

# SignSys - Formulaire

April 20, 2021

## Généralités

### Classement des signaux

- Continu vs. discret
- Déterministe et périodique
- Déterministe et transitoire
- Aléatoire et stationnaire
- Aléatoire et non-stationnaire
- Selon l'énergie et la puissance

### Puissance et énergie

Énergie:

$$W = \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$$

Puissance et valeur efficace:

$$P_x = \frac{W}{N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$$

$$P_x = P_{dc} + P_{ac} = X_{dc}^2 + X_{ac}^2$$

$$P_{ac} = P_x - X_{dc}^2, \quad X_{ac} = \sqrt{P_{ac}}$$

$$X_{dc} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]$$

$$X_{rms} = \sqrt{P_x} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |x[k]|^2}$$

Exemples de classement:

- Puissance finie, énergie infinie: sinus, saut unité et tous les signaux périodiques
- Puissance infinie et énergie finie: impulsion de Dirac
- Puissance et énergie infinie: exponentielle

## Signaux et systèmes numériques

### Signaux numériques

Impulsion unité:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

$$\delta[n] = \epsilon[n] - \epsilon[n-1]$$

Saut unité:

$$\epsilon[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot \delta[n-k]$$

Exponentielle numérique:

$$x[n] = R^n \cdot \epsilon[n]$$

Sinusode:

$$x[n] = \cos(n\Omega_0 + \phi)$$

$$\Omega_0 = \omega_0 \cdot T_e = \frac{\omega_o}{f_e} = 2\pi \cdot \frac{f_0}{f_e} = 2\pi f_0 T_e \quad F_0 = \frac{f_0}{f_e} = \frac{k}{N}$$

Phaseur de pulsation  $\Omega_0$ :

$$x[n] = e^{jn\Omega_0}$$

## Période numérique

Période d'échantillonnage:  $x[n] = x(n \cdot T_e)$

Signal périodique:  $x[n] = x[n + N]$

Signal sinusoidal périodique:  $N\Omega_0 = k2\pi$

## Systèmes numériques

### Propriétés des systèmes

1. *Statique*: sans mémoire
2. *Dynamique*: avec mémoire
3. *Linéaire*: satisfait au principe de superposition
4. *Temporellement invariant*: décalage en entrée provoque uniquement un décalage à la sortie
5. *Causal*: ne dépend que du présent ou du passé
6. *Stable*: si amplitude finie en entrée, en aucun cas la sortie ne devient infiniment grande

### Exemples de quelques systèmes

Système identité:  $y[n] = x[n]$

Décalage arrière:  $y[n] = x[n - k]$

Décalage avant:  $y[n] = x[n + k]$

Maximum:  $y[n] = \max\{x[n - 1], x[n], x[n + 1]\}$

Moyenneur glissant:  $y[n] = \frac{1}{5}(x[n] + x[n - 1] + x[n - 2] + x[n - 3] + x[n - 4])$

Autres systèmes:

	Opérations	Équations	L	I	C	S	M
a	Différence avant	$x[n + 1] - x[n]$	O	O	N	O	O
b	Différence arrière	$x[n] - x[n - 1]$	O	O	O	O	O
c	Accumulation	$\sum_{-\infty}^n x[k]$	O	O	O	N	O
d	Amplification	$a x[n]$	O	O	O	O	N
e	Moyenneur centré	$(x[n + 1] + x[n] + x[n - 1]) / 3$	O	O	N	O	O
f	Contraction temporelle	$x[n^2]$					
g	Sous-échantillonnage	$x[2n]$					
h	Rotation autour de Oy	$x[-n]$					
j	Multiplication temporelle	$n x[n]$					
k	Opération quadratique	$x^2[n]$					
l	Amplification et décalage	$a x[n] + b, \quad b \neq 0$					

## Réponse impulsionnelle et produit de convolution

S'applique à:

- Système LIT: linéaire et invariant par translation
- Système RIF: à réponse impulsionnelle de durée finie

Produit de convolution:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n - k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n - k]$$

## Systèmes décrits par des équations récursives

Accumulateur:

$$y[n] = y[n - 1] + x[n]$$

Filtre passe-bas:

$$y[n] = \frac{T_e}{\tau} x[n] + R y[n - 1]$$

Moyenne cumulée:

$$y[n] = \frac{1}{n + 1} (x[n] + n y[n - 1])$$

## La corrélation

Signaux à énergie finie:

$$r_{xy}[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot y[n+k]$$

Auto-corrélation:

$$r_{xx}[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot x[n+k]$$

$$r_{xx}[0] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = W_x$$

Propriétés:

$$r_{xy}[k] = r_{yx}[-k]$$

$$r_{xy}[k] = x[-k] * y[k]$$

$$r_{xx}[k] = r_{xx}[-k]$$

Signaux à puissance moyenne finie:

$$r_{xy}[k] = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M x[n] \cdot y[n+k]$$

$$r_{xx}[k] = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M x[n] \cdot x[n+k]$$

Signaux périodiques:

$$r_{xy}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot y[n+k]$$

$$r_{xx}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot x[n+k]$$

Normalisation avant corrélation:

$$x_n[n] = (x[n] - \mu_x) / \sigma_x$$

$$y_n[n] = (y[n] - \mu_y) / \sigma_y$$

$$\rho_{xy}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n[n] \cdot y_n[n+k]$$

## Réponse des systèmes numériques

### Réponse temporelle des systèmes linéaires

### Stabilité des systèmes numériques

### Instants caractéristiques

$$K_c = \pm \frac{1}{\ln(R)} = \frac{1}{|\ln(R)|}$$

$$K_p = \frac{2\pi}{\Omega}$$

$$K_{tr} \simeq 5K_c = \frac{5}{|\ln(R)|}$$

$$N_{osc} = \frac{K_{tr}}{K_p} = \frac{5\Omega}{2\pi|\ln(R)|} \simeq \frac{\Omega}{|\ln(R)|}$$

## Analyse temporelle des systèmes discrets

### Transformée en Z

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

$$z^{-1} \equiv e^{-sT_e}$$

### Propriétés de la transformée en Z

1. Linéarité:  $Z\{ax[n] + by[n]\} = aX(z) + bY(z)$
2. Décalage temporel:  $Z\{x[n+d]\} = z^{+d}X(z)$
3. Amortissement:  $Z\{\alpha^n x[n]\} = X\left(\frac{z}{\alpha}\right)$
4. Valeur initiale:  $x[0] = X(z)|_{z \rightarrow \infty}$
5. Valeur finale (si système stable):  $x[\infty] = (z-1)X(z)|_{z=1}$

## Équation aux différences et fonction de transfert

$$y[n] + \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

Pour un système d'ordre 2:

$$y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$

Forme de réalisation:

$$H(z) \equiv \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

Forme analytique:

$$H(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

## Lieu de pôles

## Analyse fréquentielle des signaux continus et discrets

## Analyse des signaux périodiques

## Transformation de Fourier des signaux non périodiques

## Éléments d'analyse spectrale numérique

## Analyse fréquentielle des systèmes, et synthèse des filtres

## Réponse fréquentielle des systèmes LTI

## Pôles, zéros et réponse fréquentielle

## Calcul et traçage de réponse fréquentielle

## Analyse et réalisation d'un filtre

## Classification des systèmes numériques

## Échantillonnage et reconstruction des signaux analogiques

## Introduction

## Analyse temporelle

## Analyse fréquentielle

## Recouvrement spectral

## Théorème de l'échantillonnage

## Quantification d'un signal échantillonné

## Choix d'un filtre et de la fréquence d'échantillonnage

## Reconstruction du signal

## Analyse qualitative d'une chaîne A/N - N/A