MOM projekt 1

Jakub Ostrzołek

Rozwiązanie zadania podzieliłem tematycznie na kilka części, z której każda została opisana w osobnym rozdziale.

Wartość M użyta w sprawozdaniu oznacza dowolną dostatecznie dużą stałą, która nie ogranicza w danym kontekście rozwiązania (tzn. ustalenie większej wartości M nie zmieniłoby rozwiązania).

Zmienne pomocnicze z prostymi ograniczeniami równościowymi będą zapisywane bezpośrednio w sekcji *Zmienne*.

W rozwiązaniu rozważana jest tylko sytuacja na jeden dzień, więc w domyśle wszystkie wartości są w przeliczeniu na dzień, np. ilość produkowanego półproduktu na dzień, ilość kupowanego materiału na dzień, itp.

Zbiory

- $S = \{S1, S2\}$ – dostępne materiały
- $D = \{D1, D2\}$ – półprodukty wytwarzane w przygotowalni
- $W = \{W1, W2\}$ – produkty końcowe tworzone w rozważanym procesie
- $R = \{1, 2, 3\}$ – zakresy funkcji ceny kosztu jednostkowego materiału, w obrębie których funkcja jest liniowa

Funkcja celu

$$max\{z - c^m - c^d - c^p - c^c\}$$

Zmienne:

- z - łączne zyski ze sprzedaży [zł]
- c^m - łączny koszt zakupu materiałów [zł]
- c^d - łączny koszt dowozu materiałów [zł]
- c^p - łączny koszt przetwarzania w przygotowalni [zł]
- c^c - łączny koszt pracy zakładu obróbki cieplnej materiałów [zł]

Poszczególne koszty zostaną obliczone w kolejnych rozdziałach. Warto zauważyć, że maksymalizując taką funkcję celu, koszty zakupu materiału są minimalizowane. Będzie to przydatne już w kolejnym rozdziale.

Zakup materiałów

Funkcje kosztu jednostkowego materiałów $S1$ i $S2$ są to odcinkami liniowe funkcje o dziedzinie w zbiorze nieujemnych liczb rzeczywistych. Ponadto, funkcja ta dla $S1$ jest wklęsła, a dla $S2$ wypukła. A zatem, mając na uwadze fakt, że cena materiałów jest minimalizowana, możliwe jest obliczenie całkowitego kosztu dla $S2$ bez użycia zmiennych całkowitoliczbowych. Dla $S1$ natomiast zajdzie konieczność użycia zmiennych całkowitoliczbowych.

Parametry:

- x_s^{max} $\forall s \in S$ – maksymalna ilość kupionego materiału s [tona]
- c_{sr}^m $\forall s \in S, \forall r \in R$ – cena materiału s w przedziale cenowym r [zł/tona]
- $r_{sr}^b \forall s \in S, \forall r \in R$ – prawa granica przedziału cenowego r dla ceny materiału s [tona]; dla $r = 3$ zmienna wynosi M, jeśli ostatni przedział ma być nieograniczony (tak jak w treści zadania)
- r_{sr}^w $\forall s \in S, \forall r \in R$ – szerokość przedziału cenowego r dla ceny materiału s [tona]; parametr wyliczony w następujący sposób:
  - $r_{s1}^w = r_{s1}^b$
  - $r_{sr}^w = r_{sr}^b - r_{s(r-1)}^b$ dla $r > 1$

Zmienne:

- x_{sr} $\forall s \in S, \forall r \in R$ – ilość kupionego materiału s w przedziale cenowym r [tona]
- $x_s = \sum_{r \in R} x_{sr}$ – całkowita ilość kupionego materiału s [tona]
- $v_r \in \{0, 1\} \forall r \in \{1, 2\}$ – czy ilość kupionego materiału $S1$ przekracza prawą granicę przedziału cenowego r (zmienna binarna)
- $c^m = \sum_{s \in S} \sum_{r \in R} x_{sr} c_{sr}^m$ – łączny koszt zakupu materiałów [zł]

Ograniczenia:

- $x_s \leq x_s^{max} \forall s \in S$ – ilość kupionego materiału s nie przekracza maksymalnej możliwej ilości do kupienia
- ograniczenia ustawiające ilość kupionego materiału $S2$ w danym przedziale
  - $x_{(S2)r} \geq 0$ $\forall r \in R$ – ilość kupionego materiału $S2$ w każdym z przedziałów cenowych r jest nieujemna
  - $x_{(S2)r} \leq r_{(S2)r}^w$ $\forall r \in R$ – ilość kupionego materiału $S2$ w każdym z przedziałów cenowych r nie przekracza szerokości przedziału
- ograniczenia ustawiające ilość kupionego materiału $S1$ w danym przedziale
  - $v_1 r_{(S1)1}^w \leq x_{(S1)1} \leq r_{(S1)1}^w$ – ilość kupionego materiału $S1$ w przedziale cenowym 1 jest nie większa niż jego szerokość, a ponadto jest maksymalna, gdy przedział cenowy 1 jest całkowicie wykorzystany
  - $v_2 r_{(S1)2}^w \leq x_{(S1)2} \leq v_1 r_{(S1)2}^w$ – ilość kupionego materiału $S1$ w przedziale cenowym 2 jest nie większa niż jego szerokość, a ponadto jest maksymalna, gdy przedział cenowy 2 jest całkowicie wykorzystany; gdy $x_{(S1)2} > 0$, to przedział cenowy 1 jest całkowicie wykorzystany
  - $0 \leq x_{(S1)3} \leq v_2 M$ – ilość kupionego materiału $S1$ w przedziale cenowym 3 jest nieujemna; gdy $x_{(S1)3} > 0$, to przedział cenowy 2 jest

całkowicie wykorzystany

Dowóz materiałów

W rozwiązaniu założyłem, że całość kupionego materiału jest gdzieś dowożona – w przeciwnym wypadku nie opłacałoby się kupować takiej ilości materiału, więc takie rozwiązanie nie mogłoby być optymalne.

Parametry:

- $l_s^c \ \forall s \in S$ – ładowność ciężarówki przewożącej materiał s [tona]
- l_{S1}^n – ładowność naczepy przewożącej materiał $S1$ [tona]
- $c_s^{dc} \ \forall s \in S$ – koszt wysyłu pojedynczej ciężarówki przewożącej materiał s [zł]
- c_{S1}^{dn} – koszt wysyłu pojedynczej naczepy przewożącej materiał $S1$ [zł]

Zmienne:

- $d_{S1}^p = x_{S1}$ – ilość przewożonego materiału $S1$ do przygotowalni [tona]
- d_{S2}^p – ilość przewożonego materiału $S2$ do przygotowalni [tona]
- $d_{S2}^c = x_{S2} - d_{S2}^p$ – ilość przewożonego materiału $S2$ do obróbki cieplnej [tona]
- $n_{S1}^{cp} \in \{0, 1, ..., 337\}$ – liczba ciężarówek do przewozu materiału $S1$ do przygotowalni [brak jednostki]
- $n_{S1}^{np} \in \{0, 1, ..., 337\}$ – liczba naczep do przewozu materiału $S1$ do przygotowalni [brak jednostki]
- $n_{S2}^{cp} \in \{0, 1, ...\}$ – liczba ciężarówek do przewozu materiału $S2$ do przygotowalni [brak jednostki]
- $n_{S2}^{cc} \in \{0, 1, ...\}$ – liczba ciężarówek do przewozu materiału $S2$ do obróbki cieplnej [brak jednostki]
- $c^d = n_{S1}^{cp} c_{S1}^{dc} + n_{S1}^{np} c_{S1}^{dn} + (n_{S2}^{cp} + n_{S2}^{cc}) c_{S2}^{dc}$ – całkowity koszt dowozu [zł]

Ograniczenia:

- $n_{S1}^{cp} \geq n_{S1}^{np}$ – liczba naczep nie większa niż liczba ciężarówek przewożących towar $S1$
- $d_{S1}^p \leq n_{S1}^{cp} l_{S1}^c + n_{S1}^{np} l_{S1}^n$ – całość materiału $S1$ przewożonego do przygotowalni mieści się do ciężarówek i naczep z materiałem $S1$ jadących do przygotowalni
- $0 \leq d_{S2}^p \leq x_{S2}$ – ilość przewożonego materiału $S2$ do przygotowalni jest w zakresie od 0 do ilości kupionego materiału $S2$
- $d_{S2}^p \leq n_{S2}^{cp} l_{S2}^c$ – całość materiału $S2$ przewożonego do przygotowalni mieści się do ciężarówek z materiałem $S2$ jadących do przygotowalni
- $d_{S2}^c \leq n_{S2}^{cc} l_{S2}^c$ – całość materiału $S2$ przewożonego do obróbki cieplnej mieści się do ciężarówek z materiałem $S2$ jadących do zakładu obróbki cieplnej

Przetwarzanie w przygotowalni

W rozwiązaniu założyłem, że całość dowiezionego do przygotowalni materiału jest przerabiana – w przeciwnym wypadku nie opłacałoby się dowozić takiej ilości materiału, więc takie rozwiązanie nie mogłoby być optymalne.

Parametry:

- h_{sd} $\forall s \in S, \forall d \in D$ –ilość produkowanego półproduktu d z jednostki materiału s [tona/tona]
- p^{max} – maksymalna całkowita ilość produkowanych półproduktów w przygotowalni [tona]
- $g^n = 2$ – liczba pracowników w grupie pracowników [brak jednostki]
- $g^p = 200$ – maksymalna ilość przetworzonego materiału w przygotowalni przez jedną grupę pracowników [tona]
- c^w – koszt zatrudnienia jednego pracownika [zł]

Zmienne:

- p_d $\forall d \in D$ – ilość produkowanego półproduktu d w przygotowalni [tona]
- $p = \sum_{d \in D} p_d$ – całkowita ilość produkowanych półproduktów w przygotowalni [tona]
- n^g – liczba zatrudnionych grup pracowników w przygotowalni [brak jednostki]
- $c^p = n^g g^n c^w$ – całkowity koszt pracy przygotowalni [zł], czyli łączny koszt zatrudnienia pracowników

Ograniczenia:

- $p_d = \sum_{s \in S} d_s^p h_{sd}$ $\forall d \in D$ – ilość produkowanego półproduku d ze wszystkich dowiezionych do przygotowalni materiałów s
- $p \leq p^{max}$ – całkowita ilość produkowanych półproduktów w przygotowalni nie przekracza limitu
- $p \leq n^g g^p$ – całkowita ilość produkowanych półproduktów w przygotowalni jest ograniczona przez liczbę grup pracowników i maksymalną przepustowość każdej z nich

Rozwiązanie operuje na liczbie grup zatrudnionych pracowników, a nie na samej liczbie zatrudnionych pracowników. Natomiast liczba zatrudnionych pracowników wynosi wtedy: $n^g \cdot g^n$.

Obróbka cieplna

W rozwiązaniu założyłem, że całość dowiezionego do zakładu obróbki cieplnej materiału jest obrabiana – w przeciwnym wypadku nie opłacałoby się dowozić takiej ilości materiału, więc takie rozwiązanie nie mogłoby być optymalne.

Parametry:

- q^{min} – minimalna przepustowość pracy zakładu obróbki cieplnej [tona]
- q^{max} – maksymalna przepustowość pracy zakładu obróbki cieplnej [tona]

- c^q – koszt pracy zakładu obróbki cieplnej na jednostkę ilości obrobionego materiału [zł/tona]

Zmienne:

- $q = d^c_{S2}$ – przepustowość pracy zakładu obróbki cieplnej [tona]
- $v^q \in \{0, 1\}$ – czy zakład obróbki cieplnej jest uruchomiony (zmienna binarna)
- $c^c = q \cdot c^q$ – całkowity koszt pracy zakładu obróbki cieplnej [zł]

Ograniczenia:

- $v^q q^{min} \leq q \leq v^q q^{max}$ – przepustowość zakładu obróbki cieplnej mieści się w ograniczonym zakresie, a jeśli zakład nie pracuje to wynosi 0

Zyski

W rozwiązaniu założyłem, że całość półproduktów jest zamieniana na produkty (w stosunku 1:1, tak jak w treści zadania), a ponadto całość wyprodukowanych produktów jest sprzedawana – w przeciwnym wypadku nie opłacałoby się produkować nadmiarowej ilości półproduktów lub produktów, więc takie rozwiązanie nie mogłoby być optymalne.

Parametry:

- $z_w \; \forall w \in W$ – zysk ze sprzedaży jednostki produktu w [zł/tona]
- y^{min} – minimalna ilość sprzedaży każdego z produktów wynikająca z zawartych umów [tona]

Zmienne:

- $y_w \; \forall w \in W$ – ilość wyprodukowanego produktu w [tona]
- $z = \sum_{w \in W} y_w z_w$ – całkowity zysk ze sprzedaży produktów [zł]

Ograniczenia:

- $y_{W1} = p_{D1}$ – produkt $W1$ jest produkowany tylko z półproduktu $D1$ w stosunku 1:1
- $y_{W2} = p_{D2} + q$ – produkt $W2$ jest produkowany z półproduktu $D2$ w stosunku 1:1 oraz bezpośrednio w procesie obróbki cieplnej
- $y_w \geq y^{min} \; \forall w \in W$ – każdy z produktów w jest produkowany w dostatecznej ilości, by pokryć zapotrzebowanie wynikające z zawartych umów