Capítulo

4 Extremos de funciones de varias variables

Objetivos:

- Utilizar los criterios para determinar los extremos de una función definida sobre $\mathbb{R}^n$.
- Reconocer la función objetivo y reconocer sus restricciones.
- Plantear y resolver problemas de optimización para funciones definidas sobre $\mathbb{R}^n$.

4.1. Extremos de funciones de varias variables

Definición 40 Valores extremos
Sea $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, una función definida en un conjunto abierto* $U \in \mathbb{R}^n$*. Se dice que* f *tiene un máximo (mínimo) local o relativo en el punto* $\mathbf{x}_0 \in U$*, si* $f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})$ $(f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$ *respectivamente), para todo* $\mathbf{x}$ *en una bola de centro* $\mathbf{x}_0$ *y radio* δ*.*

Definición 41 Punto crítico
El punto $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ *en el que todas las derivadas parciales de la función* $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *se anulan, se llama punto crítico (o punto estacionario) de la función. También son llamados puntos críticos, los puntos donde las derivadas parciales no existen.*

Definición 42 Matriz Hessiana
Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función definida en el conjunto abierto* U *de* $\mathbb{R}^n$ *y sea* $\mathbf{x} \in U$*. Suponga que las derivadas parciales de segundo orden* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *existen en* $\mathbf{x}$*.*
A la matriz cuadrada de orden n*:*

$$H(f(\mathbf{x})) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})\right)_{i,j=1,2,\ldots n} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}_{n \times n}$$

se le llama matriz Hessiana (ó simplemente Hessiano) de la función f en $\mathbf{x}$, se denota $H(f(\mathbf{x}))$.

4.1.1. Caso de n variables.

Definición 43 Determinantes de Submatrices Angulares
Sea $H(\mathbf{x})$ *la matriz Hessiana de* f *en* $\mathbf{x}$*. Definimos los determinantes de las submatrices angulares*

de $H(\mathbf{x})$*, denotados por* $\Delta_{ii} \quad , \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n \quad$ *como:*

$$\Delta_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}), \qquad \Delta_{22} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{33} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(\mathbf{x}) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(\mathbf{x}) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(\mathbf{x}) \end{vmatrix}, \quad \cdots \quad \Delta_{nn} = |H(\mathbf{x})|.$$

Teorema 4.1.1 *Sea* $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, una función de clase* $\mathcal{C}^2$*, el punto* $\mathbf{x} \in U$ *un punto crítico de* f *y los determinantes* Δ_{ii} *de las submatrices angulares de* $H(\mathbf{x})$ *con* $\Delta_{nn} = det(H(\mathbf{x})) \neq 0$*. Entonces:*

i) Si $\Delta_{ii} > 0$*,* $\forall\ i = 1, \ldots, n$*, entonces* f *tiene un mínimo local en* $\mathbf{x}$*.*

ii) Si $\Delta_{11} < 0$*,* $\Delta_{22} > 0$*,* $\Delta_{33} < 0$*,..., entonces* f *tiene un máximo local en* $\mathbf{x}$*.*

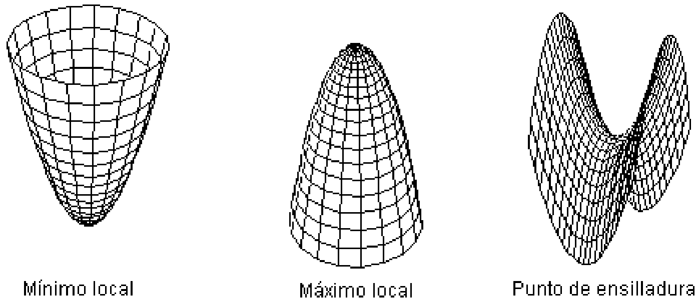
iii) En todos los otros casos f *no tiene máximo ni mínimo.*

Observaciones:

- El caso en que Δ_{nn} es igual a cero el punto crítico es llamado punto crítico degenerado y no se puede afirmar nada acerca de la naturaleza de este punto.
- El caso (*iii*) del teorema es llamado por algunos autores punto de silla o de ensilladura, sin embargo para los casos $n > 2$ los puntos no toman una forma específica.

4.1.2. Caso de dos variables.

Definición 44 *Considere la función* $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida en el conjunto abierto* U *de* $\mathbb{R}^2$ *igual que sucede con las funciones de una variable, los puntos críticos* $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ *que no son extremos relativos (ni máximos, ni mínimos) son llamados puntos de ensilladura o puntos de silla.*



Teorema 4.1.2 *Sea* $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una función definida en un conjunto abierto* U *de* $\mathbb{R}^2$ *tal que en una bola* B *con centro en el punto crítico* $(x_o, y_o) \in U$ *sus derivadas parciales de segundo orden son continuas. Sea*

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_o, y_o), \qquad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_o, y_o), \qquad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_o, y_o)$$

1. *Si* $AC - B^2 > 0$ *y* $A > 0$, *entonces la función* f *tiene un mínimo local en* (x_o, y_o).
2. *Si* $AC - B^2 > 0$ *y* $A < 0$, *entonces la función* f *tiene un máximo local en* (x_o, y_o).
3. *Si* $AC - B^2 < 0$, *entonces la función* f *tiene un punto de ensilladura en* (x_o, y_o).
4. *Si* $AC - B^2 = 0$, *no se puede afirmar nada acerca de la naturaleza del punto crítico.* (x_o, y_o). *Este punto crítico es llamado* **punto crítico degenerado**.

Observación

En el caso en el cual el determinante $H = AC - B^2$ es positivo, el valor de A es siempre distinto de cero.

Ejemplo 1

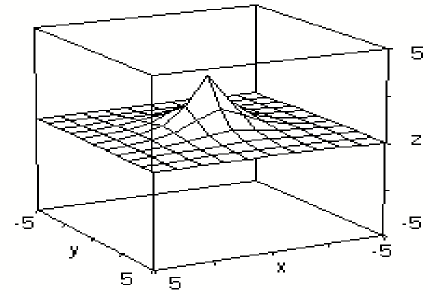
$$f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

El punto crítico se alcanza en

$(a, b) = (0, 0)$

y el mayor valor de f es:

$f(a, b) = f(0, 0) = 1.$



Ejemplo 2

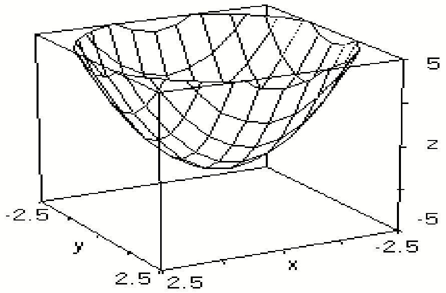
$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2$

El punto crítico es:

$(c, d) = (0, 0)$

y el menor valor de f es:

$f(c, d) = f(0, 0) = -2.$



4.1.3. Ejercicios resueltos.

1. Encontrar y clasificar los puntos criticos de la función $f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$.

   Solución:

   Necesitamos encontrar todas las derivadas parciales de primer orden (para encontrar los puntos críticos) y las derivadas parciales de segundo orden (para clasificar los puntos críticos).

$$f_x = 3x^2 - 3y \quad f_y = 3y^2 - 3x$$
$$f_{xx} = 6x \qquad f_{yy} = 6y \qquad f_{xy} = -3$$

   Los puntos críticos son las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$f_x = 3x^2 - 3y = 0 \qquad f_y = 3y^2 - 3x = 0$$

   Este es un sistema no-lineal de ecuaciones y puede ser, en ocaciones, difícil de resolver. Sin embargo, en este caso resolvemos la primera ecuación como sigue:

$$3x^2 - 3y = 0 \rightarrow y = x^2$$

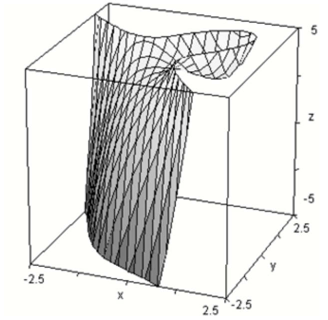
reemplazando en la segunda ecuación da, $3(x^2)^2 - 3x = 3x(x^3 - 1) = 0$.
de esto podemos ver que $x = 0$ o $x = 1$. Ahora usamos el hecho de que $y = x^2$ para encontrar los puntos críticos.

$$\begin{aligned} x = 0 : y = 0^2 = 0 \quad &\rightarrow \quad (0,0) \\ x = 1 : y = 1^2 = 1 \quad &\rightarrow \quad (1,1) \end{aligned}$$

Para clasificar los puntos críticos usamos el teorema 4.1.2.

$$\begin{aligned} AC - B^2 &= (6x)(6y) - (-3)^2 \\ &= 36xy - 9. \end{aligned}$$

Para $(0,0)$ tenemos: $AC - B^2 = -9 < 0$
Así, para $(0,0)$ $AC - B^2$ es negativo, por lo tanto tenemos un punto silla.
Para $(1,1)$ $AC - B^2$ es positivo y A es positivo, lo que implica que debemos tener un mínimo relativo. Afin de completar el análisis presentamos la gráfica de esta función.



2. Encontrar y clasificar los puntos críticos de la función $f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$.
Solución
Necesitamos encontrar todas las derivadas parciales de primer orden y las derivadas parciales de segundo orden.

$$f_x = 6xy - 6x \quad f_y = 3x^2 + 3y^2 - 6y$$
$$f_{xx} = 6y - 6 \qquad f_{yy} = 6y - 6 \qquad f_{xy} = 6x$$

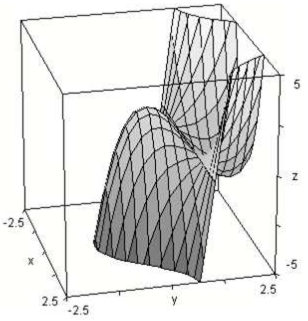
Para encontrar los puntos críticos debemos resolver el sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} 6xy - 6x &= 0 \\ 3x^2 + 3y^2 - 6y &= 0. \end{aligned}$$

Primero, factorizamos $6x$ de la primera ecuación, $6x(y - 1) = 0$
de donde, obtenemos $x = 0$ ó $y = 1$
Para encontrar los puntos críticos reemplazamos estos valores (individualmente) en la segunda ecuación y resolvemos para la variable remanente.
Para $x = 0$: $3y^2 - 6y = 3y(y - 2) = 0 \rightarrow y = 0, \qquad y = 2$
Para $y = 1$: $3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x = -1, \qquad x = 1$
Asípara $x = 0$ tenemos dos puntos críticos: $(0,0)$ y $(0,2)$
para $y = 1$ tenemos dos puntos críticos: $(1,1)$ y $(-1,1)$
Ahora clasificamos los puntos críticos:

$$AC - B^2 = (6y - 6)(6y - 6) - (6x)^2 = (6y - 6)^2 - 36x^2$$

Para $(0,0)$, $AC - B^2 = 36 > 0$ y $A = -6 < 0$ entonces en $(0,0)$ tenemos un máximo relativo.
Para $(0,2)$, $AC - B^2 = 36 > 0$ y $A = 6 > 0$ entonces en $(0,2)$ tenemos un mínimo relativo.
Para $(1,1)$, $AC - B^2 = -36 < 0$ entonces en $(1,1)$ tenemos un punto silla.
Para $(-1,1)$, $AC - B^2 = -36 < 0$ entonces en $(-1,1)$ tenemos un punto silla.



3. Determinar el punto sobre el plano $4x - 2y + z = 1$ que es el más cercano al punto $(-2,-1,5)$

Solución:
Notemos que no estamos preguntando por los puntos críticos del plano. Afin de resolver este problema, primero, necesitamos formular la ecuación con la cual vamos a trabajar.
Primero, supongamos que $Q(x,y,z)$ es un punto cualquiera del plano. La distancia entre este punto y el punto $P(-2,-1,5$, está dado por la fórmula:

$$d = \sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2}$$

Lo que se pide en el problema es, precisamente, encontrar el valor mínimo de esta función. El punto (x,y,z) que da el valor mínimo de esta función será el punto del plano que es el más cercano a $(-2,-1,5)$.
Hay un par de problemas con esta función. Es una función de tres variables sujeta a una restricción y sólo estamos trabajando con funciones de dos variables, este problema es fácil de resolver . Resolvemos la ecuación del plano para z ,

$$z = 1 - 4x + 2y$$

sustituyendo este valor en la fórmula de la función distancia resulta,

$$d = \sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2 + (-4-4x+2y)^2}$$

El otro problema es que la función d es una raíz cuadrada, afin de hacernos las cosas más fáciles encontraremos el mínimo de la función d^2 que es equivalente a encontrar el mínimo de la función d.
Entonces sea $f(x,y) = d^2 = (x+2)^2 + (y+1)^2 + (-4-4x+2y)^2$ cuyas derivadas parciales son:

$$\begin{aligned} f_x &= 2(x+2) + 2(-4)(-4-4x+2y) = 36 + 34x - 16y \\ f_y &= 2(y+1) + 2(2)(-4-4x+2y) = -14 - 16x + 10y \\ f_{xx} &= 34 \\ f_{yy} &= 10 \\ f_{xy} &= -16 \end{aligned}$$

Para encontrar el punto crítico resolvemos resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} 36 + 34x - 16y &= 0 \\ -14 - 16x + 10y &= 0 \end{aligned}$$

resolvemos la primera ecuación para x

$$x=\frac{1}{34}(16y-36)=\frac{1}{17}(8y-18)$$

sustituimos este valor en la segunda ecuación y resolvemos para y.

$$-14-\frac{16}{17}(8y-18)+10y=0 \qquad \Rightarrow \qquad y=-\frac{25}{21}$$

sustituyendo en cualquiera de las dos ecuaciones, obtenemos x donde $x=-\frac{34}{21}$.
Asíel punto crítico es $(-\frac{34}{21},-\frac{25}{21})$. Evaluando las segundas derivadas para este punto, afin de clasificarlo tenemos:

$$AC-B^2=34(10)-(-16)^2=84>0$$

y como $A=34>0$ tenemos para este punto crítico un mínimo relativo. y la coordenada z del punto Q se encuentra reemplazando en el plano las coordenadas para x, y.

$$z=1-4(-\frac{34}{21})+2(-\frac{25}{21})=\frac{107}{21}$$

Así, el punto del plano más cercano al punto $(-2,-1,5)$ es $(-\frac{34}{21},-\frac{25}{21},\frac{107}{21})$.

4. Encuentre los puntos críticos de la función dada

   a) $f(x,y)=\left(x^2-y\right)e^{x+2y}$

   b) $f(x,y)=x\operatorname{sen}y$

   c) $f(x,y,z)=xyz^2+xy+xz^2+x-2yz^2-2y-2z^2-2$

   d) $f(x,y,z)=2x^2+3y^2+2z^2+2xy+xz+yz+2x+4y+6z$

Solución (a):

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(x^2-y\right)e^{x+2y}+2xe^{x+2y}=0\Leftrightarrow e^{x+2y}\left(x^2-y+2x\right)=0\Rightarrow x^2-y+2x=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\left(x^2-y\right)e^{x+2y}2+e^{x+2y}(-1)=0\Rightarrow e^{x+2y}\left(2x^2-2y-1\right)=0\Rightarrow 2x^2-2y=1$$

Resolviendo el sistema

$$\left\{\begin{array}{rl} x^2+2x-y & =0\\ 2x^2-2y & =1\end{array}\right. \text{ se tiene } x=-\frac{1}{4},\ y=-\frac{7}{16}\text{ . Por lo tanto, el punto crítico es } (-\frac{1}{4},\frac{-7}{16}).$$

Solución (b):

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \operatorname{sen}y=0\Leftrightarrow y=k\pi,k\in Z\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x\cos y=0\Leftrightarrow x=0\ \vee\ \cos y=0\Leftrightarrow\ y=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Por lo tanto $(0,k\pi)\,,k\in Z$ son puntos críticos.

Solución (c):

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}=yz^2+y+z^2+1=0 \quad &\Rightarrow z^2(y+1)+(y+1)=0\\ &\Rightarrow \left(z^2+1\right)(y+1)=0\\ &\Rightarrow y=-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}=xz^2+x-2z^2-2=0 \quad &\Rightarrow x\left(z^2+1\right)-2\left(z^2+1\right)=0\\ &\Rightarrow (x-2)\left(z^2+1\right)=0\\ &\Rightarrow x=2\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=2xyz+2xz-4yz-4z=0 \qquad (1)$$

Reemplazando $x = 2$ y $y = -1$ en (1) obtenemos que $0 = 0$.
Por lo tanto $(2, -1, t)$, $t \in \mathbb{R}$ son puntos críticos de $f(x, y, z)$.

Solución (d):

Cálculo de los puntos críticos

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x + 2y + z + 2 = 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 6y + 2x + z + 4 = 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial z} = 4z + x + y + 6 = 0$

Resolvemos el sistema de ecuaciones $x = 2y + 1$ ó $x = \dfrac{-7y - 2}{15}$ de donde
$y = \dfrac{-17}{37}$, $x = \dfrac{3}{37}$ y $z = -\dfrac{52}{37}$
que genera el punto crítico $P = (3/37, -17/37, -52/37)$

5. Analizar los extremos de la función $f(x, y) = 2 - x^2 - (y - 2)^2$.

Solución:

Cálculo de los puntos críticos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -2x = 0 && \Rightarrow x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2(y-2) = 0 && \Rightarrow y = 2. \end{aligned}$$

De la solución del sistema de ecuaciones: $(0, 2)$ es un punto crítico.
Luego, $\forall (x, y) \in B((0, 2), r)$ se tiene que
$f(0, 2) = 2 - 0^2 - (2 - 2)^2 = 2 \geq 2 - x^2 - (y - 2)^2 = f(x, y)$
$f(0, 2) \geq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in B((0, 2), r)$.
Por lo tanto f tiene un máximo local en $\overline{x} = (0, 2)$ y en realidad un máximo absoluto, ya que no hay otros puntos máximos.

6. Analizar los extremos de la función

$$f(x, y) = \frac{4y + x^2y^2 + 8x}{xy}$$

Solución:

$$f(x, y) = \frac{4y + x^2y^2 + 8x}{xy} = \frac{4}{x} + xy + \frac{8}{y}$$

Cálculo de los puntos críticos

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{4}{x^2} + y = 0 \quad &\Rightarrow \quad y = \frac{4}{x^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{8}{y^2} = 0 \quad &\Rightarrow \quad x = \frac{8}{y^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2} \\ y &= 2\sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

De la solución del sistema de ecuaciones $P_0 = (\sqrt[3]{2}, 2\sqrt[3]{2})$ es un punto crítico.
Calculamos la matriz Hessiana de f en P_0

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{8}{x^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{16}{y^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$$

entonces

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{8}{x^3} & 1 \\ 1 & \dfrac{16}{y^3} \end{bmatrix} \Rightarrow Hf(\sqrt[3]{2}, 2\sqrt[3]{2}) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculamos los determinantes de las submatrices angulares

$$\Delta_{11} = 4 > 0 \qquad \Delta_{22} = 3 > 0$$

Son todos positivos, por lo que afirmamos que en el punto $P_0 = (\sqrt[3]{2}, 2\sqrt[3]{2})$ existe mínimo local cuyo valor es $12/\sqrt[3]{2}$.

7. Encuentre los extremos de la función $f(x,y) = xy(9-x-y)$.

Solución:

Para hallar los puntos críticos resolvemos el sistema:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y(9-2x-y) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x(9-x-2y) = 0;$$

obteniendo los puntos críticos: $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (3,3)$,

Luego calculamos las derivadas parciales de segundo orden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 9-2x-2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x.$$

Ahora hallemos los valores A, B, C en cada punto crítico:

Para el punto $P_1 = (0,0)$ se tiene $A = 0,\ B = 9,\ C = 0,\ AC - B^2 = -81 < 0$; entonces la función f tiene en P_1 un punto de silla.

Para $P_2 = (3,3)$ se tiene $A = -6 < 0,\ B = -3,\ C = -6,\ AC - B^2 = 27 > 0$ entonces la función f alcanza en P_2 el valor máximo, $f(P_2) = 27$.

8. Sea la función $f(x,y) = x^3y^2(6-x-y)$ definida en el conjunto $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, \quad y \geq 0\right\}$. Hallar los extremos locales de f.

Solución:

Hallamos el ∇f y resolvemos el sistema $\nabla f = \mathbf{0}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2(6-x-y) - x^3y^2 \ \Rightarrow\ x^2y^2(18-4x-3y) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y(6-x-y) - x^3y^2 \ \Rightarrow\ x^3y(12-2x-3y) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad y = 0 \quad \vee \ 18-4x-3y = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad y = 0 \quad \vee \ 12-2x-3y = 0$$

por lo tanto son puntos críticos son $P_1(0,0)$, $P_2(3,2)$, $P_3 = (0,y)$ y $P_4 = (x,0)$; $x \geq 0,\ y \geq 0$

Calculamos la matriz Hessiana de f :

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 6xy^2(6-2x-y) & x^2y(36-8x-9y) \\ \\ x^2y(36-8x-9y) & 2x^3(6-x-3y) \end{bmatrix}$$

$$Hf(3,2)=\begin{bmatrix}-144 & -108\\ \\ -108 & -162\end{bmatrix}$$

$\triangle_{11}=-144<0;\quad \triangle_{22}=11664>0$

entonces existe máximo local en $P_2=(3,2)$.

Por otro lado, calculemos $Hf(0,0)=Hf(x,0)=Hf(0,y)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

El criterio de los determinantes de las submatrices angulares no dice nada acerca de estos puntos críticos.

Como $x\geq 0,\quad y\geq 0\quad$ cuando $x\to 0\ \wedge\ y\to 0\Rightarrow x+y\to 0,$
Esto significa que si x, y son pequeñitos entonces su suma también es un número pequeño (pero positivo), por lo tanto $6>x+y\Rightarrow 6-x-y>0$

Po otra parte, $\Rightarrow x^3\geq 0;\quad y^2\geq 0;\quad 6-x-y>0$

Comparando, $f(0,0)=f(x,0)=f(0,y)=0\leq f\left(x,y\right)=x^3y^2\left(6-x-y\right)$

$\Rightarrow$ en $(x,0)$, $(0,y)$ y $(0,0)$ hay mínimo local por definición.

9. Determine (si los hay) los extremos locales y los puntos de silla de:

   a) $f\left(x,y\right)=3\arctan\left(x^2\right)-2\arctan\left(y^2\right)$

   b) $f\left(x,y,z\right)=-2x^2-y^2-3z^2+xy+2x+2y+3z$

Solución (a)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{6x}{1+x^4}=0\Rightarrow 6x=0\Rightarrow x=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{-4y}{1+y^4}=0\Rightarrow -4y=0\Rightarrow y=0\end{aligned}$$

entonces $(0,0)$ es punto crítico, luego;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\left(1+x^4\right)6-6x\left(4x^3\right)}{\left(1+x^4\right)^2}=\frac{6-18x^4}{\left(1+x^4\right)^2};\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{-\left(1+y^4\right)4+4y\left(4y^3\right)}{\left(1+y^4\right)^2}=\frac{-4+12y^4}{\left(1+y^4\right)^2};\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$$

Finalmente, $H(f(0,0))=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix}$

$\Delta_{11}=6>0$, $\Delta_{22}=-24<0$, por lo tanto existe un punto de silla en $(0,0)$.

Solución (b):

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=-4x+y+2=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=-2y+x+2=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=-6z+3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4x+y=-2\\ x-2y=-2\\ z=\frac{1}{2}\end{cases}$$

Resolviendo el sistema
$x=\dfrac{6}{7},\quad y=\dfrac{10}{7}\quad\Rightarrow\left(\dfrac{6}{7},\dfrac{10}{7},\dfrac{1}{2}\right)$ es punto crítico

luego,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-4\quad;\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=1\quad;\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=0\quad;\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 \quad ; \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0 \quad ; \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -6; \quad ; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0$$

Finalmente:

$$Hf\left(\frac{6}{7}, \frac{10}{7}, \frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$\triangle_{11} = -4 < 0$

$\triangle_{22} = 7 > 0$

$\triangle_{33} = -42 < 0$

Por lo tanto, f tiene un máximo en $(\frac{6}{7}, \frac{10}{7}, \frac{1}{2})$, cuyo valor es $\frac{85}{28}$.

10. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, suponga que g tiene solamente una raíz en el punto x_o y que $g'(x_o) > 0$ Estudie la naturaleza de los puntos críticos de la función $f(x, y) = \int_x^{2y} g(t)\,dt$.

Solución:

$$f(x, y) = -\int_a^x g(t)\,dt + \int_a^{2y} g(t)\,dt$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -g(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2g(y) = 0 \Leftrightarrow y = x_0 \end{aligned}$$

luego, el punto crítico es (x_0, x_0)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -g'(x); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2g'(y)$$

Finalmente,

$$Hf(x_o, x_o) = \begin{bmatrix} -g'(x_o) & 0 \\ 0 & 2g'(x_o) \end{bmatrix}$$

como $g'(x_o) > 0$ entonces:

$\triangle_{11} = -g'(x_o) < 0$

$\triangle_{22} = -[g'(x_o)]^2 < 0$

Por tanto en (x_o, x_o) hay un punto de silla.

11. Clasifique los puntos críticos $P_1 = (\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, $P_2 = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ de la función $f(x, y, z) = \text{sen}x + \text{sen}y + \text{sen}z - \text{sen}(x + y + z)$.

Solución:

Para hallar la matriz Hessiana calculemos las derivadas parciales

$f_x = \cos x - \cos(x + y + z)$, $\quad f_y = \cos y - \cos(x + y + z)$, $\quad f_z = \cos z - \cos(x + y + z)$,

luego

$$H(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\text{sen}x + \text{sen}(x+y+z) & \text{sen}(x+y+z) & \text{sen}(x+y+z) \\ \text{sen}(x+y+z) & -\text{sen}y + \text{sen}(x+y+z) & \text{sen}(x+y+z) \\ \text{sen}(x+y+z) & \text{sen}(x+y+z) & -\text{sen}z + \text{sen}(x+y+z) \end{pmatrix},$$

$$H(P_1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \Delta_{11} = 2 > 0 \\ \Delta_{22} = 3 > 0 \\ \Delta_{33} = 4 > 0 \end{matrix}, \quad H(P_2) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \Delta_{11} = -2 < 0 \\ \Delta_{22} = 3 > 0 \\ \Delta_{33} = -4 < 0 \end{matrix}.$$

Por lo tanto, $f(P_1) = -4$ es un valor mínimo y $f(P_2) = 4$ es un valor máximo.

12. Dada la función $f(x, y, z) = 15x^3 + 6x^2 - x + 2y^2 + y + 5z^2 + 10z - 2$ determine los extremos locales.

Solución:
Cálculo de los puntos críticos

$$\frac{\partial f}{\partial x}=45x^2+12x-1=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=4y+1=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=10z+10=0$$

Resolviendo el sistema obtenemos: $x=\dfrac{1}{15}$ ó $x=\dfrac{-1}{3},\quad y=-\dfrac{1}{4},\quad z=-1$
Los puntos críticos son $(1/15,-1/4,-1)$ y $(-1/3,-1/4,-1)$

Cálculo de la matriz Hessiana: $H(x,y,z)=\begin{pmatrix}90x+12 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{pmatrix}$

Para el punto crítico $(1/15,-1/4,-1)$

$$H(1/15,-1/4,-1)=\begin{pmatrix}18 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{pmatrix}.$$

Los determinantes de las submatrices angulares son $\Delta_{11}=18>0,\ \Delta_{22}=72>0,\ \Delta_{33}=720>0$. Como todas las submatrices tienen determinantes positivos tenemos que en el punto crítico $(1/15,-1/4,-1)$ hay un mínimo local .

Para el punto crítico $(-1/3,-1/4,-1)$

$$H(-1/3,-1/4,-1)=\begin{pmatrix}-18 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{pmatrix}$$

Los determinantes de las submatrices angulares son $\Delta_{11}=-18<0,\ \ \Delta_{22}=-72<0,\ \Delta_{33}=-720<0$, luego en el punto crítico $(-1/3,-1/4,-1)$ no hay máximo ni mínimo local.

13. La ecuación: $-4x^2-y^2-3z^2+3yz+3y+6z-36=0$; define $z=f(x,y)$ en forma implícita. Determine la naturaleza de sus puntos críticos.
Solución:
Sea $F(x,y,z)=-4x^2-y^2-3z^2+3yz+3y+6z-36=0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{-8x}{-6z+3y+6}=0\ \Leftrightarrow\ x=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{-2y+3z+3}{-6z+3y+6}=0\Leftrightarrow -2y+3z+3=0\Rightarrow y=\frac{3z+3}{2}$$

luego, sustituyendo estos valores en la ecuación dada, tenemos

$$-4\,(0)^2-\left(\frac{3z+3}{2}\right)^2-3\left(z^2\right)+3(\frac{3z+3}{2})z+3\left(\frac{3z+3}{2}\right)+6z-36=0$$

$$-\frac{9z^2+18z+9}{4}-3z^2+\frac{9z^2+9z}{2}+\frac{9z+9}{2}+6z-36=0$$

$$-9z^2-18z-9-12z^2+18z^2+18z+18z+18+24z-144=0$$

$-3z^2+42z-135=0 \qquad \Rightarrow 3z^2-42z+135=0$

$z^2-14z+45=0 \;\Leftrightarrow\; (z-9)(z-5)=0$

$z=9 \;\vee z=5$

Si $\quad z=9 \;\Rightarrow\; y=\dfrac{3\,(9)+3}{2}=15 \Rightarrow\; y=15$

Si $\quad z=5 \;\Rightarrow\; y=\dfrac{3\,(5)+3}{2}=9 \Rightarrow\; y=9$

Entonces después de analizar los puntos críticos $P_1(0,9)$, $P_2=(0,15)$ por el determinante de las submatrices angulares se concluye que en $(0,9)$ existe un mínimo local cuyo valor es $f(0,9)=5$ y en $(0,15)$ un máximo local cuyo valor es $f(0,15)=9$.

14. Un minorista vende dos productos que se hacen competencia entre sí y cuyos precios son P_1 y P_2. Hállense los precios P_1 y P_2 de forma que los ingresos R sean máximos, donde .

$$R=500P_1+800P_2+1{,}5P_1P_2-1{,}5P_1^2-P_2^2$$

Solución:

Tenemos que los ingresos estan dados por

$$R(P_1,P_2)=500P_1+800P_2+1{,}5P_1P_2-1{,}5P_1^2-P_2^2$$

Hallando las derivadas de primer orden

$$\frac{\partial R}{\partial P_1}=500+1{,}5P_2-3P_1=0$$

$$\frac{\partial R}{\partial P_2}=800+1{,}5P_1-2P_2=0$$

Obtenemos el punto crítico $P=(586,67;840)$.

Las derivadas parciales de segundo orden son:

$\dfrac{\partial^2 R}{\partial P_1^2}=-3\;;\quad \dfrac{\partial^2 R}{\partial P_2^2}-2,\quad \dfrac{\partial^2 R}{\partial P_1\partial P_2}=1{,}5$

Así la matriz Hessiana es

$$H(P)=\begin{pmatrix}-3 & 1{,}5\\ 1,5 & -2\end{pmatrix}.$$

cuyos determinantes de las submatrices angulares son:

$\Delta_{11}=-3<0,\ \Delta_{22}=3,75>0.$

Como los signos son alternos empezando en negativo se concluye que el ingreso máximo se obtiene cuando los precios son: $P_1=586,67$ y $P_2=840$.

15. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación $x+y+z+xy-x^2-y^2=0$, en el punto donde la función, representada por dicha superficie tenga un valor extremo ¿Qué clase de extremo es?

Solución

Hallando el extremo local:

Sea $z=f\,(x,y)=x^2+y^2-x-y-xy$, ecuación de la superficie encontramos los puntos críticos de f

$$\frac{\partial f\,(x,y)}{\partial x}=2x-1-y=0$$
$$\frac{\partial f\,(x,y)}{\partial y}=2y-1-x=0$$

$\Rightarrow x = 1 \qquad y = 1$ de donde $P\,(1,1)$ es punto crítico

Calculando las derivadas parciales de segundo orden

$$\frac{\partial^2 f\,(x,y)}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f\,(x,y)}{\partial y^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f\,(x,y)}{\partial y \partial x} = -1$$

Como, $H(P) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

cuyos determinantes de las submatrices angulares son:

$\Delta_{11} = 2 > 0,\ \Delta_{22} = 3 > 0$

entonces en el punto $P\,(1,1)$ existe un mínimo.

Para $x = y = 1 \Rightarrow z = -1 \Rightarrow Q\,(1,1,-1)$ punto mínimo local.

Hallando la ecuación del plano tangente P_T en Q:

$\overrightarrow{N} \cdot [(x,y,z) - (1,1,-1)] = 0$

$\overrightarrow{N} = \nabla F\,(x,y,z) = (2x - y - 1, 2y - x - 1, -1)$ entonces

$\overrightarrow{N} = \nabla F\,(1,1,-1) = (0,0,-1)$

$\overrightarrow{N} \cdot (x - 1, y - 1, z + 1) = 0$ entonces

$P_T : (0,0,-1) \cdot (x - 1, y - 1, z + 1) = 0$

Por lo tanto $P_T : z + 1 = 0$

4.2. Ejercicios propuestos

Puntos críticos y extremos.

1. Calcular los puntos críticos de las funciones dadas:
   - $f(x,y) = x^3 + y^3 + 9x^2 - 3y^2 + 15x - 9y$
     Rpta. $(-1,-1)$; $(-1,3)$; $(-5,-1)$; $(-5,3)$.
   - $f\,(x,y) = e^{x\,-\,y}\left(x^2 - 2y^2\right)$ Rpta. $(0,0)$, $(-4,-2)$.
   - $f(x,y) = x^3 + y^3 - 15xy$ Rpta. $(0,0)$; $(5,5)$.
   - $f\,(x,y) = x^3 + (x - y)^2$ Rpta. $(0,0)$
   - $f(x,y,z) = 4x + xy - yz - x^2 - y^2 - z^2$ Rpta. $(3,2,-1)$.
   - $f\,(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$ Rpta. $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,1)$ $(1,-1)$.
   - $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2\,+\,y^2} - (x^2 + y^2)$ Rpta. $(0,0)$.
   - $f\,(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy,\qquad a > 0$ Rpta ; $(0,0)$, (a,a).
   - $f(x,y) = 18x^2 - 32y^2 - 36x - 128y - 110$ Rpta. $(1,-2)$
   - $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3y^2 - 3x - 9y + 2$ Rpta. $(-1,1)$, $(-1,-3)$, $(1,1)$, $(1,-3)$.
   - $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ Rpta. $(0,0)$, $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$.
   - $f\,(x,y,z) = \dfrac{1}{3}x^3 + x + y^2 + 2y - z^2 + 2z + 3$ Rpta. No hay puntos críticos.
   - $f(x,y) = \dfrac{2x + 2y + 1}{x^2 + y^2 + 1}$ Rpta. $(1/2,1/2)$, $(-1,-1)$, $(\frac{3}{4},-\frac{5}{4})$.
   - $f\,(x,y,z) = -x^2 - y^2 - z^2 + xz + y$ Rpta. $(0,1/2,0)$.
   - $f(x,y) = \dfrac{xy}{2}(47 - x - y)\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4}\right)$ Rpta. $(0,0)$, $(47,0)$.
   - $f(x,y) = \sqrt{(a - x)(a - y)(x + y - a)}$ Rpta. (a,a), $(0,a)$, $(a,0)$, $(2a/3,2a/3)$.

- $f(x,y)=xy\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$ Rpta. $(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}}),(\dfrac{a}{\sqrt{3}},-\dfrac{b}{\sqrt{3}}),(-\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}}),(-\dfrac{a}{\sqrt{3}},-\dfrac{b}{\sqrt{3}})$.
- $f(x,y)=\mathrm{e}\,\dfrac{1}{2+x^2+\cos^2 y-\cos y}$ Rpta. $(0,n\pi)$.
- $f(x,y)=4-(x^2+y^2)^{2/3}$ Rpta. $(0,0)$.

2. Determine los extremos relativos de las siguientes funciones:

   a) $f(x,y)=2x^2+y^2+8x-6y+20$

   b) $f(x,y)=-x^3+4xy-2y^2+1$

   c) $f(x,y)=1-x^2+y^2$

   d) $f(x,y)=x^2-2xy^2+y^4-y^5$

   e) $f(x,y)=e^{x^2+y^2+1}$

   f) $f(x,y)=1-\sqrt[3]{x^2+y^2}$

   g) $f(x,y)=x^2y^2$

3. Determinar los puntos críticos e indicar si en ellos existen extremos locales, puntos de ensilladura o puntos donde el criterio falla.

   - $f\,(x,y)=3axy-x^3-y^3$ Rpta. Punto de silla en $(0,0)$ y máximo en (a,a)
   - $f\,(x,y)=x^2+7y^2-5xy+6x-3y+2$ Rpta. Mínimo en $(-23,-8)$
   - $f\,(x,y)=(x-y)(xy-1)$ Rpta. Punto de silla en $(1,1)$ y $(-1,-1)$.
   - $f\,(x,y)=4x^2-y^2+2y-1$ Rpta. Punto de silla en $(0,1)$
   - $f\,(x,y)=x^2+y^3-6xy+3x+6y-2$Rpta. Mínimo en $(\frac{27}{2},5)$; punto de silla en $(3/2,1)$.
   - $f\,(x,y)=xy-x^2-y^2-2x-2y+4$ Rpta. Máximo en $(-2,-2)$.
   - $f\,(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$Rpta. Punto crítico degenerado en $(0,0)$; mínimo en $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.
   - $f\,(x,y)=x^3+6x^2-y^2+9x+8$ Rpta. Máximo en $(-3,0)$; punto de silla en $(-1,0)$.
   - $f\,(x,y)=8x^3-24xy+y^3$ Rpta. Mínimo en $(2,4)$.
   - $f\,(x,y)=x^3y^2\,(4-x-y)$ Rpta. Puntos críticos degenerados en $(0,0)$, $(0,y)$, $(x,0)$; máximo en $(2,4/3)$.
   - $f\,(x,y)=x^3-2xy+y^2+y-5$ Rpta. No hay puntos críticos.
   - $f\,(x,y)=x^3+3x^2-y^2+4$ Rpta. Máximo en $(-2,0)$; Punto de silla en $(0,0)$.
   - $f\,(x,y)=\ln(x^2+y^2+1)$ Rpta. Mínimo en $(0,0)$.
   - $g\,(x,y)=sen\,(xy)$ Rpta. Punto de silla en $(0,0)$, puntos críticos degenerados en $\{(x,y)/xy=(2n-1)\dfrac{\pi}{2}\}$.
   - $f\,(x,y)=x-2y+\ln\sqrt{x^2+y^2}+3\arctan\dfrac{y}{x}$, $x>0$. Rpta. Mínimo en $(44/41,55/41)$.
   - $f\,(x,y,z)=4x+xy-yz-x^2-y^2-z^2$ Rpta. Máximo en $(3,2,-1)$.
   - $f\,(x,y,z)=\dfrac{x^3}{3}-3xy-3xz-3y^2+\dfrac{3}{2}z^2-5x-2$ Rpta. Puntos de silla en $(\dfrac{3+\sqrt{89}}{4},\dfrac{-3-\sqrt{89}}{8},\dfrac{3+\sqrt{89}}{4})$; $(\dfrac{3-\sqrt{89}}{4},\dfrac{-3+\sqrt{89}}{8},\dfrac{3-\sqrt{89}}{4})$.
   - $f\,(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$ Rpta. Mínimo en $(-2/3,-1/3,1)$.
   - $f\,(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2+xy-2z-7x+12$ Rpta. Mínimo en $(4,-1,1)$.

- $f(x,y,z) = x^2 + xz - y + y^2 + yz + 3z^2$ Rpta. Mínimo en $(1/20, 11/20, -1/10)$.
- $f(x,y,z) = 3\ln x + 2\ln y + 5\ln z + \ln(22 - x - y - z)$ Rpta. Máximo en $(6, 4, 10)$.

4. En el plano XY, hallar el punto tal que la suma de los cuadrados de distancias que miden entre las tres rectas $x = 0$; $y = 0$; $x + 2y - 16 = 0$ y el punto buscado sea el menor posible. Rpta.$\left(\dfrac{8}{5}, \dfrac{16}{5}\right)$.

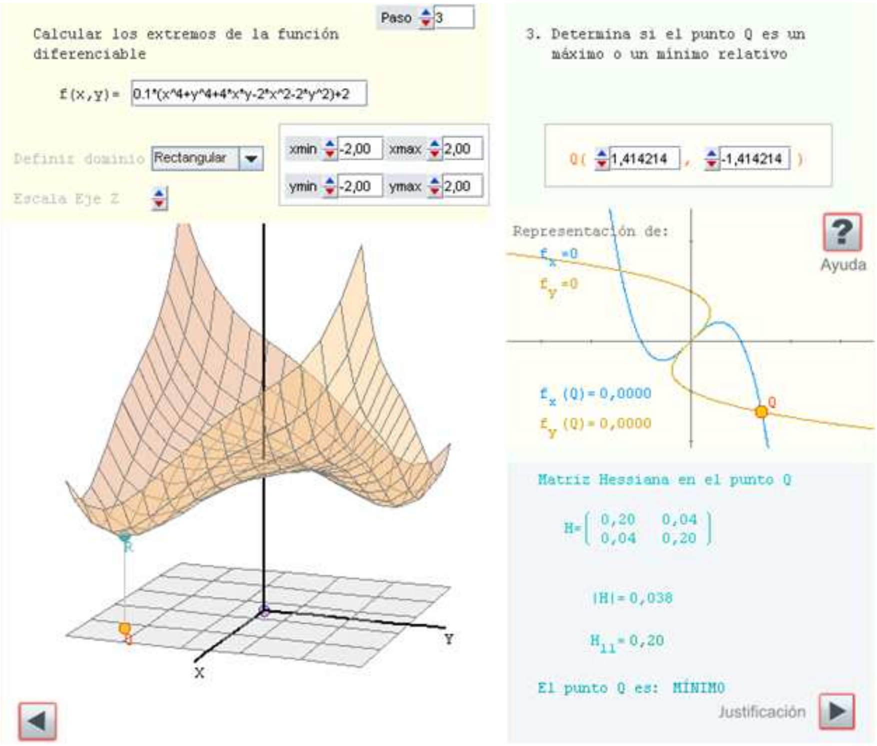
5. Se da la función $z = f(x,y)$ en forma implícita. Determine la naturaleza de los extremos de: (análogamente si se da $z = f(x,y)$ por $F(x,y,z) = 0$)

   a) $-x^2 + x(2z + 10) - y^2 + y(2z + 14) + z^2 + 8z + 6 = 0$.
   Rpta. El valor mínimo es $f(1,3) = -4$, el máximo es $f(-5/3, 1/3) = -\frac{20}{3}$.

   b) $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 + xz + 2yz + 3x + 4y + 5z + \dfrac{7}{4} = 0$.
   Rpta. El valor máximo es $f(-1/2, -1/2) = 0$, y el mínimo es $f(-3/8, -5/16) = -3/4$.

   c) $-2x^2 + 2z^2 + 3xy + xz + yz - \dfrac{13}{9} = 0$.
   Rpta. Puntos de ensilladura en $(-1/3, -7/9)$ y $(1/3, 7/9)$.

Uso de Software:
En la página web de la Dra. Elena Alvarez Saiz, Seleccione. Applets interactivos, enlace, extremos de funciones de dos variables, luego ejecute los tres pasos.



Paso 3

Calcular los extremos de la función diferenciable

f(x,y)= 0.1*(x^4+y^4+4*x*y-2*x^2-2*y^2)+2

Definir dominio Rectangular

xmin -2,00 xmax 2,00

ymin -2,00 ymax 2,00

Escala Eje Z

3. Determina si el punto Q es un máximo o un mínimo relativo

Q(1,414214 , -1,414214)

Representación de:

$f_x = 0$

$f_y = 0$

$f_x\,(Q) = 0,0000$

$f_y\,(Q) = 0,0000$

Matriz Hessiana en el punto Q

$$H = \begin{pmatrix} 0,20 & 0,04 \\ 0,04 & 0,20 \end{pmatrix}$$

$|H| = 0,038$

$H_{11} = 0,20$

El punto Q es: MÍNIMO

4.3. Extremos condicionados

Teorema 4.3.1 *Sean* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función de clase* $\mathbb{C}^1$ *definida en el conjunto abierto* $U \subset \mathbb{R}^n$. *Sean* $g_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *para* $i = 1, \ldots, m$. *funciones de clase* $\mathbb{C}^1$ *en* U $(m < n)$. *Sea* $S = \{\overline{x} \in U / g_i(\overline{x}) = 0, i = 1, 2, \cdots, m\}$ *el conjunto factible de soluciones del problema.*
Sea $\overline{x}_o \in S$ *un punto de extremo condicionado de* f, *es decir que existe una bola* $B \subset U$ *con centro en* $\overline{x}_o$ *con la propiedad de que* $f(\overline{x}_o) \leq f(\overline{x})$ *ó* $f(\overline{x}_o) \geq f(\overline{x})$ *para toda* $\overline{x}$ *en* $B \cap S$.
Suponga que el determinante $det(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\overline{x}_o)) \neq 0$ *para un conjunto de variables* x_j, *tomadas del conjunto de* n *variables* $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ *de* g_i. *Entonces existen* m *números reales* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ *tales que cumplen*

$$\nabla f(\overline{x}_o) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \nabla\, g_k(\overline{x}_0) \ = 0.$$

Donde $z = f(\overline{x})$ es la función objetivo que se va a maximizar o minimizar y $g_i(\overline{x})$ para $i = 1, 2, ..., m$ son la funciones restricciones que condicionan el problema. A los números λ_k cuya existencia establece el teorema anterior se les llama multiplicadores de Lagrange, y al método que proporciona este teorema se le denomina Método de los multiplicadores de Lagrange.

4.3.1. Método de Multiplicadores de Lagrange

Para calcular los extremos de la función $f(\overline{x})$ sujeta a las restricciones $g_i(\overline{x}) = 0$ *con* $i = 1, \ldots, m$. ejecutamos los siguientes pasos:

i) Se define la función de Lagrange:
$F(x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..\lambda_m) = f(x_1, x_2, , \cdots, x_n) + \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

ii) Se determina los puntos críticos de F, resolviendo el sistema de $m+n$ ecuaciones formado por

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_k} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

iii) Se evalua la función en los puntos críticos, luego se elige entre estos valores el máximo y el mínimo según sea el caso. Esto es posible ya que se trabaja sobre un conjunto cerrado y acotado.

4.3.2. Ejercicios resueltos

1. Determine el valor máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 4xy$ sujeta a la condición $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$.
   Solución:
   1)Definimos la función de Lagrange: $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = 4xy + \lambda(x^2 + y^2 - 2)$,
   2) Formamos el sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 4y + \lambda(2x) = 0 \qquad (1) \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 4x + \lambda(2y) = 0 \qquad (2) \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= x^2 + y^2 - 2 = 0 \qquad (3) \end{aligned}$$

   multiplicando (1) por x, (2) por y y luego restando, (como $\lambda \neq 0$) obtenemos $y = \pm x$; que al reemplazar en (3) se tiene $x = \pm 1$. Así los puntos críticos son: $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$.
   3) Evaluamos f en cada punto crítico: $f(1, 1) = 4$, $f(1, -1) = -4$, $f(-1, 1) = -4$, $f(-1, -1) = 4$; así, el valor máximo de f es 4 en los punto $(\pm 1, \pm 1)$ y su valor mínimo es -4 en los puntos $(\pm 1, \mp 1)$.

2. Halle el valor mínimo de la función $f(x,y,z) = x + y + z$ sujeta a la restricción $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$.

   Solución:

   Sea $g(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 36$

   Definimos la función de Lagrange

   $$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) = x + y + z + \lambda(x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 36),$$

   y el sistema es:

   $$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 1 + \lambda(2x) = 0 && (1)\\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 1 + \lambda(8y) = 0 && (2)\\ \frac{\partial F}{\partial z} &= 1 + \lambda(18z) = 0 && (3)\\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 36 = 0 && (4) \end{aligned}$$

   como $\lambda \neq 0$ despejamos x, y, z de (1), (2), (3) respectivamente y reemplazamos en (4), obteniendo $\lambda = \pm 7/72$; luego: $x = \pm\frac{36}{7}$, $y = \pm\frac{9}{7}$, $z = \pm\frac{4}{7}$. Evaluando $f(\frac{36}{7}, \frac{9}{7}, \frac{4}{7}) = 7$ y $f(\frac{-36}{7}, \frac{-9}{7}, \frac{-4}{7}) = -7$; de donde f, alcanza su valor máximo en $(\frac{36}{7}, \frac{9}{7}, \frac{4}{7})$ y su valor mínimo en $(\frac{-36}{7}, \frac{-9}{7}, \frac{-4}{7})$.

3. Halle el máximo y mínimo de $z = f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$, estando ligadas las variables x e y por la relación $y - x = \frac{\pi}{4}$

   Solución:

   Sea $g(x,y) = y - x - \frac{\pi}{4}$ la restricción de x e y. Definimos la función $F(x,y,\lambda)$ por:

   $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y + \lambda\left(y - x - \frac{\pi}{4}\right)$

   Ahora encontramos los puntos críticos

   $$\frac{\partial F}{\partial x} = -2\cos x \operatorname{sen} x - \lambda = 0 \qquad (1)$$

   $$\frac{\partial F}{\partial y} = -2\cos y \operatorname{sen} y + \lambda = 0 \qquad (2)$$

   $$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = y - x - \frac{\pi}{4} = 0 \qquad (3)$$

   De (1) y (2) se tiene: $\lambda = -2\operatorname{sen} x \cos x = -2\operatorname{sen} 2x$

   $\lambda = 2\operatorname{sen} y \cos y = \operatorname{sen} 2y$

   Restando estas ecuaciones, se tiene: $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2y = 0$ (4)

   De la ecuación (3) $y = x + \frac{\pi}{4}$, que reemplazando en (4) se tiene

   $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$ de donde $\operatorname{sen} 2x + \cos 2x = 0 \Rightarrow sen2x = -\cos 2x$,

   Por lo tanto: $\frac{sen2x}{\cos 2x} = -1 \Rightarrow \tan 2x = -1$

   Despejando tenemos que: $2x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow$

   $$\begin{aligned} x &= -\frac{\pi}{8} + k\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad k \in Z^+.\\ y &= \frac{\pi}{8} + k\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

   Luego $P_k\left(-\frac{\pi}{8} + k\left(\frac{\pi}{2}\right), \frac{\pi}{8} + k\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$, $k \in Z^+$ son puntos críticos. Ahora aplicaremos el criterio para los extremos condicionados:

$$d^2F = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial y_i} = dx_i dx_j \text{ con } (x_1 = x, \quad x_2 = y)$$

$dg\,(x,y) = dy - dx = 0 \Rightarrow dy = dx$

Además, $B\,(dx) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{2\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) dxdy = (-2\cos 2x - 2\cos 2y)\,dxdy$

$$B\,(dx)|_{P_k} = -2\left|\frac{\sqrt{2}}{2}(-1)^k + \frac{\sqrt{2}}{2}(-1)^k\right| dxdy = (-1)^k\, 2\sqrt{2}dxdy$$

Por lo tanto:

Si k es impar $\triangle_{11} > 0 \Rightarrow$ al punto P_k le corresponde un mínimo condicionado

Si k es par $\triangle_{11} < 0 \Rightarrow$ al punto P_k le corresponde un máximo condicionado

4. Halle puntos en la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ más cercanos al punto (1,0).
Solución:
La función a minimizar es $d(x,y) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ (distancia del punto (x,y) al punto (1,0)), lo cual es equivalente a minimizar la distancia al cuadrado $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$.
La condición es que el punto esté en la elipse; es decir $g(x,y) = 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$.
Así, $F(x,y,\lambda) = (x-1)^2 + y^2 + \lambda(4x^2 + 9y^2 - 36)$ y el sistema es

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 2(x-1) + \lambda(8x) = 0 \qquad (1) \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2y + \lambda(18y) = 0 \qquad (2) \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0. \qquad (3) \end{aligned}$$

Si $y \neq 0$ de (2) tenemos $\lambda = -1/9$, reemplazando en (1) y (3) obtenemos $x = 9/5,\ y = \pm 8/5$ respectivamente; obteniendo los puntos críticos $(9/5, -8/5),\ (9/5, 8/5)$.
Si $y = 0$ reemplazando en (3) se obtienen los puntos $(-3,0),\ (3,0)$.
Calculando d en cada punto se tiene que los puntos $(9/5, -8/5),\ (9/5, 8/5)$ están más cerca de (1,0) y la distancia mínima es igual a $4/\sqrt{5} \approx 1{,}78$.

5. Determine los semiejes de la elipse $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 32 = 0$
Solución:
Resulta que los semiejes son segmentos de recta que se encuentran comprendidos entre los puntos más cercanos y más lejanos de la elipse con respecto al origen, es por esto que la función a optimizar es la función distancia de un punto $P(x,y)$ ubicado sobre la elipse y el origen $(0,0)$, esto es:

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$

Pero en lugar de esto optimizamos la función $f(x,y) = d^2 = x^2 + y^2$ sujeta a la restricción $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 32 = 0$.
Primero definimos la función de Lagrange: $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda(5x^2 - 6xy + 5y^2 - 32)$
A continuación calculamos sus puntos críticos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 2x + 10x\lambda - 6y\lambda \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2y - 6x\lambda + 10y\lambda \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 32 \end{aligned}$$

Igualando las derivadas parciales a cero y despejando λ de las ecuaciones tenemos que:

$$\frac{y}{5y - 3x} = \frac{x}{5x - 3y} \;\rightarrow\; 3y^2 = 3x^2, \;\rightarrow\; x = \pm y$$

Con $x = y$ sustituyendo en la ecuación de la elipse obtenemos $4x^2 = 32$ de donde $x = \pm 2\sqrt{2}$ Análogamente para $x = -y$ se tiene $x = \pm\sqrt{2}$.

- Para $x = y$ tenemos $x = 2\sqrt{2} \rightarrow y = 2\sqrt{2}$, siendo el punto $P_1(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ y $x = -2\sqrt{2} \rightarrow y = -2\sqrt{2}$, siendo el punto $P_2(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$
- Para $x = -y$ tenemos $x = \sqrt{2} \rightarrow y = -\sqrt{2}$, siendo el punto $P_3(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ y $x = -\sqrt{2} \rightarrow y = \sqrt{2}$, siendo el punto $P_4(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Estando el eje menor comprendido entre los puntos P_4 y P_5; mientras que el eje mayor está comprendido entre los puntos P_1 y P_2.

6. Encontrar las dimensiones de la caja cerrada de mayor volumen si el área de su superficie total es 64 cm^2.

Solución:

Primero identificamos la función a optimizar , que vendría a ser el volumen , $V = xyz$ sujeta a la condición de que el área de su superficie $2xy + 2xz + 2yz = 64$.

Definimos la función de Lagrange: $F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(xy + yz + xz - 32)$

Ahora calculamos sus puntos críticos igualando a cero las primeras derivadas parciales:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= yz + \lambda(y + z) = 0\\ \frac{\partial F}{\partial y} &= xz + \lambda(x + z) = 0\\ \frac{\partial F}{\partial z} &= xy + \lambda(x + y) = 0\\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= xy + xz + yz - 32 = 0\end{aligned}$$

- Resolvemos el sistema formado por las dos primeras ecuaciones y obtenemos $\lambda = 0$ ó $xz = yz$

  Descartamos $\lambda = 0$ pues si lo reemplazamos en la primera ecuación obtendríamos $y = 0$ ó $z = 0$ lo cual no es posible. Puesto que $z \neq 0$ resulta que $x = y$

- Resolvemos el sistema formado por la segunda y tercera ecuación y obtenemos $\lambda = 0$ o $yx = zx$. Descartamos $\lambda = 0$ y nos queda $yx = zx$, de donde $z = y$.
- Sustituyendo $x = y$ y $z = y$ en la ecuación de la superficie tenemos $y^2 + y^2 + y^2 = 3y^2 = 32$, lo que implica $y = \pm\sqrt{32/3} = \pm 3{,}266$

Sin embargo, como y es una de dimensiones de la caja, debe ser positivo; de donde resulta que las dimensiones de la caja de volumen máximo son $x = y = z = 3{,}266$

OH¡ si te fijas parece que hemos conseguido un cubo...

7. Encontrar los números positivos x, y, z tales que $x + y + z = 24$ y xyz^2 es máximo.

Solución:

Trataremos de optimizar la función $f(x, y, z) = xyz^2$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = x + y + z - 24 = 0$. Construimos la función de Lagrange $F(x, y, z, \mu) = xyz^2 + \mu(x + y + z - 24)$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yz^2 + \mu = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = xz^2 + \mu = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2xyz + \mu = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} = x + y + z - 24 = 0, \tag{4}$$

igualando y simplificando (1) = (2) y (1) = (3) resulta $y = x$, $z = 2y$ sustituyendo esto en (4) se obtiene $y = 6$ entonces $x = 6$ y $z = 12$ por lo tanto $f(6,6,12) = 5184$ es el número máximo.

8. Hallar los valores extremos del campo escalar $f\,(x,y,z) = x - 2y + 2z$ en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

   Solución:

   Vamos a optimizar la función f bajo la restricción de $\phi\,(x,y) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$.

   a) Formar la función de Lagrange $F(x,y,z,\lambda) = x - 2y + 2z + \lambda\left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right)$

   b) Hallar las derivadas parciales de $F\,(x,y,z,\lambda)$ y resolver el sistema resultante

   $$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0 \qquad (1)$$

   $$\frac{\partial F}{\partial y} = -2 + 2\lambda y = 0 \qquad (2)$$

   $$\frac{\partial F}{\partial z} = 2 + 2\lambda z = 0 \qquad (3)$$

   $$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \qquad (4)$$

   c) Resolviendo

   $$\text{de }(1): x = -\frac{1}{2\lambda} \qquad (5)$$

   $$\text{de }(2): y = \frac{1}{\lambda} \qquad (6)$$

   $$\text{de }(3): z = -\frac{1}{\lambda} \qquad (7)$$

   sustituir (5), (6), y (7) en (4)

   $$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1 \Leftrightarrow 1 + 4 + 4 = 4\lambda^2 \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{3}{2}$$

   d) Si $\lambda = \frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{3},\quad y = \frac{2}{3},\quad z = -\frac{2}{3} \quad\Rightarrow P\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

9. El plano $x + y + z = 24$ cruza al paraboloide $z = x^2 + y^2$ en una elipse. Calcule los puntos más bajos y altos de la elipse.

   Solución:

   Queremos determinar el máximo y el mínimo de la función $f(x,y,z) = z$ sujeto a las restricciones

   $$\begin{aligned} g(x,y,z) &= x + y + z - 24 = 0 \\ h(x,y,z) &= x^2 + y^2 - z = 0 \end{aligned}$$

   entonces definimos la función de Lagrange

   $$F(x,y,z) = z + \lambda(x + y + z - 24) + \mu(x^2 + y^2 - z)$$

   las derivadas parciales de F son:

   $$\frac{\partial F}{\partial x} = \lambda + 2\mu x = 0 \qquad (1)$$

   $$\frac{\partial F}{\partial y} = \lambda + 2\mu y = 0 \qquad (2)$$

   $$\frac{\partial F}{\partial z} = 1 + \lambda - \mu = 0 \qquad (3)$$

   $$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y + z - 24 = 0 \, (4)$$

   $$\frac{\partial F}{\partial \mu} = x^2 + y^2 - z = 0 \qquad (5)$$

si $\mu = 0$ en (2)entonces $\lambda = 0$, pero esto contradice a (3), por lo que se tiene que μ debe ser diferente de cero.

Luego, si $\mu \neq 0$ se tiene $2\mu = -\lambda = 2\mu y$ y por tanto $x = y$ reemplazando $x = y$ en (5), se obtiene $z = 2x^2$ de modo que (4) se convierte en $2x^2 + 2x - 24 = 0$ de donde $x = -4$ ó $x = 3$

Así, el punto más bajo es $(3, 3, 18)$, el punto más alto es $(-4, -4, 32)$.

10. Un depósito tiene la forma de un cilindro circular recto de radio 5 unidades, terminando en cada uno de los extremos con una tapa cónica. Si el volumen de este depósito es de 200 unidades cúbicas, hallar la altura H del cilindro y la altura de cada una de las tapas cónicas de modo que la superficie del depósito sea mínima.

Solución:

De los datos, el área del depósito es

$$A = 2\pi r H + 2\pi r g$$

$$A = 2\pi\,(5)\,H + 2\left(5\pi\sqrt{5^2 + h^2}\right)$$

$$= 10\pi H + 10\pi\sqrt{25 + h^2} \tag{1}$$

Por el dato, el volumen del depósito es:

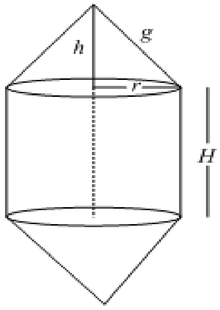
$$V = \pi r^2 H + 2(\tfrac{1}{3}\pi r^2 h) = \pi\,(5)^2\,H + \frac{2}{3}\pi\,(5)^2\,h = 200\pi$$

entonces, $H + \dfrac{2}{3}h = 8$ (2)

Así el problema consiste en minimizar

$$A\,(H, h) = 10\pi H + 10\pi\sqrt{25 + h^2}$$

sujeto a la restricción $f\,(H, h) = H + \dfrac{2}{3}h - 8 = 0$ $(*)$



por multiplicadores de Lagrange:

$$F\,(H, h, \lambda) = 10\pi H + 10\pi\sqrt{25 + h^2} + \lambda\left(H + \frac{2}{3}h - 8\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial H} = 10\pi + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -10\pi \tag{3}$$

$$\frac{\partial F}{\partial h} = \frac{10\pi h}{\sqrt{25 + h^2}} + \frac{2}{3}\lambda = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = H + \frac{2}{3}h - 8 = 0 \tag{5}$$

Reemplazando (3) en (4)

$$\frac{10\pi h}{\sqrt{25 + h^2}} + \frac{2}{3}\,(-10)\,\pi = 0 \Rightarrow \frac{h}{\sqrt{h^2 + 25}} = \frac{2}{3} \Rightarrow h = 2\sqrt{5} \tag{6}$$

Reemplazando (6) en (5): $H = 8 - \dfrac{4}{3}\sqrt{5}$ (7)

Luego, el punto crítico es: $\left(8 - \dfrac{4}{3}\sqrt{5}, 2\sqrt{5}\right)$.

Aparte, analizaremos los casos $h = 0$ y $H = 0$.

Si $h = 0$ en $(*)$ entonces $H = 8$, Así,

$$A\,(8, 0) = 10\pi\,(8) + 10\pi\,(5) = 10\pi\,(13) = 130\pi$$

Si $H = 0$ en $(*)$ entonces $h = 12$, Así,

$$A\,(0, 12) = 10\pi\sqrt{25 + 144} = 10\pi\,(13) = 130\pi$$

Evaluamos la función en el punto crítico

$$A\left(8 - \frac{4}{3}\sqrt{5}, 2\sqrt{5}\right) = 10\pi\left(8 - \frac{4}{3}\sqrt{5}\right) + \left(10\pi\sqrt{45}\right) = 10\pi\,(9{,}689)$$

Comparando los resultados vemos que la superficie es mínima cuando $H = 8 - \dfrac{4}{3}\sqrt{5}$ y $h = 2\sqrt{5}$.

11. Hállese el nivel de producción máximo de la función $f(x,y) = 100x^{1/4}y^{3/4}$. Si el costo total del trabajo es a 48 dólares por unidad y el capital a 36 dólares por unidad y se limita a 100, 000 dólares.

    Solución

    x: Unidad de trabajo

    y: Unidad de capital

    Del límite sobre el costo del trabajo y del capital obtenemos la restricción

    $48x + 36y = 100,000$

    Usando el método de Lagrange, hacemos $g(x,y) = 48x + 36y - 100,000 = 0$ y escribimos

    $$F(x,y,\lambda) = 100x^{1/4}y^{3/4} + \lambda(48x + 36y - 100,000)$$

    las derivadas parciales de F son:

    $$\frac{\partial F}{\partial x} = 25x^{-3/4}y^{3/4} + 48\lambda = 0 \tag{1}$$

    $$\frac{\partial F}{\partial y} = 75x^{1/4}y^{-1/4} + 36\lambda = 0 \tag{2}$$

    $$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 48x + 36y - 100,000\lambda = 0 \tag{3}$$

    despejando λ de (1) tenemos $\lambda = -\dfrac{25x^{-3/4}y^{3/4}}{48}$ y sustituyendo en (2) tenemos

    $$75x^{1/4}y^{-1/4} - \frac{75}{4}x^{-3/4}y^{3/4} = 0, \text{ multiplicando por } x^{3/4}y^{1/4}$$

    se obtiene $4x - y = 0$, luego sustituyendo $y = 4x$ en $(3):\ x = \dfrac{3125}{6}$, $y = \dfrac{6250}{3}$. Finalmente la producción máxima es $f(\dfrac{3125}{6}, \dfrac{6250}{3}) = 147314$

12. Sea $T(x,y,z) = 100 + x^2 + y^2$ la temperatura en cada punto de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 50$. Hállese la temperatura máxima en la curva formada por la intesección de la esfera y el plano $x + y + z = 5$.

    Solución:

    En este caso tenemos dos restricciones

    $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 50 = 0, \quad h(x,y,z) = x + y + z - 5 = 0$

    definamos la función F como:

    $F(x,y,z,\lambda,\mu) = 100 + x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 50) + \mu(x + y + z - 5)$

    derivando obtenemos el sistema

    $$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2x\lambda + \mu = 0 \tag{1}$$

    $$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 2y\lambda + \mu = 0 \tag{2}$$

    $$\frac{\partial F}{\partial z} = 2z\lambda + \mu = 0 \tag{3}$$

    $$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 50 = 0 \tag{4}$$

    $$\frac{\partial F}{\partial \mu} = x + y + z - 5 = 0 \tag{5}$$

    igualando (1) y (2) se tiene $x = y$, $\lambda = -1$, $\mu = 0$ (6)

    reemplazando (6) en (3), $z = 0$

    Sustituyendo $z = 0$, $x = y$ en (4) y (5) se tiene $2x^2 = 50$ ó $2x = 5$ (7)

    Las soluciones son $x = \mp 5$, y el valor de $z = 0$ y los puntos críticos son $(5,5,0)$ y $(5,-5,0)$ y $(5/2, 5/2, 0)$. Las temperaturas para estos puntos son: $T(5,5,0) = 150$, $T = (-5,-5,0) = 150$

y $T(5/2, 5/2, 0) = 112{,}5$
Por tanto la temperatura máxima es 150.

13. Dadas las rectas $L_1 : x - 1 = \frac{y}{2} = z$ y $L_2 : x = y = z$. Determinar un punto $P \in L_1$ y otro $Q \in L_2$ tal que la distancia de P y Q sea mínima. Además, determinar esa distancia.

Solución:

Escribimos las rectas en forma vectorial:

Para $L_1 : P_o = (1, 0, 0)$; $\vec{u} = (1, 2, 1)$

Así, $L_1 : P = P_o + t\vec{u}$
$L_1 : P = \{(t + 1, 2t, t), \quad t \in \mathbb{R}\}$

Para $L_2 : P_o = (0, 0, 0)$ $\vec{v} = (1, 1, 1)$

Así: $L_2 : Q = \{(r, r, r), \quad r \in \mathbb{R}\}$

Luego, la distancia entre dos puntos cualesquiera de L_1 y L_2 es:

$d(P, Q) = \sqrt{(t + 1 - r)^2 + (2t - r)^2 + (t - r)^2}$

ó $d^2(P, Q) = (t + 1 - r)^2 + (2t - r)^2 + (t - r)^2$

por tanto, el problema se reduce a minimizar la función: $f(t, r) = d^2(P, Q)$

Hallando los puntos críticos:

$\frac{\partial f}{\partial t} = 2(t + 1 - r) + 2(2t - r)(2) + 2(t - r) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial r} = 2(t + 1 - r)(-1) + 2(2t - r)(-1) + 2(t - r)(-1) = 0$

desarrollando y reduciendo términos semejantes, tenemos el sistema:

$$\begin{aligned} 12t - 8r &= -2 \\ -8t + 6r &= +2 \end{aligned}$$

cuya solución es $t = \frac{1}{2}$; $r = 1$.

Así, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ es punto crítico

Veremos si éste punto crítico da origen a un valor mínimo o un valor máximo utilizando el criterio del Hessiano.

$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 12; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial t} = -8$

$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = 6; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial r} = -8$

$Hf\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}$

$\triangle_{11} = 12 > 0$

$\triangle_{22} = \begin{vmatrix} 12 & -8 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} = 8 > 0$

Por lo tanto $f\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{1}{2}$ es un valor mínimo

Finalmente,

si $t = \frac{1}{2} \Rightarrow P = \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$

si $r = 1 \Rightarrow Q = (1, 1, 1)$

Por lo tanto $d(P, Q) = \sqrt{f(\frac{1}{2}, 1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. En el problema que enunciaremos a continuación, vamos a transformar un problema con restricciones en uno sin restricciones, pero, reduciendo el número de variables.

14. Una caja rectangular sin tapa deberá tener un volumen fijo. ¿Cómo deberá hacerse la caja para emplear en su manufactura la cantidad mínima de material?.

    Solución:

    Sean x, y, z las dimensiones de la caja de volumen fijo $V = xyz$ que es la restricción.

    El área de la superficie de la caja, denotada por A, está dada por:
    $A =$ área de la base + área lateral, que es la función a optimizar.

    $A = xy + 2xz + 2yz$ (1)

    Como $V = xyz \Rightarrow z = \dfrac{V}{xy}$ (2)

    Reemplazando (2) en (1) se tiene $A(x, y) = xy + \dfrac{2V}{y} + \dfrac{2V}{x}$

    $$\frac{\partial A}{\partial x} = y - \frac{2V}{x^2} = 0 \frac{\partial A}{\partial y} = x - \frac{2V}{y^2} = 0.$$

    Resolviendo el sistema se tiene: $x = y = \sqrt[3]{2V}$

    Luego el punto $P = \left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right)$ es punto crítico

    Cálculo del Hessiano:

    $$H(A(x,y)) = \begin{bmatrix} \frac{4V}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{4V}{y^3} \end{bmatrix} \Rightarrow H(A(P)) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

    y mediante el criterio de las submatrices angulares el punto P corresponde a un mínimo. Además $z = \dfrac{V}{xy}$, de donde para $x = y = \sqrt[3]{2V}$, $z = \sqrt[3]{\dfrac{V}{4}}$. Por lo tanto, las dimensiones de la caja deben ser $x = \sqrt[3]{2V}$, $y = \sqrt[3]{2V}$, $z = \sqrt[3]{\dfrac{V}{4}}$.

15. Una compañia planea fabricar cajas abiertas con la forma de un paralelepípedo rectangular, que deben tener un volumen de $500m^3$, ¿qué dimensiones deben tener las cajas para que el Área de su superficie sea mínima?

    Solución:

    Función restricción: $volumen = 500$
    Función objetivo: área de la superficie
    Sean: $x =$ Ancho de la caja, $y =$ Largo de la caja, $z =$ Alto de la caja.
    Area de la base=xy, Áreas de dos lados laterales=$2yz$, Áreas de dos lados frontal y posterior=$2xz$
    Volumen: $xyz = 500$.

    Modelo matemático:

    $$\text{mín} \quad f(x, y, z) = xy + 2yz + 2xz.$$

    $$\text{Sujeta a:} \quad g(x, y, z) = xyz - 500 = 0.$$

    Aplicando el método de Lagrange
    1ro: Definimos la función de Lagrange: $F(x, y, z, \lambda) = xy + 2yz + 2xz + \lambda(xyz - 500)$
    2do: Calculamos los puntos críticos de Lagrange
    $F_x = y + 2z + \lambda(yz) = 0 \ \Rightarrow \ \lambda = -\frac{y+2z}{yz}$ ....(1)
    $F_y = x + 2z + \lambda(xz) = 0 \ \Rightarrow \ \lambda = -\frac{x+2z}{xz}$ ....(2)
    $F_z = 2y + 2x + \lambda(xy) = 0 \ \Rightarrow \ \lambda = -\frac{2y+2x}{xy}$ ....(3)
    $F_\lambda = xyz - 500 = 0$...(4)

    $$\text{de (1) y (2):} \ -\tfrac{y+2z}{yz} = -\tfrac{x+2z}{xz} \ \Rightarrow \begin{cases} xyz + 2xz^2 = xyz + 2yz^2 \\ 2xz^2 - 2yz^2 = 0 \\ 2z^2(x - y) = 0 \\ z = 0, \ x = y \end{cases}$$

de (2) y (3): $-\frac{x+2z}{xz}=-\frac{2y+2x}{xy}\ \Rightarrow \begin{cases} x^2y+2xyz=2xyz+2x^2z \\ x^2y-2x^2z=0 \\ x^2\left(y-2z\right)=0 \\ x=0,\ y=2z \end{cases}$

en (4): $\begin{cases} \left(2z\right)\left(2z\right)z-500=0 \\ 4z^3-500=0 \\ 4\left(z^3-125\right)=0\ z=5,\Rightarrow\ y=10,\ x=10. \end{cases}$

Respuesta: Las dimensiones que deben tener las cajas para que el área de la superficie sea mínima son: ancho 10m, largo 10m y alto 5m.

16. Usando L empleados para la mano de obra y K unidades de capital, una empresa puede elaborar P unidades de su producto, en donde $P\left(L,K\right)=60L^{2/3}K^{1/3}$. Los costos de la mano de obra y del capital son de 64 y 108 por unidad. Suponga que la empresa decide elaborar 2160 unidades de su producto. Aplicando el método de Lagrange determine el número de empleados y la cantidad de capital que deben emplearse con objeto de minimizar el costo total.

Solución:

Función restricción: producción= 2160 Función objetivo: costo total

Producción: $P\left(L,K\right)=60L^{2/3}K^{1/3}=2160$

Costo total: $64L+108K$

Modelo matemático:

$$\text{máx}\quad f\left(L,K\right)=64L+108K$$

$$\text{sujeto a:}\quad g\left(L,K\right)=60L^{2/3}K^{1/3}-2160=0.$$

Aplicando el método de Lagrange:

1er: $F\left(L,K,\lambda\right)=64L+108K+\lambda\left(60L^{2/3}K^{1/3}-2160\right)$

2do: Puntos crÃticos de Lagrange

$F_L=64+\lambda\left(40\frac{K^{1/3}}{L^{2/3}}\right)=0\ \Rightarrow\ \lambda=-\frac{8L^{1/3}}{5K^{1/3}}$ ....(1)

$F_K=108+\lambda\left(20\frac{L^{2/3}}{K^{2/3}}\right)=0\ \Rightarrow\ \lambda=-\frac{27K^{2/3}}{5L^{2/3}}$................(2)

$F_\lambda=60L^{2/3}K^{1/3}-2160=0$ ....(3)

de (1) y (2): $-\frac{8L^{1/3}}{5K^{1/3}}=-\frac{27K^{2/3}}{5L^{2/3}}\ \Rightarrow \begin{cases} 8L=27K \\ K=\frac{8}{27}L \end{cases}$

en (3): $\begin{cases} 60L^{2/3}\left(\frac{8}{27}L\right)^{1/3}-2160=0 \\ 40L-2160=0 & \Rightarrow\ K=16 \\ L=54 \end{cases}$

Respuesta: Con el objeto de minimizar el costo total se deben usar 54 empleados y 16 unidades de capital.

17. Una compañia planea fabricar cajas abiertas con la forma de un paralelepípedo rectangular, pero cuya superficie tenga una área de $108m^2$, ¿qué dimensiones deben tener las cajas para que el volumen sea máximo?

Solución:

Función objetivo: *volumen*

Función restricción: $area\ de\ la\ superficie=108$

Sea x: ancho de la caja, y: largo de la caja z: alto de la caja
Area de la base: xy; Áreas de dos lados laterales: $2yz$
Areas de dos lados frontal y posterior: $2xz$, Área de la superficie: $xy + 2yz + 2xz = 108$

Modelo matemático:

$$\text{máx el volumen:} \quad f(x, y, z) = xyz$$

$$\text{sujeto a la restricción:} \quad g(x, y, z) = xy + 2yz + 2xz - 108 = 0$$

Aplicando el método de Lagrange
1er: $F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(xy + 2yz + 2xz - 108)$
2do: Puntos críticos de Lagrange
$F_x = yz + \lambda(y + 2z) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{yz}{y+2z}$ ....(1)
$F_y = xz + \lambda(x + 2z) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{xz}{x+2z}$ ....(2)
$F_z = xy + \lambda(2y + 2x) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{xy}{2y+2x}$...............(3)
$F_\lambda = xy + 2yz + 2xz - 108 = 0$.................................(4)

$$\text{de (1) y (2):} \; -\frac{yz}{y+2z} = -\frac{xz}{x+2z} \Rightarrow \begin{cases} xyz + 2yz^2 = xyz + 2xz^2 \\ 2yz^2 - 2xz^2 = 0 \\ 2z^2(y - x) = 0 \\ z = 0, \; y = x \end{cases}$$

$$\text{de (2) y (3):} \; -\frac{xz}{x+2z} = -\frac{xy}{2y+2x} \Rightarrow \begin{cases} 2xyz + 2x^2z = x^2y + 2xyz \\ 2x^2z - x^2y = 0 \\ x^2(2z - y) = 0 \\ x = 0, \; y = 2z \end{cases}$$

$$\text{en (4):} \begin{cases} 4z^2 + 4z^2 + 4z^2 - 108 = 0 \\ 12z^2 - 108 = 0 \\ 12\left(z^2 - 9\right) = 0 \\ z = -3, \; z = 3 \end{cases} \qquad \text{si } z = 3 \Rightarrow y = 6, \; x = 6$$

Respuesta: Las dimensiones que deben tener las cajas para que el volumen sea máximo son: ancho 6m, largo 6m y alto 3m.

18. La función de producción de una empresa es $P(L, K) = 80L^{3/4}K^{1/4}$ en donde L y K representan el número de unidades de mano de obra y de capital utilizadas y P es el número de unidades elaboradas del producto. Cada unidad de mano de obra tiene un costo de 60 y cada unidad de capital cuesta 200; la empresa dispone de 40000 destinados a producción. Aplicando el método de Lagrange determine el número de unidades de mano de obra y de capital que la empresa debe emplear a fin de obtener una producción máxima.

Solución:
Función objetivo: Producción: $P(L, K) = 80L^{3/4}K^{1/4}$
Función restricción: Costo total: $60L + 200K = 40000$
Modelo matemático:

$$\text{máx la Producción:} \quad P(L, K) = 80L^{3/4}K^{1/4}$$

$$\text{sujeto a la restricción:} \quad \text{Costo total:} \quad 60L + 200K = 40000$$

Aplicando el método de Lagrange
1er: $F(L, K, \lambda) = 80L^{3/4}K^{1/4} + \lambda(60L + 200K - 40000)$
2do: Puntos críticos de Lagrange
$F_L = 60L^{-1/4}K^{1/4} + \lambda(60) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{K^{1/4}}{L^{1/4}}$ ....(1)

$F_K = 20L^{3/4}K^{-3/4} + \lambda\,(200) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = -\frac{L^{3/4}}{10K^{3/4}}$ ....(2)
$F_\lambda = 60L + 200K - 40000 = 0$...(3)
de (1) y (2): $-\frac{K^{1/4}}{L^{1/4}} = -\frac{L^{3/4}}{10K^{3/4}} \;\Rightarrow\; L = 10K$

$$\text{en (3):}\;\begin{cases} 60\,(10K) + 200K - 40000 = 0 \\ 800K - 40000 = 0 \\ K = 50 \end{cases} \qquad \Rightarrow\; L = 500$$

Respuesta: Con el objeto de maximizar la producción se deben emplear 500 unidades de mano de obra y 50 unidades de capital.

19. Se desea diseñar un embalaje rectangular con volumen de $160m^3$, sus lados cuestan 1 *sol* el metro cuadrado, su tapa 2 *soles* el metro cuadrado y el costo del fondo es 3 *soles* el metro cuadrado. ¿Qué dimensiones minimizarán el costo total del embalaje?

Solución:
Función restricción: $volumen = 160$
Función objetivo: *costo total*
Sean x: ancho de la caja, y: largo de la caja, z : alto de la caja
volumen: $xyz = 160$
Análisis del costo:

	Área	Precio	Costo
2 lados laterales	2yz	1	2yz
2 lados, frontal y posterior	2xz	1	2xz
tapa	xy	2	2xy
fondo	xy	3	3xy

Costo total: $2yz + 2xz + 5xy$.
Modelo matemático:

$$\text{mín} \quad f\,(x, y, z) = 2yz + 2xz + 5xy$$

$$\text{sujeto a:} \quad g\,(x, y, z) = xyz - 160 = 0.$$

Aplicando el metodo de Lagrange
1er: $F\,(x, y, z, \lambda) = 2yz + 2xz + 5xy + \lambda\,(xyz - 160)$
2do: Puntos críticos de Lagrange
$F_x = 2z + 5y + \lambda\,(yz) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = -\frac{2z+5y}{yz}$ ....(1)
$F_y = 2z + 5x + \lambda\,(xz) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = -\frac{2z+5x}{xz}$..................(2)
$F_z = 2y + 2x + \lambda\,(xy) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = -\frac{2y+2x}{xy}$..................(3)
$F_\lambda = xyz - 160 = 0$..(4)

$$\text{De (1) y (2):}\; -\frac{2z+5y}{yz} = -\frac{2z+5x}{xz} \;\Rightarrow\; \begin{cases} 2xz^2 + 5xyz = 2yz^2 + 5xyz \\ 2xz^2 - 2yz^2 = 0 \\ 2z^2\,(x - y) = 0 \\ z = 0,\; x = y \end{cases}$$

$$\text{De (2) y (3):}\; -\frac{2z+5x}{xz} = -\frac{2y+2x}{xy} \;\Rightarrow\; \begin{cases} 2xyz + 5x^2y = 2xyz + 2x^2z \\ 5x^2y - 2x^2z = 0 \\ x^2\,(5y - 2z) = 0 \\ x = 0,\; y = \frac{2}{5}z \end{cases}$$

$$\text{en (4):}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{2}{5}z\right)\left(\frac{2}{5}z\right)z=160\\ \frac{4}{25}z^3-160=0\\ \frac{4}{25}\left(z^3-1000\right)=0\\ z=10\end{array}\right. \quad \Rightarrow\ x=4,\ y=4$$

Respuesta: Las dimensiones que deben tener las cajas para que el costo sea mínimo son: ancho 4m, largo 4m y alto 10m.

4.4. Ejercicios propuestos para Extremos Condicionados.

1. Determine los extremos de las siguientes funciones sujeta a la restricción que se indica:
   - $f(x,y)=4xy$ sujeta a $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$
   - $f(x,y)=xy$ sujeta a $x+y=10$
   - $f(x,y)=x^2+y^2$ sujeta a $x+y-4=0$
   - $f(x,y)=x^2-y^2$ sujeta a $y-x^2=0$
2. Un granjero tiene 200 m de tela metálica que va a utilizar para construir tres lados de un corral rectangular haciendo uso, como cuarto lado del corral, de un muro recto que ya existe. ¿Qué dimensiones maximizarán el área del corral?
3. Hallar los puntos de la gráfica de $y=4-x^2$ que están más próximos y más alejados del punto $(0,2)$.
4. Determina los puntos sobre la curva $x^2y=2$ más próximos al origen.
5. Determina el valor de tres números reales cuya suma sea 1000 y cuyo producto sea máximo.
6. Se pretende construir una caja rectangular sin tapa de volumen 12 litros. El material para el fondo cuesta 4 soles el decímetro cuadrado, el de los dos laterales a 3 soles y el de los otros dos a 2 soles. ¿Qué dimensiones de la caja tiene un coste de fabricación mínimo?.
7. Halle las dimensiones de una caja rectangular abierta con superficie A y volumen máximo.
8. Una caja rectangular descansa sobre el plano XY con un vértice en el origen. Halla el volumen máximo de la caja si su vértice opuesto al origen pertenece al plano $6x+4y+3z=24$.
9. Halle el punto de la recta, intersección de los planos $x-y=2$, $x-2z=4$ que es el más próximo al origen de coordenadas.
10. Calcule el volumen máximo posible de una caja rectangular con sus caras paralelas a los planos coordenados y que está inscrita en el elipsoide $16x^2+4y^2+9z^2=144$.
11. Sea C el arco contenido en el primer octante de la curva en que se intersecan el paraboloide $2z=16-x^2-y^2$ y el plano $x+y=4$. Encuentre los puntos de C más cercano y más alejado del origen.
12. Calcule el área máxima de un triángulo rectángulo cuyo perímetro es de 4 unidades.
    Rpta. El área máxima es $A(\dfrac{4}{2+\sqrt{2}},\dfrac{4}{2+\sqrt{2}})=4(3+2\sqrt{2})$.
13. Encontrar el mínimo de la función $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ sujeta a las restricciones $2x+y+z=1$, $-x+2y-3z=4$.
    Rpta. El mínimo de $f(1/3,16/15,-11/15)=402/225$

14. Maximizar $f(x, y, z) = xyz$ con restricciones $x^2 + z^2 = 5$, $x - 2y = 0$.
    Rpta. $f(\sqrt{10/3}, \sqrt{5/6}, \sqrt{5/3}) = 5\sqrt{15}/9$.

15. Calcúlese el mínimo de $xy+yz$ para los puntos (x, y, z) que satisfacen las relaciones $x^2+y^2 = 2$, $zy = 2$.
    Rpta. mínimo 1 y máximo 3.

16. Encuentre el máximo de la función $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sobre la curva de intersección del plano $x - y + z = 1$ con el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
    Rpta. El valor máximo de f en la curva es $3 + \sqrt{29}$.

17. Halle los valores extremos de la función $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$.
    Rpta. $f(0, \pm 1) = 2$ valor máximo; $f(\pm 1, 0) = 1$ valor mínimo.

18. Determine los puntos sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que estén más cercanos y más alejados del punto $(3, 1, -1)$.
    Rpta. Más cercano $1/\sqrt{11}(6, 2, -2)$; más alejado $1/\sqrt{11}(-6, -2, 2)$.

19. El plano $x + y + 2z = 2$ cruza el paraboloide $z = x^2 + y^2$ formando una elipse. Determine los puntos sobre esta elipse que estén más cerca y los que estén más lejos del origen.
    Rpta. Más cercano $1/2(1, 1, 1)$; más alejado $(-1, -1, 2)$.

20. Determine las dimensiones de la caja rectangular de máximo volumen que está en el primer octante, limitado por los planos coordenados y el plano $x + 2y + z = 6$.
    Rpta. $x = 2$, $y = 1$, $z = 2$.

21. Un cilindro circular recto cerrado tendrá un volumen de 1000 pies^3. La tapa y la base del cilindro se hacen de un metal que cuesta 2 dólares por pie^2. La cara lateral se cubre con un metal que cuesta 2,5 dólares por pie^2. Calcule el costo de construcción mínima.
    Rpta. El costo mínimo es $C(\frac{5}{8}\frac{\sqrt[3]{2560}}{\pi}, \frac{\sqrt[3]{2560}}{\pi}) \simeq 1284,7$.

22. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $g\,(1) = g\,(2)$ considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f\,(x, y) = \int_{xy}^{x+y} g\,(t)\,dt$. Demuestre que f tiene un punto crítico en $(1, 1)$. Estudie la naturaleza del extremo en este punto crítico, en cada uno de los siguientes casos:

    a) $g\,(1) = 0, \quad g'\,(1) = 1, \quad g'\,(2) = 2$

    b) $g\,(1) = 3, \quad g'\,(1) = 3, \quad g'\,(2) = 4$

23. Hallar los extremos de la función $f\,(x, y) = x^2y$ sujeta a la restricción $2x^2 + y^2 = 3$
    Rpta. $f\,(1, 1) = 1$ máximo, $f\,(1, -1) = -1$ mínimo, $f\,(-1, 1,) = 1$ máximo, $f\,(-1, -1) = -1$ mínimo.

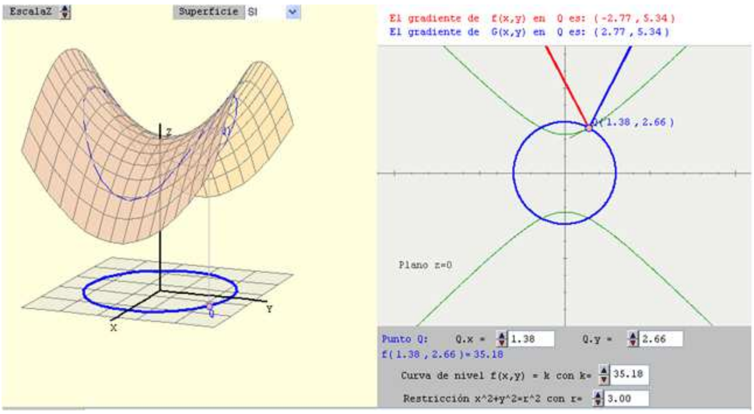
24. Usando multiplicadores de Lagrange. Determine los extremos de la función $f(x, y, z) = y + xz - 2x^2 - y^2 - z^2$ sujeta a la restricción $x + y + z = 35$
    Rpta. En $(, 9, 11, 15)$ existe máximo.

25. Determine los puntos (x, y, z) del elipsoide $2x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 70$ de modo que la suma de su primera y tercera coordenada sea la mayor y la menor posible.
    Rpta. El valor máximo es 7 encontrado en $(5, 0, 2)$ el valor mínimo es -7 encontrado en $(-5, 0, -2)$.

26. Hallar el paralelepípedo cuya suma de longitudes de sus aristas sea L, que tenga el mayor volumen posible.
    Rpta. El cubo.

27. Determine los puntos más alto y más bajo de la elipse de intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $2x + y - z = 4$.
    Rpta. $(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \sqrt{5} - 4)$ es el punto más alto y $(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, -\sqrt{5} - 4)$ es el punto más bajo.

Uso de software:
Utilice el Applet interactivo que se encuentra en la página web de la Dra. Elena Alvarez Saiz
Elena Alvarez
personales.unican.es/alvareze/index.html
Debe seleccionar: Applets interactivos, enlace.
1. En la gráfica de la izquierda se muestra el problema de obtener los extremos condicionados de la función $f(x, y) = 30 - x^2 + y^2$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 9$, como se puede apreciar en esta gráfica los extremos condicionados se encuentran sobre una curva en el espacio; las coordenadas de este se puede calcular -aproximadamente- moviendo el mouse sobre la gráfica.

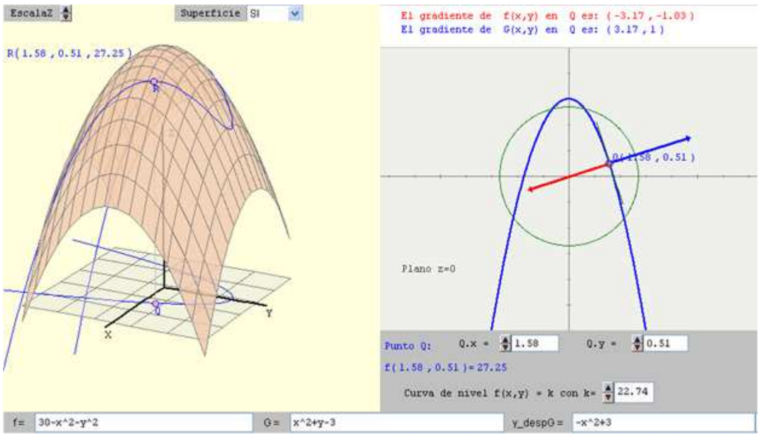


Superficie SI

El gradiente de f(x,y) en Q es: (-2.77 , 5.34)
El gradiente de G(x,y) en Q es: (2.77 , 5.34)

Punto Q: Q.x = 1.38 Q.y = 2.66
f(1.38 , 2.66)= 35.18
Curva de nivel f(x,y) = k con k= 35.18
Restricción x^2+y^2=r^2 con r= 3.00

2. En la segunda gráfica se tiene el problema de optimizar la función $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ sujeta a la restricción $x^2 + y - 3 = 0$; y como se puede apreciar en la gráfica de la derecha estamos en el máximo condicionado pues los vectores gradiente son paralelos.



Superficie SI

El gradiente de f(x,y) en Q es: (-3.17 , -1.03)
El gradiente de G(x,y) en Q es: (3.17 , 1)

Punto Q: Q.x = 1.58 Q.y = 0.51
f(1.58 , 0.51)= 27.25
Curva de nivel f(x,y) = k con k= 22.74
f= 30-x^2-y^2 G= x^2+y-3 y_despG= -x^2+3

4.5. Extremos absolutos en regiones compactas.

Teorema 4.5.1 *Sea* $f : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función real definida en un conjunto compacto* B *de* $\mathbb{R}^n$. *Supongamos que* f *es continua. Entonces existen puntos* $M, m \in B$ *tales que* $f(M) \geq f(x)$ $\forall x \in B$ *y* $f(m) \leq f(x)$ $\forall x \in B$.

Proceso para determinar extremos absolutos:

1. Encontrar todos los puntos criticos de la función que estan en el interior de la región D y determinar el valor de la función en dichos puntos.
2. Encontrar todos los extremos de la función en la frontera. Esto involucra el uso de Cálculo en una variable.
3. El valor más grande y el valor más pequeño de los dos pasos anteriores son el máximo absoluto y el mínimo absoluto respectivamente.

4.6. Problemas resueltos

1. Encontrar el mínimo y el máximo absoluto de $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 2x^2y + 4$ sobre el rectángulo dado por $-1 \leq x \leq 1$ y $-1 \leq y \leq 1$

   Solución:
   Empecemos encontrando los puntos críticos en el interior del rectángulo. Calculamos las derivadas parciales

   $$f_x = 2x - 4xy \qquad f_y = 8y - 2x^2$$

   y resolvemos el sistema:

   $$\begin{aligned} 2x - 4xy &= 0 \\ 8y - 2x^2 &= 0 \end{aligned}$$

   Resolvemos la segunda ecuación, obteniendo $y = \frac{x^2}{4}$
   sustituyendo en la primera ecuación nos da.

   $$2x - 4x(\frac{x^2}{4}) = 2x - x^3 = x(2 - x^2) = 0$$

   lo cual nos dice que las raices son: $x = 0$, $x = \pm\sqrt{2} = \pm 1{,}4142$. Ahora debemos descartar los dos últimos , pues no están dentro del rectángulo. Así sólo nos quedamos con un valor $x = 0$. Sustituyendo $x = 0$ en la ecuación tenemos $y = \frac{0^2}{4} = 0$ de donde el punto críticos es $(0,0)$, que al ser evaluado en la función da $f(0,0) = 4$.
   Ahora buscaremos los extremos de la función en la frontera del rectángulo :
   Primero Trabajemos con el lado derecho del rectangulo donde $x = 1$, para $-1 \leq y \leq 1$
   Note que a lo largo de este lado $x = 1$, nos aprovechamos de esto para definir una nueva función pero de una sóla variable como sigue

   $$g_1(y) = f(1,y) = 1^2 + 4y^2 - 2(1^2)y + 4 = 5 + 4y^2 - 2y$$

   Note que encontrar los extremos absolutos de $f(x,y)$ a lo largo del lado derecho es equivalente a encontrar los extremos absolutos de $g_1(y)$ en el rango $-1 \leq y \leq 1$. Aqui es donde recurrimos a Cálculo en una variable:

   $$g_1^{'}(y) = 8y - 2 \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{1}{4}$$

valor que está en el rango de y , Ahora formamos una lista:

$$g_1(-1) = 11 = f(1,-1), \qquad g_1(1) = 7 = f(1,1), \qquad g_1(\frac{1}{4}) = 4{,}75 = f(1,1/4)$$

Segundo trabajamos con el lado izquierdo del rectángulo donde $x = -1, \qquad -1 \leq y \leq 1$. Definimos una nueva función como sigue:

$$g_2(y) = f(-1,y) = (-1)^2 + 4y^2 - 2(-1)^2y + 4 = 5 + 4y^2 - 2y$$

Note que encontrar los extremos absolutos de $f(x,y)$ a lo largo del lado derecho es equivalente a encontrar los extremos absolutos de $g_2(y)$ en el rango $-1 \leq y \leq 1$. lo cual, a su vez es identico a lo hecho para $g_1(y)$, Ahora formamos una lista:

$$g_2(-1) = 11 = f(-1,-1), \qquad g_2(1) = 7 = f(-1,1), \qquad g_2(\frac{1}{4}) = 4{,}75 = f(-1,1/4)$$

Tercero trabajamos con el lado superior del rectángulo definido por :

$$y = 1, \qquad -1 \leq x \leq 1$$

Definimos una nueva función como sigue:

$$h_1(y) = f(x,1) = x^2 + 4(1^2) - 2x^2(1) + 4 = 8 - x^2$$

Note que encontrar los extremos absolutos de $f(x,y)$ a lo largo del lado superior es equivalente a encontrar los extremos absolutos de $h_1(x)$ en el rango $-1 \leq x \leq 1$.

$$h_1^{'}(x) = -2x \qquad \Rightarrow \qquad x = 0$$

Ahora formamos una lista:

$$h_1(-1) = 7 = f(-1,1), \qquad h_1(1) = 7 = f(1,1), \qquad h_1(0) = 8 = f(0,1)$$

Note que tenemos varios valores repetidos para las funciones g_1, g_2, h_1, no se preocupe, esto siempre sucede.

Finalmente, tomamos el **cuarto** lado definido por

$$h_2(x) = f(x,-1) = x^2 + 4(-1)^2 - 2x^2(-1) + 4 = 8 + 3x^2$$

Note que encontrar los extremos absolutos de $f(x,y)$ a lo largo del lado inferior es equivalente a encontrar los extremos absolutos de $h_2(x)$ en el rango $-1 \leq x \leq 1$.

El punto crítico de h_2 es

$$h_2^{'}(x) = 6x \qquad \Rightarrow \qquad x = 0$$

Ahora formamos una lista:

$$h_2(-1) = 11 = f(-1,-1), \qquad h_2(1) = 11 = f(1,-1), \qquad h_2(0) = 8 = f(0,-1)$$

El paso final de este (largo...) proceso es recolectar todos los valores de la función $f(x,y)$ que hemos calculado:

$$\begin{array}{ccc} f(0,0) = 0 & f(1,-1) = 11 & f(1,1) = 7 \\ f(1,1/4) = 4{,}75 & f(-1,1) = 7 & f(-1,-1) = 11 \\ f(-1,1/4) = 4{,}75 & f(0,1) = 8 & f(0,-1) = 8 \end{array}$$

El mínimo absoluto está en $(0,0)$ ya que tiene el menor valor de la función y el máximo absoluto está en los puntos $(1,-1)$ y $(-1,-1)$ puesto que ambos dan el mayor valor de la función.

2. Encontrar el mínimo y máximo absoluto de $f(x,y)=2x^2-y^2+6y$ sobre el disco de radio 4, $x^2+y^2\leq 16$
   Solución:
   Primero encontremos los puntos críticos de la función en el interior del disco.
   $$f_x=4x \qquad f_y=-2y+6$$
   Para calcular el punto crítico resolvemos el sistema
   $$\begin{aligned} 4x &= 0 \\ -2y+6 &= 0 \end{aligned}$$
   de donde obtenemos que $x=0$ y $y=3$ que evaluado en la función nos da $f(0,3)=9$.
   Consideremos, ahora, la frontera, de la ecuación $x^2+y^2=16$ despejamos x^2 y su valor lo sustituimos en la función f; esto es
   $$x^2=16-y^2$$
   $$g(y)=2(16-y^2-y^2+6y=32-3y^2+6y$$
   necesitamos encontrar los extremos absolutos de esta función en el rango $-4\leq y\leq 4$ (este es el rango de y para el disco...). Calculamos los puntos críticos de g
   $$g'(y)=-6y+6 \qquad \Rightarrow \qquad y=1$$
   El valor de g en el punto cr´tico y en los extreemos del intervalo para y son
   $$g(-4)=-40, \qquad g(4)=8, \qquad g(1)=35$$
   Para el cálculo de los correspondientes x evaluamos en el circulo $x^2+y^2=16$
   $$\begin{aligned} y=-4: &\quad x^2=16-16=0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \\ y=4: &\quad x^2=16-16=0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \\ y=1: &\quad x^2=16-1=15 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{15}=\pm 3{,}87 \end{aligned}$$
   Los correspondientes valores para f son:
   $$\begin{aligned} g(-4) &= -40=f(0,-4) \\ g(4) &= 8=f(0,4) \\ g(1) &= 35=f(-\sqrt{15},1)=35 \;\; y \;\; f(\sqrt{15},1)=35 \end{aligned}$$
   Comparando estos valores con el encontrado para la función al inicio concluimos que en mínimo absoluto ocurre en $(0,-4)$ mientras que el máximo absoluto ocurre en $(-\sqrt{15},1)$ y $(\sqrt{15},1)$.

3. Un disco circular tiene la forma de la región acotada por $x^2+y^2=1$. Si la temperatura de cualquier punto (x,y) del disco está dada por la función $T(x,y)=2x^2+y^2-y$; determine los puntos más frios y más calientes en el disco.
   Solución:
   Debemos determinar los extremos absolutos de la función $T(x,y)=2x^2+y^2-y$, en la región $B=\{(x,y)/x^2+y^2\leq 1\}$. La función $g(x,y)=x^2+y^2-1=0$, que limita a la región B es una circunferencia, para la cual tenemos que en cada punto (x,y) de esa curva la función $T(x,y)$ es diferenciable.

   1. Se localizan los puntos críticos de $T(x,y)$ que estén dentro de B, para ello se resuelve:
      $T_x=4x=0$ y $T_y=2y-1=0$
      de donde se obtiene el punto crítico dentro de B, $X_1=(0,1/2)$.

2. Pasamos ahora a determinar los extremos de $T(x,y)$ en la frontera de B, para ello resolvemos el problema de extremos condicionados de $T(x,y)$ con la restricción $g(x,y) = 0$. formulamos la función de Lagrange: $F(x,y,\lambda) = 2x^2 + y^2 - y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$
de donde $T_x = 4x + 2\lambda x = 0$, $T_y = 2y - 1 + 2\lambda y = 0$, $T_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0$ de donde se obtienen los puntos:
$X_2 = (0,1), X_3(0,-1), \quad X_4 = (\sqrt{3}/2, -1/2), \quad X_5 = (-\sqrt{3}/2, -1/2)$.
Se tiene entonces $T(0,1/2) = -1/4, T(0,1) = 0, T(0,-1) = 2, T(\sqrt{3}/2, -1/2) = 9/4$, $T(-\sqrt{3}/2, -1/2) = 9/4$.
Así el mínimo absoluto de $T(x,y)$ en B se encuentre en el punto $X_1 = (0,1/2)$ (dentro de B en el punto crítico de $T(x,y)$, también es un extremo local) el cual vale $-1/4$, y el máximo absoluto de $T(x,y)$ en B se encuentra en los puntos $X_4 = (\sqrt{3}/2, -1/2)$ *y* $X_5 = (-\sqrt{3}/2, -1/2)$ (en la frontera de B), el cual vale $9/4$.

4. Hallar en la región $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq r^2\}$ los puntos donde la función $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$ alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos.
Solución:
A es un conjunto cerrado y acotado y f es una función continua, luego el teorema de Weiertrass nos garantiza la existencia de mínimo y máximo absolutos.
Comenzamos por determinar los puntos críticos (no condicionados) que pueda tener f en A.

$$\left.\begin{array}{l} f_x^{'} = 2x + y = 0 \\ f_y^{'} = 2y + x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow P_1 = (0,0) \in A \text{ es el único punto fijo además } f(P_1) = f(0,0) = 0.$$

Ahora calcularemos los puntos críticos que se pueden encontrar en la frontera de A, es decir, los condicionados, para los cual distinguimos tres zonas.

- La curva $y = 0$
$$\left.\begin{array}{l} f(x,y) = x^2 + y^2 + xy \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x = 0 \Rightarrow P_1 = (0,0).$$
- La curva $x = 0$
Se obtiene de nuevo el punto $P_1 = (0,0)$.
- La curva $x^2 + y^2 + xy$
Aplicamos el método de los multiplicadores de Lagrange
$F(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + xy + \lambda(x^2 + y^2 r^2)$
Calculamos los puntos criticos:
$$\left.\begin{array}{r} W_x^{'} = 2x + y + 2\lambda x = 0 \\ W_y^{'} = 2y + x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \lambda = -\frac{2x+y}{2x} \\ \lambda = -\frac{2y+x}{2y} \end{array}\right\} \Rightarrow 2xy + y^2 = 2xy + x^2$$
$\Rightarrow x^2 = y^2$ sustituyendo en la tercera ecuación, tenemos $2x^2 = r^2 \Rightarrow x = \pm\dfrac{r}{\sqrt{2}}$
Desechamos la solución negativa porque no se encuentra en A. Por lo tanto, el único punto crítico es $P_3 = (\dfrac{r}{\sqrt{2}}, \dfrac{r}{\sqrt{2}})$, donde $f(P_3) = \dfrac{3r^2}{2}$.
- Los puntos de la frontera que son intersección de las curvas es decir, los vértices
$P_4 = (r,0)$ *y* $P_5 = (0,r)$. donde $f(P_4) = f(P_5) = r^2$.
Comparando los valoress obtenidos en todos los puntos críticos, tenemos:
Mínimo absoluto en $P_1 = (0,0)$ y Máximo absoluto en $P_3 = (\dfrac{r}{\sqrt{2}}, \dfrac{r}{\sqrt{2}})$.

4.7. Problemas propuestos

1. Determinar el máximo y mínimo absoluto de la función $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ en la región $0 \leq x \leq 2$; $-1 \leq y \leq 2$.
   Rpta. El máximo es 13, valor que f alcanza en $(2,-1)$. El mínimo es -5, valor que f alcanza en $(2,3)$ y $(3,2)$.

2. Determinar el menor y mayor valor de la función $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ en el triángulo cuyo borde son las rectas $x = 1$; $y = 1$; $x + y = 1$.
   Rpta. El máximo es 4, valor que f alcanza en $(1,1)$. El mínimo es $-1/3$, valor que f alcanza en $(-1/2, 1/6)$.

3. Hallar los extremos absolutos de la función $f(x,y) = \operatorname{sen} x + \cos y$ en la región
   $K = \{(x,y)/-\pi \leq x \leq \pi, -\pi \leq y \leq \pi\}$
   Rpta. El máximo es 2, valor que f alcanza en $(\pi/2, 0)$. El mínimo es -2, valor que f alcanza en los puntos $(-\pi/2, \pm\pi)$.

4. Determinar los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^2 + x + y^2 + y$ en la región $K = \{(x,y)/x^2 + y^2 \leq 1\}$
   Rpta. El máximo es $1 + \sqrt{2}$, valor que f alcanza en $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. El mínimo es $-1/2$, valor que f alcanza en $(-1/2, -1/2)$.

5. Determinar los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^3 + y^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}y^2$ en la región $K = \{(x,y)/x^2 + y^2 \leq 10\}$
   Rpta. El máximo es $10\sqrt{10} + 15$, valor que f alcanza en $(\sqrt{10}, 0)$.
   El mínimo es $-10\sqrt{10} - 45$, valor que f alcanza en $(0, -\sqrt{10})$.

6. Hallar los extremos absolutos de la función $z = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2x^2 + 3y^2)$ definida en el círculo $x^2 + y^2 \leq 4$.
   Rpta. mínimo en $(0,0)$, máximos en $(0, \pm 1)$.

7. Determinar el máximo y mínimo absoluto de la función $f(x,y) = x^2 y$ en la región
   $x^2 + y^2 \leq 1$.
   Rpta. El máximo es: $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$ valor que f alcanza en $(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}})$; $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}})$.
   El mínimo es $-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$ valor que f alcanza en $(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}})$; $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}})$.

8. Determinar los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 + z^2$ en la región $K = \{(x,y,z)/(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 \leq 16\}$
   Rpta. El máximo es 49, valor que f alcanza en $(14/3, 7/3, 14/3)$. El mínimo es 0, valor que f alcanza en $(0,0,0)$.

9. Determina los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y + 4$ en el semicírculo delimitado por $y > 0$, $x^2 + y^2 \leq 4$.

10. Determina los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2y$ en el recinto limitado por $y = x^2$, $y = 4$.

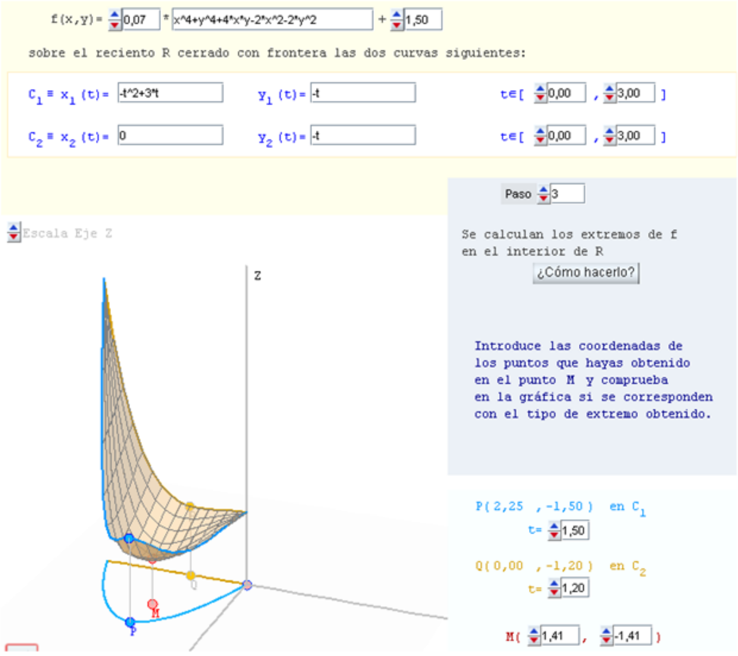
11. halla los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ en el circulo $x^2 - 2x + y^2 - 3 \leq 0$.

12. Halle el valor máximo y el mínimo de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ en el recinto limitado por las rectas $y = 1 - x$, $y = 1 + x$, $y = -1 - x$, $y = -1 + x$.

13. Halle los extremos absolutos de la función $f(x,y) = -x^2 + xy + y^2 - 6x$ en el recinto $A = \{(x,y)/0 \leq x \leq 5, \ -3 \leq y \leq 3\}$

Uso de Software:

En la página web de la Dra. Elena Alvarez Saiz, Seleccione: Applets interactivos, enlace, extremos absolutos en una región cerrada y acotada, luego ejecute los tres pasos.



f(x,y) = 0,07 * x^4+y^4+4*x*y-2*x^2-2*y^2 + 1,50

sobre el reciento R cerrado con frontera las dos curvas siguientes:

$C_1 \equiv x_1(t) =$ -t^2+3*t $\quad y_1(t) =$ -t $\quad t \in [$ 0,00 , 3,00 $]$

$C_2 \equiv x_2(t) =$ 0 $\quad y_2(t) =$ -t $\quad t \in [$ 0,00 , 3,00 $]$

Paso 3

Se calculan los extremos de f
en el interior de R

Introduce las coordenadas de
los puntos que hayas obtenido
en el punto M y comprueba
en la gráfica si se corresponden
con el tipo de extremo obtenido.

P(2,25 , -1,50) en C_1
t= 1,50

Q(0,00 , -1,20) en C_2
t= 1,20

M(1,41 , -1,41)