WDWR projekt

Jakub Ostrzołek

Zadanie 1

Założenia

Biorąc pod uwagę poniższe fakty:

- koszty pracy przedsiębiorstwa (magazynowania) są niezależne od zmiennej losowej R (dochodów jednostkowych produktów),
- liczba produkowanych produktów jest niezależna od zmiennej losowej R,

można uprościć złożone zadanie poszukiwania wartości oczekiwanej łącznych zysków z pracy przedsiębiorstwa. Zamiast tego wystarczy niezależnie obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej R i za pomocą przekształceń matematycznych uzyskać wartość oczekiwaną zysków. Dzięki temu nie ma potrzeby generowania próbek z rozkładu R i uśredniania wyniku końcowego metodą numeryczną, a zamiast tego można obliczyć analitycznie $\mathbb{E}(R)$ i użyć gotowej wartości przy rozwiązywaniu zadania optymalizacji.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(z) &= \mathbb{E}(d-k) \\
&= \mathbb{E}(d) - k \\
&= \sum_{p\in P} \sum_{n\in N} \mathbb{E}(x_{pn} \cdot R_p) - k \\
&= \sum_{p\in P} \sum_{n\in N} x_{pn} \cdot \mathbb{E}(R_p) - k
\end{aligned}$$

gdzie:

- z – łączne zyski z pracy przedsiębiorstwa w rozważanym czasie [zł],
- d – łączne dochody z pracy przedsiębiorstwa w rozważanym czasie [zł],
- k – łączne koszty pracy przedsiębiorstwa w rozważanym czasie [zł],
- $x_{pn} \quad p \in P, n \in N$ – liczba sprzedanych produktów p w miesiącu n [szt],
- $R_p \quad p \in P$ – jednostkowy dochód za produkt p (zmienna losowa) [zł/szt],
- $P = \{P1, P2, P3, P4\}$ – produkty,
- $N = \{1, 2, 3\}$ – rozpatrywane miesiące.

Wyznaczanie średnich jednostkowych dochodów dla każdego z produktów

Rozkład t-Studenta jest ciągły, więc wartość oczekiwana na przedziale domkniętym jest taka sama jak wartość oczekiwana na przedziale otwartym.

$$R_1 \sim Tt_{(5;12)}(9,16;4)$$
$$R_2 \sim Tt_{(5;12)}(8,9;4)$$
$$R_3 \sim Tt_{(5;12)}(7,4;4)$$
$$R_4 \sim Tt_{(5;12)}(6,1;4)$$

$$\mathbb{E}(R_1) = 9 + 4 \cdot \frac{\Gamma(3/2) \cdot ((4 + (-1)^2)^{-3/2} - (4 + (\frac{3}{4})^2)^{-3/2}) \cdot 4^2}{2(F_4(\frac{3}{4}) - F_4(-1))\Gamma(2)\Gamma(1/2)} = 8,63$$

$$\mathbb{E}(R_2) = 8 + 3 \cdot \frac{\Gamma(3/2) \cdot ((4 + (-1)^2)^{-3/2} - (4 + (\frac{4}{3})^2)^{-3/2}) \cdot 4^2}{2(F_4(\frac{4}{3}) - F_4(-1))\Gamma(2)\Gamma(1/2)} = 8,30$$

$$\mathbb{E}(R_3) = 7 + 2 \cdot \frac{\Gamma(3/2) \cdot ((4 + (-1)^2)^{-3/2} - (4 + (\frac{5}{2})^2)^{-3/2}) \cdot 4^2}{2(F_4(\frac{5}{2}) - F_4(-1))\Gamma(2)\Gamma(1/2)} = 7,61$$

$$\mathbb{E}(R_4) = 6 + 1 \cdot \frac{\Gamma(3/2) \cdot ((4 + (-1)^2)^{-3/2} - (4 + (6)^2)^{-3/2}) \cdot 4^2}{2(F_4(6) - F_4(-1))\Gamma(2)\Gamma(1/2)} = 6,42$$

Model rozwiązania

Zbiory:

- $P = \{P1, P2, P3, P4\}$ – produkty
- $M = \{SZ, WV, WH, FR, TO\}$ – maszyny (odpowiednio: szlifierki, wiertarki pionowe, wiertarki poziome, frezarki, tokarki)
- $MP = \{(SZ, P1), (WV, P1), (WH, P1), (FR, P1), (SZ, P2), ...\}$ – maszyny wymagane do produkcji danego produktu
- $G = \{G1, G2\}$ – grupy produktów, z których tylko jedną można magazynować w danym miesiącu
- $GP = \{(G1, P1), (G1, P2), (G2, P3), (G2, P4)\}$ – przypisania produktów do grup
- $N = \{1, 2, 3\}$ – rozpatrywane miesiące

Parametry:

- $n_m \quad m \in M$ – liczba dostępnych maszyn m [brak jednostki]
- $t_{mp} \quad (m, p) \in MP$ – jednostkowy czas produkcji produktu p na maszynie m [h/szt]
- $R_p \quad p \in P$ – średni jednostkowy dochód za produkt p [zł/szt] (wartości obliczone powyżej)

- $x_{pn}^{max} \quad p \in P, n \in N$ – maksymalna sprzedaż produktu p w miesiącu n [szt]
- $c^{mag} = 1$ – cena magazynowania jednostki produktu przez miesiąc [zł/szt]
- $m^{max} = 200$ – maksymalna liczba zmagazynowanych jednostek danego produktu na miesiąc [szt]
- m_p^{start} – liczba zmagazynowanych produktów p na start (na koniec grudnia) [szt]
- $h^{rob} = 24 \cdot 8 \cdot 2 = 348$ – liczba godzin roboczych w miesiącu [h]

Zmienne decyzyjne:

- $x_{pn} \quad p \in P, n \in N$ – liczba sprzedanych produktów p w miesiącu n [szt]
- $p_{pn} \quad p \in P, n \in N$ – liczba wyprodukowanych produktów p w miesiącu n [szt]
- $m_{pn} \quad p \in P, n \in (\{0\} \cup N)$ – liczba zmagazynowanych produktów p na koniec miesiąca n [szt]
- $u_{gn} \quad g \in G, n \in N$ – czy grupa produktów g jest magazynowana w miesiącu n (zmienna binarna: 0 – nie, 1 – tak)

Ograniczenia:

- $x_{pn} \geq 0 \quad \forall p \in P, n \in N$ – sprzedaż nieujemna
- $p_{pn} \geq 0 \quad \forall p \in P, n \in N$ – produkcja nieujemna
- $m_{pn} \geq 0 \quad \forall p \in P, n \in N$ – stan magazynu nieujemny
- $u_{gn} \in \{0, 1\} \quad \forall g \in G, n \in N$ – zmienna binarna
- $\sum\limits_{\{p\,:\,(m,p) \in MP\}} p_{pn} \cdot t_{mp} \leq h^{rob} \cdot n_m \quad \forall m \in M, n \in N$ – łączny czas użycia maszyny m w miesiącu n nie przekracza liczby roboczych godzin
- $x_{pn} \leq x_{pn}^{max} \quad \forall p \in P, n \in N$ – sprzedaż produktu p nie przekracza rynkowego limitu na miesiąc n
- $m_{p0} = m_p^{start} \quad \forall p \in P$ – początkowy stan magazynu dla produktu p
- $\sum\limits_{g \in G} u_{gn} \leq 1 \quad \forall n \in N$ – w miesiącu n może być wybrana maksymalnie jedna grupa produktów g do magazynowania
- $\sum\limits_{\{p:(g,p) \in GP\}} m_{pn} \leq m^{max} \cdot u_{gn} \quad \forall g \in G, n \in N$ – produkt p należący do grupy g może być magazynowany maksymalnie w liczbie c^{max} szt, jeśli grupa g jest wybrana do magazynowania, lub w liczbie 0 szt w przeciwnym wypadku
- $p_{pn} + m_{p(n-1)} = x_{pn} + m_{pn} \quad \forall p \in P, n \in N$ – dla każdego miesiąca n i produktu p sztuki wyprodukowane i pozostałe w magazynach z poprzedniego miesiąca muszą zostać sprzedane lub zmagazynowane

Cel:

- $max \sum\limits_{n \in N} \sum\limits_{p \in P} (x_{pn} \cdot R_p - m_{pn} \cdot c^{mag})$ – maksymalizacja łącznego zysku, czyli różnicy dochodu ze sprzedaży produktów i wydatków na magazynowanie produktów na przestrzeni rozpatrywanych miesięcy (koszty magazynowania na miesiąc grudzień pominięte)

Wyniki działania modelu

Powyższy model został zaimplementowany w języku AMPL i uruchomiony przy użyciu solvera CPLEX. Poniżej wyniki działania.

Wartość funkcji celu:

$$\sum_{n \in N} \sum_{p \in P} (x_{pn} \cdot R_p - m_{pn} \cdot c^{mag}) = 14531 \ [zł]$$

- $x_{pn}, p_{pn}, m_{pn} \quad p \in P, n \in N$ – liczba sprzedanych, wyprodukowanych i zmagazynowanych produktów p w miesiącu n [szt]
  - $n = 1$ (styczeń)

p	x_{p1}	p_{p1}	m_{p1}
P1	200	200	0
P2	0	0	0
P3	50	100	0
P4	150	200	0

  - $n = 2$ (luty)

p	x_{p2}	p_{p2}	m_{p2}
P1	300	300	0
P2	100	100	0
P3	200	200	0
P4	200	200	0

  - $n = 3$ (marzec)

p	x_{p3}	p_{p3}	m_{p3}
P1	0	0	0
P2	300	300	0
P3	100	100	0
P4	200	200	0

- $u_{gn} \quad g \in G, n \in N$ – czy grupa produktów g jest magazynowana w miesiącu n (zmienna binarna: 0 – nie, 1 – tak)

$g \setminus n$	1	2	3
G1	0	0	0
G2	1	1	1

Wnioski z wyników

- Ograniczenia na maksymalny obrót produktem zostały w całości wykorzystane.
- Żadne z ograniczeń na maksymalny czas użycia maszyn nie miało znaczenia, rzeczywiste wykorzystanie maszyn było zawsze dużo mniejsze niż limit.
- Z poprzedniego punktu wynika, że magazynowanie było zbędne (nie licząc stanu magazynu na koniec grudnia). Sama produkcja wysyciła limit na obrót każdym z produktów, więc nie było sensu dopłacać za magazynowanie produktów.
- Koszty produkcji są zerowe (brak magazynowania; koszty materiałów nie są rozważane w zadaniu).