MOM projekt 1

Jakub Ostrzołek

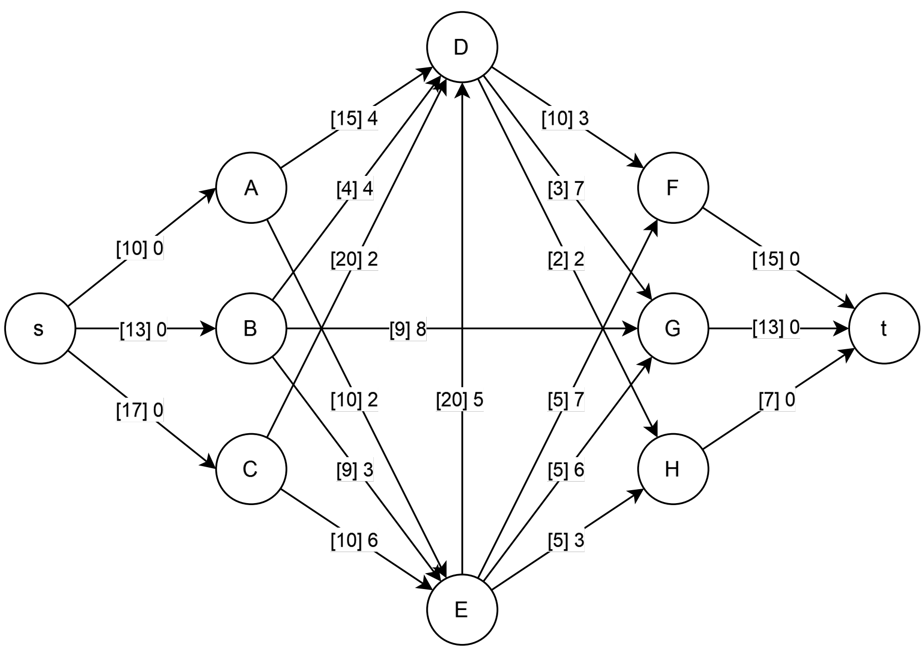
Zadanie 1

Model sieci przepływowej

Zadanie można przedstawić w postaci problemu wyznaczenia najtańszego przepływu o przepływie zadanym równym sumie zapotrzebowań klientów.

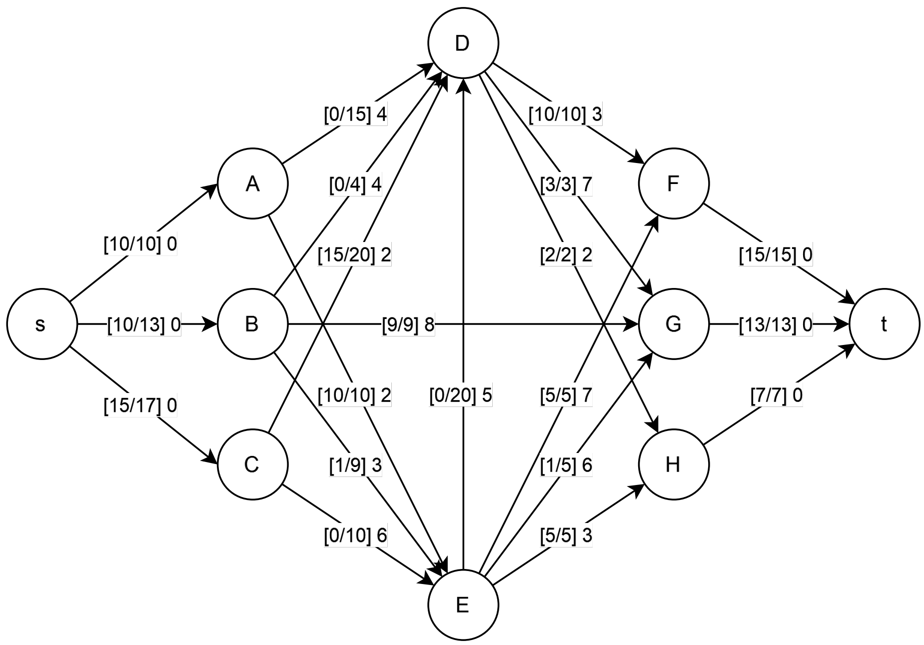
$$F_{zad} = Z_F + Z_G + Z_H = 35$$

Struktura sieci dla tego problemu wygląda następująco.



Rysunek 1: Model sieci przepływowej (oznaczenia na łukach: `[przepustowość] koszt_jednostkowy`)

Rozwiązanie modelu sieci przepływowej



Rysunek 2: Model sieci przepływowej – rozwiązanie (oznaczenia na łukach: `[przepływ/przepustowość] koszt_jednostkowy`)

A zatem plan wygląda następująco (planowany transport od wiersza do kolumny w tys. ton):

	D	E	F	G	H
A		10			
B		5		5	
C	15				
D			10	3	2
E			5	5	5

Co odpowiada łącznemu kosztowi:

$10 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 9 \cdot 8 + 15 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 7 + 1 \cdot 6 + 5 \cdot 3 = 236$

Zadanie programowania liniowego

Zbiory

- $V_{kop} = \{A, B, C\}$ – kopalnie

- $V_{ele} = \{F, G, H\}$ – elektrownie
- $V_{poś} = \{D, E\}$ – stacje pośrednie
- $V_{wew} = V_{kop} \cup V_{ele} \cup V_{poś}$ – wewnętrzne węzły sieci (bez startu i końca)
- $E_{wew} = \{(A, E), (B, E), ..., (E, G), (E, H)\}$ – wewnętrzne krawędzie sieci
- $E = E_{wew} \cup \{\forall i \in V_{kop} : (s, i)\} \cup \{\forall i \in V_{ele} : (i, t)\}$ – wszystkie krawędzie sieci

Parametry

- t_{ij}^{wew} dla $(i, j) \in E_{wew}$ – przepustowość połączenia między węzłem i a j [tys. ton]
- c_{ij}^{wew} dla $(i, j) \in E_{wew}$ – jednostkowy koszt przesłania towaru między węzłem i a j [jednostka nieznana]
- W_i dla $i \in V_{kop}$ – zdolności wydobywcze kopalni i [tys. ton]
- Z_i dla $i \in V_{ele}$ – średnie dobowe zużycie węgla elektrowni i [tys. ton]

Zmienne decyzyjne

- f_{ij} dla $(i, j) \in E$ – przepływ towaru między węzłem i a j [tys. ton]

Zmienne pomocnicze

- t_{ij} dla $(i, j) \in E$ – przepustowość połączenia między węzłem i a j [tys. ton]
- c_{ij} dla $(i, j) \in E$ – jednostkowy koszt przesłania towaru między węzłem i a j [jednostka nieznana]

Funkcja celu

- $min \sum_{(i,j) \in E} f_{ij} \cdot c_{ij}$ – minimalizacja całkowitego kosztu

Ograniczenia

- $\forall (i, j) \in E : 0 \le f_{ij} \le t_{ij}$ – ograniczenie przepływu od 0 do wartości przepustowości na krawędzi
- $\forall j \in V_{wew} : \sum_{(i,j) \in E} f_{ij} = \sum_{(j,k) \in E} f_{jk}$ – cały towar wchodzący do węzła wewnętrznego musi z niego wyjść
- $\forall i \in V_{ele} : f_{it} = Z_i$ – trzeba spełnić zapotrzebowanie kopalń

Ograniczenia zmiennych pomocniczych:

- $\forall (i, j) \in E_{wew} : t_{ij} = t_{ij}^{wew}$
- $\forall i \in V_{kop} : t_{si} = W_i$
- $\forall i \in V_{ele} : t_{it} = Z_i$
- $\forall (i, j) \in E_{wew} : c_{ij} = c_{ij}^{wew}$
- $\forall i \in V_{kop} : c_{si} = 0$
- $\forall i \in V_{ele} : c_{it} = 0$

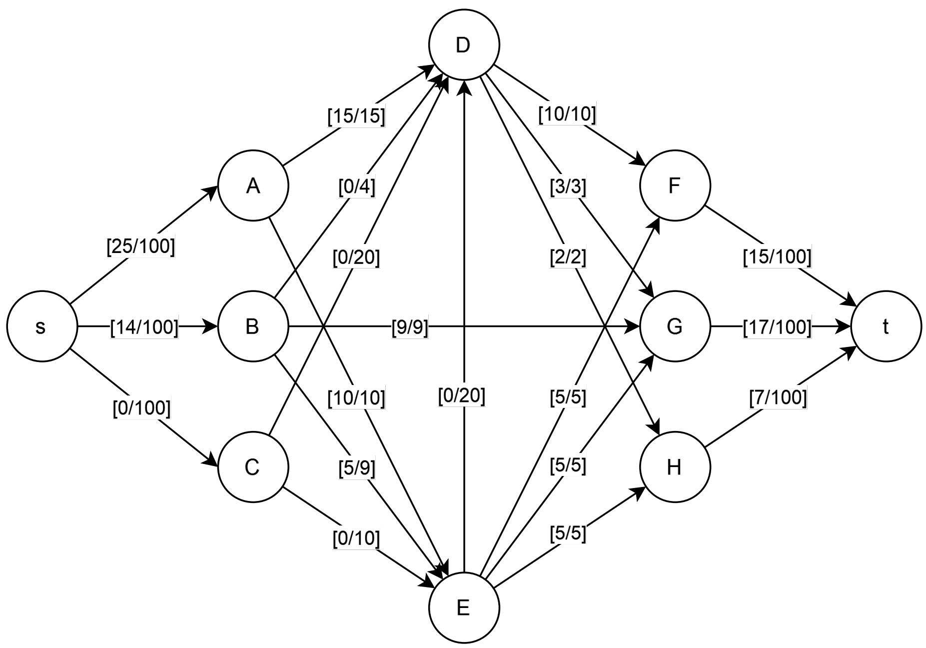
Wąskie gardło

Problem można sprowadzić do zadania wyznaczenia największego przepływu w sieci. Rozwiązanie podzieli węzły na dwa rozłączne zbiory S i T, między którymi nie będzie już możliwości transportu dodatkowych towarów. Zbiór krawędzi łączących te 2 zbiory będzie przekrojem o minimalnej przepustowości.

Należy wprowadzić kilka modyfikacji do wcześniejszego grafu:

- usunięcie kosztów (niepotrzebne do tego zadania),
- zmiana Z_i dla każdej z elektrowni na liczbę N, większą od przepustowości każdego przekroju (dzięki temu zapotrzebowanie elektrowni nie będzie ograniczać rozwiązania)
- zmiana W_i dla każdej z kopalń na liczbę N, większą od przepustowości każdego przekroju (dzięki temu produkcja kopalń nie będzie ograniczać rozwiązania)

Poniżej omawiana sieć dla $N = 100$ wraz z wyznaczonymi przepływami.



Rysunek 3: Model sieci przepływowej, wąskie gardło (oznaczenia na łukach: `[przepływ/przepustowość]`)

A zatem $S = \{s, A, B, C, D, E\}$, $T = \{F, G, H\}$, czyli poszukiwany przekrój to $\{(D, F), (D, G), (D, H), (B, G), (E, F), (E, G), (E, H)\}$ o przepustowości równej $10 + 3 + 2 + 9 + 5 \cdot 3 = 39$. Wartość ta jest jednocześnie równa maksymalnemu przepływowi w sieci (nieograniczonemu zapotrzebowaniem ani produkcją towaru).

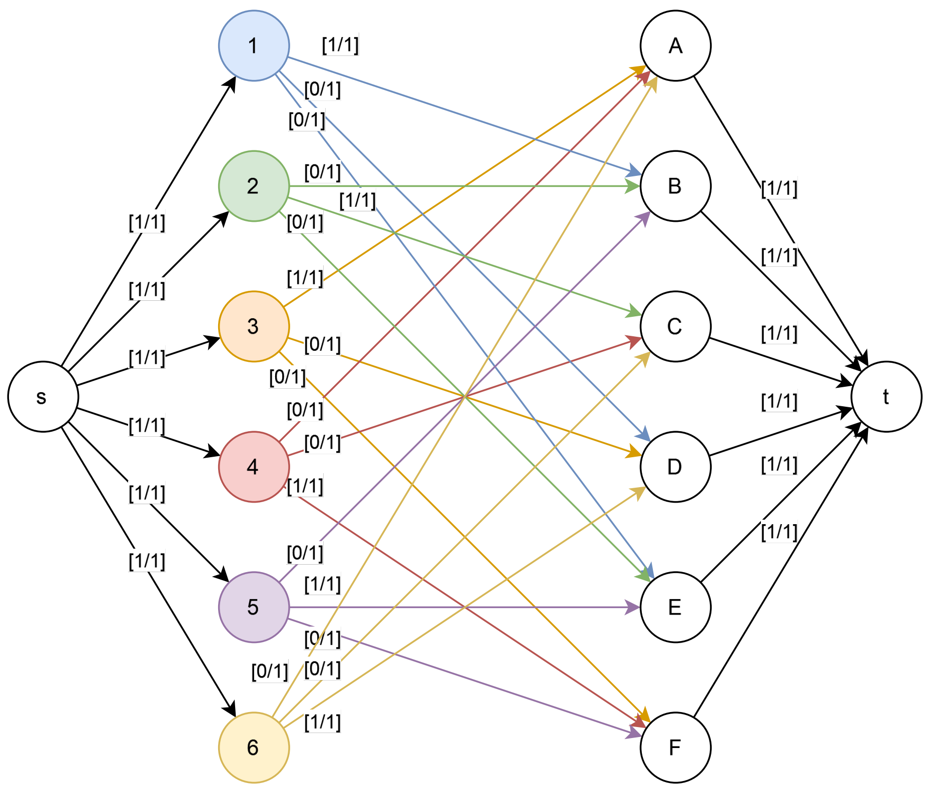
Na każdym z węzłów $(s, *)$ i $(*, t)$ przepływ jest mniejszy niż N. Gdyby było inaczej, oznaczałoby to, że wybrane N jest zbyt małe i trzeba powtórzyć obliczenia z większym N.

Zadanie 2

Zadanie 2.1

Problem można rozwiązać przy pomocy zadania wyznaczania największego przepływu w sieci. Jeżeli F_{max} będzie równe liczbie zespołów/projektów, to wartości przepływów będą wyrażały przypisanie zespołów do projektów.

Poniżej sieć modelująca zadanie wraz z rozwiązaniem.



Rysunek 4: Model sieci przepływowej, dopasowanie zadań (oznaczenia na łukach: `[przepływ/przepustowość]`)

$F_{max} = 6$, więc udało się przydzielić wszystkie zespoły do projektów.

Przydział będzie wyglądał następująco:

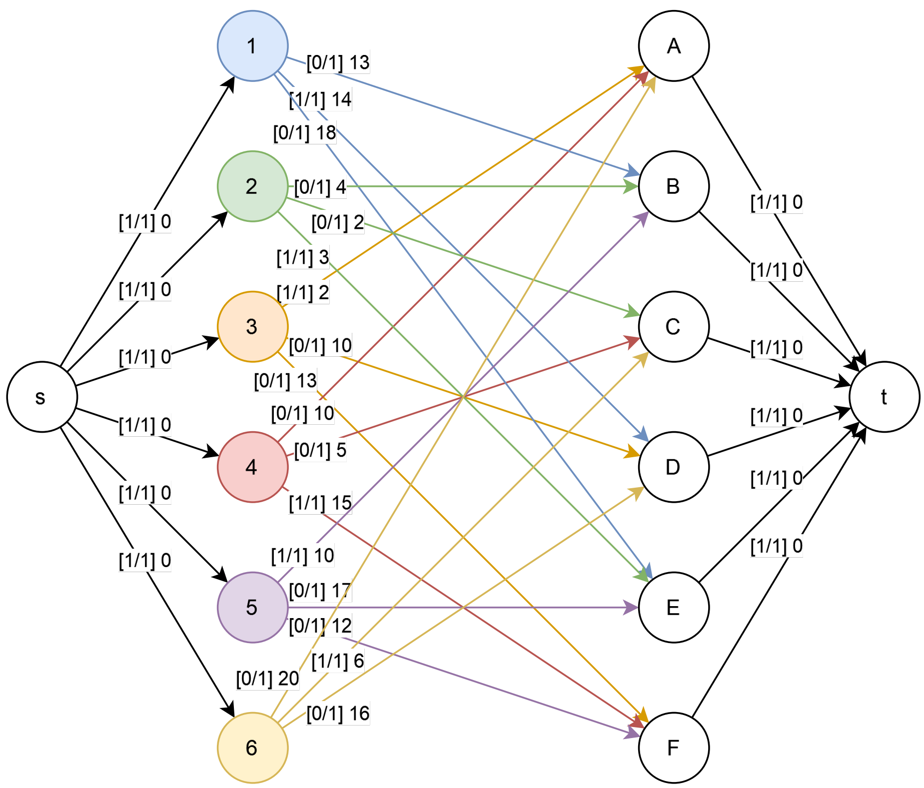
	A	B	C	D	E	F
1		X				
2			X			
3	X					

	A	B	C	D	E	F
4						X
5					X	
6				X		

Zadanie 2.2

Zadanie podobne do poprzedniego z tą różnicą, że wykorzystany zostanie problem najtańszego przepływu, a do sieci trzeba będzie dopisać jednostkowe koszty przesyłu odpowiadające kosztom realizacji projektu przez zespół.

Sieć i rozwiązanie znajduje się poniżej.



Rysunek 5: Model sieci przepływowej, dopasowanie zadań z kosztem (oznaczenia na łukach: `[przepływ/przepustowość] koszt_jednostkowy`)

Wtedy całkowity koszt wynosi 50, a przydział wygląda następująco:

	A	B	C	D	E	F
1				X		
2					X	
3	X					
4						X
5		X				
6			X			

Zadanie 2.3

Zbiory

- $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ – zespoły
- $P = \{A, B, C, D, E, F\}$ – projekty
- $E = \{(1, B), (1, D), ..., (6, D)\}$ – dozwolone pary (zespół, projekt)

Parametry

- t_{ij} dla $(i, j) \in E$ – czas realizacji projektu j przez zespój i [msc]

Zmienne decyzyjne

- $f_{ij} \in \{0, 1\}$ – przypisanie zespołu i do projektu j
- t_{max} – maksymalny czas trwania pracy zespołu nad projektem [msc]

Funkcja celu

- $min\ t_{max}$ – minimalizacja maksymalnego czasu

Ograniczenia

- $\forall i \in Z : \sum_{(i,j) \in E} f_{ij} = 1$ – każdy zespół musi mieć przypisany projekt
- $\forall j \in P : \sum_{(i,j) \in E} f_{ij} = 1$ – każdy projekt musi mieć przypisany zespół
- $\forall (i, j) \in E : t_{max} \geq f_{ij} \cdot t_{ij}$ – maksymalny czas jest większy lub równy od każdego z czasów pracy zespołu nad projektem

Rozwiązanie zadania 2.3

	A	B	C	D	E	F
1		X				
2					X	
3				X		
4	X					
5						X
6			X			

$$t_{max} = 13\ [msc]$$

Zadanie 3

Zbiory

- $I = \{1, ..., n\}$ – zasoby
- $J = \{1, ..., m\}$ – produkty

Parametry

- c_i^{max} dla $i \in I$ – przepustowości zasobów [jednostka nieznana]
- A_{ij} dla $(i, j) \in I \times J$ – współczynnik jednostkowego zużycia zasobu i przez produkt j [jednostka nieznana]
- p_j dla $j \in J$ – standardowa cena produktu j [jednostka nieznana]
- q_j dla $j \in J$ – próg obniżenia przychodu jednostkowego produktu j [jednostka nieznana]
- p_j^{disc} dla $j \in J$ – obniżona cena produktu j [jednostka nieznana]

Zmienne

- x_j dla $j \in J$ – produkcja produktu j [jednostka nieznana]
- $x_j^{\prime +}$, $x_j^{\prime -}$ dla $j \in J$ – odpowiednio nadwyżka i niedobór względem progu obniżenia przychodu jednostkowego produktu j [jednostka niezana]

Funkcja celu

- $max \sum_{j \in J} p_j \cdot (x_j - x_j^{\prime +}) + p_j^{disc} \cdot x_j^{\prime +}$ – maksymalizacja zysków
  - składnik $p_j \cdot (x_j - x_j^{\prime +})$ – odpowiada za cenę części towaru poniżej progu obniżenia ceny produktu (dla $x_j > q_j$ będzie to funkcja stała)
  - składnik $p_j^{disc} \cdot x_j^{\prime +}$ – odpowiada za cenę części towaru powyżej progu obniżenia ceny produktu (dla $x_j < q_j$ będzie miał wartość 0)

Ograniczenia

- $\forall i \in I : \sum_{j \in J} A_{ij} \cdot x_j \leq c_j$ – zużycie zasobów mniejsze niż przepustowość
- $\forall j \in J : x_j^{\prime +} - x_j^{\prime -} = q_j - x_j$ – nadwyżka i niedobór względem progu obniżenia przychodu jednostkowego produktu j
- $\forall j \in J : x_j \geq 0$ – produkcja większa lub równa 0
- $\forall j \in J : x_j^{\prime +} \geq 0$ – nadwyżka względem progu większa lub równa 0
- $\forall j \in J : x_j^{\prime -} \geq 0$ – niedobór względem progu większy lub równy 0