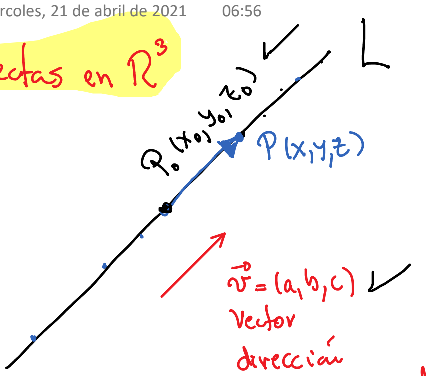
Rectas y planos en R3

miércoles, 21 de abril de 2021 06:56

Rectas en $\mathbb{R}^3$



$\overrightarrow{P_0P} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} = t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$

$P - P_0 = t\vec{v}$

Ec. Vectorial de la recta $\boxed{L: P = P_0 + t\vec{v} \;,\; t \in \mathbb{R}}$

$(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + t(a,b,c)$; $t \in \mathbb{R}$

Ec. paramétricas de la recta
$$\boxed{L: \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases} ; t \in \mathbb{R}}$$

Si $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge c \neq 0 \Rightarrow$ $\boxed{L: \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}}$ Ec. simétrica de la recta

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} \wedge \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}}$$

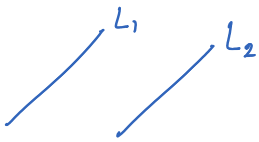
Casos especiales

Si $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b}$; $\boxed{z = z_0}$

Si $b \neq 0$, $c \neq 0$, $a = 0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$; $\boxed{x = x_0}$

Si $a \neq 0$, $c \neq 0$, $b = 0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{z-z_0}{c}$; $\boxed{y = y_0}$

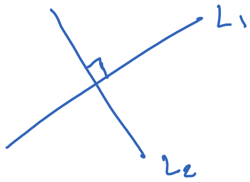
Rectas Paralelas



$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$

$\Leftrightarrow \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (0,0,0)$

Rectas Perpendiculares



$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$

$\Leftrightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$

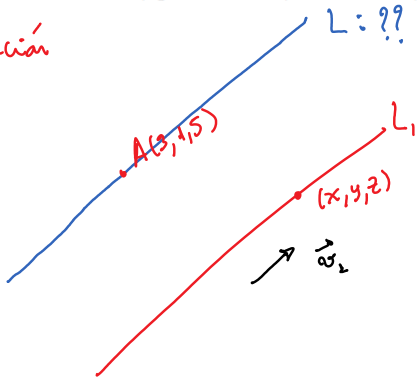
Ejemplos:

(Guia DBM 1 pág 16)

1. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto A (3, 1, 5) y es paralela a la recta $\mathcal{L}_1$: $x = 4 - t$, $y = 2 + 3t$, $z = -4 + t$, $t \in \mathbb{R}$

   Rpta. $x = 3 - r$, $y = 1 + 3r$, $z = 5 + r$, $r \in \mathbb{R}$.

Solución



$L_1: \begin{cases} x = 4-t \\ y = 2+3t \\ z = -4+t \end{cases}$

$L_1: (x,y,z) = (4-t, 2+3t, -4+t)$

$(x,y,z) = (4,2,-4) + (-t, 3t, t)$

$\boxed{L_1: (x,y,z) = (4,2,-4) + t(-1,3,1)}$; $t \in \mathbb{R}$

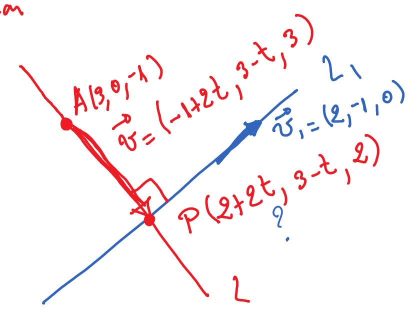
Co $\vec{v}_1 = (-1,3,1)$ es vector dirección de L_1

$\Rightarrow L: (x,y,z) = (3,1,5) + r(-1,3,1)$; $r \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow L: \begin{cases} x = 3 - r \\ y = 1 + 3r \\ z = 5 + r \end{cases}$; $r \in \mathbb{R}$

3. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (3, 0, -1)$ y es perpendicular en su punto de intersección con la recta $\mathcal{L}_1$: $P = (2, 3, 2) + t(2, -1, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.
Rpta. $P = (3, 0, -1) + r(1, 2, 3)$, $r \in \mathbb{R}$.

Solución



$* \; L \cap L_1 = \{P\}$

$L \perp L_1 \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{v}_1$

$\Leftrightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v} = 0$

$(2,-1,0)\cdot(-1+2t, 3-t, 3) = 0$

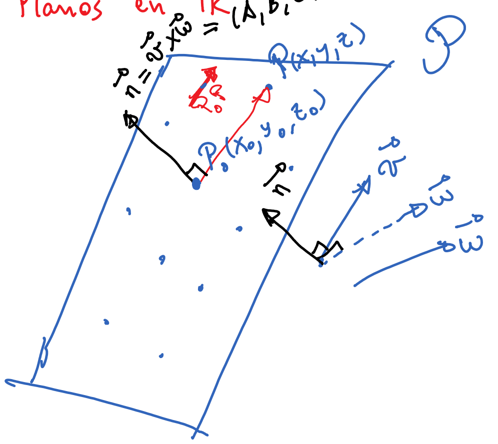
$-2+4t-3+t = 0$

$-5 = -5t$

$\boxed{1 = t}$

$\Rightarrow L: (x,y,z) = (3,0,-1) + r(1,2,3); \; r \in \mathbb{R}.$

Planos en $\mathbb{R}^3$



$\mathcal{P}: \; \overrightarrow{P_0P} = t\vec{v} + r\vec{w} \; ; \; t, r \in \mathbb{R}$

✓ $\Rightarrow \boxed{\mathcal{P}: \; P = P_0 + t\vec{v} + r\vec{w} \; ; \; t, r \in \mathbb{R}}$ Ec. vect del plano

✓ $\mathcal{P}: \; \vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$

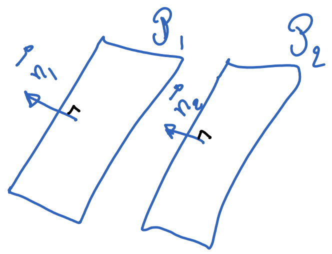
$\boxed{\mathcal{P}: \; \vec{n}\cdot(P - P_0) = 0}$ Ec. normal del plano

$\Rightarrow \; \vec{n}\cdot(P - P_0) = 0 \; \Rightarrow \; (A,B,C)\cdot\big((x,y,z) - (x_0,y_0,z_0)\big) = 0$

$\Rightarrow \; Ax + By + Cz \underbrace{-Ax_0 - By_0 - Cz_0}_{D} = 0$

$\Rightarrow \; \boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$ Ec. general del plano

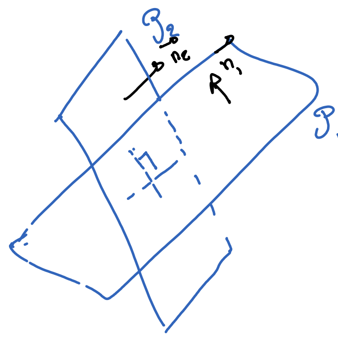
Planos Paralelos



$\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$

$\Leftrightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (0,0,0)$

Planos perpendiculares



$\mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$

$\Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

Ejemplos.
Guía del DAM 21, pág 18

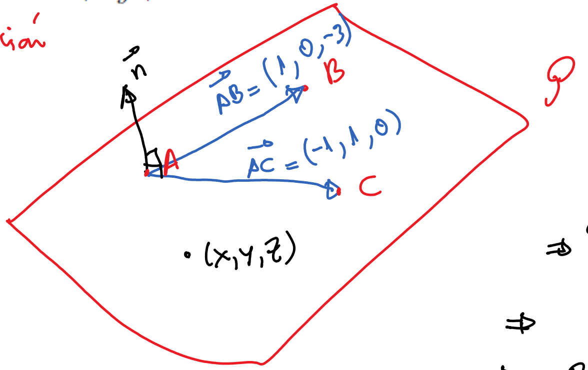
21. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $A = (3, -1, 2)$, $B = (4, -1, -1)$ y $C = (2, 0, 2)$.
Rpta. $3x + 3y + z - 8 = 0$.

$+ \quad - \quad +$

$\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k}$

21. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $A = (3,-1,2)$, $B = (4,-1,-1)$ y $C = (2,0,2)$.
Rpta. $3x + 3y + z - 8 = 0$.

Solución



$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{n} = \vec{i}(3) - \vec{j}(-3) + \vec{k}(1) = (3,3,1)$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}: \vec{n} \cdot \big((x,y,z) - (3,-1,2)\big) = 0$$

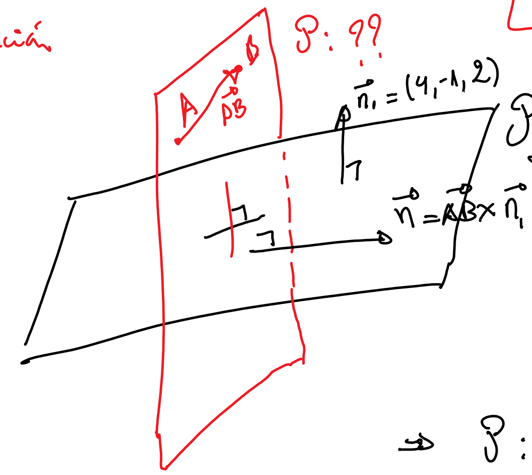
$$\Rightarrow (3,3,1)\cdot(x-3, y+1, z-2) = 0$$

$$\Rightarrow 3x - 9 + 3y + 3 + z - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{3x + 3y + z - 8 = 0}$$ Ec. general del plano $\mathcal{P}$

31. Encontrar la ecuación de un plano que pasa por los puntos $A = (1,2,3)$; $B = (3,2,1)$ y es perpendicular al plano $4x - y + 2z = 7$. $\boxed{\text{Rpta. } x + 6y + z = 16.}$

Solución



$\mathcal{P}_1: 4x - y + 2z = 7$

- $\vec{AB} = B - A = (2,0,-2)$
- $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{n}_1$
  ↳ vector normal a $\mathcal{P}$

$$\Rightarrow \vec{n} = \vec{AB} \times \vec{n}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= \vec{i}(-2) - \vec{j}(12) + \vec{k}(-2)$$
$$= (-2,-12,-2)$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}: \vec{n} \cdot \big((x,y,z) - (1,2,3)\big) = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}: (-2,-12,-2)\cdot(x-1, y-2, z-3) = 0 \Rightarrow -2x + 2 - 12y + 24 - 2z + 6 = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}: -2x - 12y - 2z + 32 = 0 \Rightarrow \mathcal{P}: x + 6y + z - 16 = 0 \quad /\!/.$$