Capítulo

1 Introducción al Espacio Vectorial $\mathbb{R}^n$

Objetivos: Establecer los fundamentos necesarios para el estudio de planos y rectas en el espacio, respecto de un sistema de coordenadas. Al terminar este capítulo el alumno deberá ser capaz de:
• Situar puntos en el sistema coordenado del espacio.
• Trabajar con las distintas ecuaciones de la recta.
• Hallar la ecuación del plano a partir de condiciones geométricas.

1.1. Introducción al Espacio $\mathbb{R}^n$

Al conjunto de todas las n-adas de la forma $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ donde $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$ se le denota por $\mathbb{R}^n$; en el cual se definen las siguientes operaciones:

Definición 1 Suma de n-adas:
Sean $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *y* $\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$, *entonces para cada* $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ *se define* $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$.

Definición 2 Producto de un escalar por una n-ada:
Si $\lambda \in \mathbb{R}$ *y* $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, *entonces* $\lambda\vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$.

1.1.1. Propiedades de las operaciones en $\mathbb{R}^n$

i) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$.

ii) $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$, $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$.

iii) $\exists!\ \vec{0} \in \mathbb{R}^n \ /\ \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}, \qquad \forall\ \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

iv) $\forall\ \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\exists!\ -\vec{x} \in \mathbb{R}^n \ /\ \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$.

v) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ entonces $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$.

vi) Si $\lambda, \eta \in \mathbb{R}$ y $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ entonces $(\lambda + \eta)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \eta\vec{x}$

vii) Si $\lambda, \eta \in \mathbb{R}$ y $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ entonces $(\lambda\eta)(\vec{x}) = \lambda(\eta\vec{x}) = \eta(\lambda\vec{x})$

viii) Existe $1 \in \mathbb{R}$ tal que $1\vec{x} = \vec{x} \qquad \forall\ \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

Observación: Al conjunto $\mathbb{R}^n$ con las dos operaciones de adición y multiplicación por un escalar, que satisfacen las propiedades enunciadas se le denomina: **Espacio Vectorial** y a sus elementos (n-adas) se les denomina puntos o vectores, denotados por: $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Definición 3 Producto interior o producto punto
Si $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ son vectores de $\mathbb{R}^n$ entonces
$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$

Propiedades El producto punto de dos vectores $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ tiene las siguientes propiedades

1. $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0, \qquad \vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0$
2. $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$
3. $(\vec{x} + \vec{z}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{z} \cdot \vec{y}$
4. $(c\vec{x}) \cdot \vec{y} = c(\vec{x} \cdot \vec{y}), \qquad c \in \mathbb{R}$

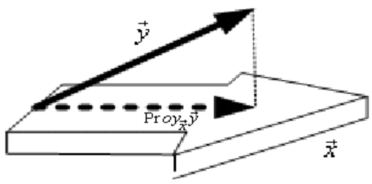
Definición 4 Vectores paralelos.
Dos vectores $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ no nulos son paralelos si y sólo si existe $t \neq 0 \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\vec{x} = t\vec{y}$$

Definición 5 Vectores ortogonales
Dos vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$ no nulos de $\mathbb{R}^n$ son ortogonales si y sólo si $\quad \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$

Definición 6 Proyección ortogonal
La proyección ortogonal de un vector $\vec{y}$ sobre un vector $\vec{x}$, denotado por $Proy_{\vec{y} \to \vec{x}}$ o $Proy_{\vec{x}}\vec{y}$, es un vector definido por :

$$Proy_{\vec{y} \to \vec{x}} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{x}}{\vec{x} \cdot \vec{x}}\vec{x} \qquad \textit{siempre que } \vec{x},\ \vec{y} \textit{ sean no nulos.}$$



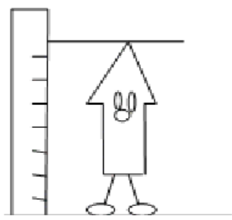


Figura 1.1: Proyección ortogonal   Norma de un vector

Definición 7 Norma de un vector
Dado $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, la norma de $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ denotada por $||\vec{x}||$ es un número real no negativo, que está definido por: $||\vec{x}|| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

Propiedades Sean $\vec{x}$, $\vec{y}$ vectores de $\mathbb{R}^n$ y c un número real.

1. $||\vec{x}|| \geq 0, \qquad ||\vec{x}|| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0$
2. $||c\vec{x}|| = |c|||\vec{x}||$
3. $||\vec{x} + \vec{y}|| \leq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||$ (desigualdad triangular).
4. $||\vec{x} + \vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 + 2\vec{x}.\vec{y}$

Definición 8 Ángulo entre dos vectores
Si denotamos por α al ángulo entre los vectores $\vec{x}$ y $\vec{y}$, entonces

$$\cos\alpha = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{||\vec{x}||\,||\vec{y}||}$$

Definición 9 Distancia entre dos puntos de $\mathbb{R}^n$
Dados los puntos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$*,* $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}$ *se define la distancia de* $\mathbf{x}$ *a* $\mathbf{y}$ *por:* $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\vec{x} - \vec{y}|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$.

Definición 10 Producto cruz en $\mathbb{R}^3$
Dados los vectores $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$*, el producto* $\vec{x} \times \vec{y}$ *es un vector, que se define nemotécnicamente por:*

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2, -x_1y_3 + x_3y_1, x_1y_2 - x_2y_1)$$

Propiedades Sean $\vec{x}$, $\vec{y}$ y $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces se cumple que:

1. $\vec{x} \times \vec{x} = \vec{0}$
2. $\vec{x} \times \vec{y} = -(\vec{y} \times \vec{x})$
3. $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{z})\,\vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y})\,\vec{z}$
4. $k(\vec{x} \times \vec{y}) = (k\vec{x}) \times \vec{y} = \vec{x} \times (k\vec{y})$
5. $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}$
6. $\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \operatorname{sen}\theta, \qquad \theta$ es el ángulo entre $\vec{x}$ y $\vec{y}$

Observaciones

1. Área de un paralelogramo en $\mathbb{R}^3$. El Área de un paralelogramo de vértices A, B, C y D está dada por:
$$\mathbf{A} = \|\vec{AB} \times \vec{AD}\|$$
2. El volumen de un paralelepípedo generado por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, está dado por:
$$\mathbf{V} = |\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}|$$

Definición 11 Vector Unitario
El vector de norma 1 en la dirección y sentido del vector $\vec{x}$*, llamado vector unitario y denotado como* $\vec{u}_x$*, está dado por:*

$$\vec{u}_x = \frac{\vec{x}}{||\vec{x}||}$$

1.1.2. Ejercicios resueltos

1. Sean los vectores $\vec{x} = (2, -1, 0)$, $\vec{y} = (3, -2, 1)$, $\vec{z} = (1, 0, -2)$, y $\vec{w} = \vec{x} - 3\vec{y} - \frac{1}{2}\vec{z}$ Hallar:

   a) Las coordenadas del vector unitario $u_{\vec{x}}$.

   b) La suma de las coordenadas del vector $\vec{w}$.

   Solución:
   $\vec{x} = (2, -1, 0), \ ||\vec{x}|| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2}$
   $||\vec{x}|| = \sqrt{5}$
   Cálculo del vector unitario $u_{\vec{x}} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0)$
   Cálculo de $\vec{w}$

$$\begin{aligned} \vec{w} &= (2, -1, 0) - 3(3, -2, 1) - \frac{1}{2}(1, 0, -2) && (1.1) \\ &= (2, -1, 0) - (9, -6, 3) - (\frac{1}{2}, 0, -1) && (1.2) \\ &= (-\frac{15}{2}, 5, -2). && (1.3) \end{aligned}$$

   Por lo tanto la suma de las coordenadas de $\vec{w}$ es $-9/2$.

2. Sean $\vec{x} = (3,5,2)$ y $\vec{y} = (-4,0,3)$ tales que $\vec{x} = \vec{r} + \vec{s}$, siendo $\vec{r}$ paralelo a $\vec{y}$ y ortogonal a $\vec{s}$. Encontrar $\vec{r}$ y $\vec{s}$.
   Solución:
   $\vec{r}//\vec{y} \Rightarrow \ \vec{y} = t\vec{r} \Rightarrow \vec{y}\cdot\vec{s} = t\vec{r}\cdot\vec{s} = 0 \ \Rightarrow \ \vec{y}\cdot\vec{s} = 0$
   Por otro lado en $\vec{x} = \vec{r} + \vec{s}$ multiplicamos interiormente por $\vec{y}$ y tenemos
   $\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{r}\cdot\vec{y} + \vec{s}\cdot\vec{y} \Rightarrow \vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{r}\cdot\vec{y} = \frac{1}{t}\vec{y}\cdot\vec{y} \Rightarrow -12+6 = \frac{1}{t}(16+9) \Rightarrow t = -\frac{25}{6}$
   luego $\vec{r} = \frac{1}{t}(-4,0,3) \Rightarrow \vec{r} = -\frac{6}{25}(-4,0,3)$ y $\vec{s} = \vec{x} - \vec{r} \Rightarrow \vec{s} = (3,5,2) + \frac{6}{25}(-4,0,3)$
   $\Rightarrow \ \vec{s} = \frac{1}{25}(51,125,68)$.

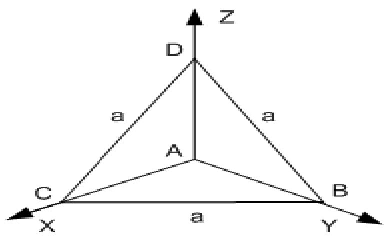
3. Los vectores $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ forman un ángulo de $\pi/3$ rad. Si $||\vec{x}|| = 3$, $||\vec{y}|| = 4$, calcular $||\vec{x}+\vec{y}||$
   Solución:
   $\vec{x}\cdot\vec{y} = ||\vec{x}||\,||\vec{y}||\cos\theta = (3)(4)\cos\frac{\pi}{3} = 6$
   luego,
   $$\begin{aligned} ||\vec{x}+\vec{y}||^2 &= ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 + 2\vec{x}\cdot\vec{y} \\ &= 9 + 16 + 12 = 37. \end{aligned}$$
   Por lo tanto $||\vec{x}+\vec{y}|| = \sqrt{37}$

4. Si $\vec{x}$ y $\vec{y}$ son dos vectores unitarios que satisfacen:
   $$||\vec{x}+\vec{y}|| = \sqrt{2\left(1+\frac{\sqrt{6}}{3}\right)} \qquad \text{y} \qquad ||\vec{x}-\vec{y}|| = \sqrt{2\left(1-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)}.$$
   Hallar el ángulo entre $\vec{x}$ y $\vec{y}$
   Solución:
   $||\vec{x}+\vec{y}||^2 = 2(1+\frac{\sqrt{6}}{3}) \Rightarrow ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 + 2\vec{x}\cdot\vec{y} = 2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}$
   $\Rightarrow 2\vec{x}\cdot\vec{y} = 2 + \frac{2\sqrt{6}}{3} - 2 \Rightarrow \vec{x}\cdot\vec{y} = \frac{\sqrt{6}}{3}$
   luego, $\quad cos(\theta) = \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{||\vec{x}||\,||\vec{y}||} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \theta = \arccos\frac{\sqrt{6}}{3} = 35^\circ 15'$.

5. Si $Proy_{\vec{y}}\vec{x} = (7,3,5)$ y $Proy_{\vec{x}}\vec{y} = (-8,4,2)$, hallar $\vec{x}$ y $\vec{y}$.
   Solución:
   $Proy_{\vec{y}}\vec{x} \ // \ \vec{y} \qquad \text{y} \qquad Proy_{\vec{x}}\vec{y} \ // \ \vec{x} \Rightarrow \begin{cases} \vec{y} = r(7,3,5) \\ \vec{x} = t(-8,4,2) \end{cases}$
   $\Rightarrow Proy_{\vec{y}}\vec{x} = Proy_{\vec{y}}t(-8,4,2) = (7,3,5) \Rightarrow t\,Proy_{(7,3,5)}(-8,4,2) = (7,3,5)$
   tomando la norma de cada vector, tenemos: $|t|\left|\frac{(-8,4,2)\cdot(7,3,5)}{\sqrt{83}}\right| = \sqrt{83}$
   $\Rightarrow |t| = \frac{83}{34} \Rightarrow t = \pm\frac{83}{34} \Rightarrow \vec{x} = \pm\frac{83}{34}(-8,4,2)$
   Por otro lado:
   $Proy_{\vec{x}}\vec{y} = rProy_{(-8,4,2)}(7,3,5) = (-8,4,2) \Rightarrow |r|\left|\frac{(7,3,5)\cdot(-8,4,2)}{\sqrt{84}}\right| = \sqrt{84}$
   $\Rightarrow r = \pm\frac{84}{34} \Rightarrow \vec{y} = \pm\frac{84}{34}(7,3,5)$.

6. Sea un tetraedro de vértices A,B,C,D y de arista a. Si $\vec{m} = \frac{1}{2}\vec{DA} + \vec{CD} - \frac{1}{2}\vec{BD}$, encontrar $||\vec{m}||$.
   Solución:

$$\begin{array}{l} A=(0,0,0)\\ B=(0,a,0)\\ C=(a,0,0)\\ D=(0,0,a)\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}\overrightarrow{DA}=(0,0,-a)\\ \overrightarrow{CD}=(-a,0,a)\\ \overrightarrow{BD}=(0,-a,a)\end{array}$$



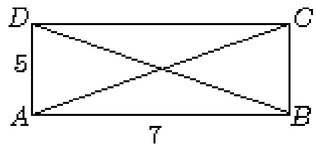
$\Rightarrow \vec{m}=\dfrac{1}{2}(0,0,-a)+(-a,0,a)-\dfrac{1}{2}(0,-a,a)$

$\Rightarrow \vec{m}=(-a,\dfrac{a}{2},0)\Rightarrow ||\vec{m}||=\sqrt{a^2+\dfrac{a^2}{4}}=\dfrac{1}{2}a\sqrt{5}.$

7. En un rectángulo ABCD, los lados $\vec{AB}$ y $\vec{AD}$ miden 7 y 5 unidades respectivamente. ¿Cuál es la longitud del vector $\vec{AC}\times\vec{DB}$

Solución:

$$\begin{aligned}\vec{AC}\times\vec{DB} &= (\vec{AB}+\vec{BC})\times(\vec{DA}+\vec{AB})\\ &= \vec{AB}\times\vec{DA}+\vec{AB}\times\vec{AB}+\vec{BC}\times\vec{DA}+\vec{BC}\times\vec{AB}\\ &= \vec{AB}\times\vec{DA}+\vec{BC}\times\vec{AB}\\ &= \vec{AB}\times\vec{DA}+\vec{AD}\times\vec{AB}\\ &= \vec{AB}\times\vec{DA}+\vec{AB}\times\vec{DA}\\ &= 2\vec{AB}\times\vec{DA}\end{aligned}$$



$\Rightarrow ||\vec{AC}\times\vec{DB}||=2||\vec{AB}\times\vec{DA}||=2||\vec{AB}||\,||\vec{DA}||sen(\pi/2)=70\,u.$

8. Verifique las siguientes identidades

   a) $(\vec{x}+\vec{y})\times(\vec{x}-\vec{y})=-2(\vec{x}\times\vec{y})$

   b) Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}\in\mathbb{R}^3$ tales que: $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$ entonces $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{v}\times\vec{w}$.

   Solución:

   a) Verificando la primera tenemos:

$$\begin{aligned}(\vec{x}+\vec{y})\times(\vec{x}-\vec{y}) &= (\vec{x}+\vec{y})\times\vec{x}-(\vec{x}+\vec{y})\times\vec{y}\\ &= \vec{x}\times\vec{x}+\vec{y}\times\vec{x}+\vec{y}\times\vec{x}-\vec{y}\times\vec{y}\\ &= \vec{0}+2(\vec{y}\times\vec{x})-\vec{0}\\ &= -2(\vec{x}\times\vec{y})\end{aligned}$$

   b) Si $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$ probamos que $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{v}\times\vec{w}$

$$\begin{aligned}\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0} &\Rightarrow \vec{u}+\vec{v}=-\vec{w}\\ &\Rightarrow (\vec{u}+\vec{v})\times\vec{v}=-\vec{w}\times\vec{v}\\ &\Rightarrow \vec{u}\times\vec{v}+\vec{v}\times\vec{v}=-\vec{w}\times\vec{v}\\ &\Rightarrow \vec{u}\times\vec{v}=\vec{v}\times\vec{w}.\end{aligned}$$

9. Sean $\vec{x}$, $\vec{y}\in\mathbb{R}^3$ cuyas normas son 3 y 7 respectivamente. Si $\vec{x}\cdot\vec{y}=5$ calcular $||\vec{x}\times\vec{y}||$

   Solución:

   $\vec{x}\cdot\vec{y}=||\vec{x}||\,||\vec{y}||\cos\theta\Rightarrow\ \cos\theta=5/21\Rightarrow \operatorname{sen}\theta=\dfrac{4\sqrt{26}}{21}$

   luego $\qquad ||\vec{x}\times\vec{y}||=||\vec{x}||\,||\vec{y}||\operatorname{sen}\theta=(3)(7)\dfrac{4\sqrt{26}}{21}=4\sqrt{26}$

10. Usar el concepto de proyección de un vector sobre otro para calcular el área del triángulo cuyos vértices son $A\,(1,3,2)$; $B\,(2,5,3)$ y $C\,(-2,0,0)$.

    Solución:

    Sea $\overrightarrow{AB}=B-A=(1,2,1)$

Sea $\overrightarrow{AC} = C - A = (-3,-3,-2)$ la base del triángulo
$= \left\| \overrightarrow{AC} \right\| = \sqrt{9+9+4} = \sqrt{22}$ Sea $\overrightarrow{AH} = Proy_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AH} = -\frac{11}{22}(-3,-3,-2)$

$\overrightarrow{AH} = \left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},1\right)$

Sea $\overrightarrow{HB}$ la altura del triángulo

$\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{AB}$de donde $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AH}$

$\overrightarrow{HB} = (1,2,1) - \left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},1\right)$

$\overrightarrow{HB} = \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right) \Rightarrow = \left\|\overrightarrow{HB}\right\| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$Area = \frac{bh}{2} = \frac{\sqrt{11}}{2}$

11. Sean $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in R^3$ dos vectores ortogonales con normas 4 y 2 respectivamente.
Calcular $\|(\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}) \times (3\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})\|$.
Solución:

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}) \times (3\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) &= [(\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}) \times 3\overrightarrow{u}] - [(\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{v}] \\
&= [(\overrightarrow{u} \times 3\overrightarrow{u}) + (2\overrightarrow{v} \times 3\overrightarrow{u})] - [(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) + (2\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{v})] \\
&= [3(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u}) + 6(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u})] - [(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) + 2(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{v})] \\
&= 6(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}) - (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \\
&= 6(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}) + (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}) \\
&= 7(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|(\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}) \times (3\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})\| &= \|7(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u})\| \\
&= 7\|(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u})\| \\
&= 7\|\overrightarrow{v}\|\,\|\overrightarrow{u}\|\, sen 90^o \\
&= 56
\end{aligned}$$

1.2. Rectas y Planos en $\mathbb{R}^3$

1.2.1. La Recta

1. **Ecuación vectorial de la recta**
Los puntos $P = (x,y,z)$ que estan en la recta $\mathcal{L}$ que pasa por $P_0 = (x_0,y_0,z_0)$ y es paralela al vector $\vec{v} = (a,b,c)$ (llamado vector director), satisfacen la ecuación

$$\mathcal{L} : P = P_o + t\vec{v}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

2. **Ecuaciones paramétricas de la recta**
En la ecuación vectorial tenemos: $(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + t(a,b,c)$, de donde

$$\begin{aligned}
x &= x_0 + t\,a \\
y &= y_0 + t\,b \\
z &= z_0 + t\,c
\end{aligned}$$

que son las ecuaciones paramétricas de la recta.

3. **Ecuación simétrica de la recta**
Eliminando el parámetro t en las ecuaciones paramétricas de la recta, se tiene

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

llamada la ecuación simétrica de la recta.

Definición 12 Rectas Paralelas
Dos rectas son paralelas si sus vectores directores lo son, es decir,

$$L_1 : P = P_1 + t\vec{v}_1 \quad // \quad L_2 : P = P_2 + t\vec{v}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_1 // \vec{v}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{0}$$

Definición 13 Rectas Perpendiculares
Dos rectas son perpendiculares si sus vectores directores lo son, es decir,

$$L_1 : P = P_1 + t\vec{v}_1 \quad \perp \quad L_2 : P = P_2 + t\vec{v}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$$

1.2.2. El Plano

Ecuaciones del plano
La ecuación normal del plano $\mathcal{P}$ que pasa por el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y tiene a $\vec{n} = (a, b, c)$ como vector normal es:

$$\vec{n} \cdot (P - P_0) = 0$$

donde $P = (x, y, z)$ es un punto cualquiera del plano.
Desarrollando la ecuación normal del plano se tiene

$$(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

de donde: $\quad \mathcal{P} : \quad ax + by + cz = d \quad$ que es la ecuación general del plano $\mathcal{P}$.

Definición 14 Planos Paralelos
Dos planos son paralelos si sus vectores normales lo son, es decir,

$$\mathcal{P}_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad // \quad \mathcal{P}_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \quad \Leftrightarrow \quad (a_1, b_1, c_1) // (a_2, b_2, c_2)$$

Definición 15 Planos Perpendiculares
Dos planos son perpendiculares si sus vectores normales lo son, es decir,

$$\mathcal{P}_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad \perp \quad \mathcal{P}_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \quad \Leftrightarrow \quad (a_1, b_1, c_1) \perp (a_2, b_2, c_2)$$

1.2.3. Distancias

1. **Distancia de un punto a una recta**
   Sea $Q = (x_1, y_1, z_1)$ un punto de $\mathbb{R}^3$ y sea la recta $\mathcal{L}$ de ecuación $P = P_o + t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$. La distancia d del punto Q a la recta $\mathcal{L}$ está dada por:

$$d(Q, \mathcal{L}) = \frac{||\vec{v} \times (Q - P_o)||}{||\vec{v}||}$$

2. **Distancia entre dos rectas**
   Sea $\mathcal{L}_1$ la recta que pasa por el punto P_1, paralela al vector $\vec{v}_1$, y sea $\mathcal{L}_2$ la recta que pasa por el punto P_2, paralela al vector $\vec{v}_2$.

   Si las rectas son paralelas, la distancia d entre $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ está dada por la distancia entre P_1 y $\mathcal{L}_2$ o la distancia entre P_2 y $\mathcal{L}_1$.

   Si las rectas no son paralelas, la distancia d entre $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ está dada por:

$$d(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \frac{|(P_1 - P_2) \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)|}{||\vec{v}_1 \times \vec{v}_2||}$$

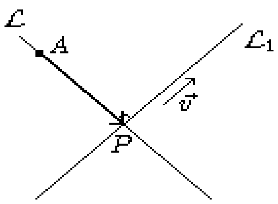
3. **Distancia de un punto a un plano**
   Sea $Q = (x_0, y_0, z_0)$ un punto de $\mathbb{R}^3$ y sea el plano $\mathcal{P}$ de ecuación $ax + by + cz + d = 0$. La distancia d del punto Q al plano $\mathcal{P}$ está dada por:

$$d(Q, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

1.2.4. Ejercicios resueltos:

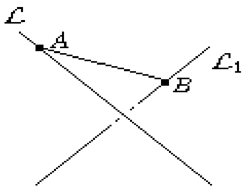
1. Hallar la ecuación simétrica de la recta $\mathcal{L}_1$ que pasa por el punto $P = (2, 1, 4)$ y es paralela a la recta $\mathcal{L}$: $x = 3t$, $y = -2 + 4t$, $z = -5t$, $t \in \mathbb{R}$.
   Solución:
   Un vector director de la recta $\mathcal{L}$ es $\vec{v} = (3, 4, -5)$. Como la recta $\mathcal{L}_1$ pasa por $P = (2, 1, 4)$ y es paralela a la recta $\mathcal{L}$ entonces la ecuación simétrica de la recta $\mathcal{L}_1$ es:
   $$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-4}{-5}$$

2. Hallar la ecuación de la recta $\mathcal{L}$ que intercepta en ángulo recto a la recta $\mathcal{L}_1$: $P = (1, 2, 3) + t(2, 1, -1)$, $t \in \mathbb{R}$ y que pasa por el punto $A = (1, 0, 2)$.
   Solución:
   Sea $P \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}$.
   Si $P \in \mathcal{L}_1$ entonces, $P = (1 + 2t, 2 + t, 3 - t)$;
   además $\vec{AP} = P - A = (2t, 2 + t, 1 - t)$.
   Como $\mathcal{L} \perp \mathcal{L}_1$ se tiene que
   $(2t, 2 + t, 1 - t) \cdot (2, 1, -1) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -1/6.$



   Luego $\vec{AP} = (\frac{-2}{6}, \frac{11}{6}, \frac{7}{6}) = \frac{1}{6}(-2, 11, 7)$. Por lo tanto la ecuación de la recta $\mathcal{L}$ es $P = (1, 0, 2) + r(-2, 11, 7)$, $r \in \mathbb{R}$.

3. Hallar la ecuación de la recta $\mathcal{L}$ que pasa por el punto $A = (-1, 4, -6)$ y es perpendicular en el punto de intersección a la recta $\mathcal{L}_1$: $P = (3 + r, 2 - r, -1 + 2r)$, $r \in \mathbb{R}$.
   Solución:
   Punto de paso de $\mathcal{L}_1$ es $B = (3, 2, -1)$ y su dirección es $\vec{v} = (1, -1, 2)$.
   Sea $\vec{w} = A - B = (-4, 2. - 5)$.
   Un vector perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{w}$ y $\vec{v}$ es
   $$\vec{n}_1 = \vec{w} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1, 3, 2)$$



   Un vector perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{n}_1$ es
   $$\vec{n}_2 = \vec{v} \times \vec{n}_1 = \begin{vmatrix} \mathbb{R}^3\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-8, -4, 2) = 2(-4, -2, 1).$$
   Como $\vec{n}_2$ es paralelo a la recta $\mathcal{L}$ entonces $\vec{n}_2$ es su vector director. Por lo tanto la ecuación de $\mathcal{L}$ es $P = (-1, 4, -6) + s(-4, -2, 1)$, $s \in \mathbb{R}$.

4. Una recta pasa por el punto $A = (1, 1, 1)$ y es paralela al vector $\vec{v} = (1, 2, 3)$, otra recta pasa por el punto $Q = (2, 1, 0)$ y es paralela al vector $\vec{w} = (3, 8, 13)$. Determinar el punto de intersección de ambas rectas si existe.
   Solución
   Sean $\mathcal{L}_1$: $P = (1, 1, 1) + t(1, 2, 3)$, $t \in \mathbb{R}$ y $\mathcal{L}_2$: $P = (2, 1, 0) + r(3, 8, 13)$, $r \in \mathbb{R}$. Las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ se interseptan si existe P_o tal que $P_o \in \mathcal{L}_1$ y $P_o \in \mathcal{L}_2$. Si $P_o \in \mathcal{L}_1$ entonces $P_o = (1 + t, 1 + 2t, 1 + 3t)$ y si $P_o \in \mathcal{L}_2$ entonces $P_o = (2 + 3r, 1 + 8r, 13r)$, luego

$$\begin{cases} 1+t &= 2+3r \\ 1+2t &= 1+8r \\ 1+3t &= 13r \end{cases} \quad \text{de donde } t=4 \text{ y } r=1.$$

Por lo tanto, el punto de intersección es $P_o = (5,9,13)$.

5. Hallar la ecuación de la recta $\mathcal{L}$ que pasa por el punto $A = (19,0,0)$ y corta a las rectas $\mathcal{L}_1$: $x = 5+t$, $y = t$, $z = -1+t$, $t \in \mathbb{R}$ y $\mathcal{L}_2$: $\dfrac{x+1}{-2} = y-2$; $z = 2$.

Solución :

$R \in \mathcal{L}_1 \Rightarrow R = (5+t, t, -1+t)$

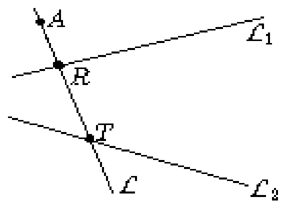
$T \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow T = (-1-2r, 2+r, 2)$

además los puntos A, R, T son colineales

entonces $\vec{AR} = \lambda \vec{AT}$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$,

es decir

$(-14+t, t, -1+t) = \lambda(-20-2r, 2+r, 2)$



Por igualdad de vectores se tiene $\begin{cases} -14+t &= \lambda(-20-2r) \\ t &= \lambda(2+r) \\ -1+t &= 2\lambda \end{cases}$ de donde $t=2$, $r=2$, $\lambda = 1/2$. Luego, $R = (7,2,1)$ y $T = (-5,4,2)$. Por lo tanto, la ecuación de la recta $\mathcal{L}$ es $P = (19,0,0) + s(12,-2,-1)$, $s \in \mathbb{R}$.

6. Hallar la distancia entre el punto $Q = (5,-3,4)$ y la recta $\mathcal{L}$: $y-4=0$, $x = 3-z$.

Solución

La ecuación simétrica de la recta $\mathcal{L}$ es:

$$\frac{x}{1} = \frac{z-3}{-1}; \qquad y = 4$$

donde $P_1 = (0,4,3)$ es un punto de paso y $\vec{v} = (1,0,-1)$ es un vector director.

Por otro lado

$$\vec{v} \times (Q-P_1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & -7 & 1 \end{vmatrix} = (-7,-6,-7)$$

luego, $d(Q,\mathcal{L}) = \dfrac{||\vec{v} \times (Q-P_1)||}{||\vec{v}||} = \dfrac{\sqrt{49+36+49}}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{67}$.

7. Hallar la intersección de la recta $\mathcal{L}$ con el plano de coordenadas XY sabiendo que $\mathcal{L}$ pasa por el punto $A = (2,1,5)$ y que intersecta ortogonalmente a la recta

$$\mathcal{L}_1 : P = (1,-2,3) + t(3,4,2) \quad \text{en el punto} \quad Q.$$

Solución:

Sea $Q \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}$ y sean $\vec{v} = (3,4,2)$, $\vec{AQ}$ vectores directores de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}$ respectivamente

$$\begin{aligned} Q \in \mathcal{L}_1 \quad &\Rightarrow \quad Q = (1+3t, -2+4t, 3+2t) \\ &\Rightarrow \quad (Q-A) \cdot \vec{v} = 0 \\ &\Rightarrow \quad (-1+3t, -3+4t, -2+2t).(3,4,2) = 0 \\ &\Rightarrow \quad t = \frac{19}{29} \\ &\Rightarrow \quad \vec{AQ} = Q - A = \left(\frac{28}{29}, \frac{-11}{29}, \frac{-20}{29}\right) \end{aligned}$$

luego $\mathcal{L} : P = (2,1,5) + s(28,-11,-20)$.
Para encontrar la intersección de $\mathcal{L}$ con el plano XY se reemplaza $z = 0$ en la recta obteniendo: $5 - 20s = 0 \Rightarrow s = 1/4$. Si M es la intersección de $\mathcal{L}$ con el plano XY entonces,

$$\begin{aligned} M &= (2,1,5) + \frac{1}{4}(28,-11,-20) \\ M &= (9,-\frac{7}{4},0) \end{aligned}$$

8. Hallar la ecuación de la recta $\mathcal{L}$ que pasa por $(3,2,1)$, y es paralela al plano $\mathcal{P} : x - 2y + z + 7 = 0$ y forman un ángulo de 60^o con $\mathcal{L}_1$, donde $\mathcal{L}_1 : P = (1,-2,3) + t(0,1,0)$; $t \in \mathbb{R}$.
Solución:
Necesitamos encontrar el vector (a,b,c), director de la recta $\mathcal{L}$, para lo cual sabemos que $(a,b,c) \cdot \vec{n} = 0$ donde $\vec{n} = (1,-2,1)$ es un vector normal del plano $\mathcal{P} \Rightarrow (1,-2,1) \cdot (a,b,c) = 0$ $\Rightarrow a - 2b + c = 0 \Rightarrow a = 2b - c$. (1)
Por otro lado, $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_1$ forman un ángulo de 60^o, es decir

$$cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} = \frac{(0,1,0).(a,b,c)}{||(0,1,0)||\,||(a,b,c)||} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

de donde, $a^2 + b^2 + c^2 = 4b^2$ (2)
Reemplazando (1) en (2), obtenemos:

$$\begin{aligned} (2b-c)^2 + b^2 + c^2 &= 4b^2 \\ b^2 - 4bc + 2c^2 &= 0 \\ b &= \frac{4c \pm \sqrt{16c^2 - 8c^2}}{2} \\ b &= (2 \pm \sqrt{2})c \\ \text{Luego} \quad (a,b,c) &= (2b - c, b, c) \\ &= (2(2 \pm \sqrt{2})c - c, (2 \pm \sqrt{2})c, c) \\ &= ((3 \pm 2\sqrt{2})c, (2 \pm \sqrt{2})c, c). \end{aligned}$$

Por consiguiente, existen dos soluciones; esto es, dos rectas:
$\mathcal{L}_2 : (x,y,z) = (3,2,1) + t(3 + 2\sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, 1)$
$\mathcal{L}_3 : (x,y,z) = (3,2,1) + t(3 - 2\sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}, 1)$.

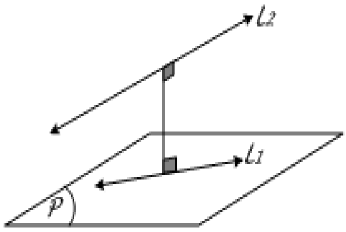
9. Dadas las rectas

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& -1 + 3t \\ y &=& -2 + 2t \\ z &=& -3 - t \end{array} \right. ,t \in \mathbb{R} \qquad \mathcal{L}_2 = \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 2 + 3s \\ y &=& -3 - 2s \\ z &=& -s \end{array} \right. ,s \in \mathbb{R}$$

Encuentre la distancia mínima entre las dos rectas.
Solución:
La recta $\mathcal{L}_1$ tiene como punto de paso $P_1 = (-1,-2,-3)$ y como vector director $\vec{v}_1 = (3,2,-1)$. La recta $\mathcal{L}_2$ tiene como punto de paso $P_2 = (2,-3,0)$ y como vector director $\vec{v}_2 = (3,-2,-1)$.

Entonces, $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-4,0,-12) = -4(1,0,3)$

Luego, $d(\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2) = \dfrac{|(P_2 - P_1) \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)|}{||\vec{v}_1 \times \vec{v}_2||} = \dfrac{|(3,-1,3) \cdot (1,0,3)|}{\sqrt{10}} = \dfrac{6\sqrt{10}}{5}$



10. Un rayo de luz representado por la recta $\mathcal{L} : P = (1,1,1) + t(1,2,2)$ con $t \in \mathbb{R}$, se refleja en un espejo plano cuya ecuación es: $x - 3y + 2z = 6$. Hallar la ecuación de la recta reflejada.
Solución:

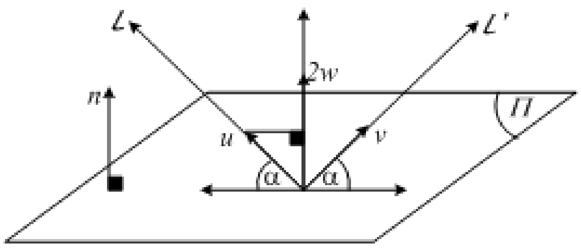


Figura 1.2: Esquema del rayo incidente y el rayo reflejado

Sea P' el punto de intersección de la recta $\mathcal{L}$ con el plano $\mathcal{P}$(espejo) que sirve como punto de paso para ambas ecuaciones.

$$\mathcal{L} = \begin{cases} x &= 1+t \\ y &= 1+2t \\ z &= 1+2t \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R} \quad y \quad \mathcal{P} : x - 3y + 2z = 6$$

Sustituyendo las ecuaciones de $\mathcal{L}$ en $\mathcal{P}$:

$$(1+t) - 3(1+2t) + 2(1+2t) = 6$$

de donde: $t = -6$
Luego:

$$P' = \begin{cases} x &= 1-6 = -5 \\ y &= 1+2(-6) = -11 \\ z &= 1+2(-6) = -11 \end{cases}$$

Tomando los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ unitarios de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ respectivamente se tiene que: $\vec{u} + \vec{v} = 2\vec{w}$ donde $\vec{w} = Proy_{\vec{n}}\vec{u}$ siendo $\vec{n}$ el vector nomal a $\mathcal{P}$ y $\vec{n} = 2\vec{w}$. Entonces,

$$\vec{w} = Proy_{\vec{n}}\vec{u} = \frac{(1/3, 2/3, 2/3)\cdot(1,-3,2)}{(1,-3,2)\cdot(1,-3,2)}(1,-3,2)$$

entonces $\vec{w} = -\dfrac{1}{42}(1,-3,2)$ de donde reemplazando en $\vec{u} + \vec{v} = 2\vec{w}$ se tiene:
$(1/3, 2/3, 2/3) + \vec{v} = 2(-\dfrac{1}{42}(1,-3,2))$ entonces $\vec{v} = -\dfrac{1}{21}(1,-3,2) - (1/3, 2/3, 2/3)$.
Por consiguiente: $\vec{v} = -\dfrac{1}{21}(8,11,16)$ es un vector director de la recta $\mathcal{L}'$. Por lo tanto
$\mathcal{L}' : P = (-5,-11,-11) + s(8,11,16)$, $s \in \mathbb{R}$.

11. Hallar la distancia del punto $Q = (3,-2,7)$ al plano $\mathcal{P}$ que pasa por el punto $(5,1,1)$ donde los vectores $\vec{u} = (2,1,2)$, $\vec{v} = (-4,-5,7)$ son paralelos a él .

Solución:
Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos al plano $\mathcal{P}$ y $\vec{n}$ es el vector normal al plano, entonces se cumple que

$$\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ -4 & -5 & 7 \end{vmatrix}=(17,-22,-6)$$

Luego, la ecuación del plano está dada por:

$$\begin{aligned} \vec{n}\cdot(P-P_o) &= 0 \\ (17,-22,-6)\cdot(x-5,y-1,z-1) &= 0 \\ 17x-85-22y+22-6z+6 &= 0 \\ 17x-22y-6z &= 57. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$d(Q,\mathcal{P})=\frac{|17(3)-22(-2)-6(7)-57|}{\sqrt{17^2+22^2+6^2}}=\frac{4}{\sqrt{809}}.$$

12. Halle un punto en el eje Y que equidiste de los planos 2x+2y+z=0 , 4x-3y=2 .
Solución:
Sean los planos $\mathcal{P}_1=2x+2y+z=0$ y $\mathcal{P}_2=4x-3y=2$ y sea $P=(0,y,0)$ el punto que buscamos sobre el eje Y, tales que

$$d(P,\mathcal{P}_1)=\frac{|2(0)+2(y)+0|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{|2y|}{\sqrt{9}}=\frac{|2y|}{3}$$
$$d(P,\mathcal{P}_2)=\frac{|4(0)-3y+0(0)-2|}{\sqrt{4^2+(-3)^2+0^2}}=\frac{|-3y-2|}{\sqrt{25}}=\frac{|3y+2|}{5}.$$

Como el punto equidista de los planos entonces se cumple que
$d(P,\mathcal{P}_1)=d(P,\mathcal{P}_2) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{|2y|}{3}=\dfrac{|3y+2|}{5}$
$$\Rightarrow \frac{2y}{3y+2}=\frac{3}{5} \quad \vee \quad \frac{2y}{3y+2}=-\frac{3}{5} \qquad \Rightarrow \qquad y=6 \quad \vee \quad y=-\frac{6}{19}.$$
Asi, tenemos dos soluciones: $P=(0,6,0)$ o $P=(0,-\frac{6}{19},0)$.

13. Verifique que las rectas $\mathcal{L}_1$: $x=3t$, $y=2t$, $z=t$, $t\in\mathbb{R}$ y $\mathcal{L}_2$: $x=-3s$, $y=-s$, $z=s$, $s\in\mathbb{R}$ se cortan en un punto. Además determine la ecuación del plano en que estas se encuentran.
Solución:
Debemos encontrar el punto de intersección de las rectas, para ello igualamos componente a componente, obteniendo

$$\left\{\begin{array}{rclcrcl} 3t &=& -3s & \Rightarrow & t &=& -s \\ 2t &=& -s & \Rightarrow & t &=& -\dfrac{s}{2} \\ t &=& s & & & & \end{array}\right.$$

La única posible solución a este sistema es $t=0$ y $s=0$.
Luego el punto de intersección es $P_o=(0,0,0)$.
Como $\vec{u}=(3,2,1)$ es vector director de $\mathcal{L}_1$ y $\vec{v}=(-3,-1,1)$ es vector director de $\mathcal{L}_2$ entonces un vector normal $\vec{n}$ del plano está dado por $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}$

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}(2+1)-\vec{j}(3+3)+\vec{k}(-3+6) \\ \vec{n} &= (3,-6,3)=3(1,-2,1) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación del plano es
$$\begin{aligned} \vec{n}.(P-P_0) &= 0 \\ (1,-2,1).(x-0,y-0,z-0) &= 0 \\ x-2y+z &= 0. \end{aligned}$$

14. Sea $P\,(x,y,9)$ el punto que esta sobre la recta L que pasa por los puntos $A\,(1,0,-1)\,;\,B\,(4,4,4)$. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta L.
Solución:
Sea L la Ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(x_0,y_0,9)$, y $P_0=A(1,0,-1)$ Luego, la direción está dada por:
$\overrightarrow{V}=\overrightarrow{AB}=B-A=(3,4,5)$
$$L:\begin{cases} x = 1-3t \\ y = 4t \\ z = -1+5t \end{cases}, \qquad t\in\mathbb{R}$$
$P\in L\Rightarrow$
$$\begin{cases} x_0 = 1-3t \\ y_0 = 4t \\ 9 = -1+5t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 7 \\ y_0 = 8 \\ t = 2 \end{cases}$$
Así $P_0=(7,8,9)$. Además, un vector ortogonal plano es $\overrightarrow{n}=r\overrightarrow{v}=r\,(3,4,5)$
La ecuación del plano es $\mathbf{P}$:$(x-7,y-8,z-9)\,.\,(3,4,5)=0$
$\mathbf{P}:\ 3x+4y+5z-98=0$

15. Hallar la distancia entre los puntos de intersección de la recta $L:\ x=3-2t;\ y=z=t$, con los planos paralelos $2x+y+z=3$, $2x+y+z=9$.
Solución:
La ecuación de la recta es:
$$L:\begin{cases} x = 3-2t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$
La intersección con los planos nos dan los puntos P y Q siguientes:
$$\Rightarrow\ L\cap P_1=P:\begin{cases} 2\,(3-2t)+t+t=3 \\ -2t=-3 \\ t=\frac{3}{2} \\ P=\left(0,\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) \end{cases}$$
$L\cap\mathbf{P}_2=Q$
$$Q=\begin{cases} 2\,(3-2t)+t+t=9 \\ 6-2t=9 \\ t=-\frac{3}{2} \\ Q=\left(6,-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right) \end{cases}$$
Por lo tanto
$$d\,(P,Q)=\sqrt{36+9+9}=\sqrt{54}$$

16. Determinar la ecuación paramétrica de la recta que resulta de la intersección de los planos $\mathbf{P}_1:2x+3y-z-4=0$, $\mathbf{P}_2:3x+y-z=0$
Solución:
Para hallar su ecuación se resuelve el sistema:
$2x+3y-z=4$.............(1)
$3x+\ y-z=0$ ....(2)

donde $-x+2y=4$ es decir
$x=2y-4$..................(3)
de (2): $z=3x+y$ pero
$z=3(2y-4)+y$ entonces
$z=7y-12$..........(4)
Por tanto si $y=t$ tenemos la ecuación de la recta:

$$\mathcal{L}:\begin{cases} x &= 2t - 4 \\ y &= t \\ z &= 7t - 12 \end{cases}, t\in \mathbb{R}$$

17. Hallar los valores de p y q tales que el plano $(2p+3q+1)x+(p-q+1)y+(p+q-2)z=2p-1$ sea paralelo al eje Y y contenga a la recta $\mathcal{L}: P=(0,1,1)+t(1,2,-2)$.
Solución:
Un vector normal al plano es $\vec{n}=(2p+3q+1, p-q+1, p+q-2)$ entonces $\vec{n}\cdot(0,1,0)=0$
$\Rightarrow \quad (2p+3q+1, p-q+1, p+q-2).(0,1,0)=0$
$\Rightarrow \quad p-q+1=0$ (1)
además, $\vec{n}\cdot(1,2,-2)=0 \Rightarrow 2p+3q+1+2(p-q+1)-2(p+q-2)=0$
$\Rightarrow \quad 2p-q+7=0$ (2)
De (1) y (2) se tiene $p=-6$ y $q=-5$.

18. Hallar la ecuación vectorial de la recta que es intersección de los planos $\mathcal{P}_1$: $x+y+3z-1=0$ y $\mathcal{P}_2$: $2x-3y+z-7=0$
Solución:
Sea $\mathcal{L}$: $P=P_o+t\vec{v}$, $t\in\mathbb{R}$ la recta de intersección y sean $\vec{n}_1=(1,1,3)$ y $\vec{n}_2=(2,-3,1)$ vectores normales de $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ respectivamente.

Entonces

$$\vec{v}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}(10)-\vec{j}(-5)+\vec{k}(-5)=5(2,1,-1)$$

Por otro lado, si $z=0$ entonces $\begin{cases} x+y-1 &= 0 \\ 2x-3y-7 &= 0 \end{cases}$ de donde $x=2$, $y=-1$.

Luego un punto de paso de la recta $\mathcal{L}$ es $P_o=(2,-1,0)$, por lo tanto la ecuación de la recta de intersección es $P=(2,-1,0)+t(2,1,-1)$

1.3. Ejercicios propuestos

- **Ejercicios correspondientes a vectores**

  1. Un paralelepípedo tiene un vértice en el punto $A=(1,2,3)$, siendo B, C y D sus vértices adyacentes. Además, se conoce que $\vec{AB}=2(1,0,1)$, $\vec{AC}=3(1,1,1)$ y $\vec{AD}=4(0,1,1)$. ¿ Cuál es el vértice opuesto al punto A?
  Rpta: $(6,9,12)$.

  2. En un paralepípedo de bases ABCD y EFGH se conocen los extremos $E=(4,3,1)$ y $H=(7,3,2)$ de la arista $\vec{EH}$. Si $\vec{BC}$ es la arista opuesta a $\vec{EH}$ y $B=(5,2,1)$.
  ¿ Cuál es el punto medio de $\vec{BC}$?
  Rpta: $M=(\frac{13}{2},2,\frac{3}{2})$.

3. Si el vector $\vec{x} = (3, -1, 2)$ y $\vec{y} = (1, 1, -4)$; hallar dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ de modo que $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{y} \cdot \vec{v} = 0$ y $\vec{u} // \vec{y}$
Rpta: $\vec{u} = \frac{1}{3}(-1, -1, 4)$, $\vec{v} = \frac{2}{3}(5, -1, 1)$.
4. Sean $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vectores en $\mathbb{R}^n$. Si $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$ y $||\vec{u}|| = 3$, $||\vec{v}|| = 1$, $||\vec{w}|| = 4$, hallar $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u}$.
Rpta: -13.
5. Los vértices de un triángulo son los puntos $A = (2, 3, -1)$, $B = (5, 1, 1)$ y $C = (6, 4, -2)$. Hallar un vector $\vec{v}$ que es paralelo a la altura trazada del vértice B al lado opuesto, si se sabe que $||\vec{v}|| = 6$.
Rpta: $\vec{v} = (-2, 4, -4)$.
6. Calcular $||\vec{u} + \vec{v}||$ sabiendo que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman un ángulo de 150^o y que $||\vec{u}|| = \sqrt{48}$ y $||\vec{v}|| = 6$.
Rpta: $2\sqrt{3}$
7. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman un ángulo de 60^o, sabiendo que $||\vec{u}|| = 5$, $||\vec{v}|| = 8$, determinar $||\vec{u} + \vec{v}||$, $||\vec{u} - \vec{v}||$. Rpta: $\sqrt{129}$ y 7.
8. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores en $\mathbb{R}^n$ no nulos tales que $||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| = m$. Si el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $\pi/3$ y la norma de su diferencia es $2 - m$, hallar m.
Rpta: $m = 1$.
9. Tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ satisfacen las siguientes condiciones : $||\vec{u}|| = ||\vec{w}|| = 5$, $||\vec{v}|| = 1$ y $||\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}|| = ||\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}||$. Si el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $\pi/8$, hallar el ángulo que forma $\vec{v}$ y $\vec{w}$.
Rpta: $7\pi/8$.
10. Sean los vectores $\vec{u} = (-3, 4, 1)$ y $\vec{v} = (3, \sqrt{2}, 5)$ determinar un vector $\vec{w}$ ortogonal al vector $(0, 1, 0)$ que satisface las condiciones $\vec{u} \cdot \vec{w} = 6$ y $||Proy_v w|| = 1$
Rpta: $(-4/3, 0, 2)$ o $(-2, 0, 0)$.
11. Se tiene que los puntos P, Q y R forman un triángulo rectángulo donde $\vec{RP}$ y $\vec{RQ}$ son los catetos. Encontrar la proyección del cateto $\vec{PR}$ sobre la hipotenusa $\vec{PQ}$, si el vector $\vec{RQ}$ es paralelo al vector $(0, 2, 1)$ y el vector $\vec{PQ}$ tiene componentes $(-2, 3, 7)$.
Rpta: $\dfrac{141}{310}(-2, 3, 7)$.
12. Si $\vec{u} = (2, 3, 1)$ y $\vec{v} = (2, 1, 3)$, calcular la proyección ortogonal del vector $\vec{x} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$ sobre el vector $\vec{y} = \vec{v} - 3\vec{u}$.
Rpta $\dfrac{16}{5}(1, 2, 0)$
13. Averiguar si los siguientes puntos $A = (1, 3, 2)$, $B = (2, 3, 1)$ y $C = (3, 4, 5)$ son colineales.
Rpta: No son colineales.
14. Suponga que los vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ son vectores unitarios que forman entre si un ángulo de $\pi/6$rad. Calcular $||\vec{u} \times \vec{v}||$
Rpta: 0,5.
15. Hallar el área del paralelogramo en $\mathbb{R}^3$ cuyas diagonales son los vectores $2\vec{u} - \vec{v}$ y $4\vec{u} - 5\vec{v}$, donde $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores unitarios y el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $\pi/4$
Rpta: $3\sqrt{2}/2$.
16. Si $\vec{u} = (3, m, -3)$ y $\vec{v} = (5, -4, 1)$. Hallar el valor de m de modo que $\vec{v}$ sea perpendicular al vector $\vec{u} \times \vec{v} + 2\vec{u}$.
Rpta $m = 3$.
17. Sean $\vec{u} = (2, -1, 2)$ y $\vec{w} = (3, 4, -1)$. Hallar un vector $\vec{v}$ tal que $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$.
Rpta: $\vec{v} = (1, -1, -1)$.

18. Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ son ortogonales. Si $||\vec{u}|| = \sqrt{3}$ y $||\vec{v}|| = \sqrt{12}$, hallar el valor de $||(2\vec{u} - 3\vec{v}) \times (3\vec{u} + \vec{v})||$
    Rpta 66.
19. Sea $\vec{u}$ y $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tales que $||\vec{u}|| = 3$, $||\vec{v}|| = 26$ y $||\vec{u} \times \vec{v}|| = 72$. Hallar $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
    Rpta: ± 30.
20. Sean los vectores $\overrightarrow{a} = \left(m^2 - 3, m - 1\right)$, $\overrightarrow{b} = \left(\frac{4}{m^2}, \frac{4}{m}\right)$ donde $m \neq 0$ es un número real positivo. Si $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ son ortogonales, hallar el vector $\overrightarrow{v} = 9\overrightarrow{b} - 4\overrightarrow{a}$.
    Rpta: $\overrightarrow{v} = (19, 22)$.
21. Sean $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ vectores en R^2tales que $\overrightarrow{b}$ es el opuesto de $\overrightarrow{a}$. Si $\overrightarrow{b}$ tiene el mismo sentido que el vector $\overrightarrow{c} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$ y la norma de $\overrightarrow{a}$ es 5, hallar el vector $\overrightarrow{x} = 2\overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$.
    Rpta: $\overrightarrow{x} = (-4, 3)$.
22. Los vértices de un triángulo son los puntos $A\,(-1, -2, 4)$; $B\,(-4, -1, 2)$ y $C\,(-5, 6, -4)$. Hallar un vector $\overrightarrow{w}$ que es paralelo a la altura trazada del vértice B al lado opuesto, si se sabe que $\|\overrightarrow{w}\| = 2\sqrt{5}$
    Rpta: $\overrightarrow{w} = (4, 2, 0)$
23. Hallar el área del paralelogramo $ABCD$ que tiene como diagonales los vectores $\overrightarrow{BD} = (-3, 3, 0)$ y $\overrightarrow{AC} = (5, -7, 4)$
    Rpta: $9\ u^2$
24. Sean los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tales que $||\vec{u}|| = \sqrt{3}/4$, $||\vec{v}|| = 2$ y el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $2\pi/3$. Hallar $||(2\vec{u} + 3\vec{v}) \times (2\vec{u} - 5\vec{v})||$.
    Rpta: 12.
25. Si $||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| = 5$ y el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $\pi/4$. Calcular el área de un triángulo construido sobre los vectores $\vec{u} - 2\vec{v}$ y $3\vec{u} + 2\vec{v}$.
    Rpta: $50\sqrt{2}$.

- **Ejercicios correspondientes a rectas y planos**

1. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $A = (3, 1, 5)$ y es paralela a la recta $\mathcal{L}_1$: $x = 4 - t$, $y = 2 + 3t$, $z = -4 + t$, $t \in \mathbb{R}$
    Rpta. $x = 3 - r$, $y = 1 + 3r$, $z = 5 + r$, $r \in \mathbb{R}$.
2. Hallar la ecuación de la recta que pasa perpendicularmente por el punto medio del segmento AB donde $A = (-5, -4, 4)$, $B = (3, -2, -4)$ y que corta a la recta $\mathcal{L}_1$: $P = (1, 1, 1) + t(-3, -8, -3)$, $t \in \mathbb{R}$.
    Rpta. $P = (-1, -3, 0) + r(1, 4, 2)$, $r \in \mathbb{R}$.
3. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (3, 0, -1)$ y es perpendicular en su punto de intersección con la recta $\mathcal{L}_1$: $P = (2, 3, 2) + t(2, -1, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.
    Rpta. $P = (3, 0, -1) + r(1, 2, 3)$, $r \in \mathbb{R}$.
4. Un punto P está sobre la recta que pasa por los puntos $A = (1, 0, -1)$ y $B = (4, 4, 4)$. Si la coordenada z del punto P es 9, hallar sus otras coordenadas.
    Rpta. $P = (7, 8, 9)$
5. Hallar la ecuación de la recta que pasa por la intersección de las rectas $\mathcal{L}_1$: $x = -1 + 5r$, $y = 4 - 2r$, $z = -3 - 4r$, $r \in \mathbb{R}$ y $\mathcal{L}_2$: $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z-13}{-10}$ y es perpendicular al plano formado por $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$.
    Rpta. $P = (4, 2, -7) + t(16, 38, 1)$, $t \in \mathbb{R}$.
6. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $A = (0, 1, 1)$ y corta a las rectas $\mathcal{L}_1$: $x = y$, $2x = z$ y $\mathcal{L}_2$: $P = (1, -2, 0) + r(1, 2, 1)$, $r \in \mathbb{R}$.
    Rpta. $P = (0, 1, 1) + t(1, 0, 1)$, $t \in \mathbb{R}$ o $P = (0, 1, 1) + s(3, -4, -1)$, $s \in \mathbb{R}$.

7. Dadas las rectas que se cruzan $\mathcal{L}_1$: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{5-z}{4}$ y $\mathcal{L}_2$: $x = -2$, $\dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+2}{2}$. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $A = (-1, -2, 1)$ y es perpendicular a $\mathcal{L}_1$ en el espacio y corta a $\mathcal{L}_2$
   Rpta. $P = (-1, -2, 1) + t(-5, 34, 23)$, $t \in \mathbb{R}$.
8. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (-1, 0, 2)$, es perpendicular a la recta $\mathcal{L}_1$: $P = (2, 2, 0) + t(5, -2, -3)$, $t \in \mathbb{R}$ y se corta con la recta $\mathcal{L}_2$: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z-1}{1}$
   Rpta. $P = (-1, 0, 2) + r(32, 65, 10)$, $r \in \mathbb{R}$.
9. Hallar la ecuación vectorial de la recta que interseca en ángulo recto a las rectas $\mathcal{L}_1$: $P = (3, 3, 4) + t(2, 2, 3)$, $t \in \mathbb{R}$ y $\mathcal{L}_2$: $P = (1, 6, -1) + r(-1, 2, 0)$, $r \in \mathbb{R}$
   Rpta. $P = (1, 1, 1) + s(-2, -1, 2)$, $s \in \mathbb{R}$
10. Encontrar la distancia desde el origen a la recta $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{2-z}{5}$
    Rpta. 3u.
11. Encontrar la longitud mínima de cordel que se necesita para llegar desde el punto $Q = (8, 6, 5)$ hasta una vara recta de madera que pasa por los puntos $A = (3, 5, 3)$ y $B = (8, 3, 1)$
    Rpta. $\sqrt{629/33}$.
12. Hallar la distancia del punto $Q = (2, 0, 1)$ a la recta $P = (2, 1, 1/2) + t(3, 2, 2)$, $t \in \mathbb{R}$
    Rpta. $9\sqrt{17}/34$u.
13. Hallar la distancia perpendicular del punto $Q = (-2, 2, 4)$ a la recta cuyas ecuaciones paramétricas son: $x = 1 + 2t$, $y = 6 + t$, $z = -4t - 5$, $t \in \mathbb{R}$
    Rpta. $\sqrt{110/21}$.
14. Desde el punto $A = (3, 6, 7)$ se traza una perpendicular a la recta $\mathcal{L}$: $P = (1, 1, 2) + t(2, -1, 3)$, $t \in \mathbb{R}$. A qué distancia del punto $Q = (4, 4, 7)$ se halla dicha perpendicular.
    Rpta. $\sqrt{35}/5$.
15. Hallar un punto cuya distancia a las rectas $\mathcal{L}_1$: $P = (3, 2, 2) + r(1, 5, 3)$, $r \in \mathbb{R}$ y $\mathcal{L}_2$: $P = (1, 0, 1) + t(1, 2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$ sea la mitad de la distancia mínima de $\mathcal{L}_1$ a $\mathcal{L}_2$.
    Rpta. $M = \dfrac{1}{28}(99, 138, 101)$.
16. Hallar la distancia perpendicular entre las rectas $\mathcal{L}_1$: $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+1}{-1}$ y $\mathcal{L}_2$: $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{4}$.
    Rpta. $11\sqrt{6}/6$.
17. Determinar la distancia más corta entre las rectas $\mathcal{L}_1$: $2x = y = z$, $\mathcal{L}_2$: $x = y = 26 + z$.
    Rpta. $13\sqrt{2}$.
18. Sean las rectas $\mathcal{L}_1$: $P = (5, 1, 2) + t(2, 0, 2)$, $t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}_2$: $P = (3, 2, 1) + r(2, 1, 0)$, $r \in \mathbb{R}$. Hallar un punto que equidiste de ambas rectas una distancia mínima.
    Rpta. $(13/4, 3/2, 3/4)$.
19. Dados los puntos $A = (3, -1, 2)$ y $B = (4, -2, -1)$, hallar la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular al vector $\vec{AB}$.
    Rpta. $x - y - 3z + 2 = 0$.
20. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $A = (3, 4, -5)$ y es paralelo a los vectores $\vec{v} = (3, 1, -1)$ y $\vec{w} = (1, -2, 1)$.
    Rpta. $x + 4y + 7z + 16 = 0$.

21. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $A = (3, -1, 2)$, $B = (4, -1, -1)$ y $C = (2, 0, 2)$.
    Rpta. $3x + 3y + z - 8 = 0$.
22. Hallar la ecuación del plano que contiene a las rectas concurrentes
    $\mathcal{L}_1$: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{z}{7}$; $\mathcal{L}_2$: $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+3}{5} = \dfrac{z}{-2}$.
    Rpta. $43x + 3y - 14z - 34 = 0$.
23. Determinar para qué valores de a y b, los planos $\mathcal{P}_1$: $2x+ay+3z = 9$ y $\mathcal{P}_2$: $bx-6y-6z = -2$ son paralelos.
    Rpta. $a = 3$, $b = -4$.
24. Determinar para qué valor de m, los planos $\mathcal{P}_1$: $3x - 5y + mz = 3$ y $\mathcal{P}_2$: $x + 3y + 2z = -5$ son perpendiculares.
    Rpta. $m = 6$.
25. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $A = (2, -1, 1)$ y es perpendicular a los planos $\mathcal{P}_1$: $2x - z + 1 = 0$ y $\mathcal{P}_2$: $y = 0$.
    Rpta. $x + 2z - 4 = 0$.
26. Para qué valores de a y b la recta $\mathcal{L}$: $x = 3+4t$, $y = 1-4t$, $z = t-3$, $t \in \mathbb{R}$ está contenido en el plano $\mathcal{P}$: $ax + 3y - 4z + b = 0$.
    Rpta. $a = 4$, $b = -27$.
27. Para qué valores de a y b el plano $\mathcal{P}$: $ax + by + 3z - 5 = 0$ es perpendicular a la recta $\mathcal{L}$: $x = 3 + 2t$, $y = 5 - 3t$, $z = -2 - 2t$, $t \in \mathbb{R}$.
    Rpta. $a = -3$, $b = 9/2$.
28. Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los planos $\mathcal{P}_1$: $2x - y + 3z = 1$ y $\mathcal{P}_2$: $x + 2y + z = 0$. Rpta. $7x - y - 5z = 0$.
29. Hallar la ecuación del plano que pasa por $(2, 6, 1)$ y contiene a la recta $\dfrac{x}{3} = \dfrac{z}{8}$, $y = -5$.
    Rpta. $88x - 13y - 33z - 65 = 0$.
30. Encontrar la ecuación del plano que pasa por los puntos $A = (-2, 5, 3)$; $B = (4, 8, -8)$ y es perpendicular al plano XZ. Rpta. $11x + 6z + 4 = 0$.
31. Encontrar la ecuación de un plano que pasa por los puntos $A = (1, 2, 3)$; $B = (3, 2, 1)$ y es perpendicular al plano $4x - y + 2z = 7$. Rpta. $x + 6y + z = 16$.
32. Hallar la distancia del punto $P = (-1, 1, -2)$ al plano que pasa por los puntos $A = (1, -1, 1)$, $B = (-2, 1, 3)$ y $C = (4, -5, 2)$. Rpta. $20/\sqrt{217}$u.
33. Hallar la ecuación del plano que es paralelo al plano $\mathcal{P}_1$: $x - 3y + 5z = 8$ y que está a 3 unidades del origen. Rpta. $\mathcal{P}$: $x - 3y + 5z \pm 3\sqrt{35} = 0$.
34. Hallar las ecuaciones de los planos paralelos al plano $2x - 2y - z = 3$ que estan a la distancia de 5 unidades de él.
    Rpta. $2x - 2y - z - 18 = 0$ o $2x - 2y - z + 12 = 0$.
35. Hallar el punto simétrico de $P = (36, 20, -17)$ respecto del plano formado por las rectas $\mathcal{L}_1$: $P = (1, 2, 3) + t(0, 4, 3)$, $t \in \mathbb{R}$ y $\mathcal{L}_2$: $P = (1, -2, 0) + r(3, 0, 4)$, $r \in \mathbb{R}$.
    Rpta. $(-28, -16, 31)$.
36. Dos caras de un cubo estan en los planos $2x - 2y + z - 1 = 0$ y $2x - 2y + z + 5 = 0$. Hallar el volumen de este cubo.
    Rpta. 8u^3.
37. Si la base de un tetraedro es un triángulo de vértices $A = (1, -2, 1)$, $B = (-4, 2, -1)$ y $C = (-5, 5, 3)$, hallar la longitud de la altura del tetraedro trazado desde el vértice $D = (4, 2, -3)$ a la base. Rpta. 6u.

38. Un cubo tiene dos de sus caras en los planos $\mathcal{P}_1$: $2x + 6y + 3z = 12$ y $\mathcal{P}_2$: $6x + 18y + 9z + 6 = 0$. Hallar el área total y su volumen.
Rpta. $A_t = 24\text{u}^2$, $V = 8\text{u}^3$.

39. Obtener la ecuación vectorial de la recta de intersección de los planos
$\mathcal{P}_1$: $3x + y - z - 6 = 0$; $\mathcal{P}_2$: $4x - 2y - 3z + 2 = 0$
Rpta. $\mathcal{L} : P = (1, 3, 0) + t(-1, 1, -2)$, $t \in \mathbb{R}$

40. Hallar la ecuación del plano que es paralelo al plano cuyas intersecciones con los ejes X, Y, Z son -1, 3 y 5 respectivamente y que pasa por $A = (0, 1, -1)$.
Rpta. $15x - 5y - 3z + 2 = 0$.

41. Encontrar la ecuación del plano que pasa por la intersección de los planos $2x - y - 5z = 4$, $3x + y - z = 0$ y es paralelo al plano $12x - y - 17z = 14$.
Rpta. $12x - y - 17z = 12$.

42. Encontrar la ecuación del plano que pasa por los puntos $A = (1, 0, -1)$, $B = (-1, 2, 1)$ y es paralelo a la recta de intersección de los planos $3x + y - 2z = 6$, $4x - y + 3z = 0$.
Rpta. $5x - 3y + 8z + 3 = 0$.

43. Hallar la ecuación cartesiana de un plano que pasa por $(1, 2, -3)$ y por la intersección del plano $x - y + 2z = 4$ con el plano XY.
Rpta. $3x - 3y - 5z - 12 = 0$

44. Sean las rectas $\mathcal{L}_1$: $\begin{cases} x - y + z - 5 = 0 \\ x - 3y + 6 = 0 \end{cases}$; $\mathcal{L}_2$: $\begin{cases} 2y + z - 5 = 0 \\ 4x - 2y + 5z - 7 = 0 \end{cases}$. Demostrar que $\mathcal{L}_1$ es paralela a $\mathcal{L}_2$.

45. Hallar la distancia del punto $Q = (6, -3, 3)$ a la recta $\mathcal{L}$: $\begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ 4x - y - 3z - 15 = 0 \end{cases}$.
Rpta. 3u.

46. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección entre los planos $3x - y + 2z = 5$, $8x + 2y - z = 3$ y que contiene al origen.
Rpta. $31x + 13y - 11z = 0$.

47. Hallar la ecuación del plano que pasa por $A = (1, 1, 1)$ y es perpendicular a la recta $\mathcal{L}$: $\begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ x + 2y + 2z = 5 \end{cases}$. Rpta. $\mathcal{P}$: $4x + 3y - 5z - 2 = 0$.

48. Hallar el punto Q que es simétrico al punto $R = (2, -5, 7)$ respecto de la recta que pasa por los puntos $A = (5, 4, 6)$ y $B = (-2, -17, -1)$. Rpta. $Q = \frac{1}{11}(30, -31, -3)$.

49. Hallar la ecuación del plano que contiene a los puntos $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, -1, 0)$ y que es paralelo a la recta de intersección de los planos $x + y + z = 3$, $x + 2y - 3z + 5 = 0$.
Rpta. $9x + 13y - 7z - 14 = 0$.

50. Sea la recta $\mathcal{L}$ que contiene al punto $A = (2, -5, 8)$ y es perpendicular al plano $\mathcal{P}$: $x - 2y + 3z - 8 = 0$. Hallar las coordenadas del punto de intersección de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{P}$.
Rpta. $(0, -1, 2)$.

51. Hallar las coordenadas del punto de intersección del plano $\mathcal{P}$: $2x + y + z = 6$ y la recta que pasa por el origen y que es perpendicular a $\mathcal{P}$.
Rpta. $(2, 1, 1)$.

52. Hallar el punto Q que es simétrico al punto $R = (1, 3, -4)$ respecto al plano $\mathcal{P}$: $3x + y - 2z = 0$. Rpta. $Q = (-5, 1, 0)$.

53. Hallar la ecuación del plano que pasa por $\mathcal{L}$: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-2}{2}$ y es perpendicular al plano $3x + 2y - z - 5 = 0$. Rpta. $x - 8y - 13z + 9 = 0$.

54. Encontrar la ecuación del plano que es perpendicular al plano $2x+3y-5z=0$, contiene al origen y es paralelo a la recta que pasa por los puntos $(1,-1,3)$ y $(2,1,-2)$.
Rpta. $5x-5y-z=0$.

55. Dado el plano $x-2y+3z=8$ y la recta $\mathcal{L}$: $\dfrac{x+4}{4}=\dfrac{5-z}{3}$, $y=-1$. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(0,2,-1)$, paralela al plano dado y corta a la recta $\mathcal{L}$.
Rpta. $P=(0,2,-1)+t(4,-1,-2)$, $t\in\mathbb{R}$.

56. La recta $\mathcal{L}$: $\begin{cases} x-2z-3=0 \\ y-2z=0 \end{cases}$ interseca al plano $x+3y-z+4=0$. Encontrar el punto de intersección P y encontrar la ecuación de la recta en este plano que pasa por P y es perpendicular a $\mathcal{L}$
Rpta, $(1,-2,-1)$, $\dfrac{x-1}{-5}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z+1}{4}$.

57. Por los puntos $A=(-6,6,-5)$ y $B=(12,-6,1)$ se ha trazado una recta. Hallar los puntos de intersección de esta recta con los planos coordenados.
Rpta. $(9,-4,0)$, $(3,0,-2)$, $(0,2,-3)$.

58. Usar el concepto de proyección de un vector sobre otro para calcular el área del triángulo cuyos vértices son $A\,(0,0)$; $B\,(5,3)$ y $C\,(7,8)$.
Rpta:$\frac{19}{2}$

59. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2,-1,1)$ y es perpendicular, en su punto de intersección con la recta $L:\{(1,-3,2)+t\,(2,0,-1)\,,\ t\in\mathbb{R}\}$.
Rpta:$L:\{(2,-1,1)+r\,(1,-10,2)\,,\ r\in\mathbb{R}\}$

60. Para qué valores de a y b la recta $L:\ x=3+2t,\ y=1-3t,\ z=-2+t$ está contenida en el plano $P:\ ax-2y+5z+b=0$.
Rpta: $a=4$ y $b=-19$.