UNIVERSIDAD NACIONAL AGRARIA LA MOLINA

Facultad de Economía y Planificación

Departamento de Estadística e Informática

Modelos de optimización

Práctica Calificada Nº 1

NOTA

Apellidos y Nombres: ____ Ciclo: 2020-II

Duración: 90 minutos

Parte 1: Marque la alternativa correcta (0.5 cada una)

1. Una función f que satisface: f(0.7x+0.4y)>=f(0.7x)+0.4f(y), para que x y que pertenezca a cierto subconjunto S_1 de un conjunto convexo S y satisface que f(0.7x+0.4y)<=f(0.7x)+0.4f(y), entonces el complemento de S_1.
   a) Es convexa sobre S
   b) Es cóncava sobre S
   c) Es cóncava y convexa sobre S
   d) No es ni cóncava ni convexa sobre S.

2. Una función es convexa si y sólo si:
   a) -f es cóncava
   b) -f es convexa
   c) f^{-1} es convexa
   d) f^{-1} es convexa

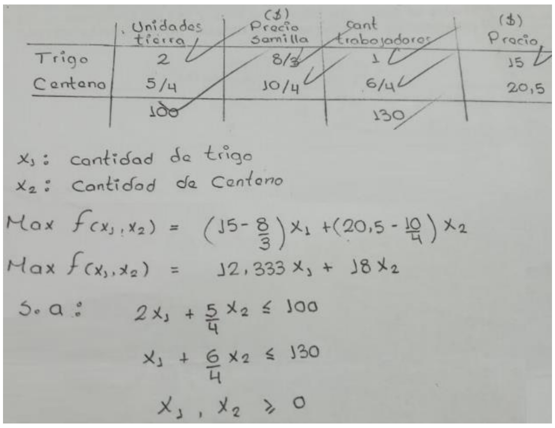
3. Es cierto que:
   a) Si x* es un mínimo local de un problema de programación convexo, entonces x* es un mínimo global
   b) Si x* es un mínimo local de un problema de programación lineal, entonces x* es un mínimo local
   c) Si x* es mínimo local estricto de un problema de programación convexo, entonces x* es un máximo global
   d) Son verdaderas a, b, y c
   e) Ninguna de las anteriores es verdadera

4. En una restricción de desigualdad, un punto $\bar{x}$ que está en la frontera es:
   a) Un punto interior b) Un punto activo c) El único punto activo
   d) un punto óptimo e) Uno de los puntos óptimos

Parte 2: Resuelva los siguientes ejercicios (**COLOCAR EL PROCEDIMIENTO**)

1. En una economía lineal para producir 3 unidades de trigo se requieren 6 unidades de tierra, \$8 en semilla y 3 trabajadores. Para producir 4 unidades de centeno se requieren 5 unidades de tierra, \$10 de semilla y 6 trabajadores. El precio por unidad de trigo y centeno es \$15 y \$20.5 respectivamente, siendo las cantidades disponibles de tierra y de trabajo de 100 y 130 unidades respectivamente. Si el

empresario desea optimizar el resultado de su explotación, formule un modelo de programación lineal. Objetivo: maximizar beneficio. (3.0 puntos)



	Unidades tierra	($) Precio semilla	cant trabajadores	($) Precio
Trigo	2	8/3	1	15
Centeno	5/4	10/4	6/4	20,5
	100		130	

x_1: cantidad de trigo
x_2: cantidad de Centeno

$$\text{Max } f(x_1, x_2) = \left(15 - \frac{8}{3}\right)x_1 + \left(20{,}5 - \frac{10}{4}\right)x_2$$

$$\text{Max } f(x_1, x_2) = 12{,}333\,x_1 + 18\,x_2$$

S.a:

$$2x_1 + \frac{5}{4}x_2 \leq 100$$

$$x_1 + \frac{6}{4}x_2 \leq 130$$

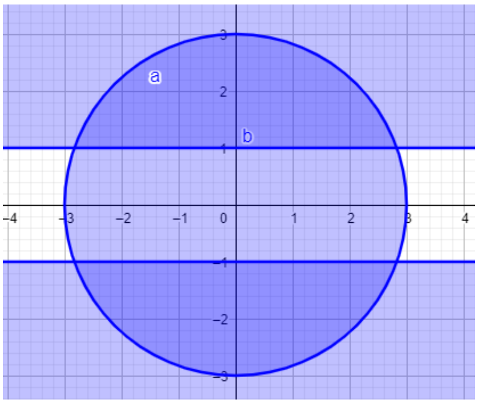
$$x_1, x_2 \geq 0$$

2. Considerar el problema:
Minimizar: x_1-x_2
Sujeto a:

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 9$$

$$x_2^2 \geq 4$$

Grafique la región factible. Use el gráfico para encontrar todos los mínimos locales para el problema, y determine cual o cuales de ellos son también mínimos globales. (3.0 puntos)



Mínimo global = (0,-3)

Mínimo local {x1, x2/ $-\sqrt{5}$ ≤x1≤ $\sqrt{5}$, X2=2} U (0,-3)

3. Para la siguiente función, determine si es convexa o cóncava (3.0 puntos)

$$f(x) = \begin{cases} 3 - (x-1)^3, para\ 0 \leq x < 3 \\ -2 + (x-4)^2, para\ 3 \leq x < 6 \end{cases}$$

f\`(x)= -3(x-1)²
f\`\`(x)=-6(x-1)≤0 para x= (2,3) en $0 \leq x < 3$, concava

f\`(x)= 2(x-4)
f\`\`(x)=2 ≥0 para $0 \leq x < 3$, convexa

La funcion es concava

4. Expresar $(\frac{7}{2},\frac{5}{2})^T$ como una combinación convexa en los puntos $(2,1)^T$, $(1,3)^T$ y $(1,1)^T$ (2.5 puntos)

$$y = \sum \alpha_i \, x_i \quad \sum \alpha_i = 1$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}^T$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

$$\alpha_1 * (2,1) + \alpha_2 * (1,3) + \alpha_2 * (1,1) = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}^T$$

```
a <- rbind(c(2, 1, 1),
           c(1, 3, 1),
           c(1, 1, 1))
b <- c(7/2,5/2, 1)
fractions(solve(a, b))
[1]  5/2  3/4 -9/4
```

No se puede expresar como una combinación convexa. Los valores de alfa deben ser positivos.

5. Sea $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 + 6x_2$ determinar la convexidad (3.0 puntos)

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 4x_1 - 4x_2 - 2 \\ -4x_1 + 8x_2 + 6 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow y^t \, \nabla f^2 x \, y \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y_1 - 4y_2 & -4y_1 + 8y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= 4y_1^2 - 4y_1y_2 - 4y_1y_2 + 8y_2^2$$

$$= 4y_1^2 - 8y_1y_2 + 8y_2^2$$

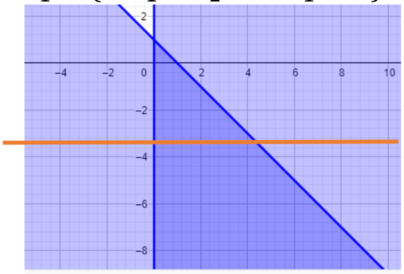
$$= 4(y_1^2 - 2y_2y_1 + 2y_2^2) = 4[(y_1 - y_2)^2 + y_2^2].$$

$$\underbrace{4[(y_1 - y_2)^2 + y_2^2] \geq 0}_{\text{Verdadero}}$$

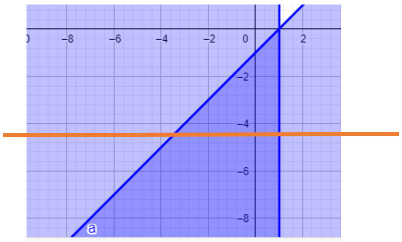
$f(x_1, x_2)$ es convexa

6. Sea $S_1 = \{x : x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0\}$ y $S_2 = \{x : x_1 - x_2 \geq 1, x_1 \leq 1\}$ y sea $S = S_1 \cup S_2$ Pruebe que S_1 y S_2 son ambos conjuntos convexos pero que S no es un conjunto convexo. (3.5 puntos)

$S_1 = \{x : x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0\}$ existe solo dos cortes (es convexa)



$S_2 = \{x : x_1 - x_2 \geq 1, x_1 \leq 1\}$ existe solo dos cortes (es convexa)



$S = S_1 \cup S_2$ existe tres puntos de corte (no es convexa)