Derivadas direccionales y gradiente

lunes, 10 de mayo de 2021 07:00

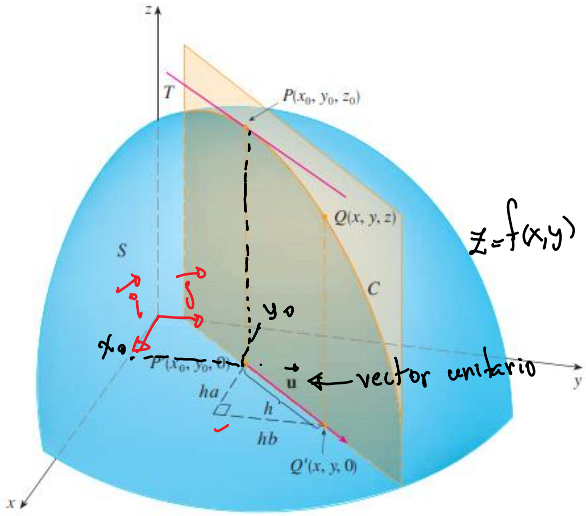
$\|\hat{v}\| = 1$

2.4.2. Derivada direccional

Definición 26 *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in U$. Sea $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ un vector unitario dado. Se define la derivada de la función f en la dirección del vector $\vec{v}$ como el límite*

$$D_{\vec{v}} f(x_0) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial \vec{v}} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\vec{v}) - f(x_0)}{t}$$

siempre que tal límite exista.



Observamos que

1. $$\frac{\partial f}{\partial \vec{i}}(x,y) = \lim_{t \to 0} \frac{f((x,y) + t(1,0)) - f(x,y)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t, y) - f(x,y)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

2. $$\frac{\partial f}{\partial \vec{j}}(x,y) = \lim_{t \to 0} \frac{f((x,y) + t(0,1)) - f(x,y)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x, y+t) - f(x,y)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

2.4.3. Diferenciabilidad

Definición 27 *Se dice que la función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, es diferenciable en el punto $P_0 = (x_{1_0}, x_{2_0}, \ldots, x_{n_0}) \in U$, si existen las derivadas parciales de f en P_0.*

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_n}$$

y si el residuo $r(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ definido en la expresión

$$f[P_0 + (h_1, h_2, \ldots, h_n)] = f(P_0) + \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_1} h_1 + \ldots + \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_n} h_n + \underbrace{r(h_1, h_2, \ldots, h_n)}_{\text{residuo}}$$

satisface:

$$\lim_{(h_1, h_2, \ldots, h_n) \to (0,0,\ldots,0)} \frac{r(h_1, h_2, \ldots, h_n)}{\|(h_1, h_2, \ldots, h_n)\|} = 0.$$

$$\lim_{(h_1, \ldots, h_n) \to (0, \ldots, 0)} \frac{f(P_0 + (h_1, \ldots, h_n)) - f(P_0) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0) h_1 - \ldots - \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0) h_n}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_n^2}} = 0$$

Proposición 2.4.1 *Si la función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, es diferenciable en el punto $P_0 \in U$, entonces, las derivadas parciales existen y son continuas en dicho punto.*

2.4.4. Gradiente

Definición 28 *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, se define el gradiente de la función f en el punto $P_0 \in U$ como el vector $\nabla f(P_0)$ de $\mathbb{R}^n$ dado por:*

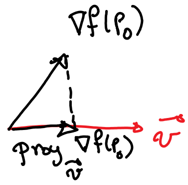
$$\operatorname{grad}(f)(P_0) = \nabla f(P_0) = \left(\frac{\partial f(P_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_n} \right).$$

Ahora veremos una forma más fácil de calcular la derivada direccional.

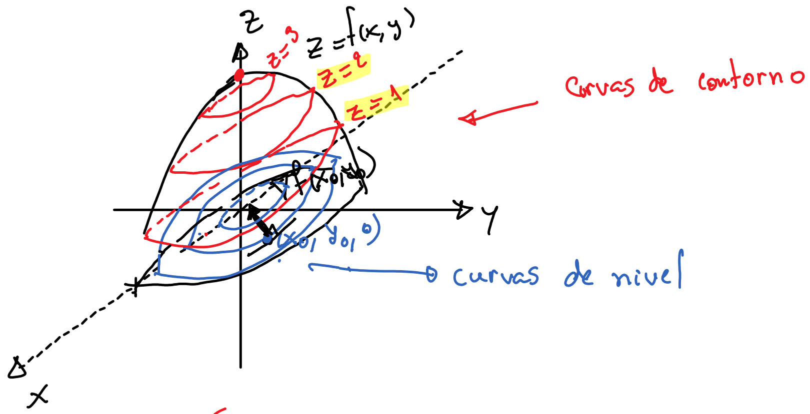
Proposición 2.4.2 *La derivada direccional de una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en el punto $P_o \in U$, en la dirección del vector unitario $v \in \mathbb{R}^n$, está dada por*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P_o) = \underbrace{\nabla f(P_o)}_{\text{vector gradiente}} \bullet \underbrace{v}_{\text{vector unitario}}.$$

Observación
Como $||v|| = 1$ se puede decir que cuando una función f es diferenciable en un punto P_o, la derivada direccional $\dfrac{\partial f}{\partial v}(P_o)$ es la componente del vector $Proy_v \nabla f(P_o)$.



Propiedad
Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable. El vector $\nabla f(x_o, y_o)$ es un vector ortogonal a la curva de nivel que pasa por (x_o, y_o).



Ejercicios

26. Utilice la definición para obtener la derivada direccional de la función dada en el punto P.

(a) $f(x,y) = 2x^2 + 3xy$	; $P = (2,1)$	en la dirección	$v = (-1,2)$	Rpta. $\frac{\sqrt{5}}{5}$
(b) $f(x,y,z) = x^2y - y^2x - z^2$	; $P = (1,2,-3)$	en la dirección	$v = (-1,2,1)$	Rpta. 0

27. Determine el gradiente de f en los puntos indicados

(a) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$	; $P = (2,1)$	Rpta. $(2/\sqrt{5},\ 1/\sqrt{5})$
(b) $f(x,y,z) = z^2 e^{3x} seny$	; $P = (0, \pi/2, -3)$	Rpta. $(27, 0, -6)$

Solución

26 (a)
- Vector dirección: $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2) = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$; $\|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2,1) = \lim_{t \to 0} \frac{f((2,1) + t\vec{u}) - f(2,1)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(2 - \frac{1}{\sqrt{5}}t, 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}t\right) - f(2,1)}{t}$

- $$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2,1) = \lim_{t\to 0} \frac{f((2,1)+t\vec{u}) - f(2,1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(2-\frac{1}{\sqrt5}t,\ 1+\frac{2}{\sqrt5}t\right) - f(2,1)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2\left(2-\frac{t}{\sqrt5}\right)^2 + 3\left(2-\frac{t}{\sqrt5}\right)\left(1+\frac{2}{\sqrt5}t\right) - 2(2)^2 - 3(2)(1)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2\left(4 - \frac{4t}{\sqrt5} + \frac{t^2}{5}\right) + 3\left(2 + \frac{4}{\sqrt5}t - \frac{t}{\sqrt5} - \frac{2}{5}t^2\right) - 14}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2\left(-\frac{4}{\sqrt5}t + \frac{t^2}{5}\right) + 3\left(\frac{3}{\sqrt5}t - \frac{2}{5}t^2\right)}{t} = \lim_{t\to 0} 2\left(-\frac{4}{\sqrt5} + \frac{t}{5}\right) + 3\left(\frac{3}{\sqrt5} - \frac{2t}{5}\right)$$

$$= -\frac{8}{\sqrt5} + \frac{9}{\sqrt5} = \frac{1}{\sqrt5} = \frac{\sqrt5}{5} \text{ //.}$$

27. Calcular el gradiente de

(b) $f(x,y,z) = z^2 e^{3x} seny$; $P = (0, \pi/2, -3)$ Rpta. $(27, 0, -6)$ ✓

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right) = \left(3e^{3x} z^2 \operatorname{sen} y,\ z^2 e^{3x} \cos y,\ 2z e^{3x} \operatorname{sen} y\right)$$

$$\nabla f(0,\pi/2,-3) = \left(3(-3)^2 \cancel{\operatorname{sen}(\pi/2)}^{1},\ (-3)^2 \cancel{\cos(\pi/2)}^{0},\ 2(-3) \cancel{\operatorname{sen}(\pi/2)}^{1}\right) = (27, 0, -6)$$