eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

ZIENTZIA ETA TEKNOLOGIA FAKULTATEA
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

Probabilitatea eta Prozesu Estokastikoak

Josu Doncel Vicente

Matematika Saila

Zientzia eta Teknologia Fakultatea

Euskal Herriko Unibertsitatea, UPV/EHU

Apunte hauetan Euskal Herriko Unibertsitateko Matematika Graduko 4. mailako Probabilitate eta Prozesu Estokastikoak ikasgaiaren edukiak azaltzen dira. Dokumentu honen edukiak ondoko materialan oinarrituta daude:

- Lehenengo, bigarren eta bostgarren gaieko informazioa S. I. Resnick-en *A probability Path* liburuan
- Hirugarren, laugarren eta bostgarren gaieko informazioa Jesús de la Cal irakasleak Matematika Lizentziaturako *Teoría de la Probabilidad* ikasgaian erabilitako apunteetan
- Seigarren gaiko informazioa M. Harchol-Baltel-en *Introduction to Probability for Computing* liburuan

Apunte hauei buruzko edozer zalantzarako edo informazio gehigarririk behar izanez gero, egilea kontaktatu daiteke ondoko eratan:

Posta: josu.doncel@ehu.eus
Telefonoa: (+34) 94 601 78 95
Helbidea:
Euskal Herriko Unibertsitatea, UPV/EHU
Zientzia eta Teknologia Fakultatea
Matematika Saila
Sarriena auzoa z/g, 48940 Leioa, Espana.

Gaien Aurkibidea

1
Multzoak eta Probabilitate Espazioak

1.1 Multzoak

1.1.1 Sarrera

Ikasgai honetan zorizko esperimentuak ditugu aztergai. Zorizko esperimentuetan aldez aurretik lortuko den emaitza ezagutzea ezinezkoa da. Trukatu gabeko dado bat botatzerakoan, adibidez, ez dakigu zein zenbaki aterako den. Ondorioz, dado bat botatzean lortutako emaitza begiratzea zorizko esperimentu bat da.

Zorizko esperimentuetan ondoko notazioa erabiliko dugu:

- Ω Zorizko esperimentuaren emaitza posibleen multzoa da. Hau da, gure esperimentu burutzerakoan ez dugu jakingo zein izango den lortutako emaitza, baino badakigu zein izan ahal den emaitza posibleen multzoa. Dadoaren adibidean $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ da.

- $\mathcal{P}(\Omega)$ Ω-ren parteen multzoa da, hau da, Ω-ren azpimultzo guztien multzoa.

- Gertaerak $\mathcal{P}(\Omega)$-ren elementuak dira. Alegia, A gertaera bat da eta $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

  Gertaera posible guztien artean, elementu batekoa denari oinarrizko gertaera deritzo. Hots, A oinarrizko elementua da $A = \{w\}$ bada, non $\omega \in \Omega$ den.

  Beste gertaera garrantzitsuak ezinezko gertaera $\emptyset$ eta gertaera ziurra Ω dira.

- Gertaeren kolekzio (edo familia) bat letra kaligrafikoa erabiliz idatziko dugu, hau da, $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$. Esate baterako, A eta B gertaerak badira, orduan $\mathcal{A} = \{A, B\}$ izango da.

Oharra 1.1.1. *Hemendik aurrera goiko notazioa erabiliko dugu. Garrantzitsua izango da gertaeren eta gertaeren familiaren arteko ezberdintasuna argi izatea. Hau da, A gertaera eta $\mathcal{A}$ gertaeren familia bada, orduan ondoko propietateak ditugu: $A \subset \Omega$, $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ eta $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$*

Orain, gertaeri aplikatutako zenbait eragiketa ikusiko dugu:

- Kontrakotasuna. $A \subset \Omega$ bada, A-ren kontrakoa $\bar{A}$ (edo A^c ere idazten da). Horrela, $\bar{A} = \Omega - A$ da.

- Ebakidura arbitrarioa. Izan bedi T edozein multzo (zenbakigarri edo ez), eta $A_t \subset \Omega,\ \forall t \in T$. Orduan,

$$\bigcap_{t \in T} A_t = \{\omega, \omega \in A_t\ \forall t \in T\}.$$

  Goiko definizioarekin jarraituz, esango dugu A_t eta A_s binaka askeak direla ondokoa betetzen bada: $A_t \cap A_s = \emptyset,\ \forall t \neq s,\ t, s \in T$.

- Bildura arbitrarioa. Izan bedi, T edozein multzo (zenbakigarri ez edo), eta $A_t \subset \Omega,\ \forall t \in T$. Orduan,

$$\bigcup_{t \in T} A_t = \{\omega, \exists t \text{ non } \omega \in A_t\}.$$

- Diferentzia. A eta B gertaerak badira, A eta B gertaeren diferentziak esan nahi du A ematen dela eta B ez. Honela idazten dugu A eta B gertaeren diferentzia $A - B$ bezala idatziko dugu eta badakigu ere $A - B = A \cap \bar{B}$.

- Diferentzia simetrikoa. A eta B gertaerak badira, A eta B gertaeren diferentziak esan nahi du bietako bat baino ez dela ematen. A eta B gertaerak badira, A eta B gertaeren diferentzia simetrikoa $A \triangle B$ bezala idatziko dugu eta badakigu

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A).$$

Orain, gertaeren arteko erlazioak ikusiko ditugu:

- A parte B: Esaten dugu A parte B dela (edo $A \subset B$) ondokoa betetzen bada:

$$\omega \in A \Rightarrow \omega \in B$$

  Gainera, $A \subset B$ bada, badakigu $A \cap B = A$ dela.

- Berdintza. Esaten dugu $A = B$ dela, $A \subset B$ eta $B \subset A$ betetzen badira. Alegia,

$$\omega \in A \iff \omega \in B.$$

Oharra 1.1.2. *Hemendik aurrera $A \subset B$ notazioa erabiltzen dugunean, $A = B$ izan daitekela adierazi nahi dugu (hau da, A ez dela B-ren azpimultzo propioa). Beste liburu batzutan, $A \subseteq B$ bezala aurkitu ahal da idatzita.*

Ondoko propietateak aztertuko ditugu orain.

Propietatea 1.1.1. *Ondokoak egiazkoak dira:*

a) $A \subset B$ *eta* $B \subset C$*, orduan* $A \subset C$

b) $A \subset C$ *eta* $B \subset C$*, orduan* $A \cup B \subset C$

c) $C \subset A$ *eta* $C \subset B$*, orduan* $C \subset A \cap B$

d) $A \subset B \iff \bar{B} \subset \bar{A}$

Frogapena. a) $A \subset B$ izateagatik, $\omega \in A$, orduan $\omega \in B$ eta $B \subset C$ izateagatik, $\omega \in B$, orduan $\omega \in C$. Beraz, $\omega \in A$ bada, orduan $\omega \in C$, hau da, $A \subset C$.

b) $A \subset C$ izateagatik, $\omega \in A$, orduan $\omega \in C$ eta $B \subset C$ izateagatik, $\omega \in B$, orduan $\omega \in C$. Beraz, $\omega \in A$ edo $\omega \in B$, orduan $\omega \in C$. Hau da, $\omega \in A \cup B$, orduan $\omega \in C$ eta, ondorioz, $A \cup B \subset C$.

c) $C \subset A$ izateagatik, $\omega \in C$, orduan $\omega \in A$ eta $C \subset B$ izateagatik, $\omega \in C$, orduan $\omega \in B$. Beraz, $\omega \in C$, orduan $\omega \in A$ eta $\omega \in B$. Hau da, $\omega \in C$, orduan $\omega \in A \cup B$ eta, ondorioz, $C \subset A \cap B$.

d) $\Rightarrow$ frogatuko dugu. $A \subset B$ izateagatik, $\omega \in A$, orduan $\omega \in B$. Beraz, $\omega \notin B$, orduan $\omega \notin A$ (hau da, $\omega \in \bar{B}$, orduan $\omega \in \bar{A}$) eta, beraz, $\bar{B} \subset \bar{A}$.
Beste inplikazioa antzeko moduan frogatzen da.

$\square$

Orain, ikasten ari garen multzoek betetzen duten zenbait propietate ikusiko dugu. Frogapenak ez ditugu jarriko bigarren mailako ikastaroan ikusi ditugulako.

Propietatea 1.1.2. *Ondokoak egiazkoak dira:*

a) $\bar{\bar{A}} = A$, $\bar{\emptyset} = \Omega$, $\bar{\Omega} = \emptyset$

b) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$

c) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

d) De morgan: T *multzo bat bada,*

$$\overline{\bigcup_{t \in T} A_t} = \bigcap_{t \in T} \bar{A}_t, \qquad \overline{\bigcap_{t \in T} A_t} = \bigcup_{t \in T} \bar{A}_t$$

e) Banatze-legea: T multzo bat bada (zenbakigarria edo ez)

$$B \cap \left(\bigcup_{t \in T} A_t \right) = \bigcup_{t \in T} (B \cap A_t)$$

$$B \cup \left(\bigcap_{t \in T} A_t \right) = \bigcap_{t \in T} (B \cup A_t)$$

Orain, funtzio adierazlea definituko dugu.

Definizioa 1.1.1. *$A \subset \Omega$ bada, funtzio adierazlea ondoko moduan adierazten da:*

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \text{ bada} \\ 0, & \omega \in \bar{A} \text{ bada} \end{cases}$$

Funtzio adierazleak ondoko propietateak betetzen ditu:

1. $\mathbf{1}_\Omega = 1$, $\mathbf{1}_\emptyset = 0$.
2. $\forall A \subseteq \Omega$, $\mathbf{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbf{1}_A$.
3. $\forall A, B \subseteq \Omega$ non $A \subset B$, $\mathbf{1}_B = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_{B-A}$. Gainera, $\mathbf{1}_{B-A} = \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A$ and $\mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_B$.
4. $\forall A, B \subseteq \Omega$, $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B = \min(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$.
5. $\forall A, B \subseteq \Omega$, $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A \cap B} = \max(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$.
6. $\forall A, B \subseteq \Omega$, $\mathbf{1}_{A-B} = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{A \cap B}$.

Goiko propietateen frogapena ez dugu jarriko bigarren mailako ikastaroan ikusitako propietateak baitira.

Oharra 1.1.3. *Hemendik aurrera ondoko notazioa erabiliko dugu. Demagun f eta g edozein funtzio badira, orduan*

$$f \leq g \iff f(\omega) \leq g(\omega), \forall \omega \in \Omega.$$

1.1.2 Limiteak

Kalkuluko ikasgaian limsup eta liminf kontzeptuak ikusi dira. Orain, kontzeptu horiek multzoetara ere definitu ahal direla ikusiko dugu. Ez bada besterik esaten, kapitulu honetan zehar suposatuko dugu $A_1, A_2, \ldots$, gertaeren segida bat dela, hau da, $A_n \subset \Omega$, $n = 1, 2, \ldots$ izanik.

Definizioa 1.1.2. *Izan bedi $A_n \subset \Omega$, $n = 1, 2, \ldots$, orduan*

$$\liminf_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \limsup_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Oharra 1.1.4. *Izan bedi* $T_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$*. Orduan* $T_n \subset T_{n+1}$ *ematen da eta, bigarren mailan ikusitakoaren arabera,*

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Beraz, $\lim_{n\to\infty} T_n$*-ri* $\liminf_{n\to\infty} A_n$ *deitzen zaio.*

Antzeko moduan, $H_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ *definitzen badugu,* $H_{n+1} \subset H_n$ *ematen da eta beraz*

$$\lim_{n\to\infty} H_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Bestalde, inf eta sup kontzeptuak ere multzoetarako definituko ditugu.

Definizioa 1.1.3. *Izan bedi* $A_n \subset \Omega$*,* $n = 1, 2, \ldots,$ *orduan*

$$\inf_{k\geq n} A_k = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \sup_{k\geq n} A_k = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

Oharra 1.1.5. *Aurrerago frogatuko dugu ondoko propietatea betzen dela:*

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} A_k\right), \qquad \limsup_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} A_k\right)$$

Proposizioa 1.1.1. *Izan bedi* $A_n \subset \Omega$*,* $n = 1, 2, \ldots,$ *orduan*

a) $\liminf_{n\to\infty} A_n = \{\omega \in \Omega |\ \omega \in A_n, n$ *guztietan kopuru finitu batean izan ezik*$\}$

b) $\limsup_{n\to\infty} A_n = \{\omega \in \Omega |\ \omega \in A_n, n$ *kopuru infinitu batean*$\}$

c) $\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$

Frogapena. a) Izan bedi $\omega \in \liminf_{n\to\infty} A_n$. Beraz, existitzen da $n \geq 1$ non $\omega \in \cap_{k\geq n} A_n$ eta, beraz, existitzen da $n \geq 1$ non $\forall k \geq n$ $\omega \in A_k$. Alegia, $\omega \in A_n$, n guztietarako, $A_1, \ldots, A_{k-1}$ izan ezik, hau da, kopuru finitu batean izan ezik.

b) Izan bedi $\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n$. Beraz, $\forall n$ $\omega \in \cap_{k\geq n} A_k$ edo, beste modu batean esanda, $\forall n$ existitzen da k non $\omega \in A_k$. Orduan, $\omega \in A_n$ n infinituetarako.

c) Demagun $\omega \in \liminf_{n\to\infty} A_n$. Orduan, $\omega \in A_n$ n guztietarako kopuru finitu batean izan ezik. Horregatik, $\omega \in A_n$ n kopuru infinitu batean, hau da, $\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n$.

$\square$

Ondoko adibideak frogatzen du aurreko proposizioko c) atalaren propietatearen kontrakoa dela beti ematen, hau da, $\limsup_{n\to\infty} A_n \subset \liminf_{n\to\infty} A_n$ ez dela beti egia.

Adibidea 1.1.1. *Demagun $B, C \subset \Omega$. Definitu $A_n = B$ n bakoitia bada eta $A_n = C$ n bikoitia bada. Frogatu $\liminf_{n\to\infty} A_n = B \cap C$ eta $\limsup_{n\to\infty} A_n = B \cup C$.*

Orain, ondoko propietatea ikusiko dugu. Ohartu De Morgan-en legeen antzekoak direla.

Proposizioa 1.1.2. *Izan bedi $A_n \subset \Omega$, $n = 1, 2, \dots$, orduan*

a) $\overline{\liminf_{n\to\infty} A_n} = \limsup_{n\to\infty} \overline{A_n}$,

b) $\overline{\limsup_{n\to\infty} A_n} = \liminf_{n\to\infty} \overline{A_n}$

Frogapena. a) Definizioa 1.1.2 eta De Morgan-en legeak erabiliz, ondoko berdintzak ematen dira:

$$\overline{\liminf_{n\to\infty} A_n} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \overline{A_k} = \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

b) Aurreko ataleko frogapenaren antzeko moduan froga daiteke.

□

Definizioa 1.1.4. *Izan bedi $A_n \subset \Omega$, $n = 1, 2, \dots$, orduan $\{A_n\}$ segidaren limitea A da ondokoa betetzen bada*

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n = A.$$

Limitea existitzen bada eta A bada, $A_n \to A$ edo $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ bezala idatziko dugu.

Adibidea 1.1.2. *Demagun $A_n = [0, \frac{n}{n+1})$, $n = 1, 2, \dots$. Frogatu $[0, 1)$ dela segida honen limitea.*

Hemendik aurrera, $A_n \uparrow$ ematen dela esango dugu (hau da, A_n ez beherakorra dela) $A_n \subset A_{n+1}$ gertatzen bada edozein n-rako. Era berean, $A_n \downarrow$ ematen dela esango dugu (hau da, A_n ez gorakorra dela) $A_{n+1} \subset A_n$ gertatzen bada edozein n-rako. Gainera, $\{A_n : n = 1, 2, \dots\}$ segida monotonoa izango da $A_n \uparrow$ edo $A_n \downarrow$ bada.

Proposizioa 1.1.3. *Izan bedi $A_n \subset \Omega$, $n = 1, 2, \dots$.*

a) $A_n \uparrow$ *bada, orduan* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$

b) $A_n \downarrow$ *bada, orduan* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$

Frogapena. a) $A_n \uparrow$ denean, $\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ ematen dela frogatuko dugu. Alde batetik,

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \tag{1.1}$$

lehenengo berdintzan lim inf-en definizioa erabili dugu eta bigarrenean $A_n \uparrow$ propietatea. Bestetik,

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n,$$

non lehenengo berdintza lim sup-en definizioa da, bigarrena (1.1) ekuazioan frogatu dugu eta hirugarrena Proposizio 1.1.1-ko c) atalean frogatuta dago. Honen ondorioz, $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ematen da.

b) $A_n \downarrow$ denean, $\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$ ematen dela frogatuko dugu. Alde batetik,

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \tag{1.2}$$

lehenengo berdintzan lim sup-en definizioa erabili dugu eta bigarrenean $A_n \downarrow$ propietatea. Bestetik,

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n \supset \liminf_{n\to\infty} A_n,$$

non lehenengo berdintza lim inf-en definizioa da, bigarrena (1.2) ekuazioan frogatu dugu eta hirugarrena Proposizio 1.1.1-ko c) atalean frogatuta dago. Honen ondorioz, $\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ ematen da.

□

Oharra 1.1.5-ean esandakoa frogatuko dugu orain.

Korolarioa 1.1.1. *Demagun* $\{B_n : n = 1, 2, \dots\}$ *segida bat dela, orduan*

$$\liminf_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} B_n\right), \limsup_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} B_n\right).$$

Frogapena:

Hartu $A_n = \inf_{k\geq n} B_n$ eta ohartu $A_n \uparrow$ gertatzen dela ohartu. Beraz, Proposizio 1.1.3-aren ondorioz,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

eta $A_n = \inf_{k\geq n} B_n$ erabiliz,

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \inf_{k\geq n} B_n.$$

Orain, Definizioa 1.1.3-ren arabera, $\inf_{k\geq n} B_n = \cap_{k=n}^{\infty} B_n$, beraz, aurreko ekuazioko ezkerreko zatia $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{n} B_n$. Bukatzeko, Definizioa 1.1.2-ren arabera, goiko ekuazioaren ezker zatia $\liminf_{n\to\infty} B_n$. Beraz, frogatu dugu nahi duguna.

1.1.3 σ-aljebrak

Izan bedi $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eta T multzo arbitrario bat. Orain, $\mathcal{C}$-ren elementuei aplikatzen zaien zenbait eragiketa ikusiko dugu:

1 Bildura arbitrarioa: $A_t \in \mathcal{C},\ \forall t \in T$, orduan $\displaystyle\bigcup_{t\in T} A_t$

2 Bildura zenbakigarria: $A_n \in \mathcal{C}$, $n = 1, 2, \dots$, orduan $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

3 Bildura finitua: $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{C}$, orduan $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} A_j$

4 Ebakidura arbitrarioa: $A_t \in \mathcal{C},\ \forall t \in T$, orduan $\displaystyle\bigcap_{t\in T} A_t$

5 Ebakidura zenbakigarria: $A_n \in \mathcal{C}$, $n = 1, 2, \dots$, orduan $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

6 Ebakidura finitua: $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{C}$, orduan $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{n} A_j$

7 Kontrakotasuna: $A \in \mathcal{C}$ bada, orduan $\bar{A}$

8 Limite monotonoak: $\{A_n : n = 1, 2, \dots\}$ segida bat bada eta

- $A_n \uparrow$ bada, orduan $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$,
- $A_n \downarrow$ bada, orduan $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$,

Demagun $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eta $\mathcal{O}$ aurreko eragiketetako bat. Orduan, esango dugu $\mathcal{C}$ itxia dela $\mathcal{O}$ eragiketarako, $\mathcal{C}$ multzoari $\mathcal{O}$ eragiketa aplikatzerakoan lortutako multzoa $\mathcal{C}$ multzoan badago.

Definizioa 1.1.5. *Izan bedi $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Orduan $\mathcal{A}$ aljebra bat da, itxia bada 3, 6 eta 7 eragiketetarako.*

Orain ikusiko dugu goiko definizioak 2. mailan ikusitako definizioarekin zerikusia duela.

Proposizioa 1.1.4. *$\mathcal{A}$ itxia da 3, 6 eta 7 eragiketarako ondokoa ematen bada:*

a) $\Omega \in \mathcal{A}$

b) $A \in \mathcal{A}$ *bada, orduan* $\bar{A} \in \mathcal{A}$

c) $A, B \in \mathcal{A}$ *badira, orduan* $A \cup B \in \mathcal{A}$

Frogapena.

- Frogatuko dugu $\mathcal{A}$ itxia da 3 eragiketarako c) ematen bada. Demagun $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{A}$. Orduan,

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (A_1 \cup A_2) \cup A_3 \in \mathcal{A},$$

  izan ere $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$ c) ematen delako eta beraz $B = A_1 \cup A_2$ bada, orduan $B \cup A_3 \in \mathcal{A}$ ematen da berriz c) atalagatik. Era berean froga daiteke $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ badira, orduan $\cup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$.

- Frogatuko dugu $\mathcal{A}$ itxia da 6 eragiketarako b) ematen bada eta $\mathcal{A}$ itxia bada 3 eragiketarako. Demagun $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ direla; b) ematen denez, $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_n \in \mathcal{A}$ dugu. Gainera, $\mathcal{A}$ itxia denez 3 eragiketarako, $\cup_{i=1}^n \bar{A}_i \in \mathcal{A}$ eta, De Morgan erabiliz, $\cap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$. Alegia, $\mathcal{A}$ itxia da 6 eragiketarako.

- b) betetzen bada, orduan $\mathcal{A}$ itxia da 7 eragiketarako.

$\square$

Orain, σ-aljebra zer den ikusiko dugu.

Definizioa 1.1.6. *Izan bedi $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Orduan $\mathcal{B}$ Ω-ren σ-aljebra da, itxia bada 2, 5 eta 7 eragiketetarako.*

Argi badago zein den lagin espazioa, Ω-ren σ-aljebra esan beharrean, σ-aljebra esango dugu.

Orain ikusiko dugu, kasu honetan ere, goiko definizioak 2. mailan ikusitako definizioarekin zerikusia duela. Frogapena Proposizio 1.1.4-koaren antzekoa izateagatik, ez dugu jarriko.

Proposizioa 1.1.5. *Izan bedi $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Orduan, $\mathcal{B}$ itxia da 2, 5 eta 7 eragiketarako ondokoa ematen bada:*

a) $\Omega \in \mathcal{B}$

b) $B \in \mathcal{B}$ *bada, orduan* $\bar{B} \in \mathcal{B}$

c) $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}$ badira, orduan $\bigcup_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{B}$

Goiko propietateei erreparatuz, argi dago gertaera guztien espazioa σ-aljebra izan behar dela. Horrela, itxia denez 2, 5 eta 7 eragiketetarako, gertaeretan eragiketak aplikatuz, gertaerak lortzen ditugu.

Orain, σ-aljegra eta aljebraren arteko harremana ikusiko dugu.

Proposizioa 1.1.6. *Multzo bat σ-aljebra bada, orduan aljebra da.*

Frogapena. Proposizio 1.1.5 eta Proposizio 1.1.4 kontuan hartuz, emaitza frogatutzat jo dezagu Proposizio 1.1.5c) propietatea ematen denean, Proposizio 1.1.4c) ematen dela frogatzen badugu. $\mathcal{B}$ σ-aljebra izateagatik, badakigu $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}$ badira, orduan $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{B}$ ematen dela. Beraz, hartu $B_k = \emptyset$, $k > n$ guztientzat (ohartu $\emptyset \in \mathcal{B}$ definizioz) eta, horrela,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \in \mathcal{B}.$$

□

Orain, σ-aljebra batzuk aztertuko ditugu.

- $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$. Definizioz, edozein gertaera $\mathcal{P}(\Omega)$-ren barruan dago. Beraz, $\mathcal{P}(\Omega)$ itxia da edozein eragiketarako. Ondorioz, σ-aljebra da.

- $\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$. Honi σ-aljebra tribiala deitzen diogu. $\bar{\emptyset} = \Omega$ eta $\bar{\Omega} = \emptyset$ direnez, $\mathcal{B}$ itxia dela 7 eragiketarako. Suposatu $B_i \in \mathcal{B}$, $i \geq 1$ izanik. 2. eragiketarako itxia dela frogatzeko, lehendabizi suposatu $B_i = \emptyset, \forall i$ eta, beraz, $\bigcup_{i\geq 1} B_i = \emptyset \in \mathcal{B}$. Orain, suposatu existitzen dela j non $B_i = \Omega$ den; horrela, $\bigcup_{i\geq 1} B_i = \Omega \in \mathcal{B}$. Eta horrela $\mathcal{B}$ 2 eragiketarako itxia dela frogatu dugu. Orain, 5. eragiketarako itxia dela frogatzeko, lehendabizi suposatu $B_i = \Omega, \forall i$ eta, beraz, $\bigcap_{i\geq 1} B_i = \Omega \in \mathcal{B}$. Orain, suposatu existitzen dela j non $B_i = \emptyset$ den; horrela, $\bigcap_{i\geq 1} B_i = \emptyset \in \mathcal{B}$. Eta horrela $\mathcal{B}$ 5 eragiketarako itxia dela frogatu dugu.

Hartu $\Omega = \mathbb{R}$ eta $\mathcal{B} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ zenbakigarria da }\} \cup \{A \subset \mathbb{R} : \bar{A} \text{ zenbakigarria da }\}$ σ-aljebra dela frogatu da 2. mailako kurtsoan. Orain, σ-aljebra honen inguruko ohar hau ikusiko dugu:

Oharra 1.1.6. *Ondokoa ematen da:*

- *$\mathcal{B} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ da. Izan ere, hartu $A = (-\infty, 0]$ eta ohartu $A \notin \mathcal{B}$ A ez delako zenbakigarria eta $\bar{A} = (0, +\infty)$ ere ez. Hala ere, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.*

- *$\mathcal{B}$ ez da itxia 1 eragiketarako. Izan ere, hartu edozein $t \leq 0$ eta $\{t\} \in \mathcal{B}$. Baina $\bigcup_{t\leq 0}\{t\} = (-\infty, 0] \in \mathcal{B}$.*

Oharra 1.1.7. *$\Omega = \mathbb{N}$ hartuko dugu eta definitu*

$$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega : |A| < \infty\} \cup \{A \subset \Omega : |\bar{A}| < \infty\}$$

Frogatu daiteke $\mathcal{A}$ aljebra dela, baino σ-aljebra ez. Beraz, edozein σ-aljebra aljebra da (ikusi Proposizio 1.1.6), baina kontrakoa ez da egia.

Orain ondoko emaitza aurkeztuko dugu.

Lema 1.1.1. *Izan bedi $\mathcal{O}$ goian definitutako edozein eragiketa (1-8 eragiketak) eta T multzo arbitrario bat. Demagun $\{\mathcal{C}_t\}_{t\in T}$ dugula, non $\mathcal{C}_t$ itxia den $\mathcal{O}$ eragiketarako $\forall t \in T$. Orduan, $\cap_{t\in T}\mathcal{C}_t$ itxia da $\mathcal{O}$ eragiketarako.*

Frogapena. 2 eragiketarako frogatuko dugu emaitza hau (besteak antzeko modua frogatzen dira). Demagun $B_1, B_2, \ldots,$ non $B_i \in \bigcap_{t\in T}\mathcal{C}_t$, $i = 1, 2, \ldots.$ Orduan, $B_i \in \mathcal{C}_t$, $\forall t \in T$ eta $i = 1, 2, \ldots.$ Orain, $\mathcal{C}_t$ itxia denez 2 eragiketarako, $\bigcup_{i\geq 1} B_i \in \mathcal{C}_t$, $\forall t \in T$. Beraz, $\bigcup_{i\geq 1} B_i \in \bigcap_{t\in T}\mathcal{C}_t$, hau da $\bigcap_{t\in T}\mathcal{C}_t$ itxia da 2 eragiketarako. □

Honen ondorioz, hurrengo emaitza dugu.

Proposizioa 1.1.7. *σ-aljebren ebakidura, σ-aljegra da eta aljebren bildura aljebra da.*

Orain, ikusiko dugu goiko propietatea bildurarentzat ez dela betetzen.

Oharra 1.1.8. *Hartu $\Omega = \{a, b, c\}$ eta definitu $\mathcal{B}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{b, c\}\}$ eta $\mathcal{B}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{b\}, \{a, c\}\}$. Erraz ikus daiteke $\mathcal{B}_1$ eta $\mathcal{B}_2$ σ-aljebrak direla, baina*

$$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\},$$

ez da σ-aljebra; izan ere $\{a\} \in \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ eta $\{b\} \in \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, baina $\{a, b\} \notin \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$.

Orain, multzo batek sortutako σ-aljebrarik txikiena definituko dugu.

Definizioa 1.1.7. *Izan bedi $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Orduan, $\sigma(\mathcal{C})$-ri $\mathcal{C}$ multzoak sortutako σ-aljebra deituko diogu eta ondokoak betetzen dituen multzoa da:*

1. *$\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})$*
2. *$\mathcal{B}$ σ-aljebra bat bada non $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ den, orduan $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}$*

Ohartu $\sigma(\mathcal{C})$-ri $\mathcal{C}$ multzoaren σ-aljebrarik txikiena ere deitzen zaiola. Orain, $\sigma(\mathcal{C})$-ren existentzia eta bakartasuna frogatuko dugu.

Teorema 1.1.1. *Demagun $\mathcal{C} \in \mathcal{P}(\Omega)$. Orduan, $\sigma(\mathcal{C})$ existitzen da eta bakarra da.*

Frogapena. Lehendabizi, ohartuko gara $\mathcal{P}(\Omega)$ σ-aljebra dela eta $\mathcal{C} \in \mathcal{P}(\Omega)$. Hortaz, gutxienez σ-aljebra bat dago $\mathcal{C}$ barruan duena.

Izan bedi $\mathcal{F}_t$ σ-aljebra, non $\mathcal{C} \in \mathcal{F}_t$; hau da, $\mathcal{F}_t$ $\mathcal{C}$ barruan duen σ-aljebra da. Demagun $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ dela $\mathcal{C}$ barruan duen σ-aljebra guztien familia. Definitu $\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{t\in T} \mathcal{F}_t$.

Lehendabizi, $\mathcal{C} \in \sigma(\mathcal{C})$ ematen da, izan ere $\forall t \in T$ $\mathcal{C} \in \mathcal{F}_t$. Gainera, Proposizio 1.1.7-ren emaitzagatik, $\sigma(\mathcal{C})$ σ-aljebra da $\forall t \in T$ $\mathcal{F}_t$ σ-aljebra baita. Azkenik, $\mathcal{C}$ barruan duen σ-aljebrarik txikiena dela ikusiko dugu. Horretarako, demagun $\mathcal{F}_0$ σ-aljebra dela, non $\mathcal{C} \in \mathcal{F}_0$. Orduan, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ definizioz, existitzen da $t_0 \in T$ non $\mathcal{F}_{t_0} = \mathcal{F}_0$ eta $\bigcap_{t\in T} \mathcal{F}_t \subset F_0$, beraz, $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}_0$; hau da, $\sigma(\mathcal{C})$ σ-aljebrarik txikiena da $\mathcal{C}$ barruan duena.

Orain, bakartasuna frogatuko dugu. Demagun $\sigma_1(\mathcal{C})$ eta $\sigma_2(\mathcal{C})$ Definizio 1.1.7-ren propietateak betetzen dutela. Badakigu $\sigma_1(\mathcal{C})$ txikiena izateagatik eta $\sigma_2(\mathcal{C})$ σ-aljebra izateagatik, $\sigma_1(\mathcal{C}) \subset \sigma_2(\mathcal{C})$. Aldiz, $\sigma_2(\mathcal{C})$ txikiena izateagatik eta $\sigma_1(\mathcal{C})$ σ-aljebra izateagatik, $\sigma_2(\mathcal{C}) \subset \sigma_1(\mathcal{C})$. Ondorioz, $\sigma_1(\mathcal{C}) = \sigma_2(\mathcal{C})$ dugu. □

Orain, boreldar σ-aljebra definituko dugu.

Definizioa 1.1.8. *Demagun $\Omega = \mathbb{R}$. Izan bedi $\mathcal{C} = \{(a, b) : -\infty \le a \le b \le \infty\}$. Orduan, boreldar σ-aljebra $\mathbb{R}$-n $\sigma(\mathcal{C})$ da.*

Guk boreldar σ-aljebra $\mathbb{R}$-n β bezala idatziko dugu (batzuk $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ bezala idazten dute). Bestalde, boreldar σ-aljebra $\mathbb{R}^n$-n β^n bezala idatziko dugu (batzuk $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ bezala idazten dute) eta R^n-ko irekiek sortutako σ aljebrarik txikiena da.

Orain ikusiko dugu β hainbat modutan sortu ahal dela, alegia,

$$\begin{aligned}\sigma((a, b) : -\infty \le a \le b \le \infty) &= \sigma((a, b] : -\infty \le a \le b < \infty)\\ &= \sigma([a, b) : -\infty < a \le b \le \infty)\\ &= \sigma([a, b] : -\infty < a \le b < \infty).\end{aligned}$$

Lehenengo berdintza frogatuko dugu jarraiean (besteak antzoko moduan froga daitezke).

Proposizioa 1.1.8. *Demagun $\mathcal{C}^{()} = \{(a, b) : -\infty \le a \le b \le \infty\}$ eta $\mathcal{C}^{(\,]} = \{(a, b) : -\infty \le a \le b < \infty\}$. Orduan $\sigma(\mathcal{C}^{()}) = \sigma(\mathcal{C}^{(\,]})$.*

Frogapena. Lenendabizi $\sigma(\mathcal{C}^{()}) \subset \sigma(\mathcal{C}^{(\,]})$ frogatuko dugu. Ohartu

$$(a, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a, b - \frac{1}{n}\right],$$

non $(a, b - \frac{1}{n}] \in \mathcal{C}^{(\,]} \subset \sigma(\mathcal{C}^{(\,]})$. Beraz, $\mathcal{C}^{()} \subset \sigma(\mathcal{C}^{(\,]})$ frogatu dugu. Orain, Definizio 1.1.7 kontuan hartuz, $\sigma(\mathcal{C}^{()}) \subset \sigma(\mathcal{C}^{(\,]})$.

Orain, $\sigma(\mathcal{C}^{(\,]}) \subset \sigma(\mathcal{C}^{()})$ frogatuko dugu. Ohartu

$$(a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a, b + \frac{1}{n}\right),$$

non $(a, b - \frac{1}{n}) \in \mathcal{C}^{()} \subset \sigma(\mathcal{C}^{()})$. Beraz, $\mathcal{C}^{(\,]} \subset \sigma(\mathcal{C}^{()})$ frogatu dugu. Orain, Definizio 1.1.7 kontuan hartuz, $\sigma(\mathcal{C}^{(\,]}) \subset \sigma(\mathcal{C}^{()})$. □

1.2 Probabilitate Espazioak

1.2.1 Oinarrizko Definizioak eta Propietateak

$(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ probabilitate-espazioa ondoko elementuz osaturiko hirukotea da:

- Ω : lagin espazioa
- $\mathcal{B}$: Ω-ren σ-aljebra
- $\mathbb{P}$: probabilitate neurria $(\Omega, \mathcal{B})$ espazio neurgarrian.

Gogoratu $\mathbb{P}$ probabilitate neurria dela $(\Omega, \mathcal{B})$ espazio neurgarrian ondokoa betetzen bada:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} : \mathcal{B} &\rightarrow [0,1] \\ A &\rightarrow \mathbb{P}(A) \end{aligned}$$

non Kolmogorov-en axiomak betetzen diren:

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}$ eta binaka baterazinak badira, orduan

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n)$$

Orain, bigarren mailako probabilitate kurtsoan ikusitako zenbait propietate gogoratuko ditugu:

- $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, $\forall A \in \mathcal{B}$
- $A, B \in \mathcal{B}$ badira, orduan $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- Barne-kanpo Printzipioa: $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}$ badira,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j) - \sum_{1\leq i\leq j\leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + ... + (-1)^n \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

- Monotonia legea: $A, B \in \mathcal{B}$ badira, orduan $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

- Azpi Baturkortasun Zenbakigarria: $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}$ badira, orduan

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j)$$

- Jarraitutasuna: Izan bedi $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}$
  Goi-Jarraitutasuna: $A_n \uparrow$ bada eta $A = \bigcup_{i\geq 1} A_i = A$, $\lim \uparrow \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$
  Behe-Jarraitutasuna: $A_n \downarrow$ bada eta $A = \bigcap_{i\geq 1} A_i = A$, $\lim \downarrow \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)$

Ondoko emaitza ikusiko dugu.

Proposizioa 1.2.1. *Demagun $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}$. Orduan,*

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right).$$

Frogapena. Oinarrizko kalkuluko emaitzengatik, badakigu x_n balio errealdun segida bada, orduan $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$. Hori dela eta, beste bi ezberdintzak frogatuko ditugu. Lehenengo ezberdintzarekin hasiko gara. Ohartu $\liminf_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k\geq n} A_k$ eta beraz

$$\mathbb{P}(\liminf_{n\to\infty} A_n) = \mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k\geq n} A_k).$$

Orain, konturatuko gara $\bigcap_{k\geq n} A_k$ ez beherakorra dela, hau da, $\bigcap_{k\geq n} A_k \uparrow$, beraz probabilitatearen goi-jarraitutasunaren propietateagatik

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} \bigcap_{k\geq n} A_k) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\bigcap_{k\geq n} A_k).$$

Orain, ohartu edozein $t \geq n$-rako $A_t \supset \bigcap_{k\geq n} A_k$ dela, beraz, $\mathbb{P}(A_t) \geq \mathbb{P}(\bigcap_{k\geq n} A_k)$. Ondorioz, $\inf_{k\geq n} \mathbb{P}(A_k) \geq \mathbb{P}(\bigcap_{k\geq n} A_k)$ eta, horregatik,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\bigcap_{k\geq n} A_k) \leq \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} \mathbb{P}(A_k).$$

Eta lim inf-en definizioaren ondorioz, $\mathbb{P}(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$ frogatu dugu.

Bukatzeko, falta den ezberdintza frogatuko dugu. Ohartu $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geq n} A_k$ eta beraz

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geq n} A_k).$$

Orain, konturatuko gara $\bigcup_{k\geq n} A_k$ ez gorakorra dela, hau da, $\bigcup_{k\geq n} A_k \downarrow$, beraz probabilitatearen behe-jarraitutasunaren propietateagatik

$$\mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k\geq n} A_k) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\bigcup_{k\geq n} A_k).$$

Orain, ohartu edozein $t \geq n$-rako $A_t \subset \bigcup_{k\geq n} A_k$ dela, beraz, $\mathbb{P}(A_t) \leq \mathbb{P}(\bigcup_{k\geq n} A_k)$. Ondorioz, $\sup_{k\geq n} \mathbb{P}(A_k) \leq \mathbb{P}(\bigcap_{k\geq n} A_k)$ eta, horregatik,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\bigcup_{k\geq n} A_k) \geq \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} \mathbb{P}(A_k).$$

Eta lim sup-en definizioaren ondorioz, $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n)$ frogatu dugu. $\square$

Goiko emaitzaren ondorioz, ondokoa lortzen dugu.

Korolarioa 1.2.1. *Demagun $A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}$, non $A_n \to A$. Orduan, $\mathbb{P}(A_n) \to \mathbb{P}(A)$.*

Frogapena. $A_n \to A$ bada, orduan $\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = A$ eta beraz,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = \mathbb{P}(A).$$

Ondorioz, goiko ezberdintzak berdintzak dira eta, horregatik,

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A).$$

$\square$

1.2.2 Dynkin-en Teorema

Lehendabizi, π-sistemak eta λ-sistemak definituko ditugu.

Definizioa 1.2.1. *Izan bedi $\mathcal{P} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Orduan, $\mathcal{C}$ π-sistema da itxia bada 6 eragiketarako, hau da,*

$$A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{P}.$$

Definizioa 1.2.2. *Izan bedi $\mathcal{L} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Orduan, $\mathcal{L}$ λ-sistema da postulatu zaharrak edo berriak betetzen baditu, postulatu zaharrak ondokoak izanik:*

Z1) $\Omega \in \mathcal{L}$

Z2) $A, B \in \mathcal{L}$*, non* $A \subset B$*, orduan* $B - A \in \mathcal{L}$

Z3) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{L}$ *eta* $A_i \uparrow i = 1, 2, \dots,$ *orduan* $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{L}$

eta postulatu berriak ondokoak:

B1) $\Omega \in \mathcal{L}$

B2) $A \in \mathcal{L}$, *orduan* $\bar{A} \in \mathcal{L}$

B3) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{L}$ *eta* $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i, j$, *orduan* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{L}$

Oharra 1.2.1. *Frogatu daiteke postulatu zaharrak eta berriak baliokideak direla. Orain, frogatuko dugu postulatu zaharrak betetzen badira, berriak ere. Lehendabizi, Z1) eta B1) berdinak dira. Orain, B2) frogatuko dugu, hau da,* $A \in \mathcal{L}$, *orduan* $\bar{A} \in \mathcal{L}$. *Z2) dela eta, badakigu* $A, B \in \mathcal{L}$ *non* $A \subset B$ *den, orduan* $B - A \in \mathcal{L}$. *Hartu* $B = \Omega$ *eta orduan* $A \subset B$ *dugu eta* $B - A = \bar{A}$ *dugunez,* $\bar{A} \in \mathcal{L}$.

Bukatzeko, B3) frogatuko dugu. Lehendabizi, ondoko propietatea frogatuko dugu: $A, B \in \mathcal{L}$ *eta* $A \cap B = \emptyset$, *orduan* $A \cup B \in \mathcal{L}$. *Hasteko,* $A \cap B = \emptyset$ *dugunez, orduan* $B \subset \bar{A}$ *eta, Z2) erabiliz,* $\bar{A} - B \in \mathcal{L}$. *Orain, De Morgan erabiliz,*

$$\bar{A} - B = \bar{A} \cap \bar{B} = A \,\bar{\cup}\, B,$$

beraz $A \,\bar{\cup}\, B \in \mathcal{L}$ *eta Z2) erabiliz,* $A \cup B \in \mathcal{L}$ *dugu. Arrazonamendu berdinarekin* $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{L}$ *badira, orduan* $\cup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{L}$. *Orain, B3) frogatuko dugu. Definitu* $B_n = \cup_{i=1}^{n} A_i$; *frogatu dugu* $B_n \in \mathcal{L}$ *eta gainera,* $B_n \subset B_{n+1}$ *ematen da; ondorioz, Z3) erabiliz,* $\cup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{L}$. *Frogapena bukatzen da ohartuz* $\cup_{i=1}^{\infty} B_i = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Orain, ondoko emaitza frogatuko dugu.

Proposizioa 1.2.2. *Edozein σ-aljebra λ-sistema da.*

Frogapena. Z1) eta Z2) σ-aljebraren definizioaren lehenengo bi propietateen berdinak dira (ikusi Definizioa 1.1.6). Aldiz, Z3) ere betetzen da σ-aljebraren definizioaren hirugarren propietatea betetzen denean (izan ere, edozein segidarako betetzen bada propietate hori, edozein segida gorakorrarako ere bai). □

Aurrean, $\mathcal{C}$ multzoaren σ-aljebrarik txikiena definitu dugun antzeko moduan, $\mathcal{C}$ multzoaren λ-sistemarik txikiena ($\mathcal{L}(\mathcal{C})$ bezala idatziko duguna) eta π-sistemarik txikiena ($\mathcal{P}(\mathcal{C})$ bezala idatziko duguna) definitzen dira. Esate baterako, $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ $\mathcal{C}$ multzoaren λ-sistemarik txikiena izango da, ondokoak betetzen badira:

- $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}(\mathcal{C})$
- $\mathcal{L}'$ beste λ-sistema bada non $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}'$, orduan $\mathcal{L}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{L}'$.

Gainera, $\lambda(\mathcal{C})$ eta $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ hauen existentzia eta bakartasunaren froga σ-aljebrarik txikienaren antzekoa da.

Orain, ondoko proposizioa ikusiko dugu.

Proposizioa 1.2.3. *Izan bedi* $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. *Orduan* $\mathcal{C}$ *λ-sistema eta π-sistema bada, σ-aljebra da.*

Frogapena. Lehenik, $\mathcal{C}$ λ-sistema denez, Proposizio 1.1.5-ren lehenengo bi propietateak betetzen direla ohartuko gara (izan ere, Definizio 1.2.2-ko B1) eta B2) propietateen berdinak dira). Bukatzeko, ondokoa frogatuko dugu: $A_1, \dots \in \mathcal{C}$ bada, orduan $\cup_{i\geq 1} A_i \in \mathcal{C}$. Badakigu, $\mathcal{C}$ λ-sistema izateagatik $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{C}$ bada, orduan $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n \in \mathcal{C}$ dela (ikusi Definizio 1.2.2-ko B2) propietatea). Orain, $\mathcal{C}$ π-sistema denez, $\bar{A}_1, \dots, A_n \in \mathcal{C}$ bada, orduan $\cap_{i=1}^n \bar{A}_i \in \mathcal{C}$ ematen da. Beraz, De Morgan erabiliz, $\overline{\cup_{i=1}^n A_i} \in \mathcal{C}$ eta berriz Definizio 1.2.2-ko B2) propietatea erabiliz, $\cup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{C}$ lortzen dugu. □

Goiko emaitza erabiliz, ondokoa frogatu daiteke.

Teorema 1.2.1 (Dynkin-en Teorema)**.** *$\mathcal{P}$ π-sistema eta $\mathcal{L}$ λ-sistema badira non $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$, orduan $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$.*

Dynkin-en Teoremaren ondorioz, ondoko emaitza lortzen dugu.

Korolarioa 1.2.2. *$\mathcal{P}$ π-sistema bada, orduan $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{L}(\mathcal{P})$.*

Frogapena. Demagun $\mathcal{P}$ π-sistema dela. Orduan, $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ λ-sistema da eta $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}(\mathcal{P})$ ematen da, beraz Dynkin-en Teorema aplikatuz, $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{P})$ ematen da. Aldiz, $\sigma(\mathcal{P})$ σ-aljebra da eta, beraz, λ-sistema da (ikusi Proposizioa 1.2.2). Gainera, $\mathcal{P} \subset \sigma(\mathcal{P})$ dugu eta, λ-sistema txikienaren definizioaren ondorioz, $\mathcal{L}(\mathcal{P}) \subset \sigma(\mathcal{P})$ ematen da. □

Goiko emaitzak dioena zera da: $\mathcal{P}$ π-sistema izatekotan, $\mathcal{P}$-ren σ-aljebrarik txikiena eta $\mathcal{P}$-ren λ-sistemarik txikiena berdinak direla.

1.2.3 Aplikazioak

Orain, Dynkin-en Teoremaren bi aplikazio interesgarri ikusiko dugu. Lehenengoa aurkeztu aurretik, ondoko emaitza ikusiko dugu:

Lema 1.2.1. *$\mathbb{P}_1$ eta $\mathbb{P}_2$ $(\Omega, \mathcal{B})$ espazio neurgarriaren probabilitate-neurriak direla suposatu. Orduan, ondoko funtzioa λ-sistema da*

$$\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{B} : \mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)\}$$

Frogapena. Postulatu berriak erabiliz frogatuko dugu $\mathcal{L}$ λ-sistema dela.

B1) $\Omega \in \mathcal{L}$, izan ere $\mathbb{P}_1(\Omega) = \mathbb{P}_2(\Omega) = 1$

B2) Suposatu $A \in \mathcal{L}$. Orduan, $\mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)$. Probabilitate neurriak izateagatik, $1 - \mathbb{P}_1(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}_2(\bar{A})$ eta, horren ondorioz, $\mathbb{P}_1(\bar{A}) = \mathbb{P}_2(\bar{A})$; hau da $\bar{A} \in \mathcal{L}$.

B3) Suposatu $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{L}$ non $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$. Beraz, $\forall i = 1, 2, \dots,$ $\mathbb{P}_1(A_i) = \mathbb{P}_2(A)$ eta, horregatik, $\sum_{i\geq 1} \mathbb{P}_1(A_i) = \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}_2(A_i)$. Probabilitate neurriak izateagatik, $\sum_{i\geq 1} \mathbb{P}_1(A_i) = \mathbb{P}_1\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right)$ eta $\sum_{i\geq 1} \mathbb{P}_2(A_i) = \mathbb{P}_2\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right)$. Horregatik, $\mathbb{P}_1\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) = \mathbb{P}_2\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right)$ eta, ondorioz, $\bigcup_{i\geq 1} A_i \in \mathcal{L}$.

□

Orain, lehenengo aplikazioa ikusiko dugu.

Proposizioa 1.2.4. $\mathbb{P}_1$ *eta* $\mathbb{P}_2$ $(\Omega, \mathcal{B})$ *espazio neurgarriaren probabilitate-neurriak direla suposatu.* $\mathcal{P}$ π*-sistema bada non* $\forall A \in \mathcal{P}, \mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)$*, orduan*

$$\forall B \in \sigma(\mathcal{P}), \mathbb{P}_1(B) = \mathbb{P}_2(B).$$

Frogapena. Emaitza frogatutzat jo ahal dugu $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$ frogatuz gero. Lema 1.2.1-gatik, badakigu $\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{B} : \mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)\}$ λ-sistema dela. Gure hipotesiei erreparatuz, honakoa dugula ohartzen gara: $\mathcal{P} \in \mathcal{L}$. Dynkin-en Teoremaren baldintzak betetzen direla argi ikusten da. Beraz, Dynkin-en Teorema aplikatuz, $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$ lortzen dugu. □

Goiko emaitzak dioena zera da: bi probabilitate neurri berdinki banatuak izatearen propietatea $\mathcal{P}$ multzotik $\sigma(\mathcal{P})$-ra heda daitekela.

Bigarren aplikazioak banaketa funtzioarekin zerikusia du. Gogoratu edozein x errealerako $F(x) = \mathbb{P}((-\infty, x])$ dela. Gogoratu ere β oreldar σ-aljebra $\mathbb{R}$-n dela.

Proposizioa 1.2.5. *Izan bedi* $\Omega = \mathbb{R}$*. Suposatu* $\mathbb{P}_1$ *eta* $\mathbb{P}_2$ *probabilitate-neurriak direla* $(\mathbb{R}, \beta)$ *espazioan eta haien banaketa funtzioak berdinak direla, hau da,*

$$\forall x \in \mathbb{R} : F_1(x) = \mathbb{P}_1((-\infty, x]) = F_2(x) = \mathbb{P}_2((-\infty, x]).$$

Orduan, $\mathbb{P}_1(B) = \mathbb{P}_2(B)$ *ematen da* $\forall B \in \beta$*-rako.*

Frogapena. Definitu $\mathcal{P} = (-\infty, x]$. Ikusiko dugu $\mathcal{P}$ π-sistema dela, izan ere

$$(-\infty, x] \cap (-\infty, y] = (-\infty, \min(x, y)].$$

Lema 1.2.1-gatik, badakigu $\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{B} : \mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)\}$ λ-sistema dela. Gainera, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}_1((-\infty, x]) = \mathbb{P}_2((-\infty, x])$ denez, orduan $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$. Beraz, Dynkin-en Teorema aplikatu ahal dugu eta, hori eginda, $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$ lortzen dugu. Bukatzeko, ohartu $\sigma(\mathcal{P}) = \beta$ (Boreldar σ-aljebra $(-\infty, x]$ bezalako tarteek sortutako σ-aljebra da). Beraz, $\mathbb{P}_1(B) = \mathbb{P}_2(B)$ ematen da $\forall B \in \beta$-rako. □

Aurreko emaitzaren arabera, ondokoa ondorioztatu ahal dugu: banaketa-funtzioak probabilitate-banaketa definitzen du.

1.3 Ariketak

Ariketa 1.3.1. *Ondoko segida definitu:* $A_n = \left(\frac{-1}{n}, 1\right]$*, n bakoitia bada eta* $A_n = \left(-1, \frac{1}{n}\right]$ *n bikoitia bada. Kalkulatu* $\liminf_{n\to\infty} A_n$ *eta* $\limsup_{n\to\infty} A_n$*.*

Ariketa 1.3.2. *Ondoko segidak definitu:* $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$*, non* $A_n = (-n, n)$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$ *eta* $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$*, non* $B_n = (\frac{-1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*. Kalkulatu haien limiteak*

Ariketa 1.3.3. *Izan bedi* $A_n = (-3 - \frac{1}{n}, 2]$, *n bikoitia bada, eta* $A_n = [-2, 3 + \frac{1}{n}]$, *n bikoitia bada. Kalkulatu* $\liminf_{n\to\infty} A_n$ *eta* $\limsup_{n\to\infty} A_n$. *Existitzen da limitea?*

Ariketa 1.3.4. *Ondoko gertaera-segidaren limitea existitzen den aztertu:* $\{A_n : n \geq 2\}$, *non* $A_n = [0, a_n)$,

$$a_n = 2 + (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right), n \geq 2.$$

Ariketa 1.3.5. *Ondokoa frogatu:*

$$\mathcal{C} = \sigma(\mathcal{C}) \iff \mathcal{C}\ \sigma\text{-aljebra da.}$$

Ariketa 1.3.6. *Demagun* $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *eta* $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *direla, non* $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$. *Orduan* $\sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{D})$.

Ariketa 1.3.7. *Ondoko adierazpena egiazkoa dela frogatu:*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq 1 - n + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

Ariketa 1.3.8. $\{A_i, i = 1, 2, \ldots, n\} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *bada, orduan*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \min_{k\in\{1,\ldots,n\}} \left\{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \mathbb{P}\left(A_i \cap A_k\right)\right\}.$$

Ariketa 1.3.9. *Izan bedi* $\mathcal{B}$ σ*-algebra bat. Postulatu zaharrak erabiliz, frogatu* $\mathcal{B}$ λ*-sistema dela.*

2

Zorizko Aldagaiak

Zorizko aldagaien ideia intuikorrarekin hasiko gara. Izan ere, zorizko aldagai bat Ω-tik $\mathbb{R}$-ra doan aplikazio bat da. Aplikazio honi neurgarritasun propietatea eskatuko zaio; izan ere, horri esker baieztapenak egin ahal izango ditugu.

Sarrera moduan, ondoko adibidea ikusiko dugu:

Adibidea 2.0.1. *Demagun n aldiz esperimentu bat egiten duguna eta esperimentu hori arrakastatsua izango da edo ez. Suposatu edozein alditan lortutako emaitzak ez duela eraginik beste esperimentuetan (esperimentu independienteak direla). Horrela, $\Omega = \{0,1\}^n$, non 0-k porrota adierazten duen eta 1-ek arrakasta. Aztertu nahi dugu zein den arrakasta kopurua. Definituko dugu X arrakasta kopurua neurtzen duen zorizko aldagaia. Horrela,*

$$X(\omega_1, \ldots, \omega_n) = \omega_1 + \cdots + \omega_n.$$

2.1 Alderantzizko Aplikazioak

2. mailako ikastaroan, zorizko aldagaiak ikasi genituen. Aldiz, ikastaro honetan ikuspegi orokor batean kontzentratuko gara. Izan ere, suposatuko dugu Ω eta Ω' bi multzo direla, Ω' orokorra izan daitekeelarik (izan daiteke $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ edo $\{0,1\}$ izan daiteke). Horrela, $X : \Omega \to \Omega'$ aplikazio bat dela kontzideratuko dugu, Ω' X-ren barrutia (edo helburu-multzoa) izanik eta Ω X-ren eremua. Orain, alderantzizko aplikazioa definituko dugu.

Definizioa 2.1.1. *Izan bedi $A' \subset \Omega'$.*

$$\begin{aligned} X^{-1} : \mathcal{P}(\Omega') &\to \mathcal{P}(\Omega) \\ A' &\to X^{-1}(A') = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A'\} \end{aligned}$$

Horrela, goiko definizioa multzoen familietara heldatzen da, ondoko eran: $\mathcal{C}' \subset \mathcal{P}(\Omega')$ bada,

$$X^{-1}(\mathcal{C}') = \{X^{-1}(C') : C' \in \mathcal{C}'\}$$

Oharra 2.1.1. *Ohartu Ω'-ren barruko familia multzoek $\mathcal{C}'$ bezala idatziko ditugu (hau da, prima hori jarriko dugu) eta multzoetarako A'. Aldiz, Ω-ri buruz ariko garenean, ez dutela primarik erabiliko, hau da, A eta $\mathcal{C}$ izango dira.*

Jarraian, alderantzizko aplikazioen propietate batzuk ikusiko dugu:

1. $X^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ eta $X^{-1}(\Omega') = \Omega$.
2. Kontrakotasuna mantentzen du: $A' \subset \Omega'$ bada, $X^{-1}(\overline{A'}) = \overline{X^{-1}(A')}$.
3. Bildura arbitrarioa mantentzen du: $\{A'_t : t \in T\}$ eta $t \in T$ guztirako $A'_t \subset \Omega'$ badira,
$$X^{-1}\left(\bigcup_{t \in T} A'_t\right) = \bigcup_{t \in T} X^{-1}(A'_t).$$
4. Ebakidura arbitrarioa mantentzen du: $\{A'_t : t \in T\}$ eta $t \in T$ guztirako $A'_t \subset \Omega'$ badira,
$$X^{-1}\left(\bigcap_{t \in T} A'_t\right) = \bigcap_{t \in T} X^{-1}(A'_t).$$

Ondoko emaitzan frogatuko dugu σ-aljebra bati alderantzizko aplikatuz σ-aljebra bat izango dugula.

Proposizioa 2.1.1. *$\mathcal{B}'$ σ-aljebra bada Ω'-rako, orduan $X^{-1}(\mathcal{B})$ σ-aljebra izango da Ω-rako.*

Badakigu $\mathcal{C}' \subset \mathcal{P}(\Omega')$ bada, orduan $\sigma(\mathcal{C}')$ σ-aljebra dela Ω'-rako eta, goiko emaitzagatik, $X^{-1}(\sigma(\mathcal{C}'))$ σ-aljebra dela Ω-rako. Hurrengo emaitzan σ-aljebra hori karakterizatuko dugu goiko emaitza erabiliz.

Proposizioa 2.1.2. *$\mathcal{C}' \subset \mathcal{P}(\Omega')$ bada, orduan $X^{-1}(\sigma(\mathcal{C}')) = \sigma(X^{-1}(\mathcal{C}'))$.*

2.2 Aplikazio Neurgarriak eta Induzitutako Probabilitate Neurriak

Hasiko gara espazio neurgarria definitzen, baita aplikazio neurgarriak ere.

Definizioa 2.2.1. *Espazio neurgarri bat* $(\Omega, \mathcal{B})$ *bikotea da, non* Ω *multzo bat eta* $\mathcal{B}$ σ*-algebra bat* Ω*-rako diren.*

Definizioa 2.2.2. $(\Omega, \mathcal{B})$ *eta* $(\Omega', \mathcal{B}')$ *espazio neurgarriak badira, orduan ondoko aplikazioa*

$$X : \Omega \to \Omega'$$

neurgarria da baldin eta soilik baldin: $X^{-1}(\mathcal{B}') \subset \mathcal{B}$.

Aplikazio neurgarriei ere zorizko elementu deitzen zaie. Askotan, ondoko notazioa erabiliko dugu $X : \Omega \to \Omega'$ neurgarria dela adierazteko: $X \in \mathcal{B}/\mathcal{B}'$ edo $X : (\Omega, \mathcal{B}) \to (\Omega', \mathcal{B}')$. Ohartu neurgarritasuna $\mathcal{B}'$-ren eta $\mathcal{B}$-ren araberakoak dira. Guzti honen kasu partikularra 2. mailako ikastaroan ikusi genuen eta, bertan, $(\Omega', \mathcal{B}') = (\mathbb{R}, \beta)$ ematen da.

Beste notazio hau ere erabiliko dugu: $A' \subset \Omega'$ bada,

$$(X \in A') = X^{-1}(A') = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A'\}.$$

Orain, X-k induzitutako probabilitate neurria definituko dugu.

Definizioa 2.2.3. *X-k induzitutako probabilitatea* $P \circ X^{-1}$ *aplikazioa da, hau da,* $A' \subset \Omega'$ *bada,*

$$P \circ X^{-1}(A') = P(X^{-1}(A'))$$

2. mailako ikastaroan ikusi genuen X zorizko aldagaia denean, $P \circ X^{-1}$ probabilitate neurria dela. Orain, kasu orokor batean gaude ($(\Omega', \mathcal{B}')$ ez du zertan $(\mathbb{R}, \beta)$ izan), baino hala ere frogatu daiteke $P \circ X^{-1}$ probabilitate neurria dela. Hemendik aurrera, hurrengo notazioa erabiliko dugu: $A' \subset \Omega'$ bada, $P(X^{-1}(A')) = P(X \in A')$.

Neurgarritasunak garrantzia handia du teoria honetan. Izan ere, P probabilitate neurria da eta beraz, probabilitateak esleitzen ditu $\mathcal{B}$-ko edozein elementuri. X neurgarria denez, $\forall B' \in \mathcal{B}'$, $X^{-1}(B') \in \mathcal{B}$ eta beraz, probabilitateak esleitzen ditu P-k.

Adibidea 2.2.1. *Dadoa bi aldiz jaurtitzean datzan esperimentua kontuan hartu. X lortutako balioen batura izango da. Deskribatu* Ω *eta* Ω'*. Kalkulatu* $X^{-1}(\{4\})$ *eta* $X^{-1}(\{2,3\})$.

Ohartu $\Omega = \{(i,j) : 1 \leq i,j \leq 6\}$ *eta* $\Omega' = \{2,3,4,\ldots,11,12\}$*. Gainera* $X((i,j)) = i + j$ *dugu kasu honetan.*

$X^{-1}(\{4\})$ *eta* $X^{-1}(\{2,3\})$ *kalkulatuko ditugu:*

$$X^{-1}(\{4\}) = \{\omega \in \Omega : i+j = 4\} = \{(2,2),(1,3),(3,1)\}$$

$$X^{-1}(\{2,3\}) = \{\omega \in \Omega : i+j = 2 \text{ edo } i+j = 3\} = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$$

Esan bezala, neurgarritasun propietateak diona zera da: $\mathcal{B}'$-ko edozein multzori alderantzizko aplikazioa aplikatuz lortutakoa $\mathcal{B}$ σ-aljebrako elementua izan behar da. Egia da hori egiaztatzea zaila izan daitekela zenbait kasutan. Esate baterako, zorizko aldagaien kasuan boreldar elementu guztietarako egiaztatu behar da propietate hori betetzen dela. Horregatik $\mathcal{B}'$ σ-aljebrari buruzko informazioa dugunean, baldintza errazago bat egiaztatzearekin nahikoa dela ikusiko dugu jarraian.

Proposizioa 2.2.1. *Suposatu* $(\Omega, \mathcal{B})$ *eta* $(\Omega', \mathcal{B}')$ *espazio neurgarriak direla eta* $X : \Omega \to \Omega$ *dela. Suposatu* $\mathcal{C}'$ *existitzen dela non* $\sigma(\mathcal{C}') = \mathcal{B}'$*. Orduan,* X *aplikazio neurgarria da ondokoa betetzen bada:*

$$X^{-1}(\mathcal{C}') \subset \mathcal{B}$$

Frogapena. Suposatu $X^{-1}(\mathcal{C}') \subset \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ σ-aljebra izanik. Orduan, σ-aljebrarik txikienaren definizioagatik,

$$\sigma(X^{-1}(\mathcal{C}')) \subset \mathcal{B}.$$

Beraz, $\sigma(\mathcal{C}') = \mathcal{B}'$ denez, $X^{-1}(\mathcal{B}') = X^{-1}(\sigma(\mathcal{C}')) \subset \mathcal{B}$, hau da, neurgarritasunaren definizioa betetzen da. $\square$

Zorizko aldagaien kasuan, $(\Omega', \mathcal{B}') = (\mathbb{R}, \beta)$ dugu. Gainera, badakigu $\mathcal{C}' = \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$ bada, orduan $\sigma(\mathcal{C}') = \beta$ dugu. Ondorioz, ondoko emaitza dugu:

Korolarioa 2.2.1. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *aplikazioa zorizko aldagaia da ondokoa betetzen bada*

$$X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{B}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ohartu hau izan dela 2. mailako ikastaroan erabili dugun irizpidea aztertzeko X zorizko aldagaia den ala ez. Orain ikusi duguna da hori egiterakoan aztertzen ari garela X zorizko aldagaia neurgarria den ala ez.

Azken korolario hau erabiliz, ondoko emaitza frogatu ahal dugu:

Proposizioa 2.2.2. *Izan bedi* $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ *zorizko aldagaien familia, non edozein* n*-rako* X_n $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ *probabilitate espazioan definitutako zorizko aldagaia den. Orduan,*

1. $\min\{X_1, X_2, \dots\}$ *eta* $\max\{X_1, X_2, \dots\}$ *zorizko aldagaiak dira.*
2. $\liminf_{n\to\infty} X_n$ *eta* $\limsup_{n\to\infty} X_n$ *zorizko aldagaiak dira.*
3. $\lim_{n\to\infty} X_n$ *existitzen bada edozein* ω*-rako* ($\omega \in \Omega$)*, orduan* $\lim_{n\to\infty} X_n$ *zorizko aldagaia da.*

2.3 Aplikazioek Sortutako σ-aljebra

Demagun $(\Omega, \mathcal{B})$ eta $(\Omega', \mathcal{B}')$ bi espazio neurgarri direla eta $X \in \mathcal{B}/\mathcal{B}'$ dela (hau da, neurgarria). Orain, X zorizko aldagai neurgarriak sortutako σ-aljebra definituko dugu, hau da, $\sigma(X)$.

Definizioa 2.3.1. *Aurreko paragrafoko baldintzetan,*

$$\sigma(X) = X^{-1}(\mathcal{B}').$$

Badakigu, $X^{-1}(\mathcal{B}') = \{(X \in A) : A \in \mathcal{B}'\}$ dela, beraz, ondoko eran ere definitu daiteke goikoa:

$$\sigma(X) = \{(X \in A) : A \in \mathcal{B}'\}.$$

Definizio honen arabera, $\sigma(X)$ $\mathcal{B}'$-ren elementuei alderantzizko aplikazioa aplikatuz lortutako elementuez osatuta dago. Hortaz, $X \in \mathcal{B}/\mathcal{B}'$ denez, $\sigma(X)$ $\mathcal{B}$-ren elementuez osatuta dagoela ondorioztatzen dugu. Edo beste modu batean, X aplikazioaren neurgarritasuna ondoko eran definitu daiteke:

$$\sigma(X) \subset \mathcal{B}.$$

Orain, azpi-σ-aljebra zer den ikusiko dugu:

Definizioa 2.3.2. *Demagun $(\Omega, \mathcal{B})$ espazio neurgarria dela. $\mathcal{F}$ σ-aljebra bada non $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$, orduan $\mathcal{F}$ $\mathcal{B}$-ren azpi-σ-aljebra izango da.*

Neurgarritasuna azpi-σ-aljebratarako definitu daitekela ikusiko dugu orain.

Definizioa 2.3.3. *Demagun $(\Omega, \mathcal{B})$ eta $(\Omega', \mathcal{B}')$ espazio neurgarriak direla, $X : \Omega \to \Omega'$ aplikazio bat dela eta $\mathcal{F}$ $\mathcal{B}$-ren σ-aljebra. Horrela, $\sigma(X) \subset \mathcal{F}$ bada, orduan esaten dugu $X \in \mathcal{B}/\mathcal{F}$ dela (neurgarria da $\mathcal{F}$-rekiko).*

Orain, Proposizio 2.1.2 erabiliz, ondoko emaitza frogatuko dugu.

Proposizioa 2.3.1. *Demagun $(\Omega, \mathcal{B})$ eta $(\Omega', \mathcal{B}')$ espazio neurgarriak direla, $X : \Omega \to \Omega'$ aplikazio bat dela eta $\mathcal{C}' \subset \mathcal{P}(\Omega')$ dela non $\sigma(\mathcal{C}') = \mathcal{B}'$. Orduan,*

$$\sigma(X) = \sigma(\{(X \in B) : B \in \mathcal{C}'\}).$$

Frogapena.

$$\sigma(\{(X \in B) : B \in \mathcal{C}'\}) = \sigma(\{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{C}'\}) = \sigma(X^{-1}(\mathcal{C}')).$$

Orain, Proposizio 2.1.2 erabiliz, badakigu $\sigma(X^{-1}(\mathcal{C}')) = X^{-1}(\sigma(\mathcal{C}'))$ egia dela, beraz

$$\sigma(\{(X \in B) : B \in \mathcal{C}'\}) = X^{-1}(\sigma(\mathcal{C}')).$$

Orain, $\sigma(\mathcal{C}') = \mathcal{B}'$ dela erabiliz,

$$\sigma(\{(X \in B) : B \in \mathcal{C}'\}) = X^{-1}(\mathcal{B}').$$

Eta frogapena bukatzen da ohartuz $X^{-1}(\mathcal{B}') = \sigma(X)$ Definizio 2.3.1 dela eta. $\square$

Emaitza honen ondorioz eta kontuan hartuz $\beta = \sigma((-\infty, a] : a \in \mathbb{R})$ dela, jarraian dugun korolarioa lortzen dugu:

Korolarioa 2.3.1. *X zorizko aldagaia bada,*

$$\sigma(X) = \sigma(\{(X \leq a) : a \in \mathbb{R}\}).$$

Emaitza honen ondorioz, ondoko berdintasuna dugu

$$X^{-1}(\beta) = \sigma(\{(X \leq a) : a \in \mathbb{R}\}).$$

2.4 Independentzia

Suposatu $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ probabilitate espazioa dela. Bi gertaeren eta gertaera kopuru infinitoen independentzia gogoratuz hasiko gara:

Definizioa 2.4.1. *Suposatu $A, B \in \mathcal{B}$ direla. Orduan, A eta B independienteak dira $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ bada.*

Definizioa 2.4.2. *Suposatu $A_i \in \mathcal{B},\ i = 1, \ldots, n$ direla. Gertaera hauek*

- *binaka independienteak dira $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$ bada, $\forall i \neq j$.*
- *elkar-independienteak dira ondokoa betetzea bada*

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i),\ \forall I \subseteq \{1, \ldots, n\}$$

2. mailako Probabilitateko ikastaroan ikusi da elkar-independienteak diren gertaerak binaka indendienteak direla, baina kontrakoa ez dela beti betetzen.

Orain gertaeren-familien independentzia definituko dugu. Lehenengo pausua gertaeren-familia kopurua finitua aztertzean datza.

Definizioa 2.4.3. *Suposatu $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{B},\ i = 1, \ldots, n$ gertaera-familiak direla. $\mathcal{C}_i$ klaseak independienteak dira, edozein $A_1, \ldots, A_n$-rako, non $A_i \in \mathcal{C}_i,\ i = 1, \ldots, n$ izanik, $A_1, \ldots, A_n$ gertaerak elkar-independienteak badira.*

Adibidea 2.4.1. *Demagun $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ probabilitate espazioa dela eta $A \in \mathcal{B}$. Hartu $\mathcal{C}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ eta $\mathcal{C}_2 = \{\emptyset, \Omega, A, \bar{A}\}$. Elkar independienteak direla ikusiko dugu:$\forall B \in \mathcal{B}$*

- $\mathbb{P}(\emptyset \cap B) = \mathbb{P}(\emptyset)\mathbb{P}(B) = 0$
- $\mathbb{P}(\Omega \cap B) = \mathbb{P}(\Omega)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B)$

Aurreko adibidean ikusi dugu modu sinplean aztertu daitekela bi gertaeren-familien independentzia. Hala ere, orokorrean goiko metodoa (hau da, definizioa erabiltzea) ezin da erabili, eragiketa kopuru erraldoiak egin behar direlako askotan. Horregatik, gertaeren-familien independentzia aztertzeko modu alternatiboak ikusiko ditugu. Jarraian ikusiko dugun emaitzak σ-algebren independentzia aztertzeko balio du.

Proposizioa 2.4.1 (Oinarrizko Irizpidea). *Demagun* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ *probabilitate espazioa dela eta* $\mathcal{C}_i$ *gertaeren-familia ez-hutsa dela,* $i = 1, \ldots, n$ *izanik, non ondokoak betetzen diren:*

- $\mathcal{C}_i$ π*-sistema da,* $i = 1, \ldots, n$ *izanik,*
- $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ *independienteak dira.*

Orduan, $\sigma(\mathcal{C}_1), \ldots, \sigma(\mathcal{C}_n)$ *independienteak dira.*

Orain, gertaeren-familia kopuru finitotik edozein gertaeren-familien independentzia aztertuko dugu. Suposatuko dugu T edozein multzo dela (zenbakigarria edo ez).

Definizioa 2.4.4. *Suposatu* $\{\mathcal{C}_t : t \in T\}$ *dela, non* $\mathcal{C}_t \subset \mathcal{P}(\Omega)$*. Orduan,* $\{\mathcal{C}_t, t \in T\}$ *independienteak dira, edozein* I *finiturako non* $I \subset T$*,* $\{\mathcal{C}_t, t \in I\}$ *independienteak dira.*

Goiko definizioaren eta Oinarrizko Irizpidearen ondorioz, ondoko emaitza lortzen da.

Korolarioa 2.4.1. *Demagun* $\{\mathcal{C}_t : t \in T\}$ π*-sistemak eta elkar-independienteak direla. Orduan,* $\{\sigma(\mathcal{C}_t) : t \in T\}$ *independienteak dira.*

Orain, zorizko aldagaien independentzia definituko dugu.

Definizioa 2.4.5. *Demagun* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ *probabilitate espazioa dela. Orduan,* $\{X_t, t \in T\}$ *zorizko aldagaien familia independientea da* $\{\sigma(X_t), t \in T\}$ σ*-algebra independienteak badira.*

Gogoratu 2. mailako probabilitate kurtsoan zorizko aldagaien independentzia beste modu batean definitzen direla: zorizko aldagai diskretuetan baterako probabilitate legea eta marginalak berdinak izan behar dira, aldiz zorizko aldagai jarraituetan baterako dentsitate funtzioa eta marginalak berdinak izan behar dira. Ikastaro honetan ikuspuntu orokor batetik aztertuko ditugu zorizko aldagaiak (gehienetan ez dugu bereiziko zorizko aldagai diskretu eta konstanteen artean).

2.5 Borel-Cantelli-ren Lemak

Atal honetan, Borel-Cantelli-ren Lemak ikusiko ditugu. Hauek, $\limsup A_n$-ren probabilitateari buruzko informazioa ematen dute. Has gaitezen lehenengoarekin.

Proposizioa 2.5.1 (Borel-Cantelli-ren Lehenengo Lema). *Demagun* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ *probabilitate espazioa dela eta* $\{A_n, n \geq 1\}$ *gertaeren-familia dela. Orduan,* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$ *bada, orduan*

$$\mathbb{P}(\limsup_{n \to \infty} A_n) = 0.$$

Frogapena. Demagun $\{A_n, n \geq 1\}$, non $A_i \in \mathcal{B}$ den, $i = 1, \ldots, n$. Badakigu $\cap_{k=n}^{\infty} A_k \downarrow$ dela eta lim sup-en definizioa erabiliz,

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right).$$

Orain, probabilitate neurriaren azpi baturkotasunaren zenbakigarriaren propietateagatik, badakigu edozein n-rako $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}\left(\infty A_k\right)$. Beraz,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_n\right) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_k\right).$$

Orain, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$ denez, badakigu $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_k\right) = 0$ dela. Beraz, frogatu dugu nahi genuena. $\square$

Orain, pentsa genezake goiko emaitzaren kontrakoa ere egia dela. Hau da, $\{A_n, n \geq 1\}$ gertaeren-familia batek $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ betetzen badu, orduan $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$ dela. Honen kontradibidea ikusiko dugu orain.

Adibidea 2.5.1. *Demagun* $\Omega = (0, 1)$ *dugula eta* $\{A_n, n \geq 1\}$ *gertaeren-familia dela non* $A_n(0, 1/n)$. *Lebesgue-ren neurria hartuko dugu. Horrela,* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n = \infty$ *dugu. Bestalde, erraz ikusten da* $A_n \downarrow$ *ematen dela eta, ondorioz,* $\limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. *Beraz,* $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$.

Hurrengo emaitza Borel-Cantelli-ren Bigarren Lema deitzen da eta esaten duena zer da: Borel-Cantelli-ren Lehenengo Lemaren kontrakoa egia da independentzia edukiz gero.

Proposizioa 2.5.2 (Borel-Cantelli-ren Bigarren Lema)**.** *Demagun* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ *probabilitate espazioa dela eta* $\{A_n, n \geq 1\}$ ***elkar-independienteak diren*** *gertaeren-familia dela. Orduan,* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ *bada, orduan*

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1.$$

Frogapena. Badakigu $\limsup_{n\to\infty} A_n = \overline{\liminf_{n\to\infty} \overline{A_n}}$ egia dela. Beraz, frogatuko dugu $\mathbb{P}(\liminf_{n\to\infty} \overline{A_n}) = 0$ dela $\{A_n, n \geq 1\}$ elkar-independienteak diren gertaeren-familia denean.

Orain, lim inf-en definizioa eta $\cap_{k\geq n} \bar{A}_k$ ez beherakorra dela erabiliz, ondokoa berdintza lortzen dugu:

$$\mathbb{P}(\liminf_{n\to\infty} \bar{A}_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geq n} \bar{A}_k\right).$$

Beraz, emaitza frogatutzat joko dugu edozein n-rako $\mathbb{P}(\cap_{k\geq n} \bar{A}_k) = 0$ egia dela frogatuz gero. Hau da, orain frogatuko duguna alegia.

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{n+m} \bar{A}_k\right) = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+m} \bar{A}_k\right),$$

bigarren berdintza egiazkoa izanik $\cap_{k=n}^{n+m} \bar{A}_k \supset \cap_{k=n}^{n+m+1} \bar{A}_k$ egia delako. Orain, independentzia dela eta, $\mathbb{P}$ probabilitate-neurria izateagatik, ondoko berdintzak ditugu:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+m} \bar{A}_k\right) = \prod_{k=n}^{n+m} \mathbb{P}\left(\bar{A}_k\right) = \prod_{k=n}^{n+m} \left(1 - \mathbb{P}\left(A_k\right)\right).$$

Orain, $1 - x \leq e^x$ ezberdintza aplikatuz, ondokoa dugu:

$$\prod_{k=n}^{n+m} \left(1 - \mathbb{P}\left(A_k\right)\right) \leq \prod_{k=n}^{n+m} e^{-\mathbb{P}(A_k)}.$$

Ondorioz, gure emaitza frogatuta dago $\prod_{k=n}^{n+m} e^{-\mathbb{P}(A_k)} \to 0$ egia bada, $m \to \infty$ ematen denean. Horretarako, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ egia denez, $\sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = \infty$ ematen dela erabiliko dugu.

$$\lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{n+m} e^{-\mathbb{P}(A_k)} = \lim_{m\to\infty} e^{-\sum_{k=n}^{n+m} \mathbb{P}(A_k)} = e^{-\infty} = 0.$$

□

Borel-Cantelli-ren Lemen ondorioz, Borel-en Zero-bat Legea lortzen dugu, hau da: $\{A_n, n \geq 1\}$ elkar-independienteak diren gertaeren-familia bada,

- $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$ bada, orduan $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ bada, orduan $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$.

2.6 Ariketak

Ariketa 2.6.1. *Demagun $(\Omega, \mathcal{B})$ espazio neurgarria dela. Frogatu $1_A \in \mathcal{B}/\beta$ baldin eta soilik baldin $A \in \mathcal{B}$.*

Ariketa 2.6.2. *Suposatu $X : \Omega \to \mathbb{R}$, X-ren irudia, $\mathcal{R}$, multzo zenbakigarria izanik. Frogatu $X \in \mathcal{B}/\beta$ baldin eta soilik baldin*

$$X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{B}, \quad \forall x \in \mathcal{R}.$$

Ariketa 2.6.3. *Demagun $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ espazio neurgarria dela. Frogatu $\beta \subset \mathcal{B}$ baldin eta soilik baldin edozein funtzio erreala eta jarraitua $\mathcal{B}/\beta$ neurgarria da.*

Ariketa 2.6.4. *Frogatu X zorizko aldagaia berarekin independientea dela baldin eta soilik baldin existitzen da c non $P(X = c) = 1$.*

Ariketa 2.6.5. *Izan bedi $\{X_k, k \geq 1\}$ independienteak eta Ber(p) banaketa jarraitzen duten zorizko aldagaien familia. Zein da probabilitatea 101 patroia infinitu aldiz agertzeko?*

Antzeko moduan, suposatu $\{X_k, k \geq 1\}$ independienteak direla, baina zoriz idatzitako hizkiez osatuta dagoela. Zein da probabilitatea JOSU patroia infinitu aldiz agertzeko? Eta ENARAENEKO infinitu aldiz agertzeko?

Ariketa 2.6.6. *Adibide bat aurkitu non bi zorizko aldagai probabilitate neurri batentzat independienteak diren, baino beste probabilitate neurri batentzat ez.*

Ariketa 2.6.7. *Demagun X_1 eta X_2 zorizko aldagai independienteak direla eta -1 eta 1 balioak baino ez dituzte hartzen probabilitate berdinarekin. Esan daiteke X_1, X_2 eta X_1X_2 binaka independienteak direla? Eta elkar-independienteak?*

Ariketa 2.6.8. *Demagun $B, A_1, A_2, \ldots$ gertaerak direla. Frogatu $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n \cap B) < \infty$ bada, orduan*

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) \leq 1 - \mathbb{P}(B).$$

Ariketa 2.6.9. *Izan bedi $\{X_n :\ n \geq 1\}$ zorizko aldagaien segida, non $X_i \sim Unif(1, 2, \ldots, n)$, $i = 1, 2, \ldots$. Zein da probabilitatea $(X_n = 1)$ gertaera infinitu aldiz emateko?*

3

Itxaropena

Atal honetan, itxaropen matematikoa (edo itxaropena) ikasiko dugu. Horretarako, ez badugu kontrakorik esaten, suposatuko dugu aztertuko ditugun aplikazioak $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ probabilitate espazioan definituta daudela. Zorizko aldagaiak aztertuko ditugunean, $X : (\Omega, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \beta)$ izango dugu, hau da, $X \in \mathcal{B}/\beta$. Aldiz, aplikazioak aztertuko ditugunean, $X : (\Omega, \mathcal{B}) \to (\Omega', \mathcal{B}')$ izango dugu, alegia, $X \in \mathcal{B}/\mathcal{B}'$.

3.1 Definizioa

Demagun X aplikazio bat dela. Horrela, X-ren itxaropena da haren Lebesgue-ren integrala $\mathbb{P}$ probabilitate neurria kontuan hartuta, alegia

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X d\mathbb{P}.$$

3.1.1 Zorizko Aldagai Sinpleak

Has gaitezen zorizko aldagai sinpleetako itxaropenarekin. X zorizko aldagai sinplea dela esango dugu haren irudia finitua bada. Horrela, edozein zorizko aldaia sinple ondoko eran definitu daiteke: $\forall \omega \in \Omega$,

$$X(\omega) = \sum_{i=1^k} a_i 1_{A_i}(\omega),$$

non $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$ eta $A_1, \ldots, A_k$ Ω-ren partiketa den. Ondoko adierazpena neurri-teoriako emaitza ezaguna da eta zorizko aldagai sinpleen Lebesgue-ren integralaren adierazten du.

Definizioa 3.1.1 (Zorizko aldagai sinpleen itxaropena)**.** *X sinplea bada,*

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1^k} a_i \mathbb{P}(A_i).$$

Zenbait adibide ikusiko dugu orain.

Adibidea 3.1.1 (Funtzio adierazlea)**.** *Demagun $A \in \mathcal{B}$ dela. Orduan, $X = 1_A$ bada,*

$$\mathbb{E}[X] = 0 \cdot \mathbb{P}(X=0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(A).$$

Adibidea 3.1.2 (Binomiala)**.** *Demagun $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$ eta elkar-independienteak direla. Suposatu $\mathbb{P}(A_i) = p$, $i = 1, \ldots, n$. Orain, $X = 1_{A_1} + \cdots + 1_{A_n}$ kontzideratuko dugu (hau da, binomiala da). Beraz, Irudi$(X) = \{0, \ldots, n\}$, hau da, zorizko aldagai sinplea da. Horrela,*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= 0 \cdot \mathbb{P}(X=0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X=1) + \cdots + n \cdot \mathbb{P}(X=n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= np\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\
&= np(p+q)^{n-1} \\
&= np.
\end{aligned}$$

Orain, zorizko aldagai sinpleen Lebesgue-ren integralaren propietate batzuk adieraziko ditugu. Haien frogapenak neurri-teoriakoak dira, beraz ez ditugu ikusiko ikastaro honetan.

1. **Lineala:** X eta Y zorizko aldagai sinpleak badira, $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$, edozein a eta b errealetarako.

2. **Ez-negatiboa:** X zorizko aldagai ez-negatiboa bada (hau da, $\forall\omega \in \Omega,\ X(\omega) \geq 0$), $\mathbb{E}[X] \geq 0$.

3. **Monotonia:** X eta Y zorizko aldagai sinpleak badira non $X \leq Y$ (hau da, $\forall\omega \in \Omega,\ X(\omega) \leq Y(\omega)$), $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$.

Oharra 3.1.1. *Itxaropena eragiketa lineala dela ikusi dugu X zorizko aldagai sinplea bada. Hori erabiliz, Adibidea 3.1.2-ko emaitza oso erraz lortzen da:*

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[1_{A_1} + \cdots + 1_{A_n}] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[1_{A_i}] \overset{Adibidea\ 3.1.1}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np.$$

3.1.2 Zorizko Aldagai Ez-negatiboak

Has gaitezen neurri-teoriako ondoko emaitza ikusten.

Proposizioa 3.1.1. *X zorizko aldagai ez-negatiboa bada (hau da, Irudi(X)$\subset [0, \infty]$ bada), orduan existitzen da zorizko aldagai sinpleen segida $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ non $0 \leq X_n \uparrow X$ den.*

Goiko emaitza kontuan hartuta, zorizko aldagai ez-negatiboen itxaropena ondoko eran definitu ahal dugu.

Definizioa 3.1.2 (Zorizko aldagai ez-negatiboen itxaropena)**.** *X ez-negatiboa bada,*

$$\mathbb{E}[X] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n],$$

non $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ zorizko aldagai sinpleen segida den, non $0 \leq X_n \uparrow X$.

Orain, goian definitutakoaren inguruko ondoko oharra ikusiko dugu:

Oharra 3.1.2. *Limitea existitzen da $X_1 \leq X_2 \leq \ldots$ denez, orduan $\mathbb{E}[X_1] \leq \mathbb{E}[X_2] \leq \ldots$ ematen da. Honek esan nahi du $\{\mathbb{E}[X_n] : n \in \mathbb{N}\}$ balio errealdun ez-beherakorra den segida da eta, beraz, limitea du (finitua edo infinitua izan dateke). Gainera, limitearen balioa ez da $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ segidaren araberakoa.*

Neurri-teoriako emaitzen arabera, zorizko aldagai sinpleetan betetzen diren propietateak (linealtasuna, monotonia eta ez-negatibotasun) zorizko aldagaia ez-negatiboen itxaropenak ere betetzen ditu. Gainera, beste propietate hauek ere betetzen duela ikusi da neurri-teoriako ikastaroan:

4. **Fatou-ren Lema:** $\mathbb{E}[\liminf_{n\to\infty} X_n] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n]$

5. **Konbergentzia Monotonoaren Teorema:** $X_n \uparrow X$ bada, orduan $\mathbb{E}[X_n] \uparrow \mathbb{E}[X]$.

6. **Ia-ziurrenik zero:** $\mathbb{E}[X] = 0$ bada, orduan $X = 0$ ia-ziurrenik, hau da, $\mathbb{P}(X = 0) = 1$. Edo beste modu batean esanda, X-k ezberdin zero balioa hartzen badu, X-k balio hori hartzeko probabilitatea zero da (edo zero neurria du balio horrek).

3.1.3 Zorizko Aldagai Errealak

Lehendabizi, zorizko aldagai baten zati positiboa eta negatiboa definituko ditugu.

Definizioa 3.1.3. *Izan bedi X zorizko aldagai erreala. Orduan, X^+ X-ren zati positiboa da eta X^- zati negatiboa. Hau da, edozein $\omega \in \Omega$-rako,*

$$X^+(\omega) = \begin{cases} X(\omega), & X(\omega) \geq 0, \\ 0, & X(\omega) < 0, \end{cases}$$

eta

$$X^+(\omega) = \begin{cases} 0, & X(\omega) \geq 0, \\ -X(\omega), & X(\omega) < 0. \end{cases}$$

Ohartu X^+ eta X^- zorizko aldagai ez-negatiboak direla. Hortaz, lehen ikusitakoaren arabera, haien itxaropena beti existitzen da. Gainera, ondoko adierazpenak egiazkoak direla erraz frogatu daiteke:

$$X = X^+ - X^-, \qquad |X| = X^+ + X^-. \tag{3.1}$$

Horrela, zorizko aldagai errealen itxaropena definituko dugu.

Definizioa 3.1.4 (Zorizko aldagai errealen itxaropena)**.** *X erreala dela suposatu. Orduan*

- *$\mathbb{E}[X^+]$ edo $\mathbb{E}[X^-]$ finituak badira, orduan*

  $$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^+] - \mathbb{E}[X^-].$$

  Gainera, $\mathbb{E}[X^+] < \infty$ eta $\mathbb{E}[X^-] < \infty$ badira, orduan $\mathbb{E}[X] \in \mathbb{R}$ eta X integragarria dela esaten dugu.

- *$\mathbb{E}[X^+] = \mathbb{E}[X^-] = \infty$ bada, orduan $\mathbb{E}[X]$ ez dago definituta.*

Goiko emaitzaren arabera, X zorizko aldagai integragarria da $\mathbb{E}[X^+] < \infty$ eta $\mathbb{E}[X^-] < \infty$ badira. Orain, beste baldintza bat ikusiko dugu.

Proposizioa 3.1.2. *X integragarria da baldin eta soilik baldin $\mathbb{E}[|X|] < \infty$.*

Integragarriak diren zorizko aldagaiak linealitate eta monotonia propietateak betetzen dituzte. Gainera, ondokoa ere betetzen dela ikusiko dugu:

$$|\mathbb{E}[X]| \leq \mathbb{E}[|X|].$$

Propietate hau frogatuko dugu X^+ eta X^- ez-negatiboak direla erabiliz (eta beraz itxaropenak linealitate propietatea betetzen du), baita ezberdintza triangeluarra ere:

$$|\mathbb{E}[X]| = |\mathbb{E}[X^+ - X^-]| = |\mathbb{E}[X^+] - \mathbb{E}[X^-]| \leq \mathbb{E}[X^+] + \mathbb{E}[X^-] = \mathbb{E}[X^+ + X^-] = \mathbb{E}[|X|].$$

Goiko adierazpenerako ere erabili dugu (3.1).

3.1.4 Zorizko Aldagai Konplexuak

Zorizko aldagai konplexua definituko dugu jarraian.

Definizioa 3.1.5. *Zorizko aldagai konplexua $Z : \Omega \to \mathbb{C}$ aplikazio neurgarri bat da.*

Hortaz, $Z = X + iY$ izango da, X eta Y zorizko aldagai errealak izanik, hau da, bi dimentsioko zorizko bektorea da (X,Y), X izanik zati erreala eta Y zati irudikaria. Zorizko aldagai konplexuen integragarritasuna eta itxaropena definituko ditugu.

Definizioa 3.1.6. *Z zorizko aldagai konplexua integragarria da X eta Y integragarriak badira. Horrela, Z integragarria bada, ondoko eran definituko dugu bere itxaropena:*

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X] + i\mathbb{E}[Y].$$

Orain, zorizko aldagai konplexuen integragarritasuna karakterizatuko dugu.

Proposizioa 3.1.3. *Demagun Z zorizko aldagai konplexua dela. Orduan Z integragarria da baldin eta soilik baldin $\mathbb{E}[|Z|] < \infty$.*

Atal honetan, aurreko atalean ikusitakoa orokortzen ari gara (izan ere, balio erreal bat zati irudikariaren balioa zero duen zenbaki konplexu bat da).

3.2 Ezaugarri Nagusiak

Orain, itxaropenaren ezaugarri nagusiak ikasiko ditugu. Emaitza hauek hurrengo kapituluetan erabilgarriak izango dira. Hala ere, emaitza hauen frogapenak ez ditugu ikusiko; izan ere, neurri-teoriako edo aurreko ataletan agertutako frogapenak dira. Aurreko ataletan bezala, zorizko aldagaiak $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ probabilitate espazioan definituta daudela kontzideratuko dugu.

- $X \sim k$ bada, orduan $\mathbb{E}[X] = k$
- $A \in \mathcal{B}$ bada, orduan $\mathbb{E}[1_A] = \mathbb{P}(A)$
- X sinplea bada, orduan X integragarria da
- X ez-negatiboa bada, orduan $\mathbb{E}[X]$ beti existitzen da (eta $[0, \infty]$ tarte <u>itxiko</u> balioak har ditzake)
- integragarria da baldin eta soilik baldin $\mathbb{E}[|Z|] < \infty$.
- Z zorizko aldagai konplexua bada, $\mathbb{E}[Z] = 0$ bada, orduan $Z = 0$ da ia-ziurrenik.

- X eta Y ez-negatiboak badira, orduan $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
  Z_1 eta Z_2 zorizko aldagai konplexu integragarriak badira, orduan $\mathbb{E}[Z_1 + Z_2] = \mathbb{E}[Z_1] + \mathbb{E}[Z_2]$

- X ez-negatiboa eta $c \in \mathbb{R}$ badira, orduan $\mathbb{E}[cX] = c\mathbb{E}[X]$
  Z zorizko aldagai konplexu integragarria eta $c \in \mathbb{C}$ badira, orduan $\mathbb{E}[cZ] = c\mathbb{E}[Z]$

- Demagun X eta Y ez-negatiboak edo errealak direla. Orduan $X \leq Y$ bada, orduan $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$

- Z zorizko aldagai konplexu integragarria bada, orduan $|\mathbb{E}[Z]| \leq \mathbb{E}[|Z|]$

- **Fatou-ren lema.** $Z_1, Z_2, \ldots$ zorizko aldagai konplexu integragarriak badira, orduan
$$\mathbb{E}[\liminf_{n\to\infty} |Z_n|] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[|Z_n|]$$

- **Konbergentzia Monotonoaren Teorema.** Demagun $X, X_1, X_2, \ldots,$ zorizko aldagai ez-negatiboak direla, non $X_n \uparrow X$ den. Orduan, $\mathbb{E}[X] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n]$

- **Konbergentzia Menderatuaren Teorema.** Demagun $Z, Z_1, Z_2, \ldots,$ zorizko aldagai konplexu integragarriak direla, non $Z_n \uparrow Z$ den. Existitzen bada U zorizko aldagai ez-negatibo integragarria non $|Z_n| \leq U$ den, orduan $\mathbb{E}[Z] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Z_n]$

- **Aldagai Aldaketaren Teorema.** Demagun $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ eta $(\Omega', \mathcal{B}', \mathbb{P}')$ bi probabilitate espazio direla eta $X : (\Omega, \mathcal{B}) \to (\Omega', \mathcal{B}')$ aplikazio neurgarria dela. Gainera, h zorizko aldagaia konplexua da $(\Omega', \mathcal{B}')$ espazio neurgarrian definitutakoa. Horrela,
$$\int_\Omega h(X)\ d\mathbb{P} = \int_{\Omega'} h\ d\mathbb{P}'$$
  Azken emaitza honetatik, bigarren mailako probabilitate ikastaroan ikusitako itxaropenaren adierazpenak lortzen dira. Hori ikusteko, har dezagun X zorizko aldagai diskretua dela, haren irudia S izanik. Orduan, $\Omega' = S$ dela kontzideratuko dugu eta $\mathbb{P}' = \mathbb{P} \circ X$ dela ere. Horrela,
$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{\Omega'} h\ d\mathbb{P}' = \sum_{s\in S} h(s)P(X = s).$$

Oharra 3.2.1. *Azken emaitza honi, $h = e^{itX}$ aplikatuz, integragarria den aplikazio bat lortzen dugu. Hori ikusteko, $|e^{itX}| = 1$ dela ohartuko gara; izan ere,*
$$|e^{itX}|^2 = cos^2(tX) + sin^2(tX) = 1.$$
Beraz,
$$\int_\Omega |e^{itX}| d\mathbb{P} = \int_\Omega d\mathbb{P} = 1 < \infty.$$

Hurrengo kapituluan $\mathbb{E}[e^{itX}]$ *funtzio ezaugarria dela ikusiko dugu.*

3.3 Integral Definitugabeak

Orain dela urte asko dakigula, balio errealak ditugunean, integralak definituak eta definitugabeak existitzen direla. Lebesgue-ren integralaren kasuan ere, definituak eta definitugabeak ere existitzen dira.

Izan bedi $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ probabilitate espazioa eta X ez-negatiboa edo konplexu integragarria den zorizko aldagaia dela suposatu (hau da, $\mathbb{E}[X]$ existitzen dela suposatu).

Definizioa 3.3.1. *$A \in \mathcal{B}$ bada, orduan A-ren integral definitugabea ondokoa da:*

$$\int_A X \; d\mathbb{P} = \mathbb{E}[X 1_A] = \int_\Omega X \; 1_A \; d\mathbb{P}.$$

Oharra 3.3.1. *Ohartu $\mathbb{E}[X1_A]$ ondo definituta dagoela. Izan ere, $X \geq 0$ bada, orduan $X1_A$ ere ez-negatiboa da eta, horregatik, $\mathbb{E}[X1_A]$ existitzen da. Aldiz, X zorizko aldagai konplexu integragarria bada, orduan $X1_A$ ere integragarria da; izan ere*

$$|X1_A| = |X||1_A| \leq |X|,$$

eta, ondorioz, X integragarria denez,

$$\mathbb{E}[|X1_A|] \leq \mathbb{E}[|X|] < \infty.$$

Beraz, $A \in \mathcal{B}$ gertaera bada, $\int_A X \; d\mathbb{P}$ A-ren integral definitugabea da eta froga daiteke neurri positibo bat dela, hau da, $A_1, A_2, \ldots, \in \mathcal{B}$ eta bateraezinak badira,

$$\int_{\cup_{n\geq 1} A_n} X \; d\mathbb{P} = \sum_{n\geq 1} \int_{A_n} X \; d\mathbb{P}. \tag{3.2}$$

Ondorioz, neurri positiboen ezaugarriak betetzen ditu. Esate baterako: A eta B gertaerak badira non $A \subset B$, orduan

$$\int_A X \; d\mathbb{P} \leq \int_B X \; d\mathbb{P}.$$

3.4 Itxaropen Baldintzatua

Demagun $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ eta $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{Q})$ probabilitate espazioak direla. Orduan, esan daiteke

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] = \int_\Omega X \; d\mathbb{P}, \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X] = \int_\Omega X \; d\mathbb{Q}.$$

Edozein $A, B \in \mathcal{B}$-rako, idatziko dugu $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B|A)$. Gogoratu $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B\cap A)}{\mathbb{P}(A)}$ ematen dela, $\mathbb{P}(A) > 0$ denean.

Definizioa 3.4.1. *X ez-negatiboa edo konplexu integragarria bada ($\mathbb{P}$-rekiko), orduan $\mathbb{P}(A) > 0$ bada*

$$\mathbb{E}[X|A] = \frac{\mathbb{E}[X1_A]}{\mathbb{E}[1_A]} = \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \int_A X \; d\mathbb{P}.$$

Ikusiko dugu $X = 1_B$ kasuan, probabilitate baldintzatuaren definizioarekin bat datorrela ikusiko dugu. Izan ere,

$$\mathbb{E}[1_B|A] = \int_\Omega 1_B \; d\mathbb{P}_A = \mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{E}[1_{A\cap B}]}{\mathbb{E}[1_A]} = \frac{\mathbb{E}[1_A 1_B]}{\mathbb{E}[1_A]}.$$

Probabilitate osoaren teoremaren baliokidea den itxaropena osoaren teorema ikusiko dugu orain.

Teorema 3.4.1 (Itxaropen Osoaren Teorema)**.** *Demagun $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ Ω-ren partiketa dela eta X ez-negatiboa edo integragarria dela ($\mathbb{P}$-rekiko). Orduan, $\mathbb{P}(A_i) > 0$ denean, $i = 1, 2, \ldots$*

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n)\mathbb{E}[X|A_n].$$

Frogapena. $\Omega = \cup_{n\geq 1} A_n$ denez,

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X \; d\mathbb{P} = \int_{\cup_{n\geq 1} A_n} X \; d\mathbb{P} \stackrel{(3.2)}{=} \sum_{n\geq 1} \int_{A_n} X \; d\mathbb{P}$$

Orain, Proposizio 3.4.1 kontuan hartuz,

$$\sum_{n\geq 1} \int_{A_n} X \; d\mathbb{P} = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n)\mathbb{E}[X|A_n].$$

Eta kontuan hartuta $\sum_{n\geq 1} \int_{A_n} X \; d\mathbb{P} = \mathbb{E}[1_A]$ egia dela, frogatu dugu teorema. □

Oharra 3.4.1. *$X = 1_B$ denean, Itxaropen Osoaren Teoremak Probabilitate Osoaren Teoremarekin koinziditzen du.*

3.5 L_p Espazioak eta Ezberdintza Garrantzitsuak

Demagun $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ probabilitate espazioa dela. Orduan, $\mathcal{L}$ izango da probabilitate espazio horretan definitutako zorizko aldagai konplexuen multzoa. Orain $\mathcal{L}_p$ espazioak definituko ditugu.

Definizioa 3.5.1. *Izan bedi $p > 0$, orduan*

$$\mathcal{L}_p = \{X \in \mathcal{L} : \; \mathbb{E}[|X|^p] < \infty\}.$$

Neurri teoriako ikastaroan ikusi denaren arabera, neurri finituek ondoko propietatea betetzen dute: $0 < p < q$ bada, orduan $\mathcal{L}_q \subset \mathcal{L}_p$ ematen da. Probabilitate neurria neurri finitua denez (hau da, $\mathbb{P}(\Omega) = 1 < \infty$), orduan propietate hau betetzen du. Holderrren ezberdintzaren korolario baten ondorioa dela ikusiko dugu.

Neurri teorian ikusitakoarekin jarraituz, $p, q \in [1, \infty)$ badira, esango dugu p eta q zenbaki konjugatuak direla ondokoa betetzen bada: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ohartu $p > 1$ bada, $q = \frac{p}{p-1} > 1$ hartu ahal dugula eta, horrela, p eta q konjugatuak dira. Izan ere,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = \frac{p}{p} = 1.$$

Orain, Holder-en ezberdintza ikusiko dugu; haren frogapena neurri teoriako liburuan aurkitu daiteke.

Proposizioa 3.5.1 (Holder-en ezberdintza)**.** *Demagun p eta q konjugatuak direla eta $U, V \in \mathcal{L}$. Orduan,*

$$\mathbb{E}[UV] \leq \mathbb{E}\left(|U|^p\right)^{\frac{1}{p}} \mathbb{E}\left(|V|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Goiko emaitzaren ondorioz, ondoko propietatea dugu: $U \in \mathcal{L}_p$ eta $V \in \mathcal{L}_q$ badira eta p eta q konjugatuak badira, orduan $UV \in \mathcal{L}$ da.

Oharra 3.5.1. *Holder-en ezberdintza edozein neurrirako betetzen da, ez da zertan neurri finitua edo probabilitate neurria izan.*

Holder-en ezberdintzaren korolario batzuk aurkeztuko ditugu orain. Lehenengoa Cauchy-Schwartz-en ezberdintza izango da, non Holder-en ezberdintza $p = q = 2$ kasuan aplikatuta lortzen den.

Korolarioa 3.5.1 (Cauchy-Schwartz-en ezberdintza)**.** *Demagun $U, V \in \mathcal{L}$ dela. Orduan,*

$$\mathbb{E}[UV] \leq \sqrt{\mathbb{E}\left(|X|^2\right)}\sqrt{\mathbb{E}\left(|X|^2\right)}.$$

Eta Cauchy-Schwartz-en ezberdintzaren ondorioz, ondoko propietatea lortzen dugu: $U, V \in \mathcal{L}_p$ badira, orduan $UV \in \mathcal{L}$ da.

Holder-en ezberdintzaren beste korolario bat ikusiko dugu orain.

Korolarioa 3.5.2 (Lyapunov-en ezberdintza)**.** *Izan bedi $X \in \mathcal{L}$ eta $0 < r < s$. Orduan,*

$$\left(\mathbb{E}[|X|^r]\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\mathbb{E}[|X|^s]\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Frogapena. Idatziko dugu $p = \frac{s}{r} > 1$ eta q hautatuko dugu p eta q konjugatuak izateko, hau da, $q = \frac{p}{p-1} > 1$. Orain, $U = |X|^r$ eta $V = 1$ balioetarako, Holder-en ezberdintza aplikatuko dugu eta horrela

$$\mathbb{E}[|X|^r\ 1] \leq \left(\mathbb{E}[||X|^r|^p]\right)^{\frac{1}{p}} \left(\mathbb{E}[1^q]\right)^{\frac{1}{q}} \overset{p=\frac{s}{r}}{=} \left(\mathbb{E}[|X|^s]\right)^{\frac{r}{s}}.$$

Ondorioz, $\left(\mathbb{E}[|X|^r]\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\mathbb{E}[|X|^s]\right)^{\frac{1}{s}}$ frogatu dugu. □

Lyapunov-en ezberdintzak dioena ondokoa da: $0 < r < s$ bada, orduan

$$(\mathbb{E}[|X|^r])^{\frac{1}{r}} \leq (\mathbb{E}[|X|^s])^{\frac{1}{s}}.$$

Beraz, emaitza honen ondoriz, goian aipatutako propietatea betetzen da, hau da, $0 < r < s$ bada, orduan $\mathcal{L}_s \subset \mathcal{L}_r$.

Orain, Minkowski-ren ezberdintza ikusiko dugu. Frogapena neurri teoriako liburuetan agertzen da.

Proposizioa 3.5.2 (Minkowski-ren ezberdintza (edo ezberdintza triangeluarra))**.** *Demagun $X, Y \in \mathcal{L}$ eta $p \geq 1$. Orduan,*

$$(\mathbb{E}[|X+Y|^p])^{\frac{1}{p}} \leq (\mathbb{E}[|X|^p])^{\frac{1}{p}} + (\mathbb{E}[|Y|^p])^{\frac{1}{p}}$$

Ohartu goiko emaitza edozein neurrirako betetzen dela, hau da, ez da zertan probabilitate neurria (edo neurri finitua) izan. Bestalde, $p \in (0,1)$ denean, Minkowski-ren ezberdintza ez da beti egia.

Ikusiko ditugun hurrengo emaitzak Markov-en ezberdintzak deitzen dira.

Proposizioa 3.5.3 (Markov-en ezberdintzak)**.** *Demagun $X \in \mathcal{L}$ dela. Orduan,*

1. $\forall \epsilon > 0$ *eta* $\forall r > 0$, $\mathbb{P}(|X| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|^r]}{\epsilon^r}$.

2. *existitzen bada konstante bat k non $|X| \leq k$, $\forall \epsilon > 0$ eta $\forall r > 0$*

$$\mathbb{P}(|X| > \epsilon) \geq \frac{\mathbb{E}[|X|^r - \epsilon^r]}{k^r - \epsilon^r}.$$

Bukatzeko, Jensen-en ezberdintza ikusiko dugu.

Proposizioa 3.5.4 (Jensen-en ezberdintzak)**.** *Demagun $X : \Omega \to I$, I tarte ireki bat izanik, eta $\psi : I \to \mathbb{R}$ konbexua dela. Horrela, $X, \psi(X) \in L_1$ badira,*

$$\psi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\psi(X)].$$

Frogapena Irudi(X) multzo finitua dela suposatuz egingo dugu. Ohartu $\psi(x) = x^2$ hartzen baduzu, bigarren mailako Probabilitate ikastaroan ikusitako ezberdintza lortzen dugula:

$$\mathbb{E}[X^2] \geq (\mathbb{E}[X])^2.$$

3.6 Bariantza eta Kobariantza

Atal honetako zorizko aldagai guztiak probabilitate espazio berdinean egongo dira definituta eta errealak eta integagarriak izango dira, hau da, $X \in \mathcal{L}_1$.

Gogoratu X zorizko aldagaiaren bariantza $Var[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X]^2)]$ dela. Gainera, bariantzaren unitateak karratuan adierazten dira eta $Var[X] \geq 0$ ematen da. Orain, bariantzaren zenbait propietate ikusiko dugu.

Ondoko emaitzak frogatzen du $Var[X]$ zero denean, X konstantea dela ia ziurrenik, hau da, existitzen dela k non $\mathbb{P}(X = k) = 1$. Edo beste modu batean esanda, X-k konstante horrekiko ezberdinak diren balioak hartu ahal ditu, baino balio horiek hartzeko probabilitatea zero da.

Lema 3.6.1. *$Var[X] = 0$ bada, orduan X-k konstante baten balioa du ia ziurrenik.*

Frogapena.

$$Var[X] = 0 \Rightarrow \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = 0 \Rightarrow (X - \mathbb{E}[X])^2 \overset{i.z.}{=} 0 \Rightarrow X - \mathbb{E}[X] \overset{i.z.}{=} 0.$$

Beraz, X ia ziurrenik konstante bat da, hau da, $\mathbb{E}[X]$. $\square$

Lema 3.6.2. $Var[X] < \infty \iff X \in \mathcal{L}_2$.

Frogapena.

$$Var[X] < \infty \iff X - \mathbb{E}[X] \in \mathcal{L}_2 \iff X - \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X] \in \mathcal{L}_2 \iff X \in \mathcal{L}_2.$$

$\square$

Bestalde, badakigu bigarren mailako Probabilitate ikastarotik, bariantza ere ondoko moduan adierazi daitekela: $Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$.

Orain, kobariantza definituko dugu.

Definizioa 3.6.1.

$$Cov[X, Y] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])].$$

Ohartu $X, Y \in \mathcal{L}_2$ bada, orduan $X - \mathbb{E}[X] \in \mathcal{L}_2$ eta $Y - \mathbb{E}[Y] \in \mathcal{L}_2$. Ondorioz, Cauchy-Schwartz-en ezberdintza erabiliz,

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] \leq \sqrt{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]}\sqrt{\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2]} < \infty.$$

Beraz, $X, Y \in \mathcal{L}_2$ bada, orduan $(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y]) \in \mathcal{L}_1$ ematen da.

Definizioa 3.6.2. *Demagun $X, Y \in \mathcal{L}_2$ dela. Orduan, X eta Y koerlaziorik gabekoak direla esango dugu $Cov[X, Y] = 0$ bada.*

3.7 Ariketak

Ariketa 3.7.1. *Izan bedi X zorizko aldagai konplexua. Frogatu*

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|X| \geq n) \leq \mathbb{E}[|X|] \leq \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(|X| \geq n).$$

Ondorioz, X integragarria da $\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(|X|\geq n)<\infty$ bada.

Ariketa 3.7.2. *Demagun $N, X_1, X_2, \ldots$ zorizko aldagai independienteak direla non N-ren irudia $\{0,1,2,\ldots\}$ den eta $X_1, X_2, \ldots$ berdinki banatuta dauden. Suposatu N eta X_1 integragarriak direla. Orduan, $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$ integragarria da.*

Ariketa 3.7.3. *Demagun X eta Y zorizko aldagai independienteak direla eta $\mathbb{E}[X]$ existitzen dela. Orduan, edozein $B\in\mathcal{B}$-rako,*

$$\int_{(Y\in B)} X d\mathbb{P} = \mathbb{E}[X]\mathbb{P}(Y\in B)$$

Ariketa 3.7.4. *Ondokoa frogatu: edozein a eta t errealetarako,*

$$\mathbb{P}(|X|\geq a)\leq e^{-at}e^{t|X|}.$$

Ariketa 3.7.5. *Izan bedi $r>1$. Frogatu ondokoak $\mathbb{E}\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right|^r\right]$-ren goi-bornak direla:*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[|X_i|^r], \quad \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{E}[|X_i|^r])^{\frac{1}{r}}\right)^r.$$

Zein da goi-bornarik onena?

Ariketa 3.7.6. *Demagun $A, B\in\mathcal{B}$. Frogatu 1_A eta 1_B koerlazio gabekoak direla baldin eta soilik baldin A eta B independienteak badira.*

4

Funtzio Ezaugarriak

Kapitulu honetan, funtzio ezaugarria zer den ikasiko dugu, baita haren propietateak ere. Funtzio ezaugarriak lagungarriak dira zorizko aldagaien ezaugarriak aztertzeko. Gainera, hurrengo kapituluan ikusiko dugu zorizko aldagaien konbergentzia aztertzeko ere baliogarriak direla.

4.1 Definizioa

Has gaitezen zenbait definizio ikusten.

Definizioa 4.1.1. *Demagun X zorizko aldagaia dela non Irudi(X)$\subset \{0, 1, \dots\}$. X-ren probabilitate funtzio sortzailea ondokoa da*

$$g_X(t) = \mathbb{E}[t^X].$$

Definizioa 4.1.2. *X zorizko aldagai erreala bada, orduan ondokoari X-ren funtzio ezaugarria deitzen zaio:*

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}], \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ohartu ondo definituta dagoela funtzio ezaugarria; izan ere $|e^{itX}| = 1 < \infty$, beraz e^{itX} integragarria da (hau da, e^{itX}-ren itxaropena existitzen da).

Bestalde, ikusiko dugu funtzio ezaugarria aldagai errealeko funtzio konplexua dela, hau da, $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$; izan ere,

$$\varphi_X(t) = \int_\Omega e^{itX}\, d\mathbb{P} = \int_\Omega (\cos(tX) + i\, \sin(tX)) d\mathbb{P} = \int_\Omega \cos(tX)\, d\mathbb{P} + i \int_\Omega \sin(tX))\, d\mathbb{P} = Re(\psi(t)) + iIm(\psi(X)).$$

Beste propietate garrantzitsu bat da ondokoa da. Bi zorizko aldagai X eta Y berdinki banatuta badaude, orduan $\varphi_X = \varphi_Y$ ematen da. Honen arrazoia da, bi zorizko aldagai berdinki banatuta badaude, haien itxaropena berdina dela. Aurrerago ikusiko dugu beste inplikazioa ere egiazkoa dela; hau da, $\varphi_X = \varphi_Y$ ematen bada, orduan X eta Y berdinki banatuta daudela.

Funtzio ezaugarriaren kalkuluari dagokionez, oso erraza da X-k $0, 1, 2, \ldots$ balioak baino ez baditu hartzen; izan ere,

$$\varphi_X(t) = g_X(t).$$

Esate baterako, $X \sim Bin(n, p)$ bada,

$$g_X(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} t^k \binom{n}{k} p^k (1-q)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (tp)^k (1-q)^{n-k} = (tp+q)^n$$

eta ondorioz, $\varphi_X(t) = (pe^{it} + q)^n$.

Zorizko aldagai orokorragoetan, itxaropenaren balioa kalkulatu behar da. Esate baterako, $X \sim Exp(\lambda)$ bada, orduan

$$\varphi_X(t) = \int_0^\infty e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^\infty e^{(it-\lambda)x} dx = \frac{-\lambda}{it - \lambda}.$$

Beste kasu interesgarri bat $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ denean ematen da. Kasu honetako funtzio ezaugarria honakoa dela frogatu daiteke: $\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}$.

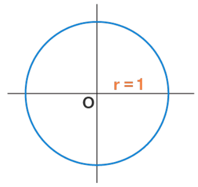
4.2 Oinarrizko Ezaugarriak

Orain, funtzio ezaugarrien zenbait propietate frogatuko dugu:

1. $\varphi_X(0) = 1$. Izan ere,
$$\varphi_X(0) = \mathbb{E}[e^0] = 1.$$

2. $|\varphi_X(t)| \leq 1$. Izan ere,
$$|\varphi_X(t)| = |\mathbb{E}[e^{itX}]| \leq \mathbb{E}[|e^{itX}|] = \mathbb{E}[1] = 1.$$

   Propietate honen ondorioz, esan daiteke funtzio ezaugarria plano konplexuko bat erradiodun zirkuluaren barruan egongo dela.



3. φ_X uniformeki jarraitua da $\mathbb{R}$-n.

4. $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$. Izan ere,

$$\mathbb{E}[e^{(aX+b)it}] = \mathbb{E}[e^{aXit}e^{bit}] = e^{bit}\mathbb{E}[e^{aXit}] = e^{bit}\varphi_X(at).$$

Emaitza honen ondorioz, $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ bada eta $Y = \sigma X + \mu$ bada, orduan $Y \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma)$ lortzen dugu. Beraz, $\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}$ denez,

$$\varphi_Y(t) = e^{it\mu}\varphi_X(\sigma t) = e^{it\mu}e^{-(\sigma t)^2/2} = e^{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

5. $\varphi_{-X}(t) = \overline{\varphi_X(t)}$. Izan ere,

$$\varphi_{-X}(t) = \mathbb{E}[e^{-itX}] = \mathbb{E}[\cos(tX)+i\ \sin(-tX)] = \mathbb{E}[\cos(tX)]-i\ \mathbb{E}[\sin(tX)] = \overline{\varphi_X(t)}.$$

6. Demagun $X_1, X_2, \ldots, X_n$ zorizko aldagai independienteak eta definitu $Y = \sum_{i=1}^n X_i$. Orduan $\varphi_Y(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(t)$, edozein $t \in \mathbb{R}$-rako. Izan ere,

$$\varphi_Y(t) = \mathbb{E}[e^{itY}] = \mathbb{E}[e^{it(X_1+\cdots+X_n)}] \overset{inde}{=} \mathbb{E}[e^{itX_1}]\ldots\mathbb{E}[e^{itX_n}].$$

Horrela, zorizko aldagaiek banaketa berdina badute (hau da, X_i guztien funtzio ezaugarria $\varphi_X(t)$ bada), $\varphi_Y(t) = (\varphi_X(t))^n$.

4.3 Funtzio Ezaugarrien Deribatuak eat Momentuak

Orain, imaginatu integrala eta deribatua t-rekiko ordenez aldatu ahal direla. Orduan,

$$\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega e^{itX} d\mathbb{P}\right) = \int_\Omega \frac{d}{dt}(e^{itX})d\mathbb{P},$$

eta ondorioz,

$$\varphi'_X(t) = \int_\Omega iXe^{itX}\ d\mathbb{P}, \varphi''_X(t) = \int_\Omega (iX)^2e^{itX}\ d\mathbb{P}, \ldots, \varphi^{(k)}_X(t) = \int_\Omega (iX)^k e^{itX}\ d\mathbb{P}.$$

Horregatik, ondoko propietatea lortuko genuke: $\varphi^{(k)}_X(0) = i^k\mathbb{E}[X^k]$.

Ondoko emaitzak adieraziko digu noiz integrala eta deribatua t-rekiko ordenez aldatu ahal diren.

Lema 4.3.1. *Demagun* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ *probabilitate espazioa eta* I *tarte bat direla. Suposatu* $f : i \times \Omega \to \mathbb{C}$ *dela, non*

- $\forall t \in I,\ f(t, \cdot) : \Omega \to \mathbb{C}$ *zorizko aldagai integragarria da*
- $\forall \omega \in \Omega,\ f(\cdot, \omega) : I \to \mathbb{C}$ *deribagarria da*
- *existitzen da* $g : \Omega \to [0, \infty]$ *zorizko aldagai ez-negatiboa eta integragarria non*

$$\left|\frac{d}{dt}\int_\Omega f(t,\omega)d\mathbb{P}(\omega)\right| \leq g(\omega),\ \forall (t,\omega) \in I \times \Omega.$$

Orduan,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega f(t,\omega)\ d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} f(t,\omega)\ d\mathbb{P}(\omega).$$

Frogapenaren ideia konbergentzia monotonoaren teorema erabiltzea da. Ez dugu goiko emaitza hau frogatuko. Aldiz, jarraian dugun emaitza frogatzeko erabiliko dugu.

Proposizioa 4.3.1. *Suposatu* $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$ *dela. Orduan,* φ_X *n aldiz deribagarria da* $\mathbb{R}$*-n eta, gainera,* $k = 1, \ldots, n$ *eta* $\forall t \in \mathbb{R}$*,*

$$\varphi_X^{(k)}(t) = \int_\Omega (iX)^k e^{itX}\ d\mathbb{P}.$$

Ondorioz, $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$*,* $k = 1, \ldots, n$*.*

Goiko emaitzaren propietateez gain, froga daiteke $\varphi'_X, \varphi''_X, \ldots, \varphi_X^{(n)}$ uniformeki jarraituak direla $\mathbb{R}$-n; frogapena 4.2 Ataleko 3. propietatearen frogapenaren antzekoa da, beraz ez dugu egingo.

Aurreko proposizio honen ondorioz, ondoko korolarioa dugu:

Korolarioa 4.3.1. $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$ *bada, orduan* $\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^n \frac{i^k \mathbb{E}[X^k]}{k!} t^k + o(t^n)$*,* $t \to 0$ *denean.*

Adibidez, $X \in \mathcal{L}_2$ bada, $\mathbb{E}[X] = \mu$ eta $\mathbb{E}[X^2] = \sigma^2$ badira,

$$\phi_X(t) = 1 + i\mu t + \frac{(i\sigma t)^2}{2} + o(t^2) = 1 + i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + o(t^2),$$

$t \to 0$ denean.

4.4 Inbertsio Formulak

Funtzio ezaugarriaren definizioa erabiliz, edozein zorizko aldagaiaren funtzio ezaugarria kalkulatu ahal dugu. Orain, ondoko galdera izan ahal dugu: eta alderantzizkoa posiblea da? Alegia, φ_X ezagutuz gero, esan daiteke zerbait X-ren banaketari buruz. Inbertsio formularen bidez, φ_X-ren balioak erabiliz X-ren banaketaren balioak lortu daitezke.

Lehenik, suposatuko dugu X zorizko aldagaiak balio osoak baino ez dituela hartzen.

Proposizioa 4.4.1. *Izan bedi X zorizko aldagaia. Suposatu Irudi(X) $\subset \mathbb{Z}$. Orduan $n \in \mathbb{Z}$ bada,*

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-itn} \varphi_X(t)dt.$$

Orain, Levy-ren inbertsio formula ikusiko dugu.

Proposizioa 4.4.2 (Levy-ren inbersio formula)**.** *Izan bedi X zorizko aldagaia, haren banaketa funtzioa F izanik. Demagun a eta b ($a < b$) direla eta F jarraitua dela a eta b balietan.*

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_X(t)dt. \tag{4.1}$$

Emaitza honen frogapena ez dugu ikastaro honetan ikusiko. Hala ere, ondorio garrantzitsu bat duela ikusiko dugu orain. Izan ere, (4.1)-ri erreparatuz, ezkerreko zatia X-ren banaketa funtzioaren balioak dira; eskubikoa, aldiz, ϕ_X finkatzen badugu, balio bakarra du. Hortaz, esan daiteke funtzio ezaugarrien bakartasunaren lortu dugu, ondoko emaitzan azaltzen den bezala.

Korolarioa 4.4.1 (Funtzio Ezaugarrien Bakartasun Teorema)**.** *Demagun X eta Y zorizko aldagaiak direla. Orduan, $\varphi_X = \varphi_Y$ baldin eta soilik baldin $F_X = F_Y$.*

Frogapena. Suposatu $F_X = F_Y$ dela. Beraz, X eta Y berdinki banatuta daudela. Definizio 4.1.2-gatik, $\varphi_X = \varphi_Y$ dugu.

Orain, suposatu $\varphi_X = \varphi_Y$ dugula eta, aurretik esandakoagatik, X eta Y berdinki banatuta daude. □

Levy-ren inbertsio formularen ondorioz, ondoko emaitza ere dugu. Gogoratu X simetrikoa dela X eta $-X$ zorizko aldagaiak berdinki banatuta badaude. Banaketa normala, esate baterako, simetrikoa da.

Korolarioa 4.4.2. *φ_X bikoitia $\iff$ X simetrikoa.*

Frogapena. Suposatu X simetrikoa dela, hau da, X eta $-X$ banaketa berdina dutela. Beraz, $\varphi_X = \varphi_{-X}$ dugu. Bestalde, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_{-X}(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \varphi_X(-t).$$

Hori dela eta, $\varphi_X(t) = \varphi_X(-t)$ dugu edozein t errealerako, hau da, funtzio ezaugarria funtzio bikoitia da.

Orain suposatu φ_X bikoitia dela, hau da, $\forall t \in \mathbb{R}$ $\varphi_X(t) = \varphi_X(-t)$. Gainera, badakigu $\varphi_{-X}(t) = \varphi_X(-t)$ dela; beraz, $\varphi_X(t) = \varphi_{-X}(t)$ dugu eta Korolario 4.4.1-ren emaitzagatik, $F_X = F_{-X}$ ematen da, hau da, X eta $-X$ berdinki banatuta daude (eta, orduan X simetrikoa da). □

4.5 Funtzio Ezaugarrien Identifikazioa

Arestian esandako guztiagatik, badakigu funtzio ezaugarria aldagai errealeko funtzio konplexu bat dela. Orain, aldagai errealeko funtzio konplexu bat badugu, nahi dugu jakin zorizko aldagai baten funtzio ezaugarria bada. Horrela, ondoko teorema erabiliko dugu.

Teorema 4.5.1 (Polya-ren Teorema)**.** *Izan bedi $\varphi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$. Orduan, φ zorizko aldagai baten funtzio ezaugarria izango da ondoko propietateak betetzen badira:*

- $\varphi(0) = 1$
- *φ jarraitua da $t = 0$ puntuan*
- *φ funtzio bikoitia bada*
- *φ beherakorra eta konbexua da $[0, \infty)$ tartean*

Teorema hau erabiliz, esan daiteke $\varphi(t) = \frac{1}{1+|t|^\alpha}$ zorizko aldagai baten funtzio ezaugarria dela; izan ere, lau propietateak betetzen ditu. Orain, ildo bereko beste teorema bat ikusiko dugu.

Teorema 4.5.2 (Levy-Cramer-en Teorema)**.** *Izan bedi $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Orduan, ondoko baieztapenak baliokideak dira:*

- *φ zorizko aldagai baten funtzio ezaugarria da.*
- *φ jarraitua da $t = 0$ puntuan eta existitzen da funtzio ezaugarrien segida bat $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ non*
$$\varphi(t) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(t), \ t \in \mathbb{R}.$$

Adibidea 4.5.1. *Izan bedi $\alpha \in (0, 1]$. Frogatu $\phi(t) = e^{-|t|^\alpha}$ zorizko aldagai baten funtzio ezaugarria dela.*

4.6 Ariketak

Ariketa 4.6.1. *Demagun $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, non $X_i \sim U(-1, 1)$, $i = 1, \ldots, n$ eta independienteak diren. Frogatu $\varphi_{S_n}(t) = \frac{\sin^n(t)}{t^n}$.*

Ariketa 4.6.2. *Demagun X zorizko aldagaia dela, non p probabilitatearekin 1 balioa hartzen du eta, bestela, -1 balioa. Kalkulatu $\varphi_X(t)$ eta frogatu $p = 0.5$ denean $\varphi_X(t) = \cos(t)$ dela.*

Ariketa 4.6.3. *Demagun $X \sim \Gamma(a, k)$ eta $Y \sim \Gamma(a, l)$ eta independienteak direla. Funtzio ezaugarriak erabiliz, frogatu $X + Y \sim \Gamma(a, k + l)$ (Laguntza: $X \sim \Gamma(a, k)$ bada, orduan $X = W_1 + W_2 + \cdots + W_k$, non $W_i \sim Exp(a)$, $i = 1, \ldots, k$ eta independienteak diren).*

Ariketa 4.6.4. *Demagun* $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X)$ *eta* $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y)$ *eta independienteak direla. Zein da* $X+Y$*-ren banaketa?*

Ariketa 4.6.5. *Demagun* X *eta* Y *independienteak direla eta* Y *simetrikoa dela. Frogatu* $U = X+Y$ *eta* $V = X-Y$ *berdinki banatuta daudela.* X *eta* Y *cauchy-ren banaketa jarraitzen badute, esan daiteke* U *eta* V *independienteak direla? (Laguntza: Cauchy-ren banaketa jarraitzen duen funtzio ezaugarria* $e^{-|t|}$ *da.)*

Ariketa 4.6.6. *Polya-ren eta Levy-Cramer-en Teoremak erabili gabe, ondoko galderak erantzun:*

1. *Esan daiteke* $\varphi(t) = \sin(t)$ *zorizko aldagai baten funtzio ezaugarria dela? Eta* $\varphi(t) = 1 + \sin(t)$*?*

2. *Badakigu* $\varphi(t) = (\cos(t))^n$ *zorizko aldagai baten funtzio ezaugarria dela. Zein da zorizko aldagai hori?*

Ariketa 4.6.7. *Demagun* X *zorizko aldagaia dela eta* $Z_n = X + Y_n$*, non* $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \frac{1}{n}$ *eta* $\mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ *eta* X *eta* Y_n *independienteak diren. Frogatu* Z_n*-ren banaketa funtzioa* $n \to \infty$ *denean eta* X*-ren banaketa funtzioa berdinak direla.*

5

Konbergentzia

5.1 Sarrera

Orain arte, zorizko aldagaien segiden konbergentzia aztertu dugu modu zehatz batean. Alegia, $X_1, X_2, \ldots$ probabilitate espazio berdinean definituriko zorizko aldagaiak badira, aztertu dugu X_n-ren balioa n infinitoruntz doanean. Hau da, edozein $\omega \in \Omega$-rako, $X_n(\omega)$-ren balioa aztertu dugu $n \to \infty$ denean. Atal honetan, zorizko aldagaien segiden beste konbergentzia moduak aztertuko ditugu. Besterik esan ezean, suposatuko dugu zorizko aldagaiak $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ probabilitate espazioan definituta daudela.

5.2 Konbergentzia Ia-Ziurra

Ikusiko dugun lehenengo konbergentzia modua, ia-ziurra izenekoa da. Lehenik, gogora dezagun zer den baieztapen bat ia-ziur ematea.

Definizioa 5.2.1. *Zorizko esperimentu bati buruzko baieztapen bat ia-ziurrenik ematen da ondokoak betetzen badira:*

1. *Existitzen bada $N \in \mathcal{B}$ non $\mathbb{P}(N) = 0$*

2. *$\omega \notin N$ bada, orduan ω-k baieztapena betetzen du*

Definizio honi erreparatuz, esan daiteke baieztapen bat ia-ziurrenik ematen dela baieztapen hori beti betetzen bada, zero neurria duen multzo batean izan ezik. Ikus dezagun ondoko adibidea.

Adibidea 5.2.1. *Txanpona bat infinitu aldiz botako dugu eta frogatuko dugu ia-ziurrekin gurutzeren bat lortuko dugula. Horretarako, frogatu behar dugu jaurtiketa guztietan aurpegia lortzeko probabilitatea zero dela. Hau da, X_i bada i. jaurtiketan lortutako emaitza, Irudi$(X_i) = \{A, G\}$, $\mathbb{P}(X_i = A) = p \in (0,1)$ bada, orduan*

$$\mathbb{P}(X_1 = A, \dots) \overset{inde}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_1 = A)^n = \lim_{n\to\infty} p^n = 0.$$

Beraz, ia-ziurrenik gurutzeren bat lortuko dugu.

Orain, konbergentzia ia-ziurrenik definituko dugu.

Definizioa 5.2.2. *$X_1, X_2, \dots$ zorizko aldagaien segida bada, orduan X_n ia-ziurrenik konbergitzen du X-ra existitzen bada $N \in \mathcal{B}$ non $P(N) = 0$ eta $\omega \notin N$ bada, orduan* $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$. *Horrela, X_n ia-ziurrenik konbergitzen badu X-ra, idatziko dugu $X_n \overset{i.z.}{\to} X$.*

Adibidea 5.2.2. *Hartu Lebesgueren probabilitate espazioa [0,1] tartean,* $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ *eta definitu $X_n(\omega) = e^n$, $0 \le \omega \le \frac{1}{n}$ bada eta $X_n(\omega) = 0$ bestela. Frogatzeko $X_n \overset{i.z.}{\to} 0$, hartu $N = \{0\}$ eta badakigu $\mathbb{P}(N) = 0$ dela. Beraz, ikusten da $\forall\omega \in (0,1]$, $X_n(\omega) \to 0$. Hortaz, $X_n \overset{i.z.}{\to} 0$ frogatu dugu. Hala ere, ohartu aurreko atalean ikusitako konbergentzia modua ez dela ematen, hau da, ez da egia $X_n(\omega) \to 0$ dela edozein $\omega \in [0,1]$-rako. Hori ikusteko, $X_n(0) = e^n$ dugu eta, orduan, $X_n(0)$ ez da zero $n \to \infty$ denean.*

5.3 Konbergentzia Probabilitatean

Ondoko definizioarekin hasiko gara.

Definizioa 5.3.1. *$X_1, X_2, \dots$ zorizko aldagaien segida bada, orduan X_n probabilitatean konbergitzen du X-ra, edozein $\epsilon > 0$-rako, ondokoa betetzen bada:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0.$$

Horrela, X_n probabilitatean konbergitzen badu X-ra, idatziko dugu $X_n \overset{P}{\to} X$.

Adibidea 5.3.1. *$X_n \sim Exp(n)$ bada, frogatuko dugu $X_n \overset{P}{\to} 0$. Izan ere, finkatu $\epsilon > 0$ eta*

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = \mathbb{P}(|X_n - 0| > \epsilon) = \mathbb{P}(X_n > \epsilon) = e^{-n\epsilon} \to 0.$$

Gauza gehiago ikusten jarraitu aurretik, Inferentzia Estatistikoan ikasitakoarekin itzuliko gara momentu batez. Gogoratu θ estimatzeko hartutako estimatzaile bat $\theta^*(x_1, \dots, x_n)$ tinkoa dela ondokoa betetzen bada:

$$\mathbb{P}(|\theta^*(x_1, \dots, x_n) - \theta| > \epsilon) \to 0.$$

Atal honetan ikusitakoaren arabera, esan daiteke estimatzaile bat tinkoa dela probabilitatean konbergitzen badu estimatzen duenari, hau da, $\theta^* \xrightarrow{P} \theta$ bada.

Ondoko emaitza, atal honetan ikusitako konbergentzia moduen arteko harremana adierazten du.

Proposizioa 5.3.1. *$X_n \xrightarrow{i.z.} X$ bada, orduan $X_n \xrightarrow{P} X$.*

Ondoko adibidean ikusiko dugu beste inplikazioaren kontrabide bat, hau da, beste inplikazioa ez dela egia beti.

Adibidea 5.3.2. *Hartu $X_n = 1_{A_n}$ eta $A_1, A_2, \ldots$ independienteak non $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n}$. Frogatuko dugu probabilitatean zerora konbergitzen duela, baina ia-ziurrenik ez.*

$X_n \overset{P}{=} 0$ dela ikusteko, ohartu edozein $\epsilon > 0$-rako,

$$\mathbb{P}(|X_n - 0| > \epsilon) = \mathbb{P}(X_n > \epsilon).$$

Orain, $\epsilon \geq 1$ bada, orduan $\mathbb{P}(X_n > \epsilon) = 0$ edozein n-rako. Bestalde, $\epsilon \in (0, 1)$ bada,

$$\mathbb{P}(X_n > \epsilon) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n} \to \infty.$$

Bukatzeko, ikusiko dugu ez duela zerora konbergitzen ia-ziurrenik. Definitu $B = \{\omega \in \Omega | X_n(\omega) \to 0\}$, beraz frogatu nahi duguna da $\mathbb{P}(B) \neq 1$. Orduan,

$$\begin{aligned} B = \{\omega \in \Omega | 1_{A_n}(\omega) \to 0\} &= \{\omega \in \Omega | \exists n_0 \text{ non } \forall n \geq n_0\ \omega \notin A_n\} = \cup_{n_0 \geq 1} \cap_{n \geq n_0} \bar{A}_n \\ &= \liminf_{n \to infty} \bar{A}_n = \overline{\limsup_{n\to\infty} A_n}. \end{aligned}$$

Orduan, $A_1, A_2, \ldots$ independienteak dira eta

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = \infty,$$

beraz Borel-Cantelliren bigarren lemagatik, $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$. Ondorioz, $\mathbb{P}(B) = 0 \neq 1$.

Orain, emaitza garrantzitsu bat ikusiko dugu.

Teorema 5.3.1 (Zenbaki Handien Lege Ahula)**.** *Demagun $\{X_n : n \geq 1\}$ independienteak eta berdinki banatuak, non $\mathbb{E}[X_n] = \mu$ eta $Var[X_n] = \sigma^2$ finituak diren. Orduan, edozein ϵ positiborako*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mu \right| > \epsilon \right) = 0.$$

Frogapena. Markov-en ezberdintza, zorizko aldagaiak berdinki banatuta daudela eta bariantzaren definizioa erabiliz,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mu\right| > \epsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mu\right)^2 > \epsilon^2\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mu\right)^2\right]}{\epsilon^2}$$
$$= \frac{Var\left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right]}{\epsilon^2} \overset{inde}{=} \sum_{i=1}^n \frac{Var[X_i]}{n^2\epsilon^2} = \frac{Var[X_1]}{n\epsilon^2} \to 0.$$

□

Emaitza honen ondorioz, esan daiteke $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{P} \mu$ ematen dela zorizko aldagaiak independienteak eta berdinki banatuta daudenean. Aplikazio moduan, txanpona bat airera hainbat aldiz botatzean datzan zorizko esperimentua eta X_i izango da 1 i. jaurtiketan aurpegia lortzen bada eta 0 gurutzea lortzen bada i. jaurtiketan. Suposatu p probabilitatearekin aurpegia lortzen dela jaurtiketa bakoitzean. Goiko emaitzak dioena da jaurtiketa kopurua handia bada, aurpegia lortutako aldien proportzioa p-tik gertu egon behar dela. Horrela, milaka jaurtiketa eginda, aurpegien proportzioa oso txikia (hau da, zerotik gertu) edo oso handia (hau da, batetik gertu) bada, ziurtatu dezakegu txanpona ez dagoela orekatuta.

Goiko emaitzaren enuntziatuak "ahula"hitz du; izan ere, horrek esan nahi du konbergentzia probabilitatean ematen dela. Ikusi dugu Proposizio 5.3.1-eko emaitzan, konbergentzia ia-ziurrenik betetzeak konbergentzia probabilitatean ematea inplikatzen duela. Hori dela eta, goiko emaitzaren baliokidea, baino baldintza murriztuago bat behar duena, izango da Zenbaki Handien Lege Indartsua, non konbergentzia ia-ziurrenik ematen dela frogatzen den. Argi dago, Zenbaki Handien Lege Indartsuak Zenbaki Handien Lege Ahula inplikatzen duela. Orain, emaitza honen enuntziatua ikusiko dugu.

Teorema 5.3.2 (Zenbaki Handien Lege Indartsua)**.** *Demagun $\{X_n : n \geq 1\}$ independienteak eta berdinki banatuak, non $\mathbb{E}[X_n] = \mu$ finitua den. Orduan,*

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{i.z.} \mu.$$

Oharra 5.3.1. *Lehenik, ohartu Lege Ahulean bariantza finitua izaten behar dela, baina Lege Indartsuan ez. Gainera, Lege Indartsuaren frogapena oso zaila da kasu orokorrean. Hala ere, $\mathbb{E}[X_n^4]$ eta $\mathbb{E}[X_n^2]$ finituak direla suposatuz, frogapena askoz errazagoa da; hori izango da, izan ere, ikastaro honetan ikusiko duguna.*

Emaitza ahul eta indartsu gehiago daude. Guk ez ditugu ikusiko ikastaro honetan. Baina garrantzitsua da gogoratzea emaitza indartsuek konbertzia ia-ziurrenik frogatzen dutela eta emaitza ahulek konbergentzia probabilitatean.

5.4 Konbergentzia L_p-n

Lehendabizi, gogoratuko dugu $X \in L_p$ dela $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$ betetzen bada. Horiek horrela, L_p-n konbergentzia definituko dugu orain.

Definizioa 5.4.1. *$X_1, X_2, \ldots$ zorizko aldagaien segida bada non $X_n \in L_p$ edozein n-rako, orduan X_n L_p-n konbergitzen du X-ra ondokoa betetzen bada:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] = 0.$$

Horrela, X_n L_p-n konbergitzen badu X-ra, idatziko dugu $X_n \overset{L_p}{\to} X$.

Oharra 5.4.1. *L_p konbergentzia modurik ohikoenak $p = 2$ eta $p = 1$ kasuak dira, izanik batezbesteko kuadratiko konbergentzia eta batezbesteko konbergentzia, hurrenez-hurren.*

Adibidea 5.4.1. *Demagun $X_1, X_2, \ldots$ zorizko aldagai independienteen segida non $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ eta $Var[X_i] = \sigma^2$ finituak diren, $i = 1, \ldots, n$. Frogatu $\frac{\sum_{i=1}^n}{n} \overset{L_2}{\to} \mu$.*

Aurretik ikusi dugu konbergia ia-ziurrenik badago, orduan probabilitatean konbergentzia dagoela. Orain, antzeko emaitza bat ikusiko dugu L_p konbergentziarako.

Proposizioa 5.4.1. *$X_n \overset{L_p}{\to} X$ bada, orduan $X_n \overset{P}{\to} X$.*

Aurreko emaitzaren kontrako inplikazioaren kontradibide bat ikusiko dugu orain.

Adibidea 5.4.2. *Demagun $X_1, X_2, \ldots$ zorizko aldagaien segida $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ Lebesgue-ren probabilitate espazioan definituta. Definitu $X_n = n \cdot 1_{[0,\frac{1}{n})}$. Kasu honetan, X_n-k probabilitatean konbergitzen du zerora, baino L_2-n ez.*

Gogoratu, aurretik ikusiko dugula konbergentzia ia-ziurra egotekotan, konbergentzia probabilitatean ematen dela. Proposizioa 5.4.2-ren emaitzak dio konbergentzia L_p-n badago, konbergentzia probabilitatean ematen dela. Orduan, pentsa genezake konbergentzia ia-ziurrenik eta konbergentzia L_p-ren arteko harremana egon daitekela (batak bestea inplikatzen duela, alegia). Jarraian, ikusiko dugu L_p-n konbergentzia badago, ez duela zertan konbergentzia ia-ziurrenik eman.

Adibidea 5.4.3. *Ikusi dugu Adibidea 5.3.2-n adibidea bat non konbergentzia probabilitatean ematen den, baina ia-ziurrenik ez. Adibide horretan frogatuko dugu $X_n \overset{L_p}{\to} 0$.*

Beraz, aurreko adibide honetan ikusitakoaren arabera, konbergentzia L_p-n eman daiteke, baina ia-ziurrenik ez, hau da, konbergentzia L_p-n emateak ez duela inplikatzen konbergentzia ia-ziurrenik. Bestalde, ikusi daiteke konbergentzia ziurrenik ez duela inplikatzen konbergentzia L_p-n. Horretarako, hartu Adibide 5.2.2-ko kasua, non frogatu genuen $X_n \overset{i.z.}{\to} 0$ den, eta frogatu ahal da X_n-k ez duela zeroruntz konbergitzen L_p-n; izan ere,

$$\mathbb{E}[|X_n|^p] = \frac{e^{np}}{n} \to \infty.$$

Orain, ikusiko dugu, $q > p$ bada, orduan L_q-n konbergentzia badago, L_p- konbergentzia ere badagoela.

Proposizioa 5.4.2. *Izan bedi $q > p$. Orduan, $X_n \xrightarrow{L_q} X$ bada, orduan $X_n \xrightarrow{L_p} X$.*

Bukatzeko atal honekin, beste Lege Handien Lege bat ikusiko dugu, non konbergentzia L_2-n ematen den.

Teorema 5.4.1. *Demagun $\{X_n : n \geq 1\}$ independienteak eta berdinki banatuak, non $\mathbb{E}[X_n] = \mu$ eta $Var[X_n] = \sigma^2$ finituak diren. Orduan,*

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{L_2} \mu.$$

Frogapena. Ohartu

$$\mathbb{E}[\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mu\right)^2] = \mathbb{E}[\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{n}\right)^2] = \frac{1}{n^2}\mathbb{E}[\left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu\right)^2].$$

Orain, $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^n X_i] = n\mu$ dela badakigu, beraz

$$\mathbb{E}[\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mu\right)^2] = \frac{1}{n^2}\mathbb{E}[\left(\sum_{i=1}^n X_i - \mathbb{E}[\sum_{i=1}^n X_i]\right)^2] = \frac{Var[\sum_{i=1}^n X_i]}{n^2} \stackrel{ind}{=} \sum_{i=1}^n \frac{Var[X_i]}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Eta $\sigma^2 < \infty$ denez, $n \to \infty$ denean, $\mathbb{E}[\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mu\right)^2]$ zeroruntz jotzen du, hau da, $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{L_2} \mu$. □

5.5 Konbergentzia Banaketan

Aurreko kasuetan bezala, $X_1, X_2, \ldots$, zorizko aldagaien segida da, baita X ere, guztiak $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ probabilitate espazioan definituta. Orain, onartuko dugu F_{X_n} eta F_X direla X_n eta X-ren banaketa funtzioa, hurrenez hurren. Horrela, konbergentzia banaketaren definizioa ikusiko dugu.

Definizioa 5.5.1. *$\{X_n : n \geq 1\}$ segidak X-ra konbergitzen du banaketan, $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$ betetzen bada edozein x-rako non $F_X(x)$ jarraitua den. Horrela, X_n banaketan konbergitzen badu X-ra, idatziko dugu $X_n \xrightarrow{B} X$.*

Definizio hau ondo ulertzeko bi adibide ikusiko dugu.

Adibidea 5.5.1. *Demagun $X_1, X_2, \ldots$ zorizko aldagaien segida dugula, non edozein n-rako*

$$F_{X_n} = \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{nx}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{bestela.} \end{cases}$$

Argi ikusten da $F_{X_n} \to 1 - e^{-x}$, beraz, $X_n \xrightarrow{B} X$, non $X \sim Exp(1)$.

Adibidea 5.5.2. *Demagun $X_1, X_2, \ldots$ zorizko aldagaien segida dugula, non edozein n-rako*

$$F_{X_n} = \begin{cases} 1, & x \geq 1/n \\ 0, & \textit{bestela}, \end{cases}$$

eta

$$F_X = \begin{cases} 1, & x \geq 1 \\ 0, & \textit{bestela}, \end{cases}$$

Erraz frogatu ahal da, $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$. Gainera, $F_{X_n}(0) = 0$ edozein n-rako eta $F_X(0) = 1$, beraz $F_{X_n}(0)$-k ez du konbergitzen $F_X(0)$-ra. Hala ere, konbergentzia banaketaren definizioari erreparatuz, ez dago arazorik; izan ere, F_X ez da jarraitua zero puntuan. Hori dela eta, $X_n \xrightarrow{B} X$ egia dela esan daiteke.

Ondoko emaitzak frogatzen du probabilitatean konbergentziak banaketan konbergentzia inplikatzen duela.

Proposizioa 5.5.1. *$X_n \xrightarrow{P} X$ bada, orduan $X_n \xrightarrow{B} X$.*

Goiko emaitzaren kontrako inplikazioaren kontradibidea ikusiko dugu orain.

Adibidea 5.5.3. *Demagun $\Omega = \{0, 1\}$ dugula eta $\mathbb{P}(\omega = 0) = \mathbb{P}(\omega = 1) = \frac{1}{2}$. Horrela, ondoko zorizko aldaigaien segida definituko dugu: $X_n(\omega) = \omega$. Aldiz, definituko dugu $X(0) = 1$ eta $X(1) = 0$. Ikusteko ez dagoela konbergentzia probabilitatean, ohartu $|X_n(\omega) - X(\omega)| = 1$, $\forall \omega \in \Omega$, beraz diferentzia horrek ezin du zerora jo $n \to \infty$ denean. Aldiz, ikusiko dugu banaketan konbergentzia ematen dela; izan ere $\forall x \in \mathbb{R}$,*

$$F_{X_n}(x) = F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

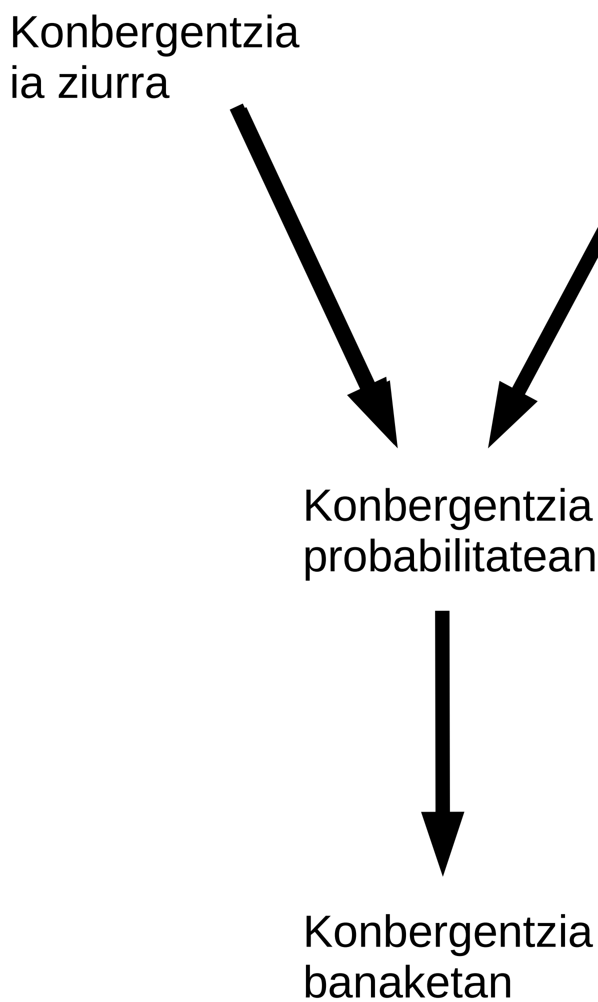
Hortaz, banaketan konbergentziaren definizioaren baldintza betetzen da.

Goiko adibidearen arabera, konbergentzia banaketan ez du konbergentzia probabilitatean inplikatzen. Orain ikusiko dugu baietz inplikatzen duela X konstantea bada.

Proposizioa 5.5.2. *Izan bedi $X \sim k$. Horrela, $X_n \xrightarrow{B} X$ bada, orduan $X_n \xrightarrow{P} X$.*

Irudia 5.1 begiratuz, ikusiko dugu zeintzuk diren ikasitako konbergentzia moduen inplikazioak. Ohartu kontrako inplikazioak batzuetan ematen direla, azken emaitza honetan ikusi dugun moduan.

Hurrengo atalean kongergentzia banaketan ematen den kasu ezagun bat aztertuko dugu.



Irudia 5.1: Kapitulu honetan ikasitako konbergentzia moduen inplikazioen laburpena.

5.6 Limite Zentralaren Teorema

Limite Zentralaren Teoremaren zentratu aurretik, gogoratu Funtzio Ezaugarrien Bakartasunaren Teoremak esaten duena, bi zorizko aldagaik funtzio ezaugarri berdinak badira, orduan haien banaketa funtzioak berdinak dira. Horrek balio du konbergentzia banaketan ematen dela frogatzeko. Adibidez, Ariketa 4.6.7-n frogatu dugu $F_{Z_n} \to F_X$ ematen dela; hori dela eta, ondorioztatu dezakegu $Z_n \xrightarrow{B} X$.

Limite Zentralaren Teoremak esaten duena da: $X_1, X_2, \ldots$ independienteak eta berdinki banatuta dauden zorizko aldagaiak diren, non $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ eta $Var[X_i] = \sigma^2$ finituak diren, orduan $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$-k banaketan konbergitzen duela banaketa normalera, non haren itxaropena μ eta bariantza σ^2/n diren; edo beste era batean esanda, $Y_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$ bada, orduan $W_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_i$ bada, W_n-k banaketan konbergitzen du banaketa normal estandarrera, hau da,

$$\varphi_{W_n}(t) \to e^{-t^2/2}.$$

5.7 Ariketak

Ariketa 5.7.1. *Demagun* $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$*,* λ *Lebesgueren neurria izanik. Definitu* X_n *zorizko aldagaiak non* $X_n(s) = 1, s \in [0, \frac{n+1}{2n})$ *denean eta* $X_n(s) = 0$ *beste kasuetan. Gainera, ondoko zorizko aldagaia definituko dugu:* $X(s) = 1, s \in [0, \frac{1}{2})$ *eta* $X(s) = 0$ *beste kasuetan. Frogatu Frogatu* $X_n \xrightarrow{i.z.} X$*.*

Ariketa 5.7.2. *Izan bedi* $X_0, X_1, X_2, \dots$ $[0,1]$ *tarteko banaketa uniformeari jarraitzen dioten zorizko aldagai independienteak direla,* $\{c_n\}$ $[0,1]$ *tarteko segida eta* $Y_n = X_0 1_{X_n \geq c_n}$*. Ondokoa frogatu*

$$c_n \to 0 \iff Y_n \xrightarrow{P} X_0.$$

Ariketa 5.7.3. *Izan bedi* $X_n \sim U(0, \frac{1}{n})$*. Frogatu* $X_n \xrightarrow{L_p} 0$*.*

Ariketa 5.7.4. *Demagun* $X_1, \dots, X_n$ *independienteak diren zorizko aldagaiak direla, non* $X_i \sim U(0,1)$*. Definitu* $Y_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$*. Frogatu* $X_n \xrightarrow{P} 0$ *eta* $X_n \xrightarrow{L_p} 0$*.*

Ariketa 5.7.5. *Izan bedi* $X \sim U(0,1)$ *eta* $X_n \sim (0, 1+\frac{1}{n})$*, non* $n \geq 1$*. Frogatu* $X_n \xrightarrow{B} X$*.*

Ariketa 5.7.6. *Izan bedi* $X \sim U(0,2)$ *eta* $X_n \sim (\frac{1}{n}, 2)$*, non* $n \geq 1$*. Frogatu* $X_n \xrightarrow{B} X$*.*

Ariketa 5.7.7. $X_1, \dots, X_n$ *independiente eta berdinki banatuak diren zorizko aldagaiak direla suposatu, haien funtzio ezaugarria* $\phi(t)$ *izanik.* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *definitu eta suposatu* $\phi'(0) = ai$*,* $a \in \mathbb{R}$ *izanik. Frogatu* $S_n/n \xrightarrow{P} a$*.*

6

Prozesu Estokastikoak

6.1 Sarrera

Prozesu estokastikoak probabilitate espazio berdinean definituriko zorizko aldagaien familia bat da, hau da, $\{X_t : t \in \mathcal{T}\}$, non edozein $t \in \mathcal{T}$-rako X_t zorizko aldagaia den $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ probabilitate espazioan eta $\mathcal{T}$ multzoak zorizko aldagaien balioak zein denboratan ikusten dugun adierazten duen.

Prozesu estokastikoak $\mathcal{T}$ multzoaren arabera sailkatu daitezke:

- $\mathcal{T}$ multzo zenbakigarri baten barruan badago, orduan denbora diskretuko prozesu estokastikoa da. Alegia, prozesu estokastikoaren balioa segunduro, orduro... ikusten dugu.

- $\mathcal{T}$ ez badago multzo zenbaki jarri baten barruan, orduan denbora jarraituko prozesu estokastikoa da. Alegia, prozesu estokastikoaren balioa $\mathbb{R}$-ko edozein baliotan ikusi daiteke.

Orain arte ikusi dugun zorizko aldagaien segidak $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ denbora diskretuko prozesu estokastikoak dira, hau da, zorizko aldagaien balioa ikusten dugu egunero (edo orduro, edo minuturo). Denbora jarraituko prozesu estokastikoetan, berriz, zoriko aldagai ikusten dugun uneak $\mathbb{R}$-ko edozein azpimultzo izan daiteke; adibidez, zorizko aldagaia ikusi ahal da 0.2 segunduan, 1.5 segunduan, 4 segunduan...

Prozesu estokastikoak zorizko aldagaien izaeraren arabera sailkatu daitezke:

- X_t zorizko aldagai diskretua bada, orduan prozesu estokastiko diskretua dela esango dugu.

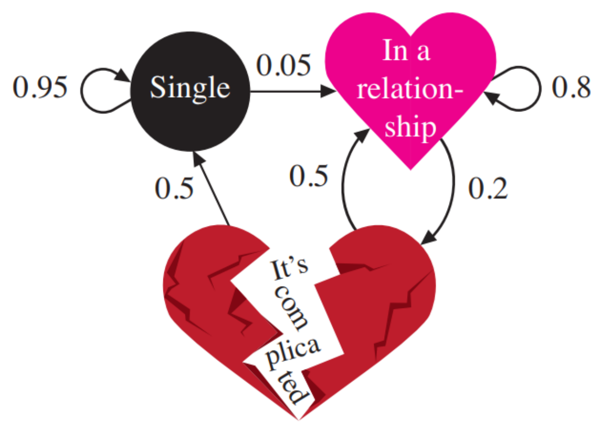
- X_t zorizko aldagai jarraitua bada, orduan prozesu estokastiko jarraitua dela esango dugu.

Hurrengo ataldean denbora diskretuko prozesu estokastikoak aztertuko ditugu. Gainera, zorizko aldagaiak diskretuak izango dira; hau da, X_t guztietarako haren irudia S izango da, non $|S| < \infty$.

6.2 Markov-en Kateak

6.2.1 Adibidea

Has gaitezen maitasunaz hitz egiten. Irudia 6.1-k EHUko ikasle batek egun batean izan ahal duen egoerak (bikotegabea, bikotedun edo harreman arriskutsua) irudikatzen dira, baita egun batetik bestera eman ahal diren egoera aldaketak.



Irudia 6.1: EHUko ikasleen egoera posibleak.

Adibidez, bikotegabe dagoen pertsona bat hurrengo egunean bikoterik gabe jarraituko du 0.95 probabilitatearekin, eta bestela bikotedun egoeran egongo da (suposatuko dugu bikoteak, hasten diren lehenengo egunean, ez direla harreman arriskutsua). Horrela, pentsatuko dugu bikotedun pertsona bat hurrengo egunean harreman arriskutsu batean dagoela 0.2 probabilitatearekin (ohartu gamma banaketarekin duen harremana) eta, bestela, bikotearekin jarraituko duela. Bukatzeko, harreman arriskutsu batean dagoen pertsona bat, hurrengo egunean probabilitate berdinarekin bikotearekin jarraitzen du (harremana ez arrikutsua izanik) eta bikotegabe bihurtzen da.

Horrelako egoerak kontuan hartuta, ondoko galderak suertatu daitezke: zenbat denbora egongo da EHUko ikasle bat harreman arriskutsu batean? Eta bikotegabe? Horrelako galderak erantzuteko, Markov-en kateak erabiliko ditugu.

6.2.2 Definizioa

Markov-en katearen definizioa baino lehenago, Markov-en propietatea ikusiko dugu.

Definizioa 6.2.1. *Denbora diskretuko prozesu estokastiko batek Marko-en propietatea betetzen duela esango dugu, ondokoa betetzen bada:* $\forall j, i, i_0, i_1, \ldots, i_{n-1} \in S$ *eta* $\forall n \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i).$$

Markov-en propietateak esaten duena da zorizko aldagaiak $n+1$ unean lortutako balioa n unean zorizko aldagaiak izandako balioaren araberakoa da eta ez da aurreko uneetan izandako balioen menpe. Ohartu Irudia 6.1-ko adibideak markov-en propietatea betetzen duela; hurrengo eguneko egoera gaurko egoeraren araberakoa da, alegia aurreko egunetako egoerak ez du axola.

Definizioa 6.2.2. *Markov-en kate bat denbora diskretuko prozesu estokastiko bat da, non Markov-en propietatea betetzen den.*

Orain, Markov-en kate egonkorrak zer diren ikusiko dugu.

Definizioa 6.2.3. *Markov-en kate bat egonkorra dela esango dugu ondokoa betetzen bada:* $\forall n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i).$$

Honek esan nahi i egoeran nagoenean hurrengo unean j egoeran egoteko probabilitatea ez dela n-ren araberakoa. Horrela, i egoeratik j egoerara joateko probabiliteari trantzisio probabilitatea deituko diogu eta $p_{i,j}$ deituko dugu. Ohartu Irudia 6.1-ko adibidea Markov-en kate egonkorra dela eta $p_{HA,BG} = 0.5$ eta $p_{BG,BD} = 0.05$ (izan ere, HA=harreman arriskutsua, BG=bikotegabea eta BD=bikoteduna).

Trantzisio probabilitateak matrize batean idatzi ahal dira, $P = (p_{i,j})_{i,j \in S}$. Adibidez, Irudia 6.1-ko adibidean, ondoko trantzisio matrizea izango dugu:

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} BG & BD & HA \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ BG \\ BD \\ HA \end{array}$$

Ohartu, definizioz, P matrize estokastiko bat dela, hau da, $\sum_{j \in S} p_{i,j} = 1 \; \forall i \in S$ eta $p_{i,j} \geq 0 \; \forall i, j \in S$.

6.2.3 Probabilitate Limiteak

Orain suposatuko dugu i egoeran gaudela eta jakin nahi dugu n une (edo n pausu) igaro ondoren, zein den j egoeran egoteko probabilitatea, alegia

$$\mathbb{P}(X_n = i | X_0 = j).$$

Goiko balioari $p^n_{i,j}$ deituko diogu eta, beraz, n pausuko trantzisio matrizea $P^n = (p^n_{i,j})_{i,j \in S}$ da.

Proposizioa 6.2.1. *P^n P matrizea n aldiz biderkatuz lortutako matrizea da.*

Kalkula dezagun P^n Irudia 6.1-ko adibideko kasuan, n-ren balio ezberdinetarako.

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.902 & 0.087 & 0.010 \\ 0.100 & 0.740 & 0.160 \\ 0.475 & 0.425 & 0.100 \end{pmatrix}, \; P^{10} = \begin{pmatrix} 0.704 & 0.248 & 0.0474 \\ 0.474 & 0.434 & 0.091 \\ 0.583 & 0.346 & 0.070 \end{pmatrix}$$

eta

$$P^{100} = \begin{pmatrix} 0.625 & 0.3125 & 0.0625 \\ 0.625 & 0.3125 & 0.0625 \\ 0.625 & 0.3125 & 0.0625 \end{pmatrix}$$

Ohartu, errenkaden balioak berdinak direla. Alegia, bikotegabe egoteko probabilitatea 50 unean 0.625 da eta balio hori ez da hasierako balioaren araberakoa. Horrek esan nahi du 50 unean egoteko probabilitatea independientea dela hasierako uneko egoerarekiko. Orain, P^n aztertuko dugu $n \to \infty$ denean, probabilitate limiteak definitze aldera.

Definizioa 6.2.4. *Izan bedi $\pi_j = \lim_{n\to\infty} p^n_{i,j}$. Balio hau probabilitate limitea deitzen da eta hasierako egoera i-rekiko independientea da.*

Probabilitate limiteek banaketa limitea osatzen dute, π bezala idatziko duguna. Horrela, $\pi = (\pi_j)_{j\in S}$ izango dugu, non

$$\sum_{j\in S} \pi_j = 1.$$

Ohartu banaketa limitea definitzerakoan, limite bat dela esan dugu. Hala ere, limite hori ez du beti zertan existitu. Momentuz, limitea existitzen dela suposatuko dugu eta aurrerako ikusiko dugu zein baldintzak bete behar diren limitea existitzeko.

Irudia 6.1-ko adibidea 50 baino handiagoko balioekin P^n kalkulatuz gero, ikusi ahal da ondoko matrizea lortzen dela:

$$\begin{pmatrix} 0.625 & 0.3125 & 0.0625 \\ 0.625 & 0.3125 & 0.0625 \\ 0.625 & 0.3125 & 0.0625 \end{pmatrix},$$

hau da, goiko matrizeak adierazten du ondokoa dela banaketa limitea: $\pi = (0.625, 0.312, 0.063)$. Alegia, harreman arriskutsuan egoteko banaketa limitea 0.063 da.

6.2.4 Banaketa Egonkorra

Aurrean definitutako P matrizea oso handia izan daiteke, beraz banaketa limitea kalkulatzeko P^n n handia denean kalkulatzea oso konplexua izan daiteke konpotazionalki (hau da, denbora gehiegi behar duela ordenagailu batek hori ebazteko). Beste modu bat dagoela ikusiko dugu orain. Has gaitezen banaketa egonkorra definitzen.

Definizioa 6.2.5. *Izan bedi $v = (v_i)_{i\in S}$ non $\sum_{i\in S} v_i = 1$ eta P Markov-en katearen trantzisio matrizea. Orduan, v banaketa egonkorra da ondokoa betetzen bada:*

$$v \cdot P = v.$$

Goiko ekuazioa ondoko eran berridatzi daiteke: $\forall j \in S$,

$$\sum_{i\in S} v_i p_{i,j} = v_j.$$

Ekuazio hauei egonkortasun ekuazioak deitzen zaie. Ohartu ekuazio honetako ezker zatiak adierazten duena dela j egoerara hurrengo unean joateko probabilitate, orain v_i probabilitatearekin i egoera egotekotan. Horrela, v banaketak jarraitzen duen egoeratan egotekotan, hurrengo pausoan ere v banaketak jarraitzen duen egoeratan egongo da.

Irudia 6.1-ko adibideko banaketa egonkorra kalkulatuko dugu:

$$(p_{BG}, p_{BD}, p_{HA}) \begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} = (p_{BG}, p_{BD}, p_{HA}),$$

non $p_{BG} + p_{BD} + p_{HA} = 1$. Horrela, ondoko sistema ekuazioa lortzen dugu (ohartu 4 ekuazio lortzen dugula, baina haietako bat besteen konbinazio lineala dela eta, beraz, ez dugu kontuan hartuko):

$$‘0.95 p_{BG} + 0.5 p_{HA} = p_{BG}, 0.2 p_{BD} = p_{HA}, p_{BG} + p_{BD} + p_{HA} = 1.$$

Ekuazio hauek ebatziz, ondokoa lortzen dugu: $p_{BG} = \frac{5}{8}$, $p_{BG} = \frac{5}{16}$ eta $p_{BG} = \frac{1}{16}$. Konturatuko gara, kasu honetan, banaketa limitea eta banaketa egonkorraren balioak berdinak direla. Ondoko emaitzak berdintasun hau frogatzen du.

Teorema 6.2.1. *Suposatu π existitzen dela. Orduan, $p = \pi$ eta banaketa egonkorra bakarra da.*

Teorema hau frogatzeko, ondoko bi lemak frogatuko ditugu.

Lema 6.2.1. *π banaketa egonkorra da, hau da, $\pi P = \pi$ betetzen da, π existitzen bada.*

Frogapena. Hartu $j \in S$ eta frogatuko dugu $\pi_j = \sum_{k\in S} \pi_k p_{k,j}$.

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \left(p_{i,j}^{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in S} p_{i,k}^n \, p_{k,j} = \sum_{k\in S} \left(\lim_{n\to\infty} p_{i,k}^n\right) \, p_{k,j} = \sum_{k\in S} \pi_k p_{k,j}.$$

□

Lema 6.2.2. *π existitzen bada, banaketa egonkorra bakarra dago.*

Frogapena. Suposatu q banaketa egonkorra dela. Frogatuko dugu $q = p$ dela. Horrela, q banaketa egonkorra denez, $q \cdot P = q$ eta, beraz, $q \cdot P^n = q$ eta, beraz, $\forall j \in S$,

$$q_j = \sum_{i \in S} q_i p_{i,j}^n = q_j.$$

Ondorioz,

$$\lim_{n\to\infty} q_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{i \in S} q_i p_{i,j}^n = q_j.$$

Kontuan hartuta $\lim_{n\to\infty} q_j = q_j$ dela, orduan

$$q_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{i \in S} q_i p_{i,j}^n = \sum_{i \in S} q_i \lim_{n\to\infty} p_{i,j}^n = \sum_{i \in S} q_i \pi_j = \pi_j \sum_{i \in S} q_i = \pi_j.$$

Eta aurreko leman frogatutakoarekin, badakigu $q = p$ dela. □

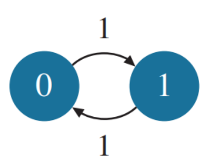
Frogatu dugun teorema honen arabera, banaketa limitea existitzen bada, banaketa egonkorraren berdina da eta, orduan, sistema ekuazio bat ebatziz lortu daiteke banaketa limitea (eta ez da beharrezkoa P^n kalkulatzea n handietarako).

6.2.5 Ergodikotasuna

Lehenik, adibide bat ikusiko dugu non banaketa limitea ez den existitzen. Ondoko trantzisio matrizea duen Markov-en katea kontzideratuko dugu:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ohartu edozein n naturalerako P^{2n} 2 tamainako matrize indentitatea dela eta $P^{2n+1} = P$. Beraz, banaketa limitea ez da existitzen.



Irudia 6.2: Banaketa limitea ez da existitzen Markov-en kate honetan.

Hala ere, egonkortasun ekuazioak ebatziz, $\pi_0 = \pi_1 = 1/2$ lortzen dugu. Adibide honek erakusten du banaketa limitea existitzen ez bada ere, banaketa egonkorraren soluzioa aurkitu daitekela, hau da, banaketa egonkorra existitzen dela.

Ondoko definizioa ikusiko dugu.

Definizioa 6.2.6. *j egoeraren periodoa ondoko eran definitzen da $zkh\{n \in \mathbb{N} : p_{j,j}^n > 0\}$. Horrela, egoera bat aperiodikoa da haren periodoa 1 bada.*

Irudia 6.2-ko adibidean, 0 eta 1 egoeren periodoa bi dela ikusten da. Beraz, egoera hauek ez dira aperiodikoak.

Orain, beste definizio batzuk ikusiko ditugu:

Definizioa 6.2.7. *Esango dugu j egoera i egoeratik irisgarria dela existitzen bada $n \in \mathbb{N}$ non $p_{i,j}^n > 0$.*

Definizioa 6.2.8. *Markov-en kate bat laburtezina da haren egoera bikote guztiak irisgarriak badira.*

Irudia 6.3: Markov-en kate hauek ez dira laburtezinak.

Definizioa 6.2.9. *Markov-en kate bat ergodikoa da aperiodikoa eta laburtezina bada.*

Ohartu Irudia 6.1-ko Markov-en katea ergodikoa dela. Ondoko teoremak frogatzen du ergodikotasunak inplikatzen duela banaketa limitearen existentzia.

Teorema 6.2.2 (Egoera finitodun Markov-en Kateen Teorema Ergodikoa)**.** *Markov-en kate bat ergodikoa bada, orduan banaketa limitea existitzen da.*

Oharra 6.2.1. *Frogapena $p_{i,j} > 0$ $\forall i, j \in S$ den kasurako egingo dugu. Kasu honetan, argi dago Markov-en katea ergodikoa dela.*

6.3 Poisson-en Prozesua

Gogoratu funtzio bat $o(h)$ dela ondokoa betetzen bada: $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$. Honek esan nahi du h txikia denean, $f(h)$ txikiagoa dela.

Atal honetan, denbora jarraituko prozesu estokastikoetan zentratuko gara eta, hauen bidez, gertaerak zenbatuko ditugu. Hau da, gertaera segida bat izango dugu (autobus bat ailegatzea geltokira, esate baterako) eta prozesu estokastiko bat definituko dugu gertaera kopuruak zenbatzen duena.

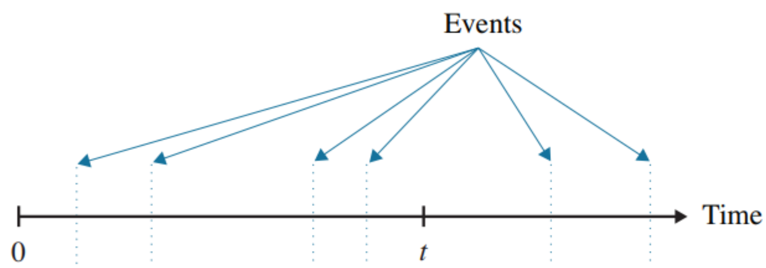
Definizioa 6.3.1. $\{X_t : t \in \mathcal{T}\}$ *prozesu estokastikoa zenbaketa prozesua izango da* $[0, t]$ *tartean emandako gertaera kopurua adierazten badu.*

Zenbaketa prozesuek ondoko propietateak betetzen dituzte:

- X_t-ren irudia zenbaki osoz osatuta dago

- $s < t$ bada, orduan X_s-ren balioa X_t-rena balio txikiago edo berdin da, hau da, $X_s \leq X_t$
- $s < t$ bada, X_t-ren eta X_s-ren balioen kenketak, hau da, $X_t - X_s$-ren balioak, $(s, t]$ tartean emandako gertaera kopurua adierazten du

Irudia 6.4-ko adibidean X_t-ren balioa 4 dela ikusten da.



Irudia 6.4: Gertaera segida baten adibidea.

Definizioa 6.3.2. *Zenbaketa prozesu batek gehikuntza independienteak ditu denbora disjuntuetan ematen diren gertaera kopuruak independienteak badira. Esate baterako,* $[0, s]$ *eta* $(s, t]$ *tarteetan emandago gertaera kopuruak (hurrenez hurren* X_s *eta* $X_t - X_s$*) independienteak badira.*

Definizioa 6.3.3. *Zenbaketa prozesu batek gehikuntza egonkorra duela esaten dugu denbora tarte batean emandako gertaera kopuruaren banaketa kopurua tarte horren luzeraren araberakoa dela, baino tartearen hasierako balioaren araberarakoa ez. Hau da,* $X_{t+s} - X_s$*-ren banaketa* s*-ren independientea dela.*

Orain $\lambda > 0$ parametrodun Poisson-en prozesua definituko dugu.

Definizioa 6.3.4. *Zenbaketa prozesu bat* λ *parametrodun Poisson-en prozesua dela esango dugu ondokoa betetzen bada:*

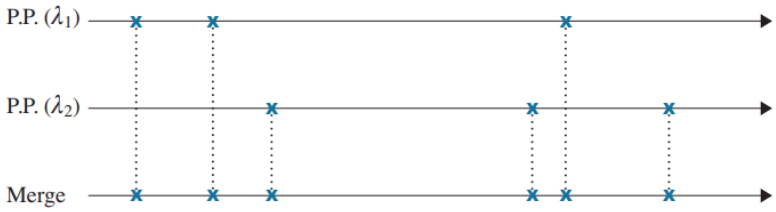
- $X_0 = 0$
- *Gehikuntza independienteak eta egonkorrak ditu*
- t *luzerako denbora tarte batean emandako gertaera kopuruaren banaketak* $Poi(\lambda t)$ *banaketari jarraitzen dio.*

Oharra 6.3.1. *Ohartu Poisson-en prozesua eta Poisson-en banaketaren arteko desberdintasuna; lehena prozesu estokastiko bat da eta bigarrena probalitate-banaketa bat da.*

Orain, frogatuko dugu Poisson-en prozesuek duten propietate garrantzitsu bat.

Proposizioa 6.3.1. *Demagun λ parametrodun Poisson-en prozesua dugula. Orduan gertaeren artean ematen den denborak λ parametrodun banaketa exponentzialari jarraitzen dio.*

Bukatzeko, esango dugu bi Poisson-en prozesu bateratu ditugula (merge ingelesez), bi gertaera segidetan emandako gertaera guztiak kontuan hartzen baditugu. Ikusi Irudia 6.5.



Irudia 6.5: Bi Poisson-en prozesuen bateraketa.

Eta ondoko emaitza frogatuko dugu.

Proposizioa 6.3.2. *Demagun bi Poisson-en prozesu independiente ditugula, lehena λ parametroduna eta bigarrena μ parametroduna. Bi Poisson-en prozesuen bateraketa $\lambda + \mu$ parametrodun Poisson-en prozesua da.*

Frogapena. Demagun X_t λ parametrodun Poisson-en prozesua dela eta Y_t μ parametrodun Poisson-en prozesua. Definizioz, bi Poisson-en prozesuen bateraketa $X_t + Y_t$ prozesu estokastikoa da definizioz. Kontuan hartuta $X_t \sim Poi(\lambda t)$ dela eta $Y_t \sim Poi(\mu t)$ eta X_t eta Y_t independienteak direla, badakigu $X_t + Y_t \sim Poi(\lambda t + \mu t)$ (izan ere independienteak diren bi Poisson banaketa jarraitzen duten zorizko aldagaia Poisson banaketari jarraitzen du), hau da, $X_t + Y_t$ $\lambda + \mu$ parametrodun Poisson-en prozesua da. $\square$

Oharra 6.3.2. *Atal honetako zenbait luzapen ikasi daitezke. Esate baterako, banaketa limitearen existentziaren analisia askoz ere zailagoa da $|S|$ infinitu zenbakigarria bada. Bestalde, denbora jarraituko Markov-en kateak hemen ikasitako beste luzapen bat izango litzateke.*

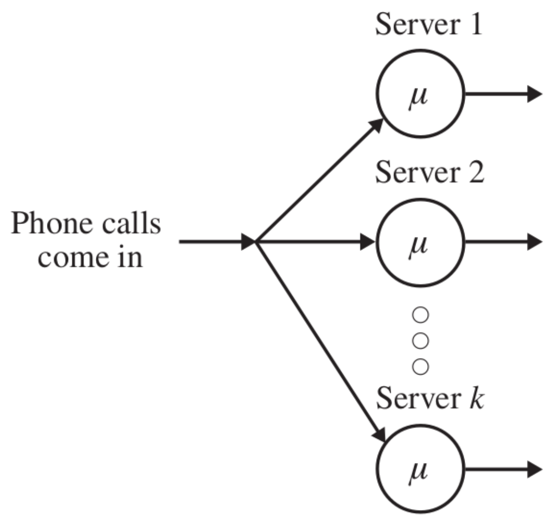
6.4 Ariketak

Ariketa 6.4.1. *3x3-ko karratu batean dauden 9 aukeren arteetariko batean zoriz aukeratutako toki batean jartzen dugu arratoi bat. Segundu bakoitzean, arratoiak mugimendu bakarra (gora, behera, eskuinera edo ezkerretara) egin dezake edo geldi gera daiteke, aukera guztiak probabilitate berdinarekin gertatu ahal direlarik.*

1. *Definitu sistema hau aztertzeko beharrezkoa den prozesu estokastikoa eta deskribatu egoera posible guztien multzoa.*

2. *Esan daiteke denbora diskretuko Markov-en kate homogeneoa dela? Baiezko kasuan, irudikatu Markov-en katea eta kalkulatu trantzizio matrizea.*

Ariketa 6.4.2. *Dei-zentro bat kudeatzen dugula pentsatuko dugu. Dei-zentro honetan k agente (server) daude, jasotako deiei erantzuteko. Dei berri bat ailegatzen denean, libre dagoen agente bati bidaliko zaio deia. Aldiz, agente guztiak okupatuta badaude dei berri bat ailegatzen denean, deia blokeatzen dela suposatuko dugu, hau da, deia bukatzen da erantzunik jaso gabe (ez dagoelako itxaroteko aukerarik eta beranduago berriro deitzea proposatzen zaio). Ikusi Irudia 6.6. Suposatuko dugu minutu batean λ probabilitateare-*



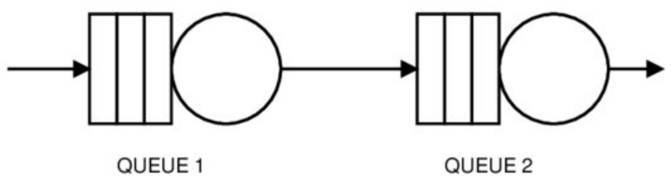
Irudia 6.6: Dei-zentro baten eredu matematikoa.

kin dei berri bat ailegatzen dela eta agente batek μ probabilitatearekin erantzuten dutela, non $\lambda + \mu < 1$. Zein da t infinitora doanean dei bat blokeatuta izateko probabilitatea?

Ariketa 6.4.3. *Pertsona batek egunero korrika egiten du. Etxetik ateratzearakoan, aurreko atetik edo atzekotik ateratzen da, haietariko bat aukeratzen duelarik probabilitate berdinarekin. Horrela, etxera bueltatzen denean, probabilitate berdinarekin aukeratzen du aurreko atetik edo atzekotik sartzea. Pertsona honek 5 zapatila pare du. Horrela, korrika egin eta gero etxera sartzeko erabilitako atearen ondoan uzten ditu erabilitako zapatilak. Etxetik ateratzeko aukeratutako atean zapatilarik ez egotekotan, oinuzik ateratzen da korrika egitera. Deskribatu prozesu estokastikoa eta horren egoera posible guztien multzoa. Denbora diskretuko Markov-en kate homogeneoa dela egiaztatu. Irudikatu Markov-en katea. Kalkulatu trantzizio matrizea eta banaketa limitea.*

Ariketa 6.4.4. *Pertsona bat egun bakoitzean etxetik lanera joaten da eta hurrengoan lanetik etxera. Eta horrela egunero. Bi aterki baino ez ditu. Euria egiten du p probabilitatearekin. Hori gertatuz gero tokiz aldatzen denean, aterki bat hartzen du irtetzen den tokitik (aterkirik egotekotan, noski). Aldiz, ez badu euririk egiten, ez du aterkirik* *hartzen. Jakin nahi dugu zein den, denbora infinitora doanean, pertsona hau buztitzeko probabilitatea $p = 0.6$ denean.*

Ariketa 6.4.5. *Bi ilarez osatutako sistema aztertuko dugu. Ikusi Irudia 6.7. Bezero*



Irudia 6.7: Bi ilarez sortutako sistema.

berriak lehenengo ilarara baino ez dira ailegatzen eta hori, une oro eta lehenengo ilara hutsik dagoenean, λ probabilitatearekin ematen da; horrela, lehenengo ilara bezero bati zerbitzu ematen ari denean, ezin da beste bezerorik ailegatu. Lehenengo ilaran une oro μ_1 probabilitatearekin zerbitzua bukatzen du bezero batek eta, hori gertatzerakoan, bigarren ilarara bidaltzen da; bertan, zerbitzua jasotzen hasten da bigarren ilara hutsik badago eta, bestela, bezero hori sistematik joaten da betirako. Bukatzeko, bigarren ilaran dagoen bezeroak une oro μ_2 probabilitatearekin zerbitzua bukatzen du eta, hori gertatzerakoan, sistematik joaten da betirako. Suposatu $\lambda + \mu_1 + \mu_2 < 1$. Deskribatu prozesu estokastikoa eta horren egoera posible guztien multzoa. Denbora diskretuko Markov-en kate homogeneoa dela egiaztatu. Irudikatu Markov-en katea. Kalkulatu trantzizio matrizea.

Ariketa 6.4.6. *Zoriz 1 eta 6 balioen arteko zenbaki bat aukeratzen da eta X_1 deituko zaio balio horri. Orduan $n > 1$ guztietarako, X_n izango da zoriz 1 eta X_{n-1} balioen arteko aukeratutako balio bat. Denbora diskretuko Markov-en kate homogeneoa dela egiaztatu. Trantzizio matrizea kalkulatu. Jakinda hirugarren unean 3 balioa lortu duela, zein da bigarren unean 4 lortzeko probabilitatea.*

Ariketa 6.4.7. *Demagun $\{X_t : t \in \mathcal{T}\}$ $\lambda = 0.5$ parametrodun Poisson-en prozesua dela. Orduan,*

1. *Kalkulatu zein probabilitatearekin ez den egongo gertaerarik (3,5] tartean.*

2. *Kalkulatu zein den probabilitatean ondoko tarteetan gertaera bana emateko: (0,1], (1,2], (2,3] eta (3,4].*

7

Baldintzazko Itxaropena

$(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ probalitate espazioa dela onartuko dugu kapitulu honetan ere. Gogoratu 3.4 atalean ikusi dugula itxaropen baldintzatua, baina $A \in \mathcal{B}$-ri baldintzatua, hau da, gertaera bait baldintzatua. Atal honetan σ-aljebra bati baldintzatutako itxaropena aztertuko dugu hasteko eta, ondoren, martingalak zer diren ikusiko dugu.

7.1 Definizioa

Suposatu $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ Ω-ren partiketa dela, hau da, $A \in \mathbb{B}$ eta $\Omega = \cup_{n\geq 1} A_n$ eta $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i, j$; suposatuko dugu ere $\mathbb{P}(A_i) > 0$ i guztietarako.

Hasteko, ondoko σ-aljebra definituko dugu: $\mathcal{G} = \sigma(A_n : \mathbb{N})$. Badakigu $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}$. Demagun $X : \Omega \to \mathbb{R}$ dela, $X \in \mathcal{B}/\beta$ eta integragarria izanik.

Definizioa 7.1.1. $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ *zorizko aldagai bat da, hau da,* $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] : \Omega \to \mathbb{R}$*, eta ondokoa betetzen du:* $\forall \omega \in \Omega$*,*

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega) = \mathbb{E}[X|A_i],$$

$\omega \in A_i$ *bada.*

Ohartu goiko definizioaren formulan, ezkerreko aldean dagoena, zorizko aldagai baten itxaropen baldintzatua dela, $A \in \mathcal{B}$-ri baldintzatua eta hori Definizio 3.4.1-an ikusi dugula zer den.

Bestalde, $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$-ren definizioaren ondorioz, ondokoa dugu:

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}[X|A_n] 1_{A_n}.$$

Ondoko emaitza ikusiko dugu orain.

Proposizioa 7.1.1. *Demagun $\{A_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ Ω-ren partiketa dela, $\mathbb{P}(A_n) > 0$ izanik, $n \geq 1$, eta $\mathcal{G} = \sigma(A_n : \ n \geq 1) \subset \mathcal{B}$ dela. Horrela, X neurgarria eta integragarria bada, $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ da zorizko bakarra non $X \in \mathcal{G}/\beta$ eta $\forall B \in \mathcal{G}$*

$$\int_B \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \ d\mathbb{P} = \int_B X \ d\mathbb{P}.$$

Goiko emaitza kontuan hartuta, Definizioa 7.1.1-n ikusitakoa $\mathcal{G} = \sigma(A_1, A_2, \dots)$-rako, edozein σ-aljebrara orokortuko dugu.

Definizioa 7.1.2. $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] : \Omega \to \mathbb{R}$ *da eta ondokoa betetzen du:*

- $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \in \mathcal{G}/\beta$
- $\forall B \in \mathcal{G}$
$$\int_B \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \ d\mathbb{P} = \int_B X \ d\mathbb{P}.$$

Goiko definizioko baldintzazko itxaropenaren existentzia frogatu daiteke, baino ikastaro honetan ez dugu frogapen hori ikusiko; beraz, hori egitzat joko dugu hemendik aurrera. Bakartasuna ia-ziurrenik ematen dela ikusteko, ondoko eran egingo dugu: suposatu $h_1 = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ eta $h_2 = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ direla. Horrela, $\forall B \in \mathcal{G}$,

$$\int_B h_1 \ d\mathbb{P} = \int_B h_2 \ d\mathbb{P},$$

eta honek inplikatzen du h_1 eta h_2 ia-ziurrenik berdinak direla. Hurrengo atalean, baldintzazko itxaropenaren beste propietate batzuk ikusiko dugu, haiek ia-ziurrenik betetzen direlarik.

7.2 Propietateak

Kapitulu honetan definitutako baldintzazko probabilitateak propietate interesgarri batzuk ikusiko dugu. Horrela, $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}$ ematen dela suposatuko dugu, hau da, $\mathcal{G}$ izango dela $\mathcal{B}$-ren azpi-σ-aljebra.

Proposizioa 7.2.1. *X integragarria bada, $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ integragarria da.*

Orain arte, suposatu dugu X integragarria dela eta, nahiz eta ez esan, baita ere $X \in \mathcal{B}/\beta$. Ondoko emaitzan $X \in \mathcal{G}/\beta$ suposatuko dugu.

Proposizioa 7.2.2. *$X \in \mathcal{G}/\beta$ bada, $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$.*

Frogapena. Frogatuko dugu $X \in \mathcal{G}/\beta$ denean, baldintzazko probabilitatearen definizioaren bi baldintzak betetzen dituela. Lehena, emaitzaren hipotesia da eta bigarren ere egia da, izan ere $\forall B \in \mathcal{G}$

$$\int_B X \, d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \, d\mathbb{P} = \int_B X \, d\mathbb{P}.$$

□

Gogoratu $A, B \in \mathcal{B}$ independienteak badira, orduan $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ ematen dela. Gogoratu X zorizko aldagaia eta $\mathcal{G}$ independienteak direla, $\mathcal{G}$ eta $\sigma(X)$ independienteak badira. Horrela, X zorizko aldagaia eta $\mathcal{G}$ independienteak badira, orduan

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X].$$

Propietate hau ez dugu frogatu eta, hortaz, egitzat joko dugu.

Orain, baldintzazko itxaropenaren linealitatean zentratuko gara.

Proposizioa 7.2.3. *Demagun X_1 eta X_2 zorizko aldagai integragarriak direla. Orduan,*

$$\mathbb{E}[X_1 + X_2|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X_1|\mathcal{G}] + \mathbb{E}[X_2|\mathcal{G}].$$

eta $\alpha \in \mathbb{R}$ bada, orduan $\mathbb{E}[\alpha X_1] = \alpha \mathbb{E}[X_1]$.

Goiko emaitzaren ondorioz, ondokoa dugu.

Korolarioa 7.2.1. *X integragarria bada, orduan*

$$|\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]| \leq \mathbb{E}[|X||\mathcal{G}].$$

Frogapena. Idatziko dugu $X = X^+ - X^-$ eta badakigu X^+ eta X^- integragarriak direla (X integragarria delako). Beraz, linealitatea erabiliz,

$$|\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]| = |\mathbb{E}[X^+ - X^-|\mathcal{G}]| = |\mathbb{E}[X^+|\mathcal{G}] - \mathbb{E}[X^-|\mathcal{G}]|. \tag{7.1}$$

Ezberdintza triangeluarra erabiliz,

$$|\mathbb{E}[X^+|\mathcal{G}] - \mathbb{E}[X^-|\mathcal{G}]| \leq |\mathbb{E}[X^+|\mathcal{G}]| + |\mathbb{E}[X^-|\mathcal{G}]|. \tag{7.2}$$

Orain, X^+ eta X^- ez negatiboak dira, beraz, $|\mathbb{E}[X^+|\mathcal{G}]| = \mathbb{E}[X^+|\mathcal{G}]$ eta $|\mathbb{E}[X^-|\mathcal{G}]| = \mathbb{E}[X^-|\mathcal{G}]$. Horrela, linealitatea erabiliz berriro, baita $|X| = X^+ - X^-$ ere,

$$|\mathbb{E}[X^+|\mathcal{G}]| + |\mathbb{E}[X^-|\mathcal{G}]| = \mathbb{E}[X^+|\mathcal{G}] + \mathbb{E}[X^-|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X^+ + X^-|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[|X||\mathcal{G}]. \tag{7.3}$$

Beraz, (7.1), (7.2) eta (7.3) kontuan hartuta, frogatu dugu nahi genuena. □

Oharra 7.2.1. *Baldintzazko itxaropenak beste propietate batzuk betetzen ditu 3. kapituluko itxaropenak betetzen dituena, esate baterako monotonia, Cauchy-Schwartz-en* *ezberdintza, Jensen-en ezberdintza, Fatou-ren lema, Konbergentzia Monotonoaren Teorema eta Konbergentzia Monotonoaren ezberdintza.*

Notazioari dagokionez, $Y, X_1, X_2, \ldots, X_n$ zorizko aldagaiak badira, askotan baldintzazko probabilitatea ondoko eran idazten da:

$$\mathbb{E}[Y|X_1, X_2, \ldots, X_n].$$

Honek esan nahi du $\mathcal{G}$-ren itxaropen baldintzatua aztertzen ari garela, non $\mathcal{G} = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ hartzen ari garen, hau da, $\mathcal{G}$ izango da σ-aljebrarik txikiena egiten duena $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ neurgarria izatea.

7.3 Martingalak

Martingalak baldintzazko itxaropena erabiliz definitutako prozesu estokastikoak dira. Atal honetan denbora diskretuko martingalak ikasiko ditugu. Lehendabizi, ikus dezagun zer den filtrazio bat.

Definizioa 7.3.1. *Demagun $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ probabilitate espazioa dela. Horrela, $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$-ren filtrazio bat $\{F_n : \ n \geq 1\}$ σ-aljebren familia da non $\{\emptyset, \Omega\} \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{B}$ edozein n-rako eta*

$$\mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \ldots$$

Hitzak erabiliz, filtrazio bat σ-aljebren familia bat da orden ez-beherakorrean daudenak. Ohartu $\mathcal{F}_n$ guztiak $\mathcal{B}$-ren azpi-σ-aljebrak direla. Orain, denbora diskretuko prozesu estokastiko baten filtrazio naturala definituko dugu.

Definizioa 7.3.2. *Demagun $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ prozesu estokastikoa dela. Filtrazio naturala $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ definitzen da.*

Ohartu filtrazio naturalak orden ez-beherakorrean egotearen propietatea betetzen duela; izan ere, $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ ematen da.

Adibidea 7.3.1. *Txanpon bat bota hiru aldiz aurrera botatzean datzan prozesu estokastikoa kontzideratu. Aurkitu eta interpretatu filtrazio naturala.*

Orain, definizio garrantzitsu bat ikusiko dugu.

Definizioa 7.3.3. *Demagun $\{X_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ prozesu estokastiko bat dela eta $\{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\}$ filtrazio bat. Orduan, $\{X_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ egokitzen da $\{\mathcal{F}_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ filtraziora, $X_n \in \mathcal{F}_n/\beta$ bada edozein n-rako.*

Denbora diskretuko martinagala bat zer den ikusiko dugu jarraian.

Definizioa 7.3.4. *Demagun $\{\mathcal{F}_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$-ren filtrazio bat dela eta $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ filtrazio honi egokitutako prozesu estokastikoa dela. Prozesu estokastiko hori martingala bat izango da ondokoa betetzen bada edozein n-rako:*

1. X_n *integragarria bada*

2. $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$.

Adibidea 7.3.2. *Suposatu edozein unean* 10 *probabilitate 1/4-rekin lortzen dugula,* 8 *balioa probabilitate 1/4-rekin eta, bestela,* -9 *balioa. Horrela, kontzideratuko dugu* X_n *izango dela* n*-ra arte lortutako balioen batura. Argi dago* X_n *prozesu estokastiko bat dela. Definitu* Y_n n *unean lortutako balioaren zorizko aldagaia. Horrela,*

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_n + Y_n|\mathcal{F}_n].$$

Argi dago X_n *eta* Y_n *integragarriak direla eta beraz,*

$$\mathbb{E}[X_n + Y_n|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_n].$$

Orain, Y_n *eta* $\mathcal{F}_n$ *independienteak dira, beraz*

$$\mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[Y_n] = 10\frac{1}{4} + 8\frac{1}{4} - 9\frac{1}{2} = 0.$$

Bestalde, $X_n \in \mathcal{F}_n/\beta$ *da eta, horregatik, Proposizioa 7.2.2 erabiliz,*

$$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_n] = X_n.$$

Ondorioz, $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 0 + X_n = X_n$ *eta, beraz,* $\{X_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ *martingala da.*