Capítulo 3

Composición de funciones. Regla de la cadena. Funciones Implícitas

Objetivo: Aplicar los teoremas de derivación a funciones compuestas y teoremas de derivación implícita a diversos tipos de funciones de varias variables.

3.1. Definiciones y Propiedades Importantes

Definición 35 Funciones Vectoriales de Variable Vectorial.
Son funciones de la forma: $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *que asocia a cada vector* $\mathbf{x}$ *en* $\mathbb{R}^n$ *un vector* $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$ *en* $\mathbb{R}^m$ *donde cada* $f_i(\mathbf{x})$ *es un número real. Así pues, se tiene* m *funciones reales de* n *variables, las cuales son llamadas funciones coordenadas. Se escribe*

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_m).$$

Definición 36 Composición de Funciones
Dadas las funciones $g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *y* $f : V \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *tales que* $g(U) \subseteq V$ *entonces la composición de* f *con* g *denotada por* $f \circ g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *se define como:*

$$(f \circ g)(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x}))$$

Definición 37 Regla de la Cadena
Dadas las funciones $g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *y* $f : V \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *tales que* $g(U) \subseteq V$*, con* U *y* V *abiertos. Si* g *y* f *son diferenciables en* $\mathbf{x}_0 \in U$ *y en* $g(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$ *respectivamente; entonces la composición de* f *con* g *es diferenciable en* $(\mathbf{x}_0)$ *y sus derivadas parciales son:*

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f(\mathbf{y}_0)}{\partial y_i} \frac{\partial g_i(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

Definición 38 Matriz Jacobiana de una función
Dada la función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*, la matriz jacobiana asociada a* $f(\mathbf{x})$ *denotada por* $Jf(\mathbf{x})$ *está definida por:*

$$Jf(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Regla de la cadena. Perspectiva general
Dadas las funciones $g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ y $f : V \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ tales que $g(U) \subseteq V$. Si g y f son diferenciables en $\mathbf{x}_0 \in U$ y en $g(\mathbf{x}_0)$ respectivamente; entonces la composición de f con g es diferenciable en $(\mathbf{x}_0)$ y su derivada viene dada por la matriz:

$$J(f \circ g)(\mathbf{x}_0) = J(f(g(\mathbf{x}_0))Jg(\mathbf{x}_0)$$

Teorema de la función Implícita (I)
Sea la función $z = F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ y sea $P_o = (\mathbf{x}_o, y_o) \in \mathbb{R}^{n+1}$ $(\mathbf{x}_o \in \mathbb{R}^n, y_o \in \mathbb{R})$ un punto tal que $F(P_o) = 0$. Si la función F tiene derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$ continuas en alguna bola $B_\delta(P_o) = B_\delta(\mathbf{x}_o) \times (y_o - \epsilon, y_o + \epsilon)$ y si $\frac{\partial F}{\partial y}(P_o) \neq 0$, entonces $F(\mathbf{x}_o, y_o) = 0$ define una función $f : B_\delta(\mathbf{x}_o) \to (y_o - \epsilon, y_o + \epsilon)$ tal que

$$F(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) = 0 \qquad \forall\ (x_1, \ldots, x_n) \in B_\delta(\mathbf{x}_o)$$

y las derivadas parciales de f se pueden calcular por:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, \ldots, x_n, y)}$$

Definición 39 Jacobiano de las funciones F y G respecto de las variables u y v
Se denota por $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$ *y está definido por el determinante:*

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Teorema de la función Implícita (II)
Sean las funciones $z_1 = F(x, y, u, v)$, $z_2 = G(x, y, u, v)$, y sea $P = (x_o, y_o, u_o, v_o) \in \mathbb{R}^4$ un punto tal que $F(P) = 0$ y $G(P) = 0$. Si las funciones F y G tienen derivadas parciales continuas en alguna bola $B_\delta(P) \subset \mathbb{R}^4$ y si $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(P) \neq 0$, entonces $F(x, y, u, v) = 0$ y $G(x, y, u, v) = 0$ definen funciones $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ en una $B_r(x_o, y_o)$ cuyas derivadas parciales continuas se calculan con:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

3.2. Ejercicios resueltos

1. Si $w = f(x + y, x - y)$ tiene derivadas parciales continuas respecto a $u = x + y, v = x - y$, pruebe que $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$

   Solución:

   Sea $u = x + y$, $v = x - y$ usando la regla de la cadena se tiene:
   $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}(1) + \frac{\partial f}{\partial v}(1) = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$
   $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}(1) + \frac{\partial f}{\partial v}(-1) = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}$
   entonces
   $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\right) \quad = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2.$

2. Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\mathbb{R}^2$, encuentre las derivadas parciales de la función $z(x,y) = f(7x^2y + 3y^2x, x - y)$.
Solución: La función $z(x,y)$ se presenta como la composición de $z(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ donde $u(x,y) = 7x^2y + 3y^2x,\ v(x,y) = x - y$. Se tiene entonces:
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = (14xy + 3y^2)\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} = 14xy\frac{\partial f}{\partial u} + 3y^2\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = (7x^2 + 6yx)\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} = 7x^2\frac{\partial f}{\partial u} + 6yx\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}$$

3. Si las funciones f y g son diferenciables un número suficiente de veces comprobar que:
   a) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, si $\quad z = f(x - ay) + g(x + ay)$
   b) $\quad x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, si $\ z = f\left(\frac{y}{x}\right) + xg\left(\frac{y}{x}\right)$

   Solución:

   a) Sea $u = x - ay,\ \ v = x + ay$, luego $\ z = f(u) + g(v)$ entonces
   $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}(1) + \frac{\partial g}{\partial v}(1) = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$
   $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(1) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(1) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$
   $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}(-a) + \frac{\partial g}{\partial v}(a) = -a\frac{\partial f}{\partial u} + a\frac{\partial g}{\partial v}$
   $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -a\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(-a) + a\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(a) = a^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + a^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right) = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

   b) Sea $u = \frac{y}{x}$ luego $z = f(u) + xg(u)$, entonces
   $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + g(u) + x\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$
   $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\left(-\frac{y}{x^2}\right) + g(u) + x\frac{\partial g}{\partial u}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \left(-\frac{y}{x^2}\right)\frac{\partial f}{\partial u} - \left(\frac{y}{x}\right)\frac{\partial g}{\partial u} + g(u)$
   $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\frac{y}{x^3}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{y^2}{x^3}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial u}$
   $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\frac{y}{x^3}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{y^2}{x^3}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$ ....(1)

   $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + x\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{1}{x}\right)\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial u}$
   $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$ ....(2)
   $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2}\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$ ....(3)
   reemplazando (1), (2), (3) en:
   $$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2\left(2\frac{y}{x^3}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{y^2}{x^3}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\right) +$$
   $$+2xy\left(-\frac{1}{x^2}\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\right) \quad + y^2\left(\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\right)$$
   $$= 2\frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{y^2}{x}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2\frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial u} - 2\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2\frac{y^2}{x}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{y^2}{x}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$$
   $$= 0$$

4. Si $w = u^2v + 3v,\ u = x\cos\ y,\ \ v = y\cos\ x$. Use la regla de la cadena para hallar:
$$\text{a)}\ \frac{\partial w}{\partial x} \qquad \text{y} \qquad \text{b)}\ \frac{\partial w}{\partial y}$$
Solución:
$$\begin{aligned} a)\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= (2uv)(\cos y) + (u^2 + 3)(-y\,\mathrm{sen}\,x) \\ &= 2uv\cos y - u^2y\,\mathrm{sen}\,x - 3y\,\mathrm{sen}\,x. \\ b)\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \\ &= (2uv)(-x\,\mathrm{sen}\,y) + (u^2 + 3)(\cos x) \\ &= -2\,u\,v\,x\,\mathrm{sen}\,y + u^2\cos x + 3\cos x. \end{aligned}$$

5. Si $f, g : R^2 \longrightarrow R^2$ son funciones diferenciables definidas por $f(x,y) = (x+2y, 2x+3y)$ y $g(x,y) = (3x-2y, -2x+y)$. Utilizando la regla de la cadena, si es posible, obtenga las matrices Jacobianas $f \circ g$ y $g \circ f$, en cualquier punto (x,y).

   Solución:

   Por la regla de la cadena tenemos que $J(f \circ g)(x,y) = Jf(g(x,y))Jg(x,y)$ al ser lineales en la primera y segunda coordenada tenemos que $Jf(x,y)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $Jg(x,y)) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ luego

   $$J(f \circ g)(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Comprobando por definición

   $$\begin{aligned}(f \circ g)(x,y) &= f(g(x,y)) = f(3x-2y, -2x+y) = (3x-2y-4x+2y, 6x-4y-6x+3y) \\ &= (-x, -y)\end{aligned}$$

   en consecuencia $\quad J(f \circ g)(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

   Similarmente se tiene que: $\quad J(g \circ f)(x,y) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

6. Si $f : R^2 \to R^3$ y $g : R^3 \to R^3$ son funciones diferenciables, definidas por $f(x,y) = \left(x^2 - y, x + y^2, x^2 + y^2\right)$ y $g(x,y,z) = \left(x^2 + y + z, x + y^2 + z, x + y + z^2\right)$. Utilizando la regla de la cadena obtenga las matrices Jacobianas $(f \circ g)$, $(g \circ f)$ si es que es posible en los puntos $(1,1,1)$ y $(1,1)$ respectivamente.

   Solución:

   Analizando vemos que no es posible obtener $(f \circ g)$.

   Para $(g \circ f)(x,y)$ se tiene: $J(g \circ f)(x,y) = Jg(f(x,y))Jf(x,y)$

   $Jg(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 1 & 1 \\ 1 & 2y & 1 \\ 1 & 1 & 2z \end{pmatrix}$ así: $Jg(f(1,1)) = Jg(0,2,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ademas:

   $$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 1 & 2y \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \Longrightarrow Jf(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   Luego, $\quad J(g \circ f)(1,1) = Jg(f(1,1))Jf(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 9 \\ 11 & 9 \end{pmatrix}.$

7. Escriba la matriz jacobiana de la funcion $f : R^3 \to R^2$ definida por:
   $f(x,y,z) = \left(\dfrac{x-2y}{x^2 - z^2 - 5}, x\ln(yz) - 3z\right)$ en el punto $P = (0,0,1)$.

Solución:

$$\begin{aligned} Jf(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix}_{(0,1,1)} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{-x^2-z^2+4xy-5}{(x^2-z^2-5)^2} & \dfrac{-2}{x^2-z^2-5} & \dfrac{-2zx+4zy}{(x^2-z^2-5)^2} \\[2ex] \ln(yz) & \dfrac{x}{y} & \dfrac{x}{z}-3 \end{pmatrix}_{(0,1,1)} \\ &= \begin{pmatrix} -1/6 & 1/3 & 1/9 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

8. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable en $P \in \mathbb{R}^2$ y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $Q = g(P)$, tal que la matriz Jacobiana a $Jg(P) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ y el vector gradiente $\nabla f(Q) = (1,2,1)$. Determine el vector gradiente de la función $f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en P.

   Solución:

   $$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

   Luego, por la regla de la cadena se tiene:

   $$\begin{aligned} \nabla(f \circ g)(P)) &= \nabla f(g(P))\ J(g(P)) \\ &= (1,2,1) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = (2+6+1, -1-2) = (9,-3) \end{aligned}$$

9. Por un agujero de un recipiente sale arena a razón de $6cm^3/\text{mín}$. Al caer va formando un montículo con la forma de un cono circular recto cuyo radio en la base aumenta a razón de $0,25cm/\text{mín}$. En el momento que han salido $40cm^3$ de arena el radio es de $5cm$. Calcule la rapidez con lo que la altura del montículo aumenta.

   Solución:

   El volumen V del cono circular recto está dado por $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$, donde $r = r(t)$, $h = h(t)$ son el radio y la altura que dependen del tiempo. De los datos del problema se tiene $\frac{\partial V}{\partial t} = 6cm^3/\text{mín}$; $\frac{\partial r}{\partial t} = 0,25cm/\text{mín}$, se nos pide hallar $\frac{\partial h}{\partial t}$.

   Usando la regla de la cadena tenemos:

   $\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{2\pi r(t)h(t)}{3}\frac{\partial r(t)}{\partial t} + \frac{\pi r^2(t)}{3}\frac{\partial h(t)}{\partial t}$. En el instante en que $V = 40cm^3$ y $r = 5cm$ tenemos $h = \frac{24}{5\pi}cm$.

   Reemplazando:

   $6 = \frac{2\pi}{3}(5)\left(\frac{24}{5\pi}\right)(0,25) + \frac{\pi}{3}(25)\frac{\partial h}{\partial t}$, luego $\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{6}{25\pi}cm/\text{mín}$.

10. El largo, el ancho y la altura de una cámara rectangular se incrementa a un ritmo de 5, 4 y 2 $cm/\text{mín}$ respectivamente. Halle las razones de cambio de volumen y el área superficial en el instante en que el largo, el ancho y la altura son: 3, 2 y 1 metro respectivamente.

    Solución:

    El volumen V está dado por $V = xyz$ donde $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ son el largo, el ancho y la altura que dependen del tiempo.

Usando la regla de la cadena tenemos:
$\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}=yz\frac{\partial x}{\partial t}+xz\frac{\partial y}{\partial t}+xy\frac{\partial z}{\partial t}$
como $\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{5}{100}m,\ \ \frac{\partial y}{\partial t}=\frac{4}{100}m,\ \ \frac{\partial z}{\partial t}=\frac{2}{100}m;\ \ x=3m,\ \ y=2m,\ \ z=1m$ reemplazando se tiene:

$\frac{\partial V}{\partial t}(3,2,1)=2\left(\frac{5}{100}\right)+3\left(\frac{4}{100}\right)+6\left(\frac{2}{100}\right)=0,34m^3/\text{ mín}$
El área superficial $A_s$está dado por $A_s=2\left(xy+yz+xz\right)$ como se quiere hallar la razón de cambio del área superficial tenemos
$\frac{\partial A}{\partial t}=\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}=2\left(y+z\right)\frac{\partial x}{\partial t}+2\left(x+z\right)\frac{\partial y}{\partial t}+2\left(y+x\right)\frac{\partial z}{\partial t}$
$=2\left(3\right)\frac{5}{100}+2\left(4\right)\frac{4}{100}+2\left(5\right)\frac{2}{100}=0,82m^2/\text{ mín.}$

11. Un cilindro anular tiene un radio interior r y un radio exterior R. el momento de inercia es $I=\frac{1}{2}m\left(r^2+R^2\right)$, siendo m la masa. Halle la velocidad a la que está variando I en el instante en que los radios son 7 y 10 centímetros respectivamente, si los radios aumentan a razón de 3 centímetros por segundo.

    Solución:

    Como el momento de inercia es $I(r,R)=\frac{1}{2}m\left(r^2+R^2\right)$ entonces
    $\frac{\partial I}{\partial t}=\frac{\partial I}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial t}+\frac{\partial I}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial t}=mr\frac{\partial r}{\partial t}+mR\frac{\partial R}{\partial t}$, reemplazando tenemos:
    $I=m(7)(3)+m(10)(3)=21m+30m=51m\ \ cm^2/seg.$

12. El radio de un cilindro circular recto está creciendo a razón de 6 pulgadas /min y su altura decrece a razón de 4 pulgadas /min. ¿ Cuál es el ritmo de cambio de su volumen y de su área total cuando el radio es de 2 pulgadas y la altura de 3 pulgadas?.
    Solución
    El volumen de un cilindro circular es: $V(r,h)=\pi r^2h$ y su área $A=2\pi r^2+2\pi rh$, luego:

    $$\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial t}=2rh\pi\frac{\partial r}{\partial t}+r^2\pi\frac{\partial h}{\partial t}=[2(2)(3)(6)+2^2(-4)]\pi=56\pi\,pulg^3/min.$$

    $$\frac{\partial A}{\partial t}=\frac{\partial A}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial t}=(4r+2h)\pi\frac{\partial r}{\partial t}+2r\pi\frac{\partial h}{\partial t}=(8\pi+6\pi)(6)+4\pi(-4)=68\pi\,pulg^2/min.$$

13. Sea $F(x,y)=yf(2xy-1,3x^2)$, donde $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es diferenciable. Suponga que $\nabla f(1,3)=(-1,2)$ y $f(1,3,)=5$. Halle la dirección de mayor crecimiento de la función F en el punto $(1,1)$.
    Solución:
    Como $F(x,y)=yf(2xy-1,3x^2)$, haciendo $(u,v)=(2xy-1,3x^2)$ y usando la regla de la cadena para derivar obtenemos:

    $$\begin{aligned}\nabla F(x,y)&=\left(y\nabla f(u,v).(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x})\ ,\ f(u,v)+y\nabla f(u,v).(\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y})\right)\\ \nabla F(1,1)&=(1(-1,2).(2,6),5+1(-1,2).(2,0))=(10,3)\end{aligned}$$

    Luego la dirección de mayor crecimiento de la función F en el punto $(1,1)$ es la dirección del vector $\dfrac{1}{\sqrt{109}}(10,3)$.

14. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ una función diferenciable tal que $f(0,0)=(1,-1)$. Suponga que la matriz jacobiana de f en $P=(0,0)$ es $Jf(P)=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}$, sean $f_1,f_2:\mathbb{R}^2\to R$ las funciones

coordenadas de f. Determine la matriz Jacobiana en el origen de coordenadas de la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$F(x,y) = \left(f_1(f_1(x,y) + f_2(x,y), x^2y)\,,\ \int_{f_1(xy,x+y)}^{f_2(x,x)} g(t)\,dt\,,\ f_2(5x+2y, f_1(x+y, y-x) - 1) \right)$$

donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $g(1) = g(-1) = 1$.

Solución:

Sea $u_1(x,y) = f_1(x,y) + f_2(x,y);\ \ v_1(x,y) = x^2y$, con $(u_1, v_1)_{(0,0)} = (0,0)$,
sea $u_2(x,y) = x;\ \ v_2(x,y) = x$, con $(u_2, v_2)_{(0,0)} = (0,0)$,
sea $u_3(x,y) = xy;\ \ v_3(x,y) = x+y$, con $(u_3, v_3)_{(0,0)} = (0,0)$,
sea $u_4(x,y) = 5x+2y;\ \ v_4(x,y) = f_1(u_5, v_5) - 1$, con $(u_4, v_4)_{(0,0)} = (0,0)$
y $u_5(x,y) = x+y;\ \ v_5(x,y) = y-x$, con $(u_5, v_5)_{(0,0)} = (0,0)$

luego se tiene que $F(x,y) = \left(f_1(u_1,v_1)\,,\ \int_{f_1(u_3,v_3)}^{f_2(u_2,v_2)} g(t)\,dt\,,\ f_2(u_4,v_4)\right)$

y usando la regla de la cadena

$$\nabla F_1(x,y) = \nabla f_1(u_1,v_1) \begin{pmatrix} \nabla u_1(x,y) \\ \nabla v_1(x,y) \end{pmatrix} = (1,-1) \begin{pmatrix} 1+0 & -1+2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,1)$$

$$\begin{aligned}
\nabla F_2(x,y) &= g(f_2(u_2,v_2)) \nabla f_2(u_2,v_2) \begin{pmatrix} \nabla u_2(x,y) \\ \nabla v_2(x,y) \end{pmatrix} \\
&\quad - g(f_1(u_3,v_3)) \nabla f_1(u_3,v_3) \begin{pmatrix} \nabla u_3(x,y) \\ \nabla v_3(x,y) \end{pmatrix} \\
&= g(-1)(0,2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - g(1)(1,-1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (2,0) - (-1,-1) = (3,1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla F_3(x,y) &= \nabla f_2(u_4,v_4) \begin{pmatrix} \nabla u_4(x,y) \\ \nabla v_4(x,y) \end{pmatrix} = (0,2) \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ \multicolumn{2}{c}{(1,-1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} \end{pmatrix} \\
&= (0,2) \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = (4,0)
\end{aligned}$$

$$JF(P) = \begin{pmatrix} \nabla F_1(P) \\ \nabla F_2(P) \\ \nabla F_3(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

15. Escriba una ecuación para el plano tangente a la superficie $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 14$ en el punto $P = (2,1,-2)$.

Solución:

La ecuación del plano tangente es $z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0)$.

Sea $F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 14 = 0$ la ecuación que define de manera implícita a la función $z = f(x,y)$ en el nivel constante cero, luego por el teorema de la función implícita tenemos

$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2x}{z} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2,1,-2) = \frac{1}{2}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{y}{z} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(2,1,-2) = \frac{1}{2}$

entonces la ecuación del plano tangente es: $z = -2 + \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{2}(y-1)$

así: $x + y - 2z = 7$ es la ecuación del plano tangente en el punto $(2, 1, -2)$.

16. Halle el vector gradiente de la función $f : V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ en el punto $(1, 1) \in V$. Si $z = f(x, y)$ esta definida implícitamente por $5x^2z - 3y^2 + 2z^2x^2y^2 = 4$ en una vecindad del punto $(1, 1)$.
Solución:
Reemplazando $(x, y) = (1, 1)$ en la ecuación se obtiene:

$$5z - 3 + 2z^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad 2z^2 + 5z - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad (z-1)(2z+7) = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 1 \vee z = -7/2.$$

Como por hipótesis $z \in \mathbb{R}^+$, se puede decir que existe la función $z = f(x, y)$ definida en una vecindad de $(1, 1)$ con $f(1, 1) = 1$, luego por el teorema de la función implícita se define la función $F(x, y, z) = 5x^2z - 3y^2 + 2z^2x^2y^2 - 4$ cumpliendo la condición que

$$\frac{\partial F}{\partial z}(1, 1, 1) = 5x^2 + 4zx^2y^2\big|_{(1,1,1)} = 9 \neq 0$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\nabla f(1, 1) &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1), \frac{\partial z}{\partial y}(1, 1)\right) \\
&= \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right)_{(1,1,1)} \\
&= \left(-\frac{10xz + 4xz^2y^2}{5x^2 + 4zx^2y^2}, -\frac{-6y + 4yx^2z^2}{5x^2 + 4zx^2y^2}\right)_{(1,1,1)} \\
&= \left(-\frac{14}{9}, -\frac{-2}{9}\right) = \frac{1}{9}(-14, 2)
\end{aligned}$$

17. Si las funciones $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ estan definidas implícitamente por las ecuaciones: $u = x^y$, $v = y^x$. En una vecindad del punto $P = (x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$, calcule las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ en P.
Solución
Definamos las funciones

$$\begin{aligned}
F(x, y, u, v) &= u - x^y \\
G(x, y, u, v) &= v - y^x
\end{aligned}$$

luego

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P) = yx^{y-1}\Big|_p = 1; \quad \frac{\partial F}{\partial y}(P) = -x^y \ln x\big|_p = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial u}(P) = 1; \quad \frac{\partial F}{\partial v}(P) = 0;$$
$$\frac{\partial G}{\partial x}(P) = -y^x \ln y\big|_p = 0; \quad \frac{\partial G}{\partial y}(P) = -xy^{x-1}\Big|_p = -1; \quad \frac{\partial G}{\partial u}(P) = 0; \quad \frac{\partial G}{\partial v}(P) = 1;$$

esto es:

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}(P) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Por lo tanto, por el teorema de la función implícita, en una vecindad de $(1, 1, 1, 1)$ las derivadas de las funciones $u(x,y)$, $v(x,y)$ son

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -1 \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

18. Demuestre que las expresiones

$$\begin{array}{rcl} 3xyu + x^2v + 2xy - uv & = & 5 \\ x^2u^2 + v^2y^2 + x^2y^2 + u^2v^2 & = & 4 \end{array}$$

determinan funciones implícitas $u(x,y)$, $v(x,y)$ en los alrededores del punto $P = (x,y,u,v) = (1,1,1,1)$

Solución:

Sean

$$\begin{array}{rcl} F(x,y,u,v) & = & 3xyu + x^2v + 2xy - uv - 5 \\ G(x,y,u,v) & = & x^2u^2 + v^2y^2 + x^2y^2 + u^2v^2 - 4. \end{array}$$

Las derivadas parciales de F y G en P son:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P) = 3+2+2 = 7; \quad \frac{\partial F}{\partial y}(P) = 3+2 = 5; \quad \frac{\partial F}{\partial u}(P) = 3-1 = 2; \quad \frac{\partial F}{\partial v}(P) = 1-1 = 0.$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}(P) = 2+2 = 4; \quad \frac{\partial G}{\partial y}(P) = 2+2 = 4; \quad \frac{\partial G}{\partial u}(P) = 2+2 = 4; \quad \frac{\partial G}{\partial v}(P) = 2+2 = 4.$$

Como:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(P) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

luego por el teorema de la función implícita, existen las funciones $u(x,y)$, $v(x,y)$ en una vecindad del punto $P = (x,y,u,v) = (1,1,1,1)$ y las derivadas parciales de estas funciones son:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{28}{8} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{20}{8} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{-20}{8} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{-12}{8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{7}{2} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{5}{2} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{5}{2} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{3}{2}$$

3.3. Ejercicios propuestos

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y,z) = (2x-3y-5z, -x+4y+5z, x-3y-4z)$. Determine la función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $F = f \circ f$.
   Rpta: $F(x,y,z) = f(x,y,z)$.

2. Si la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, esta definida por: $f(x,y) = 10x^2 + 4y$ y la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tiene funciones coordenadas $g_1(u,v) = 2u-v$, $g_2(u,v) = 10uv$. Determine la función compuesta $F(u,v) = (f \circ g)(u,v)$.
   Rpta. $F(u,v) = 10(4u^2 + v^2)$.

3. Use la regla de la cadena para hallar: $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial w}{\partial y}$, si:

   a. $w = 2uv^2 + v^3,\ u = x\ln y,\ \ v = y\ln x.$

   b. $w = \operatorname{sen}(uv + v^2),\ u = xy^2,\ \ v = yx^2.$

   c. $w = e^u + v^e,\ u = e\ln(x+y),\ \ v = e^{x-y}.$

   d. $w = \arctan(u^2v^3),\ u = x - 5y,\ \ v = y^2 - 3x.$

4. Sea $w = 4x + y^2 + z^3$ donde $x = \mathrm{e}^{rs^2}$, $y = \ln\dfrac{r+s}{t}$ y $z = rst^2$. Halle $\dfrac{\partial w}{\partial s}$.
   Rpta: $\dfrac{\partial w}{\partial s} = 8rs\mathrm{e}^{rs^2} + \dfrac{2}{r+s}\ln\dfrac{r+s}{t} + 3r^3s^2t^6$.

5. Encuentre $\dfrac{dw}{dt}$ si $w = xy + z\,;\ \ x = \cos t\,;\ \ y = \operatorname{sen} z\,;\ \ z = t$.
   Rpta: $\dfrac{dw}{dt} = 1 + \cos 2t$.

6. Exprese $\dfrac{\partial w}{\partial r}$; $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ en términos de r y s, si $w = x + 2y + z^2$; $x = \dfrac{r}{s}$; $y = r^2 + \ln s$; $z = 2r$.
   Rpta: $\nabla w(r,s) = (\dfrac{1}{s} + 12r\ ,\ \dfrac{2}{s} - \dfrac{r}{s^2})$.

7. Calcule $\dfrac{\partial w}{\partial r}$; $\dfrac{\partial w}{\partial s}$, si $w = x^2 + y^2$; $x = r - s$; $y = r + s$.
   Rpta: $\nabla w(r,s) = (4r\ ,\ 4s)$.

8. Calcular las derivadas parciales de segundo orden de la función $F(x,y) = xg(xy)$.
   Rpta. $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = g(xy) + xyg'(xy)$, y $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x^2g'(xy)$

   $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = 2yg'(xy) + xy^2g''(xy)$

   $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y) = g'(xy)x + xg'(xy) + x^2yg''(xy)$

   $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = x^3g''(xy)$.

9. Si $w = f\left(\dfrac{y-x}{xy}, \dfrac{z-y}{yz}\right)$, probar que

$$x^2\frac{\partial w}{\partial x} + y^2\frac{\partial w}{\partial y} + z^2\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

10. Sean las funciones $f, g : R^2 \longrightarrow R^2$ dadas por $f\,(x,y) = (x+y, 2x+3y)$ y $g\,(x,y) = (3x-y, -2x+y)$
    a) Determine $f\,(1,2)$ y $g\,(f(1,2))$

b) Determine Determine $g\,(1,2)$ y $f(g(1,2))$

c) Demuestre que la composición $(f \circ g)$ y $(g \circ f)$ son iguales a la función identidad, donde $id : R^2 \longrightarrow R^2$ tal que $id(x, y) = (x, y)$

11. Un gas obedece la ley del gas ideal $PV = 8T$. El gas se calienta a razón de $2°C/$ mín y la presión aumenta a razón de $0{,}5(Kgf/cm^2)/$ mín . En cierto momento, la temperatura es de $200°C$ y la presión es de $10(Kgf/cm^2)$. Calcule la rapidez de cambio de volumen en ese instante
. Rpta: $-6{,}4u^3/$ mín

12. A los dos años, un niño en promedio mide $86cm$ de estatura y tiene una masa de $13kg$ y crece a razón de $9cm$ por cada año, $2Kg$ por año. Si la fórmula de Dubois para el área de superficie del cuerpo humano es $S(x, y) = 0,007184x^{0,425}y^{0,725}$, donde x es la masa y y es la estatura. Calcule aproximadamente la rapidez de crecimiento del área de superficie. Rpta. $762,6cm^2$ por año

13. Escriba una ecuación para el plano tangente en el punto $P = (2, 2, 1)$ a la superficie $z^3 + (x + y)\,z^2 + x^2 + y^2 = 13$ Rpta. $5x + 5y + 11z = 31$

14. Encuentre los puntos del hiperboloide $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 16$ En los que el plano tangente es paralelo al plano $4x - 2y + 4z = 5$ Rpta. $\left(\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$; $\left(\frac{-8\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$

15. Si $f : R^3 \longrightarrow R^2$ y $g : R^3 \longrightarrow R^3$ son funciones diferenciables, definidas por $f\,(x, y, z) = \left(x^2 - y + z, x + y^2 + z^2\right)$ y $g\,(x, y, z) = \left(x^2 + y + z, x + y^2 + z, x^2 + y^2 - z\right)$. Utilizando la regla de la cadena obtenga las matrices Jacobianas $(f \circ g)$, $(g \circ f\ )$ si es que es posible en los puntos $(0, 1, 1)$ y $(0, 1)$ respectivamente. Rpta. $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 5 \end{pmatrix}$.

16. En un instante dado la longitud de un cateto de un triángulo rectángulo es 10 pies y está aumentando a razón de 1 pie por minuto y la longitud del otro cateto es 12 pies y está disminuyendo a razón de 2 pies por minuto. Encontrar la rapidez de cambio de la medida del ángulo agudo opuesto al cateto de longitud 12 pies, en el instante dado.
Rpta. Decrece a razón de $\dfrac{8}{61} rad/min$

17. La longitud de una caja rectangular decrece a razón de 3cm/seg, su ancho crece a razón de 2cm/seg y su altura crece a razón de 1cm/seg ¿Cuál es la rapidez de variación del volumen en el instante en que la longitud es 12cm, ancho de 10cm y altura de 5cm?
Rpta: El volumen crece a razón de 90cm^3/seg.

18. Un cilindro circular recto varia de tal manera que su radio r crece a razón de 3 cm/min y su altura h decrece a razón de 5 cm/min. ¿A qué razón varía el volumen cuando el radio es de 10 cm y la altura de 8 cm? Rpta: Decrece a una razón de 20π cm^3/min.

19. El radio superior de un tronco de cono es de 4 pulg., el radio inferior es de 8 pulg.,la altura es de 3pulg. ¿A qué razón esta cambiando el volumen si el radio superior crece a razón de 1 pulg/min, el radio inferior decrece a razón de 2 pulg/min. y la altura decrece a razón de 2 pulg/min.? Rpta: $\dfrac{-296}{3}\pi pulg^3/min.$

20. En un tanque en forma de cilindro circular recto esta fluyendo agua a la rapidez de $4\pi/5\ dm^3/min.$ El tanque esta hecho de un material de tal manera que se ensancha manteniendo siempre la forma de un cilindro, cuando fluye el agua. Si el radio aumenta a la rapidez de 0,002 $dm/min.$ ¿Qué tan rápido se está elevando el nivel del agua cuando el radio es de 2dm y el volumen de agua en el tanque es de $20dm^3$?. Rpta: 0.19dm/min.

21. Sea $z = f(x, y)$ definida por la ecuación $x^2 + 2yz + z^2 = 1$, derive implicitamente para obtener las derivadas parciales de primer y segundo orden.
Rpta.$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-x}{y+z}$
$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-z}{y+z}$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{(y+z)^2 + x^2}{(y+z)^3}$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{z(2y+z)}{(y+z)^3}$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{xy}{(y+z)^3}$

22. Sea la función $z = g(x, y)$ dada por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = f(ax + by + cz)$ donde f es una función diferenciable cualquiera y a, b, c constantes, demuestre que
$$(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay$$

23. Sea $F(x, y) = f(x + 3y, 2x - y)$ donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable. Suponga que $\nabla f(0, 0) = (4, -3)$, determine la derivada de la función F en el origen y en la dirección del vector $\vec{v} = (1, 1)$.
Rpta: $\dfrac{\partial F}{\partial v}(0, 0) = \dfrac{13}{\sqrt{2}}$.

24. Dadas las funciones $z = 4e^x lny$; $\quad x = ln\, r$; $\quad y = r\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta$. Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}(2, \dfrac{\pi}{4})$.
Rpta. $\dfrac{\partial z}{\partial r}(2, \pi/4) = 4(\ln 2 + 1)$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}(2, \pi/4) = 8$.

25. Dadas las funciones $F(x, y, z) = xy + yz + xz$; $\quad x = u + v$; $\quad y = u - v$; $z = uv$. Calcule $\partial F/\partial u$, $\partial F/\partial v$ y evalúe en el punto $(u, v) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$
Rpta. $\dfrac{\partial F}{\partial u}(1/2, 1) = 3$, $\dfrac{\partial F}{\partial v}(1/2, 1) = -3/2$

26. Escriba la matriz jacobiana de la función $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por:

    a. $F(u, v) = (u^2 v + 3v, u\cos\ v, \quad v\cos\ u)$ en el punto $P = (\pi, \pi)$.

    b. $F(x, y) = (7x^2 y + 3y^2 x, x - y)$ en el punto $P = (3, 4)$.

    c. $F(x, y, z) = \left(\dfrac{x+y}{y^2 + z^2 + 1}, (x + y)(\ln z - 3)\right)$ en el punto $P = (0, 0, 1)$.

    d. $F(x, y, z) = (xe^{yz^2}, y\ln\dfrac{x+z}{y}, 8xye^{z^2}, \ln\dfrac{x+y}{z})$ en el punto $P = (1, 1, 1)$.

27. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (2x - 3y - 5z, -x + 4y + 5z, x - 3y - 4z)$ y sea la función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $F = f \circ f$, encuentre $J\,F(0, 0, 0)$
Rpta: $J\,F(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} +2 & -1 & +1 \\ -3 & +4 & -3 \\ -5 & +5 & -4 \end{pmatrix}^T$.

28. Si la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, esta definida por: $f(x, y) = 2xy + y$ y la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x, y) = (x - 2y + 2, xy - 2)$. Sea la función compuesta $G(x, y) = (f \circ g)(x, y)$, encuentre $\nabla\, G(1, 1)$.
Rpta. $\nabla G(1, 1) = (1, 7)$.

29. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x + y^2$, y la función $F(x, y) = f(f(x, xy), x - y)$. Encuentre $\nabla\, F(1, 0)$.
Rpta. $\nabla\, F(1, 0) = (3, -2)$.

30. Halle $\dfrac{dz}{d\theta}(\pi)$ donde $z = \sqrt{x^2 + 2xy}$; $x = \cos\theta$; $y = \operatorname{sen}\theta$.
Rpta: $\dfrac{dz}{d\theta}(\pi) = 1$.

31. Sea $z = 4x - y^2$ con $x = u^3 v$ y $y = uv^2$. Halle $\nabla z(1,1)$
Rpta: $\nabla z(1,1) = (10, 0)$.

32. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable, donde la matriz jacobiana de g en el punto P está dada por:

$$Jg(P) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable cuyo gradiente en el punto $g(P) \in \mathbb{R}^3$ es $\nabla f\big(g(P)\big) = (8, 0, -1)$. Determine el vector gradiente de $f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en el punto P.
Rpta: $(14, -15)$.

33. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable en el punto $P \in \mathbb{R}^2$ donde por matriz jacobiana se tiene $J\,g(P) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Suponga que el gradiente de la función compuesta $f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en el punto P es $\nabla(f \circ g)(P) = (1, 1)$. Halle el vector gradiente de f en el punto $g(P)$. . Rpta. $(1, 0)$

34. Sea $F(x, y) = f(2x + y + 1, x - 3y - 2)$ donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable. Suponga que $\nabla f(0, 0) = (1, 2)$, determine la derivada de la función F en el origen y en la dirección del vector $\vec{v} = (3, 4)$. Rpta: $\dfrac{\partial F}{\partial v}(0, 0) = -\dfrac{8}{5}$.

35. Sea $F(x, y) = f(f(x, y), f(x, y))$ donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable tal que $f(0, 0) = 0$, $\nabla f(0, 0) = (1, 2)$. Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de F en el origen. Rpta: $z = 3x + 6y$.

36. Sea $F(x, y) = f(xf(x, y), y + f(x, y))$ donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable tal que $f(0, 0) = 0$, $\nabla f(0, 0) = (-1, 1)$. Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de F en el origen. Rpta: $z = 2y - x$.

37. Sea $F(x, y) = f(x^2 + y, 3xy)$, donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable. Suponga que $\nabla f(2, 3) = (5, -4)$. Halle la dirección del mayor crecimiento de la función F en el punto (1,1). Rpta: La dirección del vector $(-2, -7)$.

38. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ de modo que $f(0, 0) = (0, 0)$. Suponga que la matriz jacobiana de f en $P =$ (0,0) es $Jf(P) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Evaluar la matriz jacobiana de la función F cuando
$F(x, y) = (f_1(x + y, xy) + f_2(3x - 2y, x), f_1(y, x))$. Rpta: $JF(0, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

39. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable tal que $f(1, 1) = (1, 1)$. Suponga que la matriz jacobiana de f en P=(1,1) es

$$Jf(P) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sean $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ las funciones coordenadas de f. Obtenga la matriz jacobiana de la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$F(x,y) = (\ \mathrm{sen}(f_1(2x-y, 3y-2x) - f_2(y,x)),\ \ \mathrm{sen}(f_2(xy, x^2) - f_1(y^2, x))\ )$
Rpta: $JF(P) = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$.

40. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable tal que $f(0,0) = (1,1)$. Suponga que la matriz jacobiana de f en P es $Jf(P) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ siendo $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ las funciones coordenadas de f. Determine la matriz Jacobiana de $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por
$F(x,y) = (xf_1(x,y) + yf_2(x,y), yf_1(x,y) + xf_2(x,y))$ en P = (0,0).
Rpta. $JF(P) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

41. Si la función f es diferenciable. Obtenga la derivada parcial de segundo orden $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)$, si la función F, está definida por: $F(x,y) = (x^2+y^2)f(x,2y)$.
Rpta: $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = 2f(x,2y) + 4x\dfrac{\partial f}{\partial u}(x,2y) + (x^2+y^2)\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x,2y)$

42. Considere la función $z = f(x,y)$ definida implícitamente por $x^2y - 3z + 8yz^3 = 0$. Calcule las derivadas parciales de segundo orden de la función f.

43. Determine la derivada direccional de la función $u = f(x,y,z)$ definida implícitamente por $u + ye^u + x + 3z = 0$ en el origen de coordenadas y en la dirección del vector $\vec{v} = (1,-1,-1)$.
Rpta: $\sqrt{3}$

44. Compruebe que la función $F(x,y) = yln(x^2+y^2) - 2xy$ satisface las hipótesis del teorema de la función implícita en el punto $P = (0,1)$, perteneciente al nivel cero de F y obtenga la derivada de la función $y = f(x)$ en el punto dado.
Rpta: $f'(P) = 1$.

45. Considere las expresiones

$$uv - 3x + 2y = 0\,;\ \ u^4 - v^4 = x^2 - y^2.$$

Habiendo verificado que éstas definen funciones $u = u(x,y),\ v = v(x,y)$ en los alrededores del punto $(u,v,x,y) = (1,1,1,1)$, determine las ecuaciones de los planos tangentes a las superficies $u = u(x,y),\ v = v(x,y)$ en P.
Rpta: En el plano $u = u(x,y) : 7x-5y-4z+2 = 0$. En el plano $v = v(x,y) : 5x-3y-4z+2 = 0$

46. Considere las funciones $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ definidas implícitamente por las expresiones

$$e^u + e^v = x + ye\,;\ \ ue^u + ve^v = xye,$$

calcule las derivadas parciales $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$, para $u = 0,\ v = 1,\ x = 1,\ y = 1$.

Rpta: $\dfrac{\partial u}{\partial x}(1,1) = 2-e,\quad \dfrac{\partial v}{\partial x}(1,1) = 1-e^{-1},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}(1,1) = e,\quad \dfrac{\partial v}{\partial y}(1,1) = 0.$