

WDWR projekt

Jakub Ostrzołek

Zadanie 1

Założenia

Biorąc pod uwagę poniższe fakty:

- koszty pracy przedsiębiorstwa (magazynowania) są niezależne od zmiennej losowej R (dochodów jednostkowych produktów),
- liczba produkowanych produktów jest niezależna od zmiennej losowej R ,

można uprościć złożone zadanie poszukiwania wartości oczekiwanej łącznych zysków z pracy przedsiębiorstwa. Zamiast tego wystarczy niezależnie obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej R i za pomocą przekształceń matematycznych uzyskać wartość oczekiwaną zysków. Dzięki temu nie ma potrzeby generowania próbek z rozkładu R i uśredniania wyniku końcowego metodą numeryczną, a zamiast tego można obliczyć analitycznie $\mathbb{E}(R)$ i użyć gotowej wartości przy rozwiązywaniu zadania optymalizacji.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(z) &= \mathbb{E}(d - k) \\ &= \mathbb{E}(d) - k \\ &= \sum_{p \in P} \sum_{n \in N} \mathbb{E}(x_{pn} \cdot R_p) - k \\ &= \sum_{p \in P} \sum_{n \in N} x_{pn} \cdot \mathbb{E}(R_p) - k\end{aligned}$$

gdzie:

- z – łączne zyski z pracy przedsiębiorstwa w rozważanym czasie [zł],
- d – łączne dochody z pracy przedsiębiorstwa w rozważanym czasie [zł],
- k – łączne koszty pracy przedsiębiorstwa w rozważanym czasie [zł],
- x_{pn} $p \in P, n \in N$ – liczba sprzedanych produktów p w miesiącu n [szt],
- R_p $p \in P$ – jednostkowy dochód za produkt p (zmienna losowa) [zł/szt],
- $P = \{P1, P2, P3, P4\}$ – produkty,
- $N = \{1, 2, 3\}$ – rozpatrywane miesiące.

Wyznaczanie średnich jednostkowych dochodów dla każdego z produktów

Rozkład t-Studenta jest ciągly, więc wartość oczekiwana na przedziale domkniętym jest taka sama jak wartość oczekiwana na przedziale otwartym.

$$R_1 \sim Tt_{(5;12)}(9, 16; 4)$$

$$R_2 \sim Tt_{(5;12)}(8, 9; 4)$$

$$R_3 \sim Tt_{(5;12)}(7, 4; 4)$$

$$R_4 \sim Tt_{(5;12)}(6, 1; 4)$$

$$\mathbb{E}(R_1) = 9 + 4 \cdot \frac{\Gamma(3/2) \cdot ((4 + (-1)^2)^{-3/2} - (4 + (\frac{3}{4})^2)^{-3/2}) \cdot 4^2}{2(F_4(\frac{3}{4}) - F_4(-1))\Gamma(2)\Gamma(1/2)} = 8,63$$

$$\mathbb{E}(R_2) = 8 + 3 \cdot \frac{\Gamma(3/2) \cdot ((4 + (-1)^2)^{-3/2} - (4 + (\frac{4}{3})^2)^{-3/2}) \cdot 4^2}{2(F_4(\frac{4}{3}) - F_4(-1))\Gamma(2)\Gamma(1/2)} = 8,30$$

$$\mathbb{E}(R_3) = 7 + 2 \cdot \frac{\Gamma(3/2) \cdot ((4 + (-1)^2)^{-3/2} - (4 + (\frac{5}{2})^2)^{-3/2}) \cdot 4^2}{2(F_4(\frac{5}{2}) - F_4(-1))\Gamma(2)\Gamma(1/2)} = 7,61$$

$$\mathbb{E}(R_4) = 6 + 1 \cdot \frac{\Gamma(3/2) \cdot ((4 + (-1)^2)^{-3/2} - (4 + (6)^2)^{-3/2}) \cdot 4^2}{2(F_4(6) - F_4(-1))\Gamma(2)\Gamma(1/2)} = 6,42$$

Model rozwiązania

Zbiory:

- $P = \{P1, P2, P3, P4\}$ – produkty
- $M = \{SZ, WV, WH, FR, TO\}$ – maszyny (odpowiednio: szlifierki, wiertarki pionowe, wiertarki poziome, frezarki, tokarki)
- $MP = \{(SZ, P1), (WV, P1), (WH, P1), (FR, P1), (SZ, P2), \dots\}$ – maszyny wymagane do produkcji danego produktu
- $G = \{G1, G2\}$ – grupy produktów, z których tylko jedną można magazynować w danym miesiącu
- $GP = \{(G1, P1), (G1, P2), (G2, P3), (G2, P4)\}$ – przypisania produktów do grup
- $N = \{1, 2, 3\}$ – rozpatrywane miesiące

Parametry:

- n_m $m \in M$ – liczba dostępnych maszyn m [brak jednostki]
- t_{mp} $(m, p) \in MP$ – jednostkowy czas produkcji produktu p na maszynie m [h/szt]
- R_p $p \in P$ – średni jednostkowy dochód za produkt p [zł/szt] (wartości obliczone powyżej)

- x_{pn}^{max} $p \in P, n \in N$ – maksymalna sprzedaż produktu p w miesiącu n [szt]
- $c^{mag} = 1$ – cena magazynowania jednostki produktu przez miesiąc [zł/szt]
- $m^{max} = 200$ – maksymalna liczba zmagazynowanych jednostek danego produktu na miesiąc [szt]
- m_p^{start} – liczba zmagazynowanych produktów p na start (na koniec grudnia) [szt]
- $h^{rob} = 24 \cdot 8 \cdot 2 = 348$ – liczba godzin roboczych w miesiącu [h]

Zmienne decyzyjne:

- x_{pn} $p \in P, n \in N$ – liczba sprzedanych produktów p w miesiącu n [szt]
- p_{pn} $p \in P, n \in N$ – liczba wyprodukowanych produktów p w miesiącu n [szt]
- m_{pn} $p \in P, n \in (\{0\} \cup N)$ – liczba zmagazynowanych produktów p na koniec miesiąca n [szt]
- u_{gn} $g \in G, n \in N$ – czy grupa produktów g jest magazynowana w miesiącu n (zmienna binarna: 0 – nie, 1 – tak)

Ograniczenia:

- $x_{pn} \geq 0 \quad \forall p \in P, n \in N$ – sprzedaż nieujemna
- $p_{pn} \geq 0 \quad \forall p \in P, n \in N$ – produkcja nieujemna
- $m_{pn} \geq 0 \quad \forall p \in P, n \in N$ – stan magazynu nieujemny
- $u_{gn} \in \{0, 1\} \quad \forall g \in G, n \in N$ – zmienna binarna
- $\sum_{\{p: (m,p) \in MP\}} p_{pn} \cdot t_{mp} \leq h^{rob} \cdot n_m \quad \forall m \in M, n \in N$ – łączny czas użycia maszyny m w miesiącu n nie przekracza liczby roboczych godzin
- $x_{pn} \leq x_{pn}^{max} \quad \forall p \in P, n \in N$ – sprzedaż produktu p nie przekracza rynkowego limitu na miesiąc n
- $m_{p0} = m_p^{start} \quad \forall p \in P$ – początkowy stan magazynu dla produktu p
- $\sum_{g \in G} u_{gn} \leq 1 \quad \forall n \in N$ – w miesiącu n może być wybrana maksymalnie jedna grupa produktów g do magazynowania
- $\sum_{\{p: (g,p) \in GP\}} m_{pn} \leq m^{max} \cdot u_{gn} \quad \forall g \in G, n \in N$ – produkt p należący do grupy g może być magazynowany maksymalnie w liczbie c^{max} szt, jeśli grupa g jest wybrana do magazynowania, lub w liczbie 0 szt w przeciwnym wypadku
- $p_{pn} + m_{p(n-1)} = x_{pn} + m_{pn} \quad \forall p \in P, n \in N$ – dla każdego miesiąca n i produktu p sztuki wyprodukowane i pozostałe w magazynach z poprzedniego miesiąca muszą zostać sprzedane lub zmagazynowane

Cel:

- $\max \sum_{n \in N} \sum_{p \in P} (x_{pn} \cdot R_p - m_{pn} \cdot c^{mag})$ – maksymalizacja łącznego zysku, czyli różnicy dochodu ze sprzedaży produktów i wydatków na magazynowanie produktów na przestrzeni rozpatrywanych miesięcy (koszty magazynowania na miesiąc grudzień pominięte)

Wyniki działania modelu

Powyższy model został zaimplementowany w języku AMPL i uruchomiony przy użyciu solvera CPLEX. Poniżej wyniki działania.

Wartość funkcji celu:

$$\sum_{n \in N} \sum_{p \in P} (x_{pn} \cdot R_p - m_{pn} \cdot c^{mag}) = 14531 \text{ [zł]}$$

- x_{pn}, p_{pn}, m_{pn} $p \in P, n \in N$ – liczba sprzedanych, wyprodukowanych i zmagazynowanych produktów p w miesiącu n [szt]

– $n = 1$ (styczeń)

| p | x_{p1} | p_{p1} | m_{p1} |
|-----|----------|----------|----------|
| P1 | 200 | 200 | 0 |
| P2 | 0 | 0 | 0 |
| P3 | 50 | 100 | 0 |
| P4 | 150 | 200 | 0 |

– $n = 2$ (luty)

| p | x_{p2} | p_{p2} | m_{p2} |
|-----|----------|----------|----------|
| P1 | 300 | 300 | 0 |
| P2 | 100 | 100 | 0 |
| P3 | 200 | 200 | 0 |
| P4 | 200 | 200 | 0 |

– $n = 3$ (marzec)

| p | x_{p3} | p_{p3} | m_{p3} |
|-----|----------|----------|----------|
| P1 | 0 | 0 | 0 |
| P2 | 300 | 300 | 0 |
| P3 | 100 | 100 | 0 |
| P4 | 200 | 200 | 0 |

- u_{gn} $g \in G, n \in N$ – czy grupa produktów g jest magazynowana w miesiącu n (zmienna binarna: 0 – nie, 1 – tak)

| $g \setminus n$ | 1 | 2 | 3 |
|-----------------|---|---|---|
| G1 | 0 | 0 | 0 |
| G2 | 1 | 1 | 1 |

Wnioski z wyników

- Ograniczenia na maksymalny obrót produktem zostały w całości wykorzystane.
- Żadne z ograniczeń na maksymalny czas użycia maszyn nie miało znaczenia, rzeczywiste wykorzystanie maszyn było zawsze dużo mniejsze niż limit.
- Z poprzedniego punktu wynika, że magazynowanie było zbędne (nie licząc stanu magazynu na koniec grudnia). Sama produkcja wysyciła limit na obrót każdym z produktów, więc nie było sensu dopłacać za magazynowanie produktów.
- Koszty produkcji są zerowe (brak magazynowania; koszty materiałów nie są rozważane w zadaniu).

Zadanie 2