Diplomski seminar

Modeliranje pogojne neodvisnosti s pomočjo grafov

Jošt Gojkovič

Fakulteta za matematiko in fiziko

12. december 2022

Grafično modeliranje

- Grafični model ali verjetnostni grafični model je verjetnostni model, kjer z grafi izrazimo pogojno odvisnost med slučajnimi spremenljivkami
- Povezave med vozlišči predstavljajo odvistnost
- Če je na primer povezava med vozliščem A in B, to pomeni da je A odvisen od B in B od A.

Notacija in terminologija

- $G(V, E)$ enostaven graf, torej nima večkratnih povezav in zank.

Večinoma bodo vozlišča označena, torej bodo razdeljena v 2 skupini.

- Množica vozlišč ima obliko

$$V = \Delta \cup \Gamma \qquad \text{z} \qquad \Delta \cap \Gamma = \emptyset$$

  Pravimo, da so vozlišča v Δ diskretna, v Γ pa zvezna.

- Grafom z označenimi vozlišči pravimo označeni grafi

Notacija in terminologija

- Poln graf je graf, v katerem so vse točke povezane vsaka z vsako.
- Če je $A \subseteq V$, A inducira podgraf $G_A = (A, E_A)$, kjer je $E_A = E \cap (A \times A)$ dobljena iz G tako da ohranimo povezave z začetnim in končnim vozliščem v A.
- Podmnožica je polna, če inducira poln podgraf.
- Polni podmnožici, ki je maksimalna, oziroma se je ne da povečati, pravimo klika.

Notacija in terminologija

- Če imamo povezavo $\alpha \longrightarrow \beta$, pravimo, da je α starš od β. Množica staršev vozlišča β je označena s $pa(\beta)$.
- Množico sosedov vozlišča α označimo z $ne(\alpha)$
- Oznaki $pa(A)$ in $ne(A)$ označujeta množico staršev in sosedov vozlišč v A, katera sama niso v A:

$$pa(A) = \cup_{\alpha \in A} pa(\alpha) \setminus A$$
$$ne(A) = \cup_{\alpha \in A} pa(\alpha) \setminus A$$

- *Meja* $bd(A)$ podmnožice vozlišč A je množica vozlišč v $V \setminus A$, ki so starši ali sosedi vozliščem v A. Torej $bd(A) = pa(A) \cup ne(A)$.
- *Zaprtje* množice A je $cl(A) = A \cup bd(A)$

Notacija in terminologija

- Množica $C \subseteq V$ je (α, β)-seperator, če vse poti od α do β sekajo množico C.
- $C \subseteq V$ separira A od B, če je (α, β)-seperator za vse $\alpha \in A$ in $\beta \in B$

Definicija

Trojica (A, B, C) disjunktnih podmnožic vozlišč neusmerjenega označenega garfa G tvori močno dekompozicijo grafa G, če je $V = A \cup B \cup C$ in velja naslednje:

1. *C separira A od B*
2. *C je polna podmnožica množice V*
3. *$C \subseteq \Delta$ ali $B \subseteq \Gamma$*

- Če pri enakih predpostavkah veljata samo 1. in 2. pogoj, potem trojica (A, B, C) tvori šibko dekompozicijo.
- Pravimo, da (A, B, C) dekompozira G v komponenti $G_{A \cup C}$ in $G_{B \cup C}$

Pogojna neodvisnost

Definicija

Slučajni spremenljivki X in Y sta pogojno neodvisni pri dani spremenljivki Z če in samo če je pri dani vrednosti Z verjetnostna porazdelitev X enaka za vse vrednosti Y in verjetnostna porazdelitev Y je enaka za vse vrednosti X. Pišemo $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$.

Za drisketne slučajne spremenljivke se ta pogoj prevede na:

$$P(X = x, Y = y \mid Z = z) = P(X = x \mid Z = z) \cdot P(Y = y \mid Z = z)$$

V primeru zveznih slučajnih spremenljivk:

$$X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z \iff f_{XY|Z}(x, y|z) = f_{X|Z}(x|z) \cdot f_{Y|Z}(y|z),$$

kjer je f gostota.

Pogojna neodvisnost

Relacija $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ ima naslednje lastnosti:

(C1) če $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ potem $Y \perp\!\!\!\perp X \mid Z$;

(C2) če $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ in $U = h(X)$ potem $U \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$;

(C3) če $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ in $U = h(X)$ potem $X \perp\!\!\!\perp Y \mid (Z, U)$;

(C4) če $X \perp\!\!\!\perp Y \mid Z$ in $X \perp\!\!\!\perp W \mid (Y, Z)$ potem $X \perp\!\!\!\perp (W, Y) \mid Z$.

V (C2) in (C3) je h neka merljiva funkcija na vzorčnem prostoru od X.

- Zanimivo je, če si predstavljamo relacije (C1) – (C4) kot izraze, ki niso nujno povezani z verjetnostjo, ampak z irelevanco oziroma nepomembnostjo.
- Pomemben primer modela irelevance je seperacija grafov:

Označimo $A \perp B \mid C \iff C$ separira A od B v G
Potem ima seperacija grafov naslednje lastnosti:

(C1) če $A \perp B \mid C$ potem $B \perp A \mid C$;

(C2) če $A \perp B \mid C$ in $U \subseteq A$ potem $U \perp B \mid C$;

(C3) če $A \perp B \mid C$ in $U \subseteq B$ potem $A \perp B \mid (C \cup U)$;

(C4) če $A \perp B \mid C$ in $A \perp D \mid (B \cup C)$ potem $A \perp (B \cup D) \mid C$.

Markove lastnosti na neusmerjenih grafih

- Naj bo V množica vozlišč grafa $G = (V, E)$
- Naj bodo $(X_\alpha)_{\alpha \in V}$ slučajne spremenljivke, ki zavzemajo vrednosti v verjetnostnih prostorih $(\mathcal{X}_\alpha)_{\alpha \in V}$.
- Za $A \subseteq V$ naj bo $(\mathcal{X}_A) = \times_{\alpha \in A} \mathcal{X}_\alpha$ in $\mathcal{X} = \mathcal{X}_V$
- označimo $X_A = (X_\alpha)_{\alpha \in A}$
- Uporabimo kratko notacijo $A \perp\!\!\!\perp B \mid C$ za $X_A \perp\!\!\!\perp X_B \mid X_C$

Markove lastnosti na neusmerjenih grafih

Naj bo $G = (V, E)$ neusmerjen graf in naj bodo $(X_\alpha)_{\alpha \in V}$ slučajne spremenljive. Pravimo, da verjetnostna mera P na $\mathcal{X}$ zadošča:

(P) *Paroma Markovi lastnosti* glede na G, če je za vsak par nesosednjih vozlišč (α, β):

$$\alpha \perp\!\!\!\perp \beta \mid V \setminus \{\alpha, \beta\}$$

(L) *Lokalni Markovi lastnosti* glede na G, če je za vsako vozlišče $\alpha \in V$:

$$\alpha \perp\!\!\!\perp V \setminus cl(\alpha) \mid bd(\alpha)$$

(G) *Globalni Markovi lastnosti* glede na G, če je za vsako trojico (A, B, S) disjunktnih podmnožic V, tako da S separira A od B v G:

$$A \perp\!\!\!\perp B \mid S$$

Trditev

Za vsak neusmerjen graf G in vsako verjetnostno porazdelitev na $\mathcal{X}$ velja:

$$(G) \implies (L) \implies (P)$$

Ob predpostavki, da za disjunktne podmnožice A, B, C in D velja

$$(1) \quad \text{če } A \perp\!\!\!\perp B \mid (C \cup D) \text{ in } A \perp\!\!\!\perp C \mid (B \cup D) \text{ potem } A \perp\!\!\!\perp (B \cup C) \mid D$$

imamo naslednji izrek:

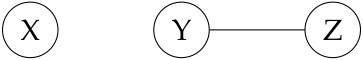
Izrek (Pearl in Paz)

Če je verjetnostna porazdelitev na $\mathcal{X}$ taka, da velja (1) *za disjunktne podmnožice A, B, C, D, potem*

$$(G) \iff (L) \iff (P)$$

Zgled (disketna porazdelitev)

Naj bodo (X, Y, Z) porazdeljene enako $X = Y = Z$ s $P\{X = 0\} = P\{X = 1\} = \frac{1}{2}$. Ta porazdelitev potem ustreza paroma Markovi lastnosti (P).



Zgled (normalna porazdelitev)

Naj bo $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)^T$, $Y \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ s kovariančna matriko

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{2}{n} & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{n}} & 1 \end{pmatrix}$$

Izkaže se, da je pogojna porazdelitev od $(Y_1, Y_3)^T$ pri danem Y_2 dvorazsežna normalna s kovariančno matriko

$$\Sigma_{13|2} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix} (\frac{n}{2}) \cdot (\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

in zato $Y_1 \perp\!\!\!\perp Y_3 \mid Y_2$, kar pomeni, da Y zadošča globalni Markovi lastnosti na grafu:

Načrt za nadaljnje delo

- faktorizacija verjetnostne mere P pri neusmerjenih grafih
- Markove lastnostni na usmerjenih acikličnih grafih
- Markove lastnosti na verižnih grafih