2.4.5. El diferencial

conjunto abierto

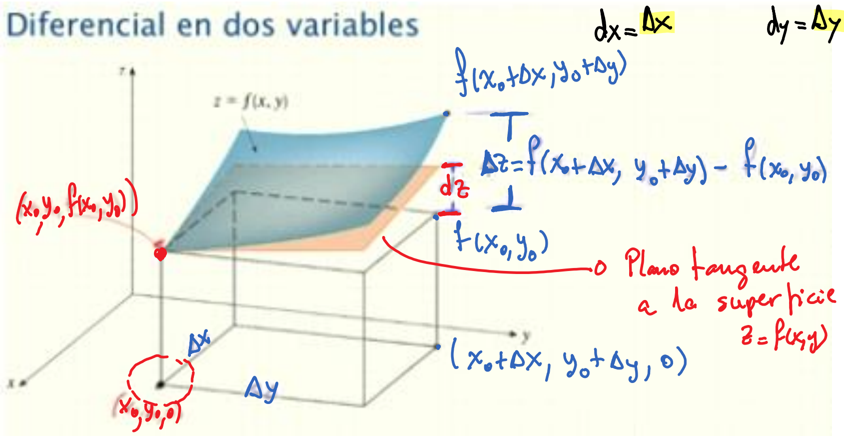
Definición 29 *La diferencial de una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable, denotada por $df\,(\mathrm{x})$, está dada por:*

$$df(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) h_n$$

En consecuencia si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ entonces

$$dz = df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f}{\partial y} h_2 = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, h_2 = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy$$

$dx = \Delta x$ $dy = \Delta y$



Observación

Si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en un punto (x_o, y_o)

$$f(x_o, y_o) - f(x_o + h_1, y_o + h_2) = df(x_o, y_o) + r(h_1, h_2),$$

donde $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \dfrac{r(h_1,h_2)}{||(h_1,h_2)||} = 0$, entonces

$$\underbrace{f(x_o + h_1, y_o + h_2)}_{} \underset{\text{aprox.}}{\approx} f(x_o, y_o) + df(x_o, y_o). \Rightarrow \underbrace{f(x_o+h_1, y_o+h_2) - f(x_o,y_o)}_{\Delta z} \approx df(x_o,y_o)$$

$\approx df(x_o,y_o)$

El uso inmediato de la diferencial está en aproximar valores de funciones en ciertas n-adas muy proximas a una n-ada cuyo valor es conocido.

EJERCICIOS-GRADIENTE-DIFERENCIAL-DERVDIREC

Gradiente – Diferencial (1)

La temperatura en un punto (x,y) de una lámina metálica es $T(x,y) = x(e^{y} + e^{-y})$

(a) Halle la dirección de máximo crecimiento de la temperatura en $P(2, \ln 2)$

(b) Si la cota de error en la medida de "x" es de 0.1 y en la de "y" es de 0.02, hallar el máximo error propagado de T en P.

Solución

• $\nabla T(x,y) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}\right)$

• $-\ln 2 = \ln(2^{-1})$

(a) La dirección de máx. crecimiento es $\nabla T(2, \ln 2)$:

$$\nabla T(x,y) = (e^{y} + e^{-y},\ x(e^{y} - e^{-y}))$$

$$\nabla T(2, \ln 2) = (e^{\ln 2} + e^{\ln(2^{-1})},\ 2(e^{\ln 2} - e^{\ln(2^{-1})}))$$

$$= \left(2 + \frac{1}{2},\ 2\left(2 - \frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{5}{2}, 3\right)$$

Error

$dx = \Delta x$

$dy = \Delta y$

$\Delta T \approx dT$

(b) $dT = \frac{\partial T}{\partial x}dx + \frac{\partial T}{\partial y}dy = (e^{y} + e^{-y})dx + (x(e^{y} - e^{-y}))dy$

En el punto P y considerando $dx = 0.1$ y $dy = 0.02$

$$|dT| \leq \left|\frac{5}{2}\right||(0.1)| + |3||(0.02)| = 0.31$$

Gradiente – Diferencial (2)

La temperatura en un punto (x,y) de una lámina metálica es $T(x,y) = \frac{3x}{x^2+y^2}$

a) Halle la dirección de máximo crecimiento de la temperatura en $P(2,-1)$.

b) Si la cota de error en la medida de "x" es de 0.01 y en la de "y" es de 0.02, hallar el máximo error propagado de T en P

Solución

(a) $\nabla T(2,-1) = \left(-\frac{9}{25}, \frac{12}{25}\right)$ (b) $|dT| \leq 0.0132$

Derivada direccional

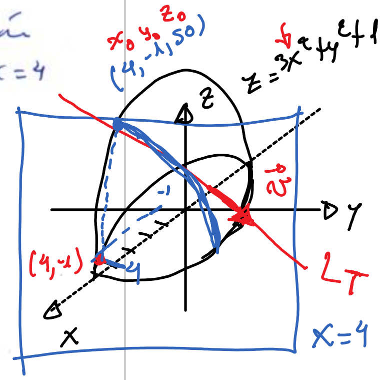
Halle la derivada direccional de $f(x,y,z) = x^2 y z^3$ en el punto $(1,1,-1)$ y en la dirección de la tangente a la curva de intersección de la superficie $z = 3x^2 + y^2 + 1$ con el plano $x = 4$ en el punto $(4,-1,50)$

$$D_{\vec{v}} f = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1,-1) = \nabla f(1,1,-1) \cdot \vec{v}$$

$\vec{v}$: vector dirección unitario

Solución

1º Dirección de la tangente a la curva de intersección con el plano $x = 4$ de la superficie $z = 3x^2 + y^2 + 1$ en el punto $(4,-1,50)$



$L_T: \ z - 50 = \frac{\partial z}{\partial y}(4,-1)(y+1) \ ; \ x = 4$

$L_T: \ z - 50 = \frac{\partial z}{\partial y}(4,-1)\,(y+1) \ ; \ x = 4$

vector dirección $v = \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}(4,-1)\right) = \left(0, 1, 2y\big|_{(4,-1)}\right) = (0,1,-2)$

2º $D_{\vec{u}} f(1,1,-1) = \nabla f(1,1,-1) \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left(2xyz^3\big|_{(1,1,-1)}, x^2 z^3\big|_{(1,1,-1)}, 3x^2y^2z^2\big|_{(1,1,-1)}\right) \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$; $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$

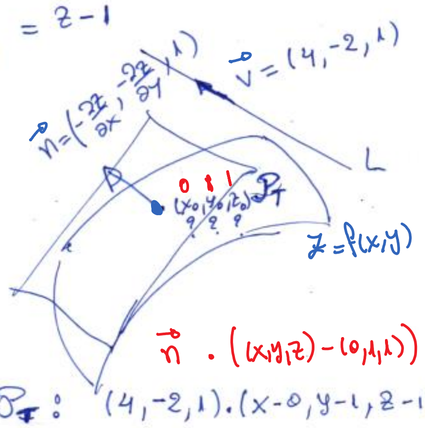
$= \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,-1,3) \cdot (0,1,-2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1-6) = \frac{-7}{\sqrt{5}}$ //.

Plano tangente

Halle la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2 - 4x$ que sea perpendicular a la recta

$L: \frac{x-3}{4} = \frac{y}{-2} = z - 1$

Solución



$P_T \perp L \Rightarrow \vec{n} \parallel \vec{v}$

$\Rightarrow \vec{n} = t\vec{v}$

$\left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right) = t(4,-2,1)$

$(-2x+4, -2y, 1) = (4t, -2t, t)$

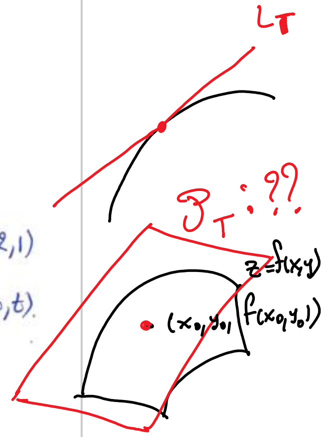
$-2x + 4 = 4t$

$-2y = -2t$

$\boxed{1 = t}$

$\boxed{x = 0}$ $\boxed{y = 1}$

$z = 1$



$\vec{n} \cdot \left((x,y,z) - (0,1,1)\right) = 0$

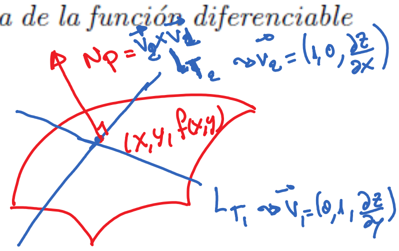
$\therefore P_T: \ (4,-2,1) \cdot (x-0, y-1, z-1) = 0 \Rightarrow 4x - 2y + z + 1 = 0$ //.

Ec. general del plano tangente.

2.5. Vector Normal, Plano tangente

Definición 30 *El vector normal de la superficie S generada por la gráfica de la función diferenciable f, en el punto $P \in S$, está dado por*

$$N_P = (-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1).$$



donde $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y) = z\}$

Definición 31 *El vector normal de la superficie de nivel generada por la ecuación* $F(x, y, z) = 0$ *está dada por su vector gradiente F, esto es:*

$$N_P = \nabla F = (\frac{\partial F}{\partial x}(P), \frac{\partial F}{\partial y}(P), \frac{\partial F}{\partial z}(P)).$$

Definición 32 *La ecuación del plano tangente de la superficie generada por la gráfica de la función diferenciable f en el punto $P = (x_o, y_o, f(x_o, y_o))$, está dada por*

$$\frac{\partial f(x_o, y_o)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_o, y_o)}{\partial y}(y - y_0) - (z - f(x_o, y_o)) = 0.$$