Continuidad de funciones

miércoles, 5 de mayo de 2021 06:57

EJERCICIOS DE LIMITES (REPASO)

1. Seja $f(x,y)=\dfrac{5x^2y}{x^2+y^2}$. Mostre que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{5x^2y}{x^2+y^2}=0$.

Solución

Dado, Queremos encontrar, Partida, Llegada

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{5x^2y}{x^2+y^2}=0 \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0 \ / \ \text{Si } 0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta \Rightarrow |f(x,y)-0|<\varepsilon$$

$\boxed{\text{Dado } \varepsilon>0,}$ debemos encontrar $\delta=\,??$ tal que

Si $0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta \Rightarrow 0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta \Rightarrow$ $|x|=\sqrt{x^2}<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$, $|y|=\sqrt{y^2}<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ $(*)$

Luego

$$|f(x,y)-0|=\left|\frac{5x^2y}{x^2+y^2}-0\right|=\frac{5x^2|y|}{x^2+y^2}\le\frac{5x^2|y|}{x^2}=5|y|<5\delta \quad (\text{de } *)$$

O.A.

$$x^2+y^2\ge x^2$$

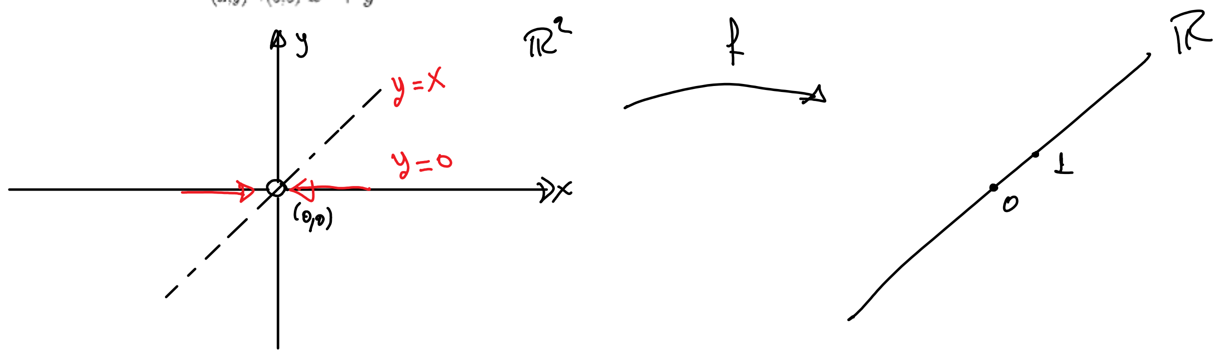
$$a.\frac{1}{x^2+y^2}\le a.\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow |f(x,y)-0|<5\delta=\varepsilon \Rightarrow \delta=\varepsilon/5$$

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{5x^2y}{x^2+y^2}=0$$

2. Mostre que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ não existe através de caminhos.

$f(x,y)$



- Camino $y=0$ (Eje x)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{y=0\\x\to0}}\frac{x^2-0^2}{x^2+0^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to0}1=1$$

- Camino $y=x$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{y=x\\x\to0}}\frac{x^2-x^2}{x^2+x^2}=\lim_{x\to0}\frac{0}{2x^2}=\lim_{x\to0}0=0$$

$$\therefore \nexists \lim f(x,y)$$

$\therefore \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Definición 21 Continuidad de una función
Una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua en $x_0 \in U$ si y sólo sí

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

i) $f(x_0)$ definida
ii) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
iii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Definición 22 *Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua en cada punto $x \in U$ se dice que f es una función continua en U.*

2.3.2. Propiedades

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son continuas en U se cumple:

a) La suma de funciones $(f + g) : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ / $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ es continua.

b) El producto de funciones $(fg) : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ / $(fg)(x) = f(x)g(x)$ es continua.

c) El cociente de $(\frac{f}{g}) : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ / $(f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ es continua en todo punto $x \in U$ tal que $g(x) \neq 0$.

Ejemplos.

Analice la continuidad de la función $f(x,y) = \dfrac{5x^2y}{x^2+y^4}$

Solución

1. Dominio: $\quad Dom f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

2. Sea $(x_0,y_0) \in Dom f \Rightarrow \underbrace{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)} = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{5x^2y}{x^2+y^4} = \dfrac{5x_0^2y_0}{x_0^2+y_0^4} = \underbrace{f(x_0,y_0)}$

$\therefore f$ es continua $\forall (x,y) \in Dom f$.

3. ¿f es continua en $(0,0)$? No

i) f no está definido en $(0,0)$. Por tanto f no es continua en $(0,0)$.

ii) $¿\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{5x^2y}{x^2+y^4}$?

Camino $y=0$: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{5x^2y}{x^2+y^4} = \lim\limits_{\substack{y=0 \\ x\to 0}} \dfrac{0}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$

Camino $x=y^2$: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{5x^2y}{x^2+y^4} = \lim\limits_{\substack{x=y^2 \\ y\to 0}} \dfrac{5(y^2)^2y}{(y^2)^2+y^4} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{5y^5}{2y^4} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{5y}{2} = 0$

Tenemos la sospecha que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{5x^2y}{x^2+y^4} = 0$ ... $(*)$

Tenemos la sospecha que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^4} = 0$ ... (*)

Por definición vamos a probar (*):

$\boxed{\text{Dado } \varepsilon > 0}$, debemos encontrar $\delta = ??$ tal que

si $0 < \|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \varepsilon$

Supongamos que

$$0 < \|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Rightarrow \begin{array}{l} |x| < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \\ |y| < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \end{array}$$

Luego

$$|f(x,y) - 0| = \left| \frac{5x^2y}{x^2+y^4} - 0 \right| = \frac{5x^2}{x^2+y^4}|y| \leq \frac{5x^2}{x^2}|y| = 5|y| < 5\delta = \varepsilon$$

así hemos encontrado $\boxed{\delta = \frac{\varepsilon}{5}}$ // $\therefore$ $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^4} = \underline{\underline{0}}$, así f presenta una discontinuidad evitable en $(0,0)$.

4. Del análisis en (3 ii) podemos decir que

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{5x^2y}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ \underline{\underline{0}}, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es continua en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicios-Continuidad

Continuidad

$f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función, $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $x_0 \in U$.

Decimos que f es continua en $x_0 \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

- Si $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua en cada $x \in U$ se dice que f es continua en U.

Ejemplos:

1. Analizar la continuidad de $f(x,y) = \dfrac{5x^2y}{x^2+y^4}$

a) Para $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ se tiene

- $f(x_0,y_0) = \dfrac{5x_0^2y_0}{x_0^2+y_0^4} \in \mathbb{R}$ está definido

- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{5x_0^2y_0}{x_0^2+y_0^4} = \frac{5x_0^2y_0}{x_0^2+y_0^4} = f(x_0,y_0)$

$\therefore f$ es continua $\forall (x,y) \neq (0,0)$.

b) ¿f es continua en $(0,0)$?

- $f(0,0) = \dfrac{0}{0}$ no está definido

$\therefore f$ no es continua en $(0,0)$

Además calculando

Procediendo por dif. direc.

- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^4}$

$$\begin{cases} y = x: \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^4} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \frac{5x^3}{x^2+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{5x}{1+x^2} = 0 \\ y=\sqrt{x}: \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y=\sqrt{x}}} \frac{5x^2\sqrt{x}}{x^2+x^2} = \lim_{\substack{x\to 0^+\\ y=\sqrt{x}}} \frac{5\sqrt{x}}{2} = 0 \\ x=y^3: \displaystyle\lim_{\substack{y\to 0\\ x=y^3}} \frac{5y^7}{y^6+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{5y^3}{y^2+1} = 0 \end{cases}$$

Se tiene la sospecha que el límite es 0.
Luego por definición

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = ? \ / \ \text{si } \|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \varepsilon$$

Tomemos $\varepsilon > 0$, debemos encontrar δ tal que cumple

$$\|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Rightarrow |x| < \delta \wedge |y| < \delta$$

De

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{5x^2y}{x^2+y^4}\right| = \frac{5x^2|y|}{x^2+y^4} \leq \frac{5x^2|y|}{x^2} = 5|y| < 5\delta = \varepsilon$$

así $\delta = \varepsilon/5$, esto nos dice que $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

$\therefore$ f presenta una discontinuidad evitable en $(0,0)$.

2. Analizar la continuidad de $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

✓ f es continua $\forall (x,y) \neq (0,0)$
✓ ¿f es continua en $(0,0)$?
a) $f(0,0) = 0$ está definido
b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$

Procediendo por dif. direc.

$$\begin{cases} x=0: \lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \frac{0}{0^2+y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0 \\ y=x: \lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\therefore \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ (* el límite también podía ser calculado por coordenadas polares)

Además f presenta una discontinuidad inevitable en $(0,0)$

3. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

✓ f es continua $\forall (x,y) \neq (0,0)$

✓ ¿f es continua en $(0,0)$?

a) $f(0,0) = 0$ está definido

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

Por dif. direcciones

$y=0$: $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y=0}} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$

$x=0$: $\lim\limits_{\substack{y\to 0 \\ x=0}} \dfrac{y^3}{y^2} = \lim\limits_{y\to 0} y = 0$

$y=mx$: $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y=mx}} \dfrac{x^3+(mx)^3}{x^2+(mx)^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+m^3x}{1+m^2} = 0$

Así se tiene la sospecha que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ para probar que es efectivamente o procedemos por definición

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = ?\ /\ si\ \|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \varepsilon$

Tomemos $\varepsilon > 0$, debemos encontrar δ que cumple

$\|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Rightarrow |x| < \delta \wedge |y| < \delta$

De

$|f(x,y) - 0| = \left|\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \dfrac{|x|^3}{x^2+y^2} + \dfrac{|y|^3}{x^2+y^2} \leq \dfrac{|x|^3}{x^2} + \dfrac{|y|^3}{y^2} = |x| + |y|$

$\Rightarrow |f(x,y) - 0| \leq |x| + |y| < \delta + \delta = 2\delta = \varepsilon$

así $\delta = \varepsilon/2$, esto nos dice que $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

Finalmente $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, esto quiere decir que f es continua en $(0,0)$.