MOM projekt 3

Jakub Ostrzołek

Model matematyczny zadania

Ustalenia i założenia

1. Zakładam, że zapotrzebowania klientów są możliwe do spełnienia. Gdyby nie były, należałoby najpierw rozwiązać problem maksymalnego przepływu. Alternatywnie, być może nawet lepszym wyjściem z problemu byłoby dodatkowo liczyć zyski ze sprzedaży i zamiast minimalizować koszty dostawy to maksymalizować miesięczny profit z działania przedsiębiorstwa.

2. Satysfakcję obliczam dla każdego klienta osobno, obliczając część udziału dostaw pochodzących od preferowanych dostawców w stosunku do zapotrzebowania klienta. Dzięki temu satysfakcja każdego z klientów jest wyrażana liczbą rzeczywistą z zakresu $[0, 1]$. Dla klienta 5, który nie ma preferowanego dostawcy, satysfakcja wynosi 0.

   Takie podejście ma tę cechę, że traktuje równo każdego z klientów, niezależnie od ich zapotrzebowania. Ma to pewien sens, ale niekoniecznie musi być odpowiednie we wszystkich warunkach, np. satysfakcja klienta, który składa 100 razy większe zamówienia może być bardziej cenna dla przedsiębiorstwa niż satysfakcja klienta o mniejszych zapotrzebowaniach na produkowany towar. Niemniej jednak w tym konkretnym zadaniu zapotrzebowania klientów mają ten sam rząd wielkości, więc uznałem, że takie rozwiązanie będzie odpowiednie.

3. Do znajdywania rozwiązań efektywnych zadania posłużę się metodą punktu odniesienia. Zgodnie z jej „inżynierską” implementacją, użyję parametru ϵ jako wagi drugiego z elementów maksymalizowanego leksykograficznie wektora (sumy).

4. W rozwiązaniu rozważana jest tylko sytuacja na jeden miesiąc, więc w domyśle wszystkie wartości są w przeliczeniu na miesiąc, np. możliwości produkcyjne fabryki na miesiąc, zapotrzebowanie klienta na miesiąc, itp.

5. Zmienne pomocnicze z prostymi ograniczeniami równościowymi będą zapisywane bezpośrednio w sekcji *Zmienne*.

Zbiory

- $P = \{F1, F2\}$ – fabryki
- $M = \{M1, M2, M3, M4\}$ – magazyny
- $K = \{K1, K2, K3, K4, K5, K6\}$ – klienci
- $E = \{(F1, M1), (F1, M2), (F2, M2), ...\}$ – połączenia między fabrykami/magazynami a magazynami/klientami
- $U = \{(F2, K1), (M1, K2), (M2, K3), ...\}$ – preferencje klientów (drugi element krotki oznacza klienta, a pierwszy preferowanego przez niego dostawcę)
- $T = \{C, S\}$ – cele optymalizacji (odpowiednio koszty i satysfakcja klientów)

Parametry

- $g_p \quad p \in P$ – możliwości produkcyjne fabryki p [tona]
- $b_m \quad m \in M$ – maksymalna ilość obsługiwanego towaru magazynu m [tona]
- $h_k \quad k \in K$ – zapotrzebowanie klienta k [tona]
- $c_{ij} \quad (i, j) \in E$ – koszt jednostkowy dystrybucji towaru z węzła i do j [zł/tona]
- ϵ – waga drugiego elementu w „inżynierskiej" implementacji maksymalizacji leksykograficznej [brak jednostki]
- β – waga dla wartości przekraczających aspiracje w metodzie punktu odniesienia [brak jednostki]
- $a_t \quad t \in T$ – wartość aspiracji celu t w metodzie punktu odniesienia [brak jednostki]
- $\lambda_t \quad t \in T$ – waga celu t w metodzie punktu odniesienia [brak jednostki]

Zmienne

- $f_{ij} \quad (i, j) \in E$ – przepływ towaru z węzła i do j [tona]
- $s_k \quad k \in K$ – satysfakcja klienta K [brak jednostki]
- $c^{total} = \sum\limits_{(i,j) \in E} f_{ij} \cdot c_{ij}$ – całkowity koszt dystrybucji [zł]
- $s^{total} = \sum\limits_{k \in K} s_k$ – całkowita satysfakcja klientów [brak jednostki]
- $v_t \quad t \in T$ – wartość do maksymalizacji dla celu t w metodzie punktu odniesienia [brak jednostki]
- v^{min} – minimalna z wartości do maksymalizacji w metodzie punktu odniesienia [brak jednostki]

Ograniczenia

- $f_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in E$ – przepływ nieujemny
- $0 \leq s_k \leq 1 \quad \forall k \in K$ – satysfakcja w przedziale $[0, 1]$
- $\sum\limits_{(p,j) \in E} f_{pj} \leq g_p \quad \forall p \in P$ – ilość towaru wychodzącego z fabryki p nie może przekroczyć jej maksymalnej produkcji

- $\sum_{(m,j)\in E} f_{mj} \leq b_m \quad \forall m \in M$ – ilość towaru przepływającego przez magazyn m nie może przekroczyć jego maksymalnej ilości obsługiwanego towaru
- $\sum_{(i,k)\in E} f_{ik} \geq h_k \quad \forall k \in K$ – ilość towaru dostarczanego do klienta k musi pokryć jego zapotrzebowanie
- $\sum_{(i,m)\in E} f_{im} = \sum_{(m,j)\in E} f_{mj} \quad \forall m \in M$ – towar wpływający do magazynu musi go w całości opuścić do końca miesiąca
- $\sum_{(i,k)\in U} \frac{f_{ik}}{h_k} \geq s_k \quad \forall k \in K$ – obliczanie satysfakcji dla klienta k zgodnie z założeniem 2
- ograniczenia z metody punktu odniesienia:
  - $v_C \leq -\lambda_C(c^{total} - a_C)$ – obliczanie v_C dla kosztów powyżej aspiracji (znak minus, ponieważ minimalizujemy ryzyko)
  - $v_C \leq -\beta\lambda_C(c^{total} - a_C)$ – obliczanie v_C dla kosztów poniżej aspiracji (znak minus, ponieważ minimalizujemy ryzyko)
  - $v_S \leq \lambda_S(s^{total} - a_S)$ – obliczanie v_S dla satysfakcji poniżej aspiracji
  - $v_S \leq \beta\lambda_S(s^{total} - a_S)$ – obliczanie v_S dla satysfakcji powyżej aspiracji
  - $v^{min} \leq v_t \quad \forall t \in T$ – minimalna z wartości do maksymalizacji nie większa od każdej z tych wartości

Funkcja celu

$$lexmax\ (f^{min}, \epsilon \sum_{t\in T} f_t)$$

Funkcja celu dla metody punktu odniesienia: maksymalizacja w pierwszej kolejności minimum z wartości, a w drugiej kolejności sumy wszystkich wartości v_t.

Funkcja *lexmax* jest realizowana metodą „inżynierską" w następujący sposób:

$$\max\ f^{min} + \epsilon \sum_{t\in T} f_t$$

Wyniki optymalizacji

Powyższy model został zaimplementowany w języku AMPL i uruchomiony przy użyciu solwera CPLEX. Implementacja znajduje się w plikach: `src/proj3.{dat,mod,run}`.

Rozwiązanie efektywne minimalnego kosztu

Zostało wyznaczone dla parametrów:

- $\epsilon = 0.000001$ – wyznaczony eksperymentalnie tak, by drugi element maksymalizowanego leksykograficznie wektora nie zakłócał działania pierwszego

- $\beta = 0.1$ – w tym zastosowaniu nie ma dużo znaczenia, bo i tak zawsze wartości aspiracji są nieosiągalne
- $\lambda_S = 10000$, $\lambda_Z = 1$ – tak ustawione wagi mniej więcej zrównują rzędami wielkości koszty i satysfakcję; bez tego metoda miałaby tendencję do poprawiania tylko jednego z kryteriów, a nawet mogłaby nie działać zgodnie z oczekiwaniami
- $a_C = 0, a_S = 0$ – wartość a_S jest osiągnięta dla każdego dopuszczalnego rozwiązania, więc metoda będzie tylko minimalizowała koszty

Wartości zmiennych:

- $f_{ij} \quad (i,j) \in E$ – przepływ towaru z węzła i do j [tona]

$j \backslash i$	F1	F2	M1	M2	M3	M4
M1	60000	-				
M2	0	50000				
M3	0	20000				
M4	0	0				
K1	0	50000	-	0	-	-
K2	-	-	0	10000	0	-
K3	0	-	40000	0	0	0
K4	35000	-	0	0	-	0
K5	-	-	-	40000	20000	0
K6	0	-	20000	-	0	0

- $s_k \quad k \in K$ – satysfakcja klienta K [brak jednostki]

$. \backslash k$	$K1$	$K2$	$K3$	$K4$	$K5$	$K6$
s_k	1	0	0	1	0	0

Wartości w przestrzeni kryteriów:

- $c^{total} = 181000$ – całkowity koszt dystrybucji [zł]
- $s^{total} = 2$ – całkowita satysfakcja klientów [brak jednostki]

Rozwiązanie efektywne maksymalnej satysfakcji

Zostało wyznaczone dla parametrów:

- $\epsilon = 0.000001$ – wyznaczony eksperymentalnie tak, by drugi element maksymalizowanego leksykograficznie wektora nie zakłócał działania pierwszego
- $\beta = 0.1$ – w tym zastosowaniu nie ma dużo znaczenia, bo i tak zawsze wartości aspiracji są nieosiągalne

- $\lambda_S = 10000$, $\lambda_Z = 1$ – tak ustawione wagi mniej więcej zrównują rzędami wielkości koszty i satysfakcję; bez tego metoda miałaby tendencję do poprawiania tylko jednego z kryteriów, a nawet mogłaby nie działać zgodnie z oczekiwaniami
- $a_C = 1000000, a_S = 5$ – tym razem wartość a_C jest osiągnięta dla każdego dopuszczalnego rozwiązania, więc metoda będzie tylko maksymalizowała satysfakcję

Wartości zmiennych:

- $f_{ij} \quad (i,j) \in E$ – przepływ towaru z węzła i do j [tona]

$j \backslash i$	F1	F2	M1	M2	M3	M4
M1	10000	-				
M2	0	50000				
M3	0	70000				
M4	0	0				
K1	0	50000	-	0	-	-
K2	-	-	10000	0	0	-
K3	0	-	0	40000	0	0
K4	35000	-	0	0	-	0
K5	-	-	-	10000	50000	0
K6	0	-	0	-	20000	0

- $s_k \quad k \in K$ – satysfakcja klienta K [brak jednostki]

$. \backslash k$	$K1$	$K2$	$K3$	$K4$	$K5$	$K6$
s_k	1	1	1	1	0	1

Wartości w przestrzeni kryteriów:

- $c^{total} = 225000$ – całkowity koszt dystrybucji [zł]
- $s^{total} = 5$ – całkowita satysfakcja klientów [brak jednostki]

Zbiór rozwiązań efektywnych W celu wyznaczenia zbioru rozwiązań efektywnych w przestrzeni ryzyko-zysk, uruchomiłem model dla 50 różnych par wartości aspiracji (a_C, a_S). Wartości aspiracji zostały spróbkowane równomiernie z przedziałów odpowiednio:

- $a_C \in [181000, 225000]$
- $a_S \in [2, 5]$

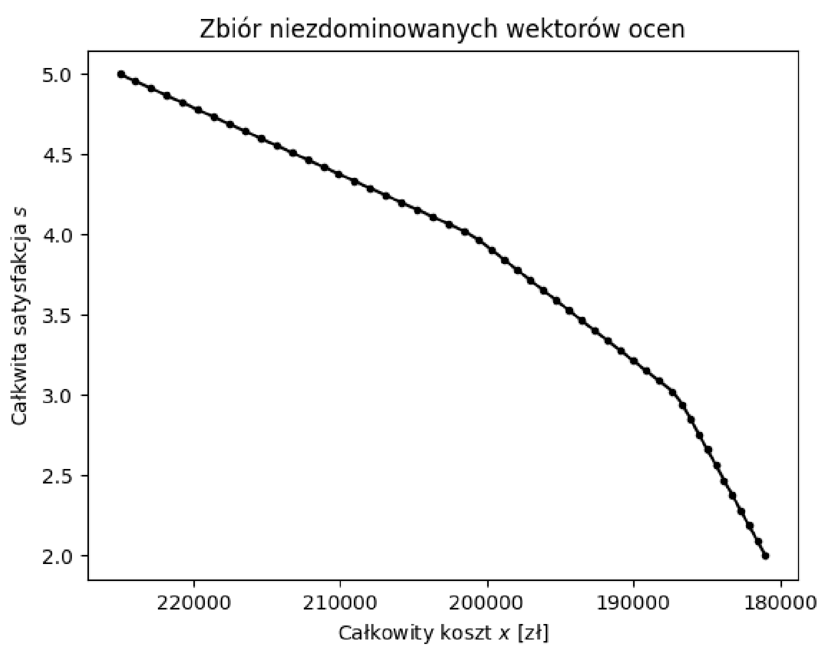
, których krańce zostały wybrane z wyników poprzednich dwóch zadań, dzięki czemu otrzymane rezultaty w przybliżeniu powinny pokryć cały obszar niezdominowanych wektorów ocen.

Reszta parametrów $(\epsilon, \beta, \lambda_S)$ była taka jak w poprzednich zadaniach.

Fragment wyników eksperymentu w przestrzeni kryteriów:

a_C	a_S	c^{total}	s^{total}	a_C	a_S	c^{total}	s^{total}
181000	2.00	181000	2.00	216020	4.39	214340	4.56
181898	2.06	181566	2.09	216918	4.45	215406	4.60
182796	2.12	182133	2.19	217816	4.51	216472	4.64
183694	2.18	182699	2.28	218714	4.57	217538	4.69
184592	2.24	183265	2.38	219612	4.63	218604	4.73
185490	2.31	183832	2.47	220510	4.69	219670	4.78
186388	2.37	184398	2.57	221408	4.76	220736	4.82
187286	2.43	184964	2.66	222306	4.82	221802	4.87
188184	2.49	185531	2.76	223204	4.88	222868	4.91
189082	2.55	186097	2.85	224102	4.94	223934	4.96
...	...	...	...	225000	5.00	225000	5.00

Następnie otrzymane wyniki naniosłem na wykres. Na wykresie odwróciłem oś OX, żeby kierunek optymalizacji był skierowany intuicyjnie, w stronę pierwszej ćwiartki układu współrzędnych (koszt jest minimalizowany).



Rysunek 1: Zbiór rozwiązań efektywnych zadania w przestrzeni koszt-satysfakcja

Widać, że żadne z wyliczonych rozwiązań nie dominuje żadnego innego, co sugeruje, że zadanie się udało.

Symulacja podejmowania decyzji W tym prostym zadaniu najlepiej byłoby podjąć decyzję patrząc bezpośrednio na wykres zbioru wektorów ocen niezdominowanych. Niestety w realnych problemach zazwyczaj sporządzenie takiego wykresu byłoby niemożliwe ze względu na zbyt dużą wymiarowość. Nawet wykresy 3D sprawiają człowiekowi trudności w prawidłowej interpretacji przez to, że widać na raz tylko jeden rzut przestrzeni, a podejmowanie decyzji na podstawie 4D jest już nierealistyczne.

Dzięki zastosowanej metodzie punktu odniesienia decydent może manipulować wektorem aspiracji w poszukiwaniu najbardziej odpowiedniego rozwiązania, a zwracane rozwiazania mają gwarancję bycia efektywnymi.

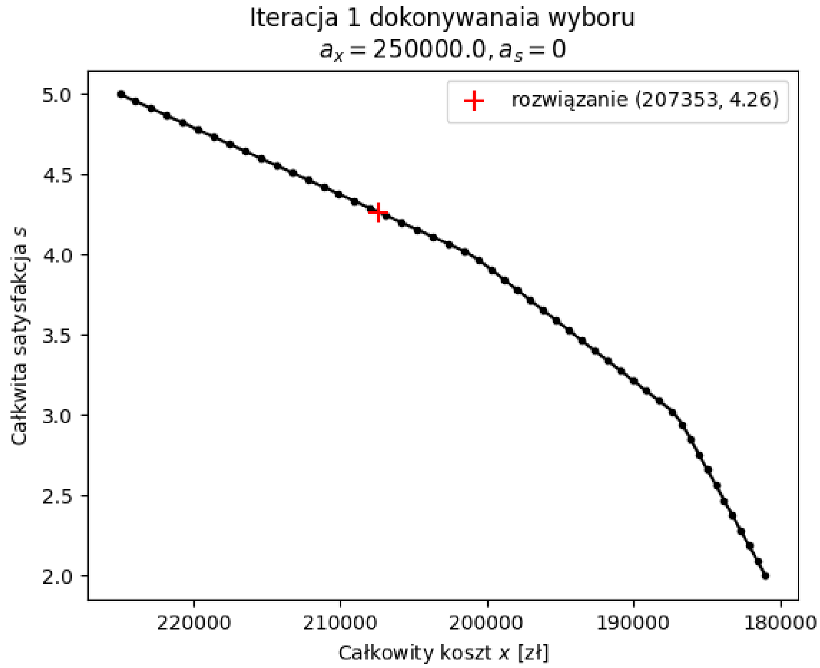
W poniższym przykładzie oprócz wartości ocen zwracanych przez model, będę pokazywał także wykresy wraz z rozwiązaniami efektywnymi w przestrzeni koszt-satysfakcja dla lepszego zrozumienia problemu, jednak należy być przy tym świadomym powyższych uwag.

Parametry $\epsilon, \beta, \lambda_S$ były ustawione tak jak w poprzednich zadaniach.

Kroki symulacji podejmowania decyzji:

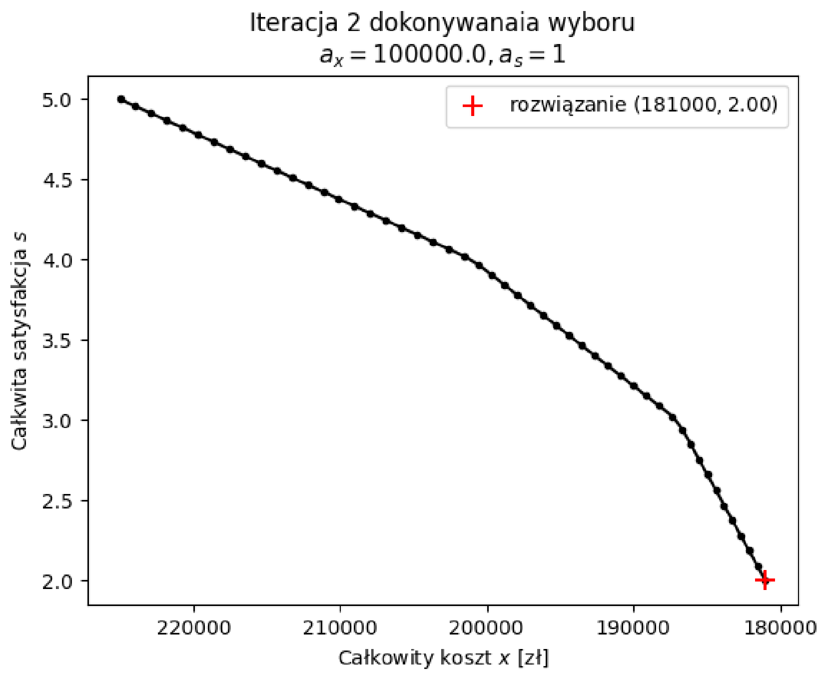
1. Na podstawie wstępnych obliczeń decydent wie, że wydanie więcej niż 250000 zł będzie nierentowne. Na początek nie ma oczekiwań co do satysfakcji klientów, jest to w tym momencie mniej istotna sprawa.

    - aspiracje: $a_C = 250$ tyś. zł, $a_S = 0$
    - wynik: $c^{total} = 207$ tyś zł, $s^{total} = 4.26$



Rysunek 2: Iteracja 1 dokonywania decyzji

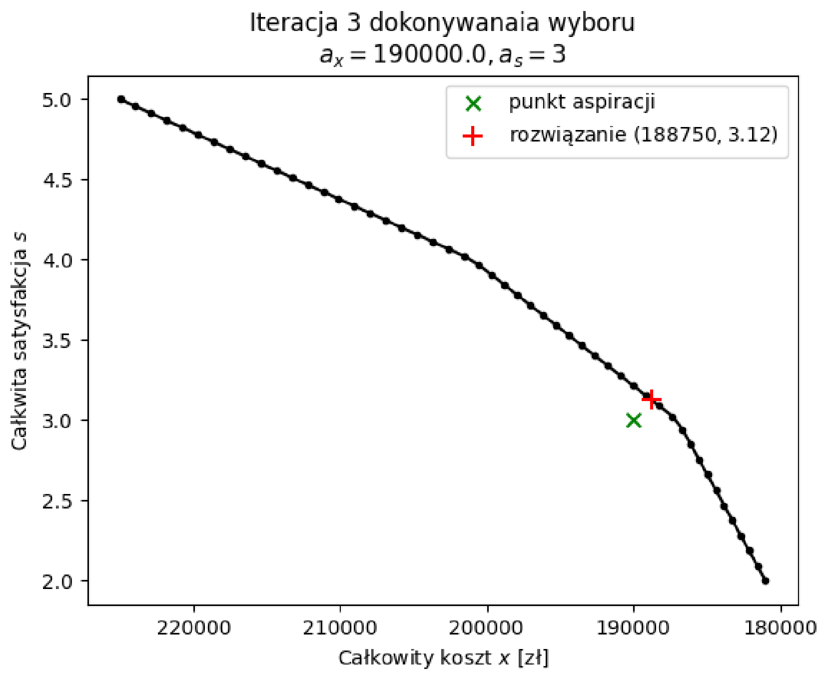
2. Okazało się, że biznes ma szanse być rentowny, co zadowoliło decydenta. Jednak ponieważ decydenta interesuje zarabianie dużych pieniędzy, to chce zobaczyć jak bardzo jest w stanie obciąć koszy, zatem drastycznie obniża aspirację kosztów.
   - aspiracje: $a_C = 100$ tyś zł, $a_S = 0.00$
   - wynik: $c^{total} = 181$ tyś zł, $s^{total} = 2.00$



Rysunek 3: Iteracja 2 dokonywania decyzji

3. Decydent omal nie zemdlał z zachwytu. Tak niskie koszta będą oznaczały gigantyczne zyski dla jego firmy. Mimo wszystko pomyślał, że może rozwiązanie pośrednie będzie lepszym wyjściem, gdzie oddając trochę zysków zyska trochę zadowolenia klientów. Wybiera aspiracje pomiędzy dwoma powyższymi rozwiązaniami.

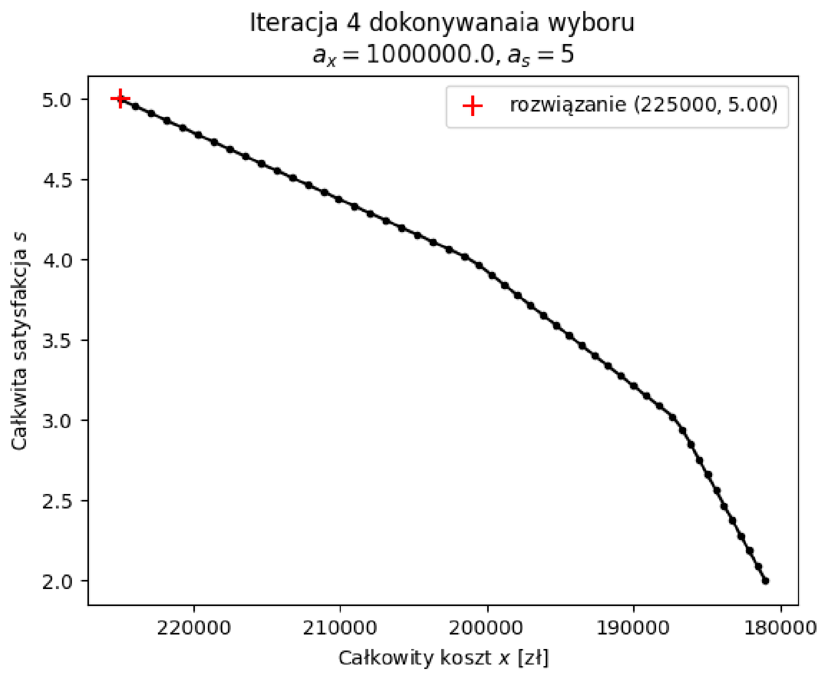
   - aspiracje: $a_C = 190$ tyś zł, $a_S = 3.00$
   - wynik: $c^{total} = 189$ tyś zł, $s^{total} = 3.12$



Rysunek 4: Iteracja 3 dokonywania decyzji

4. Decydent jest pod wrażeniem swoich umiejętności decyzyjnych z uwagi na to, że trafił tak blisko rozwiązania efektywnego. Jednak gdy ma już kończyć swoją krótką sesję podejmowania decyzji, nachodzi go jego doświadczony w prowadzeniu firmy ojciec, który mówi że jego wybór jest krótkowzroczny. Prawdziwy, długofalowy sukces osiągnie jedynie dbając o zadowolenie swoich klientów. Decydent po chwili namysłu niechętnie przyjmuje do wiadomości radę ojca i sprawdza ile by go kosztowało maksymalne zwiększenie satysfakcji klientów, ustawiając aspirację kosztów na bardzo dużą liczbę, a aspirację satysfakcji na maksymalną wartość.

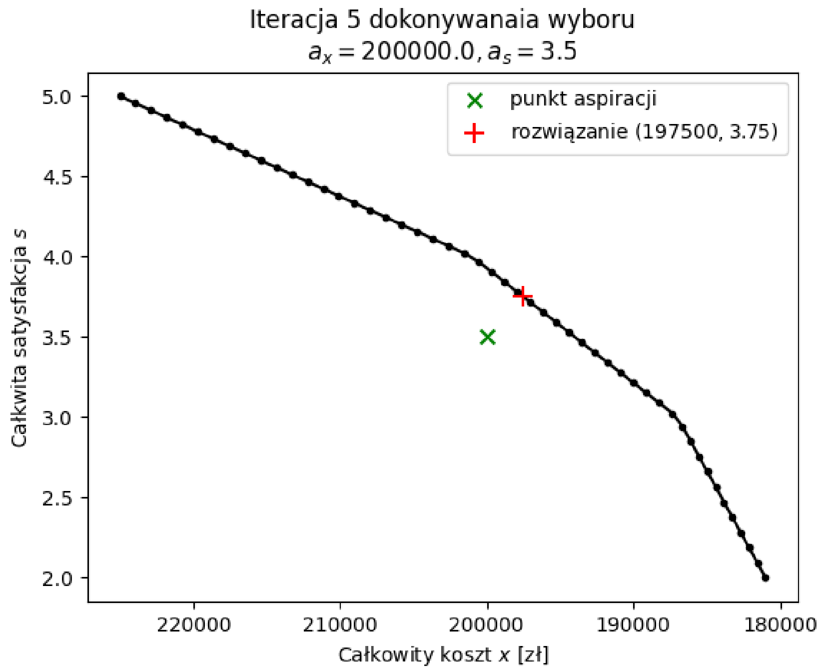
   - aspiracje: $a_C = 1000$ tyś zł, $a_S = 5.00$
   - wynik: $c^{total} = 225$ tyś zł, $s^{total} = 5.00$



Rysunek 5: Iteracja 4 dokonywania decyzji

5. Ojciec chwali mądrość swojego syna i wychodzi z pokoju, by zająć się oglądaniem telewizji. Po jego wyjściu syn nie mogąc znieść wizji miernych zysków ze swojej inwestycji postanawia w samotności, że najlepszy będzie kompromis. Ustawia aspirację na wartości pomiędzy tymi z drugiej i czwartej iteracji.

   - aspiracje: $a_C = 200$ tyś zł, $a_S = 3.50$
   - wynik: $c^{total} = 198$ tyś zł, $s^{total} = 3.75$



Rysunek 6: Iteracja 5 dokonywania decyzji

6. Decydent jest w miarę usatysfakcjonowany rozwiązaniem. Postanawia jednak nie dzielić się swoją ostateczną decyzją z ojcem.