

# MOM projekt 2

Jakub Ostrzołek

## Model matematyczny rozwiązania

Rozwiązanie zadania podzieliłem tematycznie na kilka części, z której każda została opisana w osobnym rozdziale.

Wartość  $M$  użyta w sprawozdaniu oznacza dowolną dostatecznie dużą stałą, która nie ogranicza w danym kontekście rozwiązania (tzn. ustalenie większej wartości  $M$  nie zmieniałoby rozwiązania).

Zmienne pomocnicze z prostymi ograniczeniami równościowymi będą zapisywane bezpośrednio w sekcji *Zmienne*.

W rozwiązaniu rozważana jest tylko sytuacja na jeden dzień, więc w domyśle wszystkie wartości są w przeliczeniu na dzień, np. ilość produkowanego półproduktu na dzień, ilość kupowanego materiału na dzień, itp.

## Zbiory

- $S = \{S1, S2\}$  – dostępne materiały
- $D = \{D1, D2\}$  – półprodukty wytwarzane w przygotowalni
- $W = \{W1, W2\}$  – produkty końcowe tworzone w rozważanym procesie
- $R = \{1, 2, 3\}$  – zakresy funkcji ceny kosztu jednostkowego materiału, w obrębie których funkcja jest liniowa

## Funkcja celu

$$\max\{z - c^m - c^d - c^p - c^c\}$$

Zmienne:

- $z$  - łączne zyski ze sprzedaży [zł]
- $c^m$  - łączny koszt zakupu materiałów [zł]
- $c^d$  - łączny koszt dowozu materiałów [zł]
- $c^p$  - łączny koszt przetwarzania w przygotowalni [zł]
- $c^c$  - łączny koszt pracy zakładu obróbki cieplnej materiałów [zł]

Funkcja celu maksymalizuje łączną rentowność procesu przetwarzania, czyli maksymalizuje zyski, minimalizując straty.

Poszczególne koszty zostaną obliczone w kolejnych rozdziałach. Warto zauważyć, że maksymalizując taką funkcję celu, w szczególności koszty zakupu materiału są minimalizowane. Będzie to przydatne już w kolejnym rozdziale.

## Zakup materiałów

Funkcje kosztu jednostkowego materiałów  $S1$  i  $S2$  są to odcinkami liniowe funkcje o dziedzinie w zbiorze nieujemnych liczb rzeczywistych. Ponadto, funkcja ta dla  $S1$  jest wklęsła, a dla  $S2$  wypukła. A zatem, mając na uwadze fakt z poprzedniego rozdziału, że cena materiałów jest minimalizowana, możliwe jest obliczenie całkowitego kosztu dla  $S2$  bez użycia zmiennych całkowitoliczbowych. Dla  $S1$  natomiast zajdzie konieczność użycia zmiennych całkowitoliczbowych.

Parametry:

- $x_s^{max} \forall s \in S$  – maksymalna ilość kupionego materiału  $s$  [tona]
- $c_{sr}^m \forall s \in S, \forall r \in R$  – cena materiału  $s$  w przedziale cenowym  $r$  [zł/tona]
- $r_{sr}^b \forall s \in S, \forall r \in R$  – prawa granica przedziału cenowego  $r$  dla ceny materiału  $s$  [tona]; jeśli ostatni przedział ma być nieograniczony (tak jak w treści zadania), to dla  $r = 3$  zmienna wynosi  $M$
- $r_{sr}^w \forall s \in S, \forall r \in R$  – szerokość przedziału cenowego  $r$  dla ceny materiału  $s$  [tona]; parametr wyliczony w następujący sposób:
  - $r_{s1}^w = r_{s1}^b$
  - $r_{sr}^w = r_{sr}^b - r_{s(r-1)}^b$  dla  $r > 1$

Zmienne:

- $x_{sr} \forall s \in S, \forall r \in R$  – ilość kupionego materiału  $s$  w przedziale cenowym  $r$  [tona]
- $x_s = \sum_{r \in R} x_{sr}$  – całkowita ilość kupionego materiału  $s$  [tona]
- $v_r \in \{0, 1\} \forall r \in \{1, 2\}$  – czy ilość kupionego materiału  $S1$  przekracza prawą granicę przedziału cenowego  $r$  (zmienna binarna)
- $c^m = \sum_{s \in S} \sum_{r \in R} x_{sr} c_{sr}^m$  – łączny koszt zakupu materiałów [zł]

Ograniczenia:

- $x_s \leq x_s^{max} \forall s \in S$  – ilość kupionego materiału  $s$  nie przekracza maksymalnej możliwej ilości do kupienia
- ograniczenia ustawiające ilość kupionego materiału  $S2$  w danym przedziale
  - $x_{(S2)r} \geq 0 \forall r \in R$  – ilość kupionego materiału  $S2$  w każdym z przedziałów cenowych  $r$  jest nieujemna
  - $x_{(S2)r} \leq r_{(S2)r}^w \forall r \in R$  – ilość kupionego materiału  $S2$  w każdym z przedziałów cenowych  $r$  nie przekracza szerokości przedziału
- ograniczenia ustawiające ilość kupionego materiału  $S1$  w danym przedziale
  - $v_1 r_{(S1)1}^w \leq x_{(S1)1} \leq r_{(S1)1}^w$  – ilość kupionego materiału  $S1$  w przedziale cenowym 1 jest nie większa niż jego szerokość, a ponadto jest maksymalna, gdy przedział cenowy 1 jest całkowicie wykorzystany
  - $v_2 r_{(S1)2}^w \leq x_{(S1)2} \leq v_1 r_{(S1)2}^w$  – ilość kupionego materiału  $S1$  w przedziale cenowym 2 jest nie większa niż jego szerokość, a ponadto jest

- maksymalna, gdy przedział cenowy 2 jest całkowicie wykorzystany;  
gdy  $x_{(S1)2} > 0$ , to przedział cenowy 1 jest całkowicie wykorzystany
- $0 \leq x_{(S1)3} \leq v_2 M$  – ilość kupionego materiału  $S1$  w przedziale cenowym 3 jest nieujemna; gdy  $x_{(S1)3} > 0$ , to przedział cenowy 2 jest całkowicie wykorzystany

## Dowóz materiałów

W rozwiązaniu założyłem, że całość kupionego materiału jest gdzieś dowożona – w przeciwnym wypadku nie opłacałoby się kupować takiej ilości materiału, więc takie rozwiązanie nie mogłoby być optymalne.

Parametry:

- $l_s^c \forall s \in S$  – ładowność ciężarówki przewożącej materiał  $s$  [tona]
- $l_{S1}^n$  – ładowność naczepy przewożącej materiał  $S1$  [tona]
- $c_s^{dc} \forall s \in S$  – koszt wysyłu pojedynczej ciężarówki przewożącej materiał  $s$  [zł]
- $c_{S1}^{dn}$  – koszt wysyłu pojedynczej naczepy przewożącej materiał  $S1$  [zł]

Zmienne:

- $d_{S1}^p = x_{S1}$  – ilość przewożonego materiału  $S1$  do przygotowalni [tona]
- $d_{S2}^p$  – ilość przewożonego materiału  $S2$  do przygotowalni [tona]
- $d_{S2}^c = x_{S2} - d_{S2}^p$  – ilość przewożonego materiału  $S2$  do obróbki cieplnej [tona]
- $n_{S1}^{cp} \in \{0, 1, \dots, 337\}$  – liczba ciężarówek do przewozu materiału  $S1$  do przygotowalni [brak jednostki]
- $n_{S1}^{np} \in \{0, 1, \dots, 337\}$  – liczba naczep do przewozu materiału  $S1$  do przygotowalni [brak jednostki]
- $n_{S2}^{cp} \in \{0, 1, \dots\}$  – liczba ciężarówek do przewozu materiału  $S2$  do przygotowalni [brak jednostki]
- $n_{S2}^{cc} \in \{0, 1, \dots\}$  – liczba ciężarówek do przewozu materiału  $S2$  do obróbki cieplnej [brak jednostki]
- $c^d = n_{S1}^{cp} c_{S1}^{dc} + n_{S1}^{np} c_{S1}^{dn} + (n_{S2}^{cp} + n_{S2}^{cc}) c_{S2}^{dc}$  – całkowity koszt dowozu [zł]

Ograniczenia:

- $n_{S1}^{cp} \geq n_{S1}^{np}$  – liczba naczep nie większa niż liczba ciężarówek przewożących towar  $S1$  (bo do każdej ciężarówki można doczepić maksymalnie 1 naczepę)
- $d_{S1}^p \leq n_{S1}^{cp} l_{S1}^c + n_{S1}^{np} l_{S1}^n$  – całość materiału  $S1$  przewożonego do przygotowalni mieści się do ciężarówek i naczep z materiałem  $S1$  jadących do przygotowalni
- $0 \leq d_{S2}^p \leq x_{S2}$  – ilość przewożonego materiału  $S2$  do przygotowalni jest w zakresie od 0 do ilości kupionego materiału  $S2$
- $d_{S2}^p \leq n_{S2}^{cp} l_{S2}^c$  – całość materiału  $S2$  przewożonego do przygotowalni mieści się do ciężarówek z materiałem  $S2$  jadących do przygotowalni
- $d_{S2}^c \leq n_{S2}^{cc} l_{S2}^c$  – całość materiału  $S2$  przewożonego do obróbki cieplnej mieści się do ciężarówek z materiałem  $S2$  jadących do zakładu obróbki

cieplnej

## Przetwarzanie w przygotowalni

W rozwiązaniu założyłem, że całość dowiezionego do przygotowalni materiału jest przerabiana – w przeciwnym wypadku nie opłacałoby się dowozić takiej ilości materiału, więc takie rozwiązanie nie mogłoby być optymalne.

Parametry:

- $h_{sd} \forall s \in S, \forall d \in D$  – ilość produkowanego półproduktu  $d$  z jednostki materiału  $s$  [tona/tona]
- $p^{max}$  – maksymalna całkowita ilość produkowanych półproduktów w przygotowalni [tona]
- $g^n = 2$  – liczba pracowników w grupie pracowników [brak jednostki]
- $g^p = 200$  – maksymalna ilość przetworzonego materiału w przygotowalni przez jedną grupę pracowników [tona]
- $c^w$  – koszt zatrudnienia jednego pracownika [zł]

Zmienne:

- $p_d \forall d \in D$  – ilość produkowanego półproduktu  $d$  w przygotowalni [tona]
- $p = \sum_{d \in D} p_d$  – całkowita ilość produkowanych półproduktów w przygotowalni [tona]
- $n^g$  – liczba zatrudnionych grup pracowników w przygotowalni [brak jednostki]
- $c^p = n^g g^n c^w$  – całkowity koszt pracy przygotowalni [zł], czyli łączny koszt zatrudnienia pracowników

Ograniczenia:

- $p_d = \sum_{s \in S} d_s^p h_{sd} \forall d \in D$  – ilość produkowanego półproduktu  $d$  ze wszystkich dowiezionych do przygotowalni materiałów  $s$
- $p \leq p^{max}$  – całkowita ilość produkowanych półproduktów w przygotowalni nie przekracza limitu
- $p \leq n^g g^p$  – całkowita ilość produkowanych półproduktów w przygotowalni jest ograniczona przez liczbę grup pracowników i maksymalną przepustowość każdej z nich

Rozwiązanie operuje na liczbie grup zatrudnionych pracowników, a nie na samej liczbie zatrudnionych pracowników. Natomiast liczba zatrudnionych pracowników wynosi wtedy:  $n^g \cdot g^n$ .

## Obróbka cieplna

W rozwiązaniu założyłem, że całość dowiezionego do zakładu obróbki cieplnej materiału jest obrabiana – w przeciwnym wypadku nie opłacałoby się dowozić takiej ilości materiału, więc takie rozwiązanie nie mogłoby być optymalne.

Parametry:

- $q^{min}$  – minimalna przepustowość pracy zakładu obróbki cieplnej [tona]
- $q^{max}$  – maksymalna przepustowość pracy zakładu obróbki cieplnej [tona]
- $c^q$  – koszt pracy zakładu obróbki cieplnej na jednostkę ilości obrobionego materiału [zł/tona]

Zmienne:

- $q = d_{S2}^c$  – przepustowość pracy zakładu obróbki cieplnej [tona]
- $v^q \in \{0, 1\}$  – czy zakład obróbki cieplnej jest uruchomiony (zmienna binarna)
- $c^c = q \cdot c^q$  – całkowity koszt pracy zakładu obróbki cieplnej [zł]

Ograniczenia:

- $v^q q^{min} \leq q \leq v^q q^{max}$  – przepustowość zakładu obróbki cieplnej mieści się w ograniczonym zakresie, a jeśli zakład nie pracuje to wynosi 0

## Sprzedaż produktu

W rozwiązaniu założyłem, że całość półproduktów jest zamieniana na produkty (w stosunku 1:1, tak jak w treści zadania), a ponadto całość wyprodukowanych produktów jest sprzedawana – w przeciwnym wypadku nie opłacałoby się produkować nadmiarowej ilości półproduktów lub produktów, więc takie rozwiązanie nie mogłoby być optymalne.

Parametry:

- $z_w \forall w \in W$  – zysk ze sprzedaży jednostki produktu  $w$  [zł/tona]
- $y^{min}$  – minimalna ilość sprzedaży każdego z produktów wynikająca z zawartych umów [tona]

Zmienne:

- $y_w \forall w \in W$  – ilość wyprodukowanego produktu  $w$  [tona]
- $z = \sum_{w \in W} y_w z_w$  – całkowity zysk ze sprzedaży produktów [zł]

Ograniczenia:

- $y_{W1} = p_{D1}$  – produkt  $W1$  jest produkowany tylko z półproduktu  $D1$  w stosunku 1:1
- $y_{W2} = p_{D2} + q$  – produkt  $W2$  jest produkowany z półproduktu  $D2$  w stosunku 1:1 oraz bezpośrednio w procesie obróbki cieplnej
- $y_w \geq y^{min} \forall w \in W$  – każdy z produktów  $w$  jest produkowany w dostatecznej ilości, by pokryć zapotrzebowanie wynikające z zawartych umów

## Wyniki optymalizacji

### Wartość funkcji celu

Wartość funkcji celu: 6273168 [zł].

## Wartości zmiennych

### Wartości zmiennych zakupu materiałów

- $x_{sr}$  – ilość kupionego materiału  $s$  w przedziale cenowym  $r$  [tona]

$r \backslash s$	$S1$	$S2$
1	2056	1968
2	2778	2449
3	4166	3583

- $x_s$  – całkowita ilość kupionego materiału  $s$  [tona]

	$S1$	$S2$
$x_s$	9000	8000

- $v_r$  – czy ilość kupionego materiału  $S1$  przekracza prawą granicę przedziału cenowego  $r$  (zmienna binarna)

	1	2
$v_r$	1	1

- $c^m = 159232$  – łączny koszt zakupu materiałów [zł]

### Wartości zmiennych dowozu materiałów

- $d_s^p, d_s^c$  – ilość przewożonego materiału  $s$  do odpowiednio przygotowalni lub obróbki cieplnej [tona]

	$S1$	$S2$
$d_s^p$	9000	4600
$d_s^c$	-	3400

- $n_{S1}^{cp} = 265$  – liczba ciężarówek do przewozu materiału  $S1$  do przygotowalni [brak jednostki]
- $n_{S1}^{np} = 265$  – liczba naczep do przewozu materiału  $S1$  do przygotowalni [brak jednostki]
- $n_{S2}^{cp} = 184$  – liczba ciężarówek do przewozu materiału  $S2$  do przygotowalni [brak jednostki]

- $n_{S2}^{cc} = 136$  – liczba ciężarówek do przewozu materiału  $S2$  do obróbki cieplnej [brak jednostki]
- $c^d = 957000$  – całkowity koszt dowozu [zł]

#### Wartości zmiennych przetwarzania w przygotowalni

- $p_d$  – ilość produkowanego półproduktu  $d$  w przygotowalni [tona]

	$D1$	$D2$
$p_d$	7280	6320

- $p = 13600$  – całkowita ilość produkowanych półproduktów w przygotowalni [tona]
- $n^g = 68$  – liczba zatrudnionych grup pracowników w przygotowalni [brak jednostki]
- $n^g \cdot g^n = 136$  – liczba zatrudnionych pracowników w przygotowalni [brak jednostki]
- $c^p = 27200$  – całkowity koszt pracy przygotowalni [zł]

#### Wartości zmiennych obróbki cieplnej

- $q = 3400$  – przepustowość pracy zakładu obróbki cieplnej [tona]
- $v^q = 1$  – czy zakład obróbki cieplnej jest uruchomiony (zmienna binarna)
- $c^c = 146200$  – całkowity koszt pracy zakładu obróbki cieplnej [zł]

#### Wartości zmiennych sprzedaży produktu

- $y_w$  – ilość wyprodukowanego produktu  $w$  [tona]

	$W1$	$W2$
$y_w$	7280	9720

- $z = 7562800$  – całkowity zysk ze sprzedaży produktów [zł]