Teorema de la función implícita

lunes, 31 de mayo de 2021 07:38

Teorema de la función Implícita (I)

Sea la función $z = F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ y sea $P_o = (\mathrm{x}_o, y_o) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ($\mathrm{x}_o \in \mathbb{R}^n, y_o \in \mathbb{R}$) un punto tal que $F(P_o) = 0$. Si la función F tiene derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$ continuas en alguna bola $B_\delta(P_o) = B_\delta(\mathrm{x}_o) \times (y_o - \epsilon, y_o + \epsilon)$ y si $\frac{\partial F}{\partial y}(P_o) \neq 0$, entonces $F(\mathrm{x}_o, y_o) = 0$ define una función $f : B_\delta(\mathrm{x}_o) \to (y_o - \epsilon, y_o + \epsilon)$ tal que

$$F(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) = 0 \qquad \forall\ (x_1, \ldots, x_n) \in B_\delta(\mathrm{x}_o)$$

y las derivadas parciales de f se pueden calcular por:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, \ldots, x_n, y)}$$

Observación:

Considere la función $z = f(x, y)$. Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punto tal que $F(x_0, y_0) = 0$. Suponga que la función F tiene derivadas parciales continuas en alguna bola con centro (x_0, y_0) y que $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Entonces $F(x, y) = 0$ se puede resolver para y en términos de x y definir así una función $y = f(x)$ con dominio en una vecindad de x_0, tal que $y_0 = f(x_0)$, lo cual tiene derivadas continuas en $\mathcal{V}$ que pueden calcularse como $y' = f'(x) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)}$, $x \in \mathcal{V}$.

$z = F(x, y)$ que satisface

i) $F(x_0, y_0) = 0$

ii) $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ existen y son continuas $\forall (x,y) \in B_\delta(x_0, y_0)$

iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

$\Rightarrow$ existe $y = f(x)$ una función definida $B_\delta(x_0)$ tal que

i) $F(x_0, f(x_0)) = 0$

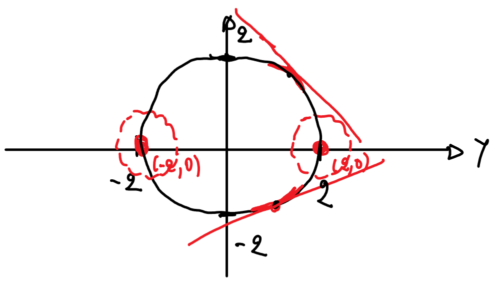
ii) $F(x, f(x)) = 0, \ \forall x \in B_\delta(x_0)$

iii) $y' = f'(x) = \dfrac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}, \ \forall x \in B_\delta(x_0)$

Ejemplo 1

$x^2 + y^2 = 4$

- $y = \sqrt{4 - x^2}$ ✓
- $y = -\sqrt{4 - x^2}$ ✓



Ejemplo 2

Considere la función $F(x, y) = e^{2y+x} + \sin(x^2 + y) - 1$ en el punto (0,0) tenemos (i) $F(0, 0) = 0$. Las derivadas parciales de F son

(ii) $F_x = e^{2y+x} + 2x\cos(x^2 + y)$
$F_y = 2e^{2y+x} + \cos(x^2 + y)$ que son siempre continuas sobre $\mathbb{R}^2$

Además, (iii) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 3 \neq 0$ de modo que **T.F.Im.** garantiza una vecindad de $x = 0$ en la cual podemos definir una función $y = f(x)$ tal que $F(x, f(x)) = 0$. Obsérvese que en este caso no podemos hacer explícita la función $y = f(x)$ sin embargo tal función existe y su derivada es

$$y' = f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{e^{2y+x} + 2x\cos(x^2 + y)}{2e^{2y+x} + \cos(x^2 + y)}$$