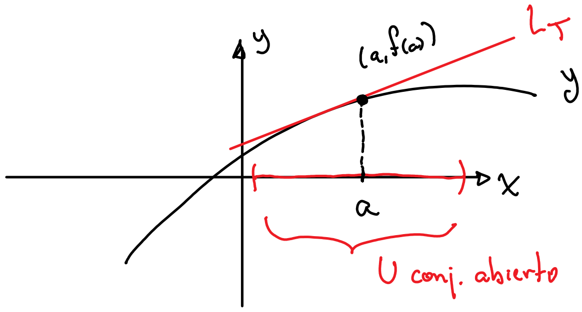
Derivadas Parciales

viernes, 7 de mayo de 2021 07:00

$L_T: \; y - f(a) = f'(a)(x-a)$



$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Definición 23 *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función, U abierto. Se define la derivada parcial de f con respecto a su i-ésima variable en el punto $x_0 \in U$ (denotada por $\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}$) como:*

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h} \qquad e_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

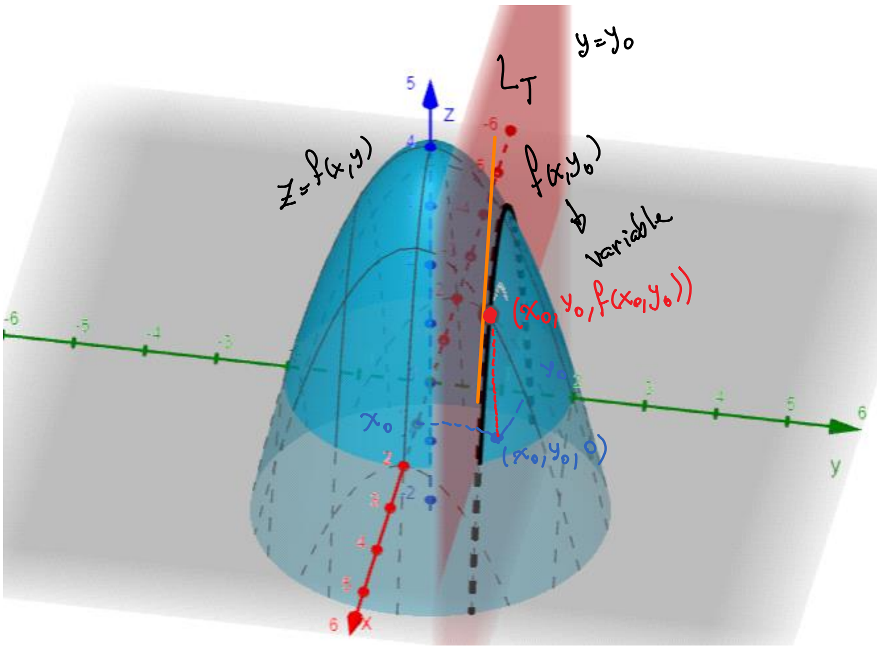
i-ésima

siempre que el límite exista.

Definición 24 *Si mantenemos fijo a y, y hacemos variar a x. La razón de cambio de $f(x, y)$ con respecto a x, se denota $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y tiene el valor*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}.$$

El valor de este límite (si existe) es la derivada parcial de f con respecto a x.



$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

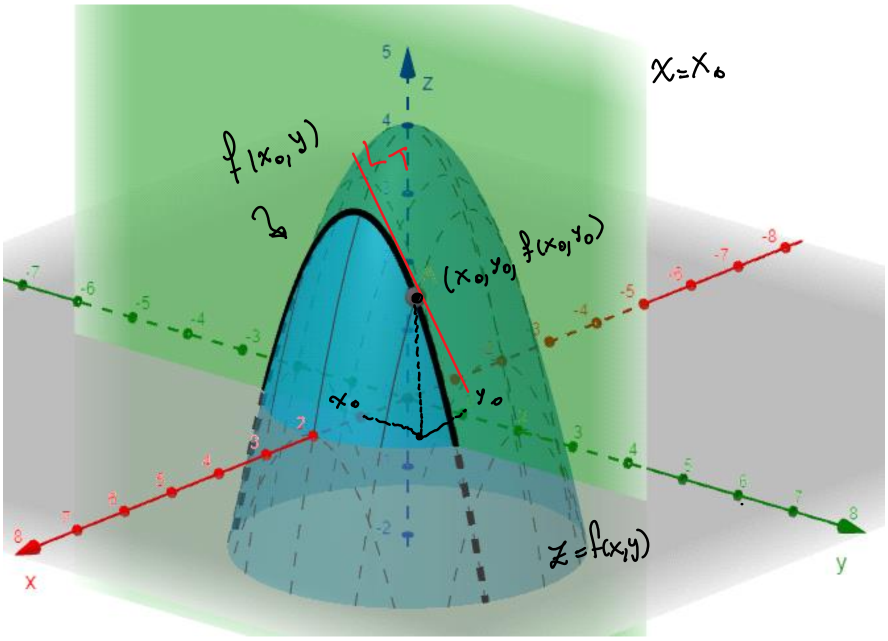
$L_T: \; z - f(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0)$;

$y = y_0$

Definición 25 *Si mantenemos fijo a x y hacemos variar a y. La razón de cambio de $f(x, y)$ con respecto a y, se denota $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ y tiene el valor*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}.$$

El valor de este limite (si existe) es la derivada parcial de f respecto a y.



$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h}$$

$$L_T: z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0);$$
$$x = x_0$$

Ejemplos

1. Hallar las derivadas parciales de las sgtes funciones

(a) $f(x,y) = (2x^2 + 3xy)^3$

(b) $f(x,y) = \dfrac{x^2 + 3xy^2 - 1}{2x^3y - xy^3 + 2}$

Solución

a) $f(x,y) = (2x^2 + 3xy)^3$

i) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3(2x^2 + 3xy)^2 . (4x + 3y)$

y constante

ii) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3(2x^2 + 3xy)^2 . 3x$

x constante

b) $f(x,y) = \dfrac{x^2 + 3xy^2 - 1}{2x^3y - xy^3 + 2}$

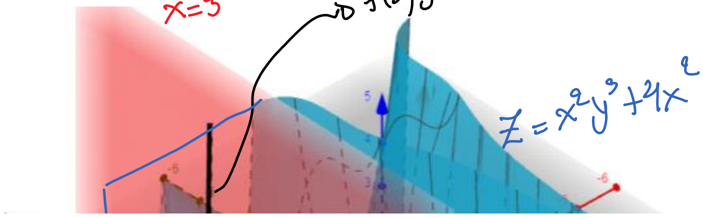
i) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{(2x + 3y^2)(2x^3y - xy^3 + 2) - (x^2 + 3xy^2 - 1)(6x^2y - y^3)}{(2x^3y - xy^3 + 2)^2}$

ii) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{(6xy)(2x^3y - xy^3 + 2) - (x^2 + 3xy^2 - 1)(2x^3 - 3xy^2)}{(2x^3y - xy^3 + 2)^2}$

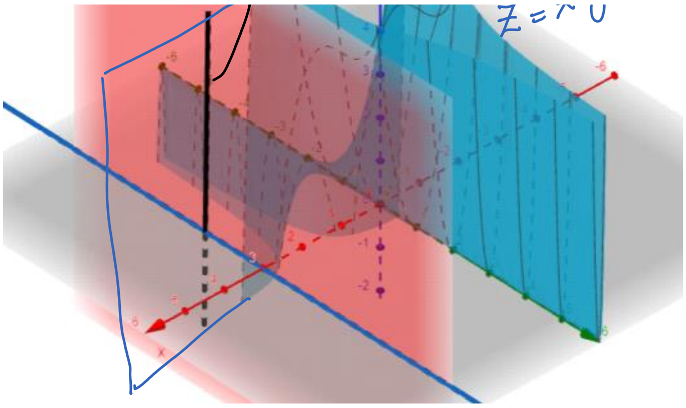
Guia del DOM ejercicio 21 pág 42

2. a) Determine la ecuación de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $z = x^2y^3 + 4x^2$ con el plano $x = 3$ en el punto en el que $y = 1$.
Rpta. $\frac{z-45}{27} = y - 1$; $x = 3$

$f(3,y) = (3)^2 y^3 + 4(3)^2$



$$L_T: z - f(3,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(3,1)(y - 1);$$
$$x = 3$$



$x = 3$

- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(3,1) = 3(3)^2(1)^2 = 27$
- $f(3,1) = (3)^2(1)^3 + 4(3)^2 = 45$

$\Rightarrow L_T : \begin{cases} z - 45 = 27(y-1); \\ x = 3 \end{cases}$

3.

18. Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Determine si $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ son continuas en $(0,0)$. ¿Es diferenciable en $(0,0)$?

Solución

i) Si $\underline{(x,y) \neq (0,0)} \Rightarrow f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2} \Rightarrow$

- $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy(x^2+y^2) - x^2y(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2(x^2+y^2) - x^2y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$

ii) Si $\underline{(x,y) = (0,0)} \Rightarrow$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^2 0}{h^2+0^2} - 0}{h}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$

- $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{0^2 h}{0^2+h^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$