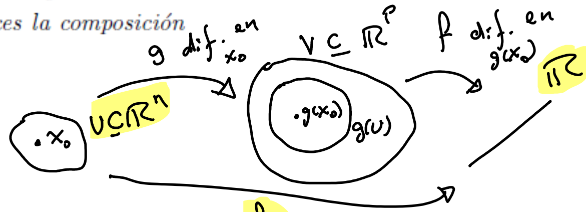
Regla de la cadena

viernes, 28 de mayo de 2021 07:15

Definición 37 Regla de la Cadena

Dadas las funciones $g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ y $f : V \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ tales que $g(U) \subseteq V$, con U y V abiertos. Si g y f son diferenciables en $\mathrm{x}_0 \in U$ y en $g(\mathrm{x}_0) = \mathrm{y}_0$ respectivamente; entonces la composición de f con g es diferenciable en (x_0) y sus derivadas parciales son:

- $$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial x_j}(\mathrm{x}_0) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f(\mathrm{y}_0)}{\partial y_i}\frac{\partial g_i(\mathrm{x}_0)}{\partial x_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$



$\Rightarrow f \circ g$ dif. en x_0 y $f(g(x_0)) = f(\underbrace{g_1(x_0), \ldots, g_p(x_0)}_{\text{funciones coord. de } g})$

Definición 38 Matriz Jacobiana de una función

Dada la función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, la matriz jacobiana asociada a $f(\mathrm{x})$ denotada por $Jf(\mathrm{x})$ está definida por:

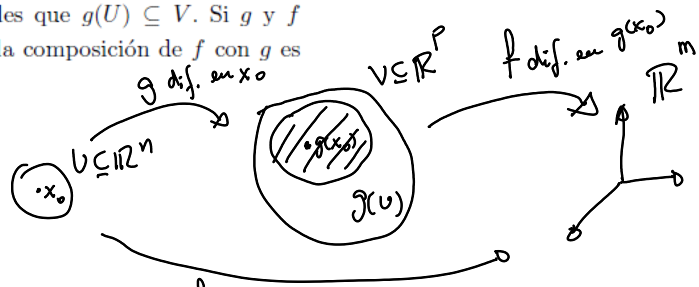
$$Jf(\mathrm{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathrm{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathrm{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathrm{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathrm{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathrm{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathrm{x}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathrm{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathrm{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathrm{x}) \end{pmatrix}_{m \times n}$$

$f = (f_1, \ldots, f_m)$

Regla de la cadena. Perspectiva general

Dadas las funciones $g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ y $f : V \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ tales que $g(U) \subseteq V$. Si g y f son diferenciables en $\mathrm{x}_0 \in U$ y en $g(\mathrm{x}_0)$ respectivamente; entonces la composición de f con g es diferenciable en (x_0) y su derivada viene dada por la matriz:

$$J(f \circ g)(\mathrm{x}_0) = J(f(g(\mathrm{x}_0)))Jg(\mathrm{x}_0)$$



$\Rightarrow f \circ g$ es dif. en x_0.

Ejercicio:

Sea $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ una función diferenciable, tal que:

f(0,1) = (1,3) y f(1,0) = (1/2,0).

Suponga que: $Jf(0,1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $Jf(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Obtenga el vector gradiente de la función F en (1,1) .

$$F(x,y) = f_2(\underbrace{f_2(2y - 2x, 3x - 2y)}_{h(x,y)} - 3y, \underbrace{2f_1(2y - x, x - y) - \ln(f_1(x - 1, x))}_{k(x,y)})$$

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longrightarrow (f_1(x,y), f_2(x,y))$

$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Tenemos que

$f(0,1) = (1,3) \Rightarrow f_1(0,1) = 1$, $f_2(0,1) = 3$

$f(1,0) = (1/2, 0) \Rightarrow f_1(1,0) = 1/2$, $f_2(1,0) = 0$

$$Jf(0,1)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l}\nabla f_1(0,1)=(-1 \;\; 0)\\ \nabla f_2(0,1)=(-1 \;\; 1)\end{array} \quad ; \quad Jf(1,0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l}\nabla f_1(1,0)=(0,1)\\ \nabla f_2(1,0)=(1 \;\; 2)\end{array}$$

Por la regla de la cadena en la perspectiva general:

$$\nabla F(x,y)=\nabla f_2(h,k)\cdot\begin{pmatrix}\nabla h(x,y)\\ \nabla k(x,y)\end{pmatrix}=\nabla f_2\Big(f_2(2y-2x,3x-2y)-3y,\ 2f_1(2y-x,x-y)-\ln\big(f_1(x-1,x)\big)\Big)\cdot$$

$$\begin{pmatrix}\nabla f_2(2y-2x,3x-2y)\cdot\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}-3(0 \;\; 1)\\ 2\nabla f_1(2y-x,x-y)\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}-\dfrac{1}{f_1(x-1,x)}\cdot\nabla f_1(x-1,x)\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla F(1,1)=\nabla f_2\Big(f_2(0,1)-3,\ \cancel{2f_1(1,0)}^{1/2}-\cancel{\ln(f_1(0,1))}^{1}\Big)\cdot\begin{pmatrix}\nabla f_2(0,1)\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}-3(0 \;\; 1)\\ 2\nabla f_1(1,0)\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}-\dfrac{1}{f_1(0,1)}\cdot\nabla f_1(0,1)\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

$$=\nabla f_2(0,1)\cdot\begin{pmatrix}(-1 \;\; 1)\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}-3(0 \;\; 1)\\ 2(0 \;\; 1)\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}-(-1 \;\; 0)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

$$=(-1 \;\; 1)\begin{pmatrix}(5 \;\; -4)-3(0 \;\; 1)\\ (2 \;\; -2)-(-1 \;\; 0)\end{pmatrix}=(-1 \;\; 1)\begin{pmatrix}5 & -7\\ 3 & -2\end{pmatrix}=(-2 \;\; 5)$$

$$\Rightarrow \nabla F(1,1)=(-2 \;\; 5) \;/\!/.$$

Ejercicio 2:

A-H Sea $z=g(\overset{t}{x^2+y^2})$, donde g es una función real de variable real, dos veces derivable. Demuestre que

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-x\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}-\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

Solución

- $\dfrac{\partial z}{\partial x}=g'(\overset{t}{x^2+y^2})\cdot 2x$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=g''(x^2+y^2)(2x)^2+2g'(x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=2x\,g''(x^2+y^2)\,2y$$

$$\Rightarrow y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-x\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}-\frac{\partial z}{\partial x}=y\Big(g''(x^2+y^2).4x^2+2g'(x^2+y^2)\Big)-x\Big(4xy\,g''(x^2+y^2)\Big)-2x\,g'(x^2+y^2)$$

$$=\cancel{4x^2y\,g''(x^2+y^2)}+2y\,g'(x^2+y^2)\cancel{-4x^2y\,g''(x^2+y^2)}-2x\,g'(x^2+y^2)\neq 0$$

$\therefore$ No es válida la igualdad.