Limites

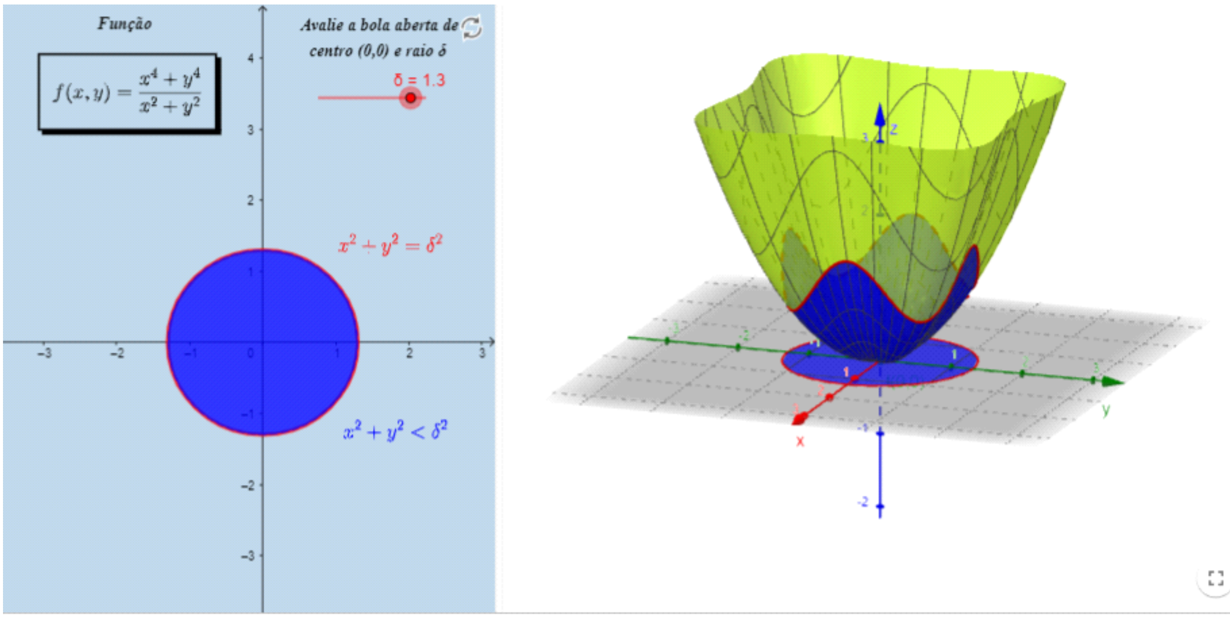
lunes, 3 de mayo de 2021 07:15

Definición 20 *El límite de una función* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es el número real* L*; denotado por*

$$lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L.$$

Si y sólo si $\forall \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 / |f(\mathbf{x}) - L| < \epsilon,$ *siempre que* $0 < ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| < \delta.$

¿¿



2.3.1. Propiedades de los límites

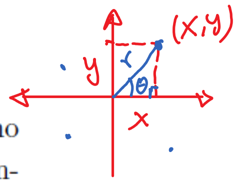
Si $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$ y $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = M$ entonces se cumple que:

a) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})] = \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) + \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = L + M.$

b) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} [f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})] = \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = LM.$

c) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} [\dfrac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}] = \dfrac{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})}{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})} = \dfrac{L}{M}, \quad M \neq 0.$

La siguiente propiedad es sumamente útil cuando se trata de calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$



d) Si la función f puede ser transformada mediante coordenadas polares como $f(r,\theta) = \phi(\theta)\cdot\psi(r)$, donde $\phi(\theta)$ es una función acotada y $\psi(r) \to 0$ cuando $r \to 0$ entonces

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r,\theta) = 0.$$

$x = r\cos\theta$
$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$

$= \lim\limits_{r\to 0} \phi(\theta)\cdot\psi(r)$

Proposición 2.3.1 *Sea* $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida o no en* $(0,0)$ *.*
Si f *satisface las siguientes condiciones:*

a) f *se descompone como el producto de dos funciones* $h(x,y)$ *y* $g(x,y)$ *tales que* $f(x,y) = h(x,y)\cdot g(x,y).$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 0.$

c) $g(x,y)$ *es acotada.*

Proposición 2.3.1 *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida o no en $(0,0)$.* $x \to 0$
Si f satisface las siguientes condiciones:

a) *f se descompone como el producto de dos funciones $h(x,y)$ y $g(x,y)$ tales que $f(x,y) = h(x,y) \cdot g(x,y)$.*

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 0$.

c) *$g(x,y)$ es acotada.*

Entonces, el límite de f existe y es igual a cero, esto es, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Ejemplos.

1. Muestre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = 0$

Solución

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow \forall \underset{\text{pequeño}}{\varepsilon>0},\ \exists \underset{\text{pequeño}}{\delta>0} \text{ tal que si } 0 < \|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y)-0| < \varepsilon$$

$\boxed{\text{Dado } \varepsilon>0}$, debo encontrar $\delta = ??$ tal que

si $0 < \|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Rightarrow 0 < \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} < \delta$

$\Rightarrow 0 < x^2+y^2 < \delta^2$

Luego

$$|f(x,y)-0| = \left|\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} - 0\right| = \left|\frac{(x^2)^2+(y^2)^2+2x^2y^2-2x^2y^2}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{(x^2+y^2)^2-2x^2y^2}{x^2+y^2}\right|$$

$$= \left|\frac{(x^2+y^2)^2-2x^2y^2}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} = x^2+y^2 < \delta^2 = \varepsilon \Rightarrow \delta = \sqrt{\varepsilon}$$