Capítulo

5 Integrales múltiples

Objetivo: Estudiar y aplicar las integrales dobles y triples de funciones del tipo $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ donde $n = 2$ ó 3 respectivamente; sobre algunos subconjuntos $\mathcal{R} \subset U$, así como algunas de las aplicaciones de estas integrales en problemas de geometría (cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos en el plano y en el espacio) y de mecánica (cálculo de centros de masa de cuerpos en el plano y en el espacio).

5.1. Integral doble

De manera similar a la definición de la integral definida de una función de una sola variable tenemos

Definición 45 *Sea f una función de dos variables definida sobre una región cerrada R. Entonces la integral doble de f en R está dada por*

$$\iint\limits_R f\,(x,y)\,dA = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1} f(x_i^*, y_i^*)\Delta A_i$$

Propiedades:

1. $\iint\limits_R cf\,(x,y)\,dA = c\iint\limits_R f\,(x,y)\,dA$
2. $\iint\limits_R [f\,(x,y) \pm g\,(x,y)]\,dA = \iint\limits_R f\,(x,y)\,dA \pm \iint\limits_R g\,(x,y)\,dA$
3. $\iint\limits_R f\,(x,y)\,dA = \iint\limits_{R_1} f\,(x,y)\,dA + \iint\limits_{R_2} f\,(x,y)\,dA$
   Donde R_1 y R_2 son dos regiones que no se traslapan, esta última propiedad nos permite evaluar las integrales dobles sobre una región $R = R_1 \cup R_2$.

5.1.1. Integrabilidad

- Se dice que f es integrable en R, si existe el límite de la definición 45.
- Si f es continua en R, entonces f es integrable en R.
- La función $z = f(x,y)$ proyecta sobre el plano XY una "sombra", que es una región plana denominada región o recinto de integración denotada generalmente por R o D.

- Si la región de integración es rectangular, esto es $R = [a, b] \times [c, d]$ y la función f es continua en R entonces la integral doble de $f(x, y)$ sobre R se puede calcular como

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,dy\Big)dx = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\,dx\Big)dy$$

La deformación del rectángulo da origen a regiones más generales como vemos a continuación.

5.1.2. Tipos de regiones generales:

1) Si R es una región definida por:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \quad a \le x \le b, \quad g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

donde las funciones g_1 y g_2 son continuas, se denomina región tipo I o región verticalmente simple; ver figura (5.1).

2) Si R es una región definida por:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \quad c \le y \le d, \quad h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

donde las funciones h_1 y h_2 son continuas, se denomina región tipo II o región horizontalmente simple; ver figura (5.1).

3) Si alguna región R no es del tipo I o del tipo II, mediante un número finito de cortes verticales u horizontales se puede descomponer en regiones del tipo I ó II.

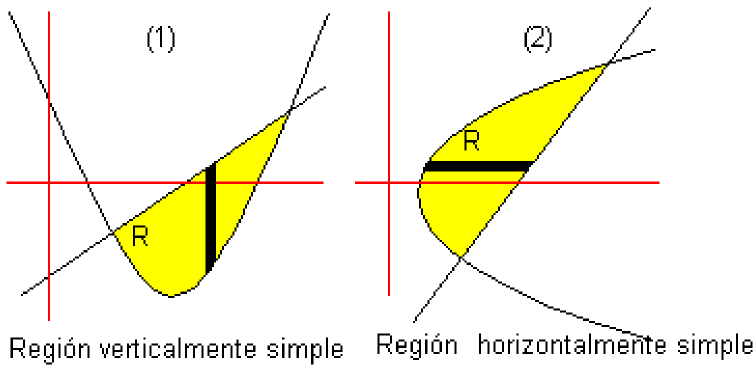


Figura 5.1: Tipos de regiones

Teorema 5.1.1 ***Evaluación de integrales dobles***
Sea $f(x, y)$ una función continua en una región R.

(i) Si R es del tipo I, entonces

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dydx$$

(ii) Si R es del tipo II , entonces

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dxdy$$

5.1.3. Ejercicios resueltos

1. Calcular $\int\int (x^2 + xy)\, dx\, dy$ extendida al recinto limitado por las rectas $x = 0$, $y = 1$, $x = 3$, $y = 4$, utilizando franjas horizontales.

   Solución

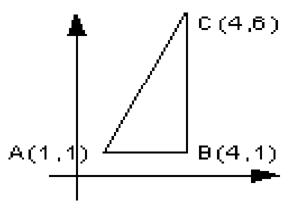
$$\int_1^4 \int_0^3 (x^2 + xy)\, dx\, dy = \int_1^4 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} y \,\Big|_0^3\right) dy$$

$$= \int_1^4 (9 + \frac{9}{2} y)\, dy = 9y + \left.\frac{9y^2}{4}\right|_1^4 = \frac{243}{4}.$$

2. Calcular la integral $\int\int_R (2x + y)\, dx\, dy$ donde R es la región limitada por el triángulo de vértices A=(1,1), B=(4,1), C=(4,6)

   Solución

   La región R está acotada por $1 \le x \le 4$,
   $1 \le y \le \frac{1}{3}(5x - 2)$
   Cálculo de la integral



$$\int\int_R (2x + y)\, dx\, dy$$

$$= \int_1^4 \int_1^{(5x-2)/3} (2x + y)\, dy\, dx$$

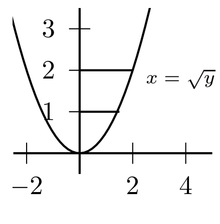
$$= \int_1^4 \left[2xy + \frac{y^2}{2}\right]_1^{(5x-2)/3} dx$$

$$= \int_1^4 \left(\frac{10x^2 - 4x}{3} + \frac{25x^2 - 20x + 4}{18} - 2x - \frac{1}{2}\right) dx = \frac{1}{18} \int_1^4 85x^2 - 80x - 5\, dx$$

$$= \frac{5}{18} \int_1^4 17x^2 - 16x - 1\, dx = \frac{5}{18} \left[\frac{17}{3}x^3 - 8x^2 - x\right]_1^4 = 65$$

3. Calcule la integral doble de la función $f(x, y) = xe^{\frac{-x^2}{y}}$ sobre la región R determinada por $R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le y \le 2, 0 \le x \le \sqrt{y}\right\}$

   Solución:



   Dibujamos la región de integración en el plano $\mathbb{R}^2$
   La región de integración es de tipo II, entonces
   la integral será por franjas horizontales ahí se tiene:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_1^2 \int_0^{\sqrt{y}} xe^{\frac{-x^2}{y}} dx dy$$

$$= \int_1^2 \frac{-y}{2} e^{x^2/y} \Big|_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dy$$

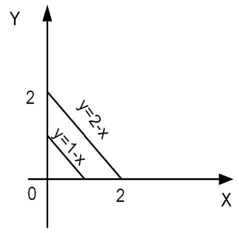
$$= \int_1^2 \frac{y}{2}(1 - e^{-1}) dy = \frac{3}{4}(1 - e^{-1}).$$

4. Calcule la integral doble de la función $f(x, y) = [x + y]$, donde $[x + y]$ es la función máximo entero, sobre la región R determinada por: $R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2 - x\right\}$

   Solución:

   Aquí la región de integración es el triángulo de la figura, pero, el valor de la función es 1 o cero, de acuerdo

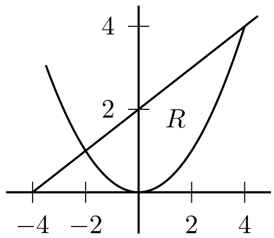
donde esten ubicados los puntos (x, y) de modo que el cálculo de la integral se realiza como sigue:



$$\begin{aligned}\iint_R f(x,y)dA &= \int_0^2\int_0^{2-x}[x+y]dydx\\ &= \int_0^1\int_0^{1-x}0dydx+\int_0^1\int_{1-x}^{2-x}1dydx+\int_1^2\int_0^{2-x}1dydx\\ &= 0+1+\int_1^2(2-x)dx=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

5. Calcular $\iint_R 2x\,dx\,dy$ donde R es la región limitada por las gráficas de $4y = x^2$, $x-2y+4=0$.

Solución:



Cálculo de los puntos de intersección:
Para ello resolvemos el sistema

$$\begin{cases}4y=x^2\\ x-2y+4=0\end{cases} \Rightarrow x^2-2x-8=0 \Rightarrow \quad x=4, \quad x=-2$$

Cálculo de la integral

$$\begin{aligned}\iint_R 2xdA &= \int\limits_{-2}^{4}\int\limits_{\frac{x^2}{4}}^{\frac{x}{2}+2}2xdydx=\int\limits_{-2}^{4}2x\,[y]_{x^2/4}^{x/2+2}\,dx\\ &= \int\limits_{-2}^{4}(x^2+4x-\tfrac{x^3}{2})dx=\tfrac{x^3}{3}+2x^2-\tfrac{x^4}{8}\,|_{-2}^{4}=18.\end{aligned}$$

6. Evaluar $\iint_R (x+y)\,dA$ en la región limitada por las gráficas de $x=y^2$ y $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$.

Solución

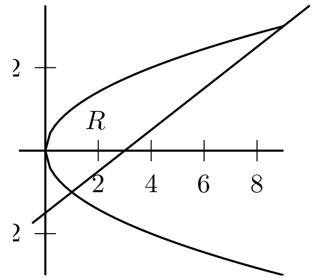
La región que se ve en la figura, se puede expresar como la unión $R = R_1 \cup R_2$ de dos regiones tipo I.

Para calcular los puntos de intersección resolvemos el sistema:

$$\begin{cases}x=y^2\\ y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\end{cases} \Rightarrow y^2-2y-3=0 \quad \Rightarrow y=-1, \quad y=3$$

Los puntos de intersección son $(1,-1)$ y $(9,3)$

Luego, $\displaystyle\int\int_R (x+y)dA \;=\; \int\int_{R_1}(x+y)dA+\int\int_{R_2}(x+y)dA$



$$= \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} (x+y)dydx + \int_1^9 \int_{x/2-3/2}^{\sqrt{x}} (x+y)dydx$$

$$= \int_0^1 \left[xy + \tfrac{y^2}{2}\right]_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dx + \int_1^9 \left[xy + \tfrac{y^2}{2}\right]_{x/2-3/2}^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 2x^{3/2}dx + \int_1^9 \left(x^{3/2} + \tfrac{11}{4}x - \tfrac{5}{8}x^2 - \tfrac{9}{8}\right) dx$$

$$= \tfrac{4}{5}x^{5/2}\,]_0^1 + \left[\tfrac{2}{5}x^{5/2} + \tfrac{11}{8}x^2 - \tfrac{5}{24}x^3 - \tfrac{9}{8}x\right]_1^9$$

$$= \frac{4}{5} + \frac{692}{15} = \frac{704}{15} \cong 46{,}93.$$

Solución alternativa. Interpretando la región como una sola región del tipo II, de la figura vemos que

$$\begin{aligned}
\iint_R (x+y)dA &= \int_{-1}^{3} \int_{y^2}^{2y+3} (x+y)dxdy \\
&= \int_{-1}^{3} \left[\tfrac{x^2}{2} + xy\right]_{y^2}^{2y+3} dy \\
&= \int_{-1}^{3} \left[-\tfrac{y^4}{2} - y^3 + 4y^2 + 9y + \tfrac{9}{2}\right] dy \\
&= \left[-\tfrac{y^5}{10} - \tfrac{y^4}{4} + \tfrac{4}{3}y^3 + \tfrac{9}{2}y^2 + \tfrac{9}{2}y\right]_{-1}^{3} = 46{,}93
\end{aligned}$$

7. Calcular $\iint (x+y)\,dx\,dy$ en el recinto limitado por $xy = a^2$ y $2(x+y) = 5a$.

Solución

Cálculo de los puntos de intersección

$$\begin{cases} xy = a^2 \\ 2(x+y) = 5a \end{cases} \Rightarrow x + y = \tfrac{5}{2}a \Rightarrow y = \tfrac{5}{2}a - x$$

reemplazando en la primera ecuación

$x(\frac{5}{2}a - x) = a^2, \qquad x^2 - \frac{5}{2}ax + a^2 = 0$

$(2x-a)(x-2a) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{a}{2}\ ,\ x_2 = 2a.$

Cálculo de la integral: Operando por franjas verticales (Tipo I)

$$\int_{a/2}^{2a} \int_{a^2/x}^{\frac{5}{2}a-x} (x+y)dy\,dx = \int_{a/2}^{2a} xy + \frac{y^2}{2}\Big|_{a^2/x}^{\frac{5}{2}a-x} dx = \int_{a/2}^{2a} (\tfrac{17}{8}a^2 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{a^4}{2x^2})\,dx$$

$$= \frac{17a^2x}{8} - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}\frac{a^4}{x}\Big|_{a/2}^{2a} = \frac{9}{8}a^3$$

Inversión del orden de integración

Un problema puede ser más fácil cuando se invierte el orden de integración, como se ve en el último ejercicio y en los que siguen.

8. Invertir el orden de integración en $\int\limits_1^3 \int\limits_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)\,dx\,dy$

Solución:
Al dibujar el recinto de integración R que está acotado por $y = 1$, $y = 3$, $x = 2$, $y = x^2$. Tendremos ahora que invertir, es decir calcular la integral por franjas verticales. Ahora bien, según que la franja esté a la derecha o a la izquierda de la recta $x = \sqrt{3}$ el límite superior va a ser 3 ó x^2 respectivamente por esta causa es que fraccionamos el recinto de integración en R_1 y R_2.

$$\begin{aligned}\iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy &= \iint\limits_{R_1} f(x,y)\,dy\,dx + \iint\limits_{R_2} f(x,y)\,dy\,dx \\ &= \int\limits_1^{\sqrt{3}} \int\limits_1^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx + \int\limits_{\sqrt{3}}^2 \int\limits_1^3 f(x,y)\,dy\,dx.\end{aligned}$$

9. Invertir el orden de integración en I$= \int\limits_{-1}^{0} \int\limits_{0}^{\sqrt{9-(x-2)^2}} f(x,y)\,dy\,dx + \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{0}^{\sqrt{9-(x+2)^2}} f(x,y)\,dy\,dx$

Solución:
De la gráfica se aprecia que son dos regiones que no se traslapan , luego la integral tiene la forma I$=\iint\limits_{R_1} f(x,y)\,dy\,dx + \iint\limits_{R_2} f(x,y)\,dy\,dx$

Cálculo de R_1 y R_2

Para R_1 $\begin{cases} las\ rectas\ \ x = -1,\ \ x = 0,\ \ y = 0 \\ la\ circunferencia\ \ y^2 = 9 - (x-2)^2 \Rightarrow\ (x-2)^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

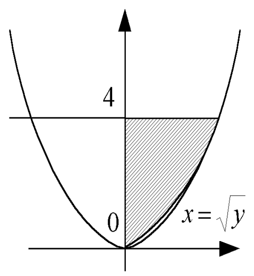
Para R_2 $\begin{cases} las\ rectas\ \ x = 1,\ \ x = 0,\ \ y = 0 \\ la\ circunferencia\ \ y^2 = 9 - (x+2)^2 \Rightarrow\ (x+2)^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

Integrando ahora por franjas horizontales (Tipo II) tenemos:

$$I = \int_0^{\sqrt{5}} \int_{2-\sqrt{9-y^2}}^{-2+\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\,dx\ dy$$

10. Evaluar $\iint_R xe^{y^2} dA$ en la región R del primer cuadrante limitada por las gráficas de $y = x^2$, $x = 0$, y $y = 4$.

Solución:



Cuando se considera como una región tipo I,
la integral parcial $\int\limits_{x^2}^{4} xe^{y^2} dy$
no se puede evaluar, ya que e^{y^2} no tiene antiderivada elemental con respecto a y.
Sin embargo, si consideramos la región como de tipo II definida por $0 \le y \le 4$, $0 \le x \le \sqrt{y}$.

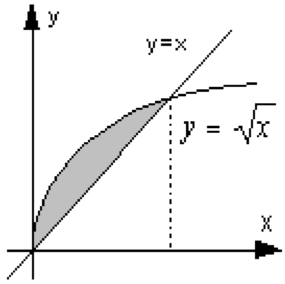
Tenemos,

$$\iint_R xe^{y^2} dA = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} xe^{y^2} dxdy = \int\limits_0^4 \tfrac{x^2}{2} e^{y^2}\ ]_0^{\sqrt{y}}\ dy = \int\limits_0^4 \tfrac{1}{2} y e^{y^2}\ dy = \tfrac{1}{4} e^{y^2}\ |_0^4 = \tfrac{1}{4}(e^{16} - 1).$$

11. Calcular la integral $\int\limits_0^1 \int\limits_{y^2}^{y} \dfrac{ye^x}{x} dxdy.$

Solución:
Trate de integrar $\displaystyle\int \frac{e^x}{x}dx$. Resulta que la función $\dfrac{e^x}{x}$ no posee primitiva en términos de funciones elementales. Es por este motivo que cambiamos el orden de integración a una tipo I.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} \frac{ye^x}{x} dydx &= \int_0^1 \left. \frac{e^x y^2}{2x} \right|_x^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(\frac{e^x}{2} - \frac{xe^x}{2} \right) dx \\
&= \tfrac{1}{2} \left[\int_0^1 e^x dx - \int_0^1 xe^x dx \right] \\
&= \tfrac{1}{2}\, e^x\big|_0^1 - \tfrac{1}{2}\, [xe^x - e^x]_0^1 = \frac{e-2}{2}.
\end{aligned}$$

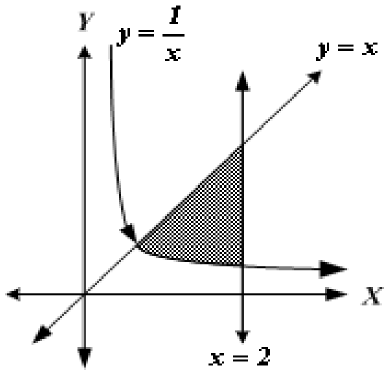


La segunda integral se resuelve por partes.

12. Calcular la integral doble $\displaystyle\int\int \frac{x^2}{y^2} dx\, dy$ donde R es un dominio acotado por las rectas $x = 2,\ \ y = x$ y la hipérbola $xy = 1$.

Solución:
Graficando R obtenemos los límites de integración.

$$\begin{aligned}
\iint\limits_R \frac{x^2}{y^2} dx\, dy &= \int_1^2 \int_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy\, dx \\
&= \int_1^2 \left. -\frac{x^2}{y} \right|_{1/x}^{x} dx \\
&= \int_1^2 (x^3 - x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{9}{4}
\end{aligned}$$



5.2. Cambio de variables en integrales dobles

En el curso de Cálculo en una variable vimos que para evaluar ciertas integrales, el método de sustitución dado por

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_c^d f(u)du$$

donde el cambio $u = g(x)$, con g biyectiva que transforma el intervalo $[a, b]$ en el intervalo $[c, d]$, simplifica la integral permitiendo su solución; análogamente haremos una extensión para el caso de dos y tres variables.

Definición 46 ***Jacobiano de una transformación.***
Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación de clase C^1 definida por $T(u, v) = (x, y)$, es decir $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. El jacobiano de T está dado por el determinante

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Observe que el jacobiano es el determinante de la matriz jacobiana de T.

5.2.1. Ejercicios resueltos

1. Sea R la región del plano XY limitado por las rectas $y-x=1,\ y-x=-1,\ y+x=1,\ y+x=2$. Calcular $J(u,v)$.
   Solución:
   Sean $u=y-x,\ v=y+x$ despejamos x,y en función de u y v. Así $y=(u+v)/2$ y $x=(v-u)/2$.
   $$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\mathrm{u,v})}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{vmatrix}=-1/2.$$
   Observación: Para el cálculo del jacobiano, cuando no sea fácil calcular $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ explicitamente, primero calculamos $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ y luego utilizamos la siguiente fórmula
   $$J(u,v)=\frac{1}{J(x,y)}.$$

2. Sea $T(u,v)=(x,y)$, definida por $u=x-y$ y $v=x+y$
   $$J(x,y)=\frac{\partial(u,v)}{\partial(\mathrm{x,y})}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2.$$
   Utilizando la última observación, tenemos que
   $$J(u,v)=\frac{1}{J(x,y)}=\frac{1}{2}$$

3. Calcular el jacobiano $J(u,v)=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ de la transformación $T(u,v)=(x,y)$ definida por $u=xy$ y $v=\dfrac{y}{x}$
   Solución:
   $J(x,y)=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y & x\\ -y/x^2 & 1/x\end{vmatrix}=2\dfrac{y}{x}$
   Luego $J(u,v)=\dfrac{1}{J(x,y)}=\dfrac{1}{2\frac{y}{x}}=\dfrac{x}{2y}=\dfrac{1}{2v}$.

4. Calcular el jacobiano $J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ de la transformación $T(u,v)=(x,y)$ definida por $u=x+2y^2$ y $v=x-2y^2$.
   Solución:
   Puesto que se necesita despejamos y. Con ese fin, resolvemos el sistema
   $$\left.\begin{array}{l}u=x+2y^2\\ v=x-2y^2\end{array}\right\}\quad y^2=\frac{u-v}{4}\ \Rightarrow\ y=\frac{\sqrt{u-v}}{2}$$
   $$J(x,y)=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 4y\\ 1 & -4y\end{vmatrix}=-8y$$
   $$J(u,v)=\frac{1}{J(x,y)}=\frac{1}{-8y}=-\frac{1}{8\frac{\sqrt{u-v}}{2}}=-\frac{1}{4\sqrt{u-v}}.$$

5. Calcularemos el jacobiano de una transformación muy útil y conocida.
   Sea $T(r,\theta)=(x,y)$, definida por $x=rcos(\theta)$ y $y=rsen(\theta)$.
   $$J(r,\theta)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\det\begin{bmatrix}\cos\theta & -rsen\theta\\ sen\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}$$

$$J(r,\theta) = r(\cos^2\theta + sen^2\theta) = r.$$

Sea T una transformación uno a uno que asocia a la región acotada S del plano UV la región acotada R del plano XY, donde la función F y las derivadas parciales de primer orden de las funciones componentes de T son funciones contínuas. Además, las fronteras de R y S están formadas por un número finito de curvas suaves por partes.

Teorema 5.2.1 *Si la transformación T de funciones componentes $x = f(u,v), y = g(u,v)$ satisface las condiciones enunciadas en el párrafo superior, entonces*

$$\iint_R F(x,y)\,dydx = \int\int_S F(f(u,v), g(u,v)) \mid J(u,v) \mid dvdu$$

Note que el jacobiano aparece en valor absoluto.
Observaciones:

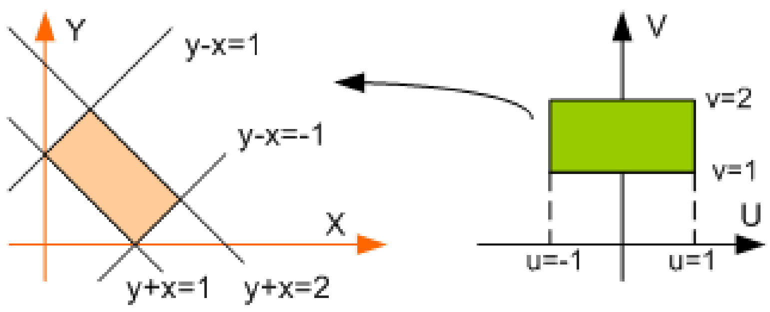
- El cambio de variables conviene utilizar cuando la región de integración no es del tipo I ni del tipo II.
- El cambio de variables conviene utilizar cuando la función del integrando contiene expresiones complicadas que con el cambio se transforman en simples.

Ejercicios Resueltos

1. Sea R la región del plano XY limitada por las rectas $y - x = 1$, $y - x = -1$, $y + x = 1$, $y + x = 2$. Calcular $\iint_R (x+y+1)dA$.
   Solución:
   Primero: Elegimos la sustitución $u = y - x$ y $v = x + y$
   Segundo: Calculamos el jacobiano.

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -2$$

   Luego $J(u,v) = \frac{1}{J(x,y)} = -\frac{1}{2}$
   Tercero: De la gráfica apreciamos como cambia la región de integración



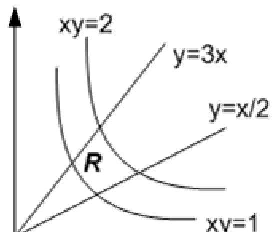
   Cuarto: Calculamos la integral

$$\begin{aligned} \int_R\int (x+y+1)dA &= \int_1^2\int_{-1}^1 (v+1)\left|-\tfrac{1}{2}\right| dudv = \tfrac{1}{2}\int_1^2 2v+2\,dv \\ &= \frac{v^2}{2} + v\Big|_1^2 = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

2. Calcular $\displaystyle\int\int_R x^2y^2\,dxdy$, sobre la región R limitada por las hipérbolas $xy=1$, $xy=2$ y las rectas $y=\frac{x}{2}$, $y=3x$. Situadas en el primer cuadrante.

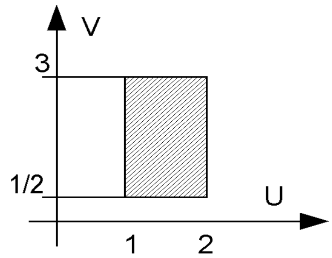
Solución:

Elegimos la sustitución: $u=xy$, $v=\dfrac{y}{x}$.



Calculamos el jacobiano: $J(x,y)=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$

$$= \det\begin{bmatrix} y & x \\ -y/x^2 & 1/x \end{bmatrix} = \frac{2y}{x}$$



$$\text{Luego } J(u,v) = \frac{1}{J(x,y)} = \left.\frac{x}{2y}\right|_{u,v}$$

$$J(u,v) = \frac{1}{2v}.$$

Calculamos la integral

$$\int\int_R x^2y^2\,dxdy = \int_{1/2}^{3}\int_1^2 u^2\left(\frac{1}{2v}\right)dudv = \int_{1/2}^{3}\frac{1}{2v}\cdot\frac{u^3}{3}\,|_1^2\,dv = \int_{1/2}^{3}\frac{7}{6v}dv = \tfrac{7}{6}ln(6)\cdot$$

3. Calcular $\int\int_R x^{-3}dxdy$ definida sobre la región R acotada por las parábolas $y=x^2$, $y=2x^2$, $x=y^2$, $y^2=2x$.

Solución:

Elegimos la sustitución: $u=\dfrac{y}{x^2}$, $v=\dfrac{x}{y^2}$. Calculamos el jacobiano:

$$J(x,y)=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \det\begin{bmatrix} -\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{y^2} & \frac{-2x}{y^3} \end{bmatrix} = \frac{3}{x^2y^2}$$

luego $J(x,y)=3v^2u^2$

$J(u,v)=\dfrac{1}{J(x,y)}=\dfrac{1}{3v^2u^2}$ Calculamos la integral

$$\int_R\int x^{-3}dxdy = \int_{1/2}^{1}\int_1^2 u^2v\left|\frac{1}{3v^2u^2}\right|dudv = \frac{1}{3}ln(2).$$

4. Determine la integral $\displaystyle\int\int_R (x^2+y^2)dxdy$, sobre la región R acotada por las hipérbolas

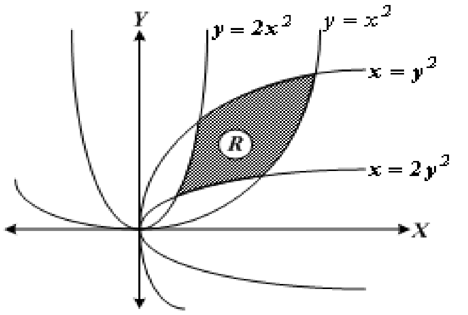
$$xy=1,\quad xy=3 \quad y \quad x^2-y^2=1,\quad x^2-y^2=4$$

Solución:

Puesto que la región R no es el tipo I ni del tipo II, aplicaremos un cambio de variables para simplificar la región R.

Elegimos la transformación $u=xy$ y $v=x^2-y^2$ la cual aplicada al integrando es $4u^2+v^2=4x^2y^2+(x^2-y^2)^2=(x^2+y^2)^2$, de modo que $x^2+y^2=\sqrt{4u^2+v^2}$. Ahora,

$$J(x,y)=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = -2(x^2+y^2)$$



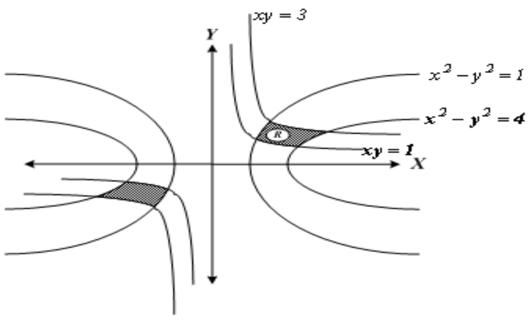


Figura 5.2: Problema: 4 Problema: 5

lo que implica que

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{1}{2(x^2+y^2)} = -\frac{1}{2\sqrt{4u^2+v^2}}$$

Cálculo de la integral

$$\begin{aligned} \int_R\int (x^2+y^2)dxdy &= \int_1^4\int_1^3 \sqrt{4u^2+v^2}\,\frac{1}{2\sqrt{4u^2+v^2}}dudv \\ &= \int_1^4\int_1^3 \frac{1}{2}dudv = 3. \end{aligned}$$

5.3. Aplicaciones de la integral doble

Definición 47 ***Masa:*** *Sea R la región que ocupa en el plano XY una lámina plana, o placa delgada, cuya densidad en cualquier punto (x,y) está dada por $\rho(x,y)$. Entonces la masa m de la lámina está dada por*

$$m = \iint_R \rho\,(x,y)\,dA.$$

Las coordenadas del centroide, o centro de masa (centro de gravedad) se definen como:

$$x_G = \frac{1}{m}\iint_R x\rho\,(x,y)\,dA \qquad y_G = \frac{1}{m}\iint_R y\rho\,(x,y)\,dA.$$

El centroide $(\overline{x},\overline{y}) = (x_G, y_G)$ es el punto de la lámina donde esta se balancearía horizontalmente si se coloca sobre una punta.

Definición 48 ***Volumen del sólido bajo la gráfica de la función*** $z = f(x,y)$
Sea f continua y no negativa en la región plana acotada R. Entonces el volumen V del sólido que está debajo de la superficie z=f(x,y) y sobre la región R se define como:

$$V = \int_R\int f(x,y)dA$$

si esta integral existe.

En la definición de volumen si hacemos que $f(x,y) = 1$, entonces se obtiene el área de la región R , esto es

$$A = \int_R\int dA.$$

Definición 49 ***Volumen del sólido entre dos superficies***
Sea la región sólida T que está sobre la región plana R , limitada por las gráficas de las funciones $z = f_1(x, y)$ por arriba y $z = f_2(x, y)$ por abajo donde: $f_2(x, y) \leq f_1(x, y)$ tal que $(x, y) \in R$. Entonces el volumen V de T está dado por

$$V = \int\limits_R\int (f_1(x, y) - f_2(x, y))dA.$$

Esta fórmula es válida aún cuando $f_2(x, y)$ o ambas $f_1(x, y)$ y $f_2(x, y)$, sean negativas en parte o en toda la región R.

Observaciones:

- Haga uso de la propiedad de simetría de la región R cuando calcule áreas.
- Aproveche las simetrías tanto de la región R como de la función f cuando determine volúmenes.

5.3.1. Ejercicios resueltos

1. Aplique una integral doble para determinar el área de la región limitada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = 8 - x^2$.
   Solución
   Los puntos de intersección los calculamos resolviendo el sistema no lineal :

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 8 - x^2 \end{cases} \Rightarrow \quad 2x^2 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2.$$

   Observando la figura 5.3 vemos que el área comprendida entre las gráficas está dada por:

$$\begin{aligned} A &= \int\limits_R\int dA = \int\limits_{-2}^{2}\int\limits_{x^2}^{8-x^2} dydx \\ &= \int\limits_{-2}^{2}\left(\int\limits_{x^2}^{8-x^2} dy\right)dx = \int\limits_{-2}^{2}[(8 - x^2) - x^2]dx \\ &= \int\limits_{-2}^{2}(8 - 2x^2)dx = 8x - \frac{2}{3}x^3\Big|_{-2}^{2} = \frac{64}{3}u^2 \end{aligned}$$

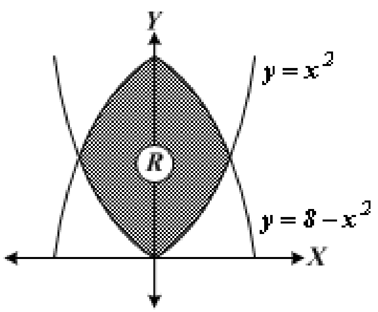
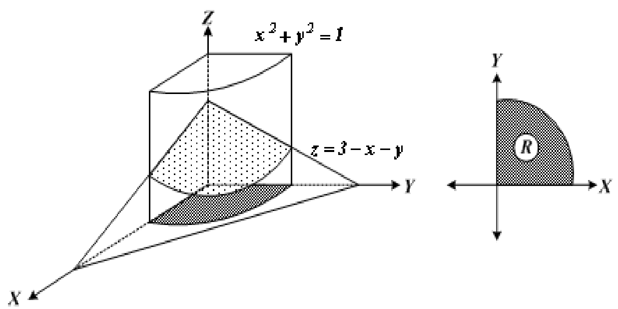


Figura 5.3: Problema 1



Problema 2

2. Aplicar una integral doble para determinar el volumen V del sólido del primer octante limitado por los planos coordenados y las gráficas de $x^2 + y^2 = 1$ y $z = 3 - x - y$.

Solución

De la figura (5.3), se ve que el volumen está dado por $\int\limits_R\int (3-x-y)dA$. Vemos que R es del tipo I, Luego

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (3-x-y)dydx \\ &= \int_0^1 \left[3y - xy - \frac{y^2}{2}\right] \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^1 \left[3\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-x^2} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x^2\right]dx \\ &= \left[3sen^{-1}x - \frac{\sqrt{1-x^2}(2x^2-9x-2)}{6} - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{6}x^3\right]_0^1 \\ &= \frac{3\pi}{4} - \frac{2}{3} = 1{,}6895u^3. \end{aligned}$$

3. Calcular el volumen del sólido acotado superiormente por el paraboloide $z = 4 - x^2 - 2y^2$ e inferiormente por el plano XY.

Solución:

Cálculo de la región de integración: Resolvemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} z = 4 - x^2 - 2y^2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \; x^2 + 2y^2 = 4.$$

Como $x^2+2y^2 = 4$ es la ecuación de una elipse, por la simetría vamos a utilizar $y = \sqrt{2 - \frac{x^2}{2}}$

Cálculo de la integral: Considerando la región de integración como tipo I

$$\begin{aligned} V &= 4\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2-x^2/2}} 4 - x^2 - 2y^2 dydx = 4\int_0^2 4y - x^2y - 2\tfrac{y^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{2-\frac{x^2}{2}}} dx \\ &= \tfrac{8}{3\sqrt{2}} \int_0^2 (4-x^2)^{3/2}dx \end{aligned}$$

Utilizamos sustitución trigonométrica $\quad sen(\theta) = \frac{x}{2}$

$$\begin{aligned} V &= \tfrac{128}{3\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \cos^4\theta d\theta = \tfrac{128}{3\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)^2 d\theta \\ &= \tfrac{32}{3\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} 1 + 2\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta)d\theta = 4\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

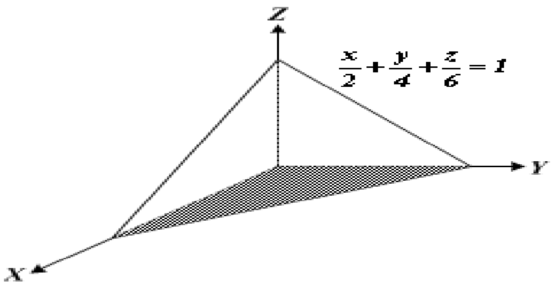
4. Hallar el volumen del sólido limitado por los planos coordenados y el plano $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{6} = 1$.

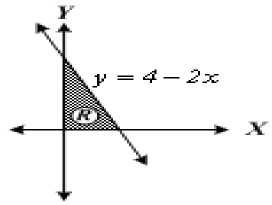
Solución:

La función F se consigue despejando z de la ecuación del plano $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{6} = 1$ esto es, $z = 6 - 3x - \frac{3}{2}y$

Cálculo de la región R :

Resolvemos el sistema: $\begin{cases} z = 6 - 3x - \frac{3}{2}y \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$ es una recta $\quad y = 4 - 2x$





Cálculo de la integral:

$V = \int\limits_0^2 \int\limits_0^{4-2x} (6 - 3x - \frac{3}{2}y)\, dydx = \int\limits_0^2 (6y - 3xy - \frac{3}{4}y^2 \mid_0^{4-2x})dx = 8u^3.$

5. Determinar el área de la región R acotada por las curvas $xy = 1$, $xy = 3$ y $xy^{1,4} = 1$, $xy^{1,4} = 2$.

Solución:

Definimos nuestra transformación de cambio de variable como $u = xy$ y $v = xy^{1,4}$. Entonces $1 \leq u \leq 3,\ \ 1 \leq v \leq 2$.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ y^{1,4} & (1{,}4)xy^{0,4} \end{vmatrix} = (0{,}4)xy^{1,4} = (0{,}4)v$$

Así

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\partial(u,v)/\partial(x,y)} = \frac{2{,}5}{v}$$

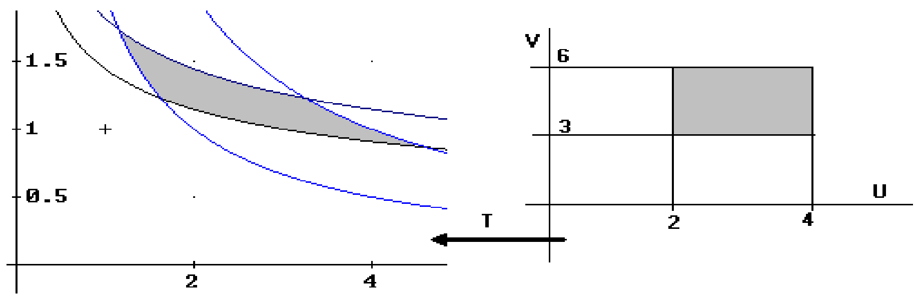
Aplicando el teorema del cambio de variables tenemos que el área está dada por

$$A = \int\limits_R\int 1dxdy = \int\limits_1^2\int\limits_1^3 \frac{2{,}5}{v}dudv = 5\ln(2).$$

6. Sustituya $u = xy$, $v = xy^3$ para determinar el área en el primer cuadrante de la región acotada por las curvas $xy = 2$, $xy = 4$, $xy^3 = 3$, $xy^3 = 6$.

Solución:

Cálculo del jacobiano



$$J(x,y) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ y^3 & 3xy^2 \end{vmatrix} = 2xy^3$$

$$J(u,v) = \frac{1}{J(x,y)} = \frac{1}{2xy^3} = \frac{1}{2v}$$

con $2 \leq u \leq 4, \quad 3 \leq v \leq 6$

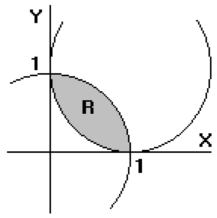
Cálculo del área

$$A = \int\limits_R\int dA = \int\limits_2^4\int\limits_3^6 \frac{1}{2v}\,dv\,du = \frac{1}{2}\int\limits_2^4 [\ln(v)]_3^6\,du = \frac{\ln(2)}{2}\int\limits_2^4 du = \ln(2).$$

7. Hallar el volumen del sólido comprendido entre las superficies $z = xy$, $x^2 + y^2 = 1$, $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, $z = 0$

Solución

De la gráfica observamos el recinto R de integración



$$v = \int\int z\,dx\,dy = \int\int xy\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{x}{2}\left[y^2\right]_{1-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_0^1 x\sqrt{1-(x-1)^2} - x^2\,dx$$

por sustitución trigonométrica $x - 1 = sen\theta$, $dx = cos\theta\,d\theta$

$$= \int_{3\pi/2}^{2\pi} \left(sen\theta\,\cos^2\theta + \cos^2\theta - sen^2\theta\cos\theta - \cos\theta - 2sen\theta\cos\theta\right) d\theta$$

$$= -\frac{\cos^3\theta}{3} + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}sen\theta\cos\theta - \frac{sen^3\theta}{3} - sen\theta - sen^2\theta \,\Big|_{3\pi/2}^{2\pi} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$$

8. Calcular el centro de gravedad de un cuadrado cuya densidad es proporcional al cuadrado de la distancia que separa a un punto del origen de coordenadas

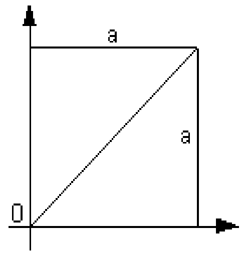
Solución:

La densidad viene dada por $\rho = k(x^2 + y^2)$

Debido a la simetría respecto a la bisectriz del primer cuadrante, el centro de gravedad estará sobre la recta $y = x$.

Luego $x_G = y_G = \dfrac{\int\int x\rho\,dx\,dy}{\int\int \rho\,dx\,dy}$

a) Cálculo del denominador



$$\int\int k(x^2+y^2)\,dy\,dx = k\int_0^a\int_0^a (x^2+y^2)\,dy\,dx$$

$$= k\int_0^a (x^2 a + \frac{a^3}{3})\,dx = k\left[a\frac{x^3}{3} + \frac{a^3}{3}x\right]_0^a$$

$$= k\left[\frac{a^4}{3} + \frac{a^4}{3}\right] = \frac{2ka^4}{3}$$

b) Cálculo del numerador

$$\int\int k(x^2+y^2)x\,dx\,dy = k\int_0^a\int_0^a x(x^2+y^2)\,dy\,dx = k\int_0^a x(x^2 a + \frac{a^3}{3})\,dx = k\left[a\frac{x^4}{4} + \frac{a^3}{6}x^2\right]_0^a$$

$$= k\frac{a^5}{4} + \frac{a^5}{6}$$

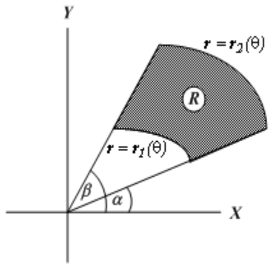
Las coordenadas son $x_G = y_G = \dfrac{k(\frac{a^5}{4} + \frac{a^5}{6})}{\frac{2a^4k}{3}} = \dfrac{5a}{8}$.

5.3.2. Integrales dobles en coordenadas polares

Sea R una región radialmente simple (ver figura), que consta de aquellos puntos cuyas coordenadas satisfacen las desigualdades

$\alpha \leq \theta \leq \beta, \qquad r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)$

Entonces $\displaystyle\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(rcos(\theta), rsen(\theta))\, rdrd\theta$



5.3.3. Ejercicios resueltos

1. Calcular $\displaystyle\int\int_R e^{x^2+y^2}dA$ sobre la región R limitada por la circunferencia $x^2+y^2=4$

Solución:

$$\begin{aligned}\iint\limits_R e^{x^2+y^2}dA &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 e^{r^2} rdrd\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\int_*^{**} e^u du \;\; d\theta \quad \text{con} \quad u=r^2 \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\, e^{r^2}\Big|_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(e^4-1\right)d\theta = \left(e^4-1\right)\pi\end{aligned}$$

2. Calcular $\displaystyle\int\int\limits_D ydxdy$, donde la región D está limitada por las gráficas de $r = 1+cos\theta$ ubicada sobre el eje polar.

Solución:

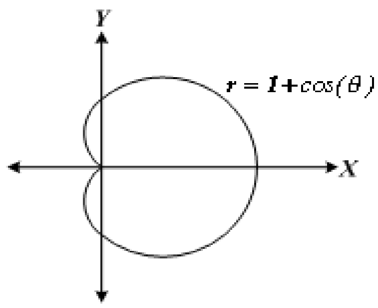
Identificamos el integrando, que es $f(x,y)=y$; luego en coordenadas polares, se tiene $f(r,\theta) = rsen(\theta)$.

Luego

$\displaystyle\int\int\limits_D y\,dx\,dy = \int\int\limits_D r\,sen(\theta) r\,dr\,d\theta$

$\displaystyle= \int_0^\pi\int_0^{1+\cos\theta} r^2 sen(\theta)dr\,d\theta = \tfrac{1}{3}\int_0^\pi (1+\cos\theta)^3 sen\theta d\theta$

$= -\tfrac{1}{12}\,(1+\cos\theta)^4\,|_0^\pi = \dfrac{4}{3}.$



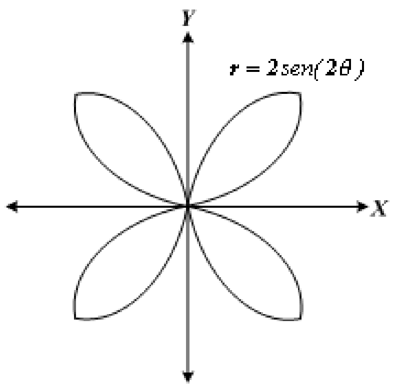
Nota: $r = 1+cos(\theta)$ es una cardioide cuya gráfica se adjunta.

3. Determine la integral $\displaystyle\int\int\limits_R k\,|r|\,dA$ sobre la región R limitada por el pétalo de rosa $r = 2sen(2\theta)$.

Solución:

$\displaystyle\int\int\limits_R k\,|r|\,dA = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2sen(2\theta)} krdrd\theta$

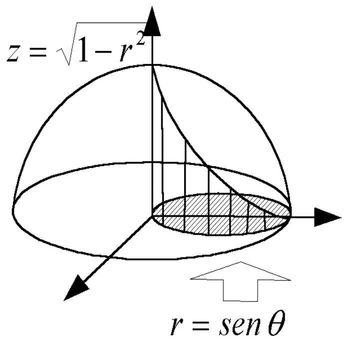
$$\begin{aligned} &= k\int_0^{\pi/2} 2sen^2(2\theta)d\theta \\ &= k\int_0^{\pi/2}(1-\cos(4\theta))d\theta \\ &= k\left[\theta - \frac{sen(4\theta)}{4}\right]_0^{\pi/2} \\ &= k\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$



Nota: $r = 2sen(2\theta))$ es una rosa de 4 pétalos.

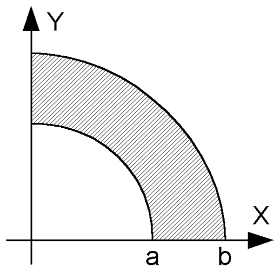
4. Utilizando una integral doble en coordenadas polares, calcular el área del círculo $r = 2$.
Solución:
$$\text{Area} = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r dr d\theta = \int_0^{2\pi} 2d\theta = 4\pi u^2.$$

5. Obtener el volumen del sólido que se encuentra bajo el hemisferio $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y arriba de la región limitada por la gráfica de la circunferencia $r = sen(\theta)$.
Solución
El volumen está dado por $\int\int_R \sqrt{1 - x^2 - y^2}dA$
Utilizando coordenadas polares $x = rcos\theta,\ y = rsen\theta$ la ecuación del hemisferio superior se transforma en $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} = \sqrt{1 - r^2}$ y utilizando la simetría formulamos la integral que nos dará el volumen
$\text{V} = \int\int_R \sqrt{1 - r^2}dA$
$= 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{sen\theta} (1 - r^2)^{1/2} r dr d\theta$
$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \left[1 - (\cos^2\theta)^{3/2}\right] d\theta$
$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \left[1 - (1 - sen^2\theta)\cos\theta\right] d\theta$
$= \frac{\pi}{3} - \frac{4}{9}u^3.$



Observación: $r = sen\theta$ tiene como gráfica a una circunferencia que se obtiene haciendo variar θ de 0 a π . Sin embargo, al formular la integral $\int_0^{\pi}\int_0^{sen\theta} (1 - r^2)^{1/2} r dr d\theta$ se obtiene la respuesta incorrecta $\pi/3$. ¿Por qué?.

6. Dada la región R en el primer cuadrante entre los círculos $x^2 + y^2 = a^2,\ x^2 + y^2 = b^2$, $0 < a < b$. Calcular el valor de la integral doble $\int\int_R \frac{dx\,dy}{x^2 + y^2}$
Solución:
La región R en coordenadas polares es un segmento de una corona circular ubicada en el primer cuadrante.
Cálculo de la integral doble:
$$\int\int_R \frac{dx\,dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_a^b \frac{r}{r^2}dr\right)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_a^b \frac{dr}{r}\right)d\theta$$
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln r \,|_a^b\, d\theta$
$= \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{b}{a}\right).$



7. Determine el volumen del sólido que está acotado por arriba por el paraboloide $z = 8 - r^2$ y por abajo por el paraboloide $z = r^2$.
Solución:
La curva de intersección de los dos paraboloides se encuentra resolviendo de manera simultánea

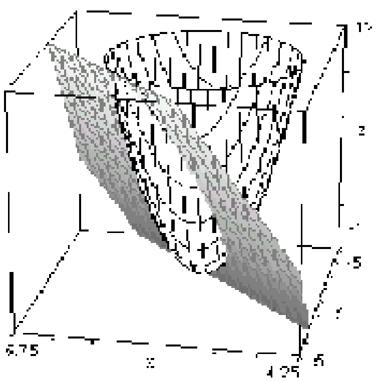
las ecuaciones de las dos superficies. Eliminamos z para obtener

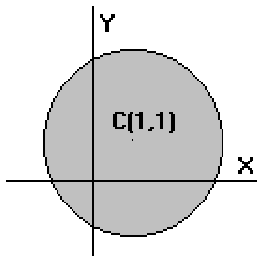
$$r^2 = 8 - r^2 \qquad \text{es decir,} \quad r^2 = 4.$$

Por lo tanto, el sólido está sobre el disco con descripción polar $r \leq 2$, y su volumen es

$$\begin{aligned} V &= \iint_R (z_{\text{sup}} - z_{\text{ínf}})dA = \int_0^{2\pi}\int_0^2 [(8-r^2)-r^2]r\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (8r-2r^3)\,dr\,d\theta \\ &= 2\pi\left[4r^2 - \tfrac{1}{2}r^4\right]_0^2 = 16\pi u^3. \end{aligned}$$

8. Hallar el volumen determinado por el paraboloide $x^2+y^2=z$ y el plano $z = 2+2x+2y$.
Solución:
El volumen V está dado por $\iint_R z_{sup} - z_{inf}\, dx\, dy$
donde R es la proyección (sombra) de la parte del plano que se intersecta con el paraboloide.
Cálculo de la región R



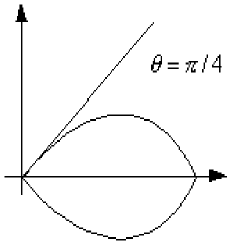


Resolvemos el sistema $\begin{cases} Paraboloide\ \ x^2+y^2=z \\ Plano\ \ \ 2+2x+2y=z \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2-2-2x-2y=0$
La última ecuación es una circunferencia $(x-1)^2+(y-1)^2=4$

Cálculo del volumen
$V=\iint_R 2+2x+2y-(x^2+y^2)\, dx\, dy$
Hacemos un cambio a polares, al mismo tiempo, una traslación
$\begin{array}{l} x = 1+\rho\,\cos\theta \\ y = 1+\rho\, sen\,\theta \end{array} \Rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \rho$
Sustituyendo, tenemos

$$\begin{aligned} v &= \iint (2+2+2\rho\cos\theta+2+2\rho\, sen\theta-1-\rho^2\cos^2\theta-2\rho\cos\theta-1-\rho^2\, sen^2\theta-2\rho\, sen\theta)\rho\, d\rho\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2} \left(4-\rho^2\right)\rho\, d\rho\, d\theta = 8\pi. \end{aligned}$$

9. Hallar el centro de gravedad de un bucle de la curva $r^2 = a^2cos(2\theta)$
Solución:
Sean (x_G, y_G) las coordenadas del centro de gravedad
Debido a la simetría $y_G = 0$.



Cálculo de $x_G = \dfrac{\int\int x\, dx\, dy}{\int\int dx\, dy}$
a) Cálculo del denominador

$\int\int dx\, dy = 2 \int\limits_0^{\pi/4} \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r dr d\theta = \int\limits_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\theta d\theta$

$= a^2 \int\limits_0^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta = \frac{a^2}{2} sen(2\theta) \Big]_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{2}.$

b) Cálculo del numerador

$$\int\int x\, dx\, dy = \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \int\limits_0^{a\sqrt{\cos(2\theta)}} r^2 \cos\theta\, dr\, d\theta = \frac{1}{3} a^3 \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(\theta)\, (\cos(2\theta))^{3/2} d\theta$$

$$= \frac{2}{3} a^3 \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(\theta)\, (1 - 2\, sen^2\theta)^{3/2} d\theta$$

Hacemos un cambio de variable $\sqrt{2} sen(\theta) = sen(t) \rightarrow \sqrt{2} cos(\theta)\, d\theta = cos(t)\, dt$

$$= \frac{2}{3\sqrt{2}} a^3 \int\limits_0^{\pi/2} \cos^4(t)\, dt = \frac{a^3 \pi}{8\sqrt{2}}. \text{ Así } x_G = \frac{a\pi}{4\sqrt{2}}, \quad y_G = 0.$$

10. Calcular la integral doble $\iint_D \dfrac{x^2 y^2}{(x^2+y^2)^2} dxdy$, donde D es el anillo $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$.
Solución:
Cambio a coordenadas polares $\begin{array}{ll} x = r\cos(\theta) & 1 \leq r \leq \sqrt{2} \\ y = r sen(\theta) & 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array} \Rightarrow \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$
Cálculo de la integral

$$\begin{aligned}
\int\int \frac{x^2 y^2}{(x^2+y^2)^2} dx\, dy &= \int\limits_1^{\sqrt{2}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{r^2 \cos^2\theta\, r^2 sen^2\theta}{(r^2)^2} r\, d\theta\, dr \\
&= \int\limits_1^{\sqrt{2}} \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\theta\, sen^2\theta\, r\, d\theta\, dr = \int\limits_1^{\sqrt{2}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{4}(1+\cos(2\theta))(1-\cos(2\theta)) r\, d\theta\, dr
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \int\limits_1^{\sqrt{2}} \int\limits_0^{2\pi} (1-\cos^2(2\theta)) r\, d\theta\, dr = \frac{1}{4} \int\limits_1^{\sqrt{2}} \int\limits_0^{2\pi} sen^2(2\theta)\, r\, d\theta\, dr \\
&= \frac{1}{8} \int\limits_1^{\sqrt{2}} \int\limits_0^{2\pi} (1-\cos(4\theta)) r\, d\theta\, dr = \frac{1}{8} \int\limits_1^{\sqrt{2}} r(\theta - \frac{sen(4\theta)}{4} |_0^{2\pi}\, dr \\
&= \frac{2\pi}{8} \int\limits_1^{\sqrt{2}} r\, dr = \frac{\pi}{4} \left(\frac{r^2}{2} \right)_1^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

11. Calcular la integral $\int\limits_D \int xydxdy$, donde D es el dominio limitado por la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ y situado en el primer cuadrante.
Solución:

Cambio a coordenadas polares $\begin{array}{ll} x = a\,r\cos(\theta) & 0 \leq r \leq 1 \\ y = b\,r sen(\theta) & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \end{array} \Rightarrow \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = abr$

Cálculo de la integral

$$\begin{aligned}
\int\int xy\,dx\,dy &= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} ar\cos\theta\, br\, sen\theta\, abr\, d\theta\, dr \\
&= a^2b^2 \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \cos\theta\ sen\theta\, r^3\, d\theta\, dr = a^2b^2 \int_0^1 r^3 \left[\frac{sen^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} dr \\
&= \frac{1}{2}a^2b^2 \int_0^1 r^3 dr = \frac{a^2b^2}{2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{a^2b^2}{8}
\end{aligned}$$

12. Calcular $\int\int_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$, donde D está limitada por la hoja de la Lemniscata $(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2), \quad x \geq 0.$

Solución:

Despejamos y de la ecuación de la Lemniscata

$(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2, \quad x^4 + 2x^2y^2 - x^2 + y^2 + y^4 = 0$

$y^4 + (2x^2+1)y^2 + (x^4 - x^2) = 0, \quad$ con $u = y^2$

$u^2 + (2x^2+1)u + (x^4-x^2) = 0$, cuyas soluciones reales son

$u = \sqrt{8x^2+1} - 2x^2 - 1$, luego $y = \pm\sqrt{\sqrt{8x^2+1} - 2x^2 - 1}$

La integral en coordenadas cartesianas es

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{\sqrt{8x^2+1}-2x^2-1}}^{\sqrt{\sqrt{8x^2+1}-2x^2-1}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy\,dx \quad \text{la cual es difícil de calcular.}$$

Cambio a coordenadas polares

La ecuación de la Lemniscata queda como:

$(r^2)^2 = r^2cos^2\theta - r^2sen^2\theta, \quad r^2 = 2cos^2\theta - 1$

$r = \sqrt{2cos^2\theta - 1} \quad$ con $\quad -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$

La integral en coordenadas polares es

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{2\cos^2\theta-1}} \sqrt{1-r^2}\,r\,dr\,d\theta = \frac{3\pi - 16\sqrt{2} + 20}{18}$$

13. Calcular $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}dxdy$

Solución:

La región de integración es un cuarto de circulo con

$0 \leq y \leq 2 \quad$ y $\quad 0 \leq x \leq \sqrt{4-y^2}$.

La integral en coordenadas cartesianas es de tipo II $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$

Cambio a coordenadas polares $\quad 0 \leq r \leq 2 \quad$ y $\quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$

$$\int_0^2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2}r\,d\theta\,dr = \int_0^2 \int_0^{\pi/2} r^2\,d\theta\,dr = \int_0^2 r^2\,[\theta]_0^{\pi/2}\,dr = \frac{\pi}{2}\int_0^2 r^2 dr = \frac{\pi}{6}\left[r^3\right]_0^2 = \frac{4\pi}{3}.$$

14. Calcular la integral doble $\displaystyle\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (a^2-y^2)^{1/2}dydx$

Solución:

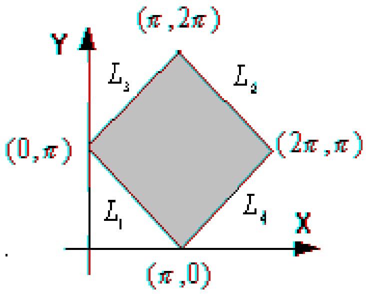
Cambio a coordenadas polares $0 \le r \le a$ y $0 \le \theta \le \pi/2$

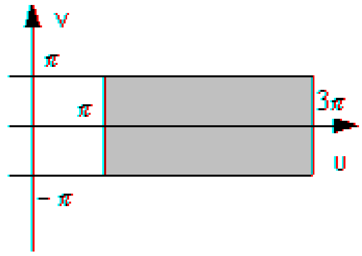
$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{a} \sqrt{a^2 - r^2 sen^2\theta}\, r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{-2sen^2\theta}\right)\left(a^2 - r^2 sen^2\theta\right)^{3/2} \Big|_0^a\, d\theta \\
&= -\tfrac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{(a^2 - a^2 sen^2\theta)^{3/2} - a^3}{sen^2\theta}\right) d\theta = -\tfrac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \frac{a^3(\cos^3\theta - 1)}{sen^2\theta}\, d\theta \\
&= \tfrac{a^3}{3}\int_0^{\pi/2} \frac{(1-\cos\theta)(\cos^2\theta + \cos\theta + 1)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}\, d\theta = \frac{a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{\cos\theta + 1} + \cos\theta\right) d\theta \\
&= \frac{a^3}{3}\left[\tan\left(\tfrac{\theta}{2}\right)(\cos\theta + 2)\right]_0^{\pi/2} = \frac{2a^3}{3}
\end{aligned}$$

15. Calcular $\int\int_D (x-y)^2 sen^2(x+y) dxdy$, donde D es el paralelogramo con vértices $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, $(0, \pi)$

Solución:

Cálculo de las rectas que forman el paralelogramo





$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 : m = -1 \\ y - 0 = -1(x - \pi) \\ y + x = \pi \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{L}_2 : m = -1 \\ y - \pi = -(x - 2\pi) \\ y + x = 3\pi \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{L}_3 : m = 1 \\ y - \pi = x - 0 \\ y - x = \pi \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{L}_4 : m = 1 \\ y - 0 = x - \pi \\ y - x = -\pi \end{cases}$$

Cambio de variables $u = x + y$, $v = y - x$. Haciendo la sustitución tenemos $\pi \le u \le 3\pi$, $-\pi \le v \le \pi$ El respectivo jacobiano es $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{1}{2}$

Cálculo de la integral

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\pi}^{3\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v^2 sen^2 u\, dv\, du &= \frac{1}{6}\int_{\pi}^{3\pi} sen^2 u \left[v^3\right]_{-\pi}^{\pi} du = \frac{2\pi^3}{6}\int_{\pi}^{3\pi} sen^2 u\, du \\
&= \frac{\pi^3}{3}\int_{\pi}^{3\pi}\left(\frac{1 - \cos(2u)}{2}\right) du = \frac{\pi^3}{6}\int_{\pi}^{3\pi} 1 - \cos(2u)\, du \\
&= \frac{\pi^3}{6}\left[u - \frac{sen(2u)}{2}\right]_{\pi}^{3\pi} = \frac{\pi^4}{3}
\end{aligned}$$

16. Utilice las coordenadas elípticas $x = 3rcos\theta$, $y = 2rsen\theta$ para determinar el volumen de la región acotada por el plano XY, el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el cilindro elíptico $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

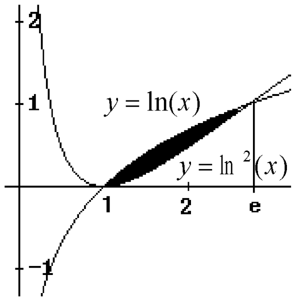
Solución:
Cálculo del jacobiano

$$x = 3r\ \cos\theta \qquad y = 2r\ sen\theta$$
$$\frac{\partial x}{\partial r} = 3\cos\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = 2sen\theta \qquad J(r,\theta) = \begin{vmatrix} 3\ \cos\theta & -3r\ sen\theta \\ 2\ sen\theta & 2r\ \cos\theta \end{vmatrix} = 6r$$
$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -3rsen(\theta) \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = 2r\cos\theta$$

Cálculo del volumen

$$\begin{aligned} V = \int\int_R x^2 + y^2\, dA &= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^1 (9r^2\cos^2\theta + 4r^2 sen^2\theta)6r\, dr\, d\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^1 (54r^3\cos^2\theta + 24r^3 sen^2\theta)\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi/2} 54\cos^2\theta + 24sen^2\theta\, d\theta \\ &= \frac{54}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos(2\theta))\, d\theta + \frac{24}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos(2\theta))\, d\theta \\ &= 27\left[\theta + \frac{sen(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi/2} + 12\left[\theta - \frac{sen(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{39\pi}{2}. \end{aligned}$$

17. Hallar el volumen del cuerpo en $\mathbb{R}^3$ limitado por las superficies
$y = ln(x)$, $y = ln^2x$, $x = 1,$, $x = e$, $z = 0$, y $z = 3$.
Solución:
Cálculo de la región de integración
De la gráfica observamos que
Los puntos de intersección de $y = ln^2x$ y $y = lnx$
son precisamente los puntos $x = 1$ y $x = e$.
Así
$1 \leq x \leq e \quad \ln^2 x \leq y \leq \ln x$
Cálculo del volumen



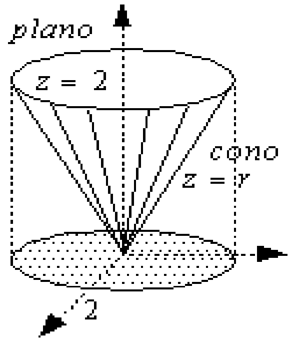
$$V = \int_1^e\int_{\ln^2 x}^{\ln x}(3-0)\, dy\, dx = 3\int_1^e \ln x - \ln^2 x\, dx = 3\int_1^e \ln x\, dx - 3\int_1^e \ln^2 x\, dx$$

Calcularemos por separado cada una de las integrales

$$3\int_1^e \ln x\, dx = 3\left[x\ln x - x\right]_1^e = 3$$
$$3\int_1^e \ln^2 x\, dx = 3\left[x\ln^2 x\right]_1^e - 6\int_1^e \ln x\, dx = 3\left[x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x\right]_1^e = 3e - 6.$$

Continuando V=$3 - (3e-6) = 9 - 3e$.

18. Hallar el volumen del cuerpo en $\mathbb{R}^3$ limitado por las superficies $z = \sqrt{x^2+y^2}$, y $z = 2$
Solución::
Cálculo de la región de integración
Resolvemos un sistema $\begin{cases} Cono & z = \sqrt{x^2+y^2} \\ Plano & z = 2 \end{cases}$
Resolviendo tenemos $\sqrt{x^2+y^2} = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$



que corresponde a una circunferencia
cuya ecuación en coordenadas polares es $r = 2$.
Entonces, la región de integración está acotada por
$0 \leq r \leq 2, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$.
Cálculo del volumen

$$V=\iint_R 2-\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int_0^2\int_0^{2\pi}(2-r)r\,d\theta\,dr$$

$$=2\pi\int_0^2 (2r-r^2)\,dr = 2\pi\left[r^2-\frac{r^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8\pi}{3}u^3.$$

5.4. Ejercicios propuestos de Integrales Dobles

1. Evalue las las siguientes integrales

   a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^x \sqrt{1-x^2}dydx$ Rpta. $\frac{1}{3}$

   b) $\displaystyle\int_1^2\int_0^4 x^2-2y^2+1dxdy$ Rpta. $\frac{20}{3}$

   c) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}} \frac{2}{\sqrt{4-y^2}}dxdy$ Rpta. 4

2. Dibuje la región de integración cuya área viene dada por la integral iterada, a continuación cambie el órden de integración y verifique que ambos órdenes de integración conducen al mismo valor de área

   a) $\displaystyle\int_0^2\int_{\frac{x}{2}}^1 dydx$ Rpta. 1

   b) $\displaystyle\int_0^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dxdy$ Rpta. $\frac{\pi}{2}$

   c) $\displaystyle\int_0^1\int_{y^2}^{y^{\frac{1}{3}}} dxdy$ Rpta. $\frac{5}{12}$

3. Sea R la región $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\right\}$ halle la integral doble sobre la región R de la función $f(x,y) = x^2+y^2$.
   . Rpta. $\frac{88}{105}$.

4. Escriba los límites de la integral doble $\iint_R f(x,y)dA$ y calcule el área de R haciendo $f(x,y) = 1$ donde R es el triángulo de vértices $(0,0)$,$(3,0)$,$(0,1)$ Rpta. $\frac{3}{2}$

5. Sea R la región $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\right\}$ halle la integral doble sobre la región R de la función $f(x,y) = x^2+y^2$. Rpta. $\frac{88}{105}$.

6. Escriba los límites de la integral doble $\iint_R f(x,y)dA$ y calcule el área de R haciendo $f(x,y) = 1$. R es el área mayor entre las gáficas de $x^2+y^2 = 25$ y $x = 3$
   . Rpta. $\frac{25\pi}{2} + 12 + 25\arcsin\frac{3}{5}$

7. Sea R la región en el tercer cuadrante limitada por los círculos $x^2+y^2=1, \quad x^2+y^2=3$ y las rectas $y=x, \quad y=2x$. Describa esta región en el sistema de coordenadas polares.
. Rpta. $R=\left\{(r,\theta)/\ 1\leq r\leq 3^{1/2},\ \frac{5\pi}{4}\leq\theta\leq\pi+\arctan 2\right\}$.

8. Calcule la integral doble, efectuando un cambio de variables adecuado $\displaystyle\int\int_R (x+y)^2 dA$. R es la región limitada por la circunferencia de centro en $(2,0)$ tangente al eje Y. Rpta. 24π.

9. Calcule la integral doble, efectuando un cambio de variables adecuado $\displaystyle\int\int_R (x^2+y^2)^2 dx\,dy$. Donde R es la región limitada por la circunferencia con centro en $(0,4)$ y radio 4.
. Rpta. $40960\pi/3$.

10. Calcule la integral doble, efectuando un cambio de variables adecuado $\displaystyle\int\int_R xy\,dx\,dy$ donde $R=\left\{(x,y)/x^2+\frac{y^2}{16}\leq 1\right\}$. Rpta. 0.

11. Hallar el volumen del cuerpo en $\mathbb{R}^3$ limitado por las superficies $z=5-x-y$, $z=0, \quad x=0, \quad x=2, \quad y=0, \quad y=3$. Rpta. 15.

12. Hallar el volumen del cuerpo en $\mathbb{R}^3$ limitado superiomente por la superficie $x^2+y^2+z^2=6$, e inferiormente por la superficie $z=x^2+y^2$. Rpta. $\pi(4\sqrt{6}-22/3)$.

13. Calcular el volumen del cuerpo limitado superiormente por la superficie $2x^2+3y^2+z^2=6$, e inferiormente por la superficie $z=(2x^2+3y^2)^{1/2}$. Rpta. $\pi(4-2^{3/2})$.

14. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $z=x^2+y^2, \quad xy=1$, $xy=2, \quad 2y=x, \quad 2x=y, \quad z=0$. $(x\geq 0)$ y $(y\geq 0)$ Rpta. 9/4.

15. Calcular el área de la región limitada por las curvas $y=\ln(x),\ y=-\ln(x),\ x=e$. Rpta. 2.

16. Calcular el área de la región limitada por las curvas $\left(x^2+y^2\right)^2=x^3-3xy^2$, $x\geq 0, \quad y\geq 0$. Rpta. $\pi/8$.

17. Calcular el área encerrada por el caracol de Pascal $r=2+cos(\theta)$. Rpta. $9\pi/2$.

18. Hallar las coordenadas del centro de masa de la figura plana homogénea dada por un triángulo isósceles de base b y altura h.
Rpta. Si los vértices del triángulo son (0,0),(b,0),(b/2,h), el centro de masa se encuentra en el punto $(b/2,h/3)$.

19. Hallar las coordenadas del centro de masa de la figura plana homogénea acotada por $y=x^2,\ y=1$. Rpta. $(0,3/5)$.

20. Calcular $\displaystyle\int\int_D (x^2+y^2)dxdy$, donde D es la región limitada por $x^2+y^2=2x,\ x^2+y^2=4x$, $x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=6y$. Rpta. 1/12.

21. Calcular $\displaystyle\int\int_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy$, donde D está limitada por la hoja de la Lemniscata $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2(x^2-y^2),\ x\geq 0$. Rpta. $[\frac{\pi}{3}-\frac{16\sqrt{2}-20}{9}]\frac{a^3}{2}$.

22. Determine el área de la región del primer cuadrante acotada por las curvas $y=x^3, \quad y=2x^3$, $x=y^3, \quad x=4y^3$. Rpta. $\frac{1}{8}(2-\sqrt{2})$.

23. Calcular $\displaystyle\int_0^3 \int_{-\sqrt{18-y^2}}^{-y} sen(x^2+y^2)dxdy.$ Rpta. $\frac{\pi}{8}(1-\cos 18)$.

24. Usando coordenadas polares calcular $\int_0^{1/\sqrt{2}} \int_x^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dydx.$ Rpta. $\pi/12$.

25. Calcular $\displaystyle\int\int_D e^{\frac{y-x}{y+x}}dxdy$, donde D es el triángulo limitado por la recta $x+y=2$, y los ejes coordenados. Rpta. $e-e^{-1}$.

26. Hallar el área de la región limitada por las curvas $xy=4$, $xy=8$, $xy^3=15$, $xy^3=5$. Rpta. $2ln(3)\ u^2$.

27. Hallar el área de la región limitada por $(x^2+y^2)^3 = x^4+y^4$. Rpta. $\dfrac{3\pi}{4}u^2$.

28. Encontrar el volumen del sólido S limitado por el cono $z^2 = x^2+y^2$ y el paraboloide $3z = x^2+y^2$. Rpta. $\dfrac{9\pi}{2}u^3$.

29. Encontrar el volumen del sólido en el primer octante bajo el paraboloide $z=x^2+y^2$ y dentro del cilindro $x^2+y^2=9$. Rpta. $\dfrac{81}{8}\pi u^3$.

30. Encontrar el volumen de la región situada sobre el disco $x^2+(y-1)^2 \leq 1$ y acotada por arriba por la función $z=x^2+y^2$. Rpta. $\dfrac{3\pi}{2}u^3$.

Uso de Software:

1. Para graficar las regiones de integración, más fácilmente, podemos recurrir a la pagina Web: **Regions Described by Double Integrals - Flash and Math**
   www.flashandmath.com/... /double integrals.html
   - Se puede escoger el tipo de coordenadas.
   - Se puede escoger el orden de integración.
2. Para calcular integrales dobles, se puede recurrir a software como: DERIVE, MATLAB, MATHEMATICA etc. también a la página Web: **Wolfram Alpha Widgets: Double Integral Calculator**
   www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp

5.5. Integrales triples

Definición 50 *Sea F una función de tres variables definida en una región cerrada D del espacio. Entonces la integral triple de F en D está dada por*

$$\iiint_D F(x,y,z)\,dV = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1} F(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta V$$

5.5.1. Posibles órdenes de integración

1. La región D es z-simple: Cada recta paralela al eje z interseca a D en un único segmento de recta. Es decir D puede describirse mediante las desigualdades $z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y)$ para (x,y) en R.
   Donde R es la proyección de D sobre el plano XY. Entonces

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV = \iint_R \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dA$$

2. La región D es x-simple : Cada recta paralela al eje x interseca a D en un único segmento de recta. Es decir D puede describirse mediante las desigualdades $x_1(y,z) \leq x \leq x_2(y,z)$ para (y,z) en R.
   Donde R es la sombra de D en el plano YZ. Entonces

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV = \iint_R \left(\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx \right) dA$$

3. La región D es y-simple : Cada recta paralela al eje y interseca a D en un único segmento de recta. Es decir D puede describirse mediante las desigualdades $y_1(x,z) \leq y \leq y_2(x,z)$ para (x,z) en R.
   Donde R es la sombra de D en el plano XZ. Entonces

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV = \iint_R \left(\int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy \right) dA$$

   Comentario: Algunas regiones D son simultáneamente x-simple, y-simple o z-simple , por lo que existirán seis posibles órdenes de integración.

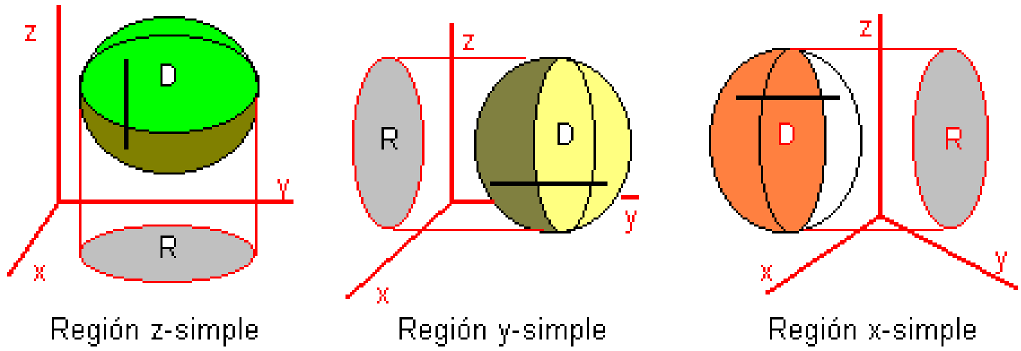
Aplicaciones:

1. Si $F(x,y,z) = 1$, entonces $V = \underset{D}{\int\int\int} dV$ es el volumen del sólido D.

2. Si $\rho = (x,y,z)$ es la densidad, entonces $m = \underset{D}{\int\int\int} \rho(x,y,z)\,dV$ es la masa del sólido D.

3. Las integrales $M_{xy} = \underset{D}{\int\int\int} z\,\rho(x,y,z)\,dV$, $M_{zx} = \underset{D}{\int\int\int} y\,\rho(x,y,z)\,dV$, $M_{yz} = \underset{D}{\int\int\int} x\,\rho(x,y,z)\,dV$ son los momentos de primer orden del sólido.

4. Las coordenadas del centro de masa de D son $\overline{x} = \dfrac{M_{yz}}{m}$, $\overline{y} = \dfrac{M_{xz}}{m}$, $\overline{z} = \dfrac{M_{xy}}{m}$.
   Si $\rho = Constante$, el centro de masa se llama centroide del sólido.



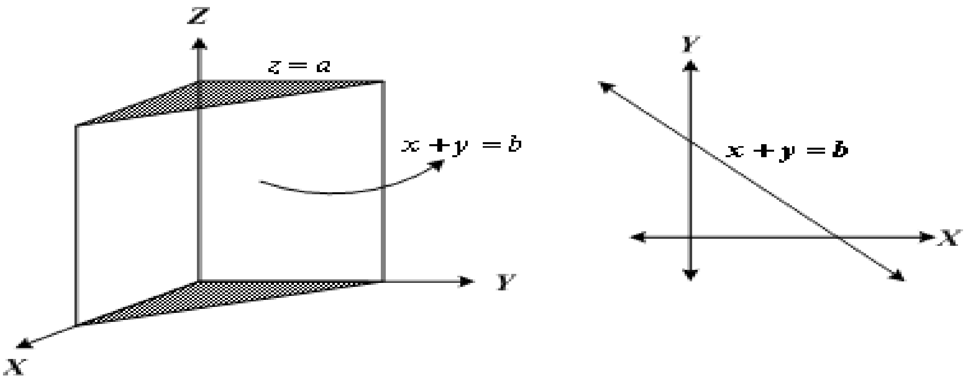
5.5.2. Ejercicios resueltos

1. Calcular $\iiint\limits_D (2x+3y-z)dxdydz$, si el dominio D es un prisma triangular limitado por los planos $z=0$, $z=a$, $x=0$, $y=0$, $x+y=b$, con $a\geq 0$, $y\geq b$.

   Solución:

   Primero: graficamos la región D y la región R

   Luego calculamos la integral



$$\iiint\limits_D (2x+3y-z)dxdydz = \int_0^b\int_0^{b-x}\int_0^a (2x+3y-z)dzdydx$$

$$= \int_0^b\int_0^{b-x}\left[(2x+3y)a-\frac{a^2}{2}\right]dydx = \int_0^b (2axy+\frac{3ay^2}{2}-\frac{a^2y}{2})\,|_0^{b-x}\,dx$$

$$= \int_0^b\left[\frac{3ab^2-a^2b}{2}+(\frac{a^2}{2}-ab)x-\frac{ax^2}{2}\right]dx = \frac{ab^2}{12}(10b-3a).$$

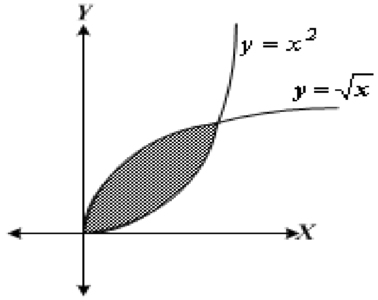
2. Calcular la integral $\iiint\limits_D xyzdxdydz$, donde D es la región limitada por $x=y^2$, $x^2=y$, $z=xy$, $z=0$.

   Solución:

   Primero, grafique la región R de integración en el plano XY. Donde el sólido D está dado por

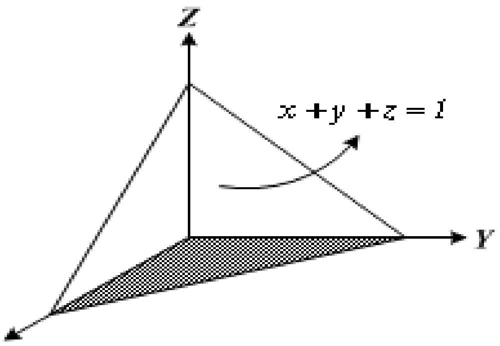
$$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/0\leq x\leq 1,\wedge x^2\leq y\leq\sqrt{x},\wedge 0\leq z\leq xy\right\}.$$

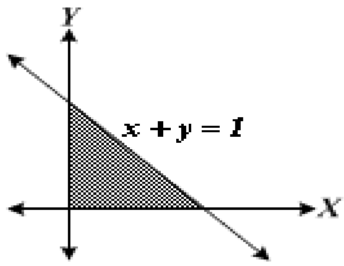
Luego calculamos la integral



$$
\begin{aligned}
&= \iiint_D xyz\,dxdydz = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(\int_0^{xy} xyz\,dz \right) dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{xyz^2}{2} \Big|_0^{xy} dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{x^3y^3}{2} dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^3y^4}{8} \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \tfrac{1}{8} \int_0^1 (x^5 - x^{11}) dx = \frac{1}{96}
\end{aligned}
$$

3. Calcular $\displaystyle\iiint_D \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$, donde D es la región limitada por los planos coordenados y el plano $x+y+z=1$.
Solución:
Haciendo la gráfica obtenemos el orden y los límites de integración, en este caso, R está en el plano XY.





$$
\begin{aligned}
\iiint_D \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3} &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(x+y+z+1)^3} \right) dy \right) dx \\
&= \tfrac{-1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(x+y+1)^2} \right) dy \right) dx \\
&= -\tfrac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{4} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\
&= \frac{\ln(2)}{2} - \frac{5}{16}.
\end{aligned}
$$

4. Calcular $\displaystyle\iiint_D x^2 dxdydz$, donde D está limitado por las superficies $y^2 + z^2 = 4ax$, $y^2 = ax,\ x = 3a$
Solución:
Primero calculamos la región D

$$D = \left\{ (x,y,z)/0 \le x \le 3a \wedge -\sqrt{ax} \le y \le \sqrt{ax} \wedge -\sqrt{4ax - y^2} \le z \le \sqrt{4ax - y^2} \right\}$$

Luego formulamos y calculamos la integral

$$\iiint_D x^2 dxdydz = \int_0^{3a} \left(\int_{-\sqrt{ax}}^{\sqrt{ax}} \left(\int_{-\sqrt{4ax-y^2}}^{\sqrt{4ax-y^2}} x^2 dz \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^{3a} \left(\int_{-\sqrt{ax}}^{\sqrt{ax}} 2x^2\sqrt{4ax-y^2}dy\right)dx$$

$$= \int_0^{3a} \frac{6\sqrt{3}a+4a\pi}{3}x^3dx = 27a^5\left(\frac{3\sqrt{3}+2\pi}{2}\right).$$

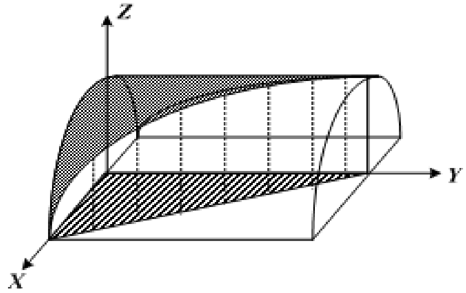
5. Evaluar la integral $\int\int\int_D (3z+xz)dxdydz$, sobre el sólido D que está limitado por las gráficas de los cilindros $x^2+z^2=9$, y los planos $x+y=3$, $z=0$, $y=0$ sobre el plano XY.
Solución:
De la gráfica tenemos que

$$= \iiint_D (3z+xz)dydzdx$$

$$= \int_{-3}^{3}\left(\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\left(\int_0^{3-x}(3z+zx)dy\right)dz\right)dx$$

$$= \int_{-3}^{3}(9-x^2)\frac{z^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{9-x^2}}dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{-3}^{3}(9-x^2)^2dx = \frac{648}{5}$$



5.6. Cambio de variables en integrales triples

5.6.1. Jacobiano de la transformación

Sean R y S las regiones correspondientes bajo la transformación T uno a uno del espacio UVW al espacio XYZ, donde las funciones coordenadas de T son

$$x=f(u,v,w), \qquad y=g(u,v,w), \qquad z=h(u,v,w)$$

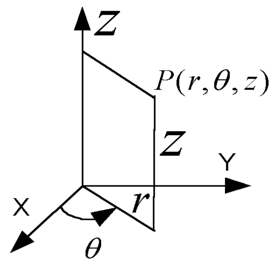
El jacobiano de la transformación T es:

$$J(u,v,w)=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{pmatrix}$$

5.6.2. Fórmula para el cambio de variables en integrales triples

$$\iiint_S F(x,y,z)\,dzdydx = \iiint_R F\left(f(u,v,w),g(u,v,w),h(u,v,w)\right)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw$$

5.6.3. Integrales triples en coordenadas cilíndricas



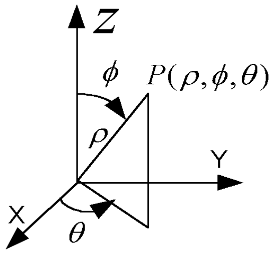
Las coordenadas cilíndricas son:
$x=rcos(\theta)$, $y=rsen(\theta)$, $z=z$
El jacobiano está dado por $J(r,\theta,z)=r$

Fórmula general para la integral triple en coordenadas cilíndricas

$$\int\int\int_D f(x,y,z)\,dV = \int\int\int_U f(rcos(\theta), rsen(\theta), z)\, rdzdrd\theta$$

Comentario: La integración en coordenadas cilíndricas es particularmente útil para cálculos asociados con sólidos de revolución.

5.6.4. Integrales triples en coordenadas esféricas



$$\begin{aligned} x &= \rho\ sen(\phi)\ cos(\theta) \\ y &= \rho\ sen(\phi)\ sen(\theta) \qquad J(\rho,\ \theta,\ \phi) = \rho^2\ sen(\phi) \\ z &= \rho\ cos(\phi) \end{aligned}$$

La fórmula general para la integral triple en coordenadas esféricas está dada por

$$\int\int\int_D f(x,y,z)\,dV = \int\int\int_U f(\rho\ sen(\phi)\ cos(\theta), \rho\ sen(\phi)sen(\theta), \rho cos(\phi))\ \rho^2 sen(\phi)d\rho d\phi d\theta$$

5.6.5. Ejercicios resueltos

1. Hallar el volumen del sólido limitado por la superficie $(\frac{x^2}{9}+y^2+z^2)^2 = z^3$. para $z \geq 0$

   Solución:

   Consideremos $z \geq 0$ y utilizando las coordenadas esféricas modificadas, tenemos:

   $x = 3\rho\, cos\theta\ sen\phi, \quad y = \rho\, sen\theta\, sen\phi, \quad z = \rho\, cos\phi$

   $(\frac{x^2}{9}+y^2+z^2)^2 = z^3; \quad (\rho^2)^2 = \rho^3 cos^3\phi; \quad \rho = cos^3\phi \quad$ con $\quad \rho > 0;$

   $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$

   además el jacobiano está dado por $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)}\right| = 3\rho^2 sen(\phi)$

   la región de integración está dada por :

   $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ y $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\ , \quad 0 \leq \rho \leq cos^3\phi$

   $$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos^3\phi} 3\rho^2 sen(\phi) d\rho d\phi d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} sen(\phi)\cos^9(\phi) d\theta d\phi \\ &= \int_0^{\pi/2} 2\pi sen(\phi)\cos^9(\phi)d\phi = \frac{\pi}{5}. \end{aligned}$$

2. Evaluar $\int\int_\Omega\int e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dxdydz$ donde Ω es la esfera unitaria con centro en el origen.

   Solución:

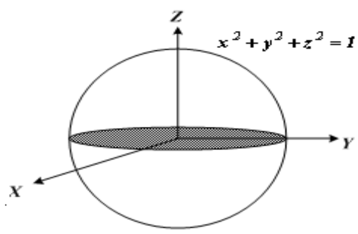
   Utilizamos coordenadas esféricas:

   $x = \rho\, cos\theta\ sen\phi, \quad y = \rho\, sen\theta\ sen\phi, \quad z = \rho\, cos\phi$

   La ecuación de la esfera unitaria $x^2+y^2+z^2 = 1$,

   en coordenadas esféricas es: $\rho = 1$

   y la región de integración es

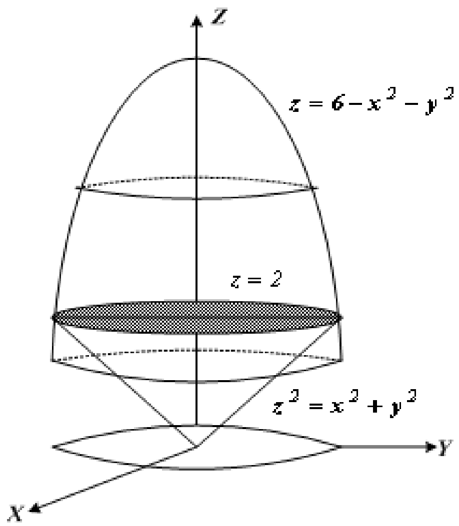


   $0 \leq \rho \leq 1\ ; \quad 0 \leq \phi \leq \pi \quad$ y $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

   $$\begin{aligned} \int\int_\Omega\int e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} e^{\rho^3}\rho^2 sen(\phi)\, d\rho\, d\phi\, d\theta = \frac{1}{3}(e-1)\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} sen\phi\, d\phi\, d\theta \\ &= \frac{2}{3}(e-1)\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4\pi}{3}(e-1). \end{aligned}$$

3. Calcular $\iiint\limits_{\Omega} \dfrac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ donde Ω es la región limitada por, $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2+z^2=b^2$, $(a>b>0)$
Solución:
$x=\rho cos\theta sen\phi$, $y=\rho sen\theta sen\phi$, $z=\rho cos\phi$.
Ecuaciones de las esferas en coordenadas esféricas: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 & : \quad \rho=a \\ x^2+y^2+z^2=b^2 & : \quad \rho=b. \end{cases}$
Región de integración :
$b\le\rho\le a$; $0\le\phi\le\pi$ y $0\le\theta\le 2\pi$
$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_b^{a} \frac{1}{\rho} sen(\phi)d\rho d\phi d\theta = 4\pi ln(\tfrac{a}{b}) .$$

4. Calcule el volumen del sólido limitado por las superficies $z^2=x^2+y^2$, $z=6-x^2-y^2$, $z\ge 0$.
Solución:
Al resolver simultáneamente el sistema compuesto por las dos ecuaciones tenemos:
$$\begin{cases} z^2=x^2+y^2 \\ z=6-x^2-y^2 \end{cases} \Rightarrow z=6-z^2 \ ; \ z^2+z-6=0$$
$z=-3$ y $z=2$ que son dos planos horizontales paralelos al plano XY. Como $z\ge 0$ tomaremos $z=2$, reemplazando en la primera superficie, obtenemos la circunferencia $x^2+y^2=4$.
Luego, al proyectar el sólido sobre el plano XY vemos que la región de integración es un círculo con centro en el origen de radio 2.
A fin de calcular el volumen del sólido utilizaremos coordenadas cilíndricas:



$x=r\ cos(\theta)$, $y=r\ sen(\theta)$ y $z=z$, con $0\le\theta\le 2\pi$.
Transformamos las ecuaciones involucradas y queda: $\begin{cases} x^2+y^2=4 & : \quad r=2 \\ z^2=x^2+y^2 & : \quad z=r \\ z=6-(x^2+y^2) & : \quad z=6-r \end{cases}$

y a continuación formulamos la integral triple que nos dará el volumen
$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_r^{6-r} r dzdrd\theta = \frac{40}{3}\pi u^3.$$

5. Evalue la integral $\iiint\limits_{\Omega} z^2 sen(x^2+y^2)dxdydz$, donde $\Omega : 1\le x^2+y^2\le 4$, $0\le z\le 1$.
Solución:
Utilizaremos coordenadas cilíndricas: $x=rcos(\theta)$, $y=rsen(\theta)$ y $z=z$.
se tiene: $1\le r\le 2$, $0\le\theta\le 2\pi$, $0\le z\le 1$.
$$\iiint z^2 sen(x^2+y^2)dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_1^{2}\int_0^{1} z^2 sen(r^2) r dzdrd\theta = \tfrac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_1^{2} r sen(r^2)drd\theta$$
$$= \tfrac{1}{3}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(-\cos(r^2))\Big|_1^2 d\theta \ = \ \frac{\pi}{3}(\cos(1)-\cos(4)).$$

6. Calcular la siguiente integral triple

$$\int_0^{2R}\int_{-\sqrt{2Rx-x^2}}^{\sqrt{2Rx-x^2}}\int_0^{\sqrt{4R^2-x^2-y^2}} dzdydx$$

Solución: La región de integración está dada por:
$x : 0 \leq x \leq 2R$

$y : -\sqrt{2Rx-x^2} \leq y \leq \sqrt{2Rx-x^2}$ que resulta de $x^2+y^2 = 2Rx$.

$z : 0 \leq z \leq \sqrt{4R^2-(x^2+y^2)}$

Utilizando coordenadas cilindricas , esta región se convierte en

$x^2+y^2 = 2Rx$: $r = 2Rcos(\theta)$

$z = \sqrt{4R^2-(x^2+y^2)}$: se transforma en $z = \sqrt{4R^2-r^2}$

Siendo la región de integración

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2};\quad 0 \leq r \leq 2Rcos(\theta);\quad 0 \leq z \leq \sqrt{4R^2-r^2}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
\int_0^{2R}\int_{-\sqrt{2Rx-x^2}}^{\sqrt{2Rx-x^2}}\int_0^{\sqrt{4R^2-x^2-y^2}} dzdydx &= \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2R\cos\theta}\int_0^{\sqrt{4R^2-r^2}} rdzdrd\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2R\cos\theta} r\sqrt{4R^2-r^2}drd\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{-1}{3}(2R)^3(sen^3\theta-1)d\theta \\
&= -\frac{8}{3}R^3(-\tfrac{1}{3}(2+sen^2\theta)\cos\theta)-\theta)\Big|_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}\pi R^3.
\end{aligned}$$

7. Calcular la integral triple de $f(x,y,z) = y$, sobre la región $-1 \leq x-z \leq 1$, $0 \leq y+z \leq 2$, $1 \leq x+z \leq 3$
Solución:
Haciendo cambio de variables : $u = x-z$, $v = y+z$, $w = x+z$

se tiene $x = \dfrac{u+w}{2}$; $z = \dfrac{w-u}{2}$, $y = \dfrac{u}{2}+v-\dfrac{w}{2}$
$\Omega = \{(u,v,w)/-1 \leq u \leq 1,\ 0 \leq v \leq 2,\ 1 \leq w \leq 3\}$

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}$$

Por tanto
$\int\int\int ydxdydz = \int_{-1}^{1}\int_0^2\int_1^3 \frac{1}{2}(\frac{u}{2}+v-\frac{w}{2})dwdvdu = 0.$

8. Calcule la masa del sólido acotado por el elipsoide de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} = 1$. Si en cada punto $p(x,y,z)$ su densidad es x^2.

Solución:
La fórmula de la masa del sólido está dada por:

$$m = \iiint_D \rho(x,y,z)dV = \iiint_D x^2 dV$$

Donde D es el región acotada por el elipsoide .

Elegimos el cambio de variable siguiente : $\begin{cases} \dfrac{x}{a} = u & \rightarrow & x = au \\ \dfrac{y}{b} = v & \rightarrow & y = bv \\ \dfrac{z}{c} = w & \rightarrow & z = cw \end{cases}$

El jacobiano es $J = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$

el elipsoide se transforma en $u^2 + v^2 + w^2 = 1$, que corresponde a una esfera, por lo cual utilizamos una nueva transformación, obviamente coordenadas esféricas.

$$\begin{array}{rcl} u &=& \rho sen(\phi)\cos(\theta) \\ v &=& \rho sen(\theta) sen(\phi) \\ w &=& \rho\cos(\phi) \end{array} \qquad \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi \end{array}$$

$$\begin{aligned} m &= \iiint_D x^2 dV = \iiint_D a^2u^2 abc dV \\ &= a^3bc \iiint_S \rho^2 sen^2(\phi)\cos^2(\theta)\rho^2 sen(\phi) d\rho d\phi d\theta \\ &= a^3bc \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 \left(\rho^4 d\rho\right) sen^3(\phi)\cos^2(\theta) d\phi d\theta \\ &= \frac{a^3}{5}bc \int_0^{2\pi} (\int_0^{\pi} sen^3(\phi)d\phi)\cos^2(\theta)d\theta \\ &= \frac{4}{15}a^3bc\int_0^{2\pi}\cos^2(\theta)d\theta = \frac{4}{15}a^3bc\pi. \end{aligned}$$

9. Hallar la masa del sólido acotado por las superficies $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} = x$; $z^2 = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4}$, $z \geq 0$ cuya densidad es $\rho(x,y,z) = 2\sqrt{x^2+y^2}$.
Solución:

$$m = \iiint_D \rho(x,y,z)dV = \iiint_D 2\sqrt{x^2+y^2}dV$$

Por la forma del integrando, usaremos coordenadas cilíndricas para resolver la integral.

$$\begin{array}{rcl} x &=& r\cos\theta \\ y &=& r sen\theta \\ z &=& z \end{array} \quad \text{cuyo jacobiano es} \quad J = r$$

ahora $z^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}$ se transforma en $z^2 = \frac{1}{4}r^2 \Rightarrow z = \frac{1}{2}r$ mientras que la superficie $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = x$ se convierte en $r = 4cos(\theta)$ con $\frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

Entonces la región de integración está dada por

$$D = \left\{(\rho,\theta,z) : 0 \leq z \leq \frac{r}{2},\ 0 \leq r \leq 4cos(\theta),\ \frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\begin{aligned}\text{La masa m} &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{4\cos\theta}\int_0^{r/2} 2r^2 dzdrd\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{4\cos\theta} r^3 drd\theta = 64\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\theta d\theta = 24\pi.\end{aligned}$$

10. Determine el volumen de la región del primer octante delimitada por los cilindros hiperbólicos $xy = 1$, $xy = 4$, $xz = 1$, $xz = 9$, $yz = 4$, $yz = 9$.
Solución:
Sustituciones usadas $\quad u = xy, \qquad v = xz, \qquad w = yz, \qquad uvw = x^2y^2z^2$
Cálculo del jacobiano

$$\begin{array}{lllll} si & xy = 1 & xy = 4 & \Rightarrow & 1 \le u \le 4 \\ si & xz = 1 & xz = 9 & \Rightarrow & 1 \le v \le 9 \\ si & yz = 4 & yz = 9 & \Rightarrow & 4 \le w \le 9 \end{array}$$

$$J(x,y,z) = \begin{vmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \\ 0 & z & y \end{vmatrix} = -2xyz$$

$$J(u,v,w) = 1/J(x,y,z) = \frac{1}{-2xyz} = \frac{-1}{2\sqrt{uvw}}$$

Cálculo del volumen

$$\begin{aligned} V &= \int_1^4\int_1^9\int_4^9 \frac{1}{2\sqrt{uvw}}\, dw\, dv\, du = \int_1^4\int_1^9 \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{uv}}\left[2w^{-1/2}\right]_4^9 dv\, du \\ &= \int_1^4\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{u}} v^{-1/2}\, dv\, du = 4\int_1^4 u^{-1/2} du = 8. \end{aligned}$$

11. Calcular el volumen del sólido comprendido entre las gráficas de $\quad z^2 = x^2 + y^2 \quad$ y $\quad 3z = x^2 + y^2 \quad$ para $\quad z \ge 0$
Solución:
Las superficies en coordenadas cartesianas y cilíndricas son:
Por arriba: El cono $z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad z = r$
Por abajo: El paraboloide $3z = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad z = \dfrac{r^2}{3}$

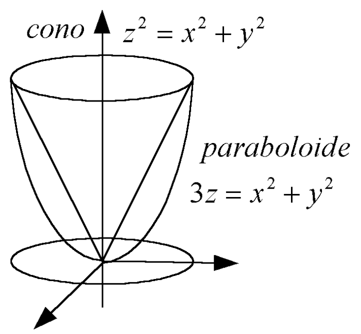
$$\text{Cálculo de la intersección} \begin{cases} \text{cono} & z = r \\ \text{paraboloide} & z = r^2/3 \end{cases} \Rightarrow 3r = r^2 \Rightarrow r = 0,\ r = 3$$

Cálculo del volumen en coordenadas cilíndricas

$$\text{V}=\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{r^2/3}^{r} r\, dz\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^3 r\left(r - \frac{r^2}{3}\right) dr\, d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^3 r^2 - \frac{r^3}{3}\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{12}\right]_0^3 d\theta$$

$$= \frac{9}{4}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{9\pi}{2}u^3.$$



12. Calcular el volumen del sólido comprendido entre las gráficas de $z = x^2 + y^2$ y $x^2 + y^2 = 9$

Solución:

Las superficies en coordenadas cartesianas y cilíndricas son:

Por arriba: El paraboloide $z = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad z = r^2$

Por abajo: El plano $z = 0$

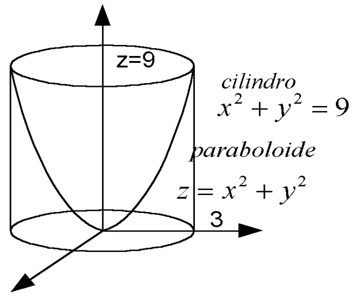
Cálculo de la región de integración:

$$\begin{cases} \text{cilindro} & r = 3 \\ \text{paraboloide} & z = r^2 \end{cases} \quad \text{entonces a la altura } z = 9$$

la intersección es una circunferencia $r = 3$.

Cálculo del volumen en coordenadas cilíndricas:

Por ser simétrico el sólido, sólo calcularemos



sobre el primer octante

$$V=4\int_0^{\pi/2}\int_0^3\int_0^{r^2} r\,dz\,dr\,d\theta = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^3 r^3\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\left[r^4\right]_0^3 d\theta = 81\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{81\pi}{2}$$

13. Calcular el volumen del sólido comprendido entre las gráficas de $z = x^2 + y^2$ y el cilindro $x^2 + (y-1)^2 = 1$

Solución:

Las superficies en coordenadas cartesianas y cilíndricas son:

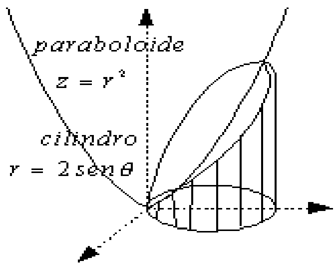
Por arriba: El paraboloide $z = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad z = r^2$

Por abajo: El plano $z = 0$

Cálculo de la región de integración

El cilindro $x^2 + (y-1)^2 = 1$

tiene por ecuación polar $r = 2sen\theta$



Así tenemos que la región es un circulo tal que $0 \le \theta \le \pi$ y $0 \le r \le 2\,sen\theta$

Cálculo del volumen

$$V=\int_0^{\pi}\int_0^{2\,sen\theta}\int_0^{r^2} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi}\int_0^{2\,sen\theta} r^3\,dr\,d\theta = \int_0^{\theta}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\,sen\theta} d\theta = 4\int_0^{\pi} sen^4\theta\,d\theta = 4\int_0^{\pi} sen^2\theta\, sen^2\theta\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi}\left(\tfrac{1-\cos(2\theta)}{2}\right)^2 d\theta = \int_0^{\pi} 1 - 2\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta)\,d\theta = \int_0^{\pi} 1 - 2\cos(2\theta) + \left(\frac{1+\cos(4\theta)}{2}\right) d\theta$$

$$= \left[\theta - sen(2\theta) + \tfrac{1}{2}\left(\theta + \frac{sen(4\theta)}{4}\right)\right]_0^{\pi} = \frac{3\pi}{2}.$$

14. Calcule la integral $\displaystyle\iiint_U \frac{y-2z}{x}\,dx\,dy\,dz$ donde U es la porción del espacio que en el primer octante está limitado por el cilindro $y^2 + z^2 = 1$ y los planos $x = 1$ y $x = 4$.

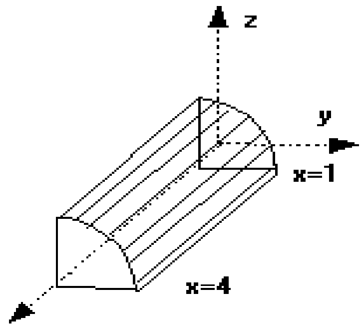
Solución:

Cambio a coordenadas cilindricas adecuadas,

$y = rcos\theta, \qquad z = rsen\theta, \qquad x = x$

Cálculo de la región de integración. Siendo un cilindro la región U es la cuarta parte de un circulo $y^2+z^2 = 1$ entonces $r = 1$

con $0 \le r \le 1$ y $0 \le \theta \le \pi/2$



Cálculo de la integral

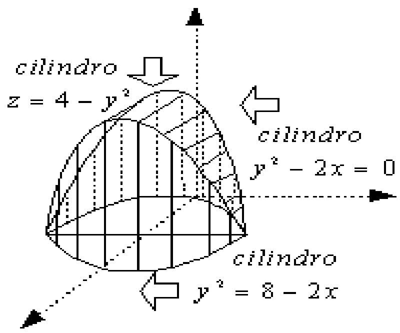
$$I=\int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_1^4 \frac{r\cos\theta-2rsen\theta}{x} r\,dx\,dr\,d\theta$$
$$=\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^2(\cos\theta-2sen\theta)\left[\ln x\right]_1^4 dr\,d\theta$$
$$=\ln(4)\int_0^{\pi/2}(\cos\theta-2sen\theta)\left.\frac{r^3}{3}\right|_0^1 d\theta=\frac{\ln 4}{3}\int_0^{\pi/2}(\cos\theta-2sen\theta)\,d\theta=-\frac{\ln 4}{3}.$$

15. Determine el volumen del sólido debajo de $z+y^2=4$, arriba de $z=0$ y dentro de las superficies cilíndricas $y^2-2x=0$, $y^2=8-2x$.
Solución:

Cálculo de la intersección en el plano XY, $\left.\begin{array}{l} y^2=2x \\ y^2=8-2x \end{array}\right\} \Rightarrow 2x=8-2x \Rightarrow x=2$

Cálculo del volumen

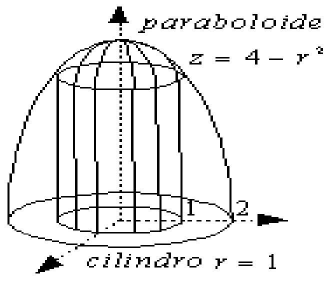
$$V=\int_{-2}^{2}\int_{y^2/2}^{4-y^2/2}\int_0^{4-y^2} dz\,dx\,dy=\int_{-2}^{2}\int_{y^2/2}^{4-y^2/2} 4-y^2\,dx\,dy$$
$$=\int_{-2}^{2}(4-y^2)\left.x\right|_{y^2/2}^{4-y^2/2}dy=\int_{-2}^{2}(4-y^2)(4-y^2)dy$$
$$=\int_{-2}^{2}(16-8y^2+y^4)dy=16y-\frac{8y^3}{3}+\left.\frac{y^5}{5}\right|_{-2}^{2}=\frac{512}{15}$$



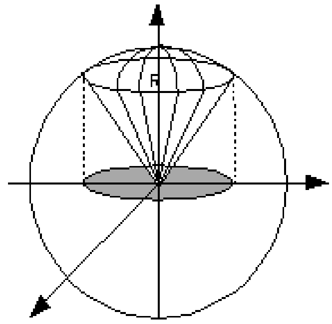
16. Hallar el volumen del sólido bajo la superficie $z=4-x^2-y^2$ e interior al cilindro $x^2+y^2=1$ y sobre el plano XY.
Solución:

La región de integración es un circulo $r=1$ con $0\le\theta\le 2\pi$
Cálculo del volumen

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{4-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1(4r-r^3)dr\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\left[2r^2-\frac{r^4}{4}\right]_0^1 d\theta=\frac{7}{4}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{7\pi}{2}u^3.$$



17. Use coordenadas cilíndricas y esféricas para calcular la integral de $f(x,y,z)=z$, cuya región de integración está determinada por la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2=1$, dentro del cono de ecuación $z=\sqrt{x^2+y^2}$
Solución:
Ecuaciones esféricas
Para la esfera: $\rho=1$ Para el cono: $\phi=\pi/4$
Cálculo de la integral en Coordenadas esféricas



$$I=\iiint_R z\,dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\int_0^{1}(\rho\cos\phi\,\rho^2 sen\phi)\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$
$$=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}(sen\phi\,\cos\phi)\,d\phi\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} sen^2\,\phi|_0^{\pi/4}d\theta$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{8}$$

Cálculo de la integral en Coordenadas cilíndricas

Para la esfera: $z^2 = 1-(x^2+y^2)$, $\quad z^2 = 1-r^2 \quad z=\sqrt{1-r^2}$.

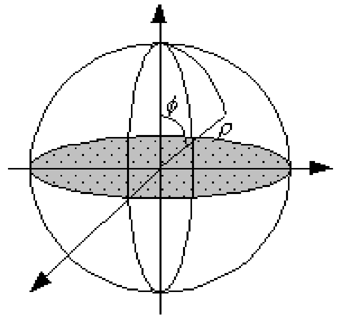
Para el cono: $z^2 = x^2+y^2$, $\quad z = r$.

La intersección de la esfera con el cono es una circunferencia de radio $r = 1/\sqrt{2}$

$$I=4\int_0^{\pi/2}\int_0^{1/\sqrt{2}}\int_r^{\sqrt{1-r^2}} z\,r\,dz\,dr\,d\theta = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{1/\sqrt{2}} r\left[\frac{z^2}{2}\right]_r^{\sqrt{1-r^2}} dr\,d\theta$$
$$=4\int_0^{\pi/2}\int_0^{1/\sqrt{2}}\left(\frac{r}{2}-r^3\right)dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\left[r^2-r^4\right]_0^{1/\sqrt{2}}d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}d\theta = \frac{\pi}{8}.$$

18. Calcular la masa del sólido acotado por el Elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Si en cada punto (x,y,z) su densidad es x^2

Solución:



Aplicaremos coordenadas esféricas modificadas,

$\frac{x}{a}=\rho\cos\theta\,sen\phi$, $\quad \frac{y}{b}=\rho sen\theta\,sen\phi$, $\quad \frac{z}{c}=\rho\cos\phi$

cuyo jacobiano es $J(\rho,\theta,\phi) = abc\rho^2 sen\phi$

Cálculo de la masa

$$m=\iiint(densidad)\,dV = \iiint(x^2)\,dV$$
$$=\int_0^1\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(a^2\rho^2\cos^2\theta\,sen^2\phi)abc\rho^2 sen\phi\,d\theta\,d\phi\,d\rho$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{\pi} a^3\rho^4 bc\,sen^3\phi\left[\theta+\frac{1}{2}sen(2\theta)\right]_0^{2\pi}d\phi\,d\rho$$
$$=a^3\pi bc\int_0^1\int_0^{\pi}\rho^4\,sen^3\phi\,d\phi\,d\rho = a^3\pi bc\int_0^1\int_0^{\pi}\rho^4\,sen^2\phi\,sen\phi\,d\phi\,d\rho$$
$$=a^3\pi bc\int_0^1\int_0^{\pi}\rho^4(1-\cos^2\phi)\,sen\phi\,d\phi\,d\rho = a^3\pi bc\int_0^1\rho^4\left[-\cos\phi+\frac{1}{3}\cos^3\phi\right]_0^{\pi}d\rho$$
$$=\frac{4}{3}a^3\pi bc\int_0^1\rho^4 d\rho = \frac{4}{3}a^3\pi bc\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4}{15}a^3\pi bc$$

19. Hallar el volumen del sólido comprendido entre las gráficas de $z = 8-x^2-y^2$ y el plano $z=0$ y dentro del cilindro $x^2+y^2=2y$

Solución:

Cambio a coordenadas cilíndricas

Paraboloide: es $z = 8-x^2-y^2$ cambia a $z = 8-r^2$

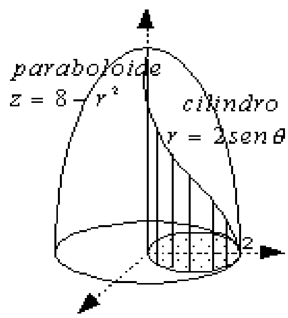
Cilindro: es $x^2+y^2=2y$, $\quad x^2+(y-1)^2=1$ cambia a $r = 2sen\theta$

La región de integración en el plano XY es un circulo de

ecuación $r = 2sen\theta$ donde $0\le r\le 2sen\theta$ y $0\le\theta\le\pi$

Cálculo del volumen

$$V=\iiint_D dV = \int_0^{\pi}\int_0^{2sen\theta}\int_0^{8-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi}\int_0^{2sen\theta} 8r - r^3 dr\,d\theta$$
$$=\int_0^{\pi}\left[4r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^{2sen\theta} d\theta = \int_0^{\pi} 8sen^2\theta - 4sen^4\theta\,d\theta$$
$$=4\int_0^{\pi}(1-\cos(2\theta)) - \left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right)^2 d\theta$$
$$=4\left[\theta - sen(2\theta)\right]_0^{\pi} - \left[\theta - sen(2\theta) + \frac{1}{2}\theta + \frac{sen(4\theta)}{8}\right]_0^{\pi} = \frac{13\pi}{2}.$$



20. Hallar el volumen del sólido en $\mathbb{R}^3$ limitado por las gráficas de las superficies $z = x^2+4y^2-2$ y $z = 2 - x^2 - 4y^2$.

Solución:

Cálculo de la intersección. Resolvemos el sistema $\begin{cases} Paraboloide & z = 2 - x^2 - 4y^2 \\ Paraboloide & z = x^2 + 4y^2 - 2 \end{cases}$

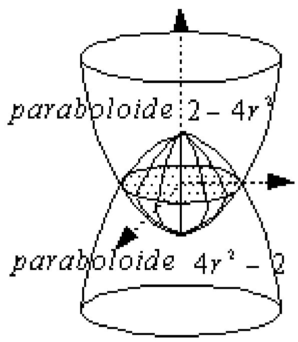
La intersección es una elipse $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = \dfrac{1}{2}$ en el nivel $z = 0$ que cambiando a coordenadas cilíndricas tenemos $x = 2rcos\theta$, $y = rsen\theta$. La elipse se transforma en $r = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$ con $0 \le r \le \sqrt{\frac{1}{2}}$ y $0 \le \theta \le 2\pi$.

Y el jacobiano es $J(r,\theta) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$

$$= \begin{vmatrix} 2\cos\theta & -2rsen\theta \\ sen\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = 2r$$

Cálculo de la integral

$$V=\iiint_D dV = \int_0^{\sqrt{1/2}}\int_0^{2\pi}\int_{4r^2-2}^{2-4r^2} r\,dz\,d\theta\,dr$$
$$= \int_0^{\sqrt{1/2}}\int_0^{2\pi} r(2-4r^2-4r^2-2)\,d\theta\,dr$$
$$= \int_0^{\sqrt{1/2}}\int_0^{2\pi} (8r-16r^3)\,d\theta\,dr = 16\pi\int_0^{\sqrt{1/2}} (r-2r^3)\,dr$$
$$= 16\pi\left[\tfrac{r^2}{2} - \tfrac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{1/2}} = 2\pi.$$



5.7. Ejercicios propuestos para integrales triples

1. Calcule la integral triple de:

   a) $\displaystyle\int_0^3\int_0^2\int_0^1 x+y+zdxdydz$ Rpta.18

   b) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{-1}^1\int_{-1}^1 x^2+y^2+z^2dxdydz$ Rpta.$\frac{8}{27}$

2. Calcular $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-x}\int_{2y}^{1+y^2} x\,dz\,dy\,dx.$ Rpta. 1/10.

3. Calcular $\displaystyle\int_0^1\int_0^{x}\int_0^{x+y} (x+y+z)\,dz\,dy\,dx.$ Rpta. 7/8.

4. Calcular $\int_1^2 \int_y^{y^2} \int_0^{\ln x} ye^z \, dz \, dx \, dy$. Rpta. 47/24.

5. Calcular $\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} xy \, sen(yz) \, dz \, dx \, dy$. Rpta. $\dfrac{\pi^3 - \pi sen(\pi^2)}{2}$.

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^{4-r^2} rsen\theta dzdrd\theta$ Rpta.$\frac{52}{45}$

7. $\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos\phi} \rho^2 sen\phi d\rho d\theta d\phi$ Rpta.0

8. Evaluar la integral $\int\int_S\int ydxdydz$, si S es la región limitada por el tetraedro formado por el plano $12x + 20y + 15z = 60$ y los planos coordenados. Rpta. 15/2.

9. Calcular $\int\int_T\int xydxdydz$, si el dominio T está limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Rpta. 1/15.

10. Calcular $\int\int_D\int xdxdydz$, donde D es el recinto de todos los puntos que cumplen $0 \leq z \leq 3$, $x^2 + y^2 \leq z$. Rpta. 0.

11. Calcular el volumen del sólido en el interior de las gráficas de $r = 2\cos\theta$y $r^2 + z^2 = 4$.
. Rpta.$\frac{16}{13}(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3})$

12. Calcular el volumen del sólido limitado por las gráficas de $z = x^2 - y + 4$, $z = 0$, $x = 0$, $x = 4$.
. Rpta.$\frac{3296}{15}$

13. Calcular $\int\int_D\int \sqrt{x^2 + y^2} dx \, dy \, dz$, donde D es el sólido limitado por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 1$. Rpta. $\pi/6$.

14. Calcular $\int\int_D\int \cos(x^2 + y^2 + z) dx \, dy \, dz$, donde D es el sólido acotado por las superficies $x^2 + y^2 = 2$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $z = 4$. Rpta. $\pi(cos4 - cos8 + cos6 - cos2)$.

15. Calcular $\int\int_T\int dx \, dy \, dz$, donde la región T es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$. Rpta. $\dfrac{4\pi r^3}{3}$.

16. Calcular $\int\int_T\int (x^2 + y^2 + z^2) dx \, dy \, dz$ si el dominio T está limitado por el cilindro $x^2 + z^2 = 1$ y los planos $y = 0$, $y = 1$. Rpta. $5\pi/6$.

17. Encontrar el volúmen del sólido acotado inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y superiormente por el plano $z = 2y$. Rpta. $\dfrac{\pi}{2}u^3$.

18. Hallar el volúmen del sólido limitado superiormente por el plano $z = y$ e inferiormente por $z = x^2 + y^2$. Rpta. $\pi/32$.

19. Encontrar el volumen del sólido acotado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. Rpta. $4\pi a^3(\dfrac{8 - 3\sqrt{3}}{3})$.

20. Encontrar el volumen del sólido en el primer octante acotado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, el cilindro $y = x^2$, y los planos $y = x$, $z = 0$. Rpta. 3/35.

21. Calcular la masa del cubo $0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq a,\ 0 \leq z \leq a$ si la densidad del cubo en el punto (x, y, z) es $\rho(x, y, z) = x + y + z$. Rpta. $3a^4/2$.

22. Encontrar la masa del sólido acotado por una esfera de radio a si la densidad de volúmen varía con el cuadrado de la distancia al centro. Rpta. $\frac{4}{5}a^5\pi$.

23. Hallar la masa del cuerpo limitado por el paraboloide $x^2 + y^2 = 2az$, y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$, $(a > 0)$ si la densidad en cada punto es igual a la suma de los cuadrados de sus coordenadas. Rpta. $\frac{a^5\pi}{5}(18\sqrt{3} - \frac{97}{6})$.

24. Calcular las coordenadas del centro de gravedad del cuerpo limitado por las superficies $x+y = 1$, $z = x^2 + y^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Rpta. $(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{7}{30})$.

25. Calcular las coordenadas del centro de gravedad del cuerpo limitado por las superficies $z^2 = xy$, $x = 5$, $y = 5$, $z = 0$. Rpta. $(3, 3, \frac{45}{32})$.

26. Determine el volumen y el centroide de la región acotada por el plano $z = 0$ y el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$. Rpta. $\frac{81}{2}\pi$, $(0, 0, 3)$.

27. Determine el volumen de la región acotada por los paraboloides $z = 2x^2 + y^2$ y $z = 12 - x^2 - 2y^2$. Rpta. 24π.

28. Determine el volumen de la región acotada por arriba por la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ y por abajo por el paraboloide $z = x^2 + y^2$. Rpta. $\frac{1}{6}\pi(8\sqrt{2} - 7)$.

29. Determine el volumen de la región acotada por el plano $z = 1$ y por el cono $z = r$. Rpta. $\frac{1}{3}\pi$.

30. Haga una interpretación geométrica de la integral

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{6sen\phi} \rho^2 sen\phi d\rho d\phi d\theta.$$