

# Diplomski seminar

## Modeliranje pogojne neodvisnosti s pomočjo grafov

Jošt Gojkovič

Fakulteta za matematiko in fiziko

3. december 2022

# Grafično modeliranje

- Grafični model ali verjetnostni grafični model je verjetnostni model, kjer z grafi izrazimo pogojno odvisnost med slučajnimi spremenljivkami
- Povezave med vozlišči predstavljajo odvisnost
- Če je na primer povezava med vozliščem  $A$  in  $B$ , to pomeni da je  $A$  odvisen od  $B$  in  $B$  od  $A$ .

# Notacija in terminologija

- $G(V, E)$  enostaven graf, torej nima večkratnih povezav in zank. Večinoma bodo vozlišča označena, torej bodo razdeljena v 2 skupini.
- Množica vozlišč ima obliko

$$V = \Delta \cup \Gamma \quad \text{z} \quad \Delta \cap \Gamma = \emptyset$$

Pravimo, da so vozlišča v  $\Delta$  diskretna, v  $\Gamma$  pa zvezna.

- Grafom z označenimi vozlišči pravimo označeni grafi

# Notacija in terminologija

- Poln graf je graf, v katerem vsaka povezava povezuje par njegovih točk, oziroma kjer so vse točke povezane vsaka z vsako.
- Če je  $A \subseteq V$ ,  $A$  inducira podgraf  $G_A = (A, E_A)$ , kjer je  $E_A = E \cap (A \times A)$  dobljena iz  $G$  tako da ohranimo povezave z začetnim in končnim vozliščem v  $A$ .
- Podmnožica je polna, če inducira poln podgraf
- Polni podmnožici, ki je maksimalna oziroma se je ne da povečat, pravimo klika

# Notacija in terminologija

- Če imamo povezavo  $\alpha \rightarrow \beta$ , pravimo, da je  $\alpha$  starš od  $\beta$ . Množica staršev vozlišča  $\beta$  je označena s  $pa(\beta)$ .
- Množico sosedov vozlišča  $\alpha$  označimo z  $ne(\alpha)$
- Oznaki  $pa(A)$  in  $ne(A)$  označujeta množico staršev in sosedov vozlišč v  $A$ , katera sama niso v  $A$ :

$$pa(A) = \cup_{\alpha \in A} pa(\alpha) \setminus A$$

$$ne(A) = \cup_{\alpha \in A} ne(\alpha) \setminus A$$

- Meja  $bd(A)$  podmnožice vozlišč  $A$  je množica vozlišč v  $V \setminus A$ , ki so starši ali sosedi vozliščem v  $A$ . Torej  $bd(A) = pa(A) \cup ne(A)$ .
- Zaprtje množice  $A$  je  $cl(A) = A \cup bd(A)$

# Notacija in terminologija

- Množica  $C \subseteq V$  je  $(\alpha, \beta)$ -seperator, če vse poti od  $\alpha$  do  $\beta$  sekajo množico  $C$ .
- $C \subseteq V$  separira  $A$  od  $B$ , če je  $(\alpha, \beta)$ -seperator za vse  $\alpha \in A$  in  $\beta \in B$

## Definicija

*Trojica  $(A, B, C)$  disjunktne podmnožice vozlišč neusmerjenega označenega grafa  $G$  tvori močno dekompozicijo grafa  $G$ , če je  $V = A \cup B \cup C$  in velja naslednje:*

- i)  $C$  separira  $A$  od  $B$
- ii)  $C$  je polna podmnožica množice  $V$
- iii)  $C \subseteq \Delta \vee B \subseteq \Gamma$

- Če pri enakih predpostavkah veljata samo 1. in 2. pogoj, potem trojica  $(A, B, C)$  tvori šibko dekompozicijo.
- Pravimo, da  $(A, B, C)$  dekompozira  $G$  v komponenti  $G_{AUC}$  in  $G_{BUC}$

# Pogojna neodvisnost

## Definicija

*Slučajni spremenljivki  $X$  in  $Y$  sta pogojno neodvisni pri dani spremenljivki  $Z$  če in samo če je pri dani vrednosti  $Z$  verjetnostna porazdelitev  $X$  enaka za vse vrednosti  $Y$  in verjetnostna porazdelitev  $Y$  je enaka za vse vrednosti  $X$ .*

*Pišemo  $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ .*

Za drisketne slučajne spremenljivke se ta pogoj prevede na:

$$P(X = x, Y = y \mid Z = z) = P(X = x \mid Z = z) \cdot P(Y = y \mid Z = z)$$

V primeru zveznih slučajnih spremenljivk:

$$X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z \iff f_{XY|Z}(x, y|z) = f_{X|Z}(x|z) \cdot f_{Y|Z}(y|z)$$

# Pogojna neodvisnost

Relacija  $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$  ima naslednje lastnosti:

(C1) če  $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$  potem  $Y \perp\!\!\!\perp X \mid Z$ ;

(C2) če  $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$  in  $U = h(X)$  potem  $U \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ ;

(C3) če  $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$  in  $U = h(X)$  potem  $X \perp\!\!\!\perp Y \mid (Z, U)$ ;

(C4) če  $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$  in  $X \perp\!\!\!\perp W \mid (Y, Z)$  potem  $X \perp\!\!\!\perp (W, Y) \mid Z$ .

V (C2) in (C3) je  $h$  neka merljiva funkcija na vzorčnem prostoru od  $X$ .



- Zanimivo je, če si predstavljamo relacije (C1) – (C4) kot izraze, ki niso nujno povezani z verjetnostjo, ampak z irelevanco oziroma nepomembnostjo.
- Pomeben primer modela irelevance je separacija grafov:

Označimo  $A \perp B \mid C \iff C$  separira  $A$  od  $B$  v  $G$

Potem ima separacija grafov naslednje lastnosti:

(C1) če  $A \perp B \mid C$  potem  $B \perp A \mid C$ ;

(C2) če  $A \perp B \mid C$  in  $U \subseteq A$  potem  $U \perp B \mid C$ ;

(C3) če  $A \perp B \mid C$  in  $U \subseteq B$  potem  $A \perp B \mid (C \cup U)$ ;

(C4) če  $A \perp B \mid C$  in  $A \perp D \mid (B \cup C)$  potem  $A \perp (B \cup D) \mid C$ .

# Markove lastnosti na neusmerjenih grafih

- Naj bo  $V$  množica vozlišč grafa  $G = (V, E)$
- Naj bodo  $(X_\alpha)_{\alpha \in V}$  slučajne spremenljivke, ki zavzemajo vrednosti v verjetnostnih prostorih  $(\mathcal{X}_\alpha)_{\alpha \in V}$ .
- Za  $A \subseteq V$  naj bo  $(\mathcal{X}_A) = \times_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha$  in  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_V$
- označimo  $X_A = (X_\alpha)_{\alpha \in A}$
- Uporabimo kratko notacijo  $A \perp\!\!\!\perp B \mid C$  za  $X_A \perp\!\!\!\perp X_B \mid X_C$

# Markove lastnosti na neusmerjenih grafih

Naj bo  $G = (V, E)$  neusmerjen graf in naj bodo  $(X_\alpha)_{\alpha \in V}$  slučajne spremenljive. Pravimo, da verjetnostna mera  $P$  na  $\mathcal{X}$  zadošča:

(P) *Paroma Markovi lastnosti* glede na  $G$ , če je za vsak par nesosednjih vozlišč  $(\alpha, \beta)$ :

$$\alpha \perp\!\!\!\perp \beta \mid V \setminus \{\alpha, \beta\}$$

(L) *Lokalni Markovi lastnosti* glede na  $G$ , če je za vsako vozlišče  $\alpha \in V$ :

$$\alpha \perp\!\!\!\perp V \setminus cl(\alpha) \mid bd(\alpha)$$

(G) *Globalni Markovi lastnosti* glede na  $G$ , če je za vsako trojico  $(A, B, S)$  disjunktnih podmnožic  $V$ , tako da  $S$  separira  $A$  od  $B$  v  $G$ :

$$A \perp\!\!\!\perp B \mid S$$

## Trditev

*Za vsak neusmerjen graf  $G$  in vsako verjetnostno porazdelitev na  $\mathcal{X}$  velja:*

$$(G) \implies (L) \implies (P)$$

Ob predpostavki, da za disjunktne podmnožice  $A, B, C$  in  $D$  velja

$$(1) \quad \text{če } A \perp\!\!\!\perp B \mid (C \cup D) \text{ in } A \perp\!\!\!\perp C \mid (B \cup D) \text{ potem } A \perp\!\!\!\perp (B \cup C) \mid D$$

imamo naslednji izrek:

## Izrek (Pearl in Paz)

*Če je verjetnostna porazdelitev na  $\mathcal{X}$  taka, da velja (1) za disjunktne podmnožice  $A, B, C, D$ , potem*

$$(G) \iff (L) \iff (P)$$

# Zgled (disketna porazdelitev)

Naj bodo  $(X, Y, Z)$  porazdeljene enako  $X = Y = Z$  s  
 $P\{X = 0\} = P\{X = 1\} = \frac{1}{2}$ . Ta porazdelitev potem ustreza paroma  
Markovi lastnosti  $(P)$ .



# Zgled (normalna porazdelitev)

Naj bo  $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)^T$ ,  $Y \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$  s kovariančna matriko

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{2}{n} & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{n}} & 1 \end{pmatrix}$$

Izkaže se, da je pogojna porazdelitev od  $(Y_1, Y_3)^T$  pri danem  $Y_2$  dvorazsežna normalna s kovariančno matriko

$$\Sigma_{13|2} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix} \left(\frac{n}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

in zato  $Y_1 \perp\!\!\!\perp Y_3 \mid Y_2$ , kar pomeni, da  $Y$  zadošča globalni Markovi lastnosti na grafu:

