

MOM projekt 1

Jakub Ostrzołek

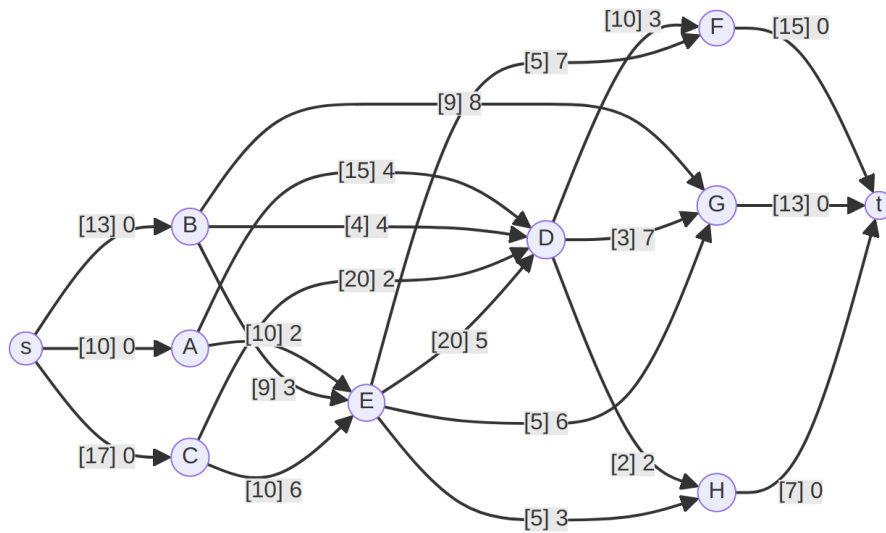
Zadanie 1

Model sieci przepływowej

Zadanie można przedstawić w postaci problemu wyznaczenia najtańszego przepływu o przepływie zadanym równym sumie zapotrzebowań klientów.

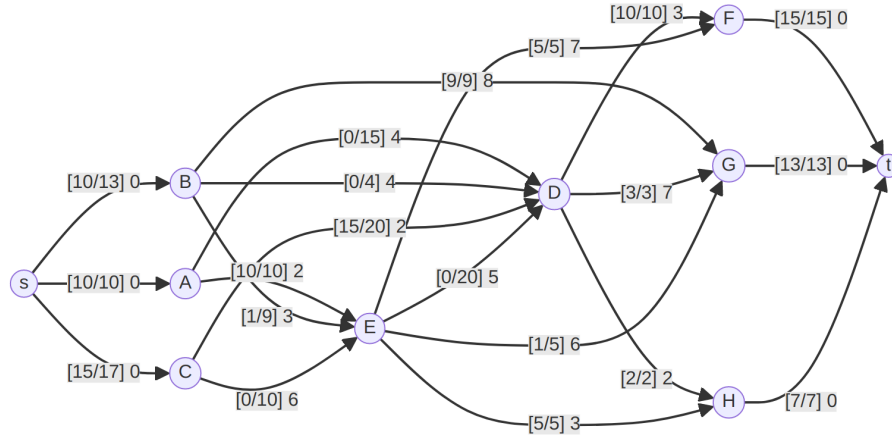
$$F_{zad} = Z_F + Z_G + Z_H = 35$$

Struktura sieci dla tego problemu wygląda następująco.



Oznaczenia na łukach: [przepustowość] koszt_jednostkowy.

Rozwiązanie modelu sieci przepływowej



Oznaczenia na łukach: $[przepływ/przepustowość]$ koszt_jednostkowy.

A zatem plan wygląda następująco (planowany transport od wiersza do kolumny w tyś. ton):

	D	E	F	G	H
A		10			
B		5		5	
C	15				
D			10	3	2
E			5	5	5

Co odpowiada łącznemu kosztowi:

$$10 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 9 \cdot 8 + 15 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 7 + 1 \cdot 6 + 5 \cdot 3 = 236$$

Zadanie programowania liniowego

Zbiory

- $V_{kop} = \{A, B, C\}$ – kopalnie
- $V_{ele} = \{F, G, H\}$ – elektrownie
- $V_{poś} = \{D, E\}$ – stacje pośrednie
- $V_{wew} = V_{kop} \cup V_{ele} \cup V_{poś}$ – wewnętrzne węzły sieci (bez startu i końca)
- $E_{wew} = \{(A, E), (B, E), \dots, (E, G), (E, H)\}$ – wewnętrzne krawędzie sieci
- $E = E_{wew} \cup \{i \in V_{kop} : (s, i)\} \cup \{i \in V_{ele} : (i, t)\}$ – wszystkie krawędzie sieci

Parametry

- t_{ij}^{wew} dla $(i, j) \in E_{wew}$ – przepustowość połączenia między węzłem i a j [tys. ton]
- c_{ij}^{wew} dla $(i, j) \in E_{wew}$ – jednostkowy koszt przesłania towaru między węzłem i a j [jednostka nieznana]
- W_i dla $i \in V_{kop}$ – zdolności wydobywcze kopalni i [tys. ton]
- Z_i dla $i \in V_{ele}$ – średnie dobowe zużycie węgla elektrowni i [tys. ton]

Zmienne decyzyjne

- f_{ij} dla $(i, j) \in E$ – przepływ między węzłem i a j [tys. ton]

Zmienne pomocnicze

- t_{ij} dla $(i, j) \in E$ – przepustowość połączenia między węzłem i a j [tys. ton]
- c_{ij} dla $(i, j) \in E$ – jednostkowy koszt przesłania towaru między węzłem i a j [jednostka nieznana]

Funkcja celu

- $\min \sum_{(i,j) \in E} f_{ij} \cdot c_{ij}$ – minimalizacja całkowitego kosztu

Ograniczenia

- $\forall (i, j) \in E : 0 \leq f_{ij} \leq t_{ij}$ – ograniczenie przepływu od 0 do wartości przepustowości na krawędzi
- $\forall j \in V_{wew} : \sum_{(i,j) \in E} f_{ij} = \sum_{(j,k) \in E} f_{jk}$ – cały towar wchodzący do węzła wewnętrznego musi z niego wyjść
- $\forall i \in V_{ele} : f_{it} = Z_i$ – trzeba spełnić zapotrzebowanie kopalń

Ograniczenia zmiennych pomocniczych:

- $\forall (i, j) \in E_{wew} : t_{ij} = t_{ij}^{wew}$
- $\forall i \in V_{kop} : t_{si} = W_i$
- $\forall i \in V_{ele} : t_{it} = Z_i$
- $\forall (i, j) \in E_{wew} : c_{ij} = c_{ij}^{wew}$
- $\forall i \in V_{kop} : c_{si} = 0$
- $\forall i \in V_{ele} : c_{it} = 0$

Wąskie gardło

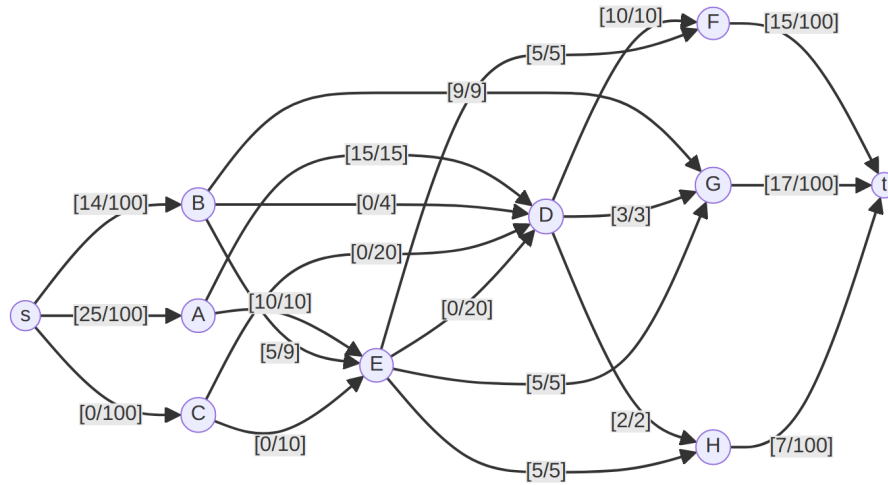
Problem można sprowadzić do zadania wyznaczenia największego przepływu w sieci. Rozwiązanie podzieli węzły na dwa rozłączne zbiory S i T , między którymi nie będzie już możliwości transportu dodatkowych towarów. Zbiór krawędzi łączących te 2 zbiory będzie przekrojem o minimalnej przepustowości.

Należy wprowadzić kilka modyfikacji do wcześniejszego grafu:

- usunięcie kosztów (niepotrzebne do tego zadania),
- zmiana Z_i dla każdej z elektrowni na liczbę N , większą od przepustowości każdego przekroju (dzięki temu zapotrzebowanie elektrowni nie będzie ograniczać rozwiązania)

- zmiana W_i dla każdej z kopalń na liczbę N , większą od przepustowości każdego przekroju (dzięki temu produkcja kopalń nie będzie ograniczać rozwiązania)

Poniżej omawiana sieć dla $N = 100$ wraz z wyznaczonymi przepływami.



Oznaczenia na łukach: $[przepływ/przepustowość]$.

A zatem $S = \{s, A, B, C, D, E\}$, $T = \{F, G, H\}$, czyli poszukiwany przekrój to $\{(D, F), (D, G), (D, H), (B, G), (E, F), (E, G), (E, H)\}$ o przepustowości równej $10 + 3 + 2 + 9 + 5 \cdot 3 = 39$. Wartość ta jest jednocześnie równa maksymalnemu przepływowi w sieci (nieograniczonemu zapotrzebowaniem ani produkcją towaru).

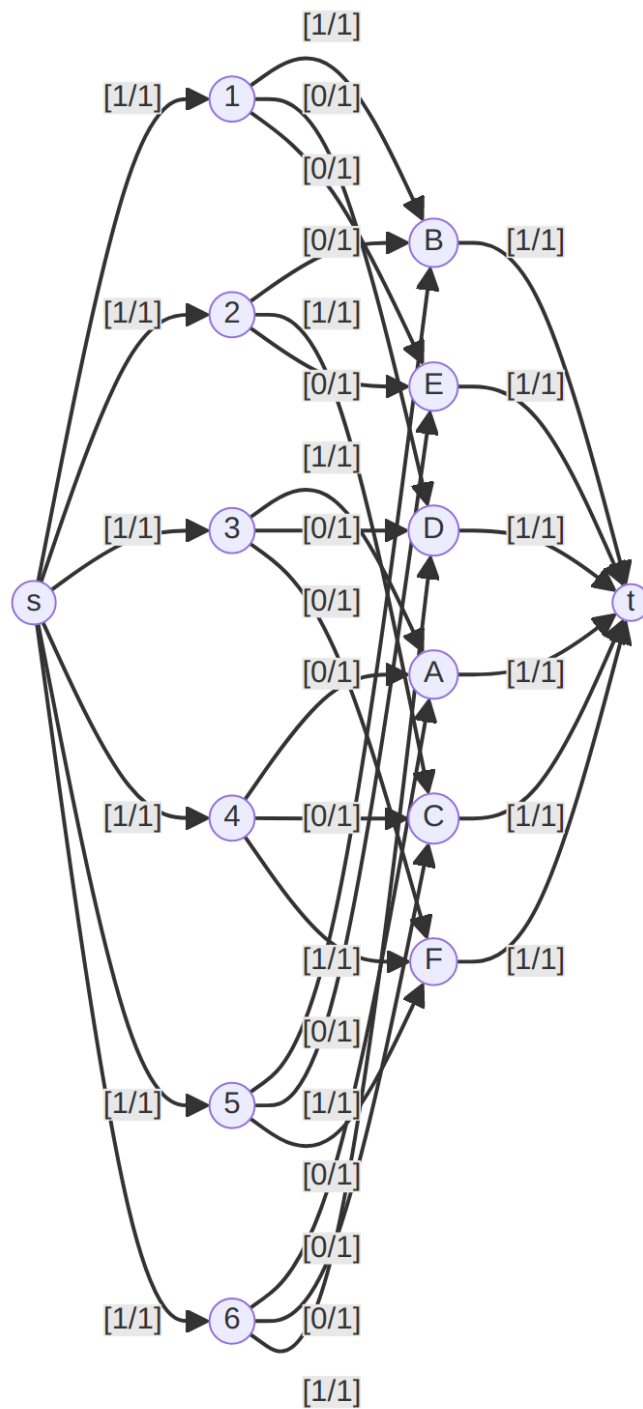
Maksymalny przepływ $F < N$. Gdyby było inaczej, oznaczałoby to, że wybrane N jest zbyt małe i trzeba powtórzyć obliczenia z większym N .

Zadanie 2

Zadanie 2.1

Problem można rozwiązać przy pomocy zadania wyznaczania największego przepływu w sieci. Jeżeli F_{max} będzie równe liczbie zespołów/projektów, to wartości przepływów będą wyrażały przypisanie zespołów do projektów.

Poniżej sieć modelująca zadanie wraz z rozwiązaniem.



Oznaczenia na łukach: *[przepływ/przepustowość]*.

$F_{max} = 6$, więc udało się przydzielić wszystkie zespoły do projektów.

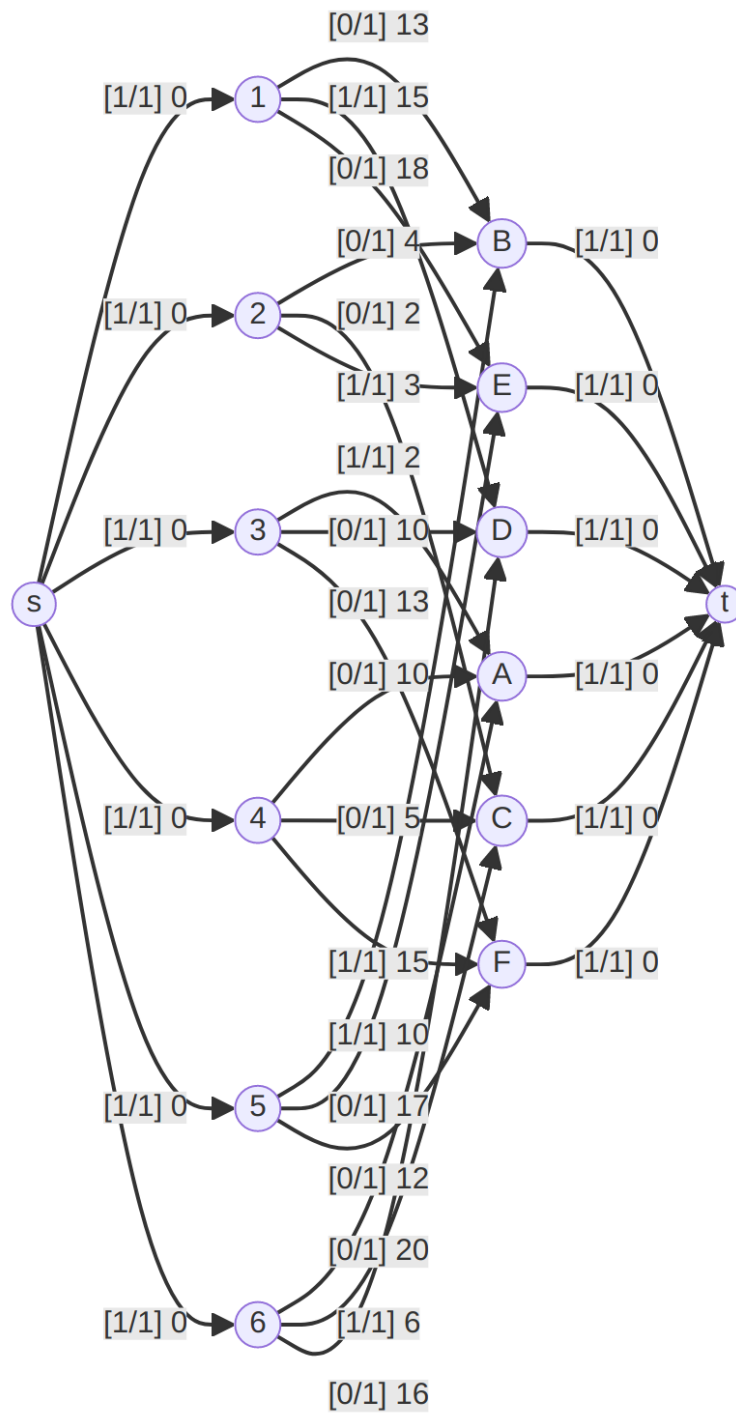
Przydział będzie wyglądał następująco:

	A	B	C	D	E	F
1		X				
2			X			
3	X					
4						X
5					X	
6				X		

Zadanie 2.2

Zadanie podobne do poprzedniego z tą różnicą, że wykorzystany zostanie problem najtańszego przepływu, a do sieci trzeba będzie dopisać jednostkowe koszty przesyłu odpowiadające kosztom realizacji projektu przez zespół.

Sieć i rozwiązanie znajduje się poniżej.



Oznaczenia na łukach: $[przepływ/przepustowość]$ koszt_jednostkowy.

Wtedy $F_{min} = 50$, a przydział wygląda następująco:

	A	B	C	D	E	F
1				X		
2					X	
3	X					
4						X
5		X				
6			X			

Zadanie 2.3

Zbiory

- $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ – zespoły
- $P = \{A, B, C, D, E, F\}$ – projekty
- $E = \{(1, B), (1, D), \dots, (6, D)\}$ – dozwolone pary (zespół, projekt)

Parametry

- t_{ij} dla $(i, j) \in E$ – czas realizacji projektu j przez zespół i [msc]

Zmienne decyzyjne

- $f_{ij} \in \{0, 1\}$ – przypisanie zespołu i do projektu j
- t_{max} – maksymalny czas trwania pracy zespołu nad projektem [msc]

Funkcja celu

- $\min t_{max}$ – minimalizacja maksymalnego czasu

Ograniczenia

- $\forall i \in Z : \sum_{(i,j) \in E} f_{ij} = 1$ – każdy zespół musi mieć przypisany projekt
- $\forall j \in P : \sum_{(i,j) \in E} f_{ij} = 1$ – każdy projekt musi mieć przypisany zespół
- $\forall (i, j) \in E : t_{max} \geq f_{ij} \cdot t_{ij}$ – maksymalny czas jest większy lub równy od każdego z czasów pracy zespołu nad projektem

Rozwiązanie zadania 2.3

	A	B	C	D	E	F
1		X				
2					X	
3				X		
4	X					
5						X

	A	B	C	D	E	F
6			X			

$$t_{max} = 13 \text{ [msc]}$$

Zadanie 3

Zbiory

- $I = \{1, \dots, n\}$ – zasoby
- $J = \{1, \dots, m\}$ – produkty

Parametry

- c_i^{max} dla $i \in I$ – przepustowości zasobów [jednostka nieznana]
- A_{ij} dla $(i, j) \in I \times J$ – współczynnik jednostkowego zużycia zasobu i przez produkt j [jednostka nieznana]
- p_j dla $j \in J$ – standardowa cena produktu j [jednostka nieznana]
- q_j dla $j \in J$ – próg obniżenia przychodu jednostkowego produktu j [jednostka nieznana]
- p_j^{disc} dla $j \in J$ – obniżona cena produktu j [jednostka nieznana]

Zmienne

- x_j dla $j \in J$ – produkcja produktu j [jednostka nieznana]
- $x_j'^+, x_j'^-$ dla $j \in J$ – odpowiednio nadwyżka i niedobór względem progu obniżenia przychodu jednostkowego produktu j [jednostka nieznana]

Funkcja celu

- $\max \sum_{j \in J} p_j \cdot (x_j - x_j'^+) + p_j^{disc} \cdot x_j'^+$ – maksymalizacja zysków

Ograniczenia

- $\forall i \in I : \sum_{j \in J} A_{ij} \cdot x_j \leq c_i$ – zużycie zasobów mniejsze niż przepustowość
- $\forall j \in J : x_j'^+ - x_j'^- = q_j - x_j$ – nadwyżka i niedobór względem progu obniżenia przychodu jednostkowego produktu j
- $\forall j \in J : x_j \geq 0$ – produkcja większa lub równa 0
- $\forall j \in J : x_j'^+ \geq 0$ – nadwyżka względem progu większa lub równa 0
- $\forall j \in J : x_j'^- \geq 0$ – niedobór względem progu większy lub równy 0