Solución EXAMEN SIMULACRO

sábado, 15 de mayo de 2021 10:41

Dada la función f(x, y) = x.tany , se pide:

a. Dar las direcciones de máximo y nulo crecimiento de f en el punto P(2,pi/4)

b. Calcular la derivada direccional de f en P en la dirección que forma un ángulo pi/4 con el eje de abscisas.

c. Hallar la aproximación lineal (plano tangente) de f en P.

d. Suponiendo que el error estimado al medir la magnitud "x" es de un 2% y el de "y" un 5% ¿cuál es la estimación del error propagado?

a) Dirección de máx. crecimiento : $\nabla f(x,y) = (\tan y, x\sec^2 y) \Rightarrow \nabla f(2,\pi/4) = (\tan(\pi/4), 2\sec^2(\frac{\pi}{4}))$

$\Rightarrow \nabla f(2,\pi/4) = (1, 2(\sqrt{2})^2) = (1,4)$

Dirección de crecimiento nulo es: $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2,\pi/4) = 0 \Rightarrow \nabla f(2,\pi/4)\cdot(u_1,u_2) = 0$

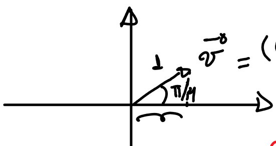
$\Rightarrow u_1 + 4u_2 = 0$

$\Rightarrow u_1 = -4u_2$

$\Rightarrow (u_1, u_2) = (-4u_2, u_2) = u_2(-4,1)$

$\Rightarrow$ la dirección de crecimiento nulo está dado por $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{17}}(-4,1)$

b)

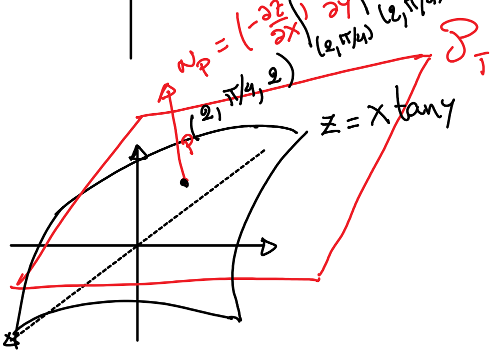


$\vec{v} = (\cos(\frac{\pi}{4}), \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}))$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(2,\pi/4) = \nabla f(2,\pi/4)\cdot(\cos\frac{\pi}{4}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{4})$

$= (1,4)\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{4\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

c)



$\mathcal{P}_T$: $N_p\cdot((x,y,z)-(2,\pi/4,2)) = 0$

$(-1,-4,1)\cdot(x-2, y-\pi/4, z-2) = 0$

$-x+2-4y+\pi+z-2 = 0$

$x+4y-z-\pi = 0$

d) $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 1(0.02)+4(0.05) = 0.22$

Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Determine si $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ son continuas en $(0,0)$. ¿Es diferenciable en $(0,0)$?

1º Si $(x,y) \neq (0,0) \Rightarrow f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2} \Rightarrow$ $\cdot\ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy(x^2+y^2) - x^2y(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$

$x^2+y^2 \qquad\qquad (x^2+y^2)^2 \qquad\qquad (x^2+y^2)^2$

$$\cdot\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2(x^2+y^2) - x^2y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

2° Si $(x,y)=(0,0) \Rightarrow$

$$\cdot\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^2 0}{h^2+0^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

$$\cdot\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{0^2 h}{0^2+h^2} - 0}{h} = 0$$

3°

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} & ; \ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ; \ (x,y)=(0,0) \end{cases} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & ; \ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ; \ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

4° ¿ $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua en $(0,0)$?

i) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

ii)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \underset{\substack{x=r\cos\theta \\ y=r\operatorname{sen}\theta}}{=} \lim_{r\to 0}\frac{2r\cos\theta\,(r\operatorname{sen}\theta)^3}{\big(\underbrace{(r\cos\theta)^2+(r\operatorname{sen}\theta)^2}_{r^2}\big)^2} = \lim_{r\to 0}\frac{2\cancel{r^4}\cos\theta\operatorname{sen}^3\theta}{\cancel{r^4}}$$

$$= \lim_{r\to 0} 2\cos\theta\operatorname{sen}^3\theta = 2\cos\theta . \operatorname{sen}^3\theta \leftarrow$$

El valor de θ no es único por lo tanto NO EXISTE EL LIMITE.

$\therefore \frac{\partial f}{\partial x}$ presenta una discontinuidad inevitable en $(0,0)$.

¿ $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $(0,0)$?

i) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

i)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \underset{\substack{x=r\cos\theta \\ y=r\operatorname{sen}\theta}}{=} \lim_{r\to 0}\frac{r^4\cos^4\theta - (r\cos\theta)^2(r\operatorname{sen}\theta)^2}{r^4}$$

$$= \lim_{r\to 0}\left(\cos^4\theta - \cos^2\theta . \operatorname{sen}^2\theta\right) = \cos^4\theta - \cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta \leftarrow$$

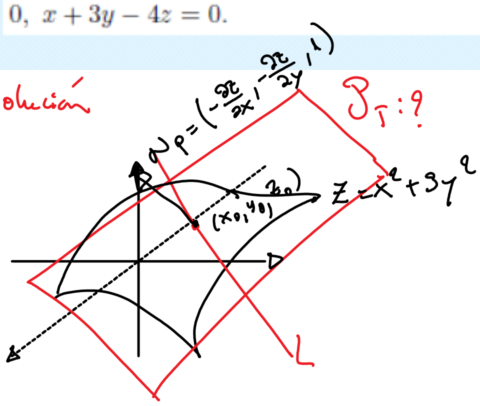
θ no es único por lo tanto NO EXISTE EL LIMITE

$\therefore \frac{\partial f}{\partial y}$ presenta discontinuidad inevitable en $(0,0)$.

5) Como $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ no son continuas en $(0,0) \Rightarrow f$ no es diferenciable en $(0,0)$.

Halle las ecuaciones de los planos tangentes a la superficie $z = x^2 + 3y^2$ en los puntos de intersección de ésta con la recta que resulta de la intersección de los dos planos $2x - y - z = 0$, $x + 3y - 4z = 0$.

Solución



• $L: \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x + 3y - 4z = 0 \end{cases}$

• Vector dirección de L es

$$\vec{v} = (2,-1,-1) \times (1,3,-4) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = (7,7,7) = 7(1,1,1)$$

$\Rightarrow \vec{v}_L = (1,1,1)$

• Un punto de paso de L: si $z = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}$

• $L: (x,y,z) = (0,0,0) + t(1,1,1)$; $t \in \mathbb{R}$

• Intersección de $z = x^2 + 3y^2$ y L:

$$z = x^2 + 3y^2$$
$$t = t^2 + 3t^2 \Rightarrow 4t^2 - t = 0$$
$$t(4t - 1) = 0 \Rightarrow t = 0,\ t = 1/4$$

$\Rightarrow$ los puntos de intersección son $(0,0,0)$ y $(1/4, 1/4, 1/4)$

• Planos tangentes:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial x}(1/4, 1/4) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 6y \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1/4, 1/4) = \frac{3}{2}$$

$P_{T_1}: (0,0,1) \cdot ((x,y,z) - (0,0,0)) = 0$

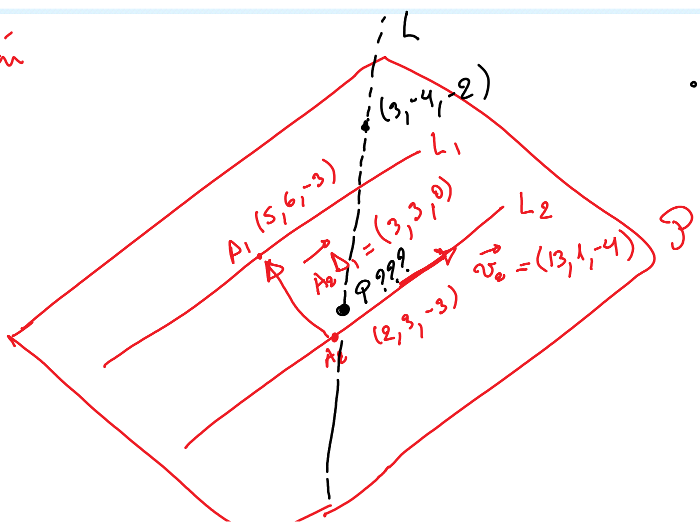
$z = 0$ //

$P_{T_2}: \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right) \cdot \left((x,y,z) - \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)\right) = 0$

$-\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{2}\left(y - \frac{1}{4}\right) + z - \frac{1}{4} = 0$ //

Hallar la proyección del punto $C(3, -4, -2)$ sobre el plano que pasa por las dos rectas paralelas $L_1 : \frac{x-5}{13} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-4}$ y $L_2 : \frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{-4}$.

Solución



• $L: (x,y,z) = (3,-4,-2) + t\,\vec{n}$; $t \in \mathbb{R}$

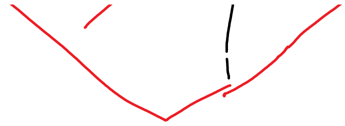
• $\vec{v} = \vec{v}_2 \times \vec{A_2A_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 13 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (12, -12, 36)$

$\vec{v} = 12(1,-1,3) \Rightarrow \vec{n} = (1,-1,3)$

• $P: (1,-1,3)((x,y,z) - (5,6,-3)) = 0$

$x - 5 - (y - 6) + 3(z + 3) = 0$

$x - 5 - y + 6 + 3z + 9 = 0$



$x-5-y+6+3z+9=0$

$$\boxed{\mathcal{P}: x-y+3z+10=0}$$

Luego la proyección de C sobre $\mathcal{P}$ es el punto de intersección de L con $\mathcal{P}$:

$\mathcal{P}: x-y+3z+10=0$

$L: (x,y,z)=(3,-4,-2)+t(1,-1,3)=(3+t,-4-t,-2+3t),\ t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad x-y+3z+10=0 \Rightarrow (3+t)-(-4-t)+3(-2+3t)+10=0$

$\Rightarrow 3+t+4+t-6+9t+10=0 \Rightarrow 11t+11=0 \Rightarrow \boxed{t=-1}$

Así $Q(2,-3,-5)$ es la proyección de C buscada.

Halle $lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y}{y^2-1}$ en cada uno de los siguientes casos:

a) A lo largo de la recta $x=1$

b) A lo largo de la curva $y=x^2$

c) A lo largo de la curva $y=k(1-x)+1$

d) ¿Qué tipo de discontinuidad presenta $f(x,y)=\frac{x^2-y}{y^2-1}$ en (1,1)?

Solución

a) $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y}{y^2-1} \underset{x=1}{=} \lim_{\substack{x=1\\ y\to 1}} \frac{1-y}{y^2-1} = \lim_{y\to 1} \frac{1-y}{(y-1)(y+1)} = \lim_{y\to 1} -\frac{1}{y+1} = \infty$$

b) $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y}{y^2-1} = \lim_{\substack{y=x^2\\ x\to 1}} \frac{x^2-x^2}{x^4-1} = \lim_{x\to 1} \frac{0}{x^4-1} = \lim_{x\to 1} 0 = 0$$

c) $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y}{y^2-1} = \lim_{\substack{y=K(1-x)+1\\ x\to 1}} \frac{x^2-K(1-x)-1}{(K(1-x)+1)^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-K(1-x)-1}{(K(1-x)+1-1)(K(1-x)+1+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1-K(1-x)}{K(1-x)(K(1-x)+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)+K(x-1)}{K(1-x)(K(1-x)+2)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1+K)}{-K\cancel{(x-1)}(K(1-x)+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1+K}{-K(K(1-x)+2)} = \frac{2+K}{-2K}; \quad K\neq 0$$

d) f presenta discontinuidad inevitable porque calculando el $\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$ por diferentes caminos a, b, c no coinciden.