Producto vectorial en R3

lunes, 19 de abril de 2021 06:54

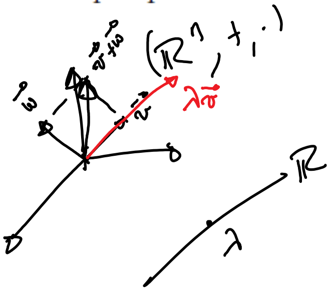
Dados los vectores $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$, *el producto* $\vec{x} \times \vec{y}$ *es un vector, que se define nemotécnicamente por:*

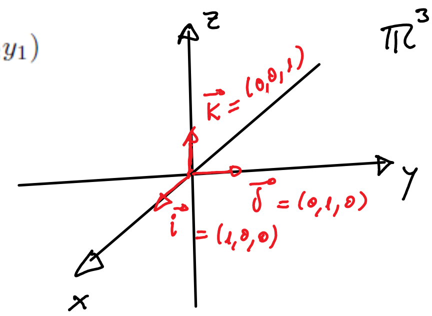
$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2, -x_1y_3 + x_3y_1, x_1y_2 - x_2y_1)$$

Propiedades Sean $\vec{x}$, $\vec{y}$ y $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces se cumple que:

1. $\vec{x} \times \vec{x} = \vec{0} = (0,0,0)$
2. $\vec{x} \times \vec{y} = -(\vec{y} \times \vec{x})$
3. $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = \underbrace{(\vec{x} \cdot \vec{z})}_{\in \mathbb{R}} \vec{y} - \underbrace{(\vec{x} \cdot \vec{y})}_{\in \mathbb{R}} \vec{z}$
4. $k(\vec{x} \times \vec{y}) = (k\vec{x}) \times \vec{y} = \vec{x} \times (k\vec{y})$
5. $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}$ ✓
6. $\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \operatorname{sen}\theta$, θ es el ángulo entre $\vec{x}$ y $\vec{y}$





$\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ base canónica de $\mathbb{R}^3$

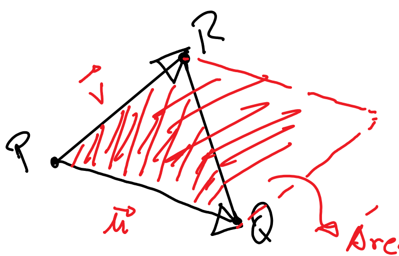
Producto mixto

Sean $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, se define y denota el producto mixto por

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Ejemplos:

1. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $P(2,0,-3)$, $Q(1,4,5)$ y $R(7,2,9)$.



$\vec{u} = \vec{PQ} = Q - P = (1,4,5) - (2,0,-3) = (-1,4,8)$

$\vec{v} = \vec{PR} = R - P = (7,2,9) - (2,0,-3) = (5,2,12)$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 4 & 8 \\ 5 & 2 & 12 \end{vmatrix} = \vec{i}(48-16) - \vec{j}(-12-40) + \vec{k}(-2-20)$$

$$= (32, 52, -22)$$

Área $= \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{(32)^2 + (52)^2 + (-22)^2} = 18\sqrt{13}$

$\Rightarrow$ Área del triángulo es $\frac{1}{2}\|\vec{u} \times \vec{v}\| = 9\sqrt{13}\, u^2$ ∦.

2. (Guia DAM 17 pág 15)

Sean $\vec{u} = (2, -1, 2)$ y $\vec{w} = (3, 4, -1)$. Hallar un vector $\vec{v}$ tal que $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$.
Rpta: $\vec{v} = (1, -1, -1)$.

Solución

$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = ??$

$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$ $\wedge$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = (3,4,-1)$$

$(2,-1,2) \cdot (v_1, v_2, v_3) = 1$

$\boxed{2v_1 - v_2 + 2v_3 = 1}$

$m \wedge v =$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (3, 4, -1)$$

$$\vec{i}(-v_3 - 2v_2) - \vec{j}(2v_3 - 2v_1) + \vec{k}(2v_2 + v_1) = (3, 4, -1)$$

$$(-v_3 - 2v_2,\ -2v_3 + 2v_1,\ 2v_2 + v_1) = (3, 4, -1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -v_3 - 2v_2 = 3 \checkmark \\ -2v_3 + 2v_1 = 4 \\ 2v_2 + v_1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} -v_3 + v_1 = 2 \\ 2v_2 + v_1 = -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} v_3 = v_1 - 2 \\ v_2 = \dfrac{-1 - v_1}{2} \end{array}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = 0$

$(2, -1, 2) \cdot (v_1, v_2, v_3) = 1$

$$\boxed{2v_1 - v_2 + 2v_3 = 1}$$

Rta $\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_2 = -1 \\ v_3 = -1 \end{cases}$