

Formulaire - Regul

March 22, 2021

1 Introduction

Régulateurs de base:

- À action manuelle
- À action à 2 positions (tout-ou-rien)
- À action proportionnelle: $u(t) = K_p \cdot e(t)$
 - gain statique (statisme)
 - instabilité si K_p élevé

Système de régulation automatique:

Deux modes de régulation automatique:

- Régulation de correspondance (but: suivre une consigne)
- Régulation de maintien (but: maintenir une consigne malgré des perturbations)

Problèmes fondamentaux des systèmes de régulation automatique:

1. Stabilité
2. Précision et rapidité
3. Dilemme stabilité-précision

Types de systèmes

Gain statique:

$$K = \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)}{\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)} \Big|_{u(t) = \text{const.}} = \frac{y_\infty}{u_\infty} \Big|_{u(t) = \text{const.}} = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s)}{\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot U(s)}$$

- Système statique: ne dépend que de l'entrée
- Système dynamique: dépend de l'entrée présente mais aussi des entrées (sorties) passées
- Système linéaire: si obéit au principe de superposition

Dans ce cours: systèmes linéaires, dynamiques, à constantes localisées.

Modélisation

Réponses indicielles typiques:

- Système à retard pur
- Systèmes à modes apériodiques (sans oscillations)
- Systèmes à modes oscillatoires et systèmes à déphasage non-minimal (ou «viciés»)
- Systèmes à comportement intégrateur ou dérivateur

Éléments d'un schéma fonctionnel:

- Gains
- Comparateurs
- Intégrateurs

Par équations différentielles

Système linéaire dynamique peut être modélisé par:

- une équation d'ordre n
- n équations différentielles d'ordre 1 (forme canonique: dérivée première dans le membre de gauche)

Par réponse impulsionnelle

$$y(t) = \int_{-\infty}^t g(t - \tau) \cdot u(\tau) \cdot d\tau = g(t) * u(t)$$

avec $g(t)$: réponse impulsionnelle (de Dirac) du système

Par la fonction de transfert

Définition:

$$y(t) = g(t) * u(t) \longrightarrow Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

Forme générale:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0}$$

Forme de Bode:

Coefficients des plus *basses* puissances de s unitaires

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{1 + \frac{b_1}{b_0} \cdot s + \frac{b_2}{b_0} \cdot s^2 + \dots + \frac{b_m}{b_0} \cdot s^m}{1 + \frac{a_1}{a_0} \cdot s + \frac{a_2}{a_0} \cdot s^2 + \dots + \frac{a_n}{a_0} \cdot s^n}$$

Forme de Bode factorisée:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = K \cdot \frac{(1 + s \cdot \tau_1^*) \cdot (1 + s \cdot \tau_2^*) \cdot \dots \cdot (1 + s \cdot \tau_m^*)}{(1 + s \cdot \tau_1) \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot \zeta}{\omega_n} \cdot s + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot s^2\right) \cdot \dots \cdot (1 + s \cdot \tau_n)}$$

Forme de Laplace:

Coefficients des plus *hautes* puissances de s unitaires

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{s^m + \frac{b_{m-1}}{b_m} \cdot s^{m-1} + \dots + \frac{b_0}{b_m}}{s^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot s^{n-1} + \dots + \frac{a_0}{a_n}}$$

Forme de Laplace factorisée:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{(s - z_1) \cdot (s - z_2) \cdot \dots \cdot (s - z_m)}{(s - s_1) \cdot (s - s_2) \cdot \dots \cdot (s - s_n)}$$

- n : nombre de pôles (réels ou complexes) \rightarrow ordre du système
- m : nombre de zéros (réels ou complexes)
- $d = n - m$: degré relatif
- Type α : nombre de pôles à $s = 0$ (intégrateurs purs)

Système à retard pur: $L\{u(t - T_r)\} = U(s) \cdot e^{-s \cdot T_r}$

MatLab:

- $numG, denomG$: vecteurs des coefficients de s (ordre décroissant)
- $G = tf(numG, denomG)$: objet «fonction de transfert»
- $step(G)$: fonction saut indiciel

Systèmes fondamentaux

Système fondamental si:

- Si d'ordre 1 ou 2 à pôles complexes
- Type $\alpha = 0$
- N'a pas de zéro \rightarrow Gain statique K infini

Système fondamental d'ordre 1

Forme:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{1 + s \cdot \tau} = \frac{K}{\tau} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} = \frac{k}{s - s_1}$$

Équation différentielle:

$$\tau \cdot \frac{dy}{dt} + y(t) = K \cdot u(t)$$

Réponse à une impulsion de Dirac:

$$g(t) = k \cdot e^{-t/\tau}$$

Réponse à un saut indiciel:

$$\gamma(t) = K \cdot (1 - e^{-t/\tau}) \cdot \epsilon(t)$$

Mode temporel: $e^{s_1 \cdot t} \cdot \epsilon(t)$

Système fondamental d'ordre 2

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0} = \frac{k}{(s - s_1) \cdot (s - s_2)}$$
$$s_{1,2} = -\delta \pm j \cdot \omega_0$$

Forme de Laplace:

$$G(s) = \frac{k}{(s + \delta)^2 + \omega_0^2} \quad k = \frac{b_0}{a_2}$$

Forme de Bode:

$$G(s) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \zeta}{\omega_n} \cdot s + \frac{1}{\omega_n^2} \cdot s^2} \quad K = \frac{b_0}{a_0}$$

Réponse à une impulsion de Dirac:

$$g(t) = \frac{k}{\omega_0} \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \cdot \epsilon(t)$$

Réponse à une impulsion unité:

- Taux d'amortissement ζ : détermine le nombre d'oscillations (mais n'est pas égal à...) de la réponse temporelle avant la stabilisation.
- Pulsation propre non-amortie ω_n : pulsation de résonance de phase.
- Pulsation propre du régime libre ω_0 : $\omega_0 = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} = \sqrt{\omega_n^2 - \delta^2}$
- Facteur d'amortissement δ : rapidité avec laquelle le régime transitoire s'atténue ($\sin(\omega_0 \cdot t)$ est pondéré par $e^{-\delta \cdot t}$)
- Pulsation de résonance: $\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \sigma^2}$

Réponse indicielle:

$$\gamma(t) = 1 - e^{-\zeta \omega_n t} \left[\cos \omega_0 t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_0 t \right]$$

Pôles dominants

Pôle(s) le(s) plus proche(s) de 0 sur l'axe des réels. Permet une simplification des calculs.

Réponse fréquentielle

Diagramme de Bode

Systèmes à retard pur

Schémas fonctionnels

Stabilité

Régulateur PID

Performance

Synthèse fréquentielle