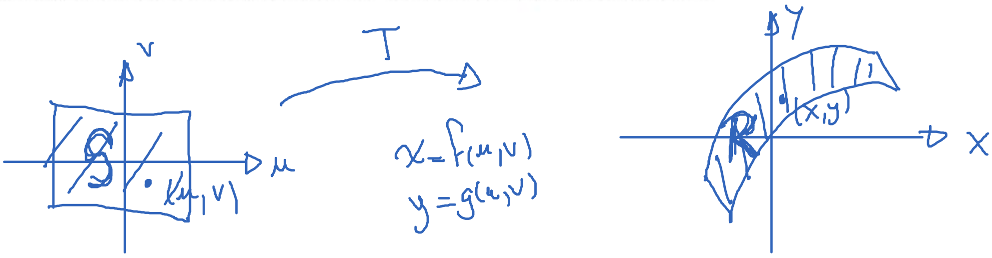
Cambio de variables en integrales dobles

miércoles, 7 de julio de 2021 07:00

Definición 46 *Jacobiano de una transformación.*
Sea $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación de clase C^1 definida por $T(u,v)=(x,y)$, es decir $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$. El jacobiano de T está dado por el determinante

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

Observe que el jacobiano es el determinante de la matriz jacobiana de T.



Teorema 5.2.1 *Si la transformación T de funciones componentes $x=f(u,v), y=g(u,v)$ satisface las condiciones enunciadas en el párrafo superior, entonces*

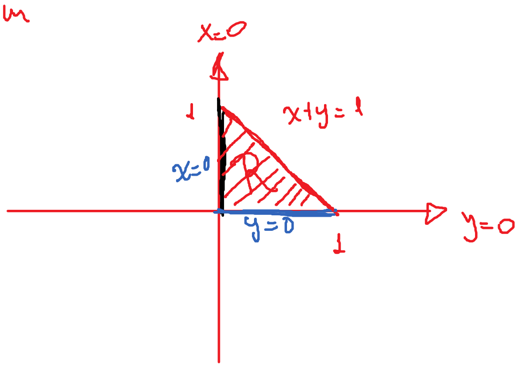
$$\iint_R F(x,y)\,dydx=\iint_S F(f(u,v),g(u,v))\mid J(u,v)\mid dvdu$$

Note que el jacobiano aparece en valor absoluto.

Ejemplo 1.
Sea R la región triangular del plano xy limitado por: $x=0$, $y=0$, $x+y=1$. Encontrar el valor de

$$\iint_R e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dy\,dx$$

Solución



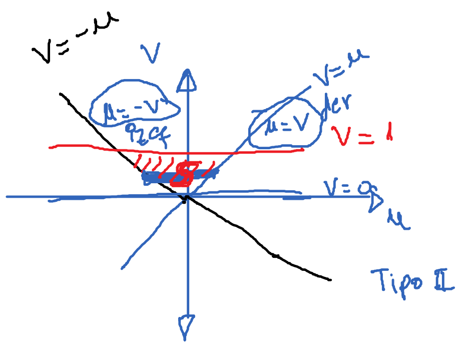
T

$$\begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases}$$

$\Downarrow$

$* \; x=\frac{u+v}{2}$

$* \; y=\frac{v-u}{2}$



$, \; J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}$

- $y=0 \Rightarrow 0=\frac{v-u}{2} \Rightarrow v=u$
- $x=0 \Rightarrow 0=\frac{u+v}{2} \Rightarrow v=-u$

- $x+y=1 \Rightarrow \frac{u+v}{2}+\frac{v-u}{2}=1$

$\Rightarrow v=1$

Luego

$$\iint_R e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dy\,dx=\iint_S e^{\frac{u}{v}}\,|J(u,v)|\,du\,dv=\int_0^1\left[\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\cdot\frac{1}{2}\,du\right]dv$$

$$\int_0^1\left[v e^{u/v}\right]_{-v}^{v} \; dv$$

R

$$= \int_0^1 \left[\frac{v e^{u/v}}{2} \right]_{-v}^{v} dv$$

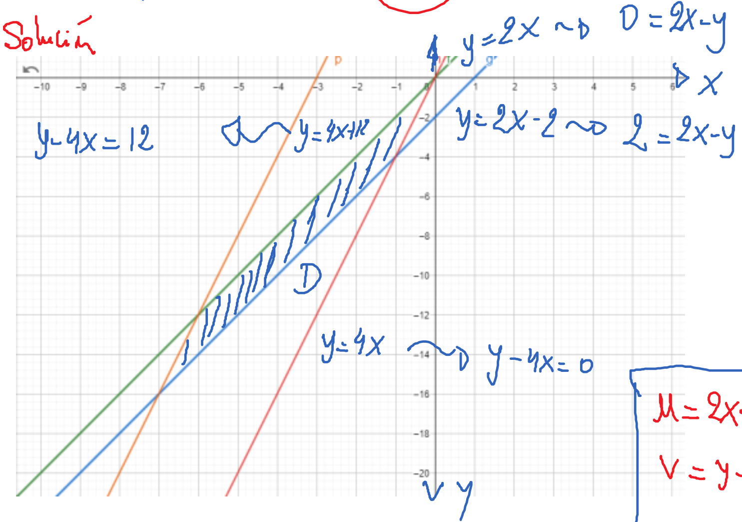
$$= \int_0^1 \frac{v}{2}e - \frac{v}{2}e^{-1}\, dv = \int_0^1 \left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right) v\, dv = \left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right)\frac{v^2}{2}\Big|_0^1$$

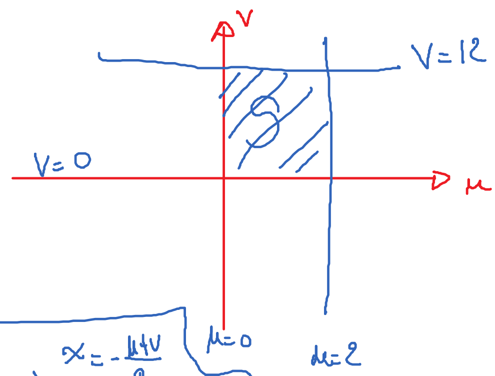
$$= \frac{e-e^{-1}}{4}$$

Ejemplo 2:

Calcular la integral doble $\iint_D \frac{(2x-y)^2}{1-4x+y}\,dx\,dy$, si D es la región en el plano xy limitado por las rectas $y=2x$, $y=12+4x$, $y=4x$, $y+2=2x$

Solución





$u=2x-y$, $v=y-4x$ $\Rightarrow$ $x=-\frac{u+v}{2}$, $y=-(2u+v)$

- $u=2x-y$, $v=y-4x$ $\Rightarrow \begin{cases} 0\le u\le 2 \\ 0\le v\le 12 \end{cases}$

- $J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$

$$\iint_D \frac{(2x-y)^2}{1-4x+y}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{12}\int_0^2 \frac{u^2}{1+v}\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_0^{12} \frac{u^3}{3(1+v)}\Big|_0^2 dv = \frac{1}{2}\int_0^{12}\frac{8}{3(1+v)}dv = \frac{4}{3}\int_0^{12}\frac{1}{1+v}dv$$

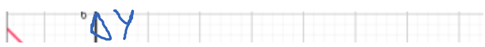
$$= \frac{4}{3}\ln(1+v)\Big|_0^{12} = \frac{4}{3}\ln(13)$$

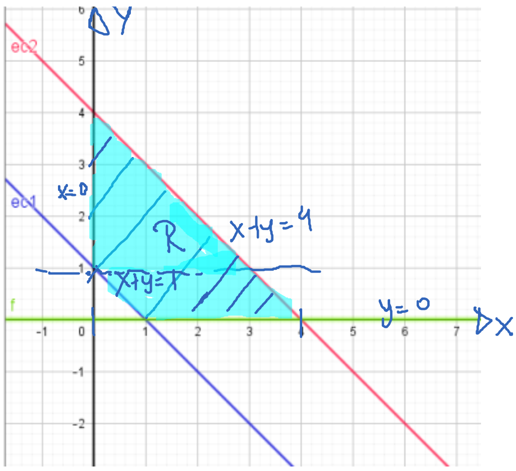
Ejercicios: Resolver 14, 15 pág 120 de la GUIA DEL DAM.

Ejemplo 3.

Calcular la integral doble $\iint \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)dx\,dy$, donde D es la región limitada por las rectas $x+y=1$, $x+y=4$, $x=0$, $y=0$.

Solución

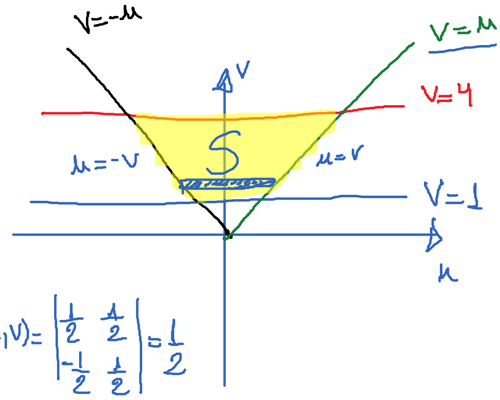




$$\begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

- $x = \dfrac{u+v}{2}$
- $y = \dfrac{v-u}{2}$



- $J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$

- $\boxed{x+y=1}$, $\boxed{x+y=4}$ $\Rightarrow$ $\boxed{v=1}$, $\boxed{v=4}$

- $\boxed{x=0}$, $\boxed{y=0}$ $\Rightarrow$ $0 = \dfrac{u+v}{2}$, $0 = \dfrac{v-u}{2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{v=-u}$, $\boxed{v=u}$

$$\iint_R \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx\,dy = \iint_S \cos\left(\frac{u}{v}\right)\cdot\frac{1}{2}\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_1^4\int_{-v}^{v} \cos\left(\frac{u}{v}\right) du\,dv = \frac{1}{2}\int_1^4 \left[v\,\mathrm{sen}\left(\frac{u}{v}\right)\right]_{-v}^{v} dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^4 v\,\mathrm{sen}(1) - v\,\mathrm{sen}(-1)\,dv = \frac{1}{2}\left(\mathrm{sen}(1)-\mathrm{sen}(-1)\right)\int_1^4 v\,dv = \frac{1}{2}\left(\mathrm{sen}(1)-\mathrm{sen}(-1)\right)\left[\frac{v^2}{2}\right]_1^4$$

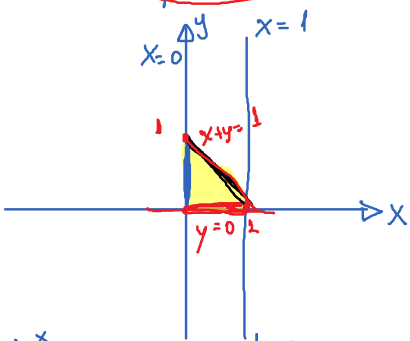
$$= \frac{15}{4}\left(\mathrm{sen}(1)-\mathrm{sen}(-1)\right)$$

Ejemplo 4.

Calcular la integral doble $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-x} e^{\frac{y}{x+y}}\,dy\,dx$

Solución

$x=0$, $x=1$; $y=0$, $y=1-x$ $\Rightarrow$ $v=u$, $v=0$, $u=1$

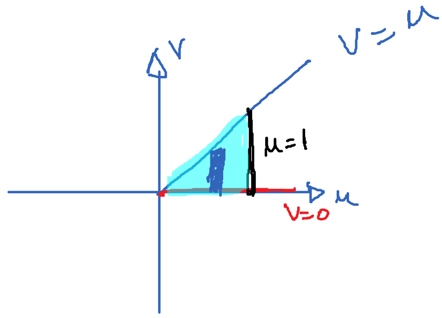


$$\begin{cases} v = y \\ u = x+y \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

- $x = u - v$
- $y = v$

$J(u,v) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$



$$\Rightarrow \int_0^1\int_0^{1-x} e^{\frac{y}{x+y}}\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^u e^{\frac{v}{u}}\cdot u\cdot\frac{1}{u}\,dv\,du = \int_0^1 u e^{v/u}\Big|_0^u du = \int_0^1 (ue - u)\,du = (e-1)\int_0^1 u\,du = \frac{e-1}{2}$$