Capítulo

2 Funciones de varias variables

Al finalizar el capítulo el alumno deberá ser capaz de:

- Dada una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, determinar los elementos de la función.
- Conceptualizar y calcular de límite de una función.
- Entender y aplicar la diferenciación de funciones definidas sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ y dar su interpretación geométrica.
- Construir planos y vectores tangentes; vectores y rectas normales a una superficie.

2.1. Funciones de Varias Variables

Definición 16 Función
Una función real de n variables $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una regla que asocia a cada vector $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de U, un número real bien determinado $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. El conjunto U es el dominio de la función f, denotado por Dom f y el rango de f es el conjunto de $y \in \mathbb{R}$ para los cuales existe $\mathbf{x} \in U$ tal que $y = f(\mathbf{x})$, es decir

$$Ran\, f = \{y \in \mathbb{R} / \, y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ para algún } \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U\}.$$

Ejemplos: Sean las funciones de dos variables: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$Domf = \mathbb{R}^2$, $Ran\ f = \mathbb{R}$, $Domg = \mathbb{R}^2$, $Ran\ g = [-1, 1]$,

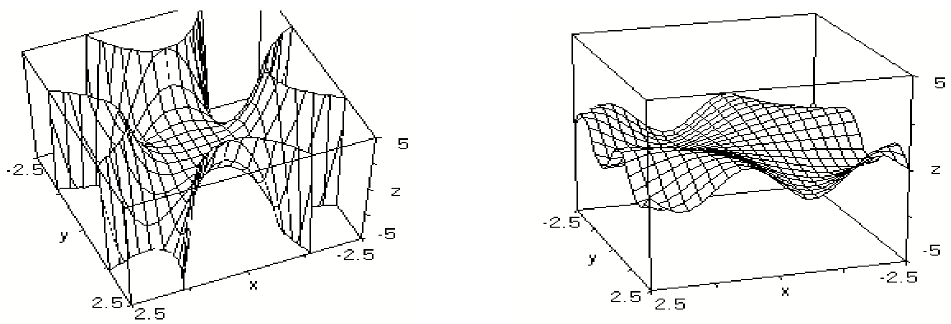
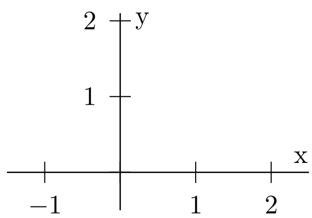


Figura 2.1: $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$ $g(x, y) = sen(xy)$

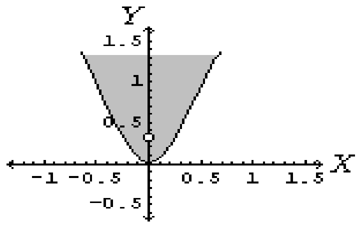
2.1.1. Ejercicios resueltos:

1. Describa el dominio de la función $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{y - \frac{1}{2}x^2}}$
y haga un esquema en el que represente este dominio.
Solución:



Para que f este bien definida, se debe tener que el denominador $\sqrt{y - \frac{1}{2}x^2} > 0$. Entonces $y > \frac{1}{2}x^2$.
Por tanto:
$Dom f = \{(x,y)/y > \frac{1}{2}x^2\}$.

2. Describa el dominio de la función $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{y - x^2}}{x^2 + (y-1)^2}$ y haga un esquema en el que represente este dominio.
Solución:

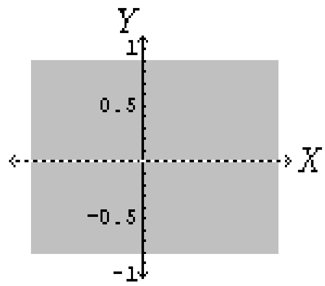


i) Dado que $x^2 + (y-1)^2 \neq 0$ entonces $(x,y) \neq (0,1)$.

ii) Dado que $y - x^2 \geq 0$ entonces $x^2 \leq y$;

por lo tanto
$Dom\, f = \{(x,y)\,/\,x^2 \leq y\} - \{(0,1)\}$.

3. Describa el dominio de la función $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{e^x + y^2}}{y}$ y haga un esquema en el que represente este dominio.
Solución:

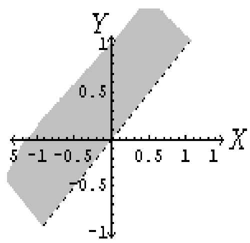


i) $e^x + y^2 \geq 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

ii) $y \neq 0$.

por lo tanto $Dom\, f = \{(x,y)\,/\,y \neq 0\}$.

4. Describa el dominio de la función
$f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{\ln(y - x + 1)}}$ y haga un esquema en el que represente este dominio.
Solución:



Dado que $\ln(y - x + 1) > 0 \wedge y - x + 1 > 0$
$\Rightarrow \quad y - x + 1 > 1 \wedge y > x - 1$
$\Rightarrow \quad y > x \wedge y > x - 1$
por lo tanto
$Dom\, f = \{(x,y)\,/\,y > x\} \cap \{(x,y)\,/\,y > x - 1\}$.

5. Determine el dominio y rango de la función $f(x,y,z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$
Solución:
De la definición de f se sabe que $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, de manera que $f(x,y,z)$ es un número real. Luego, $4 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$ entonces $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, que representa a la esfera de

centro $(0,0,0)$ de radio 2 y su interior.
Por tanto, para hallar el rango de f
se hace $f(x,y,z)=w$.
Esto es $w^2=4-x^2-y^2-z^2$ entonces
$4-w^2=x^2+y^2+z^2\geq 0$,
lo que implica $4-w^2\geq 0$,
luego $-2\leq w\leq 2$
y como $w\geq 0$ entonces se
tendrá $0\leq w\leq 2$.
Por lo tanto, el $Ranf=[0,2]$,
$Domf=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3/x^2+y^2+z^2\leq 4\}$.

2.2. Geometría de las funciones de Varias Variables

Definición 17 *La gráfica de una función $f:U\subset \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.denotada con $Graf\quad f$ se define como:*

$$Graf\quad f=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n,y)\in\mathbb{R}^{n+1}/\,y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}.$$

Definición 18 Nivel constante de una función. *Dada la función $f:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ y el número k en el rango de f se define el nivel constante k de la función f como el conjunto de puntos de U que f envía a k; es decir*

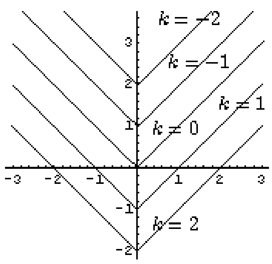
$$Nivel_k=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in U\,/\,f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=k\}.$$

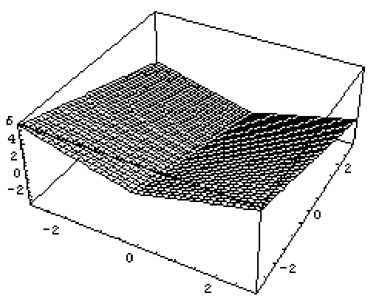
Definición 19 *La intersección del plano horizontal $z=k$ con la superficie $z=f(x,y)$ es la curva de contorno de altura k sobre la superficie . La proyección vertical de esta curva de contorno en el plano XY es la curva de $Nivel_k$ de la función f.*

2.2.1. Ejercicios resueltos

1. Describa las curvas de nivel de la función $f(x,y)=|x|-y$.
   Solución:
   Las curvas de nivel estan dadas por las ecuaciones $\mathcal{C}$: $y=|x|-k$, $\forall k$. Luego:

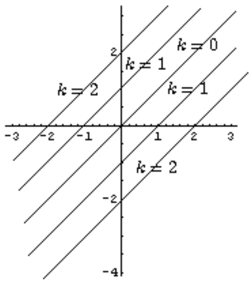
$$\begin{array}{llll llll}
k=-2 & \Rightarrow & y=|x|+2, & & k=-1 & \Rightarrow & y=|x|+1,\\
k=0 & \Rightarrow & y=|x|, & & k=1 & \Rightarrow & y=|x|-1,\\
k=2 & \Rightarrow & y=|x|-2, & & k=3 & \Rightarrow & y=|x|-3.
\end{array}$$

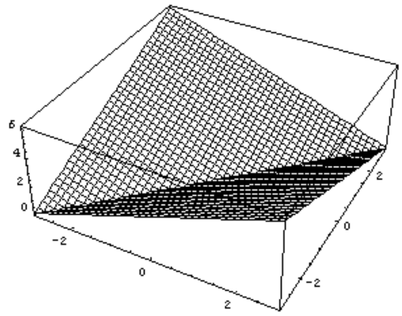




2. Describa las curvas de nivel de la función $f(x,y)=|x-y|$.
   Solución:
   Las curvas de nivel estan dadas por las ecuaciones $\mathcal{C}$: $k=|x-y|$, $\forall k\geq 0$. Luego:

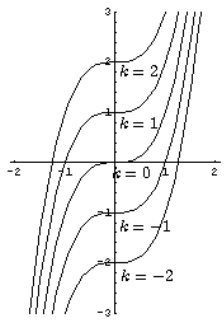
$$\begin{array}{lllllllll}
k=0 & \Rightarrow & |x-y|=0 & \Rightarrow & x=y, & & \\
k=1 & \Rightarrow & |x-y|=1 & \Rightarrow & x-y=1 & \vee & x-y=-1,\\
k=2 & \Rightarrow & |x-y|=2 & \Rightarrow & x-y=2 & \vee & x-y=-2.
\end{array}$$

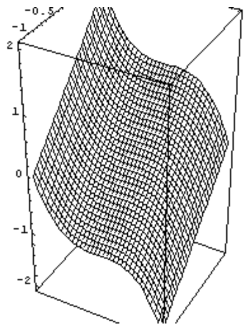




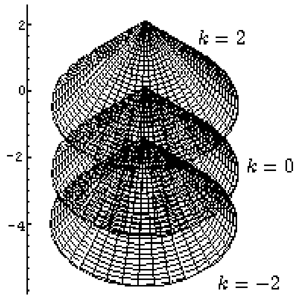
3. Describa las curvas de nivel de la función $f(x, y) = y - x^3$.
   Solución:
   Las curvas de nivel estan dadas por las ecuaciones $\mathcal{C}$: $y - x^3 = k$, $\forall k \in \mathbb{R}$. Luego:

$$\begin{array}{llllll} k = -2 & \Rightarrow & y = x^3 - 2, & k = -1 & \Rightarrow & y = x^3 - 1, \\ k = 0 & \Rightarrow & y = x^3, & k = 1 & \Rightarrow & y = x^3 + 1, \\ k = 2 & \Rightarrow & y = x^3 + 2, & k = 3 & \Rightarrow & y = x^3 + 3. \end{array}$$





4. Describa las superficies de nivel de la función $f(x, y, z) = z + \sqrt{x^2 + y^2}$.
   Solución:
   Las superficies de nivel son
   $\mathcal{S}$: $z = k - \sqrt{x^2 + y^2}$, $\forall k \in \mathbb{R}$.
   Luego:
   $k = -2 \Rightarrow \; z = -2 - \sqrt{x^2 + y^2}$,
   $k = 0 \Rightarrow \; z = -\sqrt{x^2 + y^2}$,
   $k = 2 \Rightarrow \; z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$.



2.3. Límites y continuidad

Definición 20 *El límite de una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es el número real L; denotado por*

$$lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L.$$

Si y sólo si $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0 / |f(\mathbf{x}) - L| < \epsilon$, *siempre que* $0 < ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| < \delta$.

2.3.1. Propiedades de los límites

Si $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = L$ y $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = M$ entonces se cumple que:

a) $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})] = \lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) + \lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = L + M.$

b) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}[f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})] = \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = LM.$

c) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}[\dfrac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}] = \dfrac{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})}{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})} = \dfrac{L}{M}, \quad M \neq 0.$

La siguiente propiedad es sumamente útil cuando se trata de calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

d) Si la función f puede ser transformada mediante coordenadas polares como $f(r,\theta) = \phi(\theta)\cdot\psi(r)$, donde $\phi(\theta)$ es una función acotada y $\psi(r) \to 0$ cuando $r \to 0$ entonces

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r,\theta) = 0.$$

Esta propiedad es un caso particular de uno más general que enunciaremos a continuación

Proposición 2.3.1 *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida o no en $(0,0)$.*
Si f satisface las siguientes condiciones:

a) f se descompone como el producto de dos funciones $h(x,y)$ y $g(x,y)$ tales que $f(x,y) = h(x,y)\cdot g(x,y)$.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 0$.

c) $g(x,y)$ es acotada.

Entonces, el límite de f existe y es igual a cero, esto es, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Definición 21 Continuidad de una función
Una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua en $\mathbf{x}_0 \in U$ si y sólo sí

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

Definición 22 *Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua en cada punto $\mathbf{x} \in U$ se dice que f es una función continua en U.*

2.3.2. Propiedades

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son continuas en U se cumple:

a) La suma de funciones $(f+g) : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \;/\; (f+g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ es continua.

b) El producto de funciones $(fg) : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \;/\; (fg)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ es continua.

c) El cociente de $(\dfrac{f}{g}) : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \;/\; (f/g)(\mathbf{x}) = \dfrac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}$ es continua en todo punto $\mathbf{x} \in U$ tal que $g(\mathbf{x}) \neq 0$.

2.3.3. Ejercicios resueltos

1. Calcule el límite, si existe, de la función $f(x,y,z) = 3x^2y + 2y^2z^3$ cuando $(x,y,z) \to (4,5,1)$.
   Solución:
   Siendo $f(x,y,z)$ un polinomio, el límite existe y es:

$$\lim_{(x,y,z)\to(4,5,1)} 3x^2y + 2y^2z^3 = 3(4)^2(5) + 2(5)^2(1)^3 = 290.$$

2. Usando la definición de límite, probar que $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(x+y^2)=5$.

   Solución:
   $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(x+y^2)=5 \Leftrightarrow \forall\epsilon>0\ \exists\ \delta>0/|x+y^2-5|<\epsilon$ siempre que $0\leq||(x,y)-(1,2)||<\delta$
   esto último implica que $|x-1|<\delta,\ \wedge\ |y-2|<\delta$.

   Luego, $|x+y^2-5|=|x-1+y^2-4|\leq|x-1|+|y^2-4|=|x-1|+|y-2||y+2|\ldots\ldots.(1)$

   Se determina una cota superior para $|y+2|$, tomando a $\delta=1$ se tiene:

   $$\begin{aligned}|y-2|<\delta\ &\Rightarrow|y-2|<1\\ &\Rightarrow -1<y-2<1\\ &\Rightarrow -5<3<y+2<5\\ &\Rightarrow|y+2|<5\end{aligned}$$

   reemplazando en (1) se tiene:

   $$|x+y^2-5|<|x-1|+|y-2||y+2|<\delta+5\delta=6\delta$$

   entonces $|x+y^2-5|<6\delta$ de modo que $\epsilon=6\delta\Rightarrow\delta=\dfrac{\epsilon}{6}$.
   Por lo tanto, se elige $\delta=\text{mín}\{1,\dfrac{\epsilon}{6}\}$ con lo que se prueba que $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to2}}(x+y^2)=5$.

3. Calcular el límite si existe $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{y(1-\cos x)}{x}$.

   Solución:
   Aplicando propiedades de los límites se tiene: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{y(1-\cos x)}{x}=(\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}y)(\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{1-\cos x}{x})$

   como $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$ entonces $\lim\limits_{y\to0}y(0)=0(0)=0$. Por lo tanto

   $$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{y(1-\cos x)}{x}=0.$$

4. Encontrar el límite, si es que existe, de $f(x,y)=\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ cuando $(x,y)\to(0,0)$.

   Solución:
   Como $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}=\dfrac{0}{0}$, es indeterminado
   entonces usando aproximaciones por curvas

   $$\mathbb{C}_1\ :\ y=x\Rightarrow\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^3}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{x^2+x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x}{2}=0, \tag{2.1}$$

   $$\mathbb{C}_2\ :\ y=x^2\Rightarrow\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^3}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{x^2+x^4}=\lim_{x\to0}\frac{x}{1+x^2}=0, \tag{2.2}$$

   $$\mathbb{C}_3\ :\ y=\operatorname{sen}x\Rightarrow\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^3}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{x^2+\operatorname{sen}^2x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{1+(\frac{\operatorname{sen}x}{x})^2}=0. \tag{2.3}$$

   Probablemente el límite existe. Por definición de límite:

   $$\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}-0\right|=\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|\leq\frac{x^2|x|}{x^2}=|x|<\delta=\epsilon,$$

por tanto para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \epsilon > 0$, tal que $|f(x,y) - 0| < \epsilon$, es decir, el límite existe y es igual a cero.

5. Usando coordenadas polares determine el límite de:$f(x,y) = \dfrac{7x^2y^2}{3x^2+3y^2}$ cuando $(x,y) \to (0,0)$.
Solución:
En coordenadas polares se tiene que $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ por lo que la función $f(x,y)$ se transforma en la función
$f(r,\theta) = \dfrac{7r^2\cos^2\theta r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{3r^2}$
simplificando se tiene $f(r,\theta) = \dfrac{7}{3}r^2\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta$
y como $\phi(\theta) = \cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta$ es acotado por 1 y $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{7r^2}{3} = \lim\limits_{r\to 0}\psi(r) = 0$
entonces por la propiedad d) se deduce que $\lim g(r,\theta) = 0$.
Por tanto, $\lim\limits_{\substack{x\,\to\,0\\ y\,\to\,0}} f(x,y) = 0$.

6. Determinar si f es continua en (0,0), donde:
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|} & \text{Si:} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{Si:} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$
Solución:
De la regla de correspondencia tenemos que $f(0,0) = 0$.
A continuación probaremos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe y es igual a cero.
Tenemos que
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{|x|+|y|} = \frac{0}{0}$$
entonces usando aproximaciones por curvas
$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_1 &: \ y = x \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x.x}{|x|+|x|} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2|x|} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{2} = 0 = L_1 \quad \text{cuando } x > 0,\\
\mathbb{C}_2 &: \ y = x^2 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x.x^2}{x+x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1+x} = 0 = L_2,\\
\mathbb{C}_3 &: \ y = \mathrm{sen}\,x \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x.\,\mathrm{sen}\,x}{x+\mathrm{sen}\,x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\,\mathrm{sen}\,x}{x+\mathrm{sen}\,x} = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,x}{1+\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}} = 0 = L_3, \ \text{para } x > 0.
\end{aligned}$$
como $L_1 = L_2 = L_3 = 0$ parece que el límite de $f(x,y) = 0$. Veamos, por definición:
$$||(x,y) - (0,0)|| < \delta \quad \textit{implica} \quad |x| < \delta \wedge |y| < \delta, \ \text{por otro lado}$$
$$\left|\frac{xy}{|x|+|y|} - 0\right| = \left|\frac{xy}{|x|+|y|}\right| = \frac{|xy|}{|x|+|y|} \leq \frac{|x||y|}{|x|} = |y| < \delta = \epsilon.$$
Luego, existe $\delta = \epsilon$ tal que el límite es cero. Por lo tanto, la función es continua en $(0,0)$.

7. Determinar si la función dada es continua en $(0,0)$
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$
Solución:
Aplicando la definición de continuidad tenemos

a) $f(0,0) = 0$ lo cual significa que existe.

b) Veamos si existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$.

Elegimos la trayectoria $y = x$ entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{2x^2} = 1/2$.

Elegimos la trayectoria $y = 0$ entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$.

Como los límites por dos caminos son distintos, se concluye que el límite no existe. Por lo tanto f no es continua en $(0,0)$.

2.4. Diferenciabilidad

2.4.1. Derivadas parciales

Definición 23 *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función, U abierto. Se define la derivada parcial de f con respecto a su i-ésima variable en el punto $x_0 \in U$ (denotada por $\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}$) como:*

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h} \qquad e_i = (0,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$$

siempre que el límite exista.

En particular, para el caso de una función $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, se tiene

Definición 24 *Si mantenemos fijo a y, y hacemos variar a x. La razón de cambio de $f(x,y)$ con respecto a x, se denota $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y tiene el valor*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}.$$

El valor de este límite (si existe) es la derivada parcial de f con respecto a x.

Definición 25 *Si mantenemos fijo a x y hacemos variar a y. La razón de cambio de $f(x,y)$ con respecto a y, se denota $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ y tiene el valor*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}.$$

El valor de este limite (si existe) es la derivada parcial de f respecto a y.

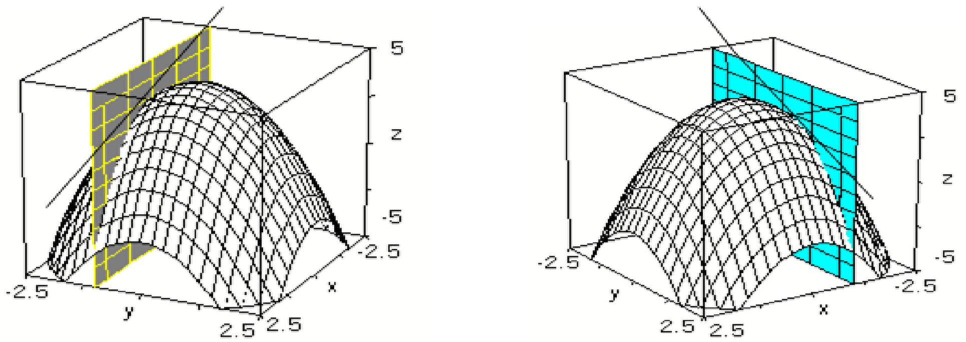
Geométricamente, tenemos que la derivada parcial se interpreta como la pendiente de la recta tangente a la curva que se obtiene de interseptar la gráfica de la función con el plano x_o =constante o y_o =constante.

Observación

Si la función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida en un abierto U, tiene todas las derivadas parciales en el punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$, no implica que f sea continua en $\mathbf{x}$.

Ejemplo La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$



$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

Figura 2.2:

La función f no es continua en $(0,0)$, pues el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe debido a que en la dirección $y=x$ el límite es diferente de 0, $\lim\limits_{\substack{x\,\to\,0\\ x\,=\,y}} f(x,y)=\dfrac{1}{2}\neq f(0,0)=0$. Sin embargo existen las derivadas parciales en ese punto:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0.$$

Las derivadas parciales , son sólo un caso particular de un concepto más general, la derivada direccional. Esto es, las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ nos permiten calcular la pendiente de la recta tangente sólo en las direcciones paralelas a los ejes X y Y respectivamente, mientras que la derivada direccional nos permite calcular la pendiente de la recta tangente en cualquier dirección.

2.4.2. Derivada direccional

Definición 26 *Sea $f:U\subset \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ una función y $x_0\in U$. Sea $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ un vector unitario dado. Se define la derivada de la función f en la dirección del vector $\vec{v}$ como el límite*

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial \vec{v}}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\vec{v})-f(x_0)}{t}$$

siempre que tal límite exista.

Observación
Si la función $f:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, definida en un abierto U, tiene todas las derivadas direccionales en el punto $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in U$, no implica que f sea continua en $\mathbf{x}$.
Ejemplo La función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

no es continua en $(0,0)$, porque $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe debido a que en la dirección $y=x^3$ el límite es diferente de 0, $\lim\limits_{\substack{x\,\to\,0\\ y\,=\,x^3}} f(x,y)=\dfrac{1}{2}\neq f(0,0)=0$. Sin embargo existen las derivadas direccionales:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(hv_1,hv_2)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(v_1^3v_2)}{h^4(v_1^6+v_2^2)}=-\frac{0}{v_2^2}$$

para todo $v_2 \neq 0$ y cuando $v_2 = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$. Esto es, existen todas las derivadas direccionales de f en $(0,0)$ y f no es continua en $(0,0)$.

2.4.3. Diferenciabilidad

Definición 27 *Se dice que la función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, es diferenciable en el punto $P_0 = (x_{1_0}, x_{2_0}, \ldots, x_{n_0}) \in U$, si existen las derivadas parciales de f en P_0.*

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_n}$$

y si el residuo $r(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ definido en la expresión

$$f[P_0 + (h_1, h_2, \ldots, h_n)] = f(P_0) + \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_1} h_1 + \ldots + \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_n} h_n + r(h_1, h_2, \ldots, h_n)$$

satisface:

$$\lim_{(h_1,h_2,\ldots,h_n) \to (0,0,\ldots,0)} \frac{r(h_1, h_2, \ldots, h_n)}{||(h_1, h_2, \ldots, h_n)||} = 0.$$

Proposición 2.4.1 *Si la función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, es diferenciable en el punto $P_0 \in U$, entonces, las derivadas parciales existen y son continuas en dicho punto.*

2.4.4. Gradiente

Definición 28 *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, se define el gradiente de la función f en el punto $P_0 \in U$ como el vector $\nabla f(P_0)$ de $\mathbb{R}^n$ dado por:*

$$\nabla f(P_0) = \left(\frac{\partial f(P_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_n} \right).$$

Ahora veremos una forma más fácil de calcular la derivada direccional.

Proposición 2.4.2 *La derivada direccional de una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en el punto $P_o \in U$, en la dirección del vector unitario $v \in \mathbb{R}^n$, está dada por*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P_o) = \nabla f(P_o) \cdot v.$$

Observación
Como $||v|| = 1$ se puede decir que cuando una función f es diferenciable en un punto P_o, la derivada direccional $\frac{\partial f}{\partial v}(P_o)$ es la componente del vector $Proy_v \nabla f(P_o)$.
Propiedad
Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable. El vector $\nabla f(x_o, y_o)$ es un vector ortogonal a la curva de nivel que pasa por (x_o, y_o).

2.4.5. El diferencial

Definición 29 *La diferencial de una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable, denotada por $df\ (\mathbf{x})$, está dada por:*

$$df(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{i=n}} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x_i}} \mathbf{h_i}.$$

En consecuencia si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ entonces

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f}{\partial y} h_2.$$

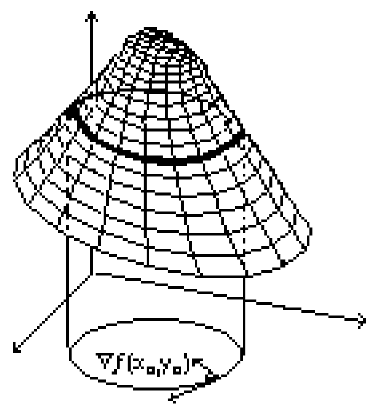


Figura 2.3: El vector gradiente es ortogonal a la curva de nivel

Observación
Si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en un punto (x_o, y_o)

$$f(x_o, y_o) - f(x_o + h_1, y_o + h_2) = df(x_o, y_o) + r(h_1, h_2),$$

donde $\displaystyle\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r(h_1, h_2)}{||(h_1, h_2)||} = 0$, entonces

$$f(x_o + h_1, y_o + h_2) \approx f(x_o, y_o) + df(x_o, y_o).$$

El uso inmediato de la diferencial está en aproximar valores de funciones en ciertas n-adas muy proximas a una n-ada cuyo valor es conocido.

2.4.6. Ejercicios resueltos

1. Por definición de derivada parcial, calcule las derivadas parciales de $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ con respecto de las variables x y y respectivamente.
Solución:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h)^2 + y^2 - (2x^2 + y^2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4xh + 2h^2}{h} = 4.$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2x^2 + (y+h)^2 - (2x^2 + y^2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2yh + h^2}{h} = 2y.$$

2. Sea $G(x,y) = \displaystyle\int_{x^2}^{2y} \ln \operatorname{sen} t \, dt$ halle $\dfrac{\partial G(x,y)}{\partial x}$; $\dfrac{\partial G(x,y)}{\partial y}$
Solución:

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \int_{x^2}^{2y} \ln sentdt = \int_{x^2}^{a} \ln sentdt + \int_{a}^{2y} \ln sentdt & (2.4) \\ &= -\int_{a}^{x^2} \ln sentdt + \int_{a}^{2y} \ln sentdt, \quad x^2 < a < 2y & (2.5) \end{aligned}$$

siendo la función logaritmo natural y la función seno continuas y por tanto la composición de funciones continuas es continua. Aplicando el teorema fundamental del cálculo se deriva con respecto de x y y respectivamente se tiene:

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = -2x \ln \operatorname{sen} x^2, \qquad \frac{\partial G(x,y)}{\partial y} = 2 \ln \operatorname{sen} 2y.$$

3. Una función de costo de uniformes para los trabajadores de una fábrica esta definida por la ecuación

$$C + \sqrt{C} = 12 + q_a\sqrt{9 + q_b^2}$$

donde C denota el costo total de producir q_a unidades del producto A y q_b unidades del producto B. Determine los costos marginales con respecto a q_a y q_b cuando $q_a = 6$ y $q_b = 4$.
Solución:
Siendo la función costo $C = C(q_a, q_b)$ una función en las dos variables especificadas se deriva la ecuación. Así para encontrar la derivada del costo con respecto a q_a se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial q_a} + \frac{1}{2}C^{-1/2}\frac{\partial C}{\partial q_a} &= 0 + \sqrt{9 + q_b^2} \\ \frac{\partial C}{\partial q_a}(1 + \frac{1}{2}C^{-1/2}) &= \sqrt{9 + q_b^2} \\ \frac{\partial C}{\partial q_a} &= \frac{\sqrt{9+q_b^2}}{(1+\frac{1}{2}C^{-1/2})}. \end{aligned}$$

Como el costo marginal está en términos de C y q_b se calcula el valor de C para $q_a = 6$ y $q_b = 4$ usando la ecuación $C + \sqrt{C} = 12 + q_a\sqrt{9 + q_b^2}$ y se obtiene la ecuación de segundo grado $C^2 - 85C + 1764 = 0$ cuya solución es $C = 36$ por lo que

$$\frac{\partial C(6,4)}{\partial q_a} = \frac{5}{13/12} = \frac{60}{13}.$$

Para el costo marginal con respecto a q_b

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial q_b} + \frac{1}{2}C^{-1/2}\frac{\partial C}{\partial q_b} &= 0 + \frac{1}{2}(9 + q_b^2)^{-1/2}(2q_b) \\ \frac{\partial C}{\partial q_b}(1 + \frac{1}{2}C^{-1/2}) &= q_b(9 + q_b^2)^{-1/2} \quad (2.6) \\ \frac{\partial C}{\partial q_b} &= \frac{q_b(9 + q_b^2)^{-1/2}}{(1 + \frac{1}{2}C^{-1/2})}. \quad (2.7) \end{aligned}$$

Como $C(6,4) = 36,$ por lo que

$$\frac{\partial C(6,4)}{\partial q_b} = \frac{192}{65}.$$

4. Por defineción calcule la derivada direccional de la función $f(x, y, z) = 3x + 2y + 7z$ en la dirección del vector $\vec{u} = (3, 2, -5)$.
Solución:
Como el vector $\vec{u}$ no es unitario entonces sea $\vec{v} = \frac{\vec{u}}{||\vec{u}||} = \frac{(3, 2, -5)}{\sqrt{38}}$.

Luego $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \dfrac{1}{||\vec{u}||}\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}$, donde $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(p+t\vec{u})-f(p)}{t}$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \lim_{t\to 0}\frac{f((x,y,z)+t(3,2,-5))-f(x,y,z)}{t} \tag{2.8}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{f((x+3t,y+2t,z-5t))-f(x,y,z)}{t} \tag{2.9}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{3(x+3t)+2(y+2t)+7(z-5t)-3x-2y-7z}{t} \tag{2.10}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{-22t}{t} = \lim_{t\to 0} -22 = -22. \tag{2.11}$$

Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \frac{1}{||\vec{u}||}\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = -\frac{22}{\sqrt{38}}.$$

5. Una ecuación de la superficie de un volcán es $z = 60 - x^2 - 5y^2$ donde las distancias se miden en metros. El eje X apunta al este y el eje Y apunta al Norte. Un hombre está en el punto correspondiente a (5,-1,30).

   a) ¿Cuál es la dirección de la ladera más profunda?
   b) Si el hombre se mueve en dirección del este ¿Está ascendiendo o descendiendo? ¿Cuál es su rapidez?
   c) Si el hombre se mueve en la dirección del nor-oeste ¿Está ascendiendo o descendiendo? ¿Cuál es su rapidez?

   Solución:

   a) $f(x,y) = z = 60 - x^2 - 5y^2$
   $\nabla f(x,y) = (-2x,-10y)$, $\nabla f(5,-1) = (-10,10)$, $||\nabla f|| = 10\sqrt{2}$
   $u = \dfrac{\nabla f}{||\nabla f||} = (\dfrac{-1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}})$. Por lo que se concluye que la dirección de la ladera más profunda es la *dirección* del gradiente.

   b) La dirección $v = (1,0)$, (eje X positivo), coincide con el este. Luego la derivada direccional es:
   $$\frac{\partial f}{\partial u} = (-10,10)\cdot(1,0) = -10$$
   por lo que se concluye que el hombre esta descendiendo con una rapidez de 10 metros por unidad de tiempo.

   c) La dirección nor-oeste, esta dada por la dirección $(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}})$. De donde la derivada direccional es:
   $$\frac{\partial f}{\partial v} = (-10,10)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 10\sqrt{2}$$
   por lo que se concluye que el hombre esta acendiendo con una rapidez de $10\sqrt{2}$ metros por unidad de tiempo, máxima rapidez en el punto $(5,-1,30)$.

6. Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{2x^2+y^2} & \text{Si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{Si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$

   Determinar si $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ son continuas en $(0,0)$. ¿Es f diferenciable en $(0,0)$? **Solución:**
   Consideremos los dos casos para hallar $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.

i) Si $(x,y) \neq (0,0)$ se tiene

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{(2x^2+y^2)2xy-(x^2y)4x}{(2x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(2x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{(2x^2+y^2)x^2-(x^2y)2y}{(2x^2+y^2)^2} = \frac{x^2(2x^2-y^2)}{(2x^2+y^2)^2}.$$

ii) Si $(x,y) = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

De i) y ii) se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^3}{(2x^2+y^2)^2} & \text{Si:} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{Si:} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(2x^2-y^2)}{(2x^2+y^2)^2} & \text{Si:} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{Si:} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$

Análisis de la continuidad de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ en $(0,0)$. Consideramos las curvas:

$$\mathbb{C}_1 \quad : \quad y = x \Rightarrow \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{2x^4}{9x^4} = \frac{2}{9} \neq 0 \quad y$$

$$\mathbb{C}_2 \quad : \quad y = 0 \Rightarrow \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{2x^4}{4x^4} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Por lo que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ no son continuas en $(0,0)$.
En relación a la diferenciablidad de $f(x,y)$ en $(0,0)$ por la proposición 2.4.1 se concluye que la función no es diferenciable.

7. Analice la continuidad y diferenciabilidad de la función $f(x,y) = \sqrt{x^3+y^3}$ en (0,0).
Solución:
La continuidad de $f(x,y)$ queda garantizada desde que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^3+y^3} = 0$ y $f(0,0)=0$, por otro lado
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{3}{2}(x^3+y^3)^{-1/2}x^2 = \dfrac{3x^2}{2(x^3+y^3)^{1/2}}$ que evaluada en el punto $(0,0)$ no existe y además
$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{3}{2}(x^3+y^3)^{-1/2}y^2 = \dfrac{3x^2}{2(x^3+y^3)^{1/2}}$ que evaluada en el punto $(0,0)$ no existe

Por lo tanto la función f no es diferenciable en el punto $(0,0)$.

8. Utilice diferenciales para aproximar el valor de $\ln(\sqrt{4,15}+\sqrt{9,08}-4)$.
Solución:
Elegimos la función $f(x,y) = \ln(\sqrt{x}+\sqrt{y}-4)$ en el punto $\mathbf{x} = (x,y) = (4,9)$ y tomamos $h_1 = 0{,}15$, $h_2 = 0{,}08$ por lo que

$$f(\vec{x}+\vec{h}) \simeq f(\vec{x}) + df(\vec{x}).$$

Es decir:

$$f((4,9)+(0{,}15\ ,\ 0{,}08)) = \ln(\sqrt{4{,}15}+\sqrt{9{,}08}-4) \simeq f(4,9)+df(4,9),$$

como $f(4,9) = \ln 1 = 0$ entonces $f((4,9) + (0{,}15\ ,\ 0{,}08)) \simeq df(4,9)$

$$\begin{aligned} df(4,9) &= \frac{\partial f}{\partial x}(4,9)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(4,9)h_2 && (2.12)\\ &= \left.\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y}-4)}\right|_{(4,9)}(0{,}15) + \left.\frac{1}{2\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y}-4)}\right|_{(4,9)}(0{,}08) && (2.13)\\ &= 0{,}050. && (2.14) \end{aligned}$$

Entonces $ln(\sqrt{4,15} + \sqrt{9,08} - 4) \simeq df(4,9) = 0{,}05$; mientras que el valor obtenido por calculadora es: 0,049226938.

9. Dada la función $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{3x + 2y}$ halle el incremento de f cuando el punto (x,y) de su dominio pasa de $(2,1)$ a (2,05 , 1,1) y compare su resultado con el diferencial de f en (2,1).
Solución:

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x+h) - f(x) = f((2,1) + (0{,}05, 0{,}1)) - f(2,1) && (2.15)\\ &= \frac{(2{,}05)^2 - (1{,}1)^2}{6{,}3 + 2{,}2)} - \frac{3}{4} = 0{,}352058823 - 0{,}375 = -0{,}022941176 && (2.16) \end{aligned}$$

El diferencial de f en $(2,1)$:

$$df(2,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(2,1)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)dy.$$

Realizando los cálculos se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \left.\frac{3x^2 + 4xy + 3y^2}{(3x+2y)^2}\right|_{(2,1)} = \frac{23}{64},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \left.\frac{-2x^2 - 6xy - 2y^2}{(3x+2y)^2}\right|_{(2,1)} = \frac{-22}{64}.$$

Luego

$$df(2,1) = \frac{23}{64}(0{,}05) + \frac{-22}{64}(1{,}1) = -0{,}01640625.$$

Comparando las cantidades se tiene $0{,}01640625 - 0{,}022941176 = 0{,}006534926$ una diferencia de 6 milésimos.

2.5. Vector Normal, Plano tangente

Definición 30 *El vector normal de la superficie S generada por la gráfica de la función diferenciable f, en el punto $P \in S$, está dado por*

$$N_P = (-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1).$$

donde $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f(x,y) = z\}$

Definición 31 *El vector normal de la superficie de nivel generada por la ecuación $F(x,y,z) = 0$ está dada por su vector gradiente F, esto es:*

$$N_P = \nabla F = (\frac{\partial F}{\partial x}(P), \frac{\partial F}{\partial y}(P), \frac{\partial F}{\partial z}(P)).$$

Definición 32 *La ecuación del plano tangente de la superficie generada por la gráfica de la función diferenciable f en el punto $P = (x_o, y_o, f(x_o, y_o))$, está dada por*

$$\frac{\partial f(x_o,y_o)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_o,y_o)}{\partial y}(y - y_0) - (z - f(x_o,y_o)) = 0.$$

Definición 33 *La ecuación del plano tangente de la superficie de nivel generada por la ecuación $F(x,y,z)=0$ en el punto $P=(x_o,y_o,z_o)$ está dada por:*

$$\frac{\partial F(P)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F(P)}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial F(P)}{\partial z}(z-z_o)=0.$$

2.5.1. Ejercicios resueltos

1. Halle la ecuación del plano tangente a la superficie $z=x^2+y^2-4x$ que sea perpendicular a la recta $x=3+4t$, $y=-2t$, $z=1+t$, $t\in\mathbb{R}$.
Solución:
La ecuación de los vectores normales a la superficie $z=x^2+y^2-4x$ estan dados por
$$N=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},-1\right)=(2x-4,2y,-1),$$
el plano tangente es perpendicular a la recta $\mathcal{L}: x=3+4t,\ y=-2t,\ z=1+t,\ t\in\mathbb{R}$
$$\Leftrightarrow\quad (2x-4,2y,-1)//(4,-2,1)\quad\Leftrightarrow\quad\left\{\begin{array}{lcr}2x-4&=&4r\\2y&=&-2r\\-1&=&r\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad (x,y)=(0,1).$$
Luego el plano buscado $\mathcal{P}$ pasa por el punto $(x,y,z(x,y))=(0,1,1)$ y es ortogonal al vector $(2x-4,2y,-1)_{(0,1)}=(-4,2,-1)$ por lo tanto la ecuación del plano es:
$$\mathcal{P}\ :\ -4x+2y-z=1.$$

2. Encuentre los puntos del hiperboloide $x^2-3y^2-2z^2=5$ en los que el plano tangente es paralelo al plano $4x-2y+4z=3$.
Solución:
$$\mathcal{P}_T: N=\nabla F(x_0,y_0,z_0)=(2x_0,-6y_0,-4z_0)\text{ : normal del plano tangente al Hiperboloide}$$
$$\mathcal{P}_1: 4x-2y+4z=3\Rightarrow N_1=(4,-2,4)$$
pero $\mathcal{P}_T//\mathcal{P}_1$: entonces $N=rN_1$ es decir: $(2x_0,-6y_0,-4z_0)=(4r,-2r,4r)$
$$\begin{array}{ccccc}2x_0=4r&;&-6y_0=-2r&;&-4z_0=4r\\x_0=2r&;&y_0=\frac{1}{3}r&;&z_0=-r\end{array}$$
como el punto (x_0,y_0,z_0) pertenece al hiperboloide entonces satisface la ecuación
$\mathcal{H}: x_0^2-3y_0^2-2z_0^2=5$; es decir $4r^2-\frac{3}{9}r^2-2r^2=5$; de donde $r=\pm\sqrt{3}$; por lo tanto los punto son:
$$(2\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{3},-\sqrt{3})\quad\text{y}\quad(-2\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}).$$

3. Determine la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $f(x,y)=3x^2+12x+4y^3-6y^2+5$ que sea paralelo al plano $6x-3y-z=3$.
Solución:
Un vector normal a la superficie $z=3x^2+12x+4y^3-6y^2+5$ en un punto cualquiera $P_0=(x,y,f(x,y))$ está dado por:
$$N_{P_0}=(6x+12,12y^2-12y,-1);$$
N_{po} debe ser paralelo al plano dado $6x-3y-z=3$; es decir
$(6x+12,12y^2-12y,-1)\,//\,(6,-3,-1)$, de aquí
$(6x+12,12y^2-12y,-1)=\lambda(6,-3,-1)$, resolviendo el sistema $\left\{\begin{array}{rcl}6x+12&=&6\lambda\\12y^2-12y&=&-3\lambda\\-1&=&-\lambda\end{array}\right.$

tenemos que $\lambda = 1$, $x = -1$, $y = \frac{1}{2}$, así; el punto donde el plano tangente es paralelo al plano dado es: $P_0 = (-1, \dfrac{1}{2}, f(-1, \dfrac{1}{2})) = (-1, \dfrac{1}{2}, -5)$ con vector normal $N_{P_0} = (6, -3, -1)$. Por lo tanto la ecuación del plano tangente a $z = f(x, y)$ en P_0 es:

$$12x - 6y - 2z + 5 = 0.$$

4. Halle la ecuación del plano tangente al elipsoide $x^2 + 2y^2 + z^2 = 2$ en los puntos de intersección de éste con la recta: $\begin{cases} x = 3t, \\ y = 2t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = t, \end{cases}$

   Solución:
   Reemplazando los valores de x, y, z de la ecuación de la recta en la ecuación del elipsoide, obtenemos la ecuación $18t^2 = 2$ de donde $t = \pm 1/3$. Reemplazando estos valores de t en el elipsoide o en la recta, obtenemos los puntos de intersección:

   $$P_1 = (1, 2/3, 1/3), \qquad P_2 = (-1, -2/3, -1/3),$$

   calculando un vector normal $n(x, y, z) = (2x, 4y, 2z)$ en P_1 y P_2 tenemos

   $$N_{P_1} = (2, 8/3, 2/3), \qquad N_{P_2} = (-2, -8/3, -2/3),$$

   luego la ecuación de los planos tangentes al elipsoide en P_1 es: $3x + 4y + z = 6$ y en P_2 es: $3x + 4y + z = -6$.

5. Halle la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2 - 6y$ que es perpendicular al vector $(2, -4, -1)$.

   Solución:
   El vector normal a la superficie $z = x^2 + y^2 - 6y$ en cualquier punto es $N_P = (-\dfrac{\partial z}{\partial x}, -\dfrac{\partial z}{\partial y}, 1) = (-2x, -2y + 6, 1)$ que es paralelo al vector $(2, -4, -1)$ entonces $N_P // (2, -4, -1)$ y $(-2x, -2y + 6, 1) = \lambda(2, -4, -1)$ resolviendo esta última ecuación se obtiene $\lambda = -1$ $x = 1$ y $y = 1$ por lo que $z(1, 1) = -4$ es decir se obtiene el punto $P_0 = (1, 1, -4)$ y por tanto la ecuación del plano tangente a la superficie es: $((x, y, z) - (1, 1, -4)) \cdot (2, -4, -1) = 0$; es decir $2x - 4y - z = 2$.

6. Sea el centro de la esfera $C = (3, 4, 5)$ que pasa por el origen de coordenadas. Halle la ecuación del plano tangente en el origen y de su plano paralelo.

   Solución:
   Siendo el origen un punto de la esfera de centro $C = (3, 4, 5)$ se debe cumplir $(0 - 3)^2 + (0 - 4)^2 + (0 - 5)^2 = r^2$ de donde $r = \sqrt{50}$ luego la ecuación de la esfera es:

   $$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 = (\sqrt{50})^2$$

   y el vector normal a la superficie es:

   $$N_P(0, 0) = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}) = (2(x - 3), 2(y - 4), 2(z - 5))|_{(0,0,0)} = (-6, -8, -10).$$

   Por lo que la ecuación del plano tangente en el origen es:

   $$((x, y, z) - (0, 0, 0)) \cdot (-6, -8, -10) = 0$$

   de donde se obtiene

   $$3x + 4y + 5z = 0.$$

   Para el punto opuesto seguimos en la dirección del radio dos veces, obteniendo el punto $P_2 = 2(3, 4, 5) = (6, 8, 10)$ y la ecuación del plano tangente en este punto es: $(x - 6, y - 8, z - 10) \cdot (-6, -8, -10) = 0$ y se obtiene

   $$3x + 4y + 5z = 100.$$

2.6. Derivadas parciales de orden superior

Definición 34 *Las derivadas de segundo orden de la función $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se obtienen a partir de las derivadas parciales de primer orden $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en la siguiente forma:*

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

De estas cuatro derivadas parciales de segundo orden se pueden obtener 8 derivadas parciales de tercer orden derivando como en el caso anterior con respecto de x y con respecto de y respectivamente a cada una de las anteriores derivadas parciales y así sucesivamente puede encontrar las derivadas parciales de orden n.

2.6.1. Ejercicios resueltos

1. Encuentre las derivadas parciales de segundo orden de la función $f(x, y) = e^{x^2} + y^3$
   Solución:
   Se tiene $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{x^2} + y^3$ y también $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2e^{x^2} + y^3$ luego:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(2xe^{x^2+y^3}) = 2e^{x^2} + y^3 + 4x^2e^{x^2} + y^3 = 2e^{x^2+y^3}(1 + 2x^2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial x}(3y^2e^{x^2+y^3}) = 6xy^2e^{x^2} + y^3,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial y}(2xe^{x^2+y^3}) = 6xy^2e^{x^2} + y^3.$$

   Observe que estas dos últimas derivadas parciales de segundo orden tienen el mismo valor ¿A qué se debe?
   y finalmente

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial x}(3y^2e^{x^2+y^3}) = 6ye^{x^2} + y^3 + 9y^4e^{x^2+y^3} = 3ye^{x^2+y^3}(2 + 3y^3e^{x^2+y^3}).$$

2. Constate que la función $u = (x - at)^2 + (x + at)^2$ satisface la ecuación del calor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

   Solución:
   Hallando sus derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -2a(x - at) + 2a(x + at)^2 = 4a^2t$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(x - at) + 2(x + at)^2 = 4x$$

   luego las derivadas de segundo orden son: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4a^2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4$. Por lo que se verifica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

2.7. Ejercicios propuestos

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y, z) = (x-y)^2 + z^2$.Halle $f(1, 0, 1)$; $f(-1, -1, 0)$.¿ Qué puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ son tales que $f(x, y, z) = 0$?.
   Rpta. 2; 0; $\{\ r(1, 1, 0);\ \ r \in \mathbb{R}\}$

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x + 1, y - 1) = x^2 - y^2$.Halle $f(-2, -1)$; $f(-1, y)$;
   $f(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$.
   Rpta.$9; 3 - 2y - y^2;\ (x + x)(y - x - 2xy)/x^2y^2$

3. La función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es tal que $f(x - y, x + y) = x^2 + y^2$.Determine $f(3, 2)$; $f(x, 1)$; $f(5, y)$.Rpta. $13/2$; $(x^2 + 1)/2$; $(y^2 + 25)/2$

4. La función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es tal que $f(x - y, \frac{y}{x}) = x^2 - y^2$. Determine $f(x, y)$.
   Rpta.$x^2(y + 1)/(1 - y)$

5. Describa el dominio natural de la función $z = f(x, y)$ y haga un esquema en el que represente el dominio en el plano XY.

   a) $f(x, y) = \sqrt{x + y^2}$ Rpta.$\{(x, y)/x \geq -y^2\}$
   b) $f(x, y) = \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y}$ Rpta.$\{(x, y)/y \geq -x \wedge y \leq x\}$
   c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ Rpta.$\{(x, y)/y \leq x \wedge y \geq -x\} \cup \{(x, y)/y \leq -x \wedge y \geq x\}$
   d) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ Rpta.$\{(x, y)/x^2 + y^2 \leq 4\}$
   e) $f(x, y) = \sqrt{\ln(2 + x - y)}$ Rpta.$\{(x, y)/y \leq x + 1\}$
   f) $f(x, y) = \ln(x^2 + 4y^2 - 4)$ Rpta.$\{(x, y)/x^2 + 4y^2 > 4\}$
   g) $f(x, y) = \ln(y \ln(1+x+y)$Rpta.$\{(x, y)/y > 0 \wedge x > -y\} \cup \{(x, y)/y < 0 \wedge -y-1 < x < -y\}$
   h) $f(x, y) = arcsen(2x - y)$ Rpta.$\{(x, y)/2x - 1 \leq y \leq 2x + 1\}$
   i) $f(x, y) = \arccos(y^2 + x - 1)$ Rpta.$\{(x, y)/ - y^2 \leq x \leq 2 - y^2$
   j) $f(x, y) = arcsen(\frac{x}{x-y})$ Rpta.$\{(x, y)/y \geq 0 \wedge y \geq 2x\} \cup \{(x, y)/y \leq 0 \wedge y \leq 2x\}$
   k) $f(x, y) = \ln(sgn(x^2 + y^2 - 1)$ Rpta.$\{(x, y)/x^2 + y^2 > 1\}$

6. Describa las curvas de nivel de las funciones indicadas. Haga una gráfica mostrando alguna de estas curvas.

(a) $f(x, y) = y^2 + x^2$	(b) $f(x, y) = x^2 - y^2$
(c) $f(x, y) = 3x - 2y$	(d) $f(x, y) = x^2 - y$
(e) $f(x, y) = xy$	(f) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13$
(g) $f(x, y) = 4x^2 + y^2$	(h) $f(x, y) = y - senx$
(i) $f(x, y) = x - \|y\|$	(j) $f(x, y) = y + \cos x$
(k) $f(x, y) = \frac{2x}{x^2+y^2}$	(l) $f(x, y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$

7. Describa la gráfica de las siguientes superficies en $\mathbb{R}^3$:

(a)	$z = 3$	Rpta. Plano paralelo al plano XY
(b)	$y = 3$	Rpta. Plano paralelo al plano XZ
(c)	$z = 6 - 2x - 3y$	Rpta. Plano
(d)	$z = 2 - x^2 - y^2$	Rpta. Paraboloide
(e)	$z = x^2 + y^2 - 1$	Rpta. Paraboloide
(f)	$x^2 + y^2 - 4y + z^2 = 4$	Rpta. Esfera de centro en $(0, 2, 0)$
(g)	$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$	Rpta. Semiesfera
(h)	$z = \sqrt{x^2 + y^2}$	Rpta. Cono (parte superior)
(i)	$x^2 + z^2 = 4$	Rpta. Cilindro circular recto
(j)	$x^2 + y^2 - 4y = 4$	Rpta. Cilindro circular recto

8. Describa las superficies de nivel de las funciones indicadas. Haga una gráfica mostrando alguna de estas superficies.

(a)	$f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$	Rpta. Paraboloides
(b)	$f(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2}$	Rpta. Conos

9. Demuestre utilizando la definición de límite que:

$a)$ $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} 3x - 4y = -6$ *Rpta.*$\delta = \varepsilon/7$

$b)$ $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-4)} 3x - y^2 = -7$ Rpta.$\delta = mín\{\varepsilon/12, 1\}$

$c)$ $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,1)} x^2 + 2y = 6$ Rpta. $\delta = mín\{\varepsilon/7, 1\}$

$d)$ $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,-1)} 4x^2 - 3y^2 = 13$ Rpta. $\delta = mín\{\varepsilon/29, 1\}$

10. Utilice coordenadas polares para concluir que el límite de $f(x, y)$ cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$ existe y vale 0 :

$$(a) f(x, y) = \frac{y^3}{x^2 + y^2} \qquad (b) \quad f(x, y) = \frac{3x^3y^2}{x^2 + y^2}$$
$$(c) f(x, y) = \frac{5x^2y^2}{3x^2 + 3y^2} \qquad (d) \quad f(x, y) = \frac{x^3y^4}{x^4 + y^4}$$

11. Para cada una de las funciones dadas, demuestre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ no existe

$$(a) \quad f(x, y) = \tfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \qquad (b) \quad f(x, y) = \frac{x^2y}{x^3 + y^3}$$
$$(c) \quad f(x, y) = \frac{xy^2}{y^4 + x^2} \qquad (d) \quad f(x, y) = \frac{2xy^4}{x^5 + 6y^5}$$

12. Para cada una de las funciones dadas, demuestre que $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x, y, z)$ no existe

$$(a) \quad f(x, y, z) = \frac{x + y + z}{x - y - z} \qquad (b) \quad f(x, y, z) = \frac{2x^2 + y^2 - z^2}{x^2 - y^2}$$
$$(c) \quad f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^3 + y^3 + z^3} \qquad (d) \quad f(x, y, z) = \frac{x^2z^3y}{x^6 + \ z^6}$$

13. Calcule los límites indicados.

$a)$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3}{x^2 + y^2}$ Rpta,0 *b*) $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,1)} \dfrac{x^2y-4y-x^2+4}{xy+2y-x-2}$ Rpta. -4

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{(y^2+2y-3)(1-\cos x)}{x^2(y-1)}$ Rpta.2

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \lim \dfrac{5x^2y^2}{3x^2+y^2}$ Rpta.0

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(1-\cos 2x)(\cos 3y-1)}{2x^2y^2}$ Rpta. $-9/2$

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} e^{2\ln x}+e^{3\ln(y+1)}-x+2y$ Rpta.12

14. Analice la continuidad de las siguientes funciones.

a) $f(x,y)=\dfrac{x^2+4y^2}{x^2-4y^2}$ Rpta. Continua en $\{(x,y)/x\neq \pm 2y\}$

b) $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ Rpta. Continua en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$

c) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}$ Rpta. Continua en $\mathbb{R}^2$

d) $f(x,y)=\dfrac{sen(x+y)}{x+y}$ Rpta.Continua en $\{(x,y)/x\neq -y\}$

e) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^4+3y^4} & si \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & si \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$ Rpta.Continua en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$

f) $f(x,y)=\begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2} & si \quad x^2+y^2\leq 1 \\ 0 & si \quad x^2+y^2>1 \end{cases}$ Rpta.Continua en $\mathbb{R}^2$

g) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{6x^3y^3}{x^4+7y^4} & si \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$ Rpta.Continua en $\mathbb{R}^2$

h) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{(1+4x)(1+6y)}-1}{2x+3y} & si \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & si \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$ Rpta.Continua en $\mathbb{R}^2$

15. Utilice la definición de derivada parcial para obtener las derivadas parciales de las funciones indicadas:

(*a*) $f(x,y)=2x^2+3xy$ Rpta. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=4x+3y \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}=3x$

(*b*) $f(x,y)=x^3-2xy+y^2$ Rpta. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2-2y \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}=-2x+2y$

(*c*) $f(x,y)=senx^2+\cos y$ Rpta. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x\cos x^2 \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}=-seny$

(*d*) $f(x,y,z)=x^2-3xz+y$ Rpta. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x-3z \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}=1, \dfrac{\partial f}{\partial z}=-3x$

(*e*) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{z}$ Rpta. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-\dfrac{1}{x^2y} \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{1}{xy^2}, \dfrac{\partial f}{\partial z}=-\dfrac{1}{z^2}$

16. Utilice reglas de derivación para obtener las primeras derivadas parciales de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = (2x^2+3xy)^3$

(b) $f(x,y) = \dfrac{x^2+3xy^2-1}{2x^3y-xy^3+2}$

(c) $f(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$

(d) $f(x,y) = x^2 sen^3 xy$

(e) $f(x,y) = x^{3y}$

(f) $f(x,y,z) = e^{xyz} sen(xz)\cos(3yz)$

(g) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^3z^2}$

(h) $f(x,y) = \ln \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$ $\quad$ $Rpta. \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad$ $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$

(i) $f(x,y) = e^{x/y} - e^{y/x}$

(j) $f(x,y) = arcsen(x+y)$

(k) $f(x,y) = arctg(\frac{y}{x})$

(l) $f(x,y) = arctg\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$ $\quad$ $Rpta. \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2}{x\sqrt{x^4-y^4}}$ $\quad$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{x^4-y^4}}$

(m) $f(x,y) = arcsen(\frac{y}{1+x})$

(n) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)\ln(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$

(o) $f(x,y) = arctg(\ln xy)$

(p) $f(x,y) = tg^3(\ln xy^2)$

(q) $f(x,y) = \int_x^y \ln sent dt$

(r) $f(x,y) = \int_{xy}^{x+y} e^t dt$

17. Verifique si la función dada satisface la ecuación indicada:

(a) $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$; $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 1$

(b) $w = sen(\frac{x+y}{z})$, ; $x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z} = 0$

(c) $z = \frac{x^2+y^2}{x+y}$; $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$

(d) $z = y^2 + tg(ye^{1/x})$; $x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2y^2$

(e) $z = xy + xe^{y/x}$; $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$

(f) $w = \frac{z}{x}\ln(\frac{y}{x})$; $x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z} = 0$

18. Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Determine si $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ son continuas en $(0,0)$. ¿Es diferenciable en $(0,0)$?

19. Demuestre que $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}$ existen y que f no es diferenciable en $(0,0)$, para

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y^2}{(x^4+y^4)} & \text{Si:} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{Si:} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

20. Demuestre que $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}$ existen y que f no es diferenciable en $(0,0)$, para

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{(x^2+y^4)} & \text{Si:} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{Si:} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

21. $a)$ Determine la ecuación de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $z = x^2y^3 + 4x^2$ con el plano $x = 3$ en el punto en el que $y = 1$.
Rpta. $\frac{z-45}{27} = y - 1$; $x = 3$

b) Determine la ecuación de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $z = x^3y + x$ con el plano $y = 1$ en el punto en el que $x = 2$.
Rpta. $\frac{z-10}{13} = x - 2$; $y = 1$

22. a) Determine la ecuación de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $z = 9 - x^2 - y^2$ con el plano $x = 1$ en el punto en el que $y = 2$. Rpta. $\frac{z-4}{-4} = y - 2$; $x = 1$

    b) Determine la ecuación de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $z = \sqrt{36 - x^2 - 4y^2}$ con el plano $y = 2$ en el punto en el que $x = 2$. Rpta. $\frac{z-4}{-1/2} = x - 2$; $y = 2$

23. Una lámina de metal plana se encuentra en el plano XY y la temperatura T en (x, y) está dada por $T(x, y) = 10(2x^2 + y^2)^2$ donde T se mide en grados y x, y en centímetros. Calcule la tasa de cambio o variación de T con respecto a la distancia en el punto $(1, 2)$ en la dirección (a) del eje X.(b) del eje Y. Rpta. $a)$ $480^o/cm$, $b)$ $480^o/cm$

24. Un objeto se encuentra en un sistema de coordenadas rectangulares y la temperatura T en el punto $P(x, y, z)$ está dado por $T = 4x^2y - y^2x + xyz^2$, donde T se mide en grados y x, y, z en centímetros. Calcule la razón de cambio de T con respecto a la distancia en el punto $P(1, -1, 1)$ en la dirección (a) del eje X (b) del eje Y (c) del eje Z. Rpta. -10, 7, -2

25. En el análisis de algunos circuitos eléctricos se utiliza la fórmula $I = V/\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$ donde I es la corriente, V la tensión o voltaje, R la resistencia, L la inductancia y ω una constante positiva. Calcule e interprete $\frac{\partial I}{\partial R}$, $\frac{\partial I}{\partial L}$.Rpta. $\frac{\partial I}{\partial R} = -VR/(R^2+L^2\omega^2)^{3/2}$, $\frac{\partial I}{\partial L} = -VL\omega^2/(R^2+L^2\omega^2)^{3/2}$.

26. Utilice la definición para obtener la derivada direccional de la función dada en el punto P.

    (a) $f(x, y) = 2x^2 + 3xy$; $P = (2, 1)$ en la dirección $v = (-1, 2)$ Rpta.$\frac{\sqrt{5}}{5}$
    (b) $f(x, y, z) = x^2y - y^2x - z^2$; $P = (1, 2, -3)$ en la dirección $v = (-1, 2, 1)$ Rpta.0

27. Determine el gradiente de f en los puntos indicados

    (a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; $P = (2, 1)$ Rpta.$(2/\sqrt{5},\ 1/\sqrt{5})$
    (b) $f(x, y, z) = z^2e^{3x}seny$; $P = (0, \pi/2, -3)$ Rpta. $(27, 0, -6)$
    (c) $f(x, y, z) = sen(2x)\cos^2 y\ tgz$; $P = (0, \pi, \pi/4)$ Rpta. $(2, 0, 0)$
    (d) $f(x, y, z) = x^z + z^x + y^z + z^y$; $P = (2, 1, 1)$ Rpta. $(2, 2, 6)$

28. Halle el ángulo entre los gradientes de la función :

    (a) $f(x, y) = \ln(\frac{y}{x})$ en los puntos $P = (1/2, 1/4)$ y $Q = (1, 1)$ Rpta. $\cos\alpha = 3/\sqrt{10}$
    (b) $f(x, y, z) = xy^2z^3$ en los puntos $P = (1, 1, 1)$ y $Q = (1, -1, -1)$ Rpta. $\cos\alpha = 6/7$

29. Encuentre la razón de cambio máxima de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

    (a) $f(x, y, z) = x^2y + y^2z$ $P = (2, 1, 3)$ Rpta. $\sqrt{117}$
    (b) $f(x, y, z) = (x + y)^2 + xy - z^2 + 2z$ $P = (0, 1 - 2)$ Rpta. 7

30. Calcule la derivada direccional de f en el punto P y en la dirección $v = \overrightarrow{PQ}$.indicadas.

    (a) $f(x, y) = e^x arctg\ y$; $P = (0, 2)$; $Q = (-2, 5)$
    (b) $f(x, y, z) = (x/y) - (y/z)$; $P = (0, -1, 2)$; $Q = (3, 1, -4)$
    (c) $f(x, y, z) = \sqrt{xy}senz$; $P = (4, 9, \pi/4)$; $Q = (6, 12, -2 + \pi/4)$
    (d) $f(x, y, z) = z^2arctg(x + y)$; $P = (0, 0, 4)$; $Q = (6, 0, 5)$

31. Encuentre un vector unitario u en el punto dado P tal que $\frac{\partial\ f(P)}{\partial u}$ alcance su valor máximo.

    (a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$; $P = (1, 2)$; Rpta. $(\frac{4}{\sqrt{41}}, \frac{5}{\sqrt{41}})$
    (b) $f(x, y, z) = (x + \ln y)/z$; $P = (2, 1, 4)$; Rpta. $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3})$
    (c) $f(x, y, z) = x^3 - xyz + y^2z$ $P = (1, -1, 2)$ Rpta. $(\frac{5}{\sqrt{65}}, \frac{-6}{\sqrt{65}}, \frac{2}{\sqrt{65}})$

32. El potencial eléctrico V en un punto $P(x,y,z)$ de un sistema de coordenadas rectangulares es $V = x^2 + 4y^2 + 9z^2$. Calcule la tasa de cambio de V en $P(2,-1,3)$ en la dirección de P al origen. Encuentre la dirección que produce la máxima tasa de cambio de V en P. ¿Cuál es la tasa máxima de cambio en P.

    Rpta. $178/\sqrt{14}$, $(4,-8,54)$, $\sqrt{2996}$.

33. Su ubicamos un móvil en el punto $P = (-1,5,8)$ sobre una superficie de ecuación $z = 74 - x^2 - 7xy - 4y^2$. El eje Y señala hacia el norte y el eje X hacia el este, y las distancias se miden en metros. (a) Si el móvil va hacia el sur, ¿está subiendo o bajando? ¿Aqué velocidad? *Rpta.* sube a $33m/s$

    (b) Si el móvil va hacia el nor oeste,¿está subiendo o bajando? ¿Aqué velocidad? *Rpta.* no sube ni baja.

34. Sea la función $f(x,y,z) = x^2 + \cos(x+y) - z^2$, halle la derivada direccional de f en el punto $P = (1,-1,1)$, en la dirección de un vector ortogonal a la superficie de nivel de f que contiene al punto $(1,-1,1)$. *Rpta.* $2\sqrt{2}$

35. Hallar la derivada direccional de la función $f(x,y,z) = x^2+xy+y+z^2$ en el punto $(1,2,1)$ y en la dirección de un vector ortogonal a la superficie $z = 2x^2 - 3y^2 + 1$ en $(2,1,6)$.*Rpta*,$18/\sqrt{101}$.

36. Si $f(x,y) = \sqrt{169 - x^2 - y^2}$,encuentre la dirección en el punto $(3,4)$ de modo que la derivada direccional de f tenga el valor cero. *Rpta.* $\pm\frac{1}{5}(4,-3)$

37. Si $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$. Encuentre la dirección en el punto $(2,1)$ de modo que la derivada direccional de f tenga el valor cero. *Rpta.* $\pm\frac{1}{\sqrt{145}}(9,-8)$

38. La temperatura distribuida en el espacio está dado por la función $f(x,y) = 10 + 6\cos x \cos y + 3\cos 2x + \cos 3y$. En el punto $(\pi/3, \pi/3)$, encontrar la dirección de mayor crecimiento de la temperatura y la dirección de mayor decrecimiento en la temperatura. *Rpta.*crecimiento en $(\frac{-9\sqrt{3}}{2}, \frac{-3\sqrt{3}}{2})$ y decrecimiento en $(\frac{9\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$

39. Halle la derivada direccional de $f(x,y,z) = x^2yz^3$ en el punto $(1,1,-1)$ y en la dirección de la tangente a la curva de intersección de la superficie $z = 3x^2 + y^2 + 1$ con el plano $x = 2$ en el punto $(2,-1,14)$. *Rpta.* $-\frac{7}{\sqrt{5}}$

40. Si C es la curva de intersección de las superficies $S_1 : z = x^2 + 2y^2$ y $S_2 : z = 2x^2 - 4y^2 + 2$. Halle la derivada direccional de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + \cos \pi xy$ en el punto $(2,1,6)$ a lo largo de la curva C. *Rpta.* $\frac{-206}{\sqrt{266}}$

41. Halle la derivada direccional de la función $z = x^2 - xy - 2y^2$ en el punto $P = (1,2)$ y en la dirección que forma con el eje OX un ángulo de 60^o. *Rpta.* $-9\sqrt{3}/2$

42. Halle la derivada direccional de la función $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ en el punto $P = (1,1)$ y en la dirección de la bisectriz del primer ángulo coordenado.. *Rpta.*$\sqrt{2}/2$

43. Calcule la derivada direccional de la función $f(x,y) = xseny$ en el punto $(3,0)$ en la dirección del vector tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $(1,1)$. Rpta.$\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$.

44. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = x^2 + y^2$,

    a) Determine los puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ en que el gradiente de esta función forma un ángulo de $\pi/4$ con el vector $u = (1,1)$. *Rpta.*$\{(x,y)/x = 0 \vee y = 0\}$

    b) Determine los puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ donde el gradiente de esta función tiene la misma dirección del vector $u = (-3,-4)$. *Rpta.*$\{r(-3/2,-2),\, r \in \mathbb{R}\}$

c) Determine los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ donde el gradiente de esta función es perpendicular al vector $u = (-1, 1)$. *Rpta.*$\{(x, y)/x = y\}$

45. Determine un vector normal a cada una de las siguientes superficies en $\mathbb{R}^3$ (superficies de nivel de funciones $u = F(x, y, z)$) en los puntos indicados.

(*a*) $x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + xyz - 4 = 0$ en el punto $P = (1, 1, 1)$ *Rpta* $(1, 1, 1)$

(*b*) $x^y + x^z + z^x - 3xyz = 0$ en el punto $P = (1, 1, 1)$ *Rpta* $(1, 3, 2)$

46. Determine el (los) punto(s) de la gráfica de cada una de las superficies de modo que el vector N sea un vector normal.

(*a*) $2x^2 + 3xy + 5y^2 - z = 0$ $N = (3, 2, -3)$ *Rpta* $(8/31, -1/93, 35/279)$

(*b*) $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z - 11 = 0$ $N = (5, 4, 3)$ *Rpta.*$(2, 2, -1)$ y $(-2, 0, 1/5)$

47. Determine la ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto P.

(*a*)	$4x^2 + y^2 + 2z^2 = 26$;	$P = (1, -2, 3)$	*Rpta* : $2x - y + 3z = 13$
(*b*)	$z(x + y) = x$;	$P = (2, -1, 2)$	*Rpta.* $x + 2y + z = 2$
(*c*)	$y = e^x \cos z$	$P = (1, e, 0)$	*Rpta.* $ex - y = 0$
(*d*)	$z = e^{3x} sen(3y)$	$P = (0, \pi/6, 1)$	*Rpta*,$3x - z = -1$
(*e*)	$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 4$	$P = (4, 1, 1)$	*Rpta.*$x + 2y + 2z = 8$
(*f*)	$x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = 14$	$P = (-8, 27, 1)$	*Rpta*,$3x - 2y - 6z + 84 = 0$

48. Determine la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2$ que sea paralelo al plano $3x + 8y - 5z = 10$. *Rpta*,$3x + 8y - 5z = 73/20$.

49. Determine la ecuación de los planos tangentes a la superficie $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2yz - 12x = 0$ que sean paralelos al plano $z = 0$. *Rpta.*$z = -3,\ z = 5/3$

50. Determine la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + xy$ que sea perpendicular a los planos $x + y - z = 3$ y $2x - y + z = 4$. *Rpta.*$y + z = 1$

51. Determine la ecuación del plano tangente a la superficie $z = 3x^2 - 8xy + 5y^2$ en el punto en que la recta normal tenga por vector paralelo a $v = (-1, 0, 2)$ *Rpta*,$56x - 112z + 35 = 0$

52. Halle la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2 - 4x$ que sea perpendicular a la recta $x = 3 + 4t$, $y = -2t$, $z = 1 + t$, $t \in \mathbb{R}$. *Rpta.* $-4x + 2y - z = 1$

53. Determine los puntos de la superficie $x^2 + 5y^2 + 10z^2 = 12$ de modo que el plano tangente sea horizontal. *Rpta.*$(0, 0, \pm\sqrt{6/5})$

53. Halle los puntos del elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ en los que la recta normal que pasa por ellos es perpendicular al plano $4x - 6y + 3z = 7$ *Rpta.*$(\pm 4\sqrt{222}/37, \mp 3\sqrt{222}/37, \pm\sqrt{222}/37)$

54. Determine las ecuaciones de los planos tangentes al elipsoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$ en los puntos de intersección de éste con la recta $x = 3t,\ y = 2t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}$*Rpta*,$3x + 2y + 2z = \pm 14\sqrt{30}/15$

55. Halle las ecuaciones de los planos tangentes a la superficie $z = x^2 + 3y^2$ en los puntos de intersección de ésta con la recta que resulta de la intersección de los dos planos $2x - y - z = 0,\ x + 3y - 4z = 0$. *Rpta.*$z = 0, 2x + 6y - 4z = 1$

56. Los puntos $P = (2, 5, 3)$, $Q = (-1, -2, -3)$ son los extremos del diámetro de una esfera. Halle las ecuaciones de los planos tangentes a la esfera en los puntos P y Q.
. Rpta.$3x + 7y + 6z = 59, 3x + 7y + 6z = -35$

57. Utilice diferenciales para calcular aproximadamente la variación en $f(x, y) = x^2 - 3x^3y^2 + 4x - 2y^3 + 6$ cuando (x, y) varía de $(-2, 3)$ a $(-2{,}02, 3{,}01)$ *Rpta*,7,38

58. Aplique diferenciales para estimar el valor de la expresión dada.
    (a) $\sqrt{(2{,}11)(1{,}99)}$
    (b) $\ln(\sqrt{3{,}98}+\sqrt{9{,}01}-4)$

59. Los lados de un paralelepípedo rectangular miden $3, 4$ y 5 pies, con un error posible de $1/16$ de pulgada. Use diferenciales para estimar el error máximo en el valor calculado de (a) el área de la superficie del paralelepípedo. (b) el volumen de este cuerpo. $Rpta.a)1/4pie^2b)47/192pie^3$

60. Una lata cilíndrica de hojalata, sin tapa, tiene un diámetro de $3pulg$ y una altura de $4\,pulg$.Use diferenciales para calcular aproximadamente la cantidad de material que hay en la lata si ésta tiene un grosor de $0{,}015pulg$.. $Rpta{,}0{,}67pulg^3$

61. Al medir un triángulo se encuentra que los lados tienen longitudes de 50 y $70pulg$ y el ángulo determinado por ellos es de 30^o.Si existen errores posibles de $1/2\,\%$ en la medida de los lados y $1/2$ grado en la del ángulo, halle el máximo error aproximado en la medida del área.
    . Rpta. 2.5 %

62. Halle todas las derivadas parciales de segundo orden de las siguientes funciones:
    (a) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$
    (b) $f(x,y)=x\ln(\frac{y^2}{x})$
    (c) $f(x,y)=arctg(\frac{x+y}{1-xy})$

63. Halle $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$ si $z=sen(xy)$ $Rpta.-x^2y\cos(xy)-2xsen(xy)$

64. Demuestre que cada una de las funciones dadas satisface la ecuación $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ (llamada "Ecuación de Laplace").
    (a) $f(x,y)=x^3-3xy^2$
    (b) $f(x,y)=e^{x^2-y^2}(\cos 2xy+sen2xy)$
    (c) $f(x,y)=\ln(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$
    (g) $f(x,y)=arctg(\frac{y}{x})$

65. Verifique si la función $z=sen(x^2+y^2)$ satisface la ecuación
$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-x\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

66. Verifique si la función $u=(x-at)^2+(x+at)^3$ satisface la ecuación $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

67. Verifique si la función $u=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ satisface la ecuación
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

68. Verifique si la función $u=x\ln(\frac{y}{x})$ satisface la ecuación
$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

69. Verifique si la función $z=arctg(x+2y)+e^{x-2y}$ satisface la ecuación
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$