Formulaire - Regul

April 18, 2021

1 Introduction

Régulateurs de base:

- À action manuelle
- À action à 2 positions (tout-ou-rien)
- À action proportionnelle: $u(t) = K_p \cdot e(t)$
  - gain statique (statisme)
  - instabilité si K_p élevé

Système de régulation automatique:

Deux modes de régulation automatique:

- Régulation de correspondance (but: suivre une consigne)
- Régulation de maintien (but: maintenir une consigne malgré des perturbations)

Problèmes fondamentaux des systèmes de régulation automatique:

1. Stabilité
2. Précision et rapidité
3. Dilemme stabilité-précision

Types de systèmes

Gain statique:

$$K = \left.\frac{\lim_{t\to\infty} y(t)}{\lim_{t\to\infty} u(t)}\right|_{u(t)=\text{ const.}} = \left.\frac{y_\infty}{u_\infty}\right|_{u(t)=\text{ const.}} = \frac{\lim_{s\to 0} s \cdot Y(s)}{\lim_{s\to 0} s \cdot U(s)}$$

- Système statique: ne dépend que de l'entrée
- Système dynamique: dépend de l'entrée présente mais aussi des entrées (sorties) passées
- Système linéaire: si obéit au principe de superposition

Dans ce cours: systèmes linéaires, dynamiques, à constantes localisées.

Modélisation

Réponses indicielles typiques:

- Système à retard pur
- Systèmes à modes apériodiques (sans oscillations)
- Systèmes à modes oscillatoires et systèmes à déphasage non-minimal (ou «vicieux»)
- Systèmes à comportement intégrateur ou dérivateur

Éléments d'un schéma fonctionnel:

- Gains
- Comparateurs
- Intégrateurs

Par équations différentielles

Système linéaire dynamique peut être modélisé par:

- une équation d'ordre n
- n équations différentielles d'ordre 1 (forme canonique: dérivée première dans le membre de gauche)

Par réponse impulsionnelle

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t-\tau) \cdot u(\tau) \cdot d\tau = g(t) * u(t)$$

avec $g(t)$: réponse impulsionnelle (de Dirac) du système

Par la fonction de transfert

Définition:

$$y(t) = g(t) * u(t) \longrightarrow Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

Forme générale:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot s + a_0}$$

Forme de Bode:
Coefficients des plus *basses* puissances de s unitaires

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{1 + \frac{b_1}{b_0} \cdot s + \frac{b_2}{b_0} \cdot s^2 + \ldots + \frac{b_m}{b_0} \cdot s^m}{1 + \frac{a_1}{a_0} \cdot s + \frac{a_2}{a_0} \cdot s^2 + \ldots + \frac{a_n}{a_0} \cdot s^n}$$

Forme de Bode factorisée:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = K \cdot \frac{(1 + s \cdot \tau_1^*) \cdot (1 + s \cdot \tau_2^*) \cdot \ldots \cdot (1 + s \cdot \tau_m^*)}{(1 + s \cdot \tau_1) \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot \zeta}{\omega_n} \cdot s + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot s^2\right) \cdot \ldots (1 + s \cdot \tau_n)}$$

Forme de Laplace:
Coefficients des plus *hautes* puissances de s unitaires

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{s^m + \frac{b_{m-1}}{b_m} \cdot s^{m-1} + \ldots + \frac{b_0}{b_m}}{s^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot s^{n-1} + \ldots + \frac{a_0}{a_n}}$$

Forme de Laplace factorisée:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{(s - z_1) \cdot (s - z_2) \cdot \ldots \cdot (s - z_m)}{(s - s_1) \cdot (s - s_2) \cdot \ldots \cdot (s - s_n)}$$

- n: nombre de pôles (réels ou complexes) $\rightarrow$ ordre du système
- m: nombre de zéros (réels ou complexes)
- $d = n - m$: degré relatif
- Type α: nombre de pôles à $s = 0$ (intégrateurs purs)

Système à retard pur: $L\{u(t - T_r)\} = U(s) \cdot e^{-s \cdot T_r}$

MatLab:

- $numG$, $denomG$: vecteurs des coefficients de s (ordre décroissant)
- $G = tf(numG, denomG)$: objet «fonction de transfert»
- $step(G)$: fonction saut indiciel

Systèmes fondamentaux

Système fondamental si:

- Si d'ordre 1 ou 2 à pôles complexes
- Type $\alpha = 0$
- N'a pas de zéro $\rightarrow$ Gain statique K infini

Système fondamental d'ordre 1

Forme:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{1 + s \cdot \tau} = \frac{K}{\tau} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} = \frac{k}{s - s_1}$$

Équation différentielle:

$$\tau \cdot \frac{dy}{dt} + y(t) = K \cdot u(t)$$

Réponse à une impulsion de Dirac:

$$g(t) = k \cdot e^{-t/\tau}$$

Réponse à un saut indiciel:

$$\gamma(t) = K \cdot (1 - e^{-t/\tau}) \cdot \epsilon(t)$$

Mode temporel: $e^{s_1 \cdot t} \cdot \epsilon(t)$

Système fondamental d'ordre 2

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0} = \frac{k}{(s - s_1) \cdot (s - s_2)}$$

$$s_{1,2} = -\delta \pm j \cdot \omega_0$$

Forme de Laplace:

$$G(s) = \frac{k}{(s+\delta)^2 + \omega_0^2} \qquad k = \frac{b_0}{a_2}$$

Forme de Bode:

$$G(s) = \frac{K}{1 + \frac{2\cdot\zeta}{\omega_n} \cdot s + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot s^2} \qquad K = \frac{b_0}{a_0}$$

Réponse à une impulsion de Dirac:

$$g(t) = \frac{k}{\omega_0} \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \cdot \epsilon(t)$$

Réponse à une impulsion unité:

- Taux d'amortissement ζ: détermine le nombre d'oscillations (mais n'est pas égal à...) de la réponse temporelle avant la stabilisation.
- Pulsation propre non-amortie ω_n: pulsation de résonnance de phase.
- Pulsation propre du régime libre ω_0: $\omega_0 = \omega_n \cdot \sqrt{1-\zeta^2} = \sqrt{\omega_n^2 - \delta^2}$
- Facteur d'amortissement δ: rapidité avec laquelle le régime transitoire s'atténue ($sin(\omega_0 \cdot t)$ est pondéré par $e^{-\delta \cdot t}$)
- Pulsation de résonance: $\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \sigma^2}$

Réponse indicielle:

$$\gamma(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left[\cos\omega_0 t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_0 t\right]$$

Pôles dominants

Pôle(s) le(s) plus proche(s) de 0 sur l'axe des réels. Permet une simplification des calculs.

Réponse fréquentielle

1.1 Introduction

Réponse fréquentielle: réponse à un régime permanent sinusoidal, qui est constituée:

1. du gain
2. de la phase

1.2 Calcul de la réponse fréquentielle

$$G(s)|_{s=j\cdot\omega} = G(j\cdot\omega) \longrightarrow \begin{cases} A(\omega) = |G(j\cdot\omega)| \\ \varphi(\omega) = \arg\{G(j\cdot\omega)\} \end{cases}$$

1.3 Diagramme de Bode

Formes canoniques:

1. $G_{c1}(s) = K$
2. $G_{c2}(s) = 1 + s \cdot \tau$
3. $G_{c3}(s) = \frac{1}{1+s\cdot\tau}$
4. $G_{c4}(s) = \frac{K}{s} = \frac{1}{\frac{s}{w_{p0}}} = \frac{\omega_{p0}}{s}$
5. $G_{c5}(s) = K \cdot s = \frac{s}{\omega_{a0}}$
6. $G_{c6}(s) = \frac{1}{1+\frac{2\cdot\zeta}{w_n}\cdot s+\frac{1}{\omega_n^2}\cdot s^2}$
7. $G_{c7}(s) = 1 + \frac{2\cdot\zeta}{\omega_n} \cdot s + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot s^2$

$$A_{\text{ dB}} = A_{1\text{ dB}} + A_{2\text{ dB}} + \dots$$
$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \dots$$

Méthode:

1. présenter $G(s)$ sous forme de Bode;
2. factoriser $G(s)$ de manière à faire apparaître les formes canoniques;
3. identifier les pulsations caractéristiques de chacun des éléments et tracer leur diagramme de Bode;
4. sommer les réponses des éléments

1.4 Système fondamental d'ordre 1

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{1 + s \cdot \tau} = \frac{K}{1 + \frac{s}{\omega_p}}$$

$$\omega_p = \frac{1}{\tau}$$

Pour le gain:

1. une asymptote horizontale jusqu'à la pulsation caractéristique $\omega_p = 1/\tau$
2. une asymptote oblique à partir de ω_p ayant une pente de -20dB/décade.

Pour la phase:

1. une asymptote horizontale à 0°jusqu'à $\omega_p/10$
2. une asymptote oblique de $\omega_p/10$ à $10 \cdot \omega_p$ ayant une pente de -45°/décade
3. une asymptote horizontale à -90°dès $10 \cdot \omega_p$.

1.5 Système fondamental d'ordre 2

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \zeta}{\omega_n} \cdot s + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot s^2}$$

Pour le gain:

1. une asymptote horizontale jusqu'à la pulsation caractéristique $\omega_p = \omega_n$, qui correspond à la pulsation propre non-amortie;
2. une asymptote oblique à partir de ω_n ayant une pente de -40dB/décade.

Pour la phase:

1. une asymptote horizontale à 0°jusqu'à $\omega_n/10$
2. une asymptote oblique de $\omega_n/10$ à $10 \cdot \omega_n$ ayant une pente de -90°/décade
3. une asymptote horizontale à -180°dès $10 \cdot \omega_n$.

Pulsation de résonance de gain (gain maximum):

$$\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \zeta^2}$$

1.6 Systèmes à retard pur

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot s + b_0}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot s + a_0} \cdot e^{-s \cdot T_r}$$

$$\arg\left\{e^{-j \cdot \omega \cdot T_r}\right\} = -\omega \cdot T_r$$

Schémas fonctionnels

Stabilité

Régulateur PID

Performance

Synthèse fréquentielle