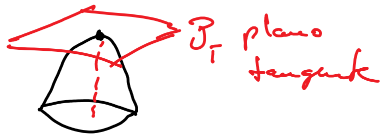
Criterio de las segundas derivadas parciales

09/06/2021 07:00

Definición (Puntos críticos)

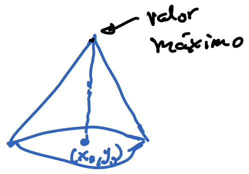
Sea $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ función definida en un conj. abierto $U \subset \mathbb{R}^2$. El punto $(x_0, y_0) \in U$ en el que



$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

se llama punto crítico (o punto estacionario). También son llamados puntos críticos los puntos donde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ no existe} \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \text{ no existe}.$$



Matriz Hessiana

Sea $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función definida en un conj. abierto $U \subset \mathbb{R}^2$. Suponga que las derivadas parciales de segundo orden existen en $(x, y) \in U$. La matriz cuadrada de orden 2:

$$H(f(x,y)) = H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \frac{\partial f}{\partial x} \\ \leftarrow \frac{\partial f}{\partial y} \end{array}$$

se llama matriz Hessiana de la función f en (x,y).

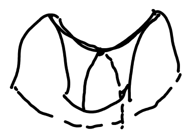
Submatrices angulares

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \quad ; \quad \Delta_2 = H(x,y)$$

Criterio de las segundas derivadas parciales

Sea $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función definida en un conj. abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que en una bola con centro en el punto crítico $(x_0, y_0) \in U$ (que anula las derivadas parciales) sus derivadas parciales de segundo orden son continuas. Tenemos

1. Si $\Delta_1 > 0 \wedge \det \Delta_2 > 0$ en el punto crítico $(x_0, y_0) \Rightarrow$ la función f tiene un mínimo local en (x_0, y_0).
2. Si $\Delta_1 < 0 \wedge \det \Delta_2 > 0$ en el punto crítico $(x_0, y_0) \Rightarrow f$ tiene un máx. local en (x_0, y_0)
3. Si $\det \Delta_2 < 0$ en el punto crítico (x_0, y_0), entonces f tiene un punto de silla en (x_0, y_0)



4. Si $\det \Delta_2 = 0$ en el punto crítico (x_0, y_0), no se puede afirmar nada acerca del punto crítico (x_0, y_0). Este punto crítico es llamado punto crítico degenerado.

Ejemplo 1. (Guía DMM pág 74, 3)

Determinar los extremos relativos, puntos de silla de la función

$f(x,y) = x^2 + 7y^2 - 5xy + 6x - 3y + 2$

Solución

- $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}^2$
- Puntos críticos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 5y + 6 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 14y - 5x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 5 \\ 2 \end{array}\begin{cases} 2x - 5y = -6 & (1) \\ -5x + 14y = 3 & (2) \end{cases}$$

$$3y = -24 \qquad y = -8 \qquad x = -23$$

$\Rightarrow$ $(-23, -8)$ es p.c. de f.

- Matriz Hessiana:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 14 \end{bmatrix}$$

Como $\Delta_1 = 2 > 0$ y $\det \Delta_2 = 28 - 25 = 3 > 0$ $\Rightarrow$ f tiene un mínimo local en $(-23, -8)$.

Ejemplo 2. (Guia DAM pág 73, 1)

Hallar los extremos relativos, puntos de silla de

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 9x^2 - 3y^2 + 15x - 9y$$

Solución

- $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}^2$
- Puntos críticos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 18x + 15 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 6y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 6x + 5 = 0 \\ y^2 - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+1)(x+5) = 0 \\ (y+1)(y-3) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x = -1 \ \vee \ x = -5) \wedge (y = -1 \ \vee \ y = 3)$$

$\Rightarrow$ $(-1,-1)$; $(-1,3)$; $(-5,-1)$; $(-5,3)$ puntos críticos de f.

- Matriz Hessiana:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 6x+18 & 0 \\ 0 & 6y-6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \Delta_1 = 6x + 18 \\ \Delta_2 = H(x,y) \end{array}$$

- Analizando en cada punto crítico:

En $(-1,-1)$ $\Rightarrow$ $\Delta_1 = -6 + 18 = 12 > 0$, $\det \Delta_2 = \det\left(\begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}\right) = \underline{\underline{-144 < 0}}$ $\Rightarrow$ f tiene punto de silla en $(-1,-1)$

En $(-1,3)$ $\Rightarrow$ $\Delta_1 = 12 > 0$, $\det \Delta_2 = \det\left(\begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}\right) = 144 > 0$ $\Rightarrow$ f tiene mín. local en $(-1,3)$

En $(-5,-1)$ $\Rightarrow$ $\Delta_1 = -30 + 18 < 0$ ... $\Rightarrow$ f tiene máx. local en $(-5,-1)$

$\det \Delta_2 = \det\left(\begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}\right) = 144 > 0 \Rightarrow f$ tiene máx. local ...

En $(-5,3)$ $\Rightarrow$ $\Delta_1 = -30+18 = -12 < 0$

$\det \Delta_2 = \det\left(\begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}\right) = \underline{\underline{-144<0}} \Rightarrow f$ tiene punto de silla en $(-5,3)$

Ejemplo 3.

Determinar los extremos absolutos de $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}\cdot(2x^2+3y^2)$ en el círculo $\underline{\underline{x^2+y^2\leq 4}}$.

Solución

- $\operatorname{Dom} f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 4\}$
- Puntos críticos: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -2xe^{-x^2-y^2}\cdot(2x^2+3y^2) + e^{-x^2-y^2}\cdot(4x) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{-x^2-y^2}\cdot(2x^2+3y^2) + e^{-x^2-y^2}\cdot(6y) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} e^{-x^2-y^2}\cdot(-4x^3-6xy^2+4x) = 0 \\ e^{-x^2-y^2}(-4yx^2-6y^3+6y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x^3-6xy^2+4x = 0 \\ -4yx^2-6y^3+6y=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x(-2x^2-3y^2+2) = 0 \\ y(-2x^2-3y^2+3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \ \vee \ -2x^2-3y^2+2=0 \\ \wedge \\ y=0 \ \vee \ -2x^2-3y^2+3=0 \end{matrix}$

$\Rightarrow$ Si $x=0 \wedge y=0 \Rightarrow (0,0)$

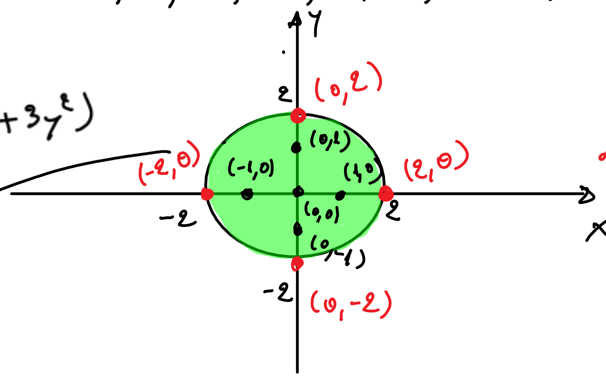
Si $x=0 \wedge -2x^2-3y^2+3=0 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1 \Rightarrow (0,1)$, $(0,-1)$

Si $-2x^2-3y^2+2=0 \wedge y=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm1 \Rightarrow (1,0)$, $(-1,0)$

Si $-2x^2-3y^2+2=0 \wedge -2x^2-3y^2+3=0 \Rightarrow$ No hay solución

puntos críticos : $(0,0)$; $(0,-1)$; $(0,1)$; $(1,0)$; $(-1,0)$.

$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}\cdot(2x^2+3y^2)$



$\mathbb{R}$

$f(0,0) = 0$ valor mín ~~local~~ abs

$f(0,-1) = 3e^{-1} \approx 1.10$ valor máx ~~local~~ abs

$f(0,1) = 3e^{-1}$

$f(1,0) = 2e^{-1} \approx 0.74$

$f(-1,0) = 2e^{-1}$

- Analicemos la función en $x^2+y^2=4$

✓ $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}\cdot(2(x^2+y^2)+y^2) = e^{-4}(8+y^2)$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{-4}(2y) = 0 \Rightarrow \boxed{y=0}$ reemplazando en $x^2+y^2=4$:

$x^2+0^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \Rightarrow f(2,0) = 8e^{-4} \approx 0.15$

$f(-2,0) = 8e^{-4}$

✓ $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} \cdot (3(x^2+y^2) - x^2) = e^{-4}(12 - x^2)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{-4}(-2x) = 0 \Rightarrow x = 0 \rightsquigarrow$ reemplazando en $x^2+y^2=4$:

$0^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \Rightarrow f(0,2) = 12e^{-4} \approx 0.22$

$f(0,-2) = 12e^{-4}$