IPN-UPIITA

Control Neurodifuso

Reporte

Dr. Rafael Martínez Martínez
IPN-UPIITA, Academia de sistemas
ramartinezr@ipn.mx

Instrucciones:

- Cada problema/ejercicio debe tener procedimiento ordenado y completo que justifique adecuadamente la respuesta anotada.
- Si falta el procedimiento o este no justifica la respuesta anotada entonces el problema vale 0 puntos aunque la respuesta sea correcta.

Contents

Problema

Dada

$$Y = \left(\frac{X-\nu}{\alpha}\right)^{\beta} \tag{1}$$

Muestre que si X en una variable aleatoria Weibull con parametros ν, α, y β, entonces Y es una variable aleatoria exponencial con parametro $\lambda = 1$ y viceversa.

THIS IS A PARAGRAPH IN SMALL-CAPS.

Solución:

Mostraremos el resultado para la sigueinte elección de las constantes: $\beta > 0$, $\alpha > 0$ y $\nu \in \mathbb{R}$. Supongamos que X es una variable aleatoria Weibull con parametros mencionados previamente, es decir, su función de densidad esta dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta-1} \mathbf{exp}\left(-\left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta}\right) & \text{si } x > \nu \\ 0 & \text{si } x \leq \nu \end{cases} \tag{2}$$

Para $y > 0$ tenemos

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\left(Y \leq y\right) \\ &= P\left(\left(\frac{X-\nu}{\alpha}\right)^{\beta} \leq y\right) \\ &= P\left(X \leq \alpha y^{1/\beta} + \nu\right) \\ &= F_X(\alpha y^{1/\beta} + \nu) \end{aligned}$$

Observemos que con los valores elegidos de los parametros la desigualdad se preserva en el despeje de X. Derivando respecto a y

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{dF_Y}{dy}(y) \\ &= \frac{dF_X}{dx}(\alpha y^{1/\beta} + \nu)\frac{\alpha}{\beta}y^{1/\beta-1} \\ &= \frac{\alpha}{\beta}y^{1/\beta-1}f_X(\alpha y^{1/\beta} + \nu) \end{aligned}$$

Observemos que $\alpha y^{1/\beta} + \nu > \nu$ entonces

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{\alpha}{\beta}y^{1/\beta-1}\frac{\beta}{\alpha}(y^{1/\beta})^{\beta-1}e^{-y} \\ &= e^{-y} \end{aligned}$$

Ahora si $y \leq 0$ sabemos que $0 \leq F_Y(y) \leq F_Y(0) = F_X(\nu) = 0$ entonces $F_Y(y) = 0$, derivando

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y}{dy}(y) = 0$$

Por lo tanto

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leq 0 \end{cases} \tag{3}$$

Así Y se distribuye exponencial con parametro $\lambda = 1$

Ahora supongamos que Y se distrubuye exponencial con parametro $\lambda = 1$ como en la ecuación (3)

Para $x > \nu$ y de la ecuación (1)

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P\left(X \le x\right) \\ &= P\left(\alpha Y^{1/\beta} + \nu \le x\right) \\ &= P\left(Y \le \left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta}\right) \\ &= F_Y\left(\left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta}\right) \end{aligned}$$

Observemos que con los valores elegidos de los parametros la desigualdad se preserva en el despeje de Y. Derivando respecto a x

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{dF_X}{dx}(x) \\ &= \frac{dF_Y}{dy}\left(\left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta}\right)\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta-1} \\ &= \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta-1} f_Y\left(\left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta}\right) \end{aligned}$$

Observemos que $\left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta} > 0$ entonces

$$f_X(x) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta-1} \mathbf{exp}\left(-\left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta}\right) \tag{4}$$

Ahora si $x \le \nu$ sabemos que $0 \le F_X(x) \le F_X(\nu) = F_Y(0) = 0$ entonces $F_X(x) = 0$, derivando

$$f_X(x) = \frac{dF_X}{dx}(x) = 0 \tag{5}$$

De las ecuaciones (4) y (5) al comparar con la ecuación (2) se tiene que la variable aleatoria X tiene distrinución Weibull con parametros $\beta > 0$, $\alpha > 0$ y $\nu \in \mathbb{R}$.

A continuación se muestra la simulación para verificar dicho resultado

[1] Zadeh, L.A., “Fuzzy sets,” Information and Control, Vol. 8, pp. 338-353, 1965.