CIERRE DE RELACIONES

Presentado por:
- Camila Antuaneth Torres Ramos
- César Gonzalo Carpio Paiva
- Alberto Fabrizio Palomino Apaza
- Jenny Huanca Anquise

INTRODUCCIÓN A LOS CIERRES

CAMINOS EN GRAFOS

CIERRES TRANSITIVOS

ALGORITMO DE WARSHALL

EJERCICIOS

Bibliografía

DEFINICIÓN DE CIERRE

INTRODUCCIÓN

Caso aplicativo: una red informática unida por una linea telefónica unidireccional, que conecta 4 centros de datos: Bostón-Chicago, Bostón-Detroit, Chicago-Detroit y Detroit-Denver.

Se desea encontrar todos los pares de centros conectados entre si (no importa si están conectados por 1 o + líneas).

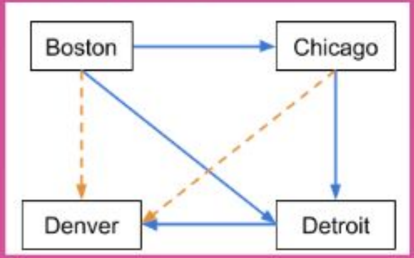
Esto se puede lograr construyendo **la relación transitiva más pequeña** en A que contenga a R **(Cierre Transitivo)**

Resolución del caso aplicativo

Tipos de cierres o clausuras

Aplicación de Cierre

De forma gráfica



Como pares ordenados:
Sea **A = {b, c, d, v}** inicialmente tenemos **R = {(b,c), (b, d), (c, d), (d,v)}**.
Necesitamos completar las relaciones transitivas faltantes: Cierre Transitivo.

t(R) = {(b,c), (b, d), (c, d), (d,v), (b,v), (c,v)}

Prezi

"Una relación **R** puede o no tener alguna propiedad como la **reflexividad** , la **simetría** o la **transitividad.** Sea **S** una relación que **cumple con dicha propiedad** y que **contiene a R** , entonces se dice que **S es el cierre de R con respecto a dicha propiedad.**"

TIPOS

- **La clausura o cierre reflexivo** es la relación reflexiva más pequeña en el conjunto (**A**) y que incluyen a **R.**
- **La clausura o cierre simétrico** es la relación simétrica más pequeña en el conjunto (**A**) y que contiene a **R.**
- **La clausura o cierre transitivo** es la relación transitiva más pequeña en el conjunto (**A**) y que contiene a **R.**
- **Si R cumple con una propiedad, ella misma es la clausura de dicha propiedad.**

Ejemplo CLAUSURA REFLEXIVA

Ejemplo CLAUSURA SIMÉTRICA

Ejemplo CLAUSURA TRANSITIVA

CLAUSURA REFLEXIVA

Sea **A = {1 , 2, 3, 4}** y la relación

R = {(1,2),(2,4),(3,3),(4,2)}

R no es reflexiva.

¿Cómo encontramos su cierre reflexivo?

Adicionando a **R** los pares faltantes **(a,a)**, donde **a** pertenece a **A.**

r(R) = {(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,3),(4,2)(4,4)}

CLAUSURA SIMÉTRICA

Sea **A = {1 , 2, 3, 4}** y la relación
R = {(1,2),(2,2),(2,4),(4,3)}
R no es simétrica.
¿Cómo encontramos su cierre simétrico?

Adicionando a **R** los pares inversos faltantes **(b,a)**

s(R) = {(1,2),(2,1),(2,2),(2,4),(4,3),(4,2),(3,4)}

CLAUSURA TRANSITIVA

Sea **A = {1 , 2, 3, 4}** y la relación
R = {(1,2),(2,2),(2,3),(3,3)}
R no es transitiva.
¿Cómo encontramos su cierre transitivo?

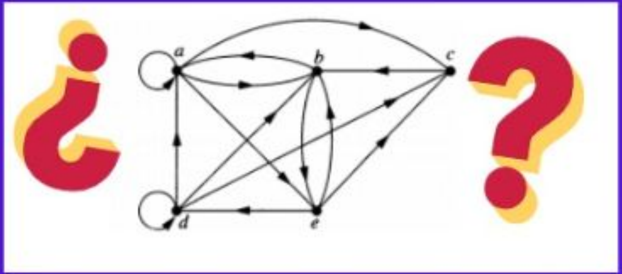
Adicionando a **R** los pares **(a,c)** faltantes, donde **(a,b)** y **(b,c)** pertenecen a **A**

t(R) = **{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)}**

Pero el cálculo del cierre transitivo no es tan sencillo. Debido a su complejidad se han creado algunos algoritmos para su construcción

Caminos en grafos

Mucho mas sencillo de lo que aparenta



Definición

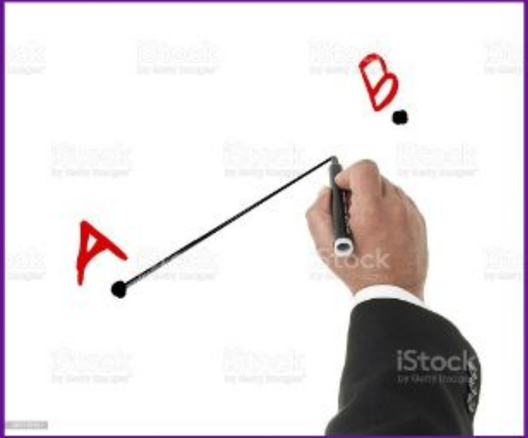
Representacion de Clausuras

Ejemplo

Definición

Con una perspectiva diferente, la relacion la podemos ver como caminos que conectan entre dos puntos (a,b) y si estos son mas que dos y se relacionan entre si de igual forma podemos representarlo de manera grafica conetandolos asumiendo que cada vertice sera un punto

Representacion Grafica

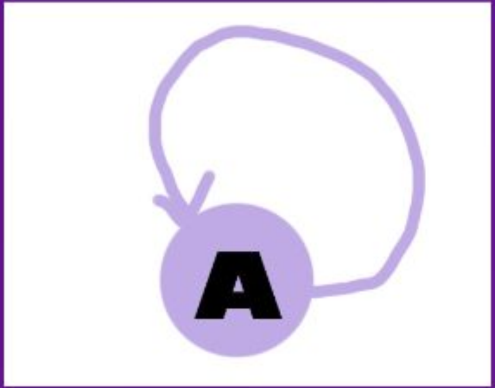


CLAUSURA REFLEXIVA

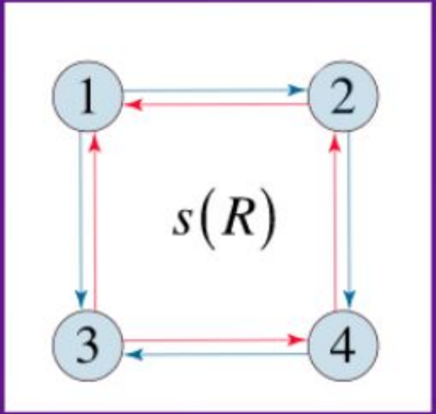
CLAUSURA SIMÉTRICA

CLAUSURA TRANSITIVA

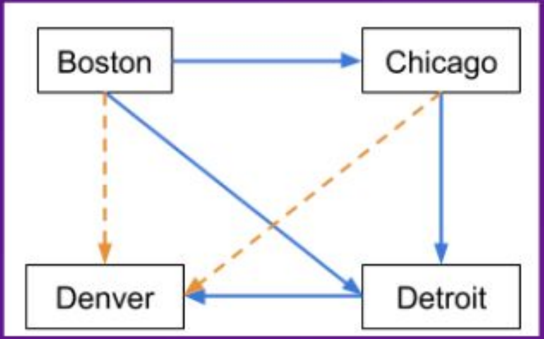
CLAUSURA REFLEXIVA



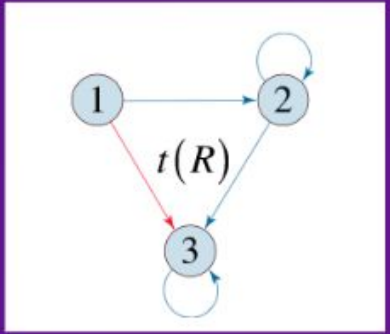
Clausura Simetrica



Clausura Transitiva

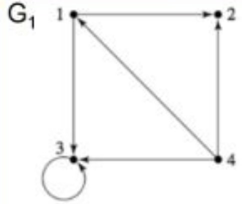


Ejemplo



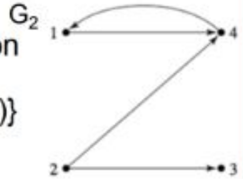
Se puede apreciar los pares ordenados:
t(R):{(1,2);(2,2);(2,3);(3,3);(1,3)}

Construyendo



Para el grafo G_1 obtenemos la siguiente relación $\{(1, 2), (1, 3), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$.

Para el conjunto *N* =$\{1, 2, 3, 4\}$ y la relación binaria $\{(1, 4), (2, 3), (2, 4), (4, 1)\}$ sobre *N*, obtenemos el siguiente grafo G_2



Cierres Transitivos

Definición:
Sea R una relación en un conjunto A. La relación de conectividad R consta de los pares (a, b) tales que hay un camino de longitud al menos uno desde a hasta b en B.

$$R^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n.$$

porque R^n consta de los pares (a, b) tales que hay un camino de longitud n desde a hasta b, se sigue que R^* es la unión de todos los conjuntos R^n . Es decir,

La cerradura transitiva de una relación R es la mas pequeña relación transitiva que contiene a R.

Teorema 2

Lema 1

Teorema 3

Teorema 2

El cierre transitivo de una relación R es igual a la relación de conectividad.

$$S^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} S^k$$

Lema 1

Sea A un conjunto con n elementos, y sea R una relación sobre A. Si hay una trayectoria de longitud en al menos uno en R de a a b, entonces existe un camino con una longitud que no excede n, Además cuando a es diferente de b, si hay un camino de longitud al menos uno en R desde a hasta b, entonces existe tal camino con longitud no superior a n-1.

$$R^* = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \cup R^n$$

Teorema 3

Sea Mr* la matriz cero-one de la relación R en un conjunto con n elementos. Entonces la matriz cero-one del cierre transitivo R* es

$$\mathbf{M}_{R^*} = \mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_R^{[2]} \vee \mathbf{M}_R^{[3]} \vee \cdots \vee \mathbf{M}_R^{[n]}.$$

Algoritmo

ALGORITHM 1 **A Procedure for Computing the Transitive Closure.**

procedure *transitive closure* ($\mathbf{M}_R$: zero–one $n \times n$ matrix)
$\mathbf{A} := \mathbf{M}_R$
$\mathbf{B} := \mathbf{A}$
for $i := 2$ **to** n
begin
    $\mathbf{A} := \mathbf{A} \odot \mathbf{M}_R$
    $\mathbf{B} := \mathbf{B} \vee \mathbf{A}$
end {$\mathbf{B}$ is the zero–one matrix for R^*}

El teorema 3 se puede utilizar como base de un algoritmo para calcular la matriz de la relación R *. Para encontrar esta matriz, se calculan las sucesivas potencias booleanas de MR, hasta la enésima potencia. A medida que se calcula cada poder, se forma su unión con la unión de todas las potencias menores. Cuando se hace esto con la n-ésima potencia, se ha encontrado la matriz para R *. Este procedimiento se muestra como Algoritmo 1.

Algoritmo de Warshall

Es llamado así por Stephen Warshall, quien descubrió este algoritmo en 1960.

Este algoritmo un método eficiente para calcular el cierre transitivo de una relación.
El algoritmo de warshall es también denominado Roy-Warshall, porque Bernand Roy describió en 1959

Lemma II

Matriz de Adyacencia

Lemma II

El lemma 2 nos da los medios para calcular de manera eficiente las matrices Wk. k = 1, 2, ..., n. Mostramos el pseudocódigo para el algoritmo de Warshall, usando el Lema 2, como Algoritmo 2.

ALGORITHM 2 **Warshall Algorithm.**

procedure *Warshall* ($\mathbf{M}_R$: $n \times n$ zero–one matrix)
$\mathbf{W} := \mathbf{M}_R$
for $k := 1$ **to** n
begin
  for $i := 1$ **to** n
  begin
    for $j := 1$ **to** n
    $w_{ij} := w_{ij} \vee (w_{ik} \wedge w_{kj})$
  end
end $\{\mathbf{W} = [w_{ij}]$ is $\mathbf{M}_{R^*}\}$

La complejidad computacional del algoritmo de Warshall se puede calcular fácilmente en términos de operaciones de bits. Para encontrar la entrada

Matriz de Adyacencia

Es una matriz cuadrada que se utiliza como una forma de representar relaciones binarias.

Propiedades:
-Para un grafo no dirigido la matriz de adyacencia es simétrica.
-El número de caminos Ci,j(k), atravesando k aristas desde el nodo i al nodo j, viene dado por un elemento de la potencia k-ésima de la matriz de adyacencia:

$$C_{i,j}(k) = [\mathbf{A}^k]_{ij}$$

Construcción

Prezi

Construcción de una matriz a partir de un grafo

Construcción a partir de un grafo:
1. Se crea una matriz cero, cuyas columnas y filas representan los nodos del grafo.
2. Por cada arista que une a dos nodos, se suma 1 al valor que hay actualmente en la ubicación correspondiente de la matriz.
Si tal arista es un bucle y el grafo es no dirigido, entonces se suma 2 en vez de 1.
3. Finalmente, se obtiene una matriz que representa el número de aristas (relaciones) entre cada par de nodos (elementos).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bibliografia

Informacion extraida de:
- Closure Relations. Recuperado de https://www.math24.net/closures-relations/
- Relación de conectividad. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=uUvW8VmTJKU
- Algoritmo de Wharshall. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=cqJQvyYwLzc&t=134s
- Discrete Mathematics and Its Applications - Kennenth Rosen