 x_1 + s = -a_1 z_1 + z_2$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 &= a_1x_2 + h(x) - g(x)\beta(x)\frac{s}{\varepsilon} \\&= a_1(-a_1z_1 + z_2) + h(x) - g(x)\beta(x)\frac{z_2 + a_1\bar{x}_1}{\varepsilon}\end{aligned}$$

$$\dot{z}_2 = l(z) - g(x)\beta(x)\frac{z_2}{\varepsilon}$$

$$l(z) = a_1(z_2 - a_1z_1) + a_1g(x)\beta(x)\left[\frac{h(x)}{a_1g(x)\beta(x)} - \frac{\bar{x}_1}{\varepsilon}\right]$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -a_1z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= l(z) - g(x)\beta(x)\frac{z_2}{\varepsilon}\end{aligned}$$

$$l(0)=0~,~|l(z)|\leq l_1\left|z_1\right|+l_2\left|z_2\right|$$

$$g(x)\beta(x)\geq g_0\beta_0$$

$$V=\frac{1}{2}z_1^2+\frac{1}{2}z_2^2$$

$$284\\$$

$$\dot{V} = z_1(-a_1z_1 + z_2) + z_2 \left[ l(z) - g(x)\beta(x) \frac{z_2}{\varepsilon} \right]$$

$$\leq -a_1z_1^2 + (1 + l_1)|z_1||z_2| + l_2z_2^2 - \frac{g_0\beta_0}{\varepsilon}z_2^2$$

$$\dot{V} \leq - \begin{bmatrix} |z_1| \\ |z_2| \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & \frac{1}{2}(1 + l_1) \\ \frac{1}{2}(1 + l_1) & \left(\frac{g_0\beta_0}{\varepsilon} - l_2\right) \end{bmatrix}}_Q \begin{bmatrix} |z_1| \\ |z_2| \end{bmatrix}$$

$$\det Q = a_1 \left( \frac{g_0\beta_0}{\varepsilon} - l_2 \right) - \frac{1}{4} (1 + l_1)^2$$

$$h(0) = 0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

$$h(0) \neq 0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Léase la sección 14.1.1 del libro de Khalil.

## 9.2. Sistemas con control escalar

Considérese un sistema en la Forma Regular

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f_a(\eta, \xi) \\ \dot{\xi} = f_b(\eta, \xi) + g(\eta, \xi)u + \delta(t, \eta, \xi, u) \end{cases}$$

$$\eta \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R}$$

$$f_a(0, 0) = 0, \quad f_b(0, 0) = 0, \quad g(\eta, \xi) \geq g_0 > 0.$$

El diseño se realiza en dos fases:

### 9.2.1. Fase 1:

Variedad de Deslizamiento (Superficie Deslizante):

$$s = \xi - \phi(\eta) = 0, \quad \phi(0) = 0$$

$$s(t) \equiv 0 \implies \dot{\eta} = f_a(\eta, \phi(\eta))$$

Diséñese  $\phi(\eta)$  de tal forma que el origen de  $\dot{\eta} = f_a(\eta, \phi(\eta))$  sea asintóticamente estable.

### 9.2.2. Fase 2:

Diseñe el control de tal forma que las trayectorias converjan a  $s = 0$  en tiempo finito y permanezcan allí a pesar de las perturbaciones e incertidumbres.

$$\dot{s} = f_b(\eta, \xi) - \frac{\partial \phi(\eta)}{\partial \eta} f_a(\eta, \xi) + g(\eta, \xi) u + \delta(t, \eta, \xi, u)$$

Sea

$$u = -\frac{1}{\hat{g}(\eta, \xi)} \left( \hat{f}_b(\eta, \xi) - \frac{\partial \phi(\eta)}{\partial \eta} \hat{f}_a(\eta, \xi) \right) + v, \text{ o } u = v$$

o en forma compacta

$$u = -L \left( \hat{f}_b(\eta, \xi) - \frac{\partial \phi(\eta)}{\partial \eta} \hat{f}_a(\eta, \xi) \right) + v, \quad L = \frac{1}{\hat{g}(\eta, \xi)}, \quad \text{o} \quad L = 0$$

$$\dot{s} = g(\eta, \xi) v + \Delta(t, \eta, \xi, v)$$

$$\Delta(t, \eta, \xi, v) = f_b - \frac{\partial \phi}{\partial \eta} f_a + \delta - g L \left( \hat{f}_b - \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \hat{f}_a \right)$$

Si se supone que

$$\left| \frac{\Delta(t, \eta, \xi, v)}{g(\eta, \xi)} \right| \leq \varrho(\eta, \xi) + \kappa_0 |v|$$

$$\varrho(\eta, \xi) \geq 0, \quad 0 \leq \kappa_0 < 1 \quad (\text{conocidas})$$

$$V = \frac{1}{2} s^2$$

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= s\dot{s} = sg(\eta, \xi)v + s\Delta(t, \eta, \xi, v) \leq sgv + |s||\Delta| \\
&= g \left[ sv + |s| \left| \frac{\Delta}{g} \right| \right] \\
&\leq g [sv + |s| (\varrho(\eta, \xi) + \kappa_0 |v|)]
\end{aligned}$$

Eligiendo

$$v = -\beta(\eta, \xi) \operatorname{sign}(s)$$

$$\beta(\eta, \xi) \geq \frac{\varrho(\eta, \xi)}{1 - \kappa_0} + \beta_0, \quad \beta_0 > 0$$

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= s\dot{s} \leq g [-\beta|s| + \varrho|s| + \kappa_0|s|\beta] \\
&= g [-\beta|s|(1 - \kappa_0) + \varrho|s|] \\
&\leq g [-\varrho|s| - (1 - \kappa_0)\beta_0|s| + \varrho|s|]
\end{aligned}$$

$$\dot{V} = s\dot{s} \leq -g(\eta, \xi)(1 - \kappa_0)\beta_0|s| \leq -g_0(1 - \kappa_0)\beta_0|s|$$

$$\dot{V} \leq -g_0\beta_0\sqrt{2V}$$

$$\frac{dV}{\sqrt{V}} \leq -g_0\beta_0\sqrt{2}dt$$

$$2\sqrt{V}\Big|_{V(s(0))}^{V(s(t))} \leq -g_0\beta_0\sqrt{2}t$$

$$\sqrt{V(s(t))} \leq \sqrt{V(s(0))} - g_0\beta_0\frac{1}{\sqrt{2}}t$$

$$|s(t)| \leq |s(0)| - g_0\beta_0 t$$

$s(t)$  llega a cero en tiempo finito!

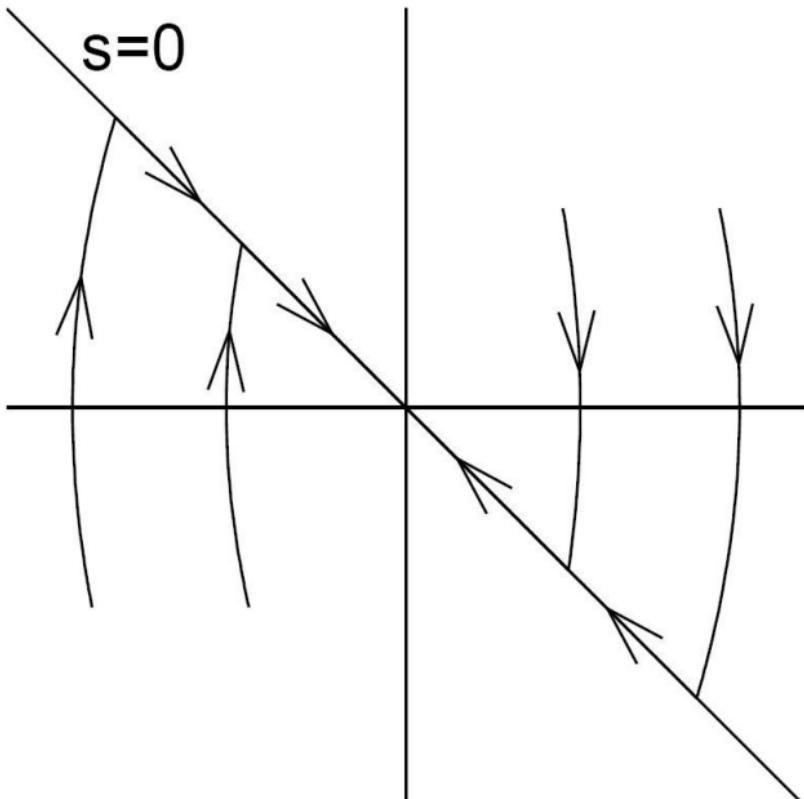
Una vez llega a la superficie  $s = 0$ , la trayectoria no puede abandonarla

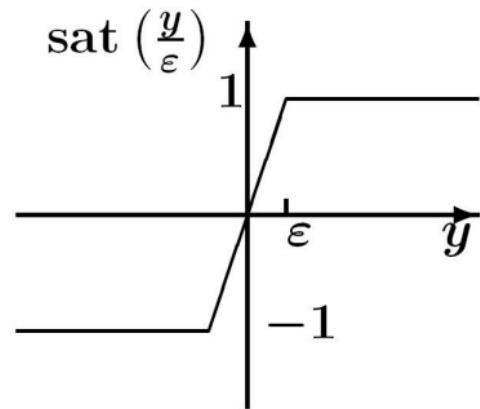
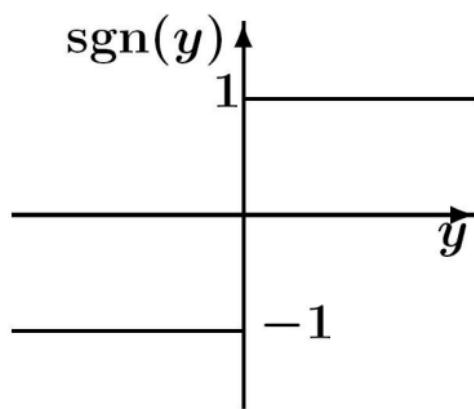
¿Cómo se puede reducir o eliminar el "chattering" (castaño)?

Reemplazar el sign por una función de saturación de gran pendiente:

$$u = -\beta(x) \operatorname{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0$$

$s=0$





¿Cómo podemos analizar el sistema?

$$s\dot{s} \leq -g_0(1-\kappa_0)\beta_0|s| \quad \text{para } |s| \geq \varepsilon, \quad u = -\beta(x) \operatorname{sign}(s)$$

Entonces la trayectoria llega a la "boundary layer"  $\{|s| \leq \varepsilon\}$  en tiempo finito y permanece allí para todo tiempo futuro.

Estudiése el comportamiento de  $\eta$

$$\dot{\eta} = f_a(\eta, \phi(\eta) + s)$$

¿Qué conocemos acerca de este sistema y qué necesitamos?

$$\alpha_1(\|\eta\|) \leq V(\eta) \leq \alpha_2(\|\eta\|)$$

$$\frac{\partial V(\eta)}{\partial \eta} f_a(\eta, \phi(\eta) + s) \leq -\alpha_3(\|\eta\|), \quad \forall \|\eta\| \geq \gamma(|s|)$$

$$|s| \leq c \implies \dot{V} \leq -\alpha_3(\|\eta\|), \quad \forall \|\eta\| \geq \gamma(c)$$

$$\alpha(r) = \alpha_2(\gamma(r))$$

$$\begin{aligned} V(\eta) \geq \alpha(c) &\Leftrightarrow V(\eta) \geq \alpha_2(\gamma(c)) \implies \alpha_2(\|\eta\|) \geq \alpha_2(\gamma(c)) \\ &\implies \|\eta\| \geq \gamma(c) \implies \dot{V} \leq -\alpha_3(\|\eta\|) \leq -\alpha_3(\gamma(c)) \end{aligned}$$

El conjunto  $\{V(\eta) \leq c_0\}$ , con  $c_0 \geq \alpha(c)$ , es invariante positivo

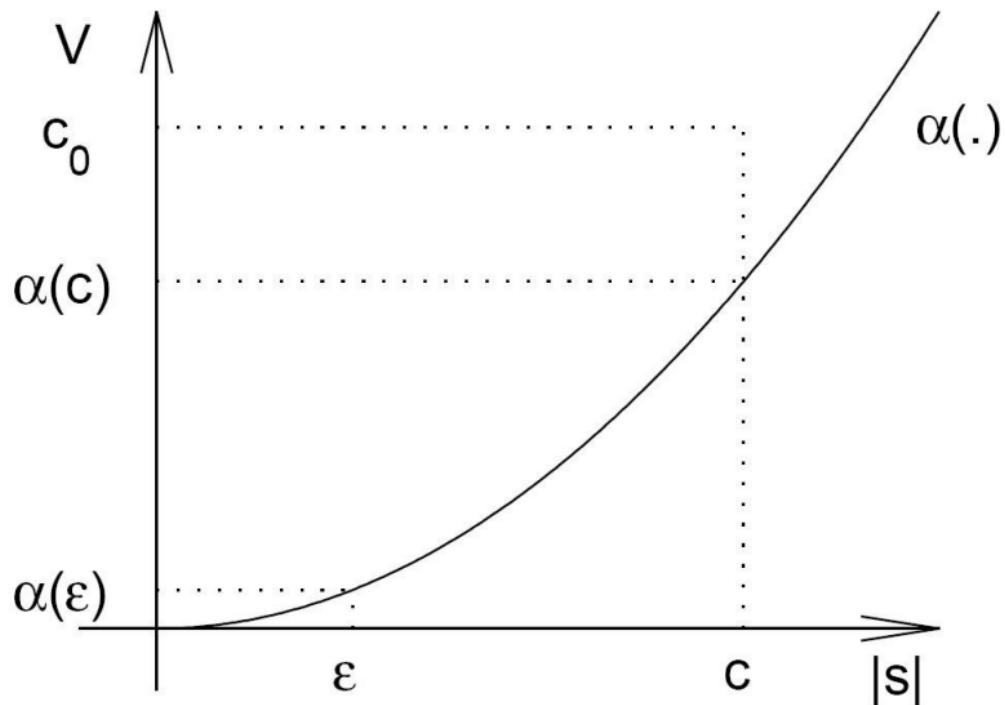
$$\Omega = \{V(\eta) \leq c_0\} \times \{|s| \leq c\}, \text{ con } c_0 \geq \alpha(c)$$

y todas las trayectorias que se inician en  $\Omega$  llegan a

$$\Omega_\varepsilon = \{V(\eta) \leq \alpha(\varepsilon)\} \times \{|s| \leq \varepsilon\}$$

en tiempo finito.

**Teorema 9.1** ([28, Theorem 14.1]) *Supónga que todas las hipótesis son válidas en  $\Omega$ . Entonces, para toda condición inicial  $(\eta(0), \xi(0)) \in \Omega$  la*



trayectoria  $(\eta(t), \xi(t))$  está acotada para todo  $t \geq 0$  y llega al conjunto invariante positivo  $\Omega_\varepsilon$  en tiempo finito. Si las hipótesis son válidas globalmente, y  $V(\eta)$  es radialmente no acotada entonces las conclusiones anteriores son válidas para cualquier condición inicial.

**Teorema 9.2** ([28, Theorem 14.2]) Supónga que todas las hipótesis son válidas en  $\Omega$ .

- $\varrho(0) = 0, \kappa_0 = 0$
- El origen de  $\dot{\eta} = f_a(\eta, \phi(\eta))$  es exponencialmente estable.

Entonces existe  $\varepsilon^* > 0$  tal que para toda  $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$  el origen del sistema en lazo cerrado es exponencialmente estable y  $\Omega$  es un subconjunto de su región de atracción. Si las hipótesis son válidas globalmente, entonces el origen será global, uniforme y asintóticamente estable.

### Ejemplo 9.3

$$\dot{x}_1 = x_2 + \theta_1 x_1 \sin x_2$$

$$\dot{x}_2 = \theta_2 x_2^2 + x_1 + u$$

$$|\theta_1| \leq a , \ |\theta_2| \leq b$$

$$x_2 = -kx_1 \implies \dot{x}_1 = -kx_1 + \theta_1 x_1 \sin x_2$$

$$V_1 = \frac{1}{2}x_1^2 \implies x_1 \dot{x}_1 \leq -kx_1^2 + ax_1^2$$

Variedad deslizante (superficie):

$$s = kx_1 + x_2 = 0 , \ k > a$$

$$\dot{s} = \theta_2 x_2^2 + x_1 + u + k(x_2 + \theta_1 x_1 \sin x_2)$$

$$u = -x_1 - kx_2 + v \implies \dot{s} = v + \Delta(x)$$

$$\Delta(x) = \theta_2 x_2^2 + k\theta_1 x_1 \sin x_2$$

$$|\Delta(x)| \leq ak|x_1| + bx_2^2$$

$$\beta(x) = ak|x_1| + bx_2^2 + \beta_0 , \ \beta_0 > 0$$

$$u = -x_1 - kx_2 - \beta(x) \operatorname{sign}(s)$$

¿Estabilizará el control

$$u = -x_1 - kx_2 - \beta(x) \operatorname{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)$$

el origen?

#### Ejemplo 9.4 Forma Normal

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f_0(\eta, \xi) \\ \dot{\xi}_i = \xi_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq \rho - 1 \\ \dot{\xi}_{\rho} = L_f^{\rho} h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x) u \\ y = \xi_1 \end{cases}$$

Considere a  $\xi_{\rho}$  como la entrada del sistema

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f_0(\eta, \xi_1, \dots, \xi_{\rho-1}, \xi_{\rho}) \\ \dot{\xi}_i = \xi_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq \rho - 2 \\ \dot{\xi}_{\rho-1} = \xi_{\rho} \end{cases}$$

Diseñe

$$\xi_\rho = \phi(\eta, \xi_1, \dots, \xi_{\rho-1})$$

para estabilizar el origen

$$s = \xi_\rho - \phi(\eta, \xi_1, \dots, \xi_{\rho-1})$$

Para sistemas de fase mínima:

El origen de  $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$  es asintóticamente estable

$$s = \xi_\rho + k_1 \xi_1 + \dots + k_{\rho-1} \xi_{\rho-1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\eta} = f_0(\eta, \xi_1, \dots, \xi_{\rho-1}, -k_1 \xi_1 - \dots - k_{\rho-1} \xi_{\rho-1}) \\ \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{\rho-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -k_{\rho-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{\rho-1} \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

### 9.3. Sistemas con control multivariable

Considérese un sistema en la Forma Regular

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f_a(\eta, \xi) \\ \dot{\xi} = f_b(\eta, \xi) + G(\eta, \xi) E(\eta, \xi) u + \delta(t, \eta, \xi, u) \end{cases}$$

$$\eta \in \mathbb{R}^{n-p}, \quad \xi \in \mathbb{R}^p, \quad u \in \mathbb{R}^p$$

$f_a(0, 0) = 0, \quad f_b(0, 0) = 0, \quad \det G(\eta, \xi) \neq 0, \quad \det E(\eta, \xi) \neq 0,$   
 $f_a, \quad f_b, \quad E$  conocidos,  $G, \quad \delta$  inciertos,

$$G(\eta, \xi) = \text{diag}[g_1(\eta, \xi), g_2(\eta, \xi), \dots, g_p(\eta, \xi)], \quad g_i(\eta, \xi) \geq g_0 > 0$$

El diseño se realiza en dos fases:

### 9.3.1. Fase 1:

Variedad de Deslizamiento (Superficie Deslizante):

$$s = \xi - \phi(\eta) = 0, \quad \phi(0) = 0$$

$$s(t) \equiv 0 \implies \dot{\eta} = f_a(\eta, \phi(\eta))$$

Diséñese  $\phi(\eta)$  de tal forma que el origen de  $\dot{\eta} = f_a(\eta, \phi(\eta))$  sea asintóticamente estable.

### 9.3.2. Fase 2:

Diseñe el control de tal forma que las trayectorias converjan a  $s = 0$  en tiempo finito y permanezcan allí a pesar de las perturbaciones e incertidumbres.

$$\dot{s} = f_b(\eta, \xi) - \frac{\partial \phi(\eta)}{\partial \eta} f_a(\eta, \xi) + G(\eta, \xi) E(\eta, \xi) u + \delta(t, \eta, \xi, u)$$

Sea

$$u = E^{-1} \left\{ -L \left[ \hat{f}_b - \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \hat{f}_a \right] + v \right\}, \quad L = \hat{G}^{-1}, \quad \text{o} \quad L = 0$$

$$\dot{s}_i = g_i(\eta, \xi) v_i + \Delta_i(t, \eta, \xi, v), \quad 1 \leq i \leq p$$

Si se supone que

$$\left| \frac{\Delta_i(t, \eta, \xi, v)}{g_i(\eta, \xi)} \right| \leq \varrho(\eta, \xi) + \kappa_0 \max_{1 \leq i \leq p} |v_i|, \quad 1 \leq i \leq p$$

$$\varrho(\eta, \xi) \geq 0, \quad 0 \leq \kappa_0 < 1 \quad (\text{conocidas})$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p s_i^2$$

$$s_i \dot{s}_i = s_i g_i v_i + s_i \Delta_i$$

$$\leq g_i \left\{ s_i v_i + |s_i| \left( \varrho(\eta, \xi) + \kappa_0 \max_{1 \leq i \leq p} |v_i| \right) \right\}$$

Eligiendo

$$v_i = -\beta(\eta, \xi) \operatorname{sign}(s_i), \quad 1 \leq i \leq p$$

$$\beta(\eta, \xi) \geq \frac{\varrho(\eta, \xi)}{1 - \kappa_0} + \beta_0, \quad \beta_0 > 0$$

$$\begin{aligned}s_i \dot{s}_i &\leq g_i [-\beta + \varrho + \kappa_0 \beta] |s_i| \\&= g_i [-\beta(1 - \kappa_0) + \varrho] |s_i| \\&\leq g_i [-\varrho - (1 - \kappa_0) \beta_0 + \varrho] |s_i| \\&\leq -g_0 \beta_0 (1 - \kappa_0) |s_i|\end{aligned}$$

$s_i(t)$  llega a cero en tiempo finito!

Una vez llega a la superficie  $s = 0$ , la trayectoria no puede abandonarla.

¿Cómo se puede reducir o eliminar el "chattering" (castaño)?

Reemplazar el sign por una función de saturación de gran pendiente:

$$v_i = -\beta(x) \operatorname{sat}\left(\frac{s_i}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0, \quad 1 \leq i \leq p$$

Léase los teoremas 14.1 y 14.2 en Khalil [28].

# Lección 10

Rediseño de Lyapunov (o  
Control Mini-Max)

Considere el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x) + G(x)[u + \delta(t, x, u)]$$

$$f(0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^p$$

Modelo Nominal:

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u$$

Control estabilizante:

$$u = \psi(x)$$

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} [f(x) + G(x)\psi(x)] \leq -W(x), \quad \forall x \in D, \quad W \text{ es p.d.}$$

Control (rediseñado) robustificante:

$$u = \psi(x) + v$$

Hipótesis acerca de la perturbación

$$\|\delta(t, x, \psi(x) + v)\| \leq \varrho(x) + \kappa_0 \|v\|, \quad 0 \leq \kappa_0 < 1$$

El sistema con el control robustificante queda

$$\dot{x} = f(x) + G(x)\psi(x) + G(x)[v + \delta(t, x, \psi(x) + v)]$$

La función de Lyapunov para sistema nominal usada como candidata a f. de Lyapunov para el sistema perturbado

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} [f + G\psi] + \frac{\partial V}{\partial x} G [v + \delta]$$

Definiendo

$$w^T = \frac{\partial V}{\partial x} G$$

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} [f + G\psi] + w^T v + w^T \delta$$

$$w^T v + w^T \delta \leq w^T v + \|w\| \|\delta\| \leq w^T v + \|w\| [\varrho(x) + \kappa_0 \|v\|]$$

Eligiendo el control como

$$v = -\eta(x) \frac{w}{\|w\|} \quad \left( \frac{w}{\|w\|} = \text{sign}(w) \text{ para } p = 1 \right)$$

dónde

$$\eta(x) \geq \frac{\varrho(x)}{1 - \kappa_0}$$

$$\begin{aligned} w^T v + w^T \delta &\leq -\eta(x) \|w\| + \|w\| \varrho(x) + \kappa_0 \eta(x) \|w\| \\ &= -\eta(x) (1 - \kappa_0) \|w\| + \|w\| \varrho(x) \leq 0 \end{aligned}$$

Luego

$$\dot{V} \leq -W(x)$$

Entonces las trayectorias convergen asintóticamente al punto de equilibrio a pesar de las perturbaciones e incertidumbres.

Problemas:

1. Teóricos con la existencia y unicidad de las soluciones, ya que el control es discontinuo.
2. Prácticos debido al "Chattering" (castaño) producido por el control discontinuo.

Para resolver este segundo problema se puede aproximar el control dis-continuo por un control contínuo de alta ganancia

$$v = \begin{cases} -\eta(x) \frac{w}{\|w\|}, & \text{si } \eta(x) \|w\| \geq \varepsilon \\ -\eta^2(x) \frac{w}{\varepsilon}, & \text{si } \eta(x) \|w\| < \varepsilon \end{cases}$$

En la región

$$\eta(x) \|w\| \geq \varepsilon \implies \dot{V} \leq -W(x)$$

En la región  $\eta(x) \|w\| < \varepsilon$

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -W(x) + w^T \left[ -\eta^2(x) \frac{w}{\varepsilon} + \delta \right] \\ &\leq -W(x) - \frac{\eta^2(x)}{\varepsilon} \|w\|^2 + \varrho(x) \|w\| + \kappa_0 \|w\| \|v\| \\ &\leq -W(x) - \frac{\eta^2}{\varepsilon} \|w\|^2 + \varrho \|w\| + \kappa_0 \frac{\eta^2}{\varepsilon} \|w\|^2 \\ \dot{V} &\leq -W(x) + (1 - \kappa_0) \left( -\frac{\eta^2}{\varepsilon} \|w\|^2 + \eta \|w\| \right) \end{aligned}$$

como

$$-\frac{y^2}{\varepsilon} + y \leq \frac{\varepsilon}{4}, \text{ para } y \geq 0$$

entonces

$$\dot{V} \leq -W(x) + \varepsilon \frac{(1 - \kappa_0)}{4}, \quad \forall x \in D$$

**Teorema 10.1** [28, Teorema 14.3]  $x(t)$  es uniforme y finalmente acotada por una función clase  $\mathcal{K}$  de  $\varepsilon$ . Si las hipótesis se satisfacen globalmente, y  $V$  es radialmente no acotada, entonces  $x(t)$  es global, uniforme y finalmente acotada.

**Corolario 10.2** [28, Corolario 14.1] Si  $\varrho(0) = 0$  y  $\eta(x) \geq \eta_0 > 0$  se puede recobrar la estabilidad uniforme y asintótica.

**Ejemplo 10.3** El modelo de un péndulo con aceleración horizontal del punto de suspensión está dado por

$$m \left[ \ell \ddot{\theta} + \mathcal{A}(t) \cos \theta \right] = \frac{T}{\ell} - mg \sin \theta$$

*Objetivo: estabilizar el péndulo en el punto  $\theta = \pi$*

$$x_1 = \theta - \pi, \quad x_2 = \dot{\theta}, \quad a = \frac{g}{\ell}, \quad c = \frac{1}{m\ell^2}, \quad h(t) = \frac{\mathcal{A}(t)}{\ell},$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= a \sin x_1 + cu + h(t) \cos x_1\end{aligned}$$

*El modelo nominal es*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \hat{a} \sin x_1 + \hat{c}u\end{aligned}$$

*Control nominal (linealización exacta)*

$$\psi(x) = - \left( \frac{\hat{a}}{\hat{c}} \right) \sin x_1 - \left( \frac{1}{\hat{c}} \right) (k_1 x_1 + k_2 x_2)$$

*Dinámica nominal en lazo cerrado*

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix}}_{Hurwitz} x, \quad V(x) = x^T P x$$

## Perturbación

$$\delta = \frac{1}{\hat{c}} \left[ \left( \frac{a\hat{c} - \hat{a}c}{\hat{c}} \right) \sin x_1 + h(t) \cos x_1 - \left( \frac{c - \hat{c}}{\hat{c}} \right) (k_1 x_1 + k_2 x_2) \right] + \left( \frac{c - \hat{c}}{\hat{c}} \right) v$$

$$\left| \frac{c - \hat{c}}{\hat{c}} \right| \leq \kappa_0 , \quad \left| \frac{\hat{a}c - a\hat{c}}{\hat{c}} \right| + \left| \frac{c - \hat{c}}{\hat{c}} \right| \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \leq k , \quad |h(t)| \leq H$$

$$|\delta(x)| \leq \frac{(k \|x\| + H)}{\hat{c}} + \kappa_0 |v| \triangleq \rho(x) + \kappa_0 |v| , \quad (\kappa_0 < 1)$$

$$\eta(x) = \frac{\rho(x)}{1 - \kappa_0} , \quad \eta(x) \geq \frac{H}{\hat{c}(1 - \kappa_0)}$$

$$w = \frac{\partial V}{\partial x} G = 2x^T P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2(p_{12}x_1 + p_{22}x_2)$$

$$v = \begin{cases} -\eta(x) \operatorname{sign}(w) , & \text{si } \eta(x) |w| \geq \varepsilon \\ -\eta^2(x) \frac{w}{\varepsilon} , & \text{si } \eta(x) |w| < \varepsilon \end{cases}$$

$$u = - \left( \frac{\hat{a}}{\hat{c}} \right) \sin x_1 - \left( \frac{1}{\hat{c}} \right) (k_1 x_1 + k_2 x_2) + v$$

**Ejercicio 10.4** ¿Este control estabiliza el origen  $x = 0$ ?

# Lección 11

## Backstepping robusto

El "backstepping" se aplica a sistemas en la forma de retroalimentación estricta

$$\dot{z}_1 = f_1(z_1) + g_1(z_1) z_2 ,$$

$$\dot{z}_2 = f_2(z_1, z_2) + g_2(z_1, z_2) z_3 ,$$

⋮

$$\dot{z}_{k-1} = f_{k-1}(z_1, \dots, z_{k-1}) + g_{k-1}(z_1, \dots, z_{k-1}) z_k ,$$

$$\dot{z}_k = f_k(z_1, \dots, z_k) + g_k(z_1, \dots, z_k) u ,$$

dónde

$$g_i(z_1, \dots, z_i) \neq 0 \text{ para } 1 \leq i \leq k$$

Pero también puede aplicarse a sistemas en esta forma con perturbaciones o incertidumbres

$$\dot{z}_1 = f_1(z_1) + g_1(z_1) z_2 + \delta_1(z) ,$$

$$\dot{z}_2 = f_2(z_1, z_2) + g_2(z_1, z_2) z_3 + \delta_2(z) ,$$

⋮

$$\dot{z}_{k-1} = f_{k-1}(z_1, \dots, z_{k-1}) + g_{k-1}(z_1, \dots, z_{k-1}) z_k + \delta_{k-1}(z) ,$$

$$\dot{z}_k = f_k(z_1, \dots, z_k) + g_k(z_1, \dots, z_k) u + \delta_k(z) ,$$

si las incertidumbres satisfacen

$$|\delta_1(z)| \leq \rho_1(z_1) ,$$

$$|\delta_2(z)| \leq \rho_2(z_1, z_2) ,$$

⋮

$$|\delta_{k-1}(z)| \leq \rho_{k-1}(z_1, \dots, z_{k-1}) ,$$

$$|\delta_k(z)| \leq \rho_k(z_1, \dots, z_k) ,$$

Para esto, cada control virtual

$$z_i = \phi_i(z_1, \dots, z_{i-1}) ,$$

que debe ser suave, se diseña para que sea robusto ante las incertidumbres en su subsistema.

### Ejemplo 11.1

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \theta_1 x_1 \sin x_2 \\ \dot{x}_2 &= \theta_2 x_2^2 + x_1 + u\end{aligned}$$

$$|\theta_1| \leq a, \quad |\theta_2| \leq b$$

$$\delta_1 = \theta_1 x_1 \sin x_2, \quad \delta_2 = \theta_2 x_2^2$$

Diseño:

### Primer paso:

$$\dot{x}_1 = x_2 + \theta_1 x_1 \sin x_2, \quad |\delta_1| = |\theta_1 x_1 \sin x_2| \leq a |x_1|$$

Control virtual

$$x_2 = -k_1 x_1$$

$$V_1 = \frac{1}{2}x_1^2, \quad \dot{V}_1 \leq -(k_1 - a)x_1^2, \quad \text{Hágase } k_1 = 1 + a$$

con lo que el control virtual estabiliza robustamente el origen  $x_1 = 0$ .

**Segundo paso:** Mediante el cambio de variables

$$z_2 = x_2 + (1 + a)x_1$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -(1 + a)x_1 + \theta_1 x_1 \sin x_2 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= \psi_1(x) + \psi_2(x, \theta) + u\end{aligned}$$

$$\psi_1(x) = x_1 + (1 + a)x_2, \quad \psi_2(x, \theta) = (1 + a)\theta_1 x_1 \sin x_2 + \theta_2 x_2^2$$

$$V_c(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2$$

$$\dot{V}_c \leq -x_1^2 + z_2 [x_1 + \psi_1(x) + \psi_2(x, \theta) + u]$$

## Primer Método (Ejemplo 14.13 de Khalil):

$$u = -x_1 - \psi_1(x) - kz_2, \quad k > 0$$

$$\dot{V}_c \leq -x_1^2 - kz_2^2 + z_2\psi_2(x, \theta)$$

Se restringe el análisis al conjunto compacto

$$\Omega_c = \{V_c(x) \leq c\}$$

$$|\psi_2| \leq a(1+a)|x_1| + b\rho|x_2|, \quad \rho = \max_{x \in \Omega_c} |x_2|$$

$$x_2 = z_2 - (1+a)x_1$$

$$|\psi_2| \leq (1+a)(a+b\rho)|x_1| + b\rho|z_2|,$$

$$\dot{V}_c \leq -x_1^2 - kz_2^2 + (1+a)(a+b\rho)|x_1||z_2| + b\rho z_2^2$$

Se puede mostrar que (para cualquier  $c$ ) eligiendo  $k$  suficientemente grande se puede estabilizar exponencialmente al origen y  $\Omega_c$  está contenido en la región de atracción. Por lo

tanto se obtiene estabilización semiglobal del origen, pero no estabilización global!

**Segundo Método (Ejemplo 14.14 del Khalil):** Aquí se combinan backstepping y Rediseño de Lyapunov

$$u = -x_1 - \psi_1(x) - kz_2 + v, \quad k > 0$$

$$\dot{V}_c \leq -x_1^2 - kz_2^2 + z_2 [\psi_2(x, \theta) + v]$$

$$|\psi_2| \leq a(1+a)|x_1| + bx_2^2,$$

$$v = \begin{cases} -\eta(x) \operatorname{sign}(z_2), & \text{si } \eta(x)|z_2| \geq \varepsilon \\ -\eta^2(x) \frac{z_2}{\varepsilon}, & \text{si } \eta(x)|z_2| < \varepsilon \end{cases}$$

$$\eta(x) = \eta_0 + a(1+a)|x_1| + bx_2^2, \quad \eta_0 > 0, \quad \varepsilon > 0$$

$$\dot{V}_c \leq -x_1^2 - kz_2^2 + \frac{\varepsilon}{4}$$

Se puede mostrar (*jhágalo!*) que este control estabiliza globalmente al origen.

# Parte IV

# Seguimiento

# Lección 12

## Seguimiento (Tracking)

## 12.1. Por Linealización Parcial

Considere el sistema SISO con grado relativo  $\rho$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

$$f(0) = 0, \quad h(0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}$$

con **grado relativo**  $\rho$ ,  $1 \leq \rho \leq n$ , en  $D_0 \subset D \subset \mathbb{R}^n$

$$L_g L_f^{i-1} h(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \rho - 1; \quad \forall x \in D_0$$

$$L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0; \quad \forall x \in D_0$$

Cambio de variables:

$$z = T(x) \triangleq \begin{bmatrix} \phi(x) \\ \vdots \\ \psi(x) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \eta \\ \vdots \\ \xi \end{bmatrix}$$

Forma Normal:

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f_0(\eta, \xi) \\ \dot{\xi}_i &= \xi_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq \rho - 1 \\ \dot{\xi}_{\rho} &= L_f^{\rho} h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x) u \\ y &= \xi_1\end{aligned}$$

$$f_0(0, 0) = 0$$

Señal de referencia  $r(t)$ :

- $r(t)$  y todas sus derivadas hasta  $r^{(\rho)}(t)$  son acotadas para todo  $t \geq 0$ , y la  $\rho$ -ésima derivada  $r^{(\rho)}(t)$  es una función continua a tramos en  $t$ ;
- Se dispone de las señales  $r(t), \dots, r^{(\rho)}(t)$  en línea.

Objetivo:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - r(t)] = 0 .$$

Con el cambio de variables

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} r(t) \\ \vdots \\ r^{(\rho-1)}(t) \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} \xi_1 - r \\ \vdots \\ \xi_\rho - r^{(\rho-1)} \end{bmatrix} = \xi - \mathcal{R},$$

el sistema (en la forma normal) queda

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f_0(\eta, e + \mathcal{R}) \\ \dot{e} &= A_c e + B_c [L_f^\rho h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x) u - r^{(\rho)}(t)]\end{aligned}$$

dónde

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Mediante el control retroalimentado (por linealización parcial)

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} [-L_f^\rho h(x) + r^{(\rho)}(t) + v]$$

se obtiene (para la parte linealizable del sistema)

$$\dot{e} = A_c e + B_c v$$

que mediante el control por retroalimentación lineal

$$\begin{aligned} v &= -K e \\ &\Downarrow \\ \dot{e} &= \underbrace{(A_c - B_c K)}_{\text{Hurwitz}} e \\ &\Downarrow \\ \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= 0 \\ &\Downarrow \\ \lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - r(t)] &= 0 \end{aligned}$$

Además,

$$e(t) \text{ es acotado} \implies \xi(t) = e(t) + \mathcal{R}(t) \text{ es acotado.}$$

¿Qué ocurre con  $\eta(t)$ ?

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi) = f_0(\eta, e + \mathcal{R})$$

Tenemos dos casos:

1. Seguimiento Local: valores pequeños de  $\|\eta(0)\|$ ,  $\|e(0)\|$ ,  $\|\mathcal{R}(t)\|$

Sistema de Fase Mínima  $\implies$  El origen de  $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$  es  
asintóticamente estable  
 $\implies \eta(t)$  es acotada para  $\|\eta(0)\|$ ,  $\|e(0)\|$ ,  
 $\|\mathcal{R}(t)\|$  suficientemente pequeños

2. Seguimiento Global: valores grandes de  $\|\eta(0)\|$ ,  $\|e(0)\|$ ,  $\|\mathcal{R}(t)\|$

¿Qué condición se requiere del sistema  $\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$  ?

**Ejemplo 12.1** Sea el sistema

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -a \sin x_1 - bx_2 + cu$$

$$y = x_1$$

$$e_1 = x_1 - r, \quad e_2 = x_2 - \dot{r}$$

$$\dot{e}_1 = e_2$$

$$\dot{e}_2 = -a \sin x_1 - bx_2 + cu - \ddot{r}$$

$$u = \frac{1}{c} [a \sin x_1 + bx_2 + \ddot{r} - k_1 e_1 - k_2 e_2]$$

$$\dot{e}_1 = e_2$$

$$\dot{e}_2 = -k_1 e_1 - k_2 e_2$$

Ver los resultados de simulación en el ejemplo 13.21 del libro de Khalil.

## 12.2. Seguimiento Robusto por Modos Deslizantes

Considere el sistema SISO con incertidumbre acoplada

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)[u + \delta(t, x, u)] \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

$$f(0) = 0, \quad h(0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}$$

con **grado relativo**  $\rho$ ,  $1 \leq \rho \leq n$ , en  $D_0 \subset D \subset \mathbb{R}^n$

$$L_g L_f^{i-1} h(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \rho - 1; \quad \forall x \in D_0$$

$$L_g L_f^{\rho-1} h(x) \geq a > 0; \quad \forall x \in D_0$$

Forma Normal:

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$$

$$\dot{\xi}_i = \xi_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq \rho - 1$$

$$\dot{\xi}_{\rho} = L_f^{\rho} h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x) [u + \delta(t, x, u)]$$

$$y = \xi_1$$

$$f_0(0, 0) = 0$$

Señal de referencia  $r(t)$ :

- $r(t)$  y todas sus derivadas hasta  $r^{(\rho)}(t)$  son acotadas para todo  $t \geq 0$ , y la  $\rho$ -ésima derivada  $r^{(\rho)}(t)$  es una función continua a tramos en  $t$ ;
- Se dispone de las señales  $r(t), \dots, r^{(\rho)}(t)$  en línea.

Objetivo:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - r(t)] = 0 .$$

Con el cambio de variables

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} r(t) \\ \vdots \\ r^{(\rho-1)}(t) \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} \xi_1 - r \\ \vdots \\ \xi_\rho - r^{(\rho-1)} \end{bmatrix} = \xi - \mathcal{R},$$

el sistema (en la forma normal) queda

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, e + \mathcal{R})$$

$$\dot{e}_1 = e_2$$

⋮

$$\dot{e}_{\rho-1} = e_\rho$$

$$\dot{e}_\rho = L_f^\rho h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x) [u + \delta(t, x, u)] - r^{(\rho)}(t)$$

Superficie Deslizante (viendo a  $e_\rho$  como control virtual):

$$s = (k_1 e_1 + \cdots + k_{\rho-1} e_{\rho-1}) + e_\rho,$$

$$s(t) \equiv 0 \implies e_\rho = -(k_1 e_1 + \cdots + k_{\rho-1} e_{\rho-1})$$

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, e + \mathcal{R})$$

$$\dot{e}_1 = e_2$$

⋮

$$\dot{e}_{\rho-1} = -(k_1 e_1 + \cdots + k_{\rho-1} e_{\rho-1})$$

Diséñense  $k_1 \dots k_{\rho-1}$  tales que la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & \cdots & -k_{\rho-2} & -k_{\rho-1} \end{bmatrix} \quad \text{sea Hurwitz .}$$

**Suposición 12.2** El sistema  $\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$  es BIBS (Bounded Input Bounded State Stable).

$$s=(k_1e_1+\cdots+k_{\rho-1}e_{\rho-1})+e_\rho=\sum_{i=1}^{\rho-1}k_ie_i+e_\rho$$

$$\dot{s}=\sum_{i=1}^{\rho-1}k_ie_{i+1}+L_f^\rho h\left(x\right)+L_gL_f^{\rho-1}h\left(x\right)\left[u+\delta\left(t,x,u\right)\right]-r^{\left(\rho\right)}\left(t\right)$$

$$u=-\frac{1}{L_gL_f^{\rho-1}h\left(x\right)}\left[\sum_{i=1}^{\rho-1}k_ie_{i+1}+L_f^\rho h\left(x\right)-r^{\left(\rho\right)}\left(t\right)\right]+v$$

$$\dot{s}=L_gL_f^{\rho-1}h\left(x\right)v+\Delta\left(t,x,v\right)$$

$$\left|\frac{\Delta\left(t,x,v\right)}{L_gL_f^{\rho-1}h\left(x\right)}\right|\leq\varrho\left(x\right)+\kappa_0\left|v\right|~,~0\leq\kappa_0<1$$

$$v=-\beta\left(x\right)\mathrm{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)~,~\varepsilon>0$$

$$333 \\$$

$$\beta(x) \geq \frac{\varrho(x)}{1 - \kappa_0} + \beta_0, \quad \beta_0 > 0$$

**Ejercicio 12.3** ¿Qué propiedades se pueden probar para esta ley de control?

## Parte V

# Regulación robusta estructural: Control Integral

# Lección 13

## Control Integral

[28, Sección 12.3] La regulación es un caso especial del seguimiento, cuando la señal a seguir  $r(t)$  es constante. La acción integral permite obtener regulación a pesar de incertidumbres y/o perturbaciones que produzcan una desviación constante en la variable a regulada. A esto se debe su importancia fundamental en control clásico.

Considere el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, w) \\ y &= h(x, w) \\ y_m &= h_m(x, w)\end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}^n$  estado ,  $u \in \mathbb{R}^p$  entrada de control ,  $y \in \mathbb{R}^p$  variable controlada ,  
 $y_m \in \mathbb{R}^m$  salida medida ,  $w \in \mathbb{R}^l$  parámetros y perturbaciones desconocidas c

**Objetivo:**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \rightarrow r$$

$r \in \mathbb{R}^p$  referencia constante.

Defínase

$$v = (r, w) , \quad e(t) = y(t) - r$$

**Suposición:**  $e$  se puede medir.

**Condición de estado estacionario:** Supóngase que, para cada  $w \in \mathbb{R}^l$ , existe un único par  $(x_{ss}, u_{ss})$  que satisface las ecuaciones

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_{ss}, u_{ss}, w) \\ 0 &= h(x_{ss}, w) - r \end{aligned}$$

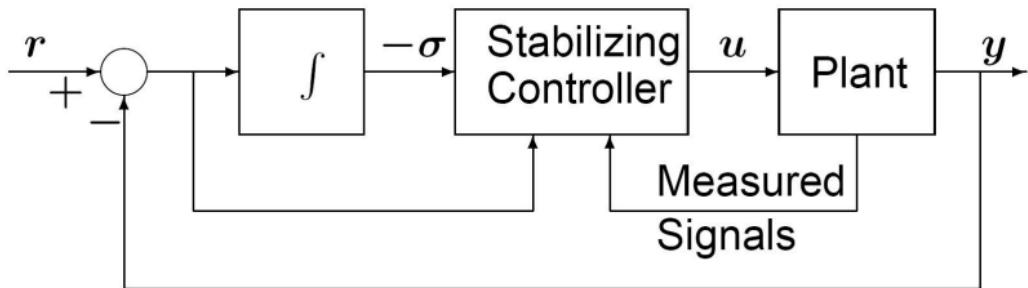
Estabilice el sistema en el punto de equilibrio  $x = x_{ss}$  para toda  $w \in \mathbb{R}^l$ .

**Ejercicio 13.1** *Se puede reducir esto a un problema de estabilización trasladando el punto de equilibrio al origen mediante el cambio de variables*

$$x_\delta = x - x_{ss} , \quad u_\delta = u - u_{ss} ?$$

**Acción Integral:**

$$\dot{\sigma} = e$$



### Sistema extendido:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, w) \\ \dot{\sigma} &= h(x, w) - r\end{aligned}$$

**Tarea:** Estabilice el sistema extendido en el punto  $(x_{ss}, \sigma_{ss})$ , donde  $\sigma_{ss}$  produce  $u_{ss}$

Explicar mejor que la tarea ahora consiste en estabilizar la variedad de operación. No les ha quedado muy claro!

## 13.1. Control Integral via linealización (de Taylor) [28, Sección 12.4]

### 13.1.1. Retroalimentación de estados

Retroalimentación de estados:

Ojo:  $e$  no es un estado!!

$$u = -K_1x - K_2\sigma - K_3e$$

Sistema en lazo cerrado:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, -K_1x - K_2\sigma - K_3[h(x, w) - r], w) \\ \dot{\sigma} &= h(x, w) - r\end{aligned}$$

Puntos de equilibrio:

$$0 = f(\bar{x}, \bar{u}, w)$$

$$0 = h(\bar{x}, w) - r$$

$$\bar{u} = -K_1\bar{x} - K_2\bar{\sigma}$$

Único punto de equilibrio en

$$x = x_{ss} , \sigma = \sigma_{ss} , u = u_{ss} .$$

**Linealización alrededor de  $(x_{ss}, \sigma_{ss})$ :**

$$\xi_\delta = \begin{bmatrix} x - x_{ss} \\ \sigma - \sigma_{ss} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\xi}_\delta = (\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{K}) \xi_\delta$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} , \quad A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} (x, u, w) \right|_{\text{eq}} , \quad C = \left. \frac{\partial h}{\partial x} (x, w) \right|_{\text{eq}}$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} , \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} (x, u, w) \right|_{\text{eq}} , \quad C = \left. \frac{\partial h}{\partial x} (x, w) \right|_{\text{eq}}$$

$$\mathcal{K} = [ K_1 + K_3 C , \quad K_2 ]$$

**Lema 13.2**  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  es controlable si y sólo si

1.  $(A, B)$  es controlable y

2.  $\text{rango} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + p$

**Tarea:** Diseñe  $\mathcal{K}$ , independiente de  $v = (r, w)$ , tal que  $(\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{K})$  es Hurwitz para todo  $v$ .

$(x_{ss}, \sigma_{ss})$  es un punto de equilibrio exponencialmente estable para el sistema en lazo cerrado. Todas las soluciones que se inician en su región de atracción convergen a él cuando  $t$  tiende a infinito

$$e(t) \rightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

**Ejemplo 13.3** Péndulo

$$\ddot{\theta} = -a \sin \theta - b\dot{\theta} + cT$$

Objetivo: regule  $\theta$  en  $\delta$

$$x_1 = \theta - \delta , \quad x_2 = \dot{\theta} , \quad u = T ,$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -a \sin(x_1 + \delta) - bx_2 + cu$$

$$x_{ss} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad u_{ss} = \frac{a}{c} \sin \delta$$

$$\dot{\sigma} = x_1$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a \cos \delta & -b & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = [ \ k_1 , \ k_2 ] , \quad K_2 = k_3 , \quad K_3 = 0$$

$(\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{K})$  es Hurwitz si

$$b + k_2 c > 0 , \quad (b + k_2 c)(a \cos \delta + k_1 c) - k_3 c > 0 , \quad k_3 c > 0$$

Supóniga que  $\frac{a}{c} \leq \rho_1$  ,  $\frac{1}{c} \leq \rho_2$

$$k_2 > 0 , k_3 > 0 , k_1 > \rho_1 + \rho_2 \frac{k_3}{k_2}$$

El controlador está dado por

$$\begin{aligned} u &= -k_1(\theta - \delta) - k_2\dot{\theta} - k_3\sigma \\ \dot{\sigma} &= \theta - \delta \end{aligned}$$

que es el controlador PID clásico.

### 13.1.2. Retroalimentación de salida

Si sólo se miden  $(e, y_m)$  el controlador integral puede ser

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= e = y - r \\ \dot{z} &= Fz + G_1\sigma + G_2y_m \\ u &= Lz + M_1\sigma + M_2y_m + M_3e \end{aligned}$$

Tarea: Diseñe  $F, G_1, G_2, L, M_1, M_2, M_3$ , independientes de  $v$ , tales que  $\mathcal{A}_c$  sea Hurwitz para todo  $v$

$$\mathcal{A}_c = \begin{bmatrix} A + BM_2C_m + BM_3C & BM_1 & BL \\ C & 0 & 0 \\ G_2C_m & G_1 & F \end{bmatrix}$$

$$C_m = \left. \frac{\partial h_m}{\partial x} (x, w) \right|_{\text{eq}}$$

## 13.2. Control Integral via Modos Deslizantes [28, Sección 14.1.4]

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f_0(\eta, \xi, w) \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{\rho-1} &= \xi_\rho, \\ \dot{\xi}_\rho &= b(\eta, \xi, u, w) + a(\eta, \xi, w)u \\ y &= \xi_1 \\ a(\eta, \xi, w) &\geq a_0 > 0\end{aligned}$$

**Objetivo:**

$$y(t) \rightarrow r, \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

$$\xi_{ss} = [r, 0, \dots, 0]^T$$

**Condición de estado estacionario:** Para cada  $w$  existe un único par  $(\eta_{ss}, u_{ss})$  que satisface las ecuaciones

$$0 = f_0(\eta_{ss}, \xi_{ss}, w)$$

$$0 = b(\eta_{ss}, \xi_{ss}, u_{ss}, w) + a(\eta_{ss}, \xi_{ss}, w) u_{ss}$$

Defínase

$$\dot{e}_0 = y - r$$

$$z = \eta - \eta_{ss} , \quad e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_\rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 - r \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_\rho \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= f_0(\eta, \xi, w) \triangleq \tilde{f}_0(z, e, w, r) \\
\dot{e}_0 &= e_1, \\
\dot{e}_1 &= e_2, \\
&\vdots \\
\dot{e}_{\rho-1} &= e_\rho, \\
\dot{e}_\rho &= b(\eta, \xi, u, w) + a(\eta, \xi, w) u
\end{aligned}$$

**Retroalimentación parcial de los estados:**  $\{e_1, \dots, e_\rho\}$  son medidas

$$s = k_0 e_0 + k_1 e_1 + \dots + k_{\rho-1} e_{\rho-1} + e_\rho$$

$k_0, \dots, k_{\rho-1}$  se eligen de tal forma que el polinomio

$$\lambda^\rho k_{\rho-1} \lambda^{\rho-1} + \dots + k_1 \lambda + k_0$$

sea Hurwitz.

$$\dot{s} = k_0 e_1 + k_1 e_2 + \dots + k_{\rho-1} e_\rho + b(\eta, \xi, u, w) + a(\eta, \xi, w) u$$

$$\dot{s} = \Delta(\eta, \xi, u, w, r) + a(\eta, \xi, w) u$$

$$\left| \frac{\Delta(\eta, \xi, u, w, r)}{a(\eta, \xi, w)} \right| \leq \varrho(e) + \kappa_0 |u| , \quad 0 \leq \kappa_0 < 1$$

$$u = -\beta(e) \operatorname{sat}\left(\frac{s}{\mu}\right)$$

$$\beta(e) \geq \frac{\varrho(e)}{1 - \kappa_0} + \beta_0 , \quad \beta_0 > 0$$

$$\text{Para } |s| \geq \mu , \quad s\dot{s} \leq -a_0(1 - \kappa_0)\beta_0$$

¿Qué pasa con las otras variables de estado?

$$\dot{z} = \tilde{f}_0(z, e, w, r)$$

$$\dot{\zeta} = A\zeta + Bs , \quad (A \text{ es Hurwitz})$$

$$\dot{s} = -a(\cdot)\beta(e) \operatorname{sat}\left(\frac{s}{\mu}\right) + \Delta(\cdot) ,$$

$$\zeta = [e_0, \dots, e_{\rho-1}]^T$$

$$\tilde{\alpha}_1(\|z\|) \leq V_1(z, w, r) \leq \tilde{\alpha}_2(\|z\|)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial z} \tilde{f}_0(z, e, w, r) \leq -\tilde{\alpha}_3(\|z\|), \quad \forall \|z\| \geq \tilde{\gamma}(\|z\|)$$

$$V_2(\zeta) = \zeta^T P \zeta, \quad PA + A^T P = -I$$

$$\Omega = \{|s| \leq c\} \cap \{V_2 \leq c^2 \rho_1\} \cap \{V_1 \leq c_0\}$$

$$\Omega_\mu = \{|s| \leq c\} \cap \{V_2 \leq c^2 \rho_1\} \cap \{V_1 \leq \tilde{\alpha}_2(\tilde{\gamma}(\mu \rho_2))\}$$

Todas las trayectorias que se inician en  $\Omega$  entran en  $\Omega_\mu$  en tiempo finito y permanecen allí para todo tiempo futuro.

En el interior de  $\Omega_\mu$  existe un único punto de equilibrio en

$$(z = 0, \quad e = 0, \quad e_0 = \bar{e}_0), \quad \bar{s} = k_0 \bar{e}_0, \quad u_{ss} = -\beta(0) \frac{\bar{s}}{\mu}$$

Bajo condiciones adicionales

el origen de  $\dot{z} = \tilde{f}_0(z, 0, w, r)$  es exponencialmente estable

el análisis local dentro de  $\Omega_\mu$  muestra que, para valores suficientemente pequeños de  $\mu$ , todas las trayectorias convergen al punto de equilibrio cuando el tiempo tiende a infinito.

# Parte VI

## Observabilidad y el Diseño de Observadores

# Lección 14

## Introducción

El objetivo de esta parte del curso es dar una perspectiva acerca del problema de observación en control y los métodos más importantes. Se hace una selección personal del problema y de las soluciones.

Nos restringiremos a una visión determinística, excluyendo la importante perspectiva de los sistemas estocásticos.

#### 14.0.1. Formulación del problema

Considere que se tiene el sistema dinámico

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x, u, d, p) , \quad x(t_0) = x_0 \\ y &= h(t, x) \\ z &= g(t, x)\end{aligned}$$

en donde  $x$  es el estado,  $u$  corresponde al vector de entradas medidas,  $d$  corresponde al vector de entradas no medidas,  $p$  es el vector de parámetros desconocidos,  $y$  es el vector de variables de salida medidas y  $z$

es una función del estado que se quiere estimar.

El problema general de observación (no estocástica y sin perturbaciones en la medición) se puede formular de la siguiente manera:

**Observabilidad:** Dado un intervalo de tiempo  $t \in [t_0, t_0 + T]$ ,  $T > 0$ , ¿es posible determinar únicamente el estado inicial  $z_0 = g(t_0, x_0)$  utilizando la información disponible  $(u, y)$ ?

**Observador:** Existe un sistema dinámico

$$\dot{\xi} = \phi()$$

que estime asintóticamente (en t. finito) (aproximadamente...) a  $z$ ?

## 14.0.2. Motivación

Existen diversos problemas útiles que motivan esta formulación:

1. Estimación (robusta) de los estados internos del sistema con fines de control
2. La identificación de los parámetros de un sistema
3. La estimación simultánea de los parámetros y los estados (observación adaptable)
4. La detección de fallas en sistemas dinámicos
5. La eliminación/sustitución/robustificación de sensores costosos

#### **14.0.3. Organización del curso**

El camino que seguiemos es estudiar los dos problemas para clases de sistemas cada vez más complejas:

1. Sistemas estáticos o sin memoria

- 2. Sistemas dinámicos lineales
  - a) El caso invariante en el tiempo
  - b) El caso variante en el tiempo
- 3. Métodos de diseño para sistemas dinámicos no lineales
  - a) Métodos por aproximación (Linealización) (Ej. EKF)
  - b) Métodos por transformación
    - 1) Uso de difeomorfismos
    - 2) Uso de inmersiones
  - c) Métodos por interconexión

# Parte VII

# Observabilidad

# Lección 15

## Sistemas estáticos o sin memoria

Sea el sistema estático (consideramos el caso sin ruido y sin incertidumbres)  $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$

$$y(t) = f(t, x(t)) , \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^q , \quad t \geq 0$$

donde se desea estimar la variable (señal)  $x$  a partir de las mediciones de la variable (señal)  $y$ . Ejemplo: recuperar la imagen tridimensional a partir de sus proyecciones bidimensionales (camaras).

Existen dos situaciones (extremas) esencialmente diferentes:

$x(t)$  **arbitraria**: es decir,  $x(t_1)$  y  $x(t_2)$  no están (co)relacionados, o sea el valor de uno no tiene que ver con el del otro, entonces el valor de  $x(t)$  debe ser recuperado de la medición en el mismo instante de tiempo  $y(t)$ .

$x(t) = x_0$  **constante**: Entonces las observaciones  $y(t)$  en distintos instantes de tiempo se complementan para determinar el valor de  $x_0$ .

Es claro que las condiciones bajo las cuales podemos determinar a  $x(t)$  a partir de  $y(t)$  deben ser muy distintas en ambos casos. Las situaciones intermedias son "mezclas" de las situaciones extremas consideradas.

#### 15.0.4. Repaso de algunos conceptos básicos de funciones

Sean  $X, Y$  dos conjuntos. Sus elementos serán denotados por  $x, y$ , respectivamente.

**Relación:** Una relación  $R$  es un subconjunto del conjunto producto  $X \times Y$ . Se dice que  $x$  está relacionado con  $y$  si  $(x, y) \in R$ .

**Función:** Una función (mapa)  $f$  es una relación con dos propiedades adicionales:

1.  $\forall x \in X, \exists y \in Y$  tal que  $(x, y) \in f$

2. Para cada  $x \in X$  existe un **único**  $y \in Y$  tal que  $(x, y) \in f$

Por esta razón se escribe  $f : X \rightarrow Y$  y entonces  $y = f(x)$

Una relación  $R$  en  $X, Y$  se puede ver como una función  $r : X \rightarrow$  subconjuntos ( $Y$ ) o una *función multivaluada*.

**Relación inversa** La inversa de  $R$  (denotada como  $R^{-1}$ ) es la relación definida como el subconjunto de  $Y \times X$  tal que  $(y, x) \in R^{-1}$  si y sólo si  $(x, y) \in R$

Nótese que:

- La inversa de cualquier relación siempre existe y es una relación.
- La inversa de una función  $f$  siempre existe, pero en general  $f^{-1}$  no es una función, sino una función multivaluada (relación)!

**Función inyectiva:**  $f : X \rightarrow Y$  es inyectiva si  $[y = f(x_1) \wedge y = f(x_2)] \implies x_1 = x_2$

**Función sobreyectiva:**  $f : X \rightarrow Y$  es sobreyectiva si  $\forall y \in Y$  existe al menos un  $x \in X$  tal que  $y = f(x)$

**Función biyectiva:**  $f : X \rightarrow Y$  es biyectiva si es inyectiva y sobre-  
yectiva.

- La relación inversa  $f^{-1}$  es una función si y solo si  $f$  es biyectiva
- Si  $f$  es inyectiva entonces su inversa  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  no es una función. Pero en un dominio restringido  $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$  es una función.

## 15.0.5. Caso invariante en el tiempo

Si el mapa (deformación)  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$  no cambia con el tiempo

$$y(t) = f(x(t)) , \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^q$$

entonces las condiciones de solubilidad para  $x(t)$  arbitraria o constante son idénticas!

**Teorema 15.1** *Se puede determinar únicamente  $x$  a partir de  $y$  si y sólo si el mapa  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$  es **inyectivo**.*

En realidad este teorema es una tautología, ya que la inyectividad de  $f$  significa que, dado un  $y$  existe un único valor de  $x$  tal que  $y = f(x)$ .

Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$  es inyectivo entonces tiene que ocurrir que  $q \geq n$ : es decir el número de mediciones debe ser igual o superior al número de variables por estimar! Ej: De la imagen bidimensional de una cámara es imposible (en general) determinar la ubicación de un objeto en el espacio tridimensional! (Para lograrlo se requiere información adicional).

### 15.0.5.1. Caso Lineal

Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$  es lineal, entonces

$$y(t) = Ax(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^q$$

dónde  $A$  es una matriz constante de dimensión  $q \times n$ .

**Teorema 15.2**  $f$  es inyectiva si y sólo si

*los vectores columna de  $A$  son linealmente independientes*

$\Updownarrow$

$\text{rango}(A) = \{\# \text{ de vectores columna de } A \text{ linealmente independientes}\} = n$

$\Updownarrow$

$\text{rango}(A) = \{\# \text{ de vectores fila de } A \text{ linealmente independientes}\} = n$

**Prueba.**  $\implies$  ■

**Proposición 15.3** "Observabilidad": Se puede determinar únicamente  $x$  a partir de  $y$  si y sólo si  $A$  es **inyectiva**.

¿Cómo se puede calcular en este caso a  $x$ ? Consideremos dos casos:

**Caso cuadrado:**  $q = n$  En este caso  $A$  es una matriz cuadrada y, si es inyectiva, será invertible (regular). Así que en este caso

$$x(t) = A^{-1}y(t)$$

**Caso no cuadrado:**  $q \neq n$   $A$  es rectangular y no posee inversa! Pero si  $A$  es inyectiva entonces  $q > n$  y la matriz  $A^T A$  es cuadrada y regular (o positiva definida), así que posee inversa! En este caso podemos entonces obtener

$$A^T y(t) = A^T A x(t)$$

de donde se obtiene a  $x$

$$x(t) = (A^T A)^{-1} A^T y(t)$$

366

La matriz  $(A^T A)^{-1} A^T$  es la denominada Moore-Penrose seudoinversa de  $A$  y tiene propiedades de optimalidad cuando hay ruidos en las mediciones!

### 15.0.5.2. Caso no lineal especial

Decidir si una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$  es inyectiva es en general muy difícil. Aún el caso más especial de biyectividad (= inyectividad + sobreyectividad) es difícil. Si  $f$  es continuamente diferenciable y nos contentamos con la inyectividad (o biyectividad = invertibilidad) **local**, entonces una idea de *linealización* es muy útil:

**Teorema 15.4** (*Teorema de la función inversa*) *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continuamente diferenciable y considérese un punto  $\bar{x}$  con imagen  $\bar{y} = f(\bar{x})$ . Si la matriz Jacobiana de  $f$  evaluada en  $\bar{x}$*

$$J_f(\bar{x}) = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x}$$

*es regular (= invertible) entonces  $f$  es invertible localmente y la inversa es continuamente diferenciable.*

Este Teorema nos permite obtener condiciones suficientes de "observabilidad local" para nuestro problema:

**Teorema 15.5** *Bajo las condiciones del Teorema anterior dada una señal  $y(t)$  cercana a  $\bar{y}$  ( $\|y(t) - \bar{y}\| \leq \delta$ ) entonces existe una única  $x(t)$  cercana a  $\bar{x}$  ( $\|x(t) - \bar{x}\| \leq \epsilon$ ) tal que  $y(t) = f(x(t))$ .*

## 15.0.6. Caso variante en el tiempo

Retornemos al caso general variante en el tiempo  $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$

$$y(t) = f(t, x(t)) , \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^q, \quad t \geq 0$$

entonces las condiciones de solubilidad para  $x(t)$  arbitraria o constante son muy diferentes!

### 15.0.6.1. $x(t)$ arbitraria

El valor de  $x(t)$  debe ser recuperado de la medición en el mismo instante de tiempo  $y(t)$ .

**Teorema 15.6** *Se puede determinar únicamente  $x$  a partir de  $y$  si y sólo si el mapa  $f(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$  es **inyectivo** para cada instante de tiempo  $t \geq 0$*

Este caso es similar al caso invariante en el tiempo.

Por ejemplo, en el caso lineal

$$y(t) = A(t)x(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^q$$

dónde  $A(t)$  es una matriz constante de dimensión  $q \times n$ .

**Teorema 15.7**  *$f$  es inyectiva si y sólo si los vectores columna de  $A$  son linealmente independientes  $\forall t \geq 0$*

**Proposición 15.8** "Observabilidad": Se puede determinar unívocamente  $x$  a partir de  $y$  si y sólo si  $A(t)$  es **inyectiva**  $\forall t \geq 0$

Se puede calcular a  $x$  de la siguiente manera:

$$x(t) = (A^T(t) A(t))^{-1} A^T(t) y(t)$$

y la matriz  $(A^T A)^{-1} A^T$  es la Moore-Penrose seudoinversa de  $A$ .

#### 15.0.6.2. $x(t) = x_0$ constante

Este es un caso más interesante, ya que las observaciones  $y(t)$  en distintos instantes de tiempo se complementan para determinar el valor de  $x_0$ .

Como todos los valores de  $y(t)$  en el intervalo de tiempo  $t \in [t_0, t_1]$  son consecuencia de la misma  $x_0$ , entonces

$$y(t) = f(t, x_0), \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad y(t) \in \mathbb{R}^q, \quad t \geq 0$$

puede verse como un mapa  $F$  que le asigna a  $x_0$  la señal en el tiempo  $y(t)$  con  $t \in [t_0, t_1]$ , es decir

$$y_{[t_0, t_1]} = F(x_0)$$

Así que el dominio de este mapa es  $x \in \mathbb{R}^n$  pero su codominio no es  $\mathbb{R}^q$  sino las *señales de tiempo* en  $\mathbb{R}^q$ , que es un espacio de dimensiones infinitas. Con esta interpretación, entonces la condición de "observabilidad" es la misma que en el caso anterior:

**Teorema 15.9** *Se puede determinar únicamente  $x_0$  a partir de  $y_{[t_0, t_1]}$  si y sólo si el mapa  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{Y}_{[t_0, t_1]}^q$  es **inyectivo**.*

Otra vez, esta es una tautología: inyectividad de  $F$  significa que cada  $x_0$  produce una única  $y_{[t_0, t_1]}$ . En general, es difícil determinar cuándo una función  $F$  es inyectiva.

### 15.0.6.3. Caso Lineal

Si  $f$  es lineal, entonces

$$y(t) = A(t)x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad y(t) \in \mathbb{R}^q$$

dónde  $A(t)$  es una matriz variante en el tiempo de dimensión  $q \times n$ . Una forma de determinar la inyectividad del operador  $F$  correspondiente es la siguiente:

1. Premultiplicar la ecuación por la transpuesta de  $A(t)$

$$A^T(t)y(t) = A^T(t)A(t)x_0$$

2. Integrar en el intervalo de tiempo  $t \in [t_0, t_1]$  (como  $x_0$  es constante puede salir de la integral)

$$\int_{t_0}^{t_1} A^T(t)y(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} A^T(t)A(t) dt x_0$$

**Teorema 15.10** *Sea  $f$  lineal. El operador  $F$  correspondiente es inyectivo si y sólo si la matriz cuadrada  $\left(\int_{t_0}^{t_1} A^T(t) A(t) dt\right)$  es positiva definida. En este caso la matriz es regular (invertible).*

**Comentario 15.11** Nótese que en este caso, a diferencia del caso anterior, no se requiere que  $q \geq n$ , es decir, que el número de mediciones sea mayor o igual que el número de incógnitas. Una solución de esta aparente contradicción se obtiene al notar que  $\mathcal{Y}_{[t_0, t_1]}^q$  es de dimensión infinita (para todo  $q$ ), así que el número de mediciones es en cualquier caso mayor que el número de incógnitas (de dimensión finita  $n$ ).

**Ejemplo 15.12** *Sea el sistema*

$$y(t) = \begin{bmatrix} t & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad y(t) \in \mathbb{R}$$

Considere el intervalo de tiempo  $t \in [0, T]$ . Entonces

$$\begin{aligned}\int_0^T A^T(t) A(t) dt &= \int_0^T \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & t^2 \end{bmatrix} dt \\ &= \int_0^T \begin{bmatrix} t^2 & t^3 \\ t^3 & t^4 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}T^3 & \frac{1}{4}T^4 \\ \frac{1}{4}T^4 & \frac{1}{5}T^5 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

que es regular para toda  $T > 0$ , ya que su determinante es  $\left(\frac{1}{15} - \frac{1}{16}\right) T^8$ .

**Proposición 15.13** "Observabilidad": Se puede determinar únicamente  $x_0$  a partir de  $y_{[t_0, t_1]}$  si y sólo si  $F$  es **inyectivo**.

¿Cómo se puede calcular en este caso a  $x$ ?

Despejar a  $x_0$

$$x_0 = \left( \int_{t_0}^{t_1} A^T(t) A(t) dt \right)^{-1} \int_{t_0}^{t_1} A^T(t) y(t) dt$$

La idea de Linealización utilizada en el caso anterior (en dimensiones finitas) para asegurar inyectividad local de un mapa no lineal puede ser extendido al caso de un mapa no lineal  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{Y}_{[t_0,t_1]}^q$ , pero el resultado es un tanto más técnico.

# Lección 16

## Sistemas lineales

Considérese un sistema lineal variante en el tiempo (SLVT)

$$\Sigma_L : \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C(t)x(t) \end{cases}$$

con  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^p$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^q$ . Se asumen conocidas  $(A, B, C)$  y  $u(t)$  e  $y(t)$  se pueden medir.

## 16.1. Solución de la ecuación diferencial

La ecuación diferencial tiene una solución única para cada entrada  $u(t)$  y para cada condición inicial  $x(t_0) = x_0$ , que se puede escribir explícitamente como

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\ y(t) &= C(t)\Phi(t, t_0)x_0 + C(t)\int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \end{aligned}$$

A veces es útil representar la solución como

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, u_{[t_0, t]})$$

para enfatizar la dependencia del estado actual  $x(t)$  del estado inicial y de la entrada.

Nótese que la solución  $\varphi(t, t_0, x_0, u_{[t_0, t]})$  es

1. Lineal en  $x_0$
2. Lineal en  $u(t)$
3. La suma de la solución a  $x_0$  y a  $u(t)$

## 16.2. La matriz de transición de estado

$\Phi(t, t_0)$  es una matriz cuadrada de dimensión  $n$  y se denomina la *matriz de transición de estados*, mediante la cual la solución de la ecuación

diferencial

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0$$

se puede expresar como

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$$

Algunas propiedades importantes de la matriz de transición de estados son:

1.  $\Phi(t, t) = \mathbb{I}$

Si en el tiempo  $t$  se inicia en el estado  $x_0$ , entonces en ese instante el sistema se encuentra en  $x_0$

2.  $\Phi(t, t_1)\Phi(t_1, t_0) = \Phi(t, t_0)$  para todos los valores de  $t_0, t_1, t$ .

3.  $\Phi^{-1}(t, t_0)$  siempre existe y  $\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t)$

4.  $\frac{\partial \Phi(t, t_0)}{\partial t} = A(t)\Phi(t, t_0)$

5. Si  $A$  es constante

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$$

dónde la matrix exponencial está dada por

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k = \mathbb{I} + At + \frac{1}{2} A^2 t^2 + \dots$$

### 16.3. Problema de Observabilidad

La pregunta por la observabilidad en el intervalo  $t \in [t_0, t_1]$  es la siguiente:

¿Cuándo es posible determinar el estado inicial  $x_0$  si se miden  $y(t)$  y  $u(t)$  en el intervalo de tiempo  $t \in [t_0, t_1]$ ?

Aunque en realidad usualmente nos interesa determinar el estado actual  $x(t)$  si se puede determinar a  $x_0$  entonces el estado actual se

puede determinar de la expresión

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

## 16.4. Determinación de la Observabilidad

De la solución general se puede escribir

$$y(t) - C(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau = C(t)\Phi(t, t_0)x_0$$

Nótese que el lado izquierdo es conocido y en el lado derecho la incógnita entra linealmente. De los resultados del capítulo anterior se obtiene que

**Teorema 16.1** *Se puede determinar únicamente a  $x_0$  a partir de  $y_{[t_0, t_1]}$  y  $u_{[t_0, t_1]}$ , es decir, el sistema es observable, si y sólo si la ma-*

*triz cuadrada*

$$M(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t, t_0) C^T(t) C(t) \Phi(t, t_0) dt$$

*es positiva definida. En este caso la matriz es regular (invertible).*

- La matriz  $M(t_0, t_1)$  se denomina *Grammiano de Observabilidad* y depende del intervalo  $[t_0, t_1]$ . A medida que crece  $t_1$  el Grammiano "crece": si  $t_2 > t_1$  entonces  $M(t_2, t_0) > M(t_1, t_0)$  (en el sentido de la positividad definida).
- Nótese que la observabilidad del sistema lineal no depende de la entrada seleccionada, así que se puede elegir por simplicidad a  $u(t) = 0$ . Esto es cierto para cualquier sistema cuya solución se pueda expresar como la suma de un término dependiente solo de  $x_0$  y otro dependiente solo de  $u(t)$ .

## 16.5. Un caso especial: Sistemas lineales Invariantes en el tiempo

Considérese un sistema lineal invariante en el tiempo (SLIT) (consideramos  $u(t) = 0$  sin pérdida de generalidad)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) , \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

con  $A, C$  constantes. La salida se puede escribir explícitamente como

$$y(t) = Ce^{At}x_0$$

Para establecer observabilidad se utilizó un método que usa la operación de integración, para combinar la información contenida en cada instante de tiempo. Ahora se presentará un método alternativo basado en la diferenciación, para combinar la información en un instante con el de

sus vecinos temporales: a la ecuación anterior se le agregarán nuevas ecuaciones obtenidas de su derivada temporal. Nótese que si se conoce a  $y(t)$  en teoría se pueden calcular sus derivadas temporales de cualquier orden

$$y(t) = Ce^{At}x_0$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t) = CAe^{At}x_0$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = \ddot{y}(t) = CA^2e^{At}x_0$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^k y(t)}{dt^k} = y^{(k)}(t) = CA^k e^{At}x_0$$

Si se evalúan las ecuaciones en un instante de tiempo, por ejemplo  $t = 0$ , se obtiene ( $e^0 = \mathbb{I}$ )

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \\ \ddot{y}(0) \\ \vdots \\ y^{(k)}(0) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^k \end{bmatrix}}_{\mathcal{O}_k} x_0$$

Recordando el análisis del capítulo anterior para este caso se puede concluir que

Es posible determinar  $x_0$  únicamente de esta ecuación si y sólo si para algún valor de  $k$  la matriz  $\mathcal{O}_k$  es inyectiva  
 $\iff \text{rango}(\mathcal{O}_k) = n$

Se puede ir aumentando el valor de  $k$  paulatinamente, hasta que se cumpla la condición. Si nunca se cumple la condición, ¿hay algún valor de  $k$  para detenerse? SI.  $k = n - 1$

Por el Teorema de Cayley-Hamilton (una matriz cuadrada satisface su propio polinomio característico) se sabe que

$$A^n = -p_0\mathbb{I} - p_1A - p_2A^2 - \cdots - p_{n-1}A^{n-1}$$

Cuando se aumenta  $k$  se aumentan filas (no columnas) a  $\mathcal{O}_k$ . Pero de la expresión anterior se sabe que las filas nuevas de  $\mathcal{O}_n$  son linealmente dependientes de las anteriores, con lo que el rango no puede aumentar! Repitiendo este argumento se concluye que

$$\text{rango}(\mathcal{O}_1) \leq \cdots \leq \text{rango}(\mathcal{O}_{n-1}) = \text{rango}(\mathcal{O}_n) = \text{rango}(\mathcal{O}_{n+1}) = \cdots$$

**Teorema 16.2** *Se puede determinar únicamente a  $x_0$  a partir de  $y(t)$ , es decir, el sistema Lineal Invariante en el Tiempo es observa-*

ble, si y sólo si

$$\text{rango}(\mathcal{O}_{n-1}) = \text{rango} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

Esto equivale a que la matriz cuadrada

$$M(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} e^{A^T(t-t_0)} C^T C e^{A(t-t_0)} dt$$

sea positiva definida para cualesquiera  $t_0 < t_1$ . En este caso la matriz es regular (invertible).

Otra forma de caracterizar la observabilidad de la pareja  $(C, A)$  es el denominado criterio de Hautus-Belevitch-Popov: El sistema es obser-

vable si y sólo si

$$\operatorname{rango} \begin{bmatrix} s\mathbb{I} - A \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \forall s \in \mathbb{C}.$$

## 16.6. El principio de dualidad para sistemas lineales

En el caso lineal existe una estrecha relación entre el problema de observabilidad y el de controlabilidad: estos conceptos son *duales*.

Sea el sistema lineal invariante en el tiempo

$$\Sigma_L : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

El sistema

$$\Sigma_L^D : \begin{cases} \dot{x}^D(t) = A^T x^D(t) + C^T u^D(t), & x^D(t_0) = x_0^D \\ y^D(t) = B^T x^D(t) \end{cases}$$

es el sistema dual de  $\Sigma_L$ .

**Teorema 16.3**  $\Sigma_L$  es observable si y sólo si  $\Sigma_L^D$  es controlable.  $\Sigma_L^D$  es observable si y sólo si  $\Sigma_L$  es controlable.

Esta relación es válida para sistemas variantes en el tiempo, pero es un tanto más sutil.

# Lección 17

Sistemas con parámetros  
desconocidos (Identificabilidad)

Considere el sistema no lineal con parámetros desconocidos, que entran en forma lineal en el modelo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)) + g(t, x(t), u(t)) p, \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= x(t)\end{aligned}$$

con  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^p$ ,  $p \in \mathbb{R}^r$ , dónde  $p$  corresponde a los parámetros constantes y desconocidos. Se asumen conocidas las funciones  $f$ ,  $g$  y  $u(t)$ ,  $x(t)$  se pueden medir.

Escribiendo la ecuación, separando los términos conocidos de los desconocidos

$$\dot{x}(t) - f(t, x(t), u(t)) = g(t, x(t), u(t)) p,$$

premultiplicando por  $g^T$  e integrando

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} g^T(t, x(t), u(t)) [\dot{x}(t) - f(t, x(t), u(t))] dt &= \\ &= \int_{t_0}^{t_1} g^T(t, x(t), u(t)) g(t, x(t), u(t)) dt p . \end{aligned}$$

**Proposición 17.1** *Se pueden determinar únicamente los parámetros  $p$  en el intervalo  $[t_0, t_1]$  si y sólo si la matriz*

$$\int_{t_0}^{t_1} g^T(t, x(t), u(t)) g(t, x(t), u(t)) dt$$

*es positiva definida (o sea regular).*

Nótese que la posibilidad de identificar los parámetros depende en general de las entradas y las trayectorias seguidas por el sistema! Esto está asociado con el fenómeno conocido de las condiciones de *excitación persistente* para la identificación de sistemas.

# Lección 18

## Sistemas no lineales

Considérese un sistema no lineal

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) , \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= h(x(t))\end{aligned}$$

con  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^p$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^q$ . Se asumen conocidas las funciones  $f$ ,  $h$  y  $u(t)$  e  $y(t)$  se pueden medir.

## 18.1. Solución de la ecuación diferencial

La ecuación diferencial tiene una solución única para cada entrada  $u(t)$  y para cada condición inicial  $x(t_0) = x_0$ , que generalmente es imposible de expresar analíticamente.

Es útil representar la solución como

$$\begin{aligned}x(t) &= \varphi(t, t_0, x_0, u_{[t_0, t]}) \\ y(t) &= h \circ \varphi(t, t_0, x_0, u_{[t_0, t]})\end{aligned}$$

para enfatizar la dependencia del estado actual  $x(t)$  del estado inicial y de la entrada.

## 18.2. La función de transición de estados

$\varphi(t, t_0, x_0, u_{[t_0, t]})$  es un vector con  $n$  componentes y se denomina la *función de transición de estados*.

Algunas de sus propiedades importantes son:

1.  $\varphi(t_0, t_0, x_0, u_{[t_0, t_0]}) = x_0$
2.  $\varphi(t, t_1, \varphi(t_1, t_0, x_0, u_{[t_0, t_1]}), u_{[t_1, t]}) = \varphi(t, t_0, x_0, u_{[t_0, t]})$  para todos los valores de  $t_0 \leq t_1 \leq t$ .

### 18.3. Problema de Observabilidad

La pregunta por la observabilidad en el intervalo  $t \in [t_0, t_1]$  es la siguiente:

¿Cuándo es posible determinar el estado inicial  $x_0$  si se miden  $y(t)$  y  $u(t)$  en el intervalo de tiempo  $t \in [t_0, t_1]$ ?

Aunque en realidad usualmente nos interesa determinar el estado actual  $x(t)$ , si se puede determinar a  $x_0$ , entonces el estado actual se puede determinar usando la función de transición de estados.

### 18.4. Determinación de la Observabilidad

De la solución general se puede escribir

$$y(t) = h \circ \varphi(t, t_0, x_0, u_{[t_0, t]})$$

396

En el intervalo  $[t_0, t]$  esta igualdad puede interpretarse como un mapa que, dada una entrada  $u_{[t_0, t]}$ , le asigna al estado inicial  $x_0$  una salida  $y_{[t_0, t]}$

$$y_{[t_0, t]} = \mathcal{H}_{u_{[t_0, t]}}(x_0)$$

Esta interpretación, junto con los resultados del capítulo 1 nos permiten afirmar

**Teorema 18.1** *En el intervalo de tiempo  $[t_0, t]$ , dada una entrada  $u_{[t_0, t]}$ , se puede determinar únicamente a  $x_0$  a partir de  $y_{[t_0, t]}$ , es decir, el sistema es observable para la entrada  $u_{[t_0, t]}$ , si y sólo si el mapa  $\mathcal{H}_{u_{[t_0, t]}}(x_0)$  es inyectivo.*

Nótese que la observabilidad del sistema no lineal depende, en general, de la entrada seleccionada!

**Ejemplo 18.2** Considere el sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & u(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$
$$y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Si la entrada es  $u(t) = 1$  entonces el sistema (LIT) es observable, ya que

$$\text{rango}(\mathcal{O}_1) = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

Si la entrada es  $u(t) = 0$  entonces el sistema (LIT) no es observable, ya que

$$\text{rango}(\mathcal{O}_1) = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 < 2$$

## 18.5. Sistemas no lineales sin entradas

En general es difícil determinar la observabilidad del sistema no lineal. Como la idea "integral" usada en el caso lineal variante en el tiempo es difícil de usar aquí, se usará el método diferencial para hallar condiciones suficientes de observabilidad. Para simplificar se considerará el caso especial en que la entrada es constante (cero en particular). Considérese un sistema no lineal (SNL) sin entradas

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t)) , \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= h(x(t))\end{aligned}$$

De la ecuación de salida, en general, no es posible determinar únicamente a  $x$ , ya que hay mas incógnitas que ecuaciones. Para agregar más

ecuaciones se tomarán derivadas temporales.

$$y(t) = h(x(t))$$

$$\dot{y}(t) = \frac{d}{dt}h(x(t)) = \frac{\partial h(x)}{\partial x}\dot{x}(t) = \frac{\partial h(x)}{\partial x}f(x) := L_f h(x)$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x}\dot{x}(t) = \frac{\partial L_f h(x)}{\partial x}f(x) := L_f^2 h(x)$$

⋮

$$y^{(k)}(t) = \frac{\partial L_f^{k-1} h(x)}{\partial x}\dot{x}(t) = \frac{\partial L_f^{k-1} h(x)}{\partial x}f(x) := L_f^k h(x)$$

Aquí se utilizan las *derivadas de Lie de  $h$  a lo largo de  $f$* :  $L_f^k h(x)$ . Si se evalúan las ecuaciones en un instante de tiempo, por ejemplo  $t = 0$ ,

se obtiene

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \\ \ddot{y}(0) \\ \vdots \\ y^{(k)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x_0) \\ L_f h(x_0) \\ L_f^2 h(x_0) \\ \vdots \\ L_f^k h(x_0) \end{bmatrix} := \mathbf{o}_k(x_0)$$

Recordando el análisis del primer capítulo para este caso se puede concluir que

Es posible determinar  $x_0$  únicamente de esta ecuación si y sólo si para algún valor de  $k$  el *mapa de observabilidad* (no lineal)  $\mathbf{o}_k(x_0)$  es inyectivo.

Se puede ir aumentando el valor de  $k$  paulatinamente, hasta que se cumpla la condición. Si nunca se cumple, ¿hay algún valor de  $k$  para detenerse? **NO**

Se obtiene así una condición suficiente de observabilidad

**Teorema 18.3** *Se puede determinar únicamente a  $x_0$  a partir de  $y(t)$ , es decir, el sistema es observable, si para algún valor de  $k$  el mapa de observabilidad (no lineal)  $\mathfrak{o}_k(x_0)$  es inyectivo.*

**Ejemplo 18.4** *Considere el sistema*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$y = x_1^3$$

*El mapa de observabilidad es*

$$\begin{aligned}\mathbf{o}_1(x) &= \begin{bmatrix} x_1^3 \\ 3x_1^2x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{o}_2(x) = \begin{bmatrix} x_1^3 \\ 3x_1^2x_2 \\ 6x_1x_2^2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{o}_3(x) &= \begin{bmatrix} x_1^3 \\ 3x_1^2x_2 \\ 6x_1x_2^2 \\ 6x_2^3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{o}_k(x) = \begin{bmatrix} x_1^3 \\ 3x_1^2x_2 \\ 6x_1x_2^2 \\ 6x_2^3 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}\end{aligned}$$

*Nótese que  $\mathbf{o}_1(x)$  no es inyectivo, ya que  $\mathbf{o}_1([0 \ 1]) = \mathbf{o}_1([0 \ 2])$ . Igual sucede con  $\mathbf{o}_2(x)$ . Pero  $\mathbf{o}_3(x)$  si es inyectivo, por lo que el sistema es globalmente observable.*

Ya que, en general, decidir acerca de la inyectividad de un mapa no lineal es difícil, se usa frecuentemente un criterio de observabilidad

local, que se basa en la linealización del mapa de observabilidad:

**Teorema 18.5** *El sistema es localmente observable en el punto  $x_0$  si para algún valor de  $k$  la matriz de observabilidad*

$$\mathcal{O}_k(x_0) = \frac{\partial \mathbf{o}_k(x_0)}{\partial x}$$

*es inyectiva, es decir, tiene rango  $(\mathcal{O}_k(x_0)) = n$ .*

# Lección 19

Sistemas con estados y  
parámetros desconocidos

Considere el sistema no lineal con parámetros desconocidos, que entran en forma lineal en el modelo y con estados no conocidos

$$\dot{y}_1(t) = f_1(t, x(t), u(t)) + g(t, x(t), u(t)) p, \quad y_1(t_0) = y_{10}$$

$$\dot{z}(t) = f_2(t, x(t), u(t)), \quad z(t_0) = z_0$$

$$y_2(t) = h(z(t))$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

con  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^p$ ,  $p \in \mathbb{R}^r$ , donde  $p$  corresponde a los parámetros constantes y desconocidos. Se asumen conocidas las funciones  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $g$  y  $u(t)$ ,  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  se pueden medir.

El análisis de observabilidad e identificabilidad se puede dividir en 2 partes:

1. Observabilidad de los estados:

Se analiza la observabilidad del subsistema que no depende de los

parámetros

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= f_2(t, x(t), u(t)) , \quad z(t_0) = z_0 \\ y_2(t) &= h(z(t))\end{aligned}$$

En el caso de que haya observabilidad es posible recuperar el valor verdadero de los estados  $z(t)$  en tiempo finito.

## 2. Identificabilidad de los parámetros:

Escribiendo la primera ecuación, separando los términos conocidos de los desconocidos

$$\dot{y}_1(t) - f_1(t, x(t), u(t)) = g(t, x(t), u(t)) \quad p ,$$

premultiplicando por  $g^T$  e integrando

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} g^T(t, x(t), u(t)) [\dot{y}_1(t) - f_1(t, x(t), u(t))] dt &= \\ &= \int_{t_0}^{t_1} g^T(t, x(t), u(t)) g(t, x(t), u(t)) dt p. \end{aligned}$$

Entonces los parámetros  $p$  se pueden determinar en el intervalo  $[t_0, t_1]$  (una vez los estados hayan sido determinados) si y sólo si la matriz

$$\int_{t_0}^{t_1} g^T(t, x(t), u(t)) g(t, x(t), u(t)) dt$$

es positiva definida (o sea regular).

Aunque la estructura del sistema analizado es muy particular, la mayor parte de los métodos de diseño de observadores adaptables se basan en llevar al sistema a esta forma.

## Parte VIII

# Diseño de Observadores para Sistemas Lineales

Hasta ahora se ha discutido la posibilidad (teórica) de determinar el estado inicial de un sistema dinámico a partir del conocimiento perfecto del modelo y de las señales de entrada y de salida. Si un sistema es (localmente) observable entonces en principio es posible recuperar (en tiempo finito) el valor del estado inicial, con lo que se puede determinar perfectamente su valor actual.

Aunque la inversión del mapa de observabilidad constituye una posibilidad de recuperar el valor del estado, es deseable y preferible en control, entre otras razones porque se introduce retroalimentación, la utilización de algoritmos recursivos de estimación u *observadores*. Un observador (asintótico de estados) para el sistema (planta)

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) , \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases}$$

con  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^p$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^q$ , es un sistema dinámico

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= g(z(t), u(t), y(t)) , \quad z(t_0) = z_0 \\ \hat{x}(t) &= k(z(t), u(t), y(t))\end{aligned}$$

con  $z(t) \in \mathbb{R}^m$ , que tiene como entradas las señales medibles  $(u(t), y(t))$  de la planta, tal que para toda condición inicial  $z_0$  y  $x_0$  y toda entrada  $u(t)$  el valor estimado del estado  $\hat{x}(t)$  converge asintóticamente al valor verdadero  $x(t)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{x}(t) - x(t)) = 0$$

En el caso lineal, es decir cuando el sistema está descrito por

$$\Sigma_L : \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) , \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C(t)x(t) \end{cases}$$

y para el cual la caracterización de la observabilidad es muy completa, presentaremos dos métodos básicos para diseñar observadores (lineales): El método de Kalman y el de Luenberger.

# Lección 20

## El Observador de Kalman

Para determinar un algoritmo recursivo para estimar el estado actual  $x(t)$  de la planta  $\Sigma_L$  procederemos aqui con un método "integral" análogo al utilizado para determinar la observabilidad (una alternativa mejor pero más compleja es utilizar optimización). De la solución general para el sistema escribimos (suponemos para la deducción, por simplicidad, que  $u(t) = 0$ )

$$y(\tau) = C(\tau) \Phi(\tau, t) x(t) , \quad \tau \leq t$$

premultiplicando a ambos lados e integrando se obtiene

$$\int_{t_0}^t \Phi^T(\tau, t) C^T(\tau) y(\tau) d\tau = N(t, t_0) x(t) , \quad (20.1)$$

$$N(t, t_0) \triangleq \int_{t_0}^t \Phi^T(\tau, t) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau$$

Dónde  $N(t, t_0)$  es la matriz de observabilidad (de primera clase), análoga a  $M(t, t_0)$  definida en el capítulo 16. Como

$$\begin{aligned} N(t, t_0) &= \Phi^T(t_0, t) M(t, t_0) \Phi(t_0, t) = \\ &= \int_{t_0}^t \Phi^T(t_0, t) \Phi^T(\tau, t_0) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t_0) \Phi(t_0, t) d\tau \end{aligned}$$

es claro que  $N(t, t_0)$  es positiva definida si y sólo si  $M(t, t_0)$  lo es, es decir, el sistema es observable en el intervalo  $[t_0, t]$  si y sólo si  $N(t, t_0)$  es positiva definida.

De (20.1) se puede obtener  $x(t)$  en cuanto  $N(t, t_0)$  sea regular. Como aquí nos interesa obtener una versión recursiva, procederemos de la siguiente manera, en cuatro pasos:

## 20.1. Paso 1: Obtener una ecuación diferencial para $N(t, t_0)$

Por simplicidad lo hacemos a través de  $M(t, t_0)$

$$\begin{aligned}\frac{dM(t, t_0)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \Phi^T(\tau, t_0) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau \\ &= \Phi^T(t, t_0) C^T(t) C(t) \Phi(t, t_0)\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\frac{dM(t, t_0)}{dt} &= \frac{d\Phi^T(t, t_0) N(t, t_0) \Phi(t, t_0)}{dt} \\&= \frac{d\Phi^T(t, t_0)}{dt} N(t, t_0) \Phi(t, t_0) + \Phi^T(t, t_0) \frac{dN(t, t_0)}{dt} \Phi(t, t_0) + \\&\quad + \Phi^T(t, t_0) N(t, t_0) \frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} \\&= \Phi^T(t, t_0) \left[ A^T(t) N(t, t_0) + \frac{\partial N(t, t_0)}{\partial t} + N(t, t_0) A(t) \right] \Phi(t, t_0)\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{dN(t, t_0)}{dt} = -A^T(t) N(t, t_0) - N(t, t_0) A(t) + C^T(t) C(t), \quad N(t_0, t_0) = 0.$$

## 20.2. Paso 2: Obtener un ecuación diferencial para el estimado

De (20.1) podemos escribir, definiendo

$$z(t) \triangleq N(t, t_0) x(t)$$

$$\int_{t_0}^t \Phi^T(\tau, t_0) C^T(\tau) y(\tau) d\tau = \Phi^T(t, t_0) z(t) .$$

Derivando esta ecuación con respecto al tiempo obtenemos

$$\Phi^T(t, t_0) C^T(t) y(t) = \Phi^T(t, t_0) A^T(t) z(t) + \Phi^T(t, t_0) \dot{z}(t) ,$$

o sea

$$\dot{z}(t) = -A^T(t) z(t) + C^T(t) y(t) , \quad z(t_0) = 0$$

Tan pronto como  $N(t, t_0)$  se haga regular, entonces

$$x(t) = N^{-1}(t, t_0) z(t)$$

## 20.3. Paso 3: Obtener una ecuación diferencial para la inversa de $N(t, t_0)$

Como

$$N^{-1}(t, t_0) N(t, t_0) = \mathbb{I}$$

y utilizando la ecuación diferencial para  $N(t, t_0)$  se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{dN^{-1}(t, t_0)}{dt} &= -N^{-1}(t, t_0) \frac{dN(t, t_0)}{dt} N^{-1}(t, t_0) \\ &= -N^{-1}(t, t_0) (-A^T(t) N(t, t_0) - N(t, t_0) A(t) + \\ &\quad + C^T(t) C(t)) N^{-1}(t, t_0) \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} \frac{dN^{-1}(t, t_0)}{dt} &= N^{-1}(t, t_0) A^T(t) + A(t) N^{-1}(t, t_0) - \\ &\quad N^{-1}(t, t_0) C^T(t) C(t) N^{-1}(t, t_0) \end{aligned}$$

## 20.4. Paso 4: Obtener una ecuación diferencial para el estimado del estado

Si se escribe  $\hat{x}(t)$  para el estimado de  $x(t)$

$$\dot{z}(t) = \frac{dN(t, t_0)}{dt} \hat{x}(t) + N(t, t_0) \frac{d\hat{x}(t)}{dt} = -A^T(t) N(t, t_0) \hat{x}(t) + C^T(t) y(t) ,$$

entonces

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A(t) \hat{x}(t) + N^{-1}(t, t_0) C^T(t) (y(t) - C(t) \hat{x}(t)) .$$

## 20.5. Filtro de Kalman

Una deducción más completa nos lleva al Filtro de Kalman para la planta

$$\Sigma_{Ln} : \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + v(t) , E\{x(t_0)\} = 0 \\ y(t) = C(t)x(t) + w(t) \end{cases}$$

dónde

$$E\{x(t_0)\} = 0$$
$$E\left\{[x(t_0) - E\{x(t_0)\}][x(t_0) - E\{x(t_0)\}]^T\right\} = P_0$$

y  $v(t)$  y  $w(t)$  son ruido blanco Gaussiano con

$$E\{v(t)\} = 0$$

$$E\{v(t)v^T(\tau)\} = Q(t)\delta(t-\tau) \quad Q(t) = Q^T(t) \geq 0$$

$$E\{w(t)\} = 0$$

$$E\{w(t)w^T(\tau)\} = R(t)\delta(t-\tau) \quad R(t) = R^T(t) > 0$$

$$E\{x(t_0)v^T(t)\} = 0$$

$$E\{x(t_0)w^T(t)\} = 0$$

$$E\{v(t)w^T(\tau)\} = 0$$

está dado por

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + H(t)(y(t) - C(t)\hat{x}(t)) , \quad \hat{x}(t_0) = 0$$

$$\frac{d}{dt}P(t) = P(t)A^T(t) + A(t)P(t) - P(t)C^T(t)R^{-1}(t)C(t)P(t) + Q(t) ,$$

$$H(t) = P(t)C^T(t)R^{-1}(t) , \quad P(t_0) = P_0$$

Aqui

$$P(t) = E \left\{ [x(t) - \hat{x}(t)] [x(t) - \hat{x}(t)]^T \right\}$$

es la matriz de covarianza del error de estimación y el Filtro de Kalman minimiza la varianza del error de observación.

Nótese que el Filtro (o el observador) tienen una estructura muy peculiar: consisten en una copia de la planta con un término de inyección de salida, que es la diferencia entre la salida de la planta y la salida estimada, multiplicada por una ganancia. Esta ganancia se calcula mediante la matriz de covarianza del error de observación, que satisface una Ecuación Diferencial de Riccati.

# Lección 21

## El observador de Luenberger

La idea original de Luenberger es proponer como observador (identidad) para la planta

$$\Sigma_L : \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) , \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C(t)x(t) \end{cases}$$

otro sistema dinámico lineal

$$\Omega_L : \frac{d}{dt}\hat{x}(t) = F(t)\hat{x}(t) + G(t)u(t) + H(t)y(t) , \quad \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0$$

que tiene como entradas las señales medibles de la planta y que debe ser diseñado de tal manera que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{x}(t) - x(t)) = 0$$

para toda condición inicial de la planta  $x(t_0)$  y del observador  $\hat{x}(t_0)$ .

Un requerimiento natural al observador es que si  $\hat{x}(t_0) = x(t_0)$  entonces debe satisfacerse que  $\hat{x}(t) = x(t)$  para todo  $t \geq t_0$ . Esta condición se satisface si

$$\begin{aligned} F(t) &= A(t) - H(t)C(t) \\ G(t) &= B(t) \end{aligned}$$

Esto implica que el observador puede ser escrito de la forma

$$\Omega_L : \begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{x}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + H(t)[y(t) - \hat{y}(t)] , \quad \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0 \\ \hat{y}(t) = C(t)\hat{x}(t) \end{cases}$$

que tiene otra vez la estructura de ser una copia de la planta modificada por una inyección de salida multiplicada por una ganancia. Esta ganancia  $H(t)$  es el único parámetro a diseñar en el observador, y debe seleccionarse para satisfacer la condición de convergencia.

El error de estimación de estados

$$e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$$

satisface la ecuación

$$\dot{e}(t) = [A(t) - H(t)C(t)]e(t), \quad e(t_0) = \hat{x}(t_0) - x(t_0) \quad (21.1)$$

$H(t)$  se debe seleccionar de tal forma que el origen ( $e = 0$ ) de (21.1) sea asintóticamente estable.

Nótese que este es un problema de estabilización de la ecuación de error de observación, análoga al problema de estabilización en control (dualidad). Esta retroalimentación, si está bien diseñada, le otorga una robustez que no poseen los algoritmos en lazo abierto calculados de la caracterización de la observabilidad.

¿Cómo se puede diseñar  $H(t)$  para lograr la estabilización?

## 21.1. Sistemas Lineales Invariantes en el tiempo

En este caso  $A$  y  $C$  son constantes y se puede elegir  $H$  también constante, de tal forma que la matriz  $(A - HC)$  sea Hurwitz, es decir, que todos sus valores propios tengan parte real negativa. Esto se puede lograr de múltiples formas. Dos de ellas son:

### 21.1.1. Asignación de polos

Si la pareja  $(C, A)$  es observable, entonces se pueden asignar arbitrariamente los valores propios de  $(A - HC)$  mediante algún algoritmo de asignación de polos. Por ejemplo, la Fórmula de Ackermann para sistemas con una sola salida.

## 21.1.2. Solución de un problema de LQR

Corresponde al caso estacionario del Filtro de Kalman. Se elige  $H$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned} AP + PA^T - PC^T R^{-1} CP + Q &= 0 \\ H &= PC^T R^{-1} \end{aligned}$$

Para esto hay que resolver una ecuación algebraica de Riccati, dónde  $P$  es positiva definida.

Este método también puede ser utilizado en el caso variante en el tiempo, pero con la ecuación diferencial de Riccati. Con esto se obtiene un Filtro de Kalman.

# Lección 22

## El principio de separación lineal

Una utilización típica de un observador de estados es en la implementación de un control diseñado suponiendo que se pueden medir todos los estados. ¿Qué se puede asegurar en este caso acerca del lazo cerrado a través del observador? En el caso lineal se cuenta con un resultado muy satisfactorio en este sentido: el teorema o principio de separación.

Supóngase que se tiene un sistema lineal

$$\Sigma_L : \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) , \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C(t)x(t) \end{cases}$$

y que se conoce una ley de control por retroalimentación lineal de los estados

$$u = -K(t)x(t)$$

que estabiliza exponencialmente el origen del sistema

$$\Sigma_{LSC} : \begin{cases} \dot{x}(t) = [A(t) - B(t)K(t)]x(t) , \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C(t)x(t) \end{cases}$$

Cuando todos los estados no pueden ser medidos se diseña un observador lineal

$$\Omega_L : \begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{x}(t) = A(t) \hat{x}(t) + B(t) u(t) + H(t) [y(t) - \hat{y}(t)] , \quad \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0 \\ \hat{y}(t) = C(t) \hat{x}(t) \end{cases}$$

para el cual la matriz  $H(t)$  ha sido diseñada de tal forma que el error de observación de los estados

$$\dot{e}(t) = [A(t) - H(t)C(t)] e(t) , \quad e(t_0) = \hat{x}(t_0) - x(t_0)$$

tiene  $e = 0$  como punto de equilibrio exponencialmente estable. Si se cierra el lazo de control a través del observador se obtiene el sistema

$$\Sigma_{LOC} : \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) - B(t)K(t)\hat{x}(t) , \quad x(t_0) = x_0 \\ \frac{d}{dt}\hat{x}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + H(t)[y(t) - \hat{y}(t)] , \quad \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0 \\ y(t) = C(t)x(t) \\ \hat{y}(t) = C(t)\hat{x}(t) \end{cases}$$

La dinámica de este sistema puede ser reescrita en términos del error de observación como

$$\Sigma_{LOC} : \begin{cases} \dot{x}(t) = [A(t) - B(t)K(t)]x(t) - B(t)K(t)e(t), & x(t_0) = x_0 \\ \dot{e}(t) = [A(t) - H(t)C(t)]e(t), & e(t_0) = \hat{x}(t_0) - x(t_0) \end{cases}$$

o en forma matricial

$$\Sigma_{LOC} : \left\{ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) - B(t)K(t) & -B(t)K(t) \\ 0 & A(t) - H(t)C(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \right.$$

Si  $B(t)K(t)$  es acotada, entonces se puede demostrar fácilmente que tanto  $e(t)$  como  $x(t)$  convergen exponencialmente. Si las matrices son constantes (el caso invariante en el tiempo) entonces este resultado es inmediato, ya que los valores propios de la matriz del sistema en lazo cerrado es triangular superior a bloques y entonces

$$\lambda \left\{ \begin{bmatrix} A - BK & -BK \\ 0 & A - HC \end{bmatrix} \right\} = \lambda \{A - BK\} \cup \lambda \{A - HC\}$$

432

que por diseño están todos en el semiplano izquierdo del plano complejo.

Por lo tanto: si se diseñan independientemente un control por retroalimentación de estados que estabilice a la planta y un observador que estime asintóticamente los estados de la planta, entonces la conexión de ellos asegura la estabilidad del sistema en lazo cerrado y, en el caso invariante en el tiempo, los valores propios en lazo cerrado son la unión de los valores propios del sistema controlado por retroalimentación de los estados y los valores propios del observador.

## Parte IX

# Diseño de observadores para sistemas no lineales

Existen una gran diversidad de métodos para el diseño de observadores para sistemas no lineales, aunque no existe ninguno universal que se pueda aplicar a todos los casos. Veremos algunos de ellos.

# Lección 23

## Métodos por aproximación (linealización)

Considérese un sistema no lineal

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) , \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= h(x(t))\end{aligned}$$

con  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^p$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^q$ . Todos estos métodos se basan en aproximar al sistema no lineal por uno lineal, obtenido de la linealización de este en un punto de operación o a lo largo de una trayectoria.

## 23.1. Linealización en un punto de operación

Si para una entrada constante  $\bar{u}$  el sistema tiene un punto de equilibrio  $\bar{x}$  que produce una salida  $\bar{y}$ , es decir,

$$\begin{aligned}0 &= f(\bar{x}, \bar{u}) , \\ \bar{y} &= h(\bar{x})\end{aligned}$$

entonces se puede obtener una aproximación lineal del sistema para cuando la entrada, la salida y el estado se encuentren cerca de sus valores de operación. Si definimos las desviaciones de estas variables como

$$x_\delta(t) = x(t) - \bar{x}, \quad y_\delta(t) = y(t) - \bar{y}, \quad u_\delta(t) = u(t) - \bar{u},$$

La linealización es

$$\begin{aligned}\dot{x}_\delta(t) &= Ax_\delta(t) + Bu_\delta(t), \quad x_\delta(t_0) = x_{\delta 0} \\ y_\delta(t) &= Cx_\delta(t) \\ A &= \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{u})}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{u})}{\partial u}, \quad C = \frac{\partial h(\bar{x})}{\partial x}\end{aligned}$$

que es un sistema lineal invariante en el tiempo. Si el sistema Linealizado es observable, entonces el sistema no lineal será localmente observable en una vecindad de  $\bar{x}$ , y un observador construido para el sistema linealizado operará aproximadamente bien para el sistema no lineal, siempre y cuando sus trayectorias permanezcan cerca del punto de operación.

Basados en la linealización es posible construir dos tipos de observadores

### 23.1.1. Un observador lineal para el sistema linealizado

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \hat{x}_\delta(t) &= A\hat{x}_\delta(t) + Bu_\delta(t) + H(y_\delta(t) - \hat{y}_\delta(t)) , \quad \hat{x}_\delta(t_0) = \hat{x}_{\delta 0} \\ \hat{y}_\delta(t) &= C\hat{x}_\delta(t) \\ (A - HC) \text{ Hurwitz}\end{aligned}$$

### 23.1.2. Un observador no lineal para el sistema linearizado

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \hat{x}(t) &= f(\hat{x}(t), u(t)) + H(y(t) - \hat{y}(t)) , \quad \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0 \\ \hat{y}(t) &= h(\hat{x}(t)) \\ (A - HC) \text{ Hurwitz}\end{aligned}$$

## 23.2. Linealización a lo largo de una trayectoria

Si para una entrada fija, posiblemente variante con el tiempo  $\bar{u}(t)$  el sistema tiene una trayectoria solución  $\bar{x}(t)$  que produce una salida  $\bar{y}(t)$ , es decir,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\bar{x}(t) &= f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) , \\ \bar{y}(t) &= h(\bar{x}(t))\end{aligned}$$

entonces se puede obtener una aproximación lineal del sistema para cuando la entrada, la salida y el estado se encuentren cerca de sus valores de operación. Si definimos las desviaciones de estas variables como

$$x_\delta(t) = x(t) - \bar{x}(t) , \quad y_\delta(t) = y(t) - \bar{y}(t) , \quad u_\delta(t) = u(t) - \bar{u}(t) ,$$

La linealización es

$$\begin{aligned}\dot{x}_\delta(t) &= A(t)x_\delta(t) + B(t)u_\delta(t), \quad x_\delta(t_0) = x_{\delta 0} \\ y_\delta(t) &= C(t)x_\delta(t) \\ A(t) &= \frac{\partial f(\bar{x}(t), \bar{u}(t))}{\partial x}, \quad B(t) = \frac{\partial f(\bar{x}(t), \bar{u}(t))}{\partial u}, \quad C(t) = \frac{\partial h(\bar{x}(t))}{\partial x}\end{aligned}$$

que es un sistema lineal variante en el tiempo. Si el sistema Linealizado es observable, entonces el sistema no lineal será localmente observable en una vecindad de  $\bar{x}(t)$ , y un observador construido para el sistema linealizado operará aproximadamente bien para el sistema no lineal, siempre y cuando sus trayectorias permanezcan cerca de la trayectoria de referencia.

En particular, la aplicación del diseño del Filtro de Kalman junto con la linealización lleva al Filtro de Kalman Extendido, uno de los

filtros más utilizados en la práctica. Su estructura es la siguiente

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) , \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases}$$
$$\text{EKF} : \begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{x}(t) = f(\hat{x}(t), u(t)) + H(t)(y(t) - h(\hat{x}(t))) , \quad \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0 \\ H(t) = P(t)C^T(t)R^{-1}(t) \\ \frac{d}{dt}P(t) = P(t)A^T(t) + A(t)P(t) + \\ \quad - P(t)C^T(t)R^{-1}(t)C(t)P(t) + Q(t) \\ A(t) = \frac{\partial f(\bar{x}(t), \bar{u}(t))}{\partial x}, \quad C(t) = \frac{\partial h(\bar{x}(t))}{\partial x} \end{cases}$$

La convergencia de todos estos observadores/filtros sólo puede asegurarse localmente.

Para la implantación:

- Calcule las matrices  $A(t)$  y  $C(t)$ , que dependen de  $(\hat{x}(t), u(t))$
- Resolver la Ecuación Diferencial de Riccati

- Calcular  $H(t)$

# Lección 24

## Métodos exactos

## 24.1. Linealización exacta del error de observación

Considérese un sistema no lineal

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) , \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= h(x(t))\end{aligned}$$

con  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^p$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^q$ . La idea básica del método de linealización exacta del error de observación [9, 29, 30, 57] es buscar una transformación de los estados y de las salidas

$$\begin{aligned}\xi &= T(x) \\ \zeta &= \phi(y)\end{aligned}$$

tales que sean difeomorfismos, es decir, que sean invertibles y que tanto la transformación como la inversa sean diferenciables, y que el sistema

en las nuevas variables el sistema toma la forma

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= A\xi(t) + \varphi(\zeta(t), u(t)) , \quad \xi(t_0) = \xi_0 \\ \zeta(t) &= C\xi(t)\end{aligned}\tag{24.1}$$

Si este es el caso, y la pareja  $(C, A)$  es observable, entonces se puede construir un observador para el sistema transformado como

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{\xi}(t) &= A\hat{\xi}(t) + \varphi(\zeta(t), u(t)) + H\left(\zeta(t) - \hat{\zeta}(t)\right) , \quad \hat{\xi}(t_0) = \hat{\xi}_0 \\ \hat{\zeta}(t) &= C\hat{\xi}(t)\end{aligned}$$

El error de observación ( $e = \hat{\xi} - \xi$ ) en las nuevas coordenadas está dado por

$$\dot{e}(t) = (A - HC)e(t)$$

que es una dinámica lineal. Si  $(A - HC)$  es Hurwitz, el estado del observador converge al verdadero valor del estado en forma exponencial.

Un estimado para el sistema original se obtiene invirtiendo la transformación

$$\hat{x}(t) = T^{-1}(\hat{\xi}(t))$$

El problema más difícil en el método consiste en encontrar las transformaciones  $T$  y  $\phi$ , si es que estas existen. Desafortunadamente, las condiciones de existencia de tales transformaciones son tan fuertes, que sólo pocos sistemas pueden ser transformados de esta manera. Así que este método solo puede ser aplicado a una pequeña clase de sistemas.

#### 24.1.1. Condiciones de existencia de la transformación

Consideremos el caso de sistemas con una sola salida y dónde sólo se utiliza la transformación de los estados

$$\Sigma : \dot{x} = f(x) + g(x, u) , \quad x(0) = x_0 , \quad y = h(x) , \quad (24.2)$$

dónde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^p$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ,  $f$ ,  $g$  son campos vectoriales suaves con  $f(0) = 0$  y  $g(x, 0) = 0$ ,  $\forall x$ , y  $h$  es una función suave con  $h(0) = 0$ .

**Teorema 24.1** Existe un difeomorfismo local  $T(\cdot)$  en una vecindad  $U_0$  del origen que transforma al sistema (24.2) a la forma (24.1) si y sólo si en  $U_0$ :

1. (i) rango  $\{dh(x), dL_f h(x), \dots, dL_f^{n-1} h(x)\} = n$ ,
  2. (ii)  $[\text{ad}_f^i r, \text{ad}_f^j r] = 0$ ,  $0 \leq i, j \leq n-1$ ,
  3. (iii)  $[g, \text{ad}_f^j r] = 0$ ,  $0 \leq j \leq n-2$ ,  $\forall u \in \mathbb{R}^m$
- dónde  $r$  es el campo vectorial que es solución de
- $$[ L_r h(x), L_r L_f h(x), \dots, L_r L_f^{n-1} h(x) ] = [ 0 \ 0 \ \dots \ 1 ]. \quad (24.3)$$

El difeomorfismo es global  $U_0 = \mathbb{R}^n$ , si y sólo si las condiciones (i)-(iii) se satisfacen en  $\mathbb{R}^n$  y, adicionalmente,

4. (iv)  $\text{ad}_f^i r$  ,  $0 \leq i \leq n - 1$  , son campos vectoriales completos.

**Comentario 24.2**  $L_f h(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x)$  denota la **derivada de Lie** de la función  $h$  a lo largo del campo vectorial  $f$ , y  $L_f^i h(x) = L_f(L_f^{i-1} h(x))$ . La **diferencial**  $dh$  de una función suave  $h : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  puede ser escrita en coordenadas locales como un vector fila del gradiente  $\left[ \frac{\partial h(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h(x)}{\partial x_n} \right]$ . Para dos campos vectoriales  $f$  y  $g$  se define un nuevo campo vectorial mediante el **paréntesis de Lie**  $[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g$ , en coordenadas locales. Para paréntesis de Lie repetidos el operador  $\text{ad}$  está definido como

$$\text{ad}_f^0 g = g , \quad \text{ad}_f^i g = [f , \text{ad}_f^{i-1} g] .$$

Un campo vectorial  $f$  se dice que es **completo** si las soluciones de la ecuación diferencial  $\dot{x} = f(x)$  puede ser definida para todo tiempo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Comentario 24.3** Las condiciones del Teorema son muy fuertes y no son satisfechas en forma genérica. La condición (i) corresponde a la

*observabilidad local para todo  $x$  del sistema sin entradas, y se satisface en casi todos los casos. La condición de conmutatividad (ii) es muy restrictiva.*

**Comentario 24.4** *Esta es la forma más simple del problema de linearización del error de observación. Este puede ser extendido de diversas maneras. Por ejemplo, permitiendo que la transformación  $T$  sea un semi-difeomorfismo (la inversa no se requiere que sea diferenciable) se pueden diseñar observadores continuos cuando la condición (i) del teorema no es satisfecha [58, 44]. Si se incluye una transformación de salida [30] y/o una transformación de la escala de tiempo [19, 43] o el uso de técnicas de inmersión, mediante las cuales el sistema transformado puede poseer una dimensión mayor al original permite una extensión del método [31, 25]. Adicionalmente, es posible considerar formas en las que se permitan derivadas de la entrada y de la salida [60, 20].*

#### 24.1.1.1. Un caso especial

[30, 38] Un sistema de dimensión dos

$$\dot{x} = [x_2, \phi_2(x)]^T, \quad x(0) = x_0, \quad y = x_1,$$

puede ser transformado en la Forma de Observador (24.1) mediante  $z = T(x)$  e  $\bar{y} = \lambda(y)$  si y sólamente si

$$\phi_2(x) = k_0(y) + k_1(y)x_2 + k_2(y)x_2^2.$$

En este caso

$$\lambda''(y) = -k_2(y)\lambda'(y), \quad \lambda(0) = 0,$$

dónde  $\lambda'(y) \triangleq \frac{d\lambda(y)}{dy}$ , y

$$\begin{aligned}\varphi'_1(y) &= k_1(y)\lambda'(y), \quad \varphi_1(0) = 0 \\ \varphi_2(y) &= k_0(y)\lambda'(y), \quad \varphi_2(0) = 0.\end{aligned}$$

**Ejemplo 24.5** Considere el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 - x_2 - x_1^2 - x_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix} u, \\ y &= x_1,\end{aligned}$$

Este sistema es transformable a la forma (24.1)

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} -\bar{y} - u(\bar{y} + 1) \ln |\bar{y} + 1| \\ -\ln |\bar{y} + 1|(1 + \bar{y})(1 + \ln |\bar{y} + 1| + u) \end{bmatrix}, \\ \bar{y} &= z_1.\end{aligned}$$

mediante una transformación de estados y de salidas [30], dadas por

$$\bar{y} = \theta(y) = \exp(y) - 1, \quad y = \theta^{-1}(\bar{y}) = \ln|\bar{y} + 1|, \quad \theta : \mathbb{R} \rightarrow (-1, \infty),$$

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} \exp(x_1) - 1 \\ \exp(x_1)(x_2 + 1) - 1 \end{bmatrix}, \quad T : \mathbb{R}^2 \rightarrow (-1, \infty) \times \mathbb{R}$$

$$x = T^{-1}(z) = \begin{bmatrix} \ln|z_1 + 1| \\ \frac{z_2 + 1}{z_1 + 1} - 1 \end{bmatrix}.$$

## 24.2. Método de Linealización Aproximada del Error de Observación

Ver [32] y [8, 35].

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) + g(x, u) , & x(0) = x_0 \\ y = h(x) , \end{cases}$$

Mediante la Transformación de Estados  $z = T(x)$  el sistema

$(f, h) \Rightarrow$  Forma Normal de Observador No Lineal

*Forma Normal de Observador No Lineal Aproximada*

$$\Sigma_{\text{aonf}} : \begin{cases} \dot{z} = Az + G\psi(\sigma, y, u) + \gamma(y, u) , & z(0) = z_0 , \\ y = Cz , \\ \sigma = Hz , \end{cases}$$

N.B.: La Transformación y el término  $\psi$  no están unívocamente determinados.

Observador de orden completo

$$\Omega : \begin{cases} \dot{\hat{z}} = A\hat{z} + \textcolor{red}{L}(\hat{y} - y) + G\psi(\hat{\sigma} + \textcolor{red}{N}(\hat{y} - y), y, u) + \gamma(y, u) , \\ \hat{y} = C\hat{z} , \\ \hat{\sigma} = H\hat{z} \end{cases}$$

Matrices  $\textcolor{red}{L}, \textcolor{red}{N}$  deben ser diseñadas.

Definiendo las variables de error como  $\tilde{z} \triangleq \hat{z} - z$ ,  $\tilde{y} \triangleq \hat{y} - y$ ,  $\tilde{\sigma} \triangleq \hat{\sigma} - \sigma$ ,  $\xi \triangleq (H + NC)\tilde{z} = \tilde{\sigma} + N\tilde{y}$ , y una nueva no linealidad

$$\phi(\xi, \sigma, y, u) \triangleq \psi(\sigma, y, u) - \psi(\sigma + \xi, y, u) ,$$

Nótese que  $\phi(0, \sigma; y, u) = 0$  para toda  $\sigma, y, u$ .

- Dinámica del Error

$$\dot{\tilde{z}} = A_L \tilde{z} - G\phi(H_N \tilde{z}, \sigma, y, u) , \quad \tilde{z}(0) = \tilde{z}_0 ,$$

dónde  $A_L \triangleq A + LC$ , and  $H_N \triangleq H + NC$ .

- $L$  se selecciona de tal forma que la matriz  $(A - LC)$  es Hurwitz.
- La ecuación de error,  $\tilde{z} = \hat{z} - z$ , es entonces aproximadamente lineal.

- Seleccionen  $T$ ,  $\gamma$  e  $\psi$  tales que el “tamaño” del término de perturbación del error  $\phi$  es minimizado en una región compacta del espacio de estado.
- No hay certeza de convergencia.

## 24.3. Linealización por inmersión

Considérese un sistema no lineal

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) , \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= h(x(t))\end{aligned}$$

con  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^p$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^q$ . La idea básica de este método consiste en usar una inmersión de los estados en un espacio de dimensión mayor

$$\xi = T(x) , \quad \xi \in \mathbb{R}^m , \quad m > n$$

de tal forma que el sistema en las nuevas variables toma la forma

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= A\xi(t) + \varphi(\zeta(t), u(t)) , \quad \xi(t_0) = \xi_0 \\ \zeta(t) &= C\xi(t)\end{aligned}$$

Si este es el caso, y la pareja  $(C, A)$  es observable, entonces se puede construir un observador para el sistema transformado como

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{\xi}(t) &= A\hat{\xi}(t) + \varphi(\zeta(t), u(t)) + H\left(\zeta(t) - \hat{\zeta}(t)\right) , \quad \hat{\xi}(t_0) = \hat{\xi}_0 \\ \hat{\zeta}(t) &= C\hat{\xi}(t)\end{aligned}$$

El error de observación ( $e = \hat{\xi} - \xi$ ) en las nuevas coordenadas está dado por

$$\dot{e}(t) = (A - HC)e(t)$$

que es una dinámica lineal. Si  $(A - HC)$  es Hurwitz, el estado del observador converge al verdadero valor del estado en forma exponencial. Un estimado para el sistema original se obtiene seudo-invirtiendo la

transformación, es decir, haciendo una proyección del estado  $\xi \in \mathbb{R}^m$  a  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\hat{x}(t) = T^I \left( \hat{\xi}(t) \right)$$

**Ejemplo 24.6** Considere el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + g(x_2) \\ \dot{x}_2 &= -ax_2 \\ y &= x_1\end{aligned}$$

dónde  $g(x_2) = x_2(x_2^2 - 1)$ . Los mapas de observabilidad son

$$\mathfrak{o}_1(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 + g(x_2) \end{bmatrix} : \text{no inyectivo}$$

$$\mathfrak{o}_2(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ -y + x_2^3 - x_2 \\ -3ay - (3a + 1)\dot{y} - 2ax_2 \end{bmatrix} : \text{inyectivo}$$

Entonces, si  $a \neq 0$  el sistema es globalmente observable. Si  $a = 0$  no hay observabilidad, ya que hay indistinguibilidad.

Si se deriva una vez más

$$\begin{aligned}y^{(3)}(t) &= -3a\dot{y}(t) - (3a + 1)\ddot{y}(t) + 2a^2x_2 \\&= -(4a + 1)\ddot{y}(t) - a(4 + 3a)\dot{y}(t) - 3a^2y\end{aligned}$$

Es decir, se puede representar a este sistema por uno lineal

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3a^2 & -a(4+3a) & -(4a+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \\y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

que es observable. Así que se puede construir un observador para el sistema en las nuevas coordenadas y recuperar un estimado de los estados

originales mediante, por ejemplo, la proyección

$$\hat{x}_1 = \hat{\xi}_1$$

$$\hat{x}_2 = \frac{1}{2a} \left( -3a\hat{\xi}_1 - (3a + 1)\hat{\xi}_2 - \hat{\xi}_3 \right)$$

## 24.4. Transformación a sistemas afines en los estados no medibles

Considérese un sistema no lineal

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) , \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= h(x(t))\end{aligned}$$

con  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^p$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^q$ . La idea básica de este método (similar a la de linealización exacta del error de observación) es buscar

una transformación (difeomorfismos) de los estados y de las salidas

$$\xi = T(x), \quad \zeta = \phi(y)$$

tales que el sistema en las nuevas variables tome la forma

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= A(y(t), u(t))\xi(t) + \varphi(\zeta(t), u(t)), \quad \xi(t_0) = \xi_0 \\ \zeta(t) &= C\xi(t)\end{aligned}\quad (24.4)$$

Si este es el caso,  $u(t)$  es tal que  $A(y(t), u(t))$  sea uniformemente acotada y la pareja  $(C, A(y(t), u(t)))$  sea uniformemente observable, entonces se puede construir un observador (tipo Kalman) para el sistema transformado como

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{\xi}(t) &= A(y, u)\hat{\xi}(t) + \varphi(\zeta, u) + H(t)(\zeta(t) - C\hat{\xi}(t)), \quad \hat{\xi}(t_0) = \hat{\xi}_0 \\ \frac{d}{dt}P(t) &= P(t)A^T(y, u) + A(y, u)P(t) - P(t)C^TR^{-1}CP(t) + Q, \\ H(t) &= P(t)C^TR^{-1}, \quad P(t_0) = P_0\end{aligned}$$

Un estimado para el sistema original se obtiene invirtiendo la transformación

$$\hat{x}(t) = T^{-1}(\hat{\xi}(t))$$

El problema más difícil en el método consiste en encontrar las transformaciones  $T$  y  $\phi$ , si es que estas existen.

## 24.5. Observador Lipschitz

Considere un sistema de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + \psi(x, u) , \quad x(0) = x_0 \\ y &= Cx .\end{aligned}$$

Si se asume que la no linealidad  $\psi(x, u)$  es globalmente Lipschitz en  $x$ , uniformemente en  $u$ , es decir,

$$\|\psi(x+z, u) - \psi(x, u)\| \leq \gamma \|z\|$$

Bajo estas condiciones, si existe una  $H$  y una  $P = P^T$  y positiva definida tales que se satisfaga la desigualdad

$$P(A - HC) + (A - HC)^T P + \epsilon P + \gamma^2 I + PP \leq 0$$

entonces el sistema

$$\frac{d}{dt} \hat{x} = A\hat{x} + \psi(\hat{x}, u) + H(y - C\hat{x}) , \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

es un observador global y que converge exponencialmente para el sistema.

## 24.6. El observador de alta ganancia

Considere un sistema afín en las entradas y con una sola salida

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u(t) , \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= h(x(t))\end{aligned}$$

con  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^p$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}$ . Supóngase que el sistema con entrada cero tiene un mapa de observabilidad de orden  $n - 1$

$$\mathbf{o}_{n-1}(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ L_f^2 h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix}$$

es un difeomorfismo global, globalmente Lipschitz y que el sistema es observable globalmente para cualquier entrada (uniformemente observable). Entonces, la transformación de estados

$$\xi = T(x) = \mathbf{o}_{n-1}(x) ,$$

lleva al sistema a la forma

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= A_o \xi(t) + \varphi(\xi(t), u(t)) , \quad \xi(t_0) = \xi_0 \\ \zeta(t) &= C_o \xi(t) \end{aligned}$$

dónde

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi(\xi, u) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\xi_1, u) \\ \varphi_2(\xi_1, \xi_2, u) \\ \varphi_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3, u) \\ \vdots \\ \varphi_n(\xi, u) \end{bmatrix}$$

$$C_o = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]$$

Si  $\varphi(\xi, u)$  es globalmente Lipschitz en  $\xi$  uniformemente en  $u$  entonces existe un observador de la forma

$$\frac{d}{dt}\hat{\xi}(t) = A_o\hat{\xi}(t) + \varphi\left(\hat{\xi}(t), u(t)\right) + \Lambda H_o\left(\zeta(t) - C_o\hat{\xi}(t)\right), \quad \hat{\xi}(t_0) = \hat{\xi}_0$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$$

que converge exponencialmente si  $(A_o - H_o C_o)$  es Hurwitz y  $\lambda$  es suficientemente grande. La velocidad de convergencia es proporcional a  $\lambda$ .

### 24.6.1. Deducción del Observador de Alta Ganancia

Considere el error de observación  $e \triangleq \hat{\xi} - \xi$  que tiene dinámica

$$\dot{e}(t) = (A_o - \Lambda H_o C_o) e(t) + [\varphi(\xi(t) + e(t), u(t)) - \varphi(\xi(t), u(t))] , \quad e(t_0)$$

Si se realiza el cambio de variables

$$\zeta \triangleq \lambda \Lambda^{-1} e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^{-(n-1)} \end{bmatrix} e = \begin{bmatrix} e_1 \\ \frac{e_2}{\lambda} \\ \frac{e_3}{\lambda^2} \\ \vdots \\ \frac{e_n}{\lambda^{n-1}} \end{bmatrix}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{\zeta} &= \lambda \Lambda^{-1} \dot{e} = \lambda \Lambda^{-1} (A_o - \Lambda H_o C_o) \lambda^{-1} \Lambda \zeta(t) + \\ &\quad + \lambda \Lambda^{-1} [\varphi(\xi(t) + \lambda^{-1} \Lambda \zeta(t), u(t)) - \varphi(\xi(t), u(t))] , \quad \zeta(t_0) = \zeta_0\end{aligned}$$

Nótese que

$$\begin{aligned}
 \Lambda^{-1} A_0 \Lambda &= \begin{bmatrix} \lambda^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda^{-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^{-n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \lambda^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda^{-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda^{-(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^{-n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \lambda^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \\
 &= \lambda A_0
 \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned}
 C_0 \Lambda &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix} \\
 &= \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned}
 \dot{\zeta} &= \lambda (A_o - H_o C_o) \zeta(t) + \\
 &\quad + \lambda \Lambda^{-1} [\varphi(\xi(t) + \lambda^{-1} \Lambda \zeta(t), u(t)) - \varphi(\xi(t), u(t))] , \quad \zeta(t_0) = \zeta_0
 \end{aligned}$$

Como se asume que cada componente del vector  $\varphi(\xi, u)$  es globalmente Lipschitz en  $\xi$ , uniformemente en  $u$ , es decir, para toda  $i = 1, \dots, n$  existe una  $k_i$ , independiente de  $u$ , tales que para todo  $\xi, z$

$$|\varphi_i(\xi_1 + z_1, \dots, \xi_i + z_i, u) - \varphi_i(\xi_1, \dots, \xi_i, u)| \leq k_i \| [z_1, \dots, z_i, 0, \dots, 0] \| .$$

Por lo tanto se tiene que las componentes de  $\lambda\Lambda^{-1}[\varphi(\xi(t) + \lambda^{-1}\Lambda\zeta(t), u(t))]$  satisfacen

$$\frac{1}{\lambda^{i-1}} |\varphi_i(\xi_1 + \zeta_1, \dots, \xi_i + \lambda^{i-1}\zeta_i, u) - \varphi_i(\xi_1, \dots, \xi_i, u)| \leq k_i \frac{1}{\lambda^{i-1}} \|\lambda^{-1}\Lambda[\zeta_1, \dots, \zeta_i, 0, \dots, 0]\|_2$$

En el caso de la norma Euclidiana, por ejemplo, y considerando  $\lambda \geq 1$  se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^{i-1}} \|\lambda^{-1}\Lambda[\zeta_1, \dots, \zeta_i, 0, \dots, 0]\|_2 &= \frac{1}{\lambda^{i-1}} \|[\zeta_1, \lambda\zeta_2, \dots, \lambda^{i-1}\zeta_i, 0, \dots, 0]\|_2 \\ &= \frac{1}{\lambda^{i-1}} \sqrt{\zeta_1^2 + \lambda^2\zeta_2^2 + \dots + \lambda^{2(i-1)}\zeta_i^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\zeta_1}{\lambda^{i-1}}\right)^2 + \left(\frac{\zeta_2}{\lambda^{i-2}}\right)^2 + \dots + (\zeta_i)^2} \\ &\leq \sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \dots + \zeta_i^2} = \|[\zeta_1, \dots, \zeta_i, 0, \dots, 0]\|_2 \end{aligned}$$

Si se realiza el cambio de variables (con  $\theta > 0$ )

$$\zeta \triangleq \theta \Lambda^{-1} e = \theta \begin{bmatrix} \lambda^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda^{-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^{-n} \end{bmatrix} e = \begin{bmatrix} \theta \frac{e_1}{\lambda} \\ \theta \frac{e_2}{\lambda^2} \\ \theta \frac{e_3}{\lambda^3} \\ \vdots \\ \theta \frac{e_n}{\lambda^n} \end{bmatrix}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \theta \Lambda^{-1} \dot{e} = \theta \Lambda^{-1} (A_o - \Lambda H_o C_o) \theta^{-1} \Lambda \zeta(t) + \\ &\quad + \theta \Lambda^{-1} [\varphi(\xi(t) + \theta^{-1} \Lambda \zeta(t), u(t)) - \varphi(\xi(t), u(t))] , \quad \zeta(t_0) = \zeta_0 \end{aligned}$$

Nótese que

$$\begin{aligned}
 \Lambda^{-1} A_0 \Lambda &= \begin{bmatrix} \lambda^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda^{-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^{-n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \lambda^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda^{-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda^{-(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^{-n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \lambda^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \\
 &= \lambda A_0
 \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned}
 C_0 \Lambda &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix} \\
 &= \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned}
 \dot{\zeta} &= \lambda (A_o - H_o C_o) \zeta(t) + \\
 &\quad + \theta \Lambda^{-1} [\varphi(\xi(t) + \theta^{-1} \Lambda \zeta(t), u(t)) - \varphi(\xi(t), u(t))] , \quad \zeta(t_0) = \zeta_0
 \end{aligned}$$

Como se asume que cada componente del vector  $\varphi(\xi, u)$  es globalmente Lipschitz en  $\xi$ , uniformemente en  $u$ , es decir, para toda  $i = 1, \dots, n$  existe una  $k_i$ , independiente de  $u$ , tales que para todo  $\xi, z$

$$|\varphi_i(\xi_1 + z_1, \dots, \xi_i + z_i, u) - \varphi_i(\xi_1, \dots, \xi_i, u)| \leq k_i \| [z_1, \dots, z_i, 0, \dots, 0] \| .$$

Por lo tanto se tiene que las componentes de  $\theta\Lambda^{-1}[\varphi(\xi(t) + \theta^{-1}\Lambda\zeta(t), u(t)) -$   
- satisfacen

$$\frac{\theta}{\lambda^i} \left| \varphi_i \left( \xi_1 + \frac{\lambda}{\theta} \zeta_1, \dots, \xi_i + \frac{\lambda^i}{\theta} \zeta_i, u \right) - \varphi_i (\xi_1, \dots, \xi_i, u) \right| \leq k_i \frac{\theta}{\lambda^i} \|\theta^{-1}\Lambda[\zeta_1, \dots, \zeta_i]\|.$$

En el caso de la norma Euclíadiana, por ejemplo, y considerando  $\lambda \geq 1$   
se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{\lambda^i} \left\| \theta^{-1}\Lambda [\zeta_1, \dots, \zeta_i, 0, \dots, 0]^T \right\|_2 &= \frac{\theta}{\lambda^i} \left\| \left[ \frac{\lambda}{\theta} \zeta_1, \frac{\lambda^2}{\theta} \zeta_2, \dots, \frac{\lambda^i}{\theta} \zeta_i, 0, \dots, 0 \right] \right\|_2 \\ &= \frac{\theta}{\lambda^i} \sqrt{\left( \frac{\lambda}{\theta} \zeta_1 \right)^2 + \left( \frac{\lambda^2}{\theta} \zeta_2 \right)^2 + \dots + \left( \frac{\lambda^i}{\theta} \zeta_i \right)^2} \\ &= \sqrt{\left( \frac{1}{\lambda^{i-1}} \zeta_1 \right)^2 + \left( \frac{1}{\lambda^{i-2}} \zeta_2 \right)^2 + \dots + \zeta_i^2} \\ &\leq \sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \dots + \zeta_i^2} = \|[\zeta_1, \dots, \zeta_i, 0, \dots, 0]^T\|_2 \end{aligned}$$

Si se diseña  $H_0$  tal que  $(A_o - H_o C_o)$  sea Hurwitz, entonces para cualquier matriz  $Q = Q^T > 0$  existe una matriz  $P = P^T > 0$  que satisface

$$(A_o - H_o C_o)^T P + P (A_o - H_o C_o) = -Q$$

Eligiendo como candidata a función de Lyapunov

$$V(\zeta) = \zeta^T P \zeta$$

su derivada será

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \lambda \zeta^T \left[ (A_o - H_o C_o)^T P + P (A_o - H_o C_o) \right] \zeta + 2\zeta P \theta \Lambda^{-1} [\varphi(\xi(t) + \theta^{-1} \Lambda \zeta(t), u(t)) - \varphi(\xi(t), u(t))] \\ &\leq -\lambda \zeta^T Q \zeta + 2 \|\zeta\| \|P\| \|\theta \Lambda^{-1} [\varphi(\xi(t) + \theta^{-1} \Lambda \zeta(t), u(t)) - \varphi(\xi(t), u(t))]\| \\ &\leq -\lambda \zeta^T Q \zeta + 2k \|P\| \|\zeta\|^2 = -(\lambda \lambda_{\min}(Q) - 2k \|P\|) \|\zeta\|^2\end{aligned}$$

dónde  $k = \max \{k_i\}$  y  $\lambda_{\min}(Q)$  es el valor propio más pequeño de  $Q$ .

Eligiendo

$$\lambda_0 > \frac{2k \|P\|}{\lambda_{\min}(Q)}$$

lo cual siempre es posible, ya que  $P$ ,  $Q$ ,  $k$  son independientes de  $\lambda$ , entonces

$$V(\zeta(t)) \leq e^{-\left(\lambda - \frac{2k\|P\|}{\lambda_{min}(Q)}\right)\lambda_{min}(Q)t} V(\zeta(0))$$

converge exponencialmente a cero para todo  $\lambda > \lambda_0$ .



# Lección 25

Control por retroalimentación  
de salida: Observador de Alta  
Ganancia

## 25.1. Retroalimentación de salida: Un ejemplo

Para el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \phi(x, u) \\ y &= x_1\end{aligned}$$

supóngase que el controlador  $u = \gamma(x)$  estabiliza el origen de

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \phi(x, \gamma(x)) .\end{aligned}$$

Un Observador de Alta Ganancia (AG)

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + l_1(y - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \phi_0(\hat{x}, u) + l_2(y - \hat{x}_1)\end{aligned}$$

dónde  $\phi_0(x, u)$  es un modelo nominal de  $\phi(x, u)$ . El error de observación

$$\tilde{x}_1 = \hat{x}_1 - x_1, \quad \tilde{x}_2 = \hat{x}_2 - x_2$$

$$\dot{\tilde{x}}_1 = -l_1 \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = -l_2 \tilde{x}_1 + \delta(x, \tilde{x})$$

$$\delta(x, \tilde{x}) = \phi_0(\hat{x}, \gamma(\hat{x})) - \phi(x, \gamma(\hat{x}))$$

Diseñe  $L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$  tal que  $A_0 = \begin{bmatrix} -l_1 & 1 \\ -l_2 & 0 \end{bmatrix}$  sea Hurwitz.

La matriz de transferencia de  $\delta \rightarrow \tilde{x}$  es

$$G_o(s) = \frac{1}{s^2 + l_1 s + l_2} \begin{bmatrix} 1 \\ s + l_1 \end{bmatrix}$$

Diseñe  $L$  para hacer  $\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|G_o(j\omega)\|$  tan pequeña como sea posible.

Seleccione

$$l_1 = \frac{\alpha_1}{\varepsilon}, \quad l_2 = \frac{\alpha_2}{\varepsilon^2}, \quad \varepsilon > 0$$

$$G_o(s) = \frac{\varepsilon}{(\varepsilon s)^2 + \alpha_1 \varepsilon s + \alpha_2} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon s + \alpha_1 \end{bmatrix}$$

Los Eigenvalores del observador son  $(\lambda_1/\varepsilon)$  y  $(\lambda_2/\varepsilon)$ , dónde  $\lambda_1, \lambda_2$  son las raíces de

$$\lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 = 0$$

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|G_o(j\omega)\| = O(\varepsilon)$$

Nótese que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_o(s) = 0 ,$$

el efecto de atenuación es mayor para pequeños valores de  $\varepsilon$ .

Defínase

$$\eta_1 = \frac{\tilde{x}_1}{\varepsilon} , \quad \eta_2 = \tilde{x}_2$$

y entonces

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{\eta}_1 &= -\alpha_1 \eta_1 + \eta_2 \\ \varepsilon \dot{\eta}_2 &= -\alpha_2 \eta_1 + \varepsilon \delta(x, \tilde{x}) \end{aligned}$$

Luego:

1. La cota final de  $\eta$  es del orden de  $O(\varepsilon)$
2.  $\eta$  decrece más rápido que una función exponencial  $e^{-at/\varepsilon}$ ,  $a > 0$ .

### 25.1.1. El fenómeno de pico (“The Peeking Phenomenon”)

$$x_1(0) \neq \hat{x}_1(0) \implies \eta_1(0) = O(1/\varepsilon)$$

La solución contiene un término de la forma

$$\frac{1}{\varepsilon} e^{-at/\varepsilon}$$

que aproxima una función impulso cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

## 25.1.2. Ejemplo numérico

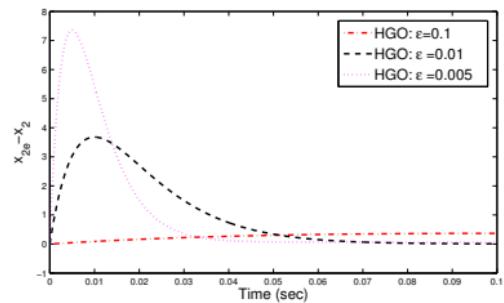
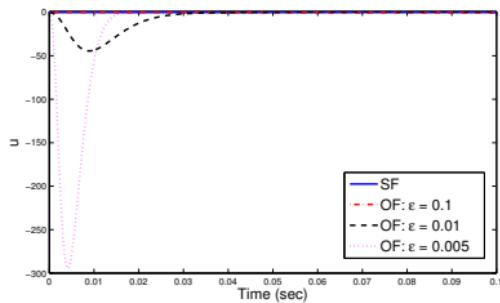
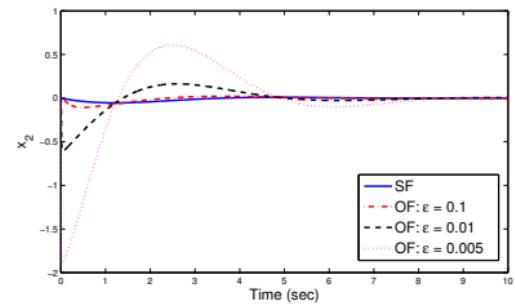
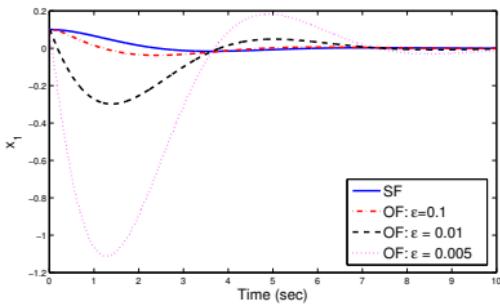
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2^3 + u \\ y &= x_1\end{aligned}$$

- Control por retroalimentación de los estados (SFC: State Feedback Control)

$$u = -x_2^3 - x_1 - x_2$$

- Control por retroalimentación de la salida (OFC: Output Feed-back Control)

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + \left(\frac{2}{\varepsilon}\right) (y - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) (y - \hat{x}_1) \\ u &= -\hat{x}_2^3 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2\end{aligned}$$



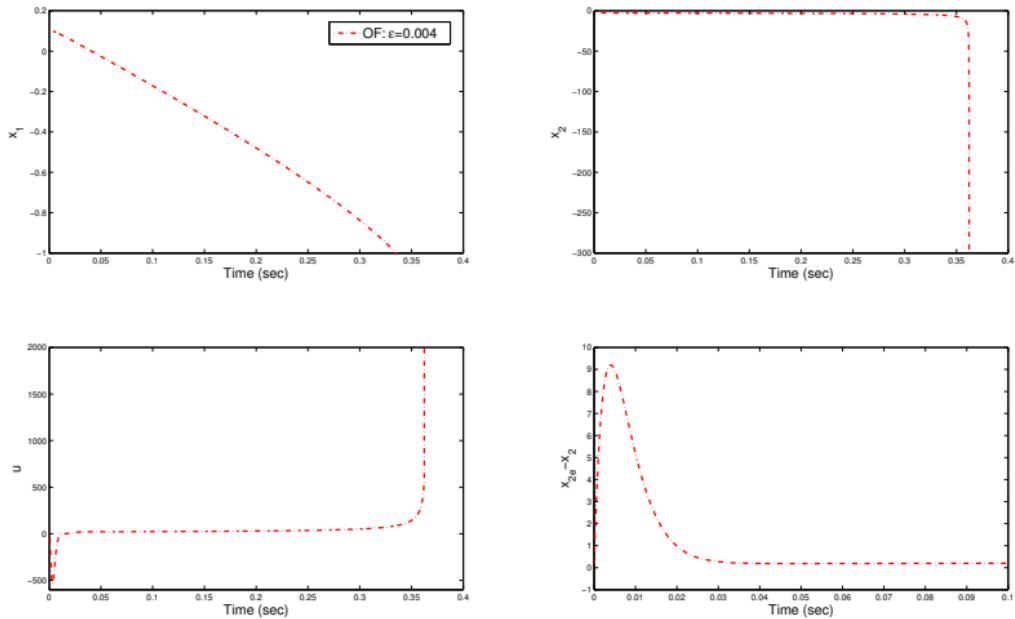


Figura 25.1: Inestabilidad causada por el fenómeno de pico cuando  $\varepsilon = 0.004$ .

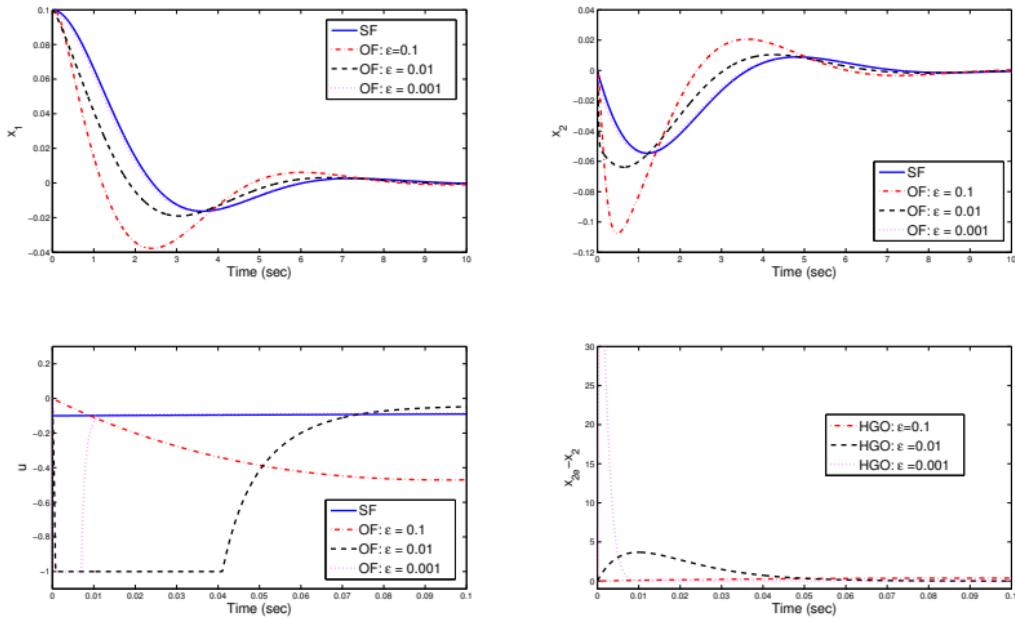


Figura 25.2: Lazo cerrado con control saturado  $u = \text{sat}(-\hat{x}_2^3 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2)$

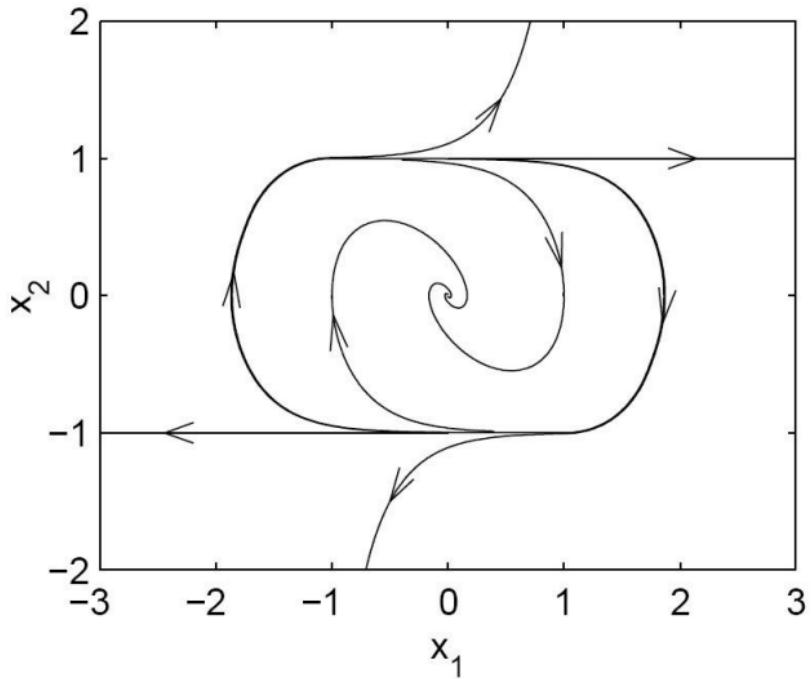


Figura 25.3: Región de atracción con retro de estados saturada  $u = \text{sat}(-x_2^3 - x_1 - x_2)$

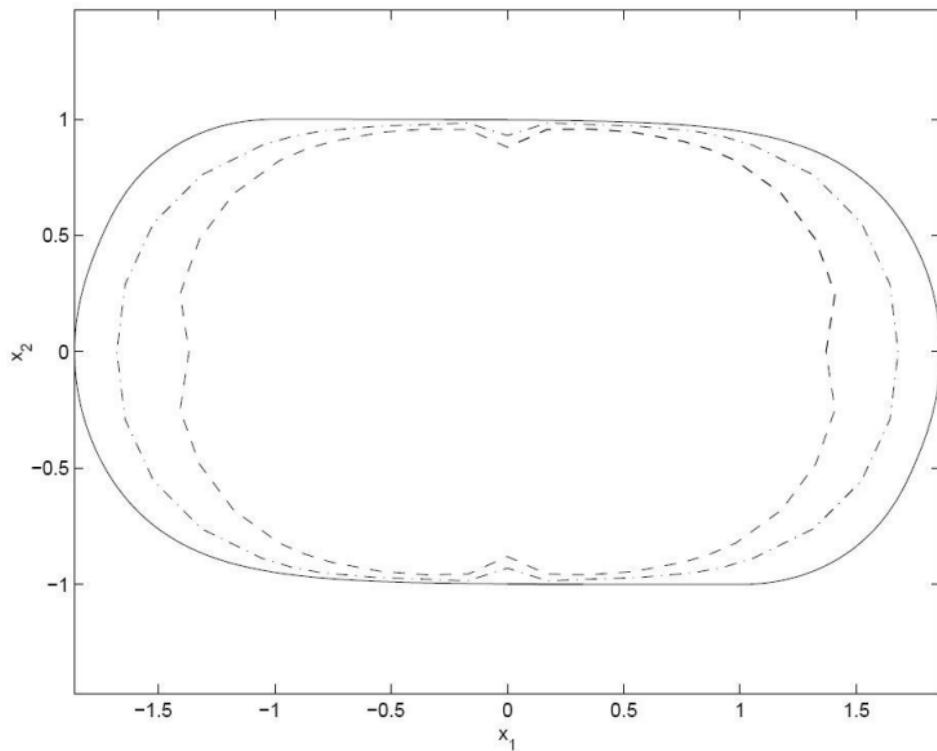


Figura 25.4: Región de atracción con retro de salida.  $\varepsilon = 0.1$  (dashed),  
488  
 $\varepsilon = 0.05$  (dashed-dot),

Analisis del sistema en lazo cerrado:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 & \varepsilon\dot{\eta}_1 &= -\alpha_1\eta_1 + \eta_2 \\ \dot{x}_2 &= \phi(x, \gamma(x - \tilde{x})) & \varepsilon\dot{\eta}_2 &= -\alpha_2\eta_1 + \varepsilon\delta(x, \tilde{x})\end{aligned}$$

### 25.1.3. Efecto del ruido de medición

El Observador de Alta Ganancia es un diferenciador aproximado. La función de transferencia de  $y \rightarrow \hat{x}$  (con  $\phi_0 = 0$ ) es

$$\frac{\alpha_2}{(\varepsilon s)^2 + \alpha_1\varepsilon s + \alpha_2} \begin{bmatrix} 1 + (\varepsilon\alpha_1/\alpha_2)s \\ s \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0$$

La diferenciación amplifica el ruido de medición.

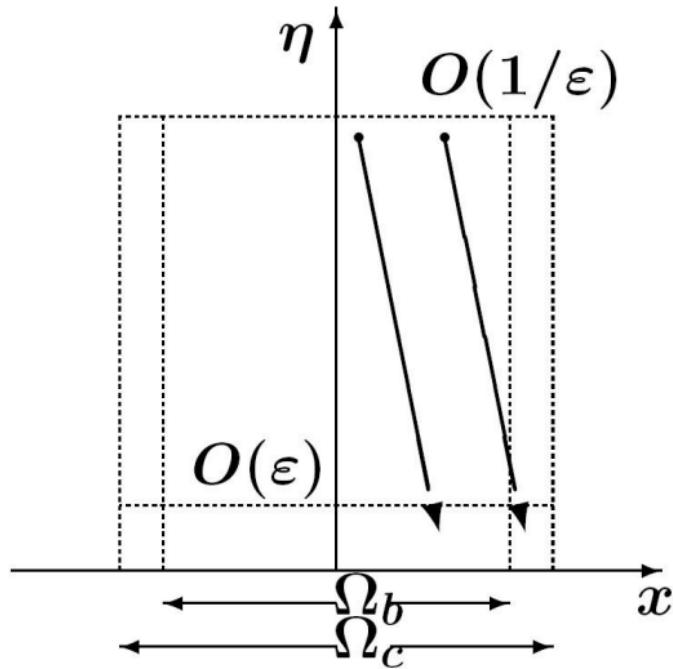
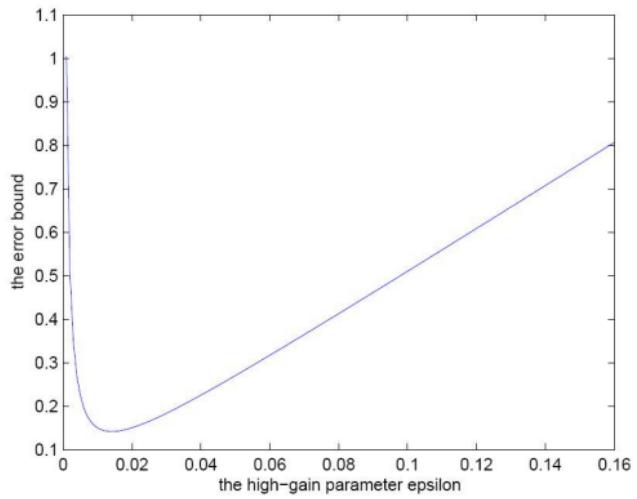


Figura 25.5: Análisis del sistema en lazo cerrado:  $\dot{x}_1 = x_2$ ,  $\dot{x}_2 = \phi(x, \gamma(x - \tilde{x}))$ ,  $\varepsilon\dot{\eta}_1 = -\alpha_1\eta_1 + \eta_2$ ,  $\varepsilon\dot{\eta}_2 = -\alpha_2\eta_1 + \varepsilon\delta(x, \tilde{x})$



$$y=x_1+v\,\,,\,\,k_n=\sup_{t\geq 0}\left|v\left(t\right)\right|<\infty\,\,,\,\,k_d=\sup_{t\geq 0}\left|\ddot{x}_1\left(t\right)\right|\\ \varepsilon_{\text{opt}}=O\left(\sqrt{\frac{k_n}{k_d}}\right)$$

# Chapter 26

## Dissipative Observer Design Method

## 26.1. Introduction

- Observer design is usually a two step procedure:
  - System Transformation to a "simpler" system
  - Observer design for the transformed system
- If transformed system is Linear + Nonlinearity, the nonlinearity is compensated by High Gain, for example.
- Our proposal: generalized and unified view of dealing with the nonlinearity using dissipativity theory.
- This eliminates restrictions and opens new design possibilities.
- Since Dissipative Theory acts like a unifying theory in control, one expects that the same can be true for observer design

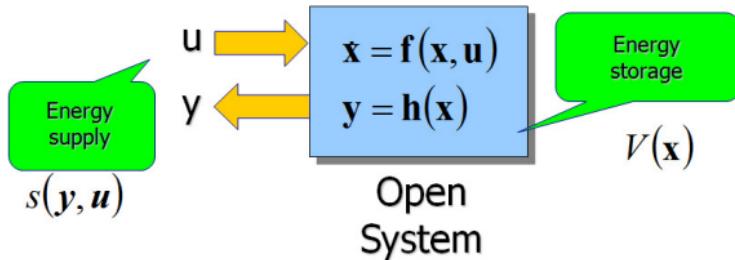
- The Dissipative Method can provide a unified framework to understand and compare different design methods, to design robust observers and to integrate them in control and other interconnected loops.

## 26.2. Dissipativity Theory

- It was developed in the 60's and 70's especially by J.C. Willems as a unified framework to understand the stability properties of interconnected systems.
- It has been motivated by the works on the absolute stability problem, Popov's criterion, Yakubovich's work, Kalman-Yakubovich Lemma, Passivity, ....
- It has become a very general framework for studying stability-like properties, in particular through the work of Sontag.

- It has been also physically motivated by the energy considerations in physics, thermodynamics and electrical circuits.
- It can be seen as a generalization of Lyapunov theory for systems with interconnection ports.
- It is useful for Robustness Analysis and Design

### 26.2.1. A General Overview



$$\frac{dV(x)}{dt} \leq s(y, u) - d(x, u)$$

Energy Balance:

$$V(x(t)) - V(x(0)) \leq \int_0^t s(y(\sigma), u(\sigma)) d\sigma$$

#### 26.2.1.1. Famous Dissipative actors

**Passivity:**  $\dot{V}(x) \leq y^T u - \alpha(\|x\|)$  ,  $\alpha(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$

**ISS:**  $\dot{V}(x) \leq -\alpha_1(\|x\|) + \alpha_2(\|u\|)$  ,  $\alpha_i(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$

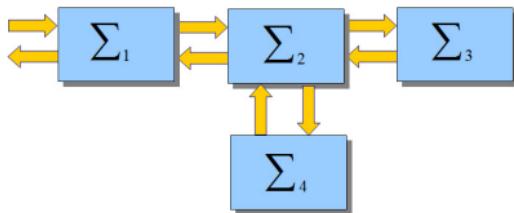
**iISS:**  $\dot{V}(x) \leq -\alpha_1(\|x\|) + \alpha_2(\|u\|)$  ,  $\alpha_1(\cdot) \in \mathcal{K}$  ,  $\alpha_2(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$

**IOSS:**  $\dot{V}(x) \leq -\alpha_1(\|x\|) + \alpha_2(\|u\|) + \alpha_3(\|y\|)$  ,  $\alpha_i(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$

**Input Output Stability:**  $\dot{V}(x) \leq \alpha_1(\|u\|) - \alpha_2(\|y\|)$  ,  $\alpha_i(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$

### 26.2.1.2. Properties

Generally speaking (be careful) the interconnection of dissipative systems is dissipative!

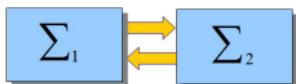


Important Examples:

- The cascade interconnection of two ISS systems is ISS
- Passivity Theorem: The negative feedback interconnection of two Passive systems is Passive

- (modern version of) The Small Gain Theorem: The negative feedback interconnection of two ISS systems is ISS, if the gains are small enough

Relationship of (open) dissipative systems with the Lyapunov stability of closed systems



**Dissipativity:**  $\frac{dV_i(x_i)}{dt} \leq s_i(y_i, u_i) - d_i(x_i, u_i)$   $i = 1, 2$

**Interconnection:**  $u_2 = y_1$ ,  $u_1 = -y_2$  Negative Feedback Interconnection

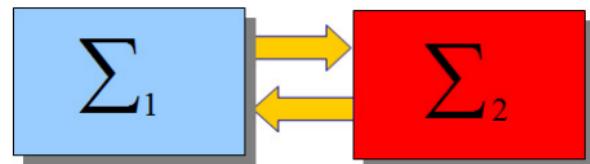
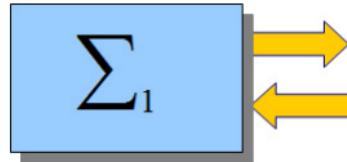
**Total Energy:**  $V(x) = V_1(x_1) + \alpha V_2(x_2)$

**Energy Balance:**  $\frac{dV(x)}{dt} \leq s_1(y_1, -y_2) + \alpha s_2(y_2, y_1) - (d_1(x_1, -y_2) + \alpha d_2(x_2, y_1))$

**Internal stability condition:**  $s_1(y_1, -y_2) + \alpha s_2(y_2, y_1) \leq d_1(x_1, -y_2) + \alpha d_2(x_2, y_1)$

### 26.2.1.3. Useful for Analysis

- Stability analysis of interconnected systems
- Robustness Analysis
  - Small Gain Theorem
  - Passivity Theorem
  - Absolute Stability
  - IQC
  - etcetera



Controller

#### 26.2.1.4. Useful for Design: Stabilization by Interconnection

More sophisticated: Decomposition and aggregation!

#### 26.2.2. Important Special Cases

##### 26.2.2.1. Special Case: LTI Systems

System

$$\Sigma_L : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu , & x(0) = x_0 \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ y = Cx , & \qquad \qquad \qquad y \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

is state strictly dissipative (SSD) wrt the supply rate

$$\omega(y, u) = \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix},$$

if there exists a **storage function**  $V(x) = x^T Px$  such that

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \leq \omega(y(t), u(t)) - \epsilon x^T Px, \text{ for some } \epsilon > 0.$$

↑  
↓

$\Sigma_L$  is *state strictly dissipative (SSD)* wrt the supply rate  $\omega(y, u)$ , or for short **(Q, S, R)-SSD**, if there exist a matrix  $P = P^T > 0$ , and  $\epsilon > 0$  such that

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + \epsilon P & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C^T QC & C^T S \\ S^T C & R \end{bmatrix} \leq 0.$$

- Replacing  $\epsilon P$  with  $\epsilon I$  gives an equivalent problem.
- The inequality is an LMI in  $P$  and  $\epsilon$ .
- If  $m = q$ , passivity corresponds to the supply rate  $\omega(y, u) = y^T u$ .

- **Kalman-Yakubovich-Popov Lemma:** If  $(A, B)$  controllable, and  $(A, C)$  observable, then the previous MI (for passivity) is equivalent to  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$  being strictly positive real (SPR).

#### 26.2.2.2. Dissipativity: Static Nonlinearity

A time-varying memoryless nonlinearity  $\psi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,

$$y = \psi(t, u) ,$$

piecewise continuous in  $t$  and locally Lipschitz in  $u$ , such that  $\psi(t, 0) = 0$ , is said to be **dissipative** with respect to the **supply rate**  $\omega(y, u)$  or for short  **$(Q, S, R)$ -D**, if for every  $t \geq 0$ , and  $u \in \mathbb{R}^q$

$$\omega(y, u) = \omega(\psi(t, u), u) = \psi^T Q \psi + 2\psi^T S u + u^T R u \geq 0$$

- Generalizes the classical ( $m = q$ ) concept of a **Sector nonlinearity** [28].

- If  $\psi$  is in the sector  $[K_1, K_2]$ , i.e.  $(y - K_1 u)^T (K_2 u - y) \geq 0$ , then it is  $(Q, S, R)$ -D, with  $(Q, S, R) = (-I, \frac{1}{2}(K_1 + K_2), -\frac{1}{2}(K_1^T K_2))$ .
- If  $\psi$  is in the sector  $[K_1, \infty]$ , i.e.  $(y - K_1 u)^T u \geq 0$ , then it is  $(0, \frac{1}{2}I, -\frac{1}{2}(K_1 + K_1^T))$ -D.

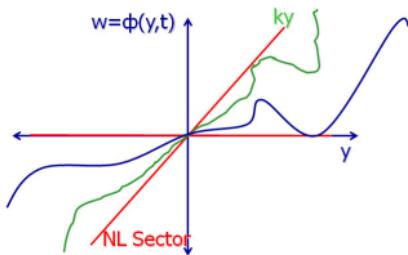


Figure 26.1: Nonlinearity in the sector  $[0, k]$  or  $(-1, k/2, 0)$ -D

- A local (or regional) version is also of interest.

### 26.2.2.3. Feedback Interconnection

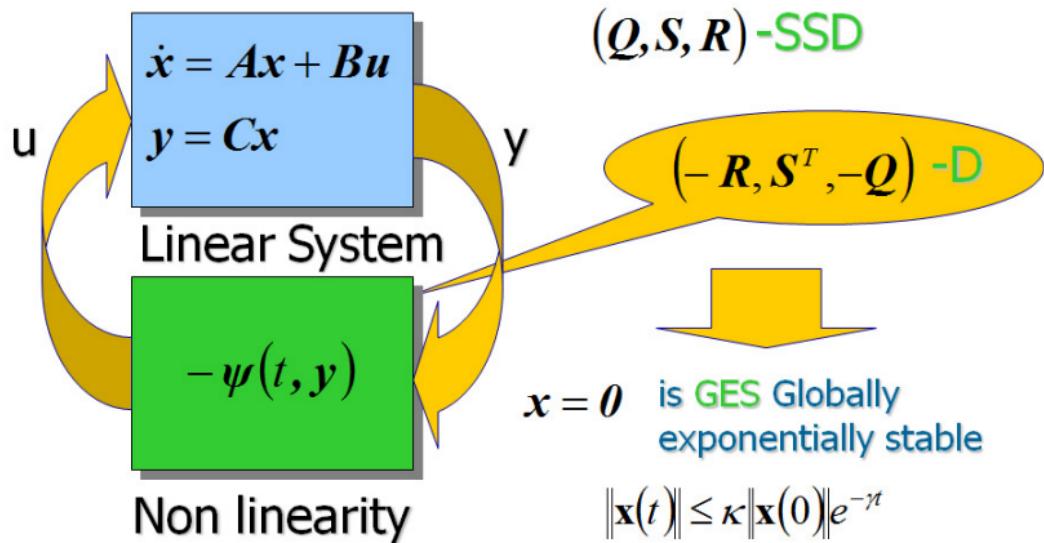
**Lema 26.1** Consider the feedback interconnection

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu , \quad x(0) = x_0 \\ y &= Cx , \\ u &= -\psi(t, y) .\end{aligned}$$

If the linear system  $(C, A, B)$  is  $(Q, S, R)$ -SSD, then the equilibrium point  $x = 0$  is globally exponentially stable for every  $(-R, S^T, -Q)$ -D nonlinearity.

**Proof:**

$$\frac{dV}{dt} \leq \omega(y, u) - \epsilon V = \omega(y, -\psi) - \epsilon V \leq -\epsilon V .$$



## 26.3. Dissipative Observer Design

### 26.3.1. Motivation

The main motivation in [34] was:

- Observer design is usually a two step procedure:
  - System Transformation (immersion) to a "simpler" system
  - Observer design for the transformed system
- The useful "simpler" systems (forms) are usually hard to meet
- Simple forms consist usually of a Linear System + Nonlinearity.
- The design will be done for the Linear System. If the Nonlinearity is of special forms (triangular for HG observers, for example), it will be compensated.

- The methods are not able to deal with cases where the transformation does not lead to the required form.
- The aim of the Dissipative Approach is to provide a systematic means to deal with cases not necessarily considered in the previous approaches.
- Furthermore, and far beyond this initial motivation, it provides a unified framework to design observers, to compare their performance, to analyze and improve their robustness, to include different objectives in the observer design.

Consider the Nonlinear system

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) , \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= h(x(t))\end{aligned}$$

$$x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^p, \quad y(t) \in \mathbb{R}^q.$$

Suppose that some transformation (immersion) has been applied to the system so that it becomes

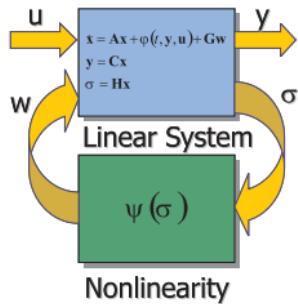
$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= A\xi(t) + G\psi(\sigma, \zeta, u) + \varphi(\zeta, u), \quad \xi(t_0) = \xi_0 \\ \zeta(t) &= C\xi(t) \\ \sigma(t) &= H\xi(t)\end{aligned}$$

where  $\sigma \in \mathbb{R}^r$  is a linear function of the state.

Here the dissipativity theory will be used to propose a Nonlinear Observer for the system in the last form.

### 26.3.2. Observer Design: A simple case

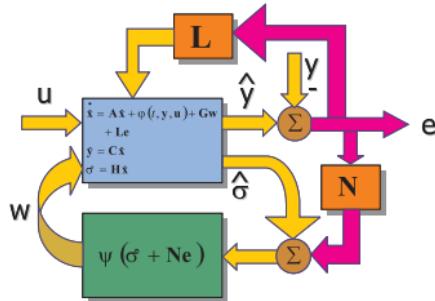
$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = Ax + G\psi(\sigma) + \varphi(t, y, u), & x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^q \\ y = Cx, & y \in \mathbb{R}^m \\ \sigma = Hx, & \sigma \in \mathbb{R}^r \end{cases}$$



Proposed observer for  $\Sigma$

$$\Omega : \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \textcolor{blue}{L}(\hat{y} - y) + G\psi(\hat{\sigma} + \textcolor{blue}{N}(\hat{y} - y)) + \varphi(t, y, u) , \\ \hat{y} = C\hat{x} , \\ \hat{\sigma} = H\hat{x} \end{cases}$$

Matrices  $\textcolor{red}{L} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , and  $\textcolor{red}{N} \in \mathbb{R}^{r \times p}$  to be designed.



### 26.3.2.1. Estimation Error Dynamics

Define the errors  $e \triangleq \hat{x} - x$ ,  $\tilde{y} \triangleq \hat{y} - y$ , and  $\tilde{\sigma} \triangleq \hat{\sigma} - \sigma$ , and the new nonlinearity

$$\phi(z, \sigma) \triangleq \psi(\sigma) - \psi(\sigma + z) .$$

Note that  $\phi(0, \sigma) = 0$  for all  $\sigma$ .

The error dynamics is

$$\Xi : \begin{cases} \dot{e} = A_L e + G\nu , & e(0) = e_0 \\ z = H_N e , \\ \nu = -\phi(z, \sigma) , \end{cases}$$

where  $A_L \triangleq A + LC$ , and  $H_N \triangleq H + NC$ .

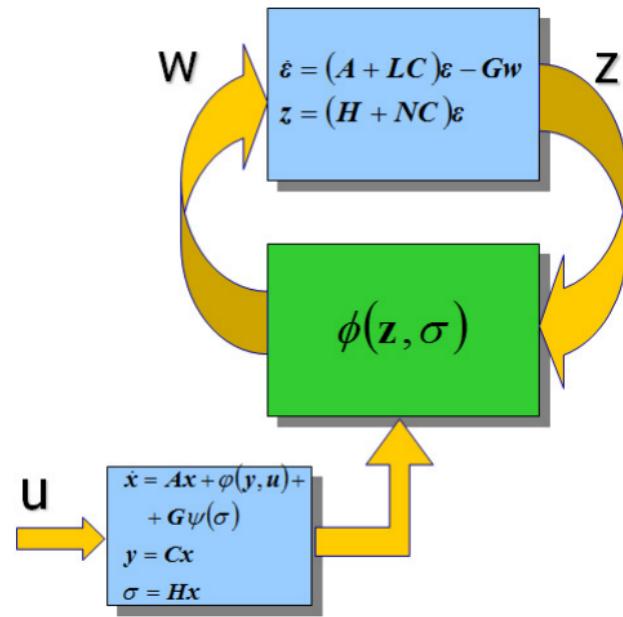
$\sigma$  is the influence of the plant's state.

### 26.3.2.2. Observer Design

**Suposición 26.2**  $\phi(z, \sigma)$  is  $(Q, S, R)$ -D for some non positive semidefinite quadratic form

$$\omega(\phi, z) = \phi^T Q \phi + 2\phi^T S z + z^T R z \geq 0 \text{ for all } \sigma .$$

**Teorema 26.3** Suppose that the Assumption is satisfied. If there are matrices  $L$  and  $N$  such that the linear subsystem of  $\Xi$  is  $(-R, S^T, -Q)$ -SSD, then  $\Omega$  is a global exponential observer for  $\Sigma$ , i.e. there exist



constants  $\kappa, \gamma > 0$  such that for all  $e(0)$

$$\|e(t)\| \leq \kappa \|e(0)\| \exp(-\gamma t) .$$

### 26.3.3. Observer Design: An Extended Case

**Suposición 26.4**  $\phi(z, \sigma)$  is  $(Q_i, S_i, R_i)$ -D for  $i = 1, 2, \dots, M$ .

$\implies \phi$  is  $\sum_{i=1}^M \theta_i (Q_i, S_i, R_i)$ -D for every  $\theta_i \geq 0$ , i.e.  $\phi$  is dissipative wrt the supply rate  $\omega(\phi, z) = \sum_{i=1}^M \theta_i \omega_i(\phi, z)$ .

It is clear that it is necessary that the quadratic forms are independent.

#### 26.3.3.1. Example of a multivariable nonlinearity

Consider a lower triangular nonlinearity

$$\psi(x, u) = [\psi_1(x_1, u), \dots, \psi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, u), \psi_n(x, u)]^T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \quad (26.1)$$

with  $\psi(0, u) = 0$  for all  $u$ .

Assume each component is (globally) Lipschitz, uniformly in  $u$  (or for  $u$  in a compact set). i.e.

$$\|\psi_i(x^i, u) - \psi_i(y^i, u)\| \leq k_i \|x^i - y^i\|, \quad i = 1, \dots, n$$

,

where  $k_i > 0$  is the Lipschitz constant of  $\psi_i$ , and

$$x^i = [x_1 \quad \cdots \quad x_i]^T$$

Defining

$$\phi(z, x, u) = \psi(x, u) - \psi(x + z, u)$$

the Lipschitz condition on  $\psi$  implies for each component of  $\phi$  that

$$\|\phi_i(z^i, x^i, u)\| \leq k_i \|z^i\|, \quad i = 1, \dots, n$$

Considering the Euclidean norm this implies

$$\phi_i^2(z_1, \dots, z_i, x_1, \dots, x_i, u) \leq k_i^2(z_1^2 + \dots + z_i^2), \quad i = 1, \dots, n.$$

These inequalities show that  $\phi$  is  $(Q_i, S_i, R_i)$ -dissipative for every  $i = 1, 2, \dots, n$ , with  $(Q_i, S_i, R_i) = (-b_i b_i^T, 0, k_i \mathbb{I}_i)$ , where  $b_i$  are the basis vectors of  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{I}_i = \text{diag}(I_i, 0_{n-i})$ , and  $I_p$  is the identity matrix of dimension  $p$ .

**Teorema 26.5** Suppose that the assumption is satisfied. If there are matrices  $L$  and  $N$ , and a vector  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_M)$ ,  $\theta_i \geq 0$ , such that the linear subsystem of  $\Xi$  is  $(-R_\theta, S_\theta^T, -Q_\theta)$ -SSD,

$$(Q_\theta, S_\theta, R_\theta) = \sum_{i=1}^M \theta_i (Q_i, S_i, R_i),$$

then  $\Omega$  is a global exponential observer for  $\Sigma$ .

## 26.4. Computational Issues

Observer design: find matrices  $L$  and  $N$ , a vector  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_M)$ ,  $\theta_i \geq 0$ , a matrix  $P = P^T > 0$ , and  $\epsilon > 0$  such that the inequality

$$\begin{bmatrix} PA_L + A_L^T P + \epsilon I + H_N^T R_\theta H_N & PG - H_N^T S_\theta^T \\ G^T P - S_\theta H_N & Q_\theta \end{bmatrix} \leq 0$$

is satisfied.

- In general a nonlinear matrix inequality feasibility problem.
- If  $N = 0$  it is an LMI in  $\epsilon, P, PL, \theta$ .
- If  $M = 1$  and  $R = 0$ , then it is an LMI in  $\epsilon, P, PL, N$ .
- LMIs can be effectively solved by several algorithms in the literature [11]

- There is place for optimization, since an feasible LMI has usually a set of solutions.

## 26.5. Relations with other design methods

- **Circle criterion design** (Arcak and Kokotovic 1999)[3, 15]: Corresponds to the simple case with square and monotonic nonlinearities.
- **Lipschitz observer design** (Thau 1973; Rajamani 1998)[42, 51]: Corresponds to the simple case with nonsquare general nonlinearities, and  $N = 0$ .

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + \psi(x, u) , \quad x(0) = x_0 \\ y &= Cx .\end{aligned}$$

$\psi(x, u)$  Lipschitz in  $x$ , unif. in  $u \Leftrightarrow -\phi^T \phi + \gamma z^T z \geq 0$ ,

where  $\phi(z, x, u) = \psi(x, u) - \psi(x + z, u)$ ,  $\Leftrightarrow$   
 $\phi$  is  $(-I, 0, \gamma I)$ -dissipative.

- **High-Gain observer design** [17, 18]: Corresponds to the extended case with nonsquare triangular nonlinearities, and  $N = 0$ .

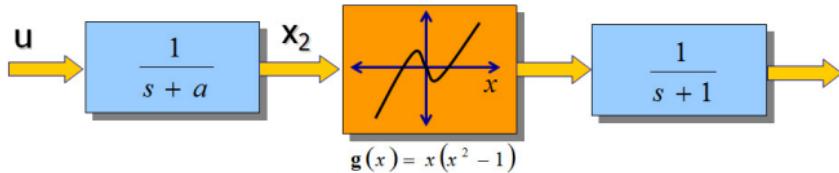
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_1(x_1, u) \\ \vdots \\ \psi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, u) \\ \psi_n(x, u) \end{bmatrix}$$

$$y = x_1 .$$

$\psi(x, u)$  Lip.  $\Rightarrow \phi_i^2(z_1, \dots, z_i, x_1, \dots, x_i) \leq k_i^2(z_1^2 + \dots + z_i^2)$   
 $\Leftrightarrow \phi$  is  $(Q_i, S_i, R_i)$ -dissipative,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

- The proposed method is always applicable when the high-gain methodology is.

- Moreover, it represents a generalization of the HG method, and can deliver a solution when the HG does not.
- Since the HG represents only one possible solution, the proposed method can find better solutions, and is not constrained to high-gain ones. Moreover, other optimization and design criteria can be included to find a better solution.
- A simple and immediate generalization of HG is to use the additional injection depending on matrix  $N$ .
- Since in the proposed method the particular characteristics of the nonlinearities can be taken into account using several supply rates, and not only the triangular and Lipschitzness characteristics used by the HG method, it is expected that the system class for which this method is applicable is much bigger, the conservativeness of the results is reduced, and the quality of the results increased.



## 26.6. Examples

### 26.6.1. Example 1

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + g(x_2) , \\ \dot{x}_2 = -ax_2 , \\ y = x_1 , \end{cases}$$

with  $g(x_2) = x_2(x_2^2 - 2)$ .

The 2-observability map for this system is

$$\begin{aligned} y &= x_1 , \\ \dot{y} &= -y + x_2^3 - x_2 , \end{aligned}$$

522

that is not injective.

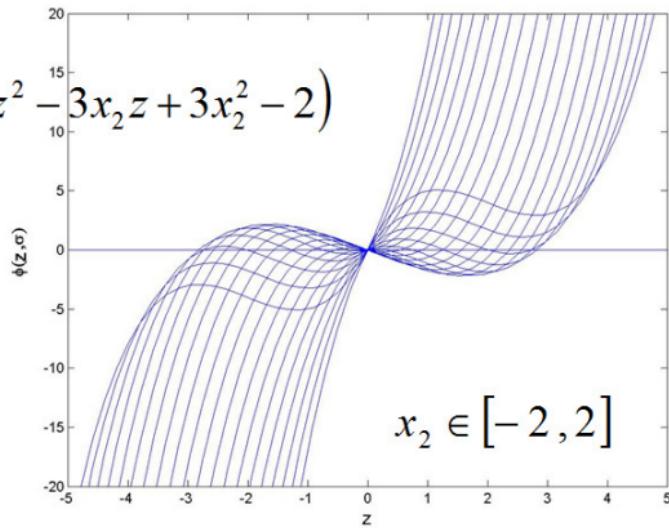
However, for  $a \neq 0$  the 3-observability map is injective.

- There is no High-Gain Observer (of dimension 2), since the plant is not 2-observable.
- There is no Lipschitz observer since  $g(x_2)$  is not Lipschitz.
- There is no circle criterion observer since  $g(x_2)$  is not monotonic.
- But there is a dissipative observer for  $a > 0$ , with  $N \neq 0$ .

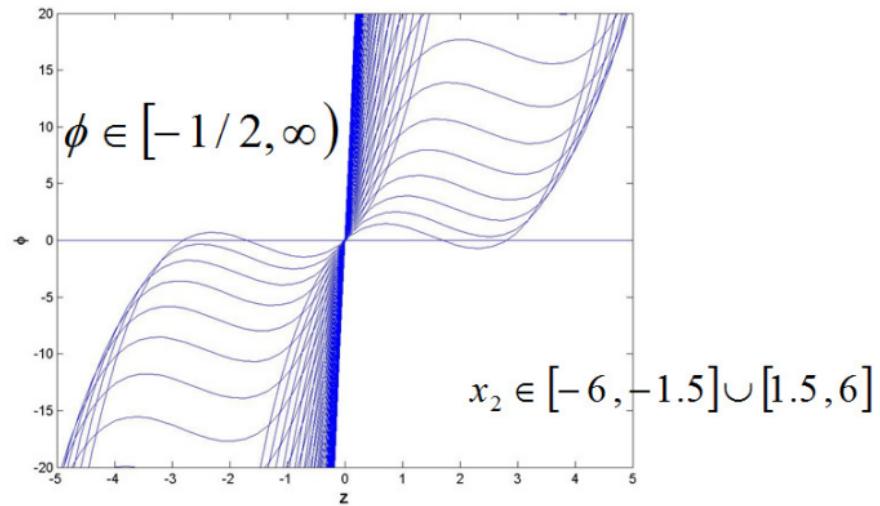
$$\phi(z, \sigma = x_2) = z(z^2 - 3x_2 z + 3x_2^2 - 2)$$

Sector

$$\phi \in [-2, \infty)$$



$$x_2 \in [-2, 2]$$



Plant and Observer Simulations:  $a_1=1$ ,  $a_2=0.1$ ,  $k=3.45$ ,  $I_1=185$ ,  $I_2=5.5$

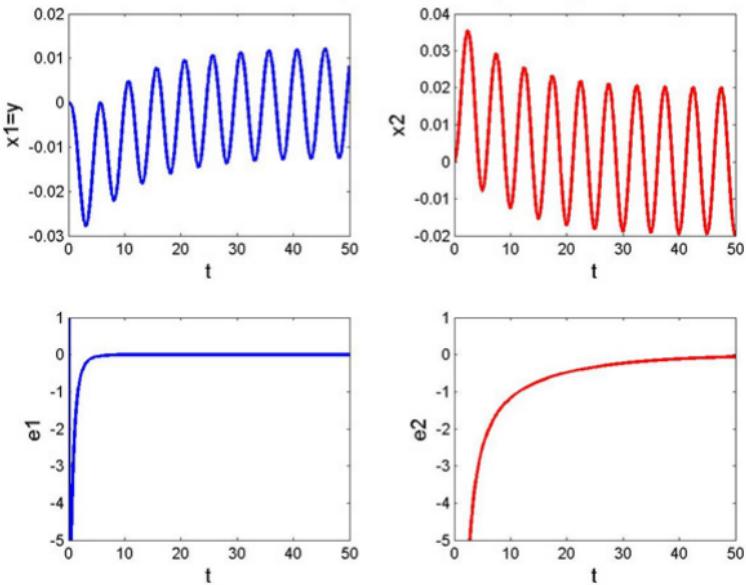


Figure 26.2: Simulations with small deviations of  $x_2$

Plant and Observer Simulations:  $a_1=1$ ,  $a_2=0.1$ ,  $k=3.45$ ,  $I_1=185$ ,  $I_2=5.5$

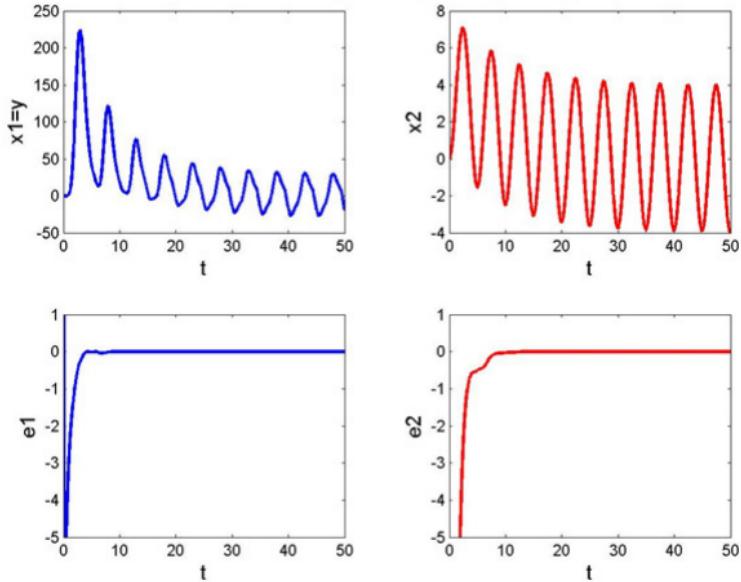


Figure 26.3: Simulations with large deviations of  $x_2$

Plant and Observer Simulations:  $a_1=1$ ,  $a_2= -0.1$ ,  $k=90$ ,  $l_1=99$ ,  $l_2=110$

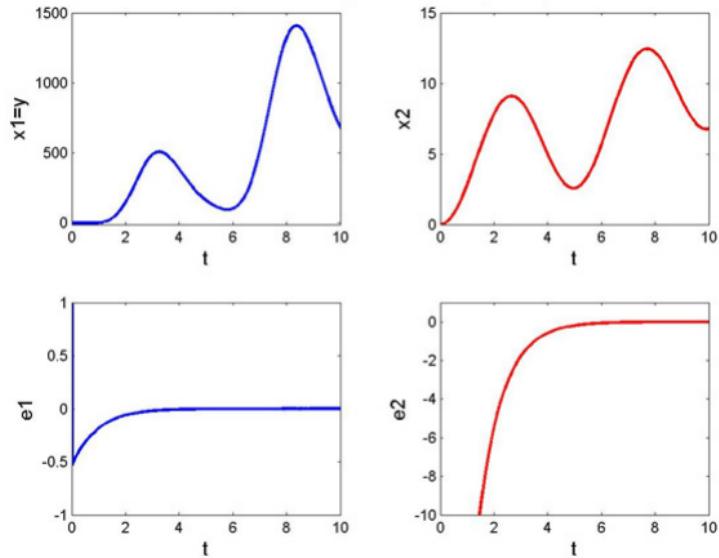


Figure 26.4: Simulations with large deviations of  $x_2$

Plant and Observer Simulations:  $a_1=1$ ,  $a_2= -0.1$ ,  $k=90$ ,  $I_1=99$ ,  $I_2=110$

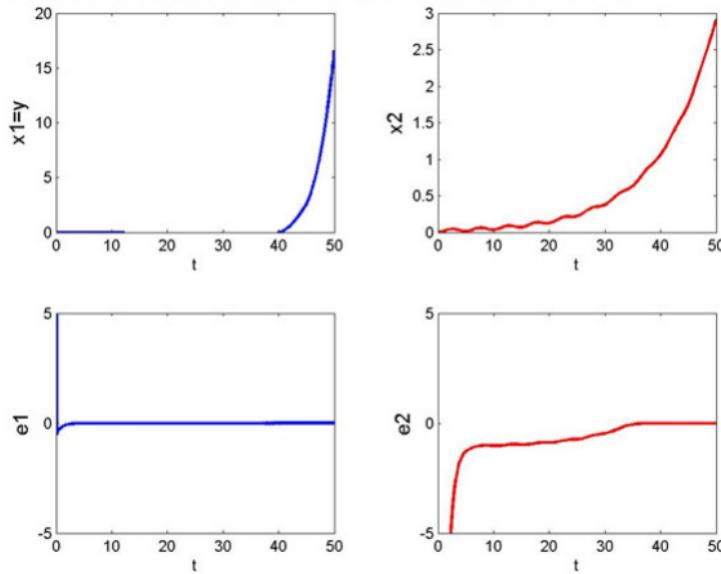


Figure 26.5: Simulations with small deviations of  $x_2$ : Problematic

### 26.6.1.1. NL Sector

### 26.6.1.2. Observer for $a > 0$

### 26.6.1.3. Observer for $a < 0$ : Dissipativity not completely satisfied

## 26.6.2. Example 2

Consider the system

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1 u, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 - x_1^2 - x_2^2 - \alpha x_2^3 + x_1 x_2 u, \quad \alpha > 0, \\ y &= x_1,\end{aligned}$$

Exact error linearization is not possible (because of the cubic term). Decomposing the system as

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 - x_2 - x_1^2 - x_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha x_2^3 \end{bmatrix}, \quad y = x_1,$$

530

After the state and an output transformations

$$\bar{y} = \exp(y) - 1, \quad z = \begin{bmatrix} \exp(x_1) - 1 \\ \exp(x_1)(x_2 + 1) - 1 \end{bmatrix}.$$

the system has the approximate observer form

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} -\bar{y} - u(\bar{y} + 1) \ln |\bar{y} + 1| \\ -\ln |\bar{y} + 1|(1 + \bar{y})(1 + \ln |\bar{y} + 1| + u) \end{bmatrix} + \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\alpha}{(1+\bar{y})^2} (\bar{y} - z_2)^3 \end{bmatrix}, \\ \bar{y} &= z_1.\end{aligned}$$

- The nonlinearity is

$$\psi(\sigma, \bar{y}) = \frac{\alpha(\bar{y} - \sigma)^3}{(1 + \bar{y})^2}, \text{ sigma} = z_2.$$

- $\omega(\phi, \xi, \bar{y}) = Q\phi^2 + 2S\phi\xi + R\xi^2 \geq 0$  for all  $\sigma$  with  $(Q, S, R) = \left(0, 1, -\frac{\alpha}{2(1+\bar{y})^2}\right)$ .
- For  $\bar{y}$  bounded there is a minimum value of  $\bar{R}$  so that  $\phi$  is  $(0, 1, \bar{R})$ -dissipative.
- For  $N = 2\bar{R}$ ,  $l_1 = 3\bar{R}$ ,  $l_2 = -2\bar{R}^2$  the conditions are satisfied. This observer is not global, because  $z_1$  has to be bounded, but there is no restriction on  $z_2$ , and  $u$ .

### 26.6.3. Example 3

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= g(x_2)u, \quad g(x_2) \text{ gl. Lipschitz} \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 \\ y &= x_1,\end{aligned}$$

System is not observable for every input, since for  $u = 0$  it is detectable but not observable.

- The nonlinearity of the error equation is

$$\phi(\xi, \sigma, u) = \xi + (g(\sigma) - g(\sigma + \xi))u, \quad \sigma = x_2$$

- $\phi$  is dissipative for  $(Q, S, R) = (-1, 0, k^2)$ .
- $N = 0, l_1 = -(k+1), l_2 = -2$  is a global observer for bounded inputs, despite of the fact that the system is not observable.

## 26.7. Conclusions and Perspective

### 26.7.1. Conclusions

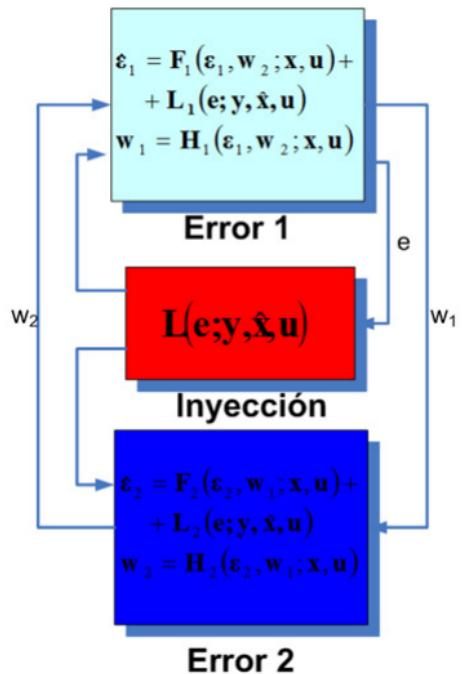
- Proposed observer design generalizes and unifies several standard design methods.

- It is based on the dissipativity theory.
- It eliminates several restrictions: Lipschitz, monotonic and square nonlinearities; observability of the system; High Gain...
- It opens new design possibilities. For example, using the design degrees of freedom for optimization.
- It is computable.
- It can be generalized to more general class of nonlinear systems (at cost of the computability).

### **26.7.2. Perspective: A more general version of the Dissipative Observer basic idea**

- Decompose the observation error dynamics in two (or more) interconnected subsystems.

- The Output injection will be used to provide (if possible) complementary dissipative.



# Bibliografía

- [1] V. Andrieu and L. Praly. Remarks on the existence of a Kazantzis-Kravaris/Luenberger observer. In *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3874–3879. IEEE, Dec. 14–17 2004.
- [2] D. Angeli and E. Sontag, “Forward completeness, unboundedness observability, and their lyapunov characterizations,” *Sys. & Cont. Lett.*, 38, pp. 209–217, 1999.

- [3] M. Arcak and P. Kokotovic. Nonlinear observers: A circle criterion design. In *Proceedings of the 38th. Conference on Decision & Control*, pages 4872–4876, Phoenix, Arizona, USA, 1999. IEEE.
- [4] M. Arcak, “Certainty-equivalence output-feedback design with circle-criterion observers,” *IEEE Trans. Aut. Con.*, 50, no. 6, pp. 905–909, 2005.
- [5] M. Arcak and P. Kokotovic, “Nonlinear observers: a circle criterion design and robustness analysis,” *Automatica*, vol. 37, no. 12, pp. 1923–1930, 2001.
- [6] A. Atassi and H. Khalil, “A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems,” *IEEE Trans. Aut. Con.*, 44, pp. 1672–1687, 1999.

- [7] ——, “Separation results for the stabilization of nonlinear systems using different high-gain observer designs,” *Syst. Control Lett.*, vol. 39, pp. 183–191, 2000.
- [8] A. Banaszuk and W. Sluis. On nonlinear observers with approximately linear error dynamics. In *Proc. of the American Control Conference*, pages 3460–3464. IEEE, 1997.
- [9] D. Bestle and M. Zeitz. Canonical form observer design for non-linear time-variable systems. *Int. J. Control.*, 38:419–431, 1983.
- [10] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2004.
- [11] S.P. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM, Philadelphia, 1994.

- [12] Coron, Jean-Michel. *Control and Nonlinearity*. Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 136. Rhode-Island, American Mathematical Society, 2007.
- [13] C. Desoer and M. Vidyasagar, *Feedback systems: Input-Output properties*. New York: Academic Press, 1975.
- [14] L. El Ghaoui and S. Niculescu, *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*. Phil., SIAM, 1999.
- [15] X. Fan and M. Arcak, “Observer design for systems with multivariable monotone nonlinearities,” *Sys. & Cont. Lett.*, 50, pp. 319–330, 2003.
- [16] J.-P. Gauthier and G. Bornard, “Observability for any  $u(t)$  of a class of nonlinear systems,” *IEEE Trans. Aut. Cont.*, 26, pp. 922–926, 1981.

- [17] J.-P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman. A simple observer for nonlinear systems. Applications to bioreactors. *IEEE Trans. Automatic Control*, 37:875–880, 1992.
- [18] J.-P. Gauthier and I. Kupka, *Deterministic Observation Theory and Applications*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2001.
- [19] M. Guay. Observer linearization by output-dependent time-scale transformations. *IEEE Trans. Automatic Control*, 47(10):1730–1735, 2002.
- [20] A. Glumineau and V. Lopez-M. Transformation to state affine system and observer design. In Nijmeijer and Fossen [36], pages 59–71.

- [21] L. Grüne, E.D. Sontag, F.R. Wirth. Asymptotic stability equals exponential stability, and ISS equals finite energy gain - if you twist your eyes. *Systems & Control Letters* 38 (1999): 127-134.
- [22] R. Hermann and A.J. Krener. Nonlinear controllability and observability. *IEEE Trans. Automatic Control*, 22:728–740, 1977.
- [23] D. Hill and P. Moylan, “Dissipative dynamical systems: Basic input-output and state properties,” *J. of the Franklin Inst.*, 309, pp. 327–357, 1980.
- [24] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. 3rd. edition. London, Springer, 1995.
- [25] P. Jouan. Immersion of nonlinear systems into linear systems modulo output injection. *SIAM J. Control and Optimization*, 41(6):1756–1778, 2003.

- [26] N. Kazantzis and C. Kravaris. Nonlinear observer design using Lyapunov's auxiliary theorem. *Systems & Control Letters*, 34:241–247, 1998.
- [27] H. Khalil, “High-gain observers in nonlinear feedback control,” in *New Directions in Nonlinear Observer Design*, ser. Lecture notes in control and information sciences, H. Nijmeijer and T. Fossen, Eds. London: Springer–Verlag, 1999, no. 244, pp. 249–268.
- [28] H. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3rd ed. Upsaddle River, New Jersey: Prentice–Hall, 2002.
- [29] A.J. Krener and A. Isidori. Linearization by output injection and nonlinear observers. *Syst. Control Lett.*, 3:47–52, 1983.
- [30] A.J. Krener and W. Respondek. Nonlinear observers with linear error dynamics. *SIAM J. Control and Optimization*, 23:197–216, 1985.

- [31] J. Levine and R. Marino. Nonlinear system immersion, observers and finite dimensional filters. *Syst. Control Lett.*, 7:133–142, 1986.
- [32] A. Lynch and S. Bortoff. Nonlinear observers with approximated linear error dynamics: the multivariable case. *IEEE Trans. Automatic Control*, 46(6):927–932, 2001.
- [33] R. Marino and P. Tomei. *Nonlinear Control Design; Geometric, Adaptive & Robust*. Prentice Hall, London, 1995.
- [34] J. A. Moreno. Observer design for nonlinear systems: A dissipative approach. In *Proceedings of the 2nd IFAC Symposium on System, Structure and Control SSSC2004*, pages 735–740, Oaxaca, Mexico, Dec. 8-10, 2004. IFAC.
- [35] S. Nicosia, P. Tomei, and A. Tornambé. A nonlinear observer for elastic robots. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, 4(1):45–52, February 1988.

- [36] H. Nijmeijer and T.I. Fossen, editors. *New Directions in Nonlinear Observer Design*. Number 244 in Lecture notes in control and information sciences. Springer–Verlag, London, 1999.
- [37] H. Nijmeijer and A. van der Schaft. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer–Verlag, New York, 1990.
- [38] A.R. Phelps. On constructing nonlinear observers. *SIAM J. Control Optimization*, 29:516–534, 1991.
- [39] Alexander Pogromsky and Henk Nijmeijer. Observer-based robust synchronization of dynamical systems. *International Journal of Bifurcations and Chaos*, 8(11):2243–2255, 1998.
- [40] Praly, L.; d'Andrea-Novel, B. and Coron, J.-M. “Lyapunov Design of Stabilizing Controllers for Cascaded Systems,” *IEEE Trans. Aut. Cont.*, 36, No. 10, pp. 1177–1181, 1991.

- [41] L. Praly and M. Arcak, “A relaxed condition for stability of nonlinear observer-based controllers,” *Sys. & Cont. Lett.*, 53, pp. 311–320, 2004.
- [42] R. Rajamani, “Observers for Lipschitz nonlinear systems,” *IEEE Trans. Aut. Cont.*, 43, pp. 397–401, 1998.
- [43] W. Respondek, H. Nijmeijer, and P. Gromoski. Observer linearization by output-dependent time-scaling transformation. In *5th IFAC Symposium Nonlinear Control Systems (NOLCOS)*, Saint Petersburg, Russia, July 2001.
- [44] J. Schaffner and M. Zeitz. Variants of nonlinear normal form observer design. In Nijmeijer and Fossen [36], pages 161–180.
- [45] E. Sontag and M. Krichman, “An example of a gas system which can be destabilized by an integrable perturbation,” *IEEE Trans. Aut. Cont.*, 48, pp. 1046–1049, 2003.

- [46] Sontag, Eduardo. *Mathematical Control Theory*; Deterministic Finite-Dimensional Systems. 2nd. Edition. Texts in Applied Mathematics, vol. 6. New York, Springer-Verlag, 1998.
- [47] J.A.K. Suykens, P.F. Curran, J. Vandewalle, and L.O. Chua. Robust nonlinear  $H_\infty$  synchronization of chaotic lur'e systems. *IEEE Trans. on Circuits and Systems—I: Fundamental theory and applications*, 44(10):891–904, 1997.
- [48] A. Teel and L. Praly, “Semi-global stabilizability by output feedback,” *Syst. & Cont. Lett.*, 22, pp. 313–325, 1994.
- [49] ——, “Tools for semiglobal stabilization by partial state feedback and output feedback,” *SIAM J. Cont. Opt.*, 33, pp. 1443–1488, 1995.

- [50] A. Teel and J. Hespanha, “Examples of ges systems that can be driven to infinity by arbitrarily small additive decaying exponentials,” *IEEE Trans. Aut. Cont.*, 49, pp. 1407–1410, 2004.
- [51] F. Thau, “Observing the state of nonlinear dynamic systems,” *Int. J. Control*, vol. 17, pp. 471–479, 1973.
- [52] A. Van der Schaft,  *$L_2$ -Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*, 2nd ed. London: Springer-Verlag, 2000.
- [53] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*, 2nd ed. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1993.
- [54] J.C. Willems. Dissipative dynamical systems, part I: General theory. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 45:321–351, 1972.

- [55] J.C. Willems. Dissipative dynamical systems, part II: Linear systems with quadratic supply rates. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 45:352–393, 1972.
- [56] J. Willems, “Dissipative dynamical systems, part I: General theory. Part II: Linear systems with quadratic supply rates,” *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 45, pp. 321–351, and 352–393, 1972.
- [57] X. Xia and W. Gao. Nonlinear observer design by observer error linearization. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 27(1):199–216, 1989.
- [58] X. Xia and M. Zeitz. On nonlinear continuous observers. *Int. J. Control*, 66(6):943–954, 1997.
- [59] M. Zeitz. The extended Luenberger observer for nonlinear systems. *Syst. Control Lett.*, 9:149–156, 1987.

- [60] M. Zeitz. Canonical normal forms for nonlinear systems. In A. Isidori, editor, *Nonlinear Control Systems Design - Selected Papers from IFAC-Symposium*, pages 33–38. Pergamon Press, Oxford, 1989.