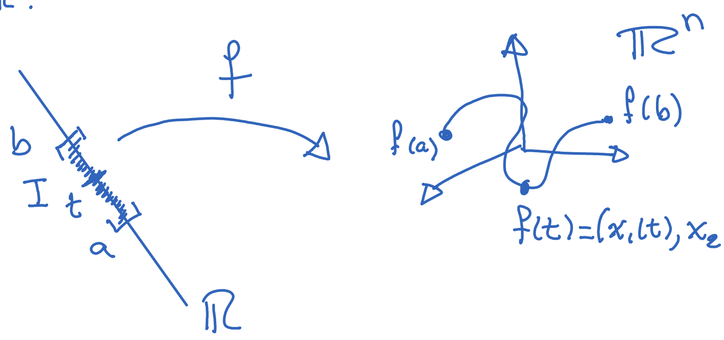
Caminos y longitud de arco

CAMINOS EN Rn

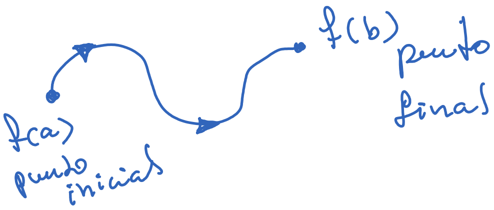
Una función vectorial continua $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definida en $I \subseteq \mathbb{R}$ se llama CAMINO o TRAYECTORIA en el espacio $\mathbb{R}^n$.



$f(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$; $x_i : I \to \mathbb{R}$ funciones coordenadas

observaciones.

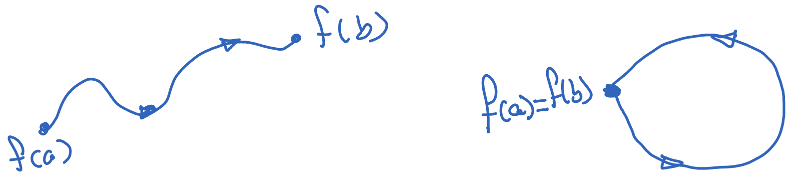
1. Si $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tal que $I = [a,b]$ $\Rightarrow$ $f(a)$ es punto inicial del camino
$f(b)$ es punto final del camino



2. Si $f(a) = f(b)$ diremos que el camino f es cerrado

(No es simple)

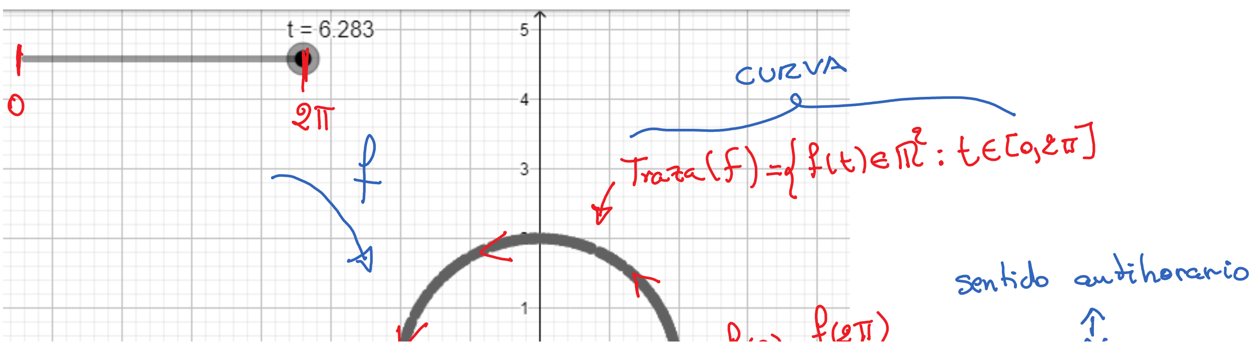
3. Si f es inyectiva en I diremos que f es un camino simple

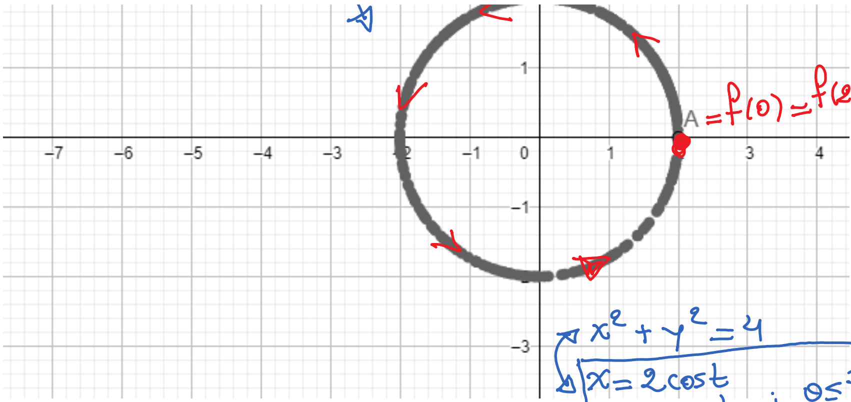


Camino cerrado simple

Ejemplos:

1. $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\underbrace{f(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t)}$





$x^2 + y^2 = 4$

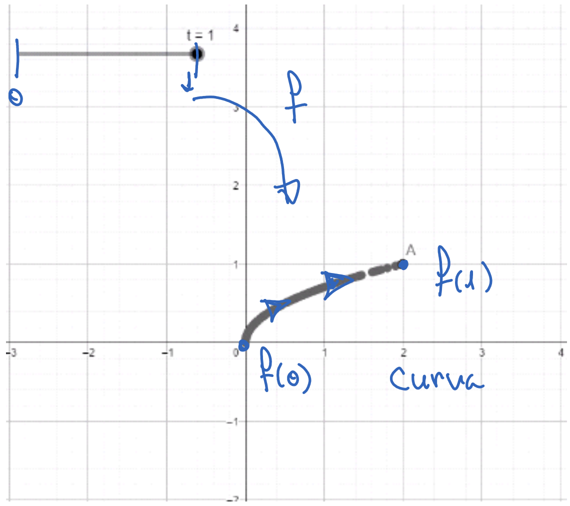
$\boxed{\begin{array}{l} x = 2\cos t \\ y = 2\,\text{sen}\, t \end{array} \;;\; 0 \leq t \leq 2\pi}$

parámetro

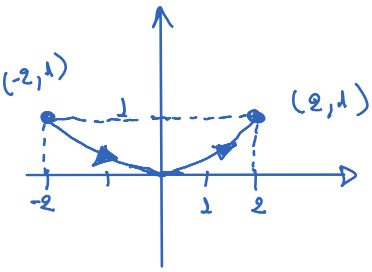
sentido antihorario $\Updownarrow$ sentido positivo

sentido horario $\Updownarrow$ sentido negativo

2. $f: [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (2t^2, t)$



3. Parametrizar la parábola $y = \frac{x^2}{4}$ que une los puntos $(-2,1)$ y $(2,1)$

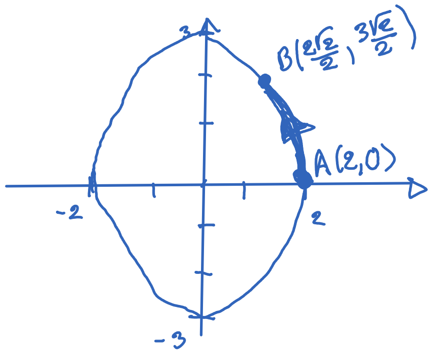


$y = \frac{x^2}{4}$

$\boxed{x = t \rightarrow y = \frac{t^2}{4}}$; $-2 \leq t \leq 2$

- $f(t) = \left(t, \frac{t^2}{4}\right)$; $-2 \leq t \leq 2$ $\leftarrow$ camino que parametriza la parábola

4. Parametrizar la elipse $\boxed{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1}$ desde $A(2,0)$ hasta $B\left(\frac{2\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ recorrida en sentido antihorario.



$\frac{x}{2} = \cos t \rightarrow x = 2\cos t$

$\frac{y}{3} = \text{sen}\, t \rightarrow y = 3\,\text{sen}\, t$

$\boxed{f(t) = (2\cos t, 3\,\text{sen}\, t) \;;\; 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}}$

Teorema.

Sea $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una función vectorial, $f(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ entonces f es diferenciable (de clase C^k) en el punto $t_0 \in I$ si y sólo si $x_i : I \to \mathbb{R}$ sus funciones coordenadas son diferenciables (de clase C^k) en t_0.

$\Downarrow$ cont.

$x_i^{(k)}$ cont

Definición

Sea $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ un camino diferenciable, al vector $f'(t)$ se le llama el vector de velocidad del camino en el punto $f(t) \in \mathbb{R}^n$.

Definición

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un camino de clase C^1, la longitud de f entre $t=a$ y $t=b$ denotada por $l(f)$ está dada por

$$l(f) = \int_a^b \|f'(t)\| \, dt$$

Ejemplo 1

Sea $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (2\cos t, 2\,\text{sen}\, t)$, halle su longitud de arco.

Solución

- $f'(t) = (-2\,\text{sen}\, t, 2\cos t)$; $t \in [0, 2\pi]$
- $\|f'(t)\| = \sqrt{(-2\,\text{sen}\, t)^2 + (2\cos t)^2} = 2$

$$\Rightarrow \quad l(f) = \int_0^{2\pi} 2\, dt = 2t \Big|_0^{2\pi} = 4\pi \ u$$

Ejemplo 2

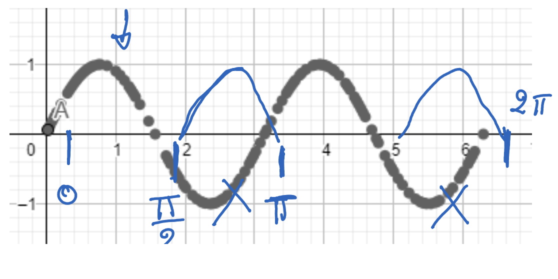
$f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos^3 t, \text{sen}^3 t)$. Halle su longitud de arco

Solución

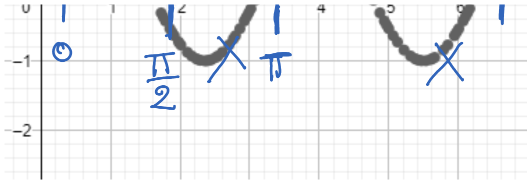
- $f'(t) = (3\cos^2 t\,(-\text{sen}\, t), 3\,\text{sen}^2 t \cdot (\cos t)) = (-3\cos^2 t\,\text{sen}\, t, 3\,\text{sen}^2 t \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$
- $\|f'(t)\| = \sqrt{(-3\cos^2 t\,\text{sen}\, t)^2 + (3\,\text{sen}^2 t \cos t)^2} = \sqrt{9\cos^4 t\,\text{sen}^2 t + 9\,\text{sen}^4 t \cos^2 t} =$

$$= 3|\cos t||\text{sen}\, t| \ ; \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\Rightarrow l(f) = \int_0^{2\pi} 3|\cos t||\text{sen}\, t|\, dt = 3\int_0^{2\pi} \left|\frac{\text{sen}(2t)}{2}\right| dt = \frac{3}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi} |\text{sen}\, 2t|\, dt}_{} = \frac{3}{2}\cdot 4\int_0^{\pi/2} \text{sen}(2t)\, dt$$



$$= 6\left[\frac{-\cos(2t)}{2}\right]_0^{\pi/2} = 3 - (-3) = 6$$


0
−1
−2
1
2
4
5
6
π/2
π