CAPÍTULO

Relaciones

Las relaciones entre elementos de conjuntos ocurren en muchos contextos. Todos los días nos ocupamos l &. relaciones como las que existen entre una empresa y su número de teléfono, un empleado y su salario, una persona y un familiar, etc. En matemáticas estudiamos relaciones como los que se encuentran entre un entero positivo y uno que divide, un entero y uno que es congruente con módulo 5, un número real y uno que es mayor que él, un número real x y el valor $f(x)$ donde f es una función, y así sucesivamente. Relaciones como la que existe entre un programa y una variable que utiliza y que se encuentra entre un lenguaje informático y una declaración válida en este lenguaje A menudo surgen en la informática.

Las relaciones entre elementos de conjuntos se representan utilizando la estructura llamada relación, que es solo un subconjunto del producto cartesiano de los conjuntos. Las relaciones se pueden utilizar para resolver problemas. como determinar qué pares de ciudades están vinculadas por vuelos de aerolíneas en una red, encontrar un orden viable para las diferentes fases de un proyecto complicado, o producir una forma útil de almacenar información en bases de datos informáticas.

En algunos lenguajes informáticos, solo importan los primeros 31 caracteres del nombre de una variable. La relación que consta de pares ordenados de cadenas donde la primera cadena tiene la misma inicial 31 caracteres como segunda cadena es un ejemplo de un tipo especial de relación, conocido como relación de equivalencia. Las relaciones de equivalencia surgen a lo largo de las matemáticas y la informática. Estudiaremos las relaciones de equivalencia y otros tipos especiales de relaciones en este capítulo.

8.1 Relaciones y sus propiedades

Introducción

La forma más directa de expresar una relación entre elementos de dos conjuntos es usar ordenados pares formados por dos elementos relacionados. Por esta razón, los conjuntos de pares ordenados se denominan binarios. relaciones. En esta sección presentamos la terminología básica utilizada para describir las relaciones binarias. Más adelante en este capítulo usaremos relaciones para resolver problemas que involucran redes de comunicaciones, programación de proyectos e identificación de elementos en conjuntos con propiedades comunes.

DEFINICIÓN 1

Sean A y B conjuntos. Una **relación binaria de** A a B es un subconjunto de A x B.

En otras palabras, una relación binaria de A a B es un conjunto R de pares ordenados donde el primer elemento de cada par ordenado proviene de A y el segundo elemento proviene de B. Usamos la notación aRb para denotar que (a, b) E R y aRb para denotar que (a, b) t / :. R. Además, cuando (a, b) pertenece a R, se dice que a está **relacionado con** b por R.

Las relaciones binarias representan relaciones entre los elementos de dos conjuntos. Te presentaremos relaciones n-arias, que expresan relaciones entre elementos de más de dos conjuntos, más adelante en este capítulo. Omitiremos la palabra *binario* cuando no haya peligro de confusión.

Ejemplos 1 3 ilustran la noción de una relación.

EJEMPLO 1

Sea A el conjunto de estudiantes de su escuela y B el conjunto de cursos. Sea R la relación que consta de esos pares (a, b), donde a es un estudiante matriculado en el curso b. Por ejemplo, si oe

ea

Es decir

eb

2e

R	una	segundo
0	X	X
	X	
2		X

FIGURA 1 Visualización de los pares ordenados en la relación R del ejemplo 3.

Jason Goodfriend y Deborah Sherman están inscritos en CS5 18, las parejas (Jason Goodfriend, CS5 18) y (Deborah Sherman, CS5 18) pertenecen a R. Si Jason Goodfriend también está inscrito en CS5 1O, entonces la pareja (Jason Goodfriend, CS5 1O) también está en R. Sin embargo, si Deborah Sherman está no inscrito en CS5 1O, entonces la pareja (Deborah Sherman, CS51O) no está en R.

Tenga en cuenta que si un estudiante no está inscrito actualmente en ningún curso, no habrá pares en R que tenga a este estudiante como primer elemento. Del mismo modo, si un curso no se ofrece actualmente allí No habrá parejas en R que tengan este curso como segundo elemento. ....

EJEMPLO 2 Sea A el conjunto de todas las ciudades y B el conjunto de los 50 estados de los Estados Unidos de America. Defina la relación R especificando que (a, b) pertenece a R si la ciudad a está en el estado b. por ejemplo, (Boulder, Colorado), (Bangor, Maine), (Ann Arbor, Michigan), (Middletown, Nueva Jersey), (Middletown, Nueva York), (Cupertino, California) y (Red Bank, Nueva Jersey) son en R. ....

EJEMPLO 3 Sea A = {O, 1, 2} y B = {a, b}. Entonces {(O, a), (0, b), (1, a), (2, b)} es una relación de A a B. Esto significa, por ejemplo, que ORa, pero que 1 b. Las relaciones se pueden representar gráficamente, como se muestra en la Figura 1, usando flechas para representar pares ordenados. Otra forma de representar esto relación es usar una tabla, que también se hace en la Figura 1. Discutiremos las representaciones de relaciones con más detalle en la Sección 8.3. ....

Funciones como relaciones

Recuerde que una función f de un conjunto A a un conjunto B (como se define en la sección 2.3) asigna exactamente una elemento de B a cada elemento de A. La gráfica de f es el conjunto de pares ordenados (a, b) tales que b = f (a). Dado que la gráfica de f es un subconjunto de A x B, es una relación de A a B. Además, la gráfica de una función tiene la propiedad de que cada elemento de A es el primer elemento de exactamente un par ordenado del gráfico.

Por el contrario, si R es una relación de A a B tal que cada elemento en A es el primer elemento de exactamente un par ordenado de R, entonces se puede definir una función con R como su gráfica. Esto puede ser hecho asignando a un elemento a de A el elemento único b EB tal que (a, b) E R. (Nota que la relación R en el ejemplo 2 no es la gráfica de una función porque Middletown ocurre más de una vez como primer elemento de un par ordenado en R.)

Una relación se puede utilizar para expresar una relación de uno a muchos entre los elementos del conjuntos A y B (como en el Ejemplo 2), donde un elemento de A puede estar relacionado con más de un elemento de B. Una función representa una relación donde exactamente un elemento de B está relacionado con cada elemento de A.

Las relaciones son una generalización de funciones; Se pueden usar para expresar una clase mucho más amplia. de relaciones entre conjuntos.

Relaciones en un conjunto

Las relaciones de un conjunto A consigo mismo son de especial interés.

DEFINICIÓN 2 Una relación en el conjunto A es una relación de A a A.

En otras palabras, una relación en un conjunto A es un subconjunto de A x A.

EJEMPLO 4 Sea A el conjunto {1, 2, 3, 4}. ¿Qué pares ordenados están en la relación R = {(a, b) I a divide b}?

Solución: Debido a que (a, b) está en R si y sólo si una y b son números enteros positivos que no excedan de 4 tales que a divide b, vemos que

R = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4) }.

Los pares en esta relación se muestran tanto gráficamente como en forma de tabla en la Figura 2.

A continuación, en el Ejemplo 5 se darán algunos ejemplos de relaciones en el conjunto de números enteros.

EJEMPLO 5 Considere estas relaciones en el conjunto de números enteros:

R\ = {(a, b) Yo a :: s b},
R2 = {(a, b) I a> b},
R3 = {(a, b) I a = b o un = -b},
R4 = {(a, b) yo a = b},
Rs = {(a, b) I a = b + I},
R6 = {(a, b) Yo a + b :: s 3}.

¿Cuál de estas relaciones contiene cada uno de los pares (1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, - 1) y (2, 2)?

Observación: a diferencia de las relaciones en los ejemplos 1-4, estas son relaciones en un conjunto infinito.

Solución: el par (1, 1) está en R\, R3, R4 y R6; (1, 2) está en R\ y R6; (2, 1) está en R2, Rs y R6; (1, -1) está en R2, R3 y R6; y finalmente, (2, 2) está en R\, R3 y R4 • ....

R		2	3	4
	X	X	X	X
2		X		X
3			X	
4				X

4.- ---.<..

FIGURA 2 Visualización de los pares ordenados en la Relación R del Ejemplo 4.

No es difícil determinar el número de relaciones en un conjunto finito, porque una relación en un conjunto A es simplemente un subconjunto de A x A.

EJEMPLO 6 ¿Cuántas relaciones hay en un conjunto con n elementos?

Solución: una relación en un conjunto A es un subconjunto de A x A. Porque A x A tiene n2 elementos cuando A tiene n elementos, y un conjunto con m elementos tiene 2m subconjuntos, hay 2n2 subconjuntos de A x A. Por lo tanto, hay 2n2 relaciones en un conjunto con n elementos. Por ejemplo, hay 2 3 2 = 29 = 512 relaciones en el conjunto {a, b, c}.

Propiedades de las relaciones

Hay varias propiedades que se utilizan para clasificar relaciones en un conjunto. Presentaremos el el más importante de estos aquí.

En algunas relaciones, un elemento siempre está relacionado consigo mismo. Por ejemplo, sea R la relación en el conjunto de todas las personas que constan de pares (x, y) donde x y y tienen la misma madre y la mismo padre. Entonces x R x para cada persona x.

DEFINICIÓN 3 Una relación R en un conjunto A se llama reflexiva si (a, a) E R para cada elemento un EA.

Observación: Usando cuantificadores vemos que la relación R en el conjunto A es reflexiva si Va «a, a) ER),

donde el universo del discurso es el conjunto de todos los elementos en A.

Vemos que una relación sobre A es reflexiva si cada elemento de A está relacionado consigo mismo. Ejemplos 7-9 ilustran el concepto de relación reflexiva.

EJEMPLO 7 Considere las siguientes relaciones en {1, 2, 3, 4}:

RJ = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)},

R2 = {(1, 1), (1, 2), (2, I)},

R3 = {(I, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4) },

R4 = {(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)},

R5 = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3) , (3, 4), (4, 4)},

R6 = {(3, 4)}.

¿Cuáles de estas relaciones son reflexivas?

Solución: Las relaciones R3 y R5 son reflexivas porque ambas contienen todos los pares de la forma (a, a), es decir, (1, 1), (2, 2), (3, 3) y (4, 4). Las otras relaciones no son reflexivas porque no contienen todos estos pares ordenados. En particular, RJ, R2, R4 y R6 no son reflexivos porque (3, 3) no está en ninguna de estas relaciones.

EJEMPLO 8 ¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 5 son reflexivas?

Solución: Las relaciones reflexivas del ejemplo 5 son RJ (porque a :::: a para cada entero a), R3 y R4. Para cada una de las otras relaciones en este ejemplo, es fácil encontrar un par de la forma (a, a) que no está en la relación. (Esto se deja como ejercicio para el lector).

Página 6

EJEMPLO 9 ¿Es reflexiva la relación "divide" en el conjunto de enteros positivos?

Solución: Como a I a siempre que a es un número entero positivo, la relación "divide" es reflexiva. (Nota que si reemplazamos el conjunto de enteros positivos con el conjunto de todos los enteros la relación no es reflexiva porque 0 no divide a 0.)

En algunas relaciones, un elemento está relacionado con un segundo elemento si y solo si el segundo elemento también está relacionado con el primer elemento. La relación que consiste de pares (x, y), donde x e y son los estudiantes de su escuela con al menos una clase común tienen esta propiedad. Otras relaciones tienen la propiedad de que si un elemento está relacionado con un segundo elemento, este segundo elemento no es relacionado con el primero. La relación que consta de los pares (x, y), donde x e y son los estudiantes en su escuela, donde x tiene un promedio de calificaciones más alto que y tiene esta propiedad.

DEFINICIÓN 4 Una relación R en un conjunto A se llama simétrica si (b, a) ER siempre que (a, b) ER, para todo a, b E A. Una relación R en un conjunto A tal que para todo a, b EA, si (a, b) E Rand (b, a) ER, entonces a = b es llamado antisimétrico.

Observación: Usando cuantificadores, vemos que la relación R en el conjunto A es simétrica si VaVb «a, b) E

R -+ (b, a) ER). De manera similar, la relación R en el conjunto A es antisimétrica si VaVb «(a, b) E R /\ (b, a) ER) -+ (a = b)).

Es decir, una relación es simétrica si y solo si a está relacionada con b implica que b está relacionada con a. Una relación es anti simétrica si y sólo si no hay pares de elementos distintos a y b con una relacionado con byb relacionado con a. Es decir, la única forma de tener a relacionado con byb relacionado con a es para una y b ser el mismo elemento. Los términos simétrico y antisimétrico no son opuestos, porque una relación puede tener ambas propiedades o puede carecer de ambas (ver Ejercicio 8 en al final de esta sección). Una relación no puede ser simétrica y antisimétrica si contiene algún par de la forma (a, b), donde a = 1 = b.

Observación: aunque relativamente pocas de las relaciones 2n2 en un conjunto con n elementos son simétricas

o antisimétrico, como pueden mostrar los argumentos de conteo, muchas relaciones importantes tienen uno de estos propiedades. (Vea el ejercicio 45.)

EJEMPLO 10 ¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 7 son simétricas y cuáles antisimétricas?

Exlra Ejemplos

Solución: Las relaciones R2 y R3 son simétricas, porque en cada caso (b, a) pertenece a la relación siempre que (a, b) lo haga. Para R2, lo único que se debe verificar es que tanto (2, 1) como (1, 2) están en la relación. Para R3, es necesario comprobar que tanto (1, 2) como (2, I) pertenecen a la relación, y (I, 4) y (4, I) pertenecen a la relación. El lector debe verificar que ninguna de las otras relaciones es simétrico. Esto se hace encontrando un par (a, b) tal que esté en la relación pero (b, a) no lo esté.

R4, Rs y R6 son todos antisimétricos. Para cada una de estas relaciones no hay par de elementos una y b con a = 1 = b tal que tanto (a, b) y (b, a) pertenecen a la relación. El lector debe Verifique que ninguna de las otras relaciones sea antimétrica. Esto se hace encontrando un par (a, b) con a = 1 = b tal que (a, b) y (b, a) están ambos en la relación.

EJEMPLO 11 ¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 5 son simétricas y cuáles antisimétricas?

Solución: Las relaciones R3, R4 y R6 son simétricas. R3 es simétrico, porque si a = bo a = -b, entonces b = a o b = -a. R4 es simétrico porque a = b implica que b = a. R6 es simétrico

Página 7

porque a + b ::: 3 implica que b + a ::: 3. El lector debe verificar que ninguno de los otros las relaciones son simétricas.

Las relaciones RI, R2, R4 y R5 son antisimétricas. RI es anti simétrico porque el las desigualdades a ::: byb ::: a implican que a = b. R2 es anti simétrico porque es imposible para a > byb > a. R4 es antisimétrico, porque dos elementos están relacionados con respecto a R4 si y solo si son iguales. R5 es antimétrico porque es imposible que a = b + I y b = a + yo. El lector debe verificar que ninguna de las otras relaciones sea antisimétrica. ...

EJEMPLO 12 ¿Es simétrica la relación "divide" en el conjunto de enteros positivos? ¿Es antisimétrico?

Solución: Esta relación no es simétrica porque 1 12, sino 2 y 1. Es antisimétrica, porque si ay b son enteros positivos con alb yb 1 a, entonces a = b (la verificación de esto se deja como ejercicio para el lector). ...

Sea R la relación que consiste en todos los pares (x, y) de estudiantes en su escuela, donde x tiene tomó más créditos que y. Suponga que x está relacionado con y e y está relacionado con z. Esto significa que x ha obtenido más créditos que y e y ha obtenido más créditos que z. Podemos concluir que x ha tomado más créditos que z, por lo que x está relacionado con z. Lo que hemos demostrado es que R tiene la propiedad transitiva, que se define como sigue.

DEFINICIÓN 5 Una relación R en un conjunto A se llama transitiva si siempre que (a, b) E R y (b, c) E R, entonces (a, c) E R, para todo a, b, c E A.

Observación: Usando cuantificadores vemos que la relación R en un conjunto A es transitiva si tenemos

'Va' Vb 'Vc «(a, b) ER /\ (b, c) ER) -+ (a, c) ER).

EJEMPLO 13 ¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 7 son transitivas?

Extra Ejemplos

Solución: R4, R5 y R6 son transitivos. Para cada una de estas relaciones, podemos demostrar que es transitiva verificando que si (a, b) y (b, c) pertenecen a esta relación, entonces (a, c) también lo hace. Por ejemplo, R4 es transitivo, porque (3, 2) y (2, I), (4, 2) y (2, I), (4, 3) y (3, I), y (4, 3) y (3, 2) son los únicos conjuntos de pares de este tipo, y (3, I), (4, I) y (4, 2) pertenecen a R4 • El lector debe verificar que R5 y R6 son transitivos.

RI no es transitivo porque (3, 4) y (4, I) pertenecen a RI, pero (3, I) no. R2 no es transitivo porque (2, I) y (1, 2) pertenecen a R2, pero (2, 2) no. R3 no es transitivo porque (4, I) y (1, 2) pertenecen a R3, pero (4, 2) no. ...

EJEMPLO 14 ¿Cuáles de las relaciones del ejemplo 5 son transitivas?

Solución: Las relaciones RI, R2, R3 y R4 son transitivas. RI es transitivo porque a ::: by b ::: c implica que un ::: c. R2 es transitivo porque a > byb > c implican que a > c. R3 es transitivo porque a = ± byb = ± c implican que a = ± c. R4 es claramente transitivo, como el lector debería verificar. R5 no es transitivo porque (2, I) y (1, 0) pertenecen a R5, pero (2, 0) no. R6 no es transitivo porque (2, 1) y (1, 2) pertenecen a R6, pero (2, 2) no. ...

EJEMPLO 15 ¿Es la relación "divide" en el conjunto de enteros positivos transitiva?

Solución: suponga que a divide a b y b divide a c. Entonces hay enteros positivos k y yo tal que b = ak yc = bl. Por tanto, c = a (k l), entonces a divide c. De ello se deduce que esta relación es transitivo. ...

Podemos usar técnicas de conteo para determinar el número de relaciones con propiedades específicas corbatas. Encontrar el número de relaciones con una propiedad en particular proporciona información sobre cómo común esta propiedad está en el conjunto de todas las relaciones en un conjunto con n elementos.

EJEMPLO 16 ¿Cuántas relaciones reflexivas hay en un conjunto con n elementos?

Solución: una relación R en un conjunto A es un subconjunto de A x A. En consecuencia, se determina una relación especificando si cada uno de los n2 pares ordenados en A x A está en R. Sin embargo, si R es reflexivo, cada uno de los n pares ordenados (a, a) para un EA debe estar en R. Cada uno de los otros n (n - 1) ordenados pares de la forma (a, b), donde a = f. b, puede o no estar en R. Por lo tanto, según la regla del producto para contando, hay 2n (nI) relaciones reflexivas [este es el número de formas de elegir si cada elemento (a, b), con a = f. b, pertenece a R]. ....

El número de relaciones simétricas y el número de relaciones antimétricas en un conjunto con n elementos se pueden encontrar usando un razonamiento similar al del Ejemplo 16 (vea el Ejercicio 45 en al final de esta sección). Contar las relaciones transitivas en un conjunto con n elementos es un problema más allá del alcance de este libro.

Combinando Relaciones

Dado que las relaciones de A a B son subconjuntos de A x B, se pueden combinar dos relaciones de A a B de cualquier forma se pueden combinar dos conjuntos. Considere los ejemplos 17-19.

EJEMPLO 17 Sea A = {l, 2, 3} y B = {I, 2, 3, 4}. Las relaciones RI = {(I, 1), (2, 2), (3, 3)} y R2 = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)} se pueden combinar para obtener

RI U R2 = {(I, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)},
RI n R2 = {(1, I)},
RI - R2 = {(2, 2), (3, 3)},
R2 - RI = {(1, 2), (1, 3), (1, 4)}.

EJEMPLO 18 Sean A y B el conjunto de todos los estudiantes y el conjunto de todos los cursos de una escuela, respectivamente. Suponer que RI consta de todos los pares ordenados (a, b), donde a es un estudiante que ha tomado el curso by R2 consta de todos los pares ordenados (a, b), donde a es un estudiante que requiere el curso b para graduarse. Qué Cuáles son las relaciones RI U R2, RI n R2, RI R2, RI - R2 y R2 - RI?

Solución: La relación RI U R2 consta de todos los pares ordenados (a, b), donde a es un estudiante que ha tomado el curso b o necesita el curso b para graduarse, y RI n R2 es el conjunto de todos los pares (a, b), donde a es un estudiante que ha tomado el curso by necesita este curso para graduarse. Además, RI R2 consta de todos los pares ordenados (a, b), donde el estudiante a ha tomado el curso b pero lo hace No lo necesita para graduarse o necesita el curso b para graduarse pero no lo ha tomado. RI - R2 es el conjunto de pares ordenados (a, b), donde a ha tomado el curso b pero no lo necesita para graduarse; es decir, b es un curso electivo que una ha tomado. R2 - RI es el conjunto de todos los pares ordenados (a, b), donde b es un Por supuesto que unas necesidades para graduarse pero no ha tomado. ....

EJEMPLO 19 Sea RI la relación "menor que" en el conjunto de números reales y sea R2 el "mayor que" relación en el conjunto de números reales, es decir, RI = {(x, y) I x < y} y R2 = {(x, y) I x> y}. ¿Qué son RI U R2, RI n R2, RI - R2, R2 - RI y RI R2?

Página 9

Solución: Observamos que (x, y) ER, U R2 si y solo si (x, y) ER, o (x, y) E R2. Por tanto, (x, y) E R, U R2 si y solo si x < y o x > y. Porque la condición x < y o x > y es la misma que la condición x "I y, se sigue que R, U R2 = {(x, y) I x " I y}. En otras palabras, la unión del La relación "menor que" y la relación "mayor que" es la relación "no es igual".

A continuación, observe que es imposible que un par (x, y) pertenezca tanto a R como a R2 porque es imposible para x < y y x > y. De ello se deduce que R, n R2 = 0. También vemos que R, - R2 = R " R2 - R, = R2 y R, EI1 R2 = R, U R2 - R, n R2 = {(x, y) I x "I y}. <0III

Hay otra forma de combinar las relaciones que es análoga a la composición de funciones.

DEFINICIÓN 6 Sea R una relación de un conjunto A a un conjunto B y S una relación de B a un conjunto C. El compuesto de R y S es la relación que consta de pares ordenados (a, c), donde a EA, c E C, y para los cuales existe un elemento b EB tal que (a, b) ER y (b, c) E S. Denotamos el compuesto de R y S por S o R.

Calcular el compuesto de dos relaciones requiere que encontremos elementos que son el segundo elemento de pares ordenados en la primera relación y el primer elemento de pares ordenados en la segunda relación, como ilustran los ejemplos 20 y 21 .

EJEMPLO 20 ¿Cuál es la combinación de las relaciones R y S, donde R es la relación de {I, 2, 3} a {I, 2, 3, 4}? con R = {(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)} y S es la relación de {1, 2, 3, 4} a {O, 1, 2} con S = {(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, I)}?

Solución: S o R se construye usando todos los pares ordenados en R y pares ordenados en S, donde el El segundo elemento del par ordenado en R concuerda con el primer elemento del par ordenado en S. Por ejemplo, los pares ordenados (2, 3) en R y (3, 1) en S producen el par ordenado (2, 1) en S o R. Calculando todos los pares ordenados en el compuesto, encontramos

S o R = {(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, I)}.

EJEMPLO 21 Composición de la relación padre consigo mismo Sea R la relación en el conjunto de todas las personas tal que (a, b) ER si la persona a es el padre de la persona b. Entonces (a, c) ER o R si y solo si hay es una persona b tal que (a, b) ER y (b, c) ER, es decir, si y solo si hay una persona b tal que a es padre de by b es padre de c. En otras palabras, (a, c) ER o R si y solo si a es un abuelo de c. <0III

Las potencias de una relación R se pueden definir de forma recursiva a partir de la definición de un compuesto de dos relaciones.

DEFINICIÓN 7 Sea R una relación del conjunto A. Las potencias Rn, n = 1, 2, 3 ,. . . , se definen recursivamente por

y

La definición muestra que R2 = R o R, R3 = R2 o R = (R o R) o R, y así sucesivamente.

Página 10

EJEMPLO 22 Sea R = {(I, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3)}. Encuentre las potencias Rn, n = 2, 3, 4,. . . .

Solución: Como R2 = R oR, encontramos que R2 = {(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 2)}. Además, porque R3 = R2 oR, R3 = {(I, 1), (2, 1), (3, 1), (4, I)}. El cálculo adicional muestra que R4 es lo mismo que R3, entonces R4 = {(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, I)}. También se deduce que Rn = R3 para n = 5, 6, 7 ,. . . . El lector debe verificar esto. ....

El siguiente teorema muestra que las potencias de una relación transitiva son subconjuntos de este relación. Se utilizará en la Sección 8.4.

TEOREMA La relación R en un conjunto A es transitiva si y solo si Rn R para n = 1, 2, 3, ...

Demostración: Primero probamos la parte "si" del teorema. Suponemos que Rn R paran = 1, 2, 3 ,. . . .
En particular, R2 R. Para ver que esto implica que R es transitivo, tenga en cuenta que si (a, b) E R y (b, c) E R, luego por la definición de composición, (a, c) E R2. Como R2 R, esto significa que (a, c) E R. Por tanto, R es transitivo.

Usaremos la inducción matemática para demostrar la única parte del teorema. Tenga en cuenta que esto parte del teorema es trivialmente cierto para n = 1.

Suponga que Rn R, donde n es un número entero positivo. Esta es la hipótesis inductiva. A completar el paso inductivo debemos demostrar que esto implica que Rn + 1 es también un subconjunto de R. demuestre esto, suponga que (a, b) E Rn + l. Entonces, como Rn + 1 = Rn 0 R, hay un elemento x con x EA tal que (a, x) E R y (x, b) E Rn. La hipótesis inductiva, a saber, que Rn R, implica que (x, b) E R. Además, debido a que R es transitivo, y (a, x) E R y (x, b) E R, es se deduce que (a, b) E R. Esto muestra que Rn + 1 R, completando la demostración. <J

Ejercicios

1. Enumere los pares ordenados en la relación R de A = {O, 1, 2, 3, 4} a B = {O, 1, 2, 3}, donde (a, b) ER si y sólo si
   a) a = b.
   b) a + b = 4.
   e) a> b.
   d) una libra.
   e) mcd (a, b) = 1.
   t) lcm (a, b) = 2.
2. a) Enumere todos los pares ordenados en la relación R = {(a, b) I a divide b } en el conjunto {I, 2, 3, 4, 5, 6}.
   b) Muestre esta relación gráficamente, como se hizo en Ejemplo 4.
   e) Mostrar esta relación en forma de tabla, como se hizo en Ejemplo 4.
3. Para cada una de estas relaciones en el conjunto {I, 2, 3, 4}, decida si es reflexivo, si es simétrico, si es antisimétrico y si es transitivo.
   a) {(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)}
   b) {(I, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)}
   e) {(2, 4), (4, 2)}
   d) {(I, 2), (2, 3), (3, 4)}
   e) {(I, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)}
   t) {(I, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)}
4. Determine si la relación R en el conjunto de todas las personas es reflexivo, simétrico, antisimétrico y / o transitivo, donde (a, b) E R si y solo si
   a) a es más alto que b.
   b) ayb nacieron el mismo día.
   e) a tiene el mismo nombre que b.
   d) un y b tienen un abuelo común.
5. Determine si la relación R en el conjunto de todas las Web páginas es reflexiva, simétrica, antimétrica y / o sitive, donde (a, b) E R si y solo si
   a) todos los que han visitado la página web a también han visitado Página web b.
   b) no se encuentran enlaces comunes en ambas páginas web a y página web b.
   e) hay al menos un vínculo común en la página web una y Página web b.
   d) hay una página web que incluye enlaces a ambos sitios web página a y página web b.
6. Determine si la relación R en el conjunto de todos los números es reflexivo, simétrico, antisimétrico y / o transitivo, donde (x, Y) E R si y solo si

Página 11

   a) x + y = o.
   b) x = ± y.
   c) x - y es un número racional.
   d) x = 2y.
   e) xy O.
   t) xy = O.
   g) x = 1.
   h) x = 1 o y = 1.
7. Determine si la relación R en el conjunto de todos los enteros es reflexivo, simétrico, antimétrico y / o transitivo, donde (x, y) E R si y solo si
   a) x '" y.
   b) xy 1.
   c) x = y + 1 o x = y - 1.
   d) x = y (mod 7).
   e) x es un múltiplo de y.
   t) x e y son ambos negativos o ambos no negativo.
   g) x = y2.
   h) x y2.
8. Da un ejemplo de una relación en un conjunto que sea
   a) simétrico y antimétrico.
   b) ni simétrico ni antisimétrico.

Una relación R en el conjunto A es irreflexiva si para cada a EA, (a, a) ¢ R. Es decir, R es irreflexivo si ningún elemento en A está relacionado consigo mismo.

25. Sea R la relación R = {(a, b) I a divide b} en el conjunto de enteros positivos. Encontrar
   a) RI.
   b) R.
26. Sea R la relación en el conjunto de todos los estados de los Estados Unidos. Estados que constan de pares (a, b) donde el estado es un estado fronterizo segundo. Encontrar
   a) RI •
   b) R.
27. Suponga que la función f de A a B es uno a una correspondencia. Sea R la relación que es igual a la gráfico de f. Es decir, R = {(a, f (a)) I a EA}. Cuál es el relación inversa RI?
28. Sea RI = {(I, 2), (2, 3), (3, 4)} y R2 = {(I, 1), (1,2), (2, 1), (2,2), (2,3), (3, 1), (3,2), (3,3), (3, 4)} ser relaciones de {I, 2, 3} a {I, 2, 3, 4}. Encontrar
   a) RI U R2.
   b) RI n R2.
   c) RI - R2.
   d) R2 - RI.
29. Sea A el conjunto de estudiantes de su escuela y B el conjunto de libros en la biblioteca de la escuela. Sean RI y R2 las relaciones

9. ¿Qué relaciones del ejercicio 3 son irreflexivas?
10. ¿Qué relaciones del ejercicio 4 son irreflexivas?
1 1. ¿Qué relaciones del ejercicio 5 son irreflexivas?
12. ¿Qué relaciones del ejercicio 6 son irreflexivas?
13. ¿Puede una relación en un conjunto no ser reflexiva ni irreflexivo?
14. Utilice cuantificadores para expresar lo que significa una relación con Sea irreflexivo.
15. Dé un ejemplo de una relación irreflexiva en el conjunto de todos personas.

Una relación R se llama **asimétrica** si (a, b) E R implica que (b, a) ¢ R. Los ejercicios 16-22 exploran la noción de asimilación relación métrica. El ejercicio 20 se centra en la diferencia entre asimetría y antisimetría.

16. ¿Qué relaciones del ejercicio 3 son asimétricas?
17. ¿Qué relaciones del ejercicio 4 son asimétricas?
18. ¿Qué relaciones del ejercicio 5 son asimétricas?
19. ¿Qué relaciones del ejercicio 6 son asimétricas?
20. ¿Debe una relación asimétrica también ser antisimétrica? Debe una relación antisimétrica es asimétrica? Dar razones por sus respuestas.
21. Utilice cuantificadores para expresar lo que significa una relación con ser asimétrico.
22. Da un ejemplo de una relación asimétrica en el conjunto de todos.
23. ¿Cuántas relaciones diferentes existen de un conjunto con m elementos a un conjunto con n elementos?

Sea R una relación de un conjunto A a un conjunto B. La **relación inversa ción** de B a A, denotado por RI, es el conjunto de pares ordenados {(b, a) I (a, b) E R}. La **relación complementaria** R es la conjunto de pares ordenados {(a, b) I (a, b) ¢ R } .

24. Sea R la relación R = {(a, b) I a < b} en el conjunto de enteros. Encontrar
    a) RI.
    b) R.

que consta de todos los pares ordenados (a, b), donde el estudiante a es requerido para leer el libro b en un curso, y donde el estudiante un ha leído el libro b, respectivamente. Describe los pares ordenados en cada una de estas relaciones.

a) RI U R2
c) RI ED R2
e) R2 - RI

30. Sea R la relación {(I, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, I)}, y sea S la relación {(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 2)}. Encontrar S o R.
31. Sea R la relación del conjunto de personas que consta de pares (a, b), donde a es un padre de b. Sea S la relación en el conjunto de personas que constan de pares (a, b), donde un y b son hermanos (hermanos o hermanas). ¿Qué son S 0 Rand? R oS?

Los ejercicios 32 a 35 tratan estas relaciones en el conjunto de números:

RI = {(a, b) E R2 I a > b}, la relación "mayor que",

R2 = {(a, b) E R2 I a b}, el "mayor o igual a" relación,

R3 = {(a, b) E R2 I a < b}, la relación "menor que",

R4 = {(a, b) E R2 I a :::: b}, el "menor o igual a" relación,

Rs = {(a, b) E R2 I a = b}, la relación "igual a",

R6 = {(a, b) E R2 I a '"b}, la relación" desigual a ".

32. Encuentra
    a) RI UR3 ·
    b) RI U Rs.
    c) R2 n R4.
    d) R3 n Rs.
    e) RI - R2 .
    t) R2 - RI.
    g) RI ED R3 ·
    h) R2 ED R4.
33. Encuentra
    a) R2 U R4.
    b) R3 U R6.
    c) R3 n R6.
    d) R4 n R6.
    e) R3 - R6 ·
    t) R6 - R3 ·
    g) R2 ED R6.
    h) R3 ED Rs.

Pagina 12

34. Encuentra
    a) R, 0 R ,.
    b) R, 0 R2.
    c) R, 0 R3.
    d) R, 0 R4.
    e) R, 0 R5.
    f) R, 0 R6.
    g) R2 0 R3.
    h) R3 0 R3.
35. Encuentra
    a) R2 0 R ,.
    b) R2 0 R2.
    c) R3 0 R5.
    d) R4 0 R ,.
    e) R5 0 R3.
    f) R3 0 R6.
    g) R4 0 R6.
    h) R6 0 R6.
36. Sea R la relación padre en el conjunto de todas las personas (ver Ejemplo 21). Cuando es un par ordenado en el rela ción R3?
37. Sea R la relación del conjunto de personas con doctorados tal que (a, b) E R si y solo si a fue el consejo de tesis sor de b. ¿Cuándo está un par ordenado (a, b) en R2? Cuando es un par ordenado (a, b) en Rn, cuando n es un inte positivo ger? (Tenga en cuenta que toda persona con un doctorado tiene una tesis tutor.)
38. Sean R y R2 las "divisiones" y "es un múltiplo de" relaciones en el conjunto de todos los enteros positivos, respectivamente. Es decir, R, = {(a, b) I a divide b} y R2 = {(a, b) I a es un múltiplo de b}. Encontrar
    a) R, U R2.
    b) R, n R2.
    c) R, - R2.
    d) R2 - R ,.
    e) R, E9 R2.
39. Sean R, y R2 el "módulo 3 congruente" y el relaciones "congruentes módulo 4", respectivamente, en el conjunto de enteros. Es decir, R, = {(a, b) I a = b (mod 3)} y R2 = {(a, b) yo a = b (mod 4)}. Encontrar

pares en la relación que tienen b como segundo ¿elemento?

f) hay al menos un par ordenado en la relación que tiene a como primer elemento o tiene b como segundo ¿elemento?

* 45. ¿Cuántas relaciones hay en un conjunto con n elementos? que son
    a) simétrico?
    b) anti simétrico?
    c) asimétrico?
    d) irreflexivo?
    e) reflexivo y simétrico?
    f) ¿ ni reflexivo ni irreflexivo?

* 46. ¿Cuántas relaciones transitivas hay en un conjunto con n elementos si
    a) n = yo?
    b) n = 2?
    c) n = 3?

47. Encuentre el error en la "prueba" del siguiente "teorema". "Teorema": Sea R una relación en un conjunto A que es simétrico rico y transitivo. Entonces R es reflexivo. "Prueba": Sea a E A. Tome un elemento b EA tal que (a, b) E R. Como R es simétrico, también tenemos (b, a) E R. Ahora, usando la propiedad transitiva, puede concluir que (a, a) E R porque (a, b) E R imd (b, a) E R.
48. Suponga que R y S son relaciones reflexivas en un conjunto A. Demuestre o refute cada una de estas afirmaciones.
    a) RU S es reflexivo.
    b) R n S es reflexivo.
    c) R E9 S es irreflexivo.
    d) R - S es irreflexivo.
    e) Entonces R es reflexivo.

a) $R_1 \cup R_2$.
b) $R_1 \cap R2$.
c) $R_1 - R2$.
d) $R_2 - R_1$.
e) $R_1 \oplus R2$.

40. Enumere las 16 relaciones diferentes en el conjunto {O, I}.

41. ¿Cuántas de las 16 relaciones diferentes en {O, I} contienen el par (0, yo)?

42. ¿Cuál de las 16 relaciones en {O, l}, que enumeraste en Ejercicio 40, son
a) reflexivo?
b) irreflexivo?
c) simétrico?
d) anti simétrico?
e) asimétrico?
f) transitivo?

43. a) ¿Cuántas relaciones hay en el conjunto {a, b, c, d}?
b) ¿Cuántas relaciones hay en el conjunto {a, b, c, d} que contienen el par (a, a)?

44. Sea S un conjunto con n elementos y sean ayb distintos elementos de S. ¿Cuántas relaciones hay en S tales ese
a) (a, b) ES?
b) (a, b) S?
c) no hay pares ordenados en la relación que tengan un como primer elemento?
d) hay al menos un par ordenado en la relación que tiene a como primer elemento?
e) no hay pares ordenados en la relación que tengan un como primer elemento y no hay orden

49. Demuestre que la relación R en un conjunto A es simétrica si y sólo si $R = R^{-1}$, donde R^{-1} es la relación inversa.

50. Demuestre que la relación R en un conjunto A es antimétrica si y solo si $R \cap R^{-1}$ es un subconjunto de la relación diagonal = {(a, a) Yo un EA}.

51. Demuestre que la relación R en un conjunto A es reflexiva si y sólo si la relación inversa R^{-1} es reflexiva.

52. Demuestre que la relación R en un conjunto A es reflexiva si y sólo si la relación complementaria R es irreflexiva.

53. Sea R una relación reflexiva y transitiva. Probar que $R^n = R$ para todos los enteros positivos n.

54. Sea R la relación del conjunto {I, 2, 3, 4, 5} que contiene los pares ordenados (1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3, 1), (3,4), (3, 5), (4, 2), (4, 5), (5, 1), (5, 2) y (5,4). Encontrar
a) R^2.
b) R^3.
c) R^4.
d) R^5.

55. Sea R una relación reflexiva en un conjunto A. Demuestre que R^n es reflexivo para todos los enteros positivos n.

* 56. Sea R una relación simétrica. Demuestre que R^n es simétrico para todos los enteros positivos n.

57. Suponga que la relación R es irreflexiva. R^2 es necesariamente irreflexivo? Justifique su respuesta.

Página 13

8.2 Relaciones n-arias y sus aplicaciones

Introducción

A menudo surgen relaciones entre elementos de más de dos conjuntos. Por ejemplo, hay una relación envío que incluya el nombre de un estudiante, la especialización del estudiante y el promedio de calificaciones del estudiante. Del mismo modo, existe una relación entre la aerolínea, el número de vuelo, el punto de partida, el destino, hora de salida y hora de llegada de un vuelo. Un ejemplo de tal relación en matemáticas. involucra tres enteros, donde el primer entero es mayor que el segundo entero, que es mayor que el tercero. Otro ejemplo es la relación de intermediación que involucra puntos en una línea, como que tres puntos están relacionados cuando el segundo punto está entre el primero y el tercero.

Estudiaremos las relaciones entre elementos de más de dos conjuntos en esta sección. Estos son las relaciones se denominan relaciones n-arias. Estas relaciones se utilizan para representar bases de datos informáticas. Estas representaciones nos ayudan a responder consultas sobre la información almacenada en bases de datos, como como: ¿Qué vuelos aterrizan en el aeropuerto O'Hare entre las 3 a. m. y las 4 a. m.? ¿Qué estudiantes en tu la escuela son estudiantes de segundo año que se especializan en matemáticas o informática y tienen más de un 3.0 promedio? Qué empleados de una empresa han trabajado para la empresa menos de 5 años y ganar más de $ 50,000?

Relaciones n-arias

Comenzamos con la definición básica sobre la que descansa la teoría de las bases de datos relacionales.

DEFINICIÓN 1 L et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ besets. Un **n -a ry relación** en estos conjuntos es un subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Los conjuntos de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se denominan los **dominios** de la relación y n se llama su **grado**.

EJEMPLO 1 Sea R la relación de $N \times N \times N$ que consta de triples (a, b, c) , donde a, b y c son números enteros con $a < b < c$. Entonces $(1, 2, 3) \in R$, pero $(2, 4, 3) \notin R$. El grado de esta relación es 3. Sus dominios son todos iguales al conjunto de números naturales. ....

EJEMPLO 2 Sea R la relación sobre $Z \times Z \times Z$ que consta de todos los triples de números enteros (a, b, c) en los que a, b y c forman una progresión aritmética. Es decir, $(a, b, c) \in R$ si y solo si hay un entero k tal que $b = a + k$ y $c = a + 2k$, o equivalentemente, tal que $b - a = k$ y $c - b = k$. Tenga en cuenta que $(1, 3, 5) \in R$ porque $3 = 1 + 2$ y $5 = 1 + 2 \cdot 2$, pero $(2, 5, 9) \notin R$ porque $5 - 2 = 3$ mientras $9 - 5 = 4$. Esta relación tiene grado 3 y sus dominios son todos iguales al conjunto de números enteros. ....

EJEMPLO 3 Sea R una relación sobre Z x Z x Z + que consta de múltiplos (a, b, m), donde a, b ym son números enteros con m ::: 1 y a == b (modm). Entonces (8, 2, 3), (- 1, 9, 5) y (14, 0, 7) pertenecen todos a R, pero (7, 2, 3), (-2, -8, 5) y (ll, 0, 6) no pertenecen a R porque 8 == 2 (mod 3), -1 == 9 (mod 5) , y 14 == o (mod 7), pero 7 ¢. 2 (mod 3), -2 ¢. -8 (mod 5) y 1 1 ¢. 0 (mod 6). Esta relación tiene grado 3 y sus dos primeros dominios son el conjunto de todos los enteros y su tercer dominio es el conjunto de enteros positivos. ....

EJEMPLO 4 Sea R la relación que consta de 5 tuplas (A, N, S, D, T) que representan vuelos de avión, donde A es la aerolínea, N es el número de vuelo, S es el punto de partida, D es el destino y T es el hora de salida. Por ejemplo, si Nadir Express Airlines tiene el vuelo 963 de Newark a Bangor a las 15:00, entonces (Nadir, 963, Newark, Bangor, 15:00) pertenece a R. El grado de esta relación es

Página 14

5, y sus dominios son el conjunto de todas las aerolíneas, el conjunto de números de vuelo, el conjunto de ciudades, el conjunto de ciudades (nuevamente) y el conjunto de tiempos. ....

Bases de datos y relaciones

Enlaces

El tiempo necesario para manipular la información en una base de datos depende de cómo se encuentre esta información. almacenado. Las operaciones de agregar y eliminar registros, actualizar registros, buscar registros, y la combinación de registros de bases de datos superpuestas se realizan millones de veces al día en un gran base de datos. Debido a la importancia de estas operaciones, varios métodos para representar Se han desarrollado bases de datos. Discutiremos uno de estos métodos, llamado relacional modelo de datos, basado en el concepto de relación.

Una base de datos consta de registros, que son n-tuplas, formados por campos. Los campos son las entradas de las n-tuplas. Por ejemplo, una base de datos de registros de estudiantes puede estar formada por campos que contienen el nombre, número de estudiante, especialización y promedio de calificaciones del estudiante. los modelo de datos relacional representa una base de datos de registros como im relación n-aria. Por lo tanto, los registros de estudiantes se representan como 4 tuplas del formulario (NOMBRE DEL ESTUDIANTE, NÚMERO DE ID, MAYOR, GPA). UNA base de datos de muestra de seis de estos registros es

(Ackermann, 23 1455, Ciencias de la Computación, 3.88)
(Adams, 888323, Física, 3.45)
(Chou, 102147, Ciencias de la Computación, 3.49)
(Goodfriend, 453876, Matemáticas, 3.45)
(Rao, 678543, Matemáticas, 3,90)
(Stevens, 786576, Psicología, 2.99).

Las relaciones que se utilizan para representar bases de datos también se denominan tablas, porque estas relaciones suelen mostrados como tablas. Cada columna de la tabla corresponde a un atributo de la base de datos. por Por ejemplo, la misma base de datos de estudiantes se muestra en la Tabla I. Los atributos de esta base de datos son nombre del estudiante, número de identificación, especialidad y GPA.

Un dominio de una relación n-aria se llama clave primaria cuando el valor de la n-tupla de este dominio determina la n-tupla. Es decir, un dominio es una clave primaria cuando no hay dos n-tuplas en la relación tiene el mismo valor de este dominio.

Los registros a menudo se agregan o eliminan de las bases de datos. Debido a esto, la propiedad de que un El dominio es una clave primaria que depende del tiempo. En consecuencia, se debe elegir una clave primaria que sigue siendo uno siempre que se cambia la base de datos. La colección actual de n-tuplas en una relación se llama la extensión de la relación. La parte más permanente de una base de datos, incluida la nombre y atributos de la base de datos, se llama su intensión. Al seleccionar una clave primaria, el objetivo debe ser seleccionar una clave que pueda servir como clave principal para todas las posibles extensiones de la base de datos. Para hacer esto, es necesario examinar la intensión de la base de datos para comprender el conjunto de posibles n-tuplas que pueden ocurrir en una extensión.

TABLA 1 Estudiantes.

Nombre del estudiante	Número de identificación	Mayor	GPA
Ackermann	23 1455	Ciencias de la Computación	3,88
Adams	888323	Física	3,45
Chou	102147	Ciencias de la Computación	3,49
Buen amigo	453876	Matemáticas	3,45
Rao	678543	Matemáticas	3,90
Stevens	786576	Psicología	2,99

Página 15

EJEMPLO 5 ¿Qué dominios son claves primarias para la relación n-aria mostrada en la Tabla 1, suponiendo que no ¿Se agregarán n-tuplas en el futuro?

Solución: debido a que solo hay una tupla de 4 en esta tabla para cada nombre de estudiante, el dominio de los nombres de los estudiantes es una clave principal. Del mismo modo, los números de identificación en esta tabla son únicos, por lo que el dominio de números de identificación también es una clave principal. Sin embargo, el dominio de los principales campos de estudio no es un clave primaria, porque más de una tupla de 4 contienen el mismo campo de estudio principal. El dominio de los promedios de calificaciones tampoco es una clave principal, porque hay dos tuplas de 4 que contienen el mismo GPA. ....

Las combinaciones de dominios también pueden identificar de forma única n-tuplas en una relación n-aria. Cuando los valores de un conjunto de dominios determinan una n-tupla en una relación, el producto cartesiano de estos dominios se llama clave compuesta.

EJEMPLO 6 ¿Es el producto cartesiano del dominio de los principales campos de estudio y el dominio de los GPA a clave compuesta para la relación n-aria de la Tabla 1, suponiendo que nunca se agreguen n-tuplas?

Solución: debido a que no hay dos tuplas de 4 de esta tabla que tengan el mismo mayor y el mismo GPA, este producto cartesiano es una clave compuesta. ....

Debido a que las claves primarias y compuestas se utilizan para identificar registros de forma única en una base de datos, Es importante que las claves sigan siendo válidas cuando se agregan nuevos registros a la base de datos. Por lo tanto, cheques debe hacerse para asegurar que cada nuevo registro tenga valores que sean diferentes en el campo, o campos, de todos los demás registros de esta tabla. Por ejemplo, tiene sentido utilizar al alumno número de identificación como una clave para los archivos del estudiante si no hay dos estudiantes siempre tienen la misma número de identificación del estudiante. Una universidad no debe utilizar el campo de nombre como clave, porque dos estudiantes pueden tener el mismo nombre (como John Smith).

Operaciones en relaciones n-arias

Hay una variedad de operaciones en relaciones n-arias que se pueden usar para formar nuevas relaciones n-arias. Aplicadas juntas, estas operaciones pueden responder consultas en bases de datos que solicitan todas las tuplas que Satisfacer ciertas condiciones.

La operación más básica en una relación n-aria es determinar todas las n-tuplas en la relación n-aria que satisfacen determinadas condiciones. Por ejemplo, es posible que deseemos encontrar todos los registros de todas las computadoras especializaciones en ciencias en una base de datos de registros de estudiantes. Es posible que deseemos encontrar a todos los estudiantes que promedio de calificaciones superior a 3.5 en esta misma base de datos. Es posible que deseemos encontrar los registros de todos estudiantes de ciencias de la computación que tengan un promedio de calificaciones superior a 3.5 en esta base de datos. Actuar tales tareas usamos el operador de selección.

o EFINITI 0 N 2 Deje que R sea un n-ary relación y C una condición que los elementos en R pueden satisfacer. Entonces la seleccion operador Sc mapea el n-ary relación R a la n-ary relación de todas las n-tuplas de R que satisfacen la condición C.

EJEMPLO 7 Para encontrar los registros de las carreras de informática en la relación n-aria R que se muestra en la Tabla 1, usamos el operador SC1 , donde C 1 es la condición Major = "Computer Science". El resultado son los dos

Página 16

4 tuplas (Ackermann, 23 1455, Ciencias de la computación, 3.88) y (Chou, 102147, Ciencias de la computación, 3,49). De manera similar, para encontrar los registros de los estudiantes que tienen un promedio de calificaciones superior a 3.5 en En esta base de datos, usamos el operador sc2, donde C2 es la condición GPA > 3.5. El resultado es el dos 4 tuplas (Ackermann, 23 1455, Ciencias de la computación, 3.88) y (Rao, 678543, Matemáticas,

3,90). Finalmente, para encontrar los registros de los estudiantes de ciencias de la computación que tienen un GPA superior a 3.5, use el operador sC3 ' donde C 3 es la condición (Major = "Computer Science" /\ GPA > 3.5). <III
El resultado consiste en la única tupla de 4 (Ackermann, 23 1455, Computer Science, 3.88).

Las proyecciones se utilizan para formar nuevas relaciones n-arias eliminando los mismos campos en cada registro de la relación.

DEFINICIÓN 3 La proyección Pili2 ..... im donde il < i2 <... < im, mapea la n-tupla (aI, a2, ..., an) a la m-tupla (ail 'ai2 "" objetivo) ' donde m n.

En otras palabras, la proyección Pil.i2 ..... im elimina n - m de los componentes de una n-tupla, dejando el ilth, i2th,. . . y componentes imth.

EJEMPLO 8 ¿Qué resulta cuando la proyección P1,3 se aplica a las 4 tuplas (2, 3, 0, 4), (Jane Doe, 2341 1 1001, Geografía, 3.14) y (ai, a2, a3, a4)?

Solución: la proyección PI.3 envía estas 4 tuplas a (2, 0), (Jane Doe, Geography) y (ai, a3), respectivamente. <III

El ejemplo 9 ilustra cómo se producen nuevas relaciones utilizando proyecciones.

EJEMPLO 9 ¿Qué relación resulta cuando se aplica la proyección PI, 4 a la relación de la Tabla I?

Solución: cuando se utiliza la proyección PI.4, se eliminan la segunda y la tercera columna de la tabla, y se obtienen pares que representan los nombres de los estudiantes y los promedios de calificaciones. Visualizaciones de la tabla 2 los resultados de esta proyección. <III

Pueden resultar menos filas cuando se aplica una proyección a la tabla para una relación. Esto pasa cuando algunas de las n-tuplas en la relación tienen valores idénticos en cada una de las m componentes de la proyección, y solo discrepan en los componentes eliminados por la proyección. Por ejemplo, considere el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 10 ¿Cuál es la tabla obtenida cuando se aplica la proyección Pl, 2 a la relación de la tabla 3?

Solución: La Tabla 4 muestra la relación obtenida cuando PI.2 se aplica a la Tabla 3. Tenga en cuenta que hay menos filas después de aplicar esta proyección. <III

La operación de unión se utiliza para combinar dos tablas en una cuando estas tablas comparten algunos campos idénticos. Por ejemplo, una tabla que contiene campos para aerolínea, número de vuelo y puerta, y otra tabla que contiene campos para el número de vuelo, la puerta y la hora de salida se puede combinar en una tabla que contiene campos para aerolínea, número de vuelo, puerta y hora de salida.

Página 17

TABLA 2 GPA.

StudentJlame	GPA
Ackermann	3,88
Adams	3,45
Chou	3,49
Buen amigo	3,45
Rao	3,90
Stevens	2,99

TABLA 3 Inscripciones.

Estudiante	Mayor	Curso
Glauser	Biología	BI 290
Glauser	Biología	MS 475
Glauser	Biología	PY 410
Marcus	Matemáticas	MS 5 1 1
Marcus	Matemáticas	MS 603
Marcus	Matemáticas	CS 322
Molinero	Ciencias de la Computación	MS 575
Molinero	Ciencias de la Computación	CS 455

TABLA 4 Mayores.

Estudiante	Mayor
Glauser	Biología
Marcus	Matemáticas
Molinero	Ciencias de la Computación

DEFINICIÓN 4 Sea R una relación de grado my S una relación de grado n. El unen a J p (R . S), donde p ::: my p ::: n, es una relación de grado m + n - p que consta de todos (m + n - p) -tuplas (en. a2 ..... am-po Ct. C2 .... cpo bt • b2 ... bn-p), donde la m-tupla (en. a2 ..... am-po Ct. C2 ..... cp) pertenece a R y la n-tupla (Ct. C2 .... cpo bt • b2 .... bn-p) pertenece a S.

En otras palabras. el operador de combinación Jp produce una nueva relación a partir de dos relaciones combinando todos m-tuplas de la primera relación con todas las n-tuplas de la segunda relación. donde los últimos p componentes de las m-tuplas concuerdan con las primeras p componentes de las n-tuplas.

EJEMPLO 11 ¿Qué relación resulta cuando se usa el operador de combinación h para combinar la relación mostrada en Tablas 5 y 6?

Solución: La unión h produce la relación que se muestra en la Tabla 7.

Hay otros operadores además de proyecciones y uniones que producen nuevas relaciones a partir de relaciones existentes. Se puede encontrar una descripción de estas operaciones en libros sobre teoría de bases de datos.

TABLA 5 Enseñanza-asignaciones.

Profesor	Departamento	Curso_ número
Cruz	Zoología	335
Cruz	Zoología	412
Farber	Psicología	501
Farber	Psicología	617
Grammer	Física	544
Grammer	Física	551
Rosen	Ciencias de la Computación	5 1 8
Rosen	Matemáticas	575

TABLA 6 Clase ... horario.

Departamento	Curso_ número	Habitación	Hora
Ciencias de la Computación	5 1 8	N521	2:00 PM
Matemáticas	575	N502	3:00 PM
Matemáticas	61 1	N521	16:00.
Física	544	B505	16:00.
Psicología	501	A I 00	3:00 PM
Psicología	617	Al lO	11 A.M
Zoología	335	Un 100	09 A.M.
Zoología	412	Un 100	08 A.M.

Página 18

TABLA 7 Teaching_schedule.

Profesor	Departamento	Numero de curso	Habitación	Hora
Cruz	Zoología	335	Un 100	09 A.M
Cruz	Zoología	412	Un 100	08 A.M
Farber	Psicología	501	Un 100	3:00 PM
Farber	Psicología	617	AI10	11 A.M
Grammer	Física	544	B505	16:00.
Rosen	Ciencias de la Computación	518	N521	2:00 PM
Rosen	Matemáticas	575	N502	3:00 PM

SQL

unkS El lenguaje de consulta de la base de datos SQL (abreviatura de lenguaje de consulta estructurado) se puede utilizar para realizar las operaciones que hemos descrito en esta sección. El ejemplo 12 ilustra cómo los comandos SQL están relacionados con operaciones en relaciones n-arias.

EJEMPLO 12 Ilustraremos cómo se usa SQL para expresar consultas mostrando cómo se puede emplear SQL para realizar una consulta sobre vuelos de aerolíneas utilizando la Tabla 8. La declaración SQL

```
SELECCIONE Depar ture_t ime
DESDE Vuelos
DONDE Des ti na ti on = 'De t ro it,
```

se utiliza para encontrar la proyección P5 (en el atributo Departure_time) de la selección de 5 tuplas en la base de datos de vuelos que cumplen la condición: Destino = 'Detroit'. La salida sería una lista que contiene los horarios de los vuelos que tienen a Detroit como destino, es decir, 08:10, 08:47, y 09:44. SQL usa la cláusula FROM para identificar la relación n-aria a la que se aplica la consulta, la Cláusula WHERE para especificar la condición de la operación de selección, y la cláusula SELECT para especificar la operación de proyección que se va a aplicar. (Cuidado: SQL usa SELECT para representar una proyección, más que una operación de selección. Este es un ejemplo desafortunado de conflicto terminología.) ....

El ejemplo 13 muestra cómo se pueden realizar consultas SQL con más de una tabla.

TABLA 8 Vuelos.

Aerolínea	Número de vuelo	portón	Destino	Hora de salida
Nadir	122	34	Detroit	08:10
Cumbre	221	22	Denver	08:17
Cumbre	122	33	Anclaje	08:22
Cumbre	323	34	Honolulu	08:30
Nadir	199	13	Detroit	08:47
Cumbre	222	22	Denver	09:10
Nadir	322	34	Detroit	09:44

Página 19

EJEMPLO 13 La sentencia SQL

```
SELECCIONE Profesor, Hora
FROM Teaching_a ssi gnments, C lasss chedu le
DONDE Departamento = 'Matemáticas,
```

se utiliza para encontrar la proyección P1,5 de las 5-tuplas en la base de datos (que se muestra en la Tabla 7), que es la unión lz de las bases de datos Teaching_assignments y Class_schedule en las Tablas 5 y 6, respectivamente, que satisfacen la condición: Departamento = Matemáticas. La salida consistiría del single 2-tuple (Rosen, 3:00 PM). La cláusula SQL FROM se usa aquí para encontrar la combinación de dos bases de datos diferentes. ...

Solo hemos abordado los conceptos básicos de las bases de datos relacionales en esta sección. Más la información se puede encontrar en [AhUI95].

Ejercicios

1. Enumere los triples en la relación {(a, b, c) I a, byc son enteros con 0 < a < b < e < 5}.
2. ¿Qué 4 tuplas están en la relación {(a, b, e, d) I a, b, e, y d son enteros positivos con abed = 6}?
3. Enumere las 5 tuplas en la relación de la Tabla 8.
4. Suponiendo que no se agregan nuevas n-tuplas, encuentre todas las claves primarias para las relaciones mostradas en
   a) Cuadro 3. b) Cuadro 5.
   .c) Tabla 6. d) Cuadro 8.
5. Suponiendo que no se agregan nuevas n-tuplas, encuentre una composición ite clave con dos campos que contienen el campo Aerolínea para el base de datos en la Tabla 8.
6. Suponiendo que no se agregan nuevas n-tuplas, encuentre una composición ite clave con dos campos que contienen el campo Profesor para la base de datos en la Tabla 7.
7. Las 3 tuplas en una relación 3-aria representan lo siguiente en tributos de una base de datos de estudiantes: número de identificación del estudiante, nombre, número de teléfono.
   a) ¿Es probable que el número de identificación del estudiante sea una clave principal?
   b) ¿Es probable que el nombre sea una clave principal?
   c) ¿Es probable que el número de teléfono sea una clave principal?
8. Las 4 tuplas en una relación 4-aria representan estos atributos

10. ¿Qué se obtiene al aplicar la operación de selección? ator sc, donde C es la condición Room = AIOO, a la base de datos en la Tabla 7?
11. ¿Qué obtienes cuando aplicas el operador de selección? sc, donde C es la condición Destino = Detroit, a la base de datos en la Tabla 8?
12. ¿Qué se obtiene al aplicar el operador de selección? sc, donde C es la condición (Proyecto = 2) I \ (Cantidad ::: 50), a la base de datos de la Tabla 10 (que se encuentra más adelante en este ejercicio conjunto)?
13. ¿Qué obtienes al aplicar la operación de selección? ator sc, donde C es la condición (Aerolínea = Nadir) V (Destino = Denver), a la base de datos de la Tabla 8?
14. ¿Qué se obtiene al aplicar la proyección P2,3,5 a la 5-tupla (a, b, e, d, e)?
15. ¿Qué mapeo de proyección se utiliza para eliminar el primero, segundo y cuarto componentes de una tupla de 6?
16. Muestre la tabla producida aplicando la proyección. P1,2,4 a la Tabla 8.
17. Mostrar la tabla producida aplicando la proyección. P1,4 a la Tabla 8.
18. ¿Cuántos componentes hay en las n-tuplas del

de libros publicados: título, ISBN, fecha de publicación, número de páginas.

a) ¿Cuál es la clave principal probable para esta relación?
b) En qué condiciones (título, fecha de publicación)

ser una clave compuesta?

c) En qué condiciones (título, número de páginas)

ser una clave compuesta?

9. Las 5 tuplas en una relación 5-aria representan estos atributos de todas las personas en los Estados Unidos: nombre, Seguro Social número, dirección postal, ciudad, estado.

a) Determine una clave primaria para esta relación.
b) En qué condiciones (nombre, dirección)

ser una clave compuesta?

c) ¿En qué condiciones (nombre, dirección, ciudad) ser una clave compuesta?

tabla obtenida aplicando el operador de combinación h a dos tablas con 5 tuplas y 8 tuplas, respectivamente?

19. Construya la tabla obtenida aplicando el operador de combinación 12 a las relaciones de las Tablas 9 y 10.

20. Demuestre que si C 1 y C 2 son condiciones que los elementos de la La relación n-aria R puede satisfacer, entonces SCI Ac, (R) = SC I (sc, (R ».

21. Demuestre que si C1 y C2 son condiciones, los elementos de la relación n-aria R puede satisfacer, entonces SCI (Sc, (R » = sc, (sci (R ».

22. Demuestre que si C es una condición que los elementos de n relaciones arias R y S pueden satisfacer, entonces sc (R U S) = sc (R) U sc (S).

23. Muestre que si C es una condición que los elementos de la n las relaciones arias R y S pueden satisfacer, entonces sc (R n S) = sc (R) n sc (S).

Página 20

8- / 9

TABLA 9 ParLneeds.

Proveedor	Número de pieza	Proyecto
23	1092	yo
23	1101	3
23	9048	4
31	4975	3
31	3477	2
32	6984	4
32	. 9191	2
33	1001	yo

TABLA 10 Piezas-.inventario.

Número de pieza	Proyecto	Cantidad	Codigo de color
1001	yo	14	8
1092	yo	2	2
1101	3	yo	yo
3477	2	25	2
4975	3	6	2
6984	4	10	1
9048	4	12	2
9191	2	80	4

24. Demuestre que si C es una condición que los elementos de n ary las relaciones R y S pueden satisfacer, entonces sc (R - S) = sc (R) - sc (S).

25. Demuestre que si R y S son relaciones n-arias, entonces Pi, .i2 ..... im (RUS) = Pi, .i2 ..... im (R) U Pi, .i2 ..... im (S).

26. Da un ejemplo para mostrar que si R y S son ambos n-arios relaciones, entonces Pi .. i2 ..... im (R n S) puede ser diferente de Pi, .i2 ..... im (R) n Pi, .i2 ..... im (S).

27. Da un ejemplo para mostrar que si R y S son ambos n-arios relaciones, entonces Pi, .i2 ..... im (R - S) puede ser diferente de Pi, .i2 ..... im (R) - Pi, .i2 ..... im (S).

28. a) Cuáles son las operaciones que corresponden a la consulta expresado usando esta declaración SQL?

```
SELECCIONAR PROVEEDOR
DESDE Par t_needs
DONDE 1 0 0 0 Número de par t 5 0 0 0
```

b) ¿Cuál es el resultado de esta consulta dada la base de datos en ¿Tabla 9 como entrada?

29. a) Cuáles son las operaciones que corresponden a la consulta expresado usando esta declaración SQL?

```
SELECCIONE Proveedor, Proyecto
FROM Part_needs,          Par t s_inventory
DONDE Cant i dad 1 0
```

b) Cuál es el resultado de esta consulta dadas las bases de datos en las Tablas 9 y 10 como entrada?

30. Determine si existe una clave primaria para la relación en el ejemplo 2.

31. Determine si existe una clave primaria para la relación en el ejemplo 3.

32. Muestre que una relación n-aria con una clave primaria se puede considerado como el gráfico de una función que mapea valores de la clave primaria para (n - I) -tuplas formadas a partir de valores de los otros dominios.

8.3 Representar relaciones

Introducción

En esta sección, y en el resto de este capítulo, todas las relaciones que estudiamos serán relaciones binarias. Por ello, en esta sección y en el resto de este capítulo, la palabra relación siempre se referirá a una relación binaria. Hay muchas formas de representar una relación entre conjuntos finitos. Como tenemos visto en la Sección 8. 1, una forma es enumerar sus pares ordenados. Otra forma de representar una relación es utilice una tabla, como hicimos en el ejemplo 3 de la sección 8.1. En esta sección discutiremos dos alternativas métodos para representar relaciones. Un método usa matrices zer () - {) ne. El otro método usa representaciones pictóricas llamadas gráficas dirigidas, que analizaremos más adelante en esta sección.

Generalmente, las matrices son apropiadas para la representación de relaciones en programas de computadora. Por otro lado, las personas a menudo encuentran útil la representación de relaciones utilizando gráficos dirigidos. para comprender las propiedades de estas relaciones.

Página 21

Representar relaciones usando matrices

Una relación entre conjuntos finitos se puede representar utilizando una matriz cero-uno. Suponga que R es un relación de A = {ai, a2,. . . , am} a B = {bl, b2,. . . , bn}. (Aquí los elementos de los conjuntos A y B se han enumerado en un orden particular, pero arbitrario. Además, cuando A = B usamos el mismo orden para A y B.) La relación R puede ser representada por la matriz MR = [mij], dónde

En otras palabras, la matriz cero-uno que representa a R tiene un 1 como su entrada (i, j) cuando ai está relacionada

pedidos utilizados para A y B.)

El uso de matrices para representar relaciones se ilustra en los ejemplos 1-6.

a bj, y a 0 en esta posición si ai no está relacionada con bj. (Tal representación depende de la

EJEMPLO 1 Suponga que A = {I, 2, 3 } y B = {I, 2 }. Sea R la relación de A a B que contiene (a, b) si a E A, b E B y a > b. ¿Cuál es la matriz que representa R si al = 1, a2 = 2 y a3 = 3, y bl = 1 y b2 = 2?

Solución: Como R = {(2 , 1), (3, 1), (3, 2)} , la matriz para R es

MR = [: 1

El Is en MR muestra que los pares (2, 1), (3, 1) y (3, 2) pertenecen a R. Los Os muestran que ningún otro los pares pertenecen a R. ...

EJEMPLO 2 Sea A = {ai, a2, a3} y B = {bl, b2, b3, b4, b5}. ¿Qué pares ordenados están en la relación R representado por la matriz

MR = [0 1 0 0 0
1 0 1 1 0
1 0 1 0 1]

Solución: Como R consta de los pares ordenados (ai, bj) con mij = 1, se sigue que

R = {(ai, b2), (a2, bl) '(a2, b3), (a2, b4), (a3, bd, (a3, b3), (a3, b5)}.

La matriz de una relación en un conjunto, que es una matriz cuadrada, se puede utilizar para determinar si la relación tiene ciertas propiedades. Recuerde que una relación R sobre A es reflexiva si (a, a) E R siempre que a E A. Por tanto, R es reflexivo si y solo si (ai, ai) E R para i = 1, 2 ,. . . , n. Por tanto, R es reflexivo si y solo si m ii = 1, para i = 1, 2 ,. . . , n. En otras palabras, R es reflexivo si todos los elementos en la diagonal principal de RM son iguales a 1, como se muestra en la Figura 1.

La relación R es simétrica si (a, b) E R implica que (b, a) E R. En consecuencia, la relación R en el conjunto A = {aI, a2,. . . , an} es simétrico si y solo si (aj, ai) E R siempre que (ai, aj) E R. En términos de las entradas de MR, R es simétrico si y solo si m ji = 1 siempre que m ij = 1. Esto también

1
1
1

1
1

todos los pares de números enteros i y j con i = 1, 2,. . . , n y j = 1, 2 , . . . , n. Recordando la definición de la transpuesta de una matriz de la sección 3.8, vemos que R es simétrica si y sólo si

significa mji = 0 siempre que mij = 0. En consecuencia, R es simétrico si y solo si mij = mji, para

FIGURA 1 El Matriz cero-uno para un reflexivo Relación.

Página 22

(a) Simétrico (b) Antisimétrico

FIGURA 2 Las matrices cero-uno para

Relaciones simétricas y antisimétricas.

es decir, ifMR es una matriz simétrica. Se ilustra la forma de la matriz para una relación simétrica en la Figura 2 (a).

La relación R es antimétrica si y sólo si (a, b) E R y (b, a) E R implican que a = b. En consecuencia, la matriz de una relación antisimétrica tiene la propiedad de que si m ij = I con i = I- j, entonces mji = O. O, en otras palabras, mij = 0 o m ji = 0 cuando i = I- j. La forma del La matriz para una relación antimétrica se ilustra en la Figura 2 (b).

EJEMPLO 3 Suponga que la relación R en un conjunto está representada por la matriz

l
yo
yo

¿R es reflexivo, simétrico y / o antimétrico?

Solución: Como todos los elementos diagonales de esta matriz son iguales a I, R es reflexivo. Además, debido a que MR es simétrico, se sigue que R es simétrico. También es fácil ver que R no es anti simétrico.

Las operaciones booleanas join y meet (discutidas en la Sección 3.8) se pueden usar para encontrar el matrices que representan la unión y la intersección de dos relaciones. Suponga que R \ y R2 son relaciones en un conjunto A representadas por las matrices MRI y MR2, respectivamente. La matriz que representa la unión de estas relaciones tiene una I en las posiciones donde MRI o MR2 tiene a 1. La matriz que representa la intersección de estas relaciones tiene un 1 en las posiciones donde tanto MRI como MR2 tienen un 1. Por tanto, las matrices que representan la unión e intersección de estos las relaciones son

y

EJEMPLO 4 Suponga que las relaciones R \ y R2 en un conjunto A están representadas por las matrices

yo 0] o 0 y

¿Cuáles son las matrices que representan a R \ U R2 y R \ n R2?

Página 23

Solución: Las matrices de estas relaciones son

Ahora nos dirigimos nuestra atención a la determinación de la matriz para el material compuesto de las relaciones. Esta La matriz se puede encontrar usando el producto booleano de las matrices (discutido en la Sección 3.8) para estas relaciones. En particular, suponga que R es una relación de A a B y que S es una relación de

B a C. Suponga que A, B y C tienen m, n y p elementos, respectivamente. Deja que el cero - uno matrices para S oR, R y S sean Ms oR = [tjj], MR = [rjj] y Ms = [Sjj], respectivamente (estos las matrices tienen tamaños m x p, m x n y n x p, respectivamente). El par ordenado (aj. Cj) pertenece a S o R si y solo si hay un elemento bk tal que (aj. bk) pertenece a R y (bk, Cj) pertenece

Producto booleano, esto significa que
a S. Se sigue que tjj = 1 si y solo si rjk = Skj = 1 para algún k. De la definición de la

EJEMPLO 5 Encuentre la matriz que representa las relaciones S o R, donde las matrices que representan R y S son

1 0 y [0, n

MR = [i '] o o 0 Sra. = 0 0 1 0

Solución: La matriz de S oR es

["1J

MS OR = MR 0 Ms = 0 1 o 0 ....

La matriz que representa el compuesto de dos relaciones se puede utilizar para encontrar la matriz para MR ". En particular,

MR "= M l.

de la definición de potencias booleanas. El ejercicio 35 al final de esta sección solicita una prueba de esta fórmula.

EJEMPLO 6 Encuentre la matriz que representa la relación R2, donde la matriz que representa a R es

Solución: la matriz para R2 es

M 2R -M [21 _

R - [! 1 1J

Página 24

Representar relaciones usando dígrafos

Hemos demostrado que una relación se puede representar enumerando todos sus pares ordenados o por usando una matriz cero-uno. Hay otra forma importante de representar una relación utilizando un Representación pictórica. Cada elemento del conjunto está representado por un punto, y cada uno ordenado El par se representa mediante un arco con su dirección indicada por una flecha. Usamos tales pictóricas representaciones cuando pensamos en relaciones en un conjunto finito como gráficos dirigidos o dígrafos.

DEFINICIÓN 1 Un grafo dirigido, o dígrafo, consiste en un conjunto V de vértices (o nodos) junto con un conjunto E de pares ordenados de elementos de V llamados aristas (o arcos). El vértice a se llama inicial vértice de la arista (a, b), y el vértice b se llama vértice terminal de esta arista.

Un borde de la forma (a, a) se representa mediante un arco desde el vértice de una vuelta a sí mismo. Tal un borde se llama bucle.

Ejemplo 7 El gráfico dirigido con vértices a, b, c, y d, y los bordes (a, b), (A, D), (B, B), (b, d), (C, A), (c, b) y (d, b) se muestran en la Figura 3. ....

una segundo

La relación R en un conjunto A está representada por la gráfica dirigida que tiene los elementos de A como su vértices y los pares ordenados (a, b), donde (a, b) E R, como aristas. Esta asignación establece una correspondencia a uno entre las relaciones en un conjunto A y los grafos dirigidos con A como su conjunto de vértices. Por tanto, todo enunciado sobre relaciones corresponde a un enunciado sobre gráficos y viceversa. Los gráficos dirigidos brindan una presentación visual de información sobre las relaciones. Como por eso, a menudo se utilizan para estudiar relaciones y sus propiedades. (Tenga en cuenta que las relaciones de un conjunto A a un conjunto B se puede representar mediante un gráfico dirigido donde hay un vértice para cada elemento de A y un vértice para cada elemento de B, como se muestra en la Sección 8. 1. Sin embargo, cuando A = B, tal La representación proporciona mucho menos conocimiento que las representaciones de dígrafos descritas aquí). El uso de gráficas dirigidas para representar relaciones en un conjunto se ilustra en los Ejemplos 8-10.

re C

FIGURA 3
Un gráfico dirigido.

EJEMPLO S La gráfica dirigida de la relación

R = {(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (4, I) }

en el conjunto {I, 2, 3, 4} se muestra en la Figura 4.

EJEMPLO 9 ¿Cuáles son los pares ordenados en la relación R representada por la gráfica dirigida que se muestra en la Figura 5?

Solución: Los pares ordenados (x, y) en la relación son

R = {(1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3), (4, 1) , (4, 3)}.

Cada uno de estos pares corresponde a una arista del gráfico dirigido, con (2, 2) y (3, 3) correspondiente a los bucles. ....

El gráfico dirigido que representa una relación se puede utilizar para determinar si la relación tiene varias propiedades. Por ejemplo, una relación es reflexiva si y sólo si hay un bucle en cada vértice de la gráfica dirigida, de modo que cada par ordenado de la forma (x, x) ocurra en la relación. Una relación es simétrica si y solo si para cada borde entre vértices distintos en su dígrafo hay un borde en la dirección opuesta, de modo que (y, x) está en la relación siempre que (x, y) está en el

Página 25

4 3

(a) Gráfica dirigida de R

(b) Gráfico dirigido de S

FIGURA 4 El Gráfico dirigido de la relación R.

FIGURA 5 El Gráfico dirigido de la Relación R.

FIGURA 6 Los gráficos dirigidos del Relaciones R y S.

relación. De manera similar, una relación es antisimétrica si y solo si nunca hay dos aristas en direcciones entre vértices distintos. Finalmente, una relación es transitiva si y solo si siempre que haya es una arista de un vértice x a un vértice y y una arista de un vértice y a un vértice z, hay un borde de x a z (completando un triángulo donde cada lado es un borde dirigido con la correcta dirección).

Observación: tenga en cuenta que una relación simétrica se puede representar mediante un gráfico no dirigido, que es un gráfico donde los bordes no tienen direcciones. Estudiaremos gráficos no dirigidos en el Capítulo 9.

EJEMPLO 10 Determine si las relaciones para las gráficas dirigidas que se muestran en la Figura 6 son reflexivas, sim métrico, antimétrico y / o transitivo.

Solución: Como hay bucles en cada vértice de la gráfica dirigida de R, es reflexivo. R es ni simétrica ni contra simétrica porque hay un borde de una a b pero no uno de B a a, pero hay bordes en ambas direcciones que conectan by c. Finalmente, R no es transitivo porque hay un borde de una a B y un borde de B a C, pero no el borde de una a c.

Debido a que los bucles no están presentes en todos los vértices de la gráfica dirigida de S, esta relación no es reflexivo. Es simétrico y no antimétrico, porque cada borde entre vértices distintos va acompañado de un borde en la dirección opuesta. Tampoco es difícil de ver desde el dirigido. grafica que S no es transitiva, porque (c, a) y (a, b) pertenecen a S, pero (c, b) no pertenece a S. ....

Ejercicios

1. Represente cada una de estas relaciones en {I, 2, 3} con una matriz (con los elementos de este conjunto enumerados en orden creciente).
   a) {(I, 1), (1, 2), (1, 3)}
   b) {(I, 2), (2,1), (2, 2), (3, 3)}
   c) {(I, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)}
   d) {(I, 3), (3, I)}

2. Represente cada una de estas relaciones en {1, 2, 3, 4} con un matriz (con los elementos de este conjunto enumerados en aumento orden).
   a) {(I, 2), (1,3), (1,4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)}
   b) {(I, 1), (1, 4), (2, 2), (3, 3), (4, I)}
   c) {(I, 2), (1, 3), (1, 4), (2,1), (2, 3), (2, 4), (3,1), (3, 2), (3,4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)}
   d) {(2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4)}

3. Enumere los pares ordenados en las relaciones de {I, 2, 3} correspondiente a estas matrices (donde las filas y columnas corresponden a los números enteros listados en aumento orden).

   a) [!]

   0) [! !]

4. Enumere los pares ordenados en las relaciones en {I, 2, 3, 4} correspondiente a estas matrices (donde las filas y

Página 26

columnas corresponden a los números enteros listados en aumento orden).

5. ¿Cómo puede la matriz que representa una relación R en un conjunto A ser utilizado para determinar si la relación es irreflexiva?

6. ¿Cómo puede la matriz que representa una relación R en un conjunto A se puede utilizar para determinar si la relación es asimétrica?

7. Determine si las relaciones representadas por la ma trices en el ejercicio 3 son reflexivos, irreflexivos, simétricos, anti simétrico y / o transitivo.

8. Determine si las relaciones representadas por la ma trices en el ejercicio 4 son reflexivos, irreflexivos, simétricos, antisimétrico y / o transitivo.

9. ¿Cuántas entradas distintas de cero representa la matriz? la relación R en A = {I, 2, 3,. . . , 100} que consta de los primeros 100 enteros positivos tienen si R es
   a) {(a, b) I a > b}?
   b) {(a, b) yo a = b = b}?
   c) {(a, b) I a = b + I}?
   d) {(a, b) I a = I}?
   e) {(a, b) l ab = l}?

10. ¿Cuántas entradas distintas de cero representa la matriz? la relación R en A = {I, 2, 3,. . . , 1000} que consta de los primeros 1000 enteros positivos tienen si R es
   a) {(a, b) I a :'s b}?
   b) {(a, b) I a = b ± I}?
   c) {(a, b) I a + b = 1000}?
   d) {(a, b) I a + b :'s IOOI}?
   e) {(a, b) I a = 1 = O}?

11. ¿Cómo puede la matriz para R, el complemento de la relación R, se encuentra a partir de la matriz que representa a R, cuando R es un relación en un conjunto finito A?

12. ¿Cómo puede la matriz para R -1, la inversa de la relación R, se encuentra a partir de la matriz que representa a R, cuando R es un relación en un conjunto finito A?

13. Sea R la relación representada por la matriz

14. Sean RI y R2 relaciones en un conjunto A representado por el matrices

Encuentra las matrices que representan
   a) RI U R2.
   b) RI n R2.
   d) R1 o RI.
   e) R1 tB R2.

15. Sea R la relación representada por la matriz

MR = [0 1 0 / 0 0 1. / 1 1 0]

Encuentra las matrices que representan
   a) R2.
   b) R3.

16. Sea R una relación de un conjunto A con n elementos. Sí hay son k entradas distintas de cero en MR, la matriz que representa R, cuántas entradas distintas de cero hay en MR-1, la matriz representando R-1, el inverso de R?

17. Sea R una relación de un conjunto A con n elementos. Sí hay son k entradas distintas de cero en MR, la matriz que representa R, cuántas entradas distintas de cero hay en MR, la matriz representando Ii, el complemento de R?

18. Dibuja los gráficos dirigidos que representan cada uno de los rela ciones del ejercicio 1.

19. Dibuje las gráficas dirigidas que representen cada uno de los rela ciones del ejercicio 2.

20. Dibuja la gráfica dirigida que represente cada una de las relaciones. del ejercicio 3.

21. Dibuja la gráfica dirigida que represente cada una de las relaciones. del ejercicio 4.

22. Dibuja la gráfica dirigida que representa la relación {(a, a), (a, b), (b, c), (c, b), (c, d), (d, a), (d, b)} .

En los Ejercicios 23-28, enumere los pares ordenados en las relaciones rep resentido por los gráficos dirigidos.

23. una

24. UNA

25. una g segundo
b ,

26. una segundo

o 1

Encuentra la matriz que representa 1 1 1 0

a) R-. 1 b) R.

D re c C re

Página 27

27. una 28. segundo

C

29. ¿Cómo puede la gráfica dirigida de una relación R en un conjunto finito ¿Se puede utilizar para determinar si una relación es asimétrica?

30. ¿Cómo puede la gráfica dirigida de una relación R en un conjunto finito ¿Puede usarse para determinar si una relación es irreflexiva?

31. Determine si las relaciones representadas por el di Las gráficas rectas que se muestran en los Ejercicios 23-25 son reflexivas, ir reflexiva, simétrica, antimétrica y / o transitiva.

32. Determine si las relaciones representadas por el di Las gráficas rectas que se muestran en los Ejercicios 26 a 28 son reflexivas, ir reflexiva, simétrica, antisimétrica, asimétrica y / o transitivo.

33. Sea R una relación en un conjunto A. Explique cómo usar el di gráfico rected que representa R para obtener el gráfico dirigido que representa la relación inversa R- '.

34. Sea R una relación en un conjunto A. Explique cómo usar el di gráfico rected que representa R para obtener el gráfico dirigido que representa la relación complementaria R.

35. Demuestre que si RM es la matriz que representa la relación R, entonces M l es la matriz que representa la relación Rn.

36. Dados los gráficos dirigidos que representan dos relaciones, ¿cómo ¿Puede la gráfica dirigida de la unión, intersección, sym diferencia métrica, diferencia y composición de estos encontrar relaciones?

8.4 Cierres de relaciones

Introducción

Una red informática tiene centros de datos en Boston, Chicago, Denver, Detroit, Nueva York y San Diego. Hay líneas telefónicas directas unidireccionales desde Boston a Chicago, desde Boston a Detroit, de Chicago a Detroit, de Detroit a Denver y de Nueva York a San Diego. Sea R la relación que contiene (a, b) si hay una línea telefónica desde el centro de datos en a hasta eso en b. ¿Cómo podemos determinar si existe algún vínculo (posiblemente indirecto) compuesto por uno o más líneas telefónicas de un centro a otro? Porque no todos los enlaces son directos, como el enlace de Boston a Denver que pasa por Detroit, R no se puede utilizar directamente para responder a esto. En el lenguaje de las relaciones, R no es transitivo, por lo que no contiene todos los pares que pueden ser vinculado. Como mostraremos en este apartado, podemos encontrar todos los pares de centros de datos que tienen un enlace mediante la construcción de una relación transitiva S que contiene R tal que S es un subconjunto de cada transitivo relación que contiene R. Aquí, S es la relación transitiva más pequeña que contiene R. Esta relación es llamado el cierre transitivo de R.

En general, sea R una relación en un conjunto A. R puede tener o no alguna propiedad P, como reflexividad, simetría o transitividad. Si hay una relación S con la propiedad P que contiene R tal que S es un subconjunto de toda relación con la propiedad P que contiene R, entonces S se llama el cierre de R con respecto a P. (Nótese que el cierre de una relación con respecto a una propiedad puede no existir; ver los ejercicios 15 y 35 al final de esta sección.) Mostraremos cómo reflexivo, simétrico y Se pueden encontrar cierres transitivos de relaciones.

Cierres

La relación R = {(I, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2)} en el conjunto A = {l, 2, 3} no es reflexiva. Como puedo producimos una relación reflexiva que contiene R que es lo más pequeña posible? Esto se puede hacer sumando (2, 2) y (3, 3) a R, porque estos son los únicos pares de la forma (a, a) que no están en R. Claramente, esta nueva relación contiene R. Además, cualquier relación reflexiva que contenga R debe también contienen (2, 2) y (3, 3). Debido a que esta relación contiene R, es reflexiva y está contenida dentro de cada relación reflexiva que contiene R, se denomina cierre reflexivo de R.

Como ilustra este ejemplo, dada una relación R en un conjunto A, el cierre reflexivo de R puede formarse mediante la adición a R todos los pares de la forma (a, a) con un E A, no está ya en R. El

Página 28

La suma de estos pares produce una nueva relación que es reflexiva, contiene R y es con dentro de cualquier relación reflexiva que contenga R. Vemos que el cierre reflexivo de R es igual a R U /),., Donde /) ,. = {(a, a) I a E A} es la relación diagonal en A. (El lector debe verificar esta.)

EJEMPLO 1 ¿Cuál es el cierre reflexivo de la relación R = {(a, b) I a < b} en el conjunto de números enteros?

Solución: El cierre reflexivo de R es

R U /) ,. = {(a, b) Yo a < b} U {(a, a) Yo a E Z} = {(a, b) Yo a S b}.

La relación {(I, I), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, I), (3, 2)} en {l, 2, 3} no es simétrica . Cómo ¿Podemos producir una relación simétrica que sea lo más pequeña posible y contenga R? Para hacer esto, solo necesitamos sumar (2, I) y (1, 3), porque estos son los únicos pares de la forma (b, a) con (a, b) E R que no están en R. Esta nueva relación es simétrica y contiene R. Además, cualquier relación simétrica que contiene R debe contener esta nueva relación, porque una relación simétrica que contiene R debe contener (2, 1) y (1, 3). En consecuencia, esta nueva relación se llama cierre simétrico de R.

Como ilustra este ejemplo, el cierre simétrico de una relación R se puede construir mediante sumando todos los pares ordenados de la forma (b, a), donde (a, b) está en la relación, que no están ya presente en R. La suma de estos pares produce una relación que es simétrica, que contiene R y que está contenido en cualquier relación simétrica que contiene R. El cierre simétrico de una relación puede construirse tomando la unión de una relación con su inversa (definida en el preámbulo del ejercicio 24 en la sección 8.1); es decir, R U R-1 es el cierre simétrico de R, donde R-1 = feb, a) I (a, b) E R}. El lector debe verificar esta declaración.

EJEMPLO 2 ¿Cuál es el cierre simétrico de la relación R = {(a, b) I a > b} en el conjunto de enteros positivos?

Ex1ra Ejemplos

Solución: El cierre simétrico de R es la relación

R U R-1 = {(a, b) Yo a > b} U {(b, a) Yo a > b} = {(a, b) Yo a # b}.

Esta última igualdad se sigue porque R contiene todos los pares ordenados de enteros positivos donde el primer elemento es mayor que el segundo elemento y R-1 contiene todos los pares ordenados de positivo enteros donde el primer elemento es menor que el segundo. .....

Suponga que una relación R no es transitiva. ¿Cómo podemos producir una relación transitiva? que contiene R tal que esta nueva relación está contenida dentro de cualquier relación transitiva que contiene R? ¿Se puede producir el cierre transitivo de una relación R sumando todos los pares de la forma (a, c), donde (a, b) y (b, c) ya están en la relación? Considere la relación R = {(1, 3), (1, 4), (2, I), (3, 2)} en el conjunto {I, 2, 3, 4}. Esta relación no es transitiva porque no contiene todos los pares de la forma (a, c) donde (a, b) y (b, c) están en R. Los pares de este la forma que no está en R son (1, 2), (2, 3), (2, 4) y (3, I). Agregar estos pares no produce un transitivo relación, porque la relación resultante contiene (3, I) y (I, 4) pero no contiene (3, 4). Esta muestra que construir el cierre transitivo de una relación es más complicado que construir ing el cierre reflexivo o simétrico. El resto de esta sección desarrolla algoritmos para la construcción de cierres transitivos. Como se mostrará más adelante en esta sección, el cierre transitivo de un La relación se puede encontrar agregando nuevos pares ordenados que deben estar presentes y luego repitiendo este proceso hasta que no se necesiten nuevos pares ordenados.

Página 29

Rutas en gráficos dirigidos

Veremos que representar relaciones por grafos dirigidos ayuda en la construcción de transitivos cierres. A continuación, presentamos algunos términos que usaremos para este propósito.

Una ruta en un gráfico dirigido se obtiene atravesando los bordes (en la misma dirección que indicado por la flecha en el borde).

DEFINICIÓN 1 Un camino de a a b en el gráfico dirigido G es una secuencia de aristas (xo, Xl), (Xl, X2), (X2 'X3),. . . , (Xn-l, xn) en G, donde n es un entero no negativo, y Xo = a y Xn = b, que es decir, una secuencia de aristas donde el vértice terminal de una arista es el mismo que el vértice inicial en el siguiente borde del camino. Esta ruta se denota por xo, Xl, X2,. . . , Xn-l, Xn y tiene longitud norte. Vemos el conjunto vacío de aristas como una ruta de a a a. Un camino de longitud n 1 que comienza y termina en el mismo vértice se llama circuito o ciclo.

Una ruta en un gráfico dirigido puede pasar por un vértice más de una vez. Además, una ventaja en un gráfico dirigido puede ocurrir más de una vez en una ruta.

EJEMPLO 3 ¿Cuáles de los siguientes son caminos en el gráfico dirigido que se muestra en la Figura 1: a, b, e, d; a, e, c, d, b; b, a, c, b, a, a, b; d, c; c, b, a; e, b, a, b, a, b, e? ¿Cuáles son las longitudes de los que son caminos? ¿Cuáles de los caminos de esta lista son circuitos?

Solución: Debido a que cada uno de (a, b), (b, e) , y (e, d) es un borde, a, b, e, d es un camino oflength tres. Como (c, d) no es una arista, a, e, c, d, b no es una ruta. Además, b, a, c, b, a, a, b es un camino de longitud de seis porque (b, a), (a, c), (c, b), (b, una) , (a, a) , y (a, b) son todos los bordes. Vemos que d, c es un camino de longitud uno, porque (d, c) es un borde. También c, b, a es un camino de longitud dos, porque (c, b) y (b, a) son aristas. Todos (e, b), (b, a) , (a, b), (b, a) , (a, b) y (b, e) son aristas, entonces e, b, a, b, a, b, e es un camino de longitud seis.

Los dos caminos b, a, c, b, a, a, b y e, b, a, b, a, b, e son circuitos porque comienzan y terminar en el mismo vértice. Los caminos a, b, e, d; c, b, a; y d, c no son circuitos. <l1i

El término ruta también se aplica a las relaciones. Llevando la definición de gráficos dirigidos a relaciones, hay un camino de una a b en R si hay una secuencia de elementos a, XL, X2,. . . , Xn-1 , b con (a, Xl) E R, (Xl, X2) E R, . . . , y (Xn-1, b) E R. El teorema 1 puede obtenerse del definición de un camino en una relación.

C

FIGURA 1 Un gráfico dirigido.

Página 30

8-29

TEOREMA 1 Sea R una relación en un conjunto A. Hay un camino de longitud n, donde n es un entero positivo, de a a b si y solo si (a, b) E Rn.

Prueba: Usaremos inducción matemática. Por definición, hay un camino de aab de longitud uno si y solo si (a, b) E R, entonces el teorema es verdadero cuando n = 1.

Suponga que el teorema es cierto para el entero positivo n. Esta es la hipótesis inductiva. Hay un camino de longitud n + 1 desde a hasta b si y solo si hay un elemento c E A tal que hay un camino de longitud uno de a a c, entonces (a, c) E R, y un camino de longitud n de c a b, que es, (c, b) E Rn. En consecuencia, según la hipótesis de inducción, existe un camino de longitud n + 1 desde a a b si y solo si hay un elemento c con (a, c) E R y (c, b) E Rn. Pero hay tal elemento si y solo si (a, b) E Rn + l. Por lo tanto, hay un camino de longitud n + 1 desde a hasta b si y solo si (a, b) E Rn + l. Esto completa la prueba. <Yo

Cierres transitivos

Ahora mostramos que encontrar el cierre transitivo de una relación es equivalente a determinar qué los pares de vértices en el grafo dirigido asociado están conectados por una ruta. Con esto en mente, definir una nueva relación.

DEFINICIÓN 2 Sea R una relación en un conjunto A. La relación de conectividad R * consta de los pares (a, b) tales que hay un camino de longitud al menos uno desde a hasta b en R.

Como Rn consta de los pares (a, b) tales que hay un camino de longitud n desde a hasta b, se sigue que R * es la unión de todos los conjuntos Rn. En otras palabras,

$$R^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n.$$

La relación de conectividad es útil en muchos modelos.

EJEMPLO 4 Sea R la relación del conjunto de todas las personas en el mundo que contiene (a, b) si a se ha encontrado con b. ¿Qué es Rn, donde n es un número entero positivo mayor que uno? ¿Qué es R *?

Solución: La relación R2 contiene (a, b) si hay una persona c tal que (a, c) E R y (c, b) E R, es decir, si hay una persona c tal que a ha cumplido c y c ha cumplido b. Del mismo modo, Rn consta de los pares (A, B) de tal manera que hay personas Xi, X2, . . · , Xn- I tal que a ha cumplido con XI, XI ha cumplido X2, . · , y Xn: he conocido a b.

La relación R * contiene (a, b) si hay una secuencia de personas, comenzando con ay terminando con b, de modo que cada persona en la secuencia haya conocido a la siguiente persona en la secuencia. (Ahí Hay muchas conjeturas interesantes sobre R *. ¿Crees que esta relación de conectividad incluye la pareja contigo como primer elemento y el presidente de Mongolia como segundo elemento? Nosotros utilizará gráficos para modelar esta aplicación en el Capítulo 9.) ....

EJEMPLO 5 Sea R la relación del conjunto de todas las paradas del metro en la ciudad de Nueva York que contiene (a, b) si es posible viajar de la parada a a la parada b sin cambiar de tren. ¿Qué es Rn cuando n es positivo? ¿entero? ¿Qué es R *?

Página 31

Solución: La relación Rn contiene (a, b) si es posible viajar desde la parada a hasta la parada b por haciendo n - 1 cambios de trenes. La relación R * consiste en los pares ordenados (a, b) donde es posible desplazarse desde la parada a hasta la parada b realizando tantos cambios de tren como sea necesario. (Los El lector debe verificar estas declaraciones.) ....

EJEMPLO 6 Sea R la relación del conjunto de todos los estados de los Estados Unidos que contiene (a, b) si el estado a y el estado b tienen una frontera común. ¿Qué es Rn, donde n es un número entero positivo? ¿Qué es R *?

Solución: La relación Rn consta de los pares (a, b), donde es posible pasar del estado a al estado b cruzando exactamente n fronteras estatales. R * consta de los pares ordenados (a, b), donde es posible pasar del estado a al estado b cruzando tantas fronteras como sea necesario. (El lector debe verificar estas afirmaciones.) Los únicos pares ordenados que no están en R * son los que contienen estados que no son conectados a los Estados Unidos continentales (es decir, los pares que contienen Alaska o Hawai). ....

El teorema 2 muestra que el cierre transitivo de una relación y la conectividad asociada la relación es la misma.

TEOREMA 2 El cierre transitivo de una relación R es igual a la relación de conectividad R *.

Prueba: tenga en cuenta que R * contiene R por definición. Para mostrar que R * es el cierre transitivo de R también debemos mostrar que R * es transitivo y que R * S siempre que S es una relación transitiva que contiene R.

Primero, mostramos que R * es transitivo. Si (a, b) E R * y (b, c) E R *, entonces hay caminos desde de a a b y de b a c en R. Obtenemos una ruta de a a c comenzando con la ruta de a a b y seguirlo con el camino de b a c. Por tanto, (a, c) E R *. De ello se deduce que R * es transitivo.

Ahora suponga que S es una relación transitiva que contiene R. Dado que S es transitivo, sn también es transitivo (el lector debe verificar esto) y sn S (por el teorema 1 de la sección 8.1). Además, porque y Sk S, se sigue que S * S. Ahora note que si RS, entonces R * S *, porque cualquier camino en R también es un camino en S. En consecuencia, R * S * S. Por lo tanto, cualquier relación transitiva que contenga R también debe contener R *. Por tanto, R * es el cierre transitivo de R. <Yo

Ahora que sabemos que el cierre transitivo es igual a la relación de conectividad, que Tum nuestra atención al problema de calcular esta relación. No necesitamos examinar arbitrariamente durante mucho tiempo caminos para determinar si hay un camino entre dos vértices en un grafo dirigido finito. Como El lema 1 muestra que es suficiente examinar las rutas que no contienen más de n aristas, donde n es el número de elementos del conjunto.

LEMMA 1 Sea A un conjunto con n elementos, y dejar que R sea una relación en A. Si hay un camino de longitud en al menos uno en R de a a b, entonces existe un camino con una longitud que no excede n. Además, cuando a # b, si hay un camino de longitud al menos uno en R desde a hasta b, entonces existe ese camino con longitud no superior a n - 1.

Página 32

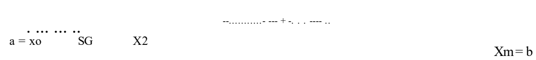

FIGURA 2 Producir una ruta con una longitud que no exceda n.

Prueba: Supongamos que hay un camino desde una a b en R. Let m sea la longitud de la tales camino más corto. Suponga que xo, XI, X2, ..., Xm-I, Xm, donde Xo = a y Xm = b, es tal camino.

Suponga que a = by que m > n, de modo que m :::: n + 1. Por el principio de casillero, porque hay n vértices en A, entre los m vértices xo, XI, . . ., Xm-I, al menos dos son iguales (ver Figura 2).

Suponga que Xi = X j con 0. :::: i < j . :::: m - 1. Entonces el camino contiene un circuito desde Xi para sí mismo. Este circuito se puede eliminar de la trayectoria desde un a b, dejando un camino, a saber, xo, XI, .. , Xi, X j + I, . . . , Xm _I, Xm, a partir de un a de b de longitud más corta. Por lo tanto, el camino del más corto length debe tener una longitud menor o igual a n. <l

El caso en el que se deja un # - b como ejercicio para el lector.

Del Lema 1, vemos que el cierre transitivo de R es la unión de R, R 2, R3, ..., y Rn. Esto se sigue porque hay una ruta en R * entre dos vértices si y solo si hay un ruta entre estos vértices en Ri, para algún entero positivo i con i. :::: n. Porque

y la matriz cero-Dne que representa una unión de relaciones es la unión de las matrices cero-Dne de estas relaciones, la matriz cero-Dne para el cierre transitivo es la unión de las matrices cero-Dnc de las primeras n potencias de la matriz cero-Dne de R.

TEOREMA 3 Sea MR la matriz cero-Dne de la relación R en un conjunto con n elementos. Entonces el cero-Dne matriz del cierre transitivo R * es

EJEMPLO 7 Encuentre la matriz cero-Dne del cierre transitivo de la relación R donde

[1 0 1]

MR = 0 1 0.
1 1 0

Solución: Del teorema 3, se deduce que la matriz cero-Dne de R * es

Página 33

Porque

] y M [31 _

M 1 [R - [1

resulta que

SEÑOR' [1 0 v
q 0] [0
1 yo] v [] [1

El teorema 3 se puede utilizar como base para un algoritmo para calcular la matriz de la relación R *. Para encontrar esta matriz, se calculan las sucesivas potencias booleanas de MR, hasta la enésima potencia. A medida que se calcula cada poder, se forma su unión con la unión de todas las potencias menores. Cuando esto se hace con la n-ésima potencia, se ha encontrado la matriz para R * . Este procedimiento se muestra como Algoritmo 1.

Enlaces

ALGORITMO 1 Un procedimiento para calcular el cierre transitivo.

```
procedimiento de cierre transitivo (MR: zenrone n x n matriz)
A: = señor
B: = A
para i: = 2 a n
empezar
    A: = A 0 Señor
    B: = B v A
end {B es la matriz cero-uno para R *}
```

Podemos encontrar fácilmente el número de operaciones de bits utilizadas por el algoritmo 1 para determinar el cierre transitivo de una relación. Calcular las potencias booleanas MR, M l,. . . , M l requiere que n - 1 Se encontrarán productos booleanos de n x n matrices cero-uno. Cada uno de estos productos booleanos se puede encontrar usando operaciones de bit n2 (2n - 1) . Por lo tanto, estos productos se pueden calcular utilizando n2 (2n - 1) (n - 1) operaciones de bit.

Para encontrar MR * a partir de las n potencias booleanas de MR, n - I uniones de matrices cero-uno deben ser encontrado. El cálculo de cada una de estas uniones utiliza operaciones de n2 bits. Por lo tanto, (n - 1) operaciones de n2 bits se utilizan en esta parte del cálculo. Por lo tanto, cuando se usa el algoritmo I , la matriz del El cierre transitivo de una relación en un conjunto con n elementos se puede encontrar usando n2 (2n - I) (n - I) + (n - l) n2 = 2n3 (n - 1), que son operaciones de bit O (n4). El resto de esta sección describe un algoritmo más eficiente para encontrar cierres transitivos.

Algoritmo de Warshall

El algoritmo de Warshall, llamado así por Stephen Warshall, quien describió este algoritmo en 1960, es un método eficiente para calcular el cierre transitivo de una relación. El algoritmo 1 puede encontrar el cierre transitivo de una relación en un conjunto con n elementos usando operaciones de bit 2n3 (n - 1) . Sin embargo, el cierre transitivo se puede encontrar mediante el algoritmo de Warshall utilizando solo operaciones de 2n3 bits.

Enlaces

Página 34

Observación: El algoritmo de Warshall a veces se denomina algoritmo Roy-Warshall, porque Bernard Roy describió este algoritmo en 1959.

Suponga que R es una relación en un conjunto con n elementos. Sea VI, V2, . . , Vn ser arbitrario listado de estos n elementos. El concepto de los vértices interiores de un camino se utiliza en Warshall algoritmo. Si a, XI, X2, ..., Xm-I, b es una ruta, sus vértices interiores son XI, X2, ..., Xm-I, es decir, todos los vértices de la ruta que ocurren en algún lugar que no sea el primer y último vértice en el camino. Por ejemplo, los vértices interiores de un camino a, c, d, f, g, h, b, J en un grafo dirigido son c, d, f, g, h y b. Los vértices interiores de a, c, d, a, f, b son c, d, a y f. (Tenga en cuenta que la primera vértice en el camino no es un vértice interior a menos que sea visitado nuevamente por el camino, excepto cuando el último vértice. De manera similar, el último vértice de la ruta no es un vértice interior a menos que se haya visitado previamente por la ruta, excepto como el primer vértice.)

El algoritmo de Warshall se basa en la construcción de una secuencia de matrices cero-uno. Estas las matrices son Wo, WI,. . . , W n, donde W 0 = MR es la matriz cero-uno de esta relación, y

W k = [w 5)], ¿ dónde W? = 1 si hay un camino de Vi a V j tal que todos los vértices interiores de esta ruta está en el conjunto {VI, V2, ..., Vd (los primeros k vértices de la lista) y es 0 en caso contrario. (Los Los primeros y últimos vértices de la ruta pueden estar fuera del conjunto de los primeros k vértices de la lista). que W n = MR ', porque la (i, J) ésima entrada de MR' es 1 si y solo si hay una ruta de Vi a V j, con todos los vértices interiores en el conjunto {VI, V2, ..., vn} (pero estos son los únicos vértices en la dirección grafico). El ejemplo 8 ilustra lo que representa la matriz W k .

EJEMPLO 8 Sea R la relación con la gráfica dirigida que se muestra en la Figura 3. Sean a, b, c, d una lista de elementos del conjunto. Encuentre las matrices Wo, WI, W2, W3 y W4. La matriz W4 es la transitiva cierre de R.

una segundo

Solución: Let VI = a, V2 = b, V3 = c, y V4 = d. Wo es la matriz de la relación. Por lo tanto,

FIGURA 3 El dirigido Gráfico de la Relación R.

WI tiene 1 como su entrada (i, J) th si hay una ruta de Vi a Vj que solo tiene VI = a como interior vértice. Tenga en cuenta que todas las rutas de longitud uno todavía se pueden utilizar porque no tienen vértices interiores.

STEPHEN WARS HALL (NACIDO EN 1935) Stephen Warshall, nacido en la ciudad de Nueva York, fue a una escuela pública en Brooklyn. Asistió a la Universidad de Harvard, recibiendo su título en matemáticas en 1956. Nunca recibió una grado avanzado, porque en ese momento no había programas disponibles en sus áreas de interés. Sin embargo, tomó cursos de posgrado en varias universidades diferentes y contribuyó al desarrollo de la informática y Ingeniería de software.

Después de graduarse de Harvard, Warshall trabajó en ORO (Operation Research Office), que se estableció por Johns Hopkins para realizar investigación y desarrollo para el Ejército de los EE. UU. En 1958 dejó ORO para tomar un puesto en una empresa llamada Operaciones Técnicas, donde ayudó a construir un laboratorio de investigación y desarrollo ratory para proyectos de software militar. En 1961 dejó las operaciones técnicas para fundar Massachusetts Computer Asociados. Posteriormente, esta empresa pasó a formar parte de Applied Data Research (ADR). Después de la fusión, Warshall se sentó en la junta de directores de ADR y gestionó una variedad de proyectos y organizaciones. Se retiró de ADR en 1982.

Durante su carrera, Warshall llevó a cabo investigación y desarrollo en sistemas operativos, diseño de compiladores, diseño de lenguajes y la investigación de operaciones. En el año académico 1971-1972 impartió conferencias sobre ingeniería de software en universidades francesas. Ahi esta una anécdota interesante sobre su prueba de que el algoritmo de cierre transitivo, ahora conocido como algoritmo de Warshall, es correcto. El y un colega de Operaciones Técnicas apostó una botella de ron a quién podría determinar primero si este algoritmo siempre funciona. Warshall Se le ocurrió su prueba de la noche a la mañana, ganando la apuesta y el ron, que compartió con el perdedor de la apuesta. Porque Warshall no Como sentarse en un escritorio, hizo gran parte de su trabajo creativo en lugares poco convencionales, como en un velero en el Océano Índico o en un Huerto de limón griego.

Página 35

Además, ahora hay una ruta permitida de b a d, es decir, b, a, d. Por lo tanto,

W2 tiene 1 como su (i, j) -ésimo de entrada si hay un camino de Vi a Vj que sólo tiene VI = a y / o V2 = b como sus vértices interiores, si los hay. Como no hay aristas que tengan b como vértice terminal, no se obtienen nuevos caminos cuando permitimos que b sea un vértice interior. Por tanto, W 2 = WI.

W3 tiene I como su (i, j) th entrada si hay una ruta de Vi a Vj que solo tiene VI = a, V2 = b, y / o V3 = c como sus vértices interiores, si los hay. Ahora tenemos caminos de d a a, a saber, d, c, a y de d a d, es decir, d, c, d. Por lo tanto,

Finalmente, W4 tiene 1 como su (i, j) ésima entrada si hay una ruta de Vi a Vj que tiene VI = a, V2 = b, V3 = c, y / o V4 = d como vértices interiores, si los hay. Debido a que estos son todos los vértices del gráfico, esta entrada es 1 si y solo si hay una ruta de Vi a Vj. Por lo tanto,

Esta última matriz, W4, es la matriz del cierre transitivo.

El algoritmo de Warshall calcula MR * calculando de manera eficiente W 0 = MR, WI, W2, ..., W n = MR *. Esta observación muestra que podemos calcular W k directamente a partir de W kI: hay una ruta de Vi a Vj sin vértices distintos de VI, V2, ..., Vk como vértices interiores si y solo si o hay un camino de Vi a Vj con sus vértices interiores entre los primeros k - 1 vértices en el lista, o hay caminos de Vi a Vk y de Vk a Vj que tienen vértices interiores solo entre los primeros k - 1 vértices en la lista. Es decir, ya existía un camino de Vi a Vj antes de que Vk fuera permitido como vértice interior, o permitir Vk como vértice interior produce una ruta que va de Vi a Vk y luego de Vk a Vj. Estos dos casos se muestran en la Figura 4.

El primer tipo de ruta existe si y solo si wlJ-Il = 1, y el segundo tipo de ruta existe si y solo si tanto wl! -Il como W -Il son 1. Por tanto, wlJl es 1 si y solo si wi t Il es 1 o ambos wl! -Il y W -Il son 1. Esto nos da el Lema 2.

LEMA 2 Sea W k = [wiJ 1] la matriz cero-uno que tiene un 1 en su (i, j) -ésima posición si y solo si hay es un camino de Vj a Vj con vértices interiores del conjunto {VI, V2, ..., Vk}. Entonces

wij [kl = wij [k-Il v (Wik [k-Il /\ wkj [k-Il) ,

siempre que i, j y k sean números enteros positivos que no excedan de n.

Página 36

8-35 8.4 Cierres de relaciones 553

Caso I

Todos los vértices interiores

en {vl 'V2' ',. , Vk- l}

Vk

c '/ x

Vi Todos los vértices interiores Vj

en {vl, v2 "" vk-l}

FIGURA 4 Adición de Uk al conjunto de Vértices interiores permitidos.

El lema 2 nos da los medios para calcular de manera eficiente las matrices Wk. k = 1, 2,. . . , n. Nosotros mostrar el pseudocódigo para el algoritmo de Warshall, usando el Lema 2, como Algoritmo 2.

ALGORITMO 2 Algoritmo Warshall.

procedimiento Warshall (MR: matriz cero-uno nxn)
W: = Señor
para k : = I a n
empezar
para i : = 1 a n
empezar
para j: = 1 a n
Wi} : = Wi} v (Wik A Wk})
fin
final { W = [Wi}] es MR,}

La complejidad computacional del algoritmo de Warshall se puede calcular fácilmente en términos de

operaciones de bits. Para encontrar la entrada W ;. 1 de las entradas W ;. -1, w Z -II y W -ll usando Lema
2 requiere operaciones de dos bits. Para encontrar todas las n2 entradas de Wk de las de OfWk-I se requieren 2n2 bits
operaciones. Debido a que el algoritmo de Warshall comienza con Wo = MR y calcula la secuencia
de n matrices cero-uno WI, W 2, ·. . , W n = MR "el número total de operaciones de bits utilizadas es
n. 2n2 = 2n3.

Ejercicios

1. Sea R la relación en el conjunto {O, 1, 2, 3 } que contiene el pares ordenados (0, 1), (I, I), (l, 2), (2, 0), (2, 2) y (3, 0). Encuentra el
a) cierre reflexivo de R. b) cierre simétrico de R.

2. Sea R la relación {(a, b) I a i = b} en el conjunto de enteros. ¿Qué es el cierre reflexivo de R?

3. Sea R la relación {(a, b) I a divide b} en el conjunto de enteros. ¿Cuál es el cierre simétrico de R?

4. ¿Cómo puede la gráfica dirigida que representa lo reflexivo El cierre de una relación en un conjunto finito se construirá a partir de la gráfica dirigida de la relación?

Página 37

En los ejercicios 5-7 dibuje la gráfica dirigida de la reflexiva cierre de las relaciones con el gráfico dirigido mostrado.

5.

6.

.

C

re

7.

C

re

8. ¿Cómo puede la gráfica dirigida que representa la simétrica El cierre de una relación en un conjunto finito se construirá a partir de el gráfico dirigido para esta relación?

9. Encuentre las gráficas dirigidas de los cierres simétricos de la relaciones con gráficas dirigidas que se muestran en los ejercicios 5-7.

10. Encuentre la relación más pequeña que contenga la relación en Ex amplio 2 que es a la vez reflexivo y simétrico.

1 1. Encuentre la gráfica dirigida de la relación más pequeña que sea a la vez reflexiva y simétrica para cada una de las relaciones con di gráficas rectas que se muestran en los Ejercicios 5-7.

12. Suponga que la relación R en el conjunto finito A es rep resentido por la matriz MR ' Demuestre que la matriz que representa el cierre reflexivo de R es MR v In.

c) a, a, b, e, d, e
d) b, c, e, d, a, a, b
e) b, c, e, b, e, d, e, d
Q a, a, b, b, e, c, b, e, d

17. Encuentre todos los circuitos de longitud tres en la gráfica dirigida en Ejercicio 16.

18. Determine si hay una ruta en la gráfica dirigida en Ejercicio 16 comenzando en el primer vértice dado y terminando en el segundo vértice dado.

a) a, b b) b, a c) b, b
d) a, e e) b, d Q c, d
g) d, d h) e, a i) e, c

19. Sea R la relación del conjunto {I, 2, 3, 4, 5} que contiene los pares ordenados (1, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 5), (4, 3), (5, I), (5, 2) y (5, 4). Encontrar

a) R2. b) R3.
d) R5. e) R6.

20. Sea R la relación que contiene el par (a, b) si a y b son ciudades tales que hay un vuelo directo de aerolínea sin escalas de A a B. Cuando es (a, b) en

a) ¿R2? b) ¿R3? c) R *?

21. Sea R la relación en el conjunto de todos los estudiantes que contienen el par ordenado (a, b) si ayb están en al menos una clase común y ai = b. Cuando es (a, b) en

a) ¿R2? b) ¿R3? c) R *?

22. Suponga que la relación R es reflexiva. Demuestre que R * es reflexivo.

23. Suponga que la relación R es simétrica. Muestre que R * es simétrico.

24. Suponga que la relación R es irreflexiva. Es la relación R2 necesariamente irreflexivo?

25. Utilice el algoritmo 1 para encontrar los cierres transitivos de estos

13. Suponga que la relación R en el conjunto finito A es rep resentido por la matriz MR ' Demuestre que la matriz que representa el cierre simétrico de R es MR v M.

14. Demuestre que el cierre de una relación R con respecto a un La propiedad P, si existe, es la intersección de todas las relaciones ciones con propiedad P que contienen R.

15. ¿Cuándo es posible definir el "cierre irreflexivo"? de una relación R, es decir, una relación que contiene R, es ir reflexiva, y está contenida en toda relación irreflexiva que contiene R?

16. Determina si estas secuencias de vértices son caminos. en este gráfico dirigido.

una

segundo

a) a, b, c, e
b) b, e, c, b, e

relaciones en {I, 2, 3, 4}.
a) {(I, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 4), (4, I)}
b) {(2, 1), (2, 3), (3, I), (3, 4), (4, I), (4, 3)}
c) {(I, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4 (3, 4)}
d) {(yo, yo), (1, 4), (2, yo), (2, 3), (3, yo), (3, 2), (3, 4), (4, 2) }

26. Utilice el algoritmo 1 para encontrar los cierres transitivos de estos relaciones en {a, b, c, d, e}.
a) {(a, c), (b, d), (c, a), (d, b), (e, d)}
b) {(b, c), (b, e), (c, e), (d, a), (e, b), (e, c)}
c) {(a, b), (a, c), (a, e), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b), (d, a) , (e, d)}
d) {(a, e), (b, a), (b, d), (c, d), (d, a), (d, c), (e, a), (e, b) , (e, c), (e, e)}

27. Utilice el algoritmo de Warshall para encontrar los cierres transitivos de las relaciones en el ejercicio 25.

28. Utilice el algoritmo de Warshall para encontrar los cierres transitivos de las relaciones del ejercicio 26.

29. Encuentra la relación más pequeña que contiene la relación {(I, 2), (I, 4), (3, 3), (4, I)} es decir
a) reflexiva y transitiva.

Página 38

b) simétrico y transitivo.
c) reflexiva, simétrica y transitiva.

30. Termine la prueba del caso cuando a # b en el Lema 1.

31. Se han diseñado algoritmos que utilizan O (n2 . 8) bit op eraciones para calcular el producto booleano de dos nxn matrices cero - uno. Suponiendo que estos algoritmos pueden utilizar, proporcione estimaciones de O grande para el número de operaciones de bit aciones usando el algoritmo I y usando el algoritmo de Warshall para encontrar el cierre transitivo de una relación en un conjunto con n elementos.

: 32. Diseñar un algoritmo utilizando el concepto de vértices interiores. en un camino para encontrar la longitud del camino más corto entre dos vértices en un grafo dirigido, si existe tal ruta.

33. Adapte el algoritmo I para encontrar el cierre reflexivo del cierre transitivo de una relación en un conjunto con n elementos.

34. Adapte el algoritmo de Warshall para encontrar el cierre reflexivo de el cierre transitivo de una relación en un conjunto con n elementos.

35. Demuestre que el cierre con respecto a la propiedad P de la relación R = {CO, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 2 »} en el conjunto {O, 1, 2) no existe si P es la propiedad
a) "no es reflexivo".
b) "tiene un número impar de elementos".

8.5 Relaciones de equivalencia

Introducción

En algunos lenguajes de programación, los nombres de las variables pueden contener un número ilimitado de caracteres. Sin embargo, existe un límite en el número de caracteres que se comprueban cuando El compilador determina si dos variables son iguales. Por ejemplo, en C tradicional, solo el El compilador comprueba los primeros ocho caracteres de un nombre de variable. (Estos personajes son letras mayúsculas o minúsculas, dígitos o guiones bajos.) En consecuencia, el compilador considera cadenas de más de ocho caracteres que coincidan en sus primeros ocho caracteres. Deje que R sea la relación en el conjunto de cadenas de caracteres tal que s R t, donde syt son dos cadenas, si s y t son al menos ocho caracteres y los primeros ocho caracteres de s y t de acuerdo, o s = t. Es fácil ver que R es reflexiva, simétrica y transitiva. Además, R divide el conjunto de todos cadenas en clases, donde todas las cadenas de una clase en particular son consideradas iguales por un compilador para C.

Los enteros ayb están relacionados por la relación de "módulo de congruencia 4" cuando 4 se divide a - b. Más adelante mostraremos que esta relación es reflexiva, simétrica y transitiva. No es difícil ver que una está relacionada con b si y sólo si A y B tienen el mismo resto cuando se divide por 4. Se se deduce que esta relación divide el conjunto de enteros & en cuatro clases diferentes. Cuando solo nos importa qué resto deja un número entero cuando se divide por 4, solo necesitamos saber de qué clase es en, no su valor particular.

Estos dos relaciones, R y módulo 4 de congruencia , son ejemplos de relaciones de equivalencia, es decir, relaciones que son reflexivas, simétricas y transitivas. En esta sección mostraremos que tales relaciones dividen conjuntos en clases disjuntas de elementos equivalentes. Surgen relaciones de equivalencia siempre que nos importe sólo si un elemento de un conjunto está en una determinada clase de elementos, en lugar de preocuparse por su identidad particular.

Relaciones de equivalencia

unkS En esta sección estudiaremos las relaciones con una combinación particular de propiedades que permite para usarlos para relacionar objetos que son similares de alguna manera.

DEFINICIÓN 1 Una relación en un conjunto A se llama una relación de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitivo.

Las relaciones de equivalencia son importantes en matemáticas e informática. Uno La razón de esto es que en una relación de equivalencia, cuando dos elementos están relacionados tiene sentido decir que son equivalentes.

DEFINICIÓN 2 Dos e l em e n t s a y b que están relacionados por una relación de equivalencia se llaman equivalentes. los notación un ~ b se utiliza a menudo para referirse a que un y b son elementos equivalentes con respecto a una relación de equivalencia particular .

Para que la noción de elementos equivalentes tenga sentido, cada elemento debe ser equivalente a mismo, como la propiedad reflexiva garantiza una relación de equivalencia. Tiene sentido decir que una y b están relacionados (no sólo que una se relaciona con b) por una relación de equivalencia, porque cuando un es relacionado con b, por la propiedad simétrica, b está relacionado con a. Además, debido a que una equivalencia La relación es transitiva, si a y b son equivalentes y b y c son equivalentes, se deduce que a y c son equivalentes.

Los ejemplos 1-5 ilustran la noción de relación de equivalencia.

EJEMPLO 1 Sea R la relación del conjunto de enteros tal que aR b si y sólo si a = bo a = -b. En En la sección 8.1 mostramos que R es reflexiva, simétrica y transitiva. De ello se deduce que R es un relación de equivalencia. ...

EJEMPLO 2 Sea R la relación en el conjunto de números reales tal que aRb si y solo si a - b es un número entero. ¿Es R una relación de equivalencia?

Solución: Debido a - a = 0 es un entero para todos los números reales a, aRa para todos los números reales a. Por tanto, R es reflexivo. Ahora suponga que aRb. Entonces a - b es un número entero, entonces b - a también es un entero. Por lo tanto, bRa. De ello se deduce que R es simétrico. Si aRb y b R c, entonces a - b y b - c son enteros. Por lo tanto, a - c = (a - b) + (b - c) también es un número entero. Por lo tanto, aRc. Por tanto, R es transitivo. En consecuencia, R es una relación de equivalencia. ...

Una de las relaciones de equivalencia más utilizadas es el módulo de congruencia m, donde m es un entero positivo mayor que 1.

EJEMPLO 3 Módulo de congruencia m Sea m un entero positivo con m > 1. Demuestre que la relación

R = {(a, b) yo a == b (mod m)}

es una relación de equivalencia en el conjunto de números enteros.

Solución: recuerde de la sección 3.4 que a == b (mod m) si y solo si m divide a - b. Nota que a - a = 0 es divisible por m, porque 0 = o · m. Por lo tanto, a == a (mod m), entonces congruencia módulo m es reflexivo. Ahora suponga que a == b (mod m). Entonces a - b es divisible por m, entonces a - b = km, donde k es un número entero. De ello se deduce que b - a = (-k) m, entonces b == a (mod m). Por lo tanto, la congruencia módulo m es simétrica. A continuación, suponga que a == b (mod m) y b == c (mod m). Entonces m divide tanto a - b como b - c. Por tanto, hay enteros k e I con a - b = km y b - c = 1 m. La suma de estas dos ecuaciones muestra que a - c = (a - b) + (b - c) = km + 1m = (k + yo) m. Por lo tanto, a == c (mod m). Por tanto, la congruencia módulo m es transitiva. Resulta que módulo de congruencia m es una relación de equivalencia. ...

Página 40

EJEMPLO 4 Suponga que R es la relación en el conjunto de cadenas de letras inglesas tal que aRb si y solo ifl (a) = l (b), donde l (x) es la longitud de la cadena x. ¿Es R una relación de equivalencia?

Solución: como l (a) = l (a), se deduce que aRa siempre que a es una cuerda, de modo que R es reflexivo. A continuación, suponga que aRb, de modo que l (a) = l (b). Entonces bRa, porque l (b) = l (a). Por tanto, R es sym métrico. Finalmente, suponga que aRb y bRc. Entonces l (a) = l (b) y l (b) = l (c). Por tanto, l (a) = l (c), tan aRc. En consecuencia, R es transitivo. Como R es reflexiva, simétrica y transitiva, es una relación de equivalencia. <41

EJEMPLO 5 Sea n un entero positivo y S un conjunto de cadenas. Suponga que Rn es la relación sobre S tal que s Rn t si y solo si s = t, o ambos s y t tienen al menos n caracteres y los primeros n caracteres de s y t son lo mismo. Es decir, una cadena de menos de n caracteres está relacionada solo consigo misma; una cuerda s con al menos n caracteres está relacionado con una cadena t si y solo si t tiene al menos n caracteres y t comienza con los n caracteres al comienzo de s. Por ejemplo, sea n = 3 y sea S el conjunto de todas las cadenas de bits. Entonces s R3 t cuando s = t o tanto s como t son cadenas de bits de longitud 3 o más que comienzan con los mismos tres bits. Por ejemplo, 01 R3 Ol y 001 1 1 R3 0010 1, pero 01 R 3 0 10 y 0101 1 R3 01 1 10.

Demuestre que para cada conjunto S de cadenas y cada entero positivo n, Rn es una equivalencia relación en S.

Solución: La relación Rn es reflexiva porque s = s, de modo que s Rn s siempre que s es una cuerda en S. Si s Rn t, entonces s = t o s y t tienen al menos n caracteres de longitud que comienzan con el mismo n caracteres. Esto significa que t Rn s. Concluimos que Rn es simétrico.

Ahora suponga que s Rn t y t Rn u. Entonces s = t o s y t tienen al menos n caracteres de longitud y s y t comienzan con los mismos n caracteres, y t = u o t y u son al menos n caracteres long y t y u comienzan con los mismos n caracteres. De esto, podemos deducir que s = u o tanto s como u tienen n caracteres de longitud y s y u comienzan con los mismos n caracteres (porque en este caso, sabemos que s, t y u tienen al menos n caracteres de longitud y tanto s como u comienzan con los mismos n caracteres que hace t). En consecuencia, Rn es transitivo. De ello se deduce que Rn es un relación de equivalencia. <41

En los ejemplos 6 y 7 observamos dos relaciones que no son relaciones de equivalencia.

EJEMPLO 6 Demuestre que la relación "divide" en el conjunto de enteros positivos no es una relación de equivalencia.

Solución: por los ejemplos 9 y 15 de la sección 8. 1, sabemos que la relación "divide" es reflexiva y transitivo. Sin embargo, por el ejemplo 12 de la sección 8.1, sabemos que esta relación no es simétrica (por ejemplo, 2 I 4 pero 4 t 2). Concluimos que la relación "divide" en el conjunto de enteros positivos no es una relación de equivalencia. <41

EJEMPLO 7 Sea R la relación del conjunto de números reales tal que x R y si y sólo si xey son reales números que difieren en menos de 1, es decir, Ix - y I < 1. Muestre que R no es una relación de equivalencia.

Solución: R es reflexivo porque Ix - x I = 0 < 1 siempre que x E R. R es simétrico, porque si x R y, donde x e y son números reales, entonces Ix - y me < 1, la cual nos dice que Iy - x I = Ix - y me < 1, por lo ese yRx. Sin embargo, R no es una relación de equivalencia porque no es transitiva. Tome x = 2.8, y = 1.9, yz = 1.1, de modo que Ix - yl = 12.8 - 1.91 = 0.9 < 1, Iy - zl = 1 1 . 9 - 1,1 1 = 0,8 < 1, pero Ix - zl = 1 2.8 - 1. 1 1 = 1 .7 > 1. Es decir, 2.8 R 1 .9, 1.9 R 1.1, pero 2.8 R 1.1. <41

Página 41

Clases de equivalencia

Sea A el conjunto de todos los estudiantes de su escuela que se graduaron de la escuela secundaria. Considera el relación R en A que consiste de todos los pares (x, y), donde x e y se graduó de la misma alta colegio. Dado un estudiante x, podemos formar el conjunto de todos los estudiantes equivalente ax con respecto a R. Este conjunto consta de todos los estudiantes que se graduaron de la misma escuela secundaria que x . Este subconjunto de A se denomina clase de equivalencia de la relación.

DEFINICIÓN 3 Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A. El conjunto de todos los elementos que están relacionados con un el elemento a de A se llama clase de equivalencia de a. La clase de equivalencia de a con respecto a R se denota por [a] R. Cuando solo se está considerando una relación, podemos eliminar la subíndice R y escriba [a] para esta clase de equivalencia.

En otras palabras, si R es una relación de equivalencia en un conjunto A, la clase de equivalencia del el elemento a es

[a] R = {s I (a, s) E R }.

Si b E [a] R, entonces b se denomina representante de esta clase de equivalencia. Cualquier elemento de una clase se puede utilizar como representante de esta clase. Es decir, no hay nada especial en el particular elemento elegido como representante de la clase.

EJEMPLO 8 ¿Cuál es la clase de equivalencia de un número entero para la relación de equivalencia del Ejemplo I?

Solución: Debido a que un número entero es equivalente a sí mismo y su negativo en esta relación de equivalencia, se sigue que [a] = {-a, a}. Este conjunto contiene dos enteros distintos a menos que a = O. Por ejemplo, [7] = {-7, 7}, [-5] = {-5, 5} y [0] = {OJ. <III

EJEMPLO 9 ¿Cuáles son las clases de equivalencia de 0 y 1 para el módulo de congruencia 4?

Solución: La clase de equivalencia de 0 contiene todos los enteros a tales que a == 0 (mod 4). Los enteros en esta clase son los divisibles por 4. Por lo tanto, la clase de equivalencia de 0 para esta relación es

[0] = { . . . , -8, -4, 0, 4, 8 ,. . .}.

La clase de equivalencia de 1 contiene todos los enteros a tales que a == 1 (mod 4). Los enteros en esta clase son aquellos que tienen un resto de 1 cuando se dividen por 4. Por lo tanto, la equivalencia clase de 1 para esta relación es

[1] = {. . . , -7, -3, 1, 5, 9,. . .}.

En el ejemplo 9, las clases de equivalencia de 0 y 1 con respecto a la congruencia módulo 4 fueron encontrados. El ejemplo 9 se puede generalizar fácilmente, reemplazando 4 con cualquier entero positivo m. Las clases de equivalencia de la relación congruencia módulo m se llaman congruencia clases modulo m. La clase de congruencia de un número entero a módulo m se denota por [a] m, entonces [a] m = {. . . , a - 2m, a - m, a, a + m, a + 2m,. . . }. Por ejemplo, del ejemplo 9 se sigue que [0] 4 = { . . . , -8, -4, 0, 4, 8,. . . } y [1] 4 = {. . . , -7, -3, 1, 5, 9,. . .}.

Página 42

EJEMPLO 10 ¿Cuál es la clase de equivalencia de la cadena 01 1 1 con respecto a la relación de equivalencia R3 de Ejemplo 5 en el conjunto de todas las cadenas de bits (Recuerde que s R3 t si y solo si s y t son cadenas de bits con s = t o s y t son cadenas de al menos tres bits que comienzan con los mismos tres bits).

Solución: Las cadenas de bits equivalentes a 01 1 1 son las cadenas de bits con al menos tres bits que comienzan con OI l. Estas son las cadenas de bits 01 1, 01 10, 01 1 1, 01 100, 01 101, 01 1 10, 01 1 1 1, y así sucesivamente. Por consiguiente,

[01 1lR3 = {OI l, 01 10, 01 1 1, 01 100, 01 101, 01 1 10, 01 1 1 1 ,. . . }.

EJEMPLO 11 Identificadores en el lenguaje de programación C En el lenguaje de programación C, un identificador es el nombre de una variable, una función u otro tipo de entidad. Cada identificador es un no vacío cadena de caracteres donde cada carácter es una letra inglesa minúscula o mayúscula, un dígito, o un guión bajo, y el primer carácter es una letra inglesa minúscula o mayúscula. Identificadores puede tener cualquier longitud. Esto permite a los desarrolladores usar tantos caracteres como quieran para nombrar un entidad, como una variable. Sin embargo, para los compiladores de algunas versiones de C, existe un límite en el número de caracteres comprobados cuando se comparan dos nombres para ver si se refieren al la misma cosa. Por ejemplo, los compiladores de Estándar C consideran dos identificadores iguales cuando de acuerdo en sus primeros 3 1 caracteres. En consecuencia, los desarrolladores deben tener cuidado de no utilizar identificadores con los mismos 3 1 caracteres iniciales para diferentes cosas. Vemos que se consideran dos identificadores lo mismo cuando están relacionados por la relación R31 en el Ejemplo 5. Usando el Ejemplo 5, sabemos que R31, en el conjunto de todos los identificadores en el Estándar C, es una relación de equivalencia.

Cuáles son las clases de equivalencia de cada uno de los identificadores NumbecoLtropicaL storms, Number_oLnamed_tropicaLstorms y Number_oLnamed_tropicaLstormsjn_the_ Atlantidn-2005?

Solución: tenga en cuenta que cuando un identificador tiene menos de 31 caracteres, según la definición de R31, su clase de equivalencia se contiene solo a sí misma. Porque el identificador NumbecoLtropicaLstorms es Con 25 caracteres de longitud, su clase de equivalencia contiene exactamente un elemento, a saber, él mismo.

El identificador NumbecoLnamed_tropicaLstorms tiene exactamente 3 1 caracteres de largo. Un identificador es equivalente cuando comienza con estos mismos 3 1 caracteres. En consecuencia, cada identificador en al menos 3 1 caracteres de longitud que comienzan con NumbecoLnamed_tropicaLstorms es equivalente a esto identificador. De ello se deduce que la clase de equivalencia de NumbecoLnamed_tropicaLstorms es el conjunto de todos los identificadores que comienzan con los 3 1 caracteres NumbecoLnamed_tropicaLstorms.

Un identificador es equivalente a NumbecoLnamed_tropicaLstormsjn_the.Atlantic_in_ 2005 si y solo si comienza con sus primeros 3 1 caracteres. Porque estos personajes son NumbecoLnamed_tropicaLstorms, vemos que un identificador es equivalente a Num becoLnamed_tropicaLstormsjn_the.Atlantic_in-2005 si y solo si es equivalente a Num ber _of-Ilamed_tropicaLstorms. De ello se deduce que estos dos últimos identificadores tienen la misma equivalencia cl

Clases y particiones de equivalencia

Deje A el conjunto de los estudiantes en su escuela que se están especializando en exactamente un sujeto, y dejar que R sea la relación en A consta de pares (x, y), donde x yy son estudiantes con la misma especialidad. Entonces R es una relación de equivalencia, como debe verificar el lector. Podemos ver que R divide a todos los estudiantes en A

en una colección de subconjuntos disjuntos, donde cada subconjunto contiene estudiantes con una especialización específica. Por ejemplo, un subconjunto contiene a todos los estudiantes que se especializan (solo) en ciencias de la computación, y un segundo El subconjunto contiene a todos los estudiantes que se especializan en historia. Además, estos subconjuntos son equivalencia clases de R. Este ejemplo ilustra cómo las clases de equivalencia de una relación de equivalencia

Página 43

dividir un conjunto en subconjuntos no vacíos y separados. Precisaremos estas nociones en el siguiente discusión.

Sea R una relación del conjunto A. El teorema I muestra que las clases de equivalencia de dos los elementos de A son idénticos o disjuntos.

TEOREMA 1 Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A. Estos enunciados para los elementos ayb de A son equivalente:

(i) aRb (ii) [a] = [b] (iii) [a] n [b] = 1 0

Prueba: Primero mostramos que (i) implica (ii). Suponga que aRb. Demostraremos que [a] = [b] por mostrando [a] [b] y [b] [a]. Suponga c E [a]. ThenaRc. Como aRb y R son simétricos, sabemos que bRa. Además, debido a que R es transitivo y bRa y aRc, se sigue que b R c. Por tanto, c E [b]. Esto muestra que [a] [b]. La prueba de que [b] [a] es similar; se deja como ejercicio para el lector.

En segundo lugar, mostraremos que (ii) implica (iii). Suponga que [a] = [b]. De ello se deduce que [a] n [b] = I o porque [a] no está vacío (porque a E [a] porque R es reflexivo).

A continuación, mostraremos que (iii) implica (i). Suponga que [a] n [b] = I 0. Entonces hay un elemento c con c E [a] y c E [b]. En otras palabras, aRc y b R c. Por la propiedad simétrica, c R b. Entonces por transitividad, porque aRc y cR b, tenemos aR b.

Como (i) implica (ii), (ii) implica (iii) y (iii) implica (i), los tres enunciados, (i), (ii), y (iii) son equivalentes. <l

Ahora estamos en condiciones de mostrar cómo una relación de equivalencia divide un conjunto. Sea R un relación de equivalencia en un conjunto A. La unión de las clases de equivalencia de R es toda de A, porque un elemento a de A está en su propia clase de equivalencia, a saber, [a] R. En otras palabras, Además, del teorema 1 se deduce que estas clases de equivalencia son iguales o disjuntas, entonces

[a] R n [b] R = 0,

cuando [a] R = I [b] R '

Estas dos observaciones muestran que las clases de equivalencia forman una partición de A, porque dividen A en subconjuntos disjuntos. Más precisamente, una partición de un conjunto S es una colección de disjuntos subconjuntos no vacíos de S que tienen S como su unión. En otras palabras, la colección de subconjuntos Ai, i E I (donde I es un conjunto de índices) forma una partición de S si y solo si

Ai = I 0 para i E I,

Ai n A j = 0 cuando i = I j,

y

(Aquí la notación UiEI Ai representa la unión de los conjuntos Ai para todo i E I.) La figura 1 ilustra el concepto de partición de un conjunto.

FIGURA 1 Una partición de un conjunto.

EJEMPLO 12 Suponga que S = {I, 2, 3, 4, -5, 6} _ La colección de conjuntos Al = {I, 2, 3}, A2 = { 4, 5} y A3 = {6} forma una partición de S, porque estos conjuntos son disjuntos y su unión es S _ ...

Hemos visto que las clases de equivalencia de una relación de equivalencia en un conjunto forman una partición del set. Los subconjuntos de esta partición son las clases de equivalencia. Por el contrario, cada partición de un conjunto se puede utilizar para formar una relación de equivalencia. Dos elementos son equivalentes con respecto a esta relación si y solo si están en el mismo subconjunto de la partición.

Para ver esto, suponga que {Ai li EI} es una partición en S. Sea R la relación en S que consiste del par (x, y), donde x e y pertenecen a la misma subconjunto Ai en la partición. Para mostrar que R es una relación de equivalencia debemos demostrar que R es reflexiva, simétrica y transitiva.

Vemos que (a, a) E R para cada a E S, porque a está en el mismo subconjunto que él mismo. Por tanto, R es reflexivo. Si (a, b) E R, entonces by a están en el mismo subconjunto de la partición, de modo que (b, a) E R también. Por tanto, R es simétrico. Si (a, b) E R y (b, c) E R, a continuación, una y b están en la misma subconjunto en la partición, X, y byc están en el mismo subconjunto de la partición, Y. Porque los subconjuntos de la partición son disjuntos y b pertenece a X e Y, se sigue que X = Y. En consecuencia, un y c pertenecen al mismo subconjunto de la partición, por lo que (a, c) E R. Por lo tanto, R es transitivo.

De ello se deduce que R es una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia de R consisten en subconjuntos de S que contienen elementos relacionados, y por la definición de R, estos son los subconjuntos de la partición. El teorema 2 resume las conexiones que hemos establecido entre las relaciones de equivalencia y particiones.

TEOREMA 2 Sea R una relación de equivalencia en un conjunto S. Entonces las clases de equivalencia de R forman una partición de S. Por el contrario, dada una partición {Ai li E I} del conjunto S, existe una relación de equivalencia R que tiene los conjuntos Ai, i E I, como clases de equivalencia.

El ejemplo 13 muestra cómo construir una relación de equivalencia a partir de una partición.

EJEMPLO 13 Enumere los pares ordenados en la relación de equivalencia R producida por la partición A I = {I, 2, 3},
A2 = {4, 5} y A3 = {6} de S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, dado en el ejemplo 12.

Solución: Los subconjuntos en la partición son las clases de equivalencia de R. El par (a, b) E R si y sólo si una y b están en el mismo subconjunto de la partición. Los pares (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2,2), (2, 3), (3, 1), (3, 2) y (3, 3) pertenecen a R porque Al = {I, 2, 3} es una clase de equivalencia; los pares (4, 4), (4, 5), (5, 4) y (5, 5) pertenecen a R porque A2 = {4, 5} es una clase de equivalencia; y finalmente el par (6, 6) pertenece a R porque { 6 } es una clase de equivalencia. Ningún par más que los enumerados pertenecen a R. ...

Las clases de congruencia módulo m proporcionan una ilustración útil del teorema 2. Hay son m clases de congruencia diferentes módulo m, correspondientes a los m residuos diferentes

Página 45

posible cuando un número entero se divide por m. Estas m clases de congruencia se denotan por [O] m, [1] m,. . . , [m - l] m. Forman una partición del conjunto de números enteros.

EJEMPLO 14 ¿Cuáles son los conjuntos en la partición de los enteros que surgen de la congruencia módulo 4?

Solución: Hay cuatro clases de congruencia, correspondientes a [0] 4, [1] 4, [2] 4 y [314. Ellos son los conjuntos

[0] 4 = {. . . , -8, -4, 0, 4, 8 ,. . .},
[1] 4 = {. . . , -7, -3, 1, 5, 9 ,. . .},
[2] 4 = {. . . , -6, -2, 2, 6, 10 ,. . .},
[3] 4 = {. . . , -5, -1, 3, 7, 1 1 ,. . .}.

Estas clases de congruencia son inconexas y cada entero está exactamente en una de ellas. En otra En palabras, como dice el Teorema 2 , estas clases de congruencia forman una partición. ....

Ahora proporcionamos un ejemplo de una partición del conjunto de todas las cadenas que surgen de una equivalencia relación en este conjunto.

EJEMPLO 15 Sea R3 la relación del Ejemplo 5. ¿Cuáles son los conjuntos en la partición del conjunto de todas las cadenas de bits? que surge de la relación R3 en el conjunto de todas las cadenas de bits? (Recuerde que s R3 t, donde syt son bits cadenas, si s = t o s y t son cadenas de bits con al menos tres bits que coinciden en sus primeros tres bits).

Solución: tenga en cuenta que cada cadena de bits de longitud inferior a tres es equivalente solo a sí misma. Por tanto, P "] R3 = {A}, [0] R3 = {OJ, [1] R3 = {I}, [00] R3 = {OO}, [01] R3 = {01}, [1O] R3 = {l0} y [1 1] R3 = {II}. Tenga en cuenta que cada cadena de bits de longitud tres o más es equivalente a una de las ocho cadenas de bits 000, 001, 010, 01 1, 100, 101, 1 10 y 1 1 1. Tenemos

[000] R3 = {OOO, 0000, 0001, 00000, 00001, 00010, 0001 1, . . .},

[001] R3 = {001, 0010, 001 1, 00100, 00101, 001 10, 001 1 1, . . .},

[01O] R3 = {01O, 0100, 0101, 01000, 01001, 01010, 0101 1, . . . },

[01 1] R3 = {OI l, 01 10, 01 1 1, 01 100, 01 101, 01 1 10, 01 1 1 1 ,. . .},

[100b3 = {100, 1000, 1001, 10000, 10001, 10010, 1001 1, . . .},

[101] R3 = {101, 1010, 101 1, 10100, 10101, 101 10, 101 1 1, . . .},

[1 10B3 = {1 1O, 1 100, 1 101, 1 1000, 1 1001, 1 1010, 1 101 1, . . .} y

[1 1 1] R3 = {l1 1, 1 1 10, 1 1 1 1, 1 1 100, 1 1 101, 1 1 1 10, 1 1 1 1 1 ,. . .}.

Estas 15 clases de equivalencia son disjuntas y cada cadena de bits está exactamente en una de ellas. Como El teorema 2 nos dice que estas clases de equivalencia dividen el conjunto de todas las cadenas de bits. ....

Ejercicios

1. ¿Cuáles de estas relaciones en {O, 1, 2, 3} son equivalencia ¿relaciones? Determinar las propiedades de una equivalencia re lación que los demás carecen.

a) {(O, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)}
b) {(O, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)}
c) {(O, 0), (1, 1), (I, 2), (2, I), (2, 2), (3, 3)}

Página 46

d) {(O, 0), (1, I), (I, 3), (2, 2), (2, 3), (3, I), (3, 2), (3, 3)}
e) {CO, 0), (0, I), (0, 2), (I, 0), (I, I), (I, 2), (2, 0), (2, 2), (3, 3)}

2. ¿Cuáles de estas relaciones en el conjunto de todas las personas son equiv relaciones de alencia? Determinar las propiedades de un equivalente relación de lence que los demás carecen.

a) {(a, b) I ayb tienen la misma edad}
b) {(a, b) yo ayb tengo los mismos padres}
c) {(a, b) yo ayb comparten un padre común}
d) {(a, b) yo ayb se han conocido}
e) {(a, b) I ayb hablan un idioma común}

3. ¿Cuál de estas relaciones en el conjunto de todas las funciones? de Z a Z son relaciones de equivalencia? Determina el propiedades de una relación de equivalencia que los demás carencia.

a) {(f, g) I 1 (1) = g (1)}
b) {(f, g) I 1 (0) = g (O) o 1 (1) = g (1)}
c) {(f, g) IL(x) - g (x) = I para todo x EZ}
d) {(f, g) I para algunos CEZ, para todo x E z, I (x)

g (x) = C}
e) {(f, g) I 1 (0) = gel) y 1 (1) = g (O)}

4. Definir tres relaciones de equivalencia en el conjunto de estudiantes. en su clase de matemática discreta diferente de la re lasciones discutidas en el texto. Determinar la equivalencia clases para cada una de estas relaciones de equivalencia.

5. Definir tres relaciones de equivalencia en el conjunto de edificios. en un campus universitario. Determinar las clases de equivalencia para cada una de estas relaciones de equivalencia.

6. Definir tres relaciones de equivalencia en el conjunto de clases. ofrecido en su escuela. Determinar las clases de equivalencia para cada una de estas relaciones de equivalencia.

7. Demuestre que la relación de equivalencia lógica en el conjunto de todas las proposiciones compuestas es una relación de equivalencia. ¿Cuáles son las clases de equivalencia de F y de T?

8. Sea R la relación en el conjunto de todos los conjuntos de números reales bers tales que S RT si y solo si S y T tienen el misma cardinalidad. Demuestre que R es una relación de equivalencia ción. ¿Cuáles son las clases de equivalencia de los conjuntos {O, I, 2} y Z?

9. Suponga que A es un conjunto no vacío y que I es una función que tiene A como su dominio. Sea R la relación sobre A que consiste de todos los pares ordenados (x, y) tales que I (x) = l (y).

a) Demuestre que R es una relación de equivalencia en A.
b) ¿Cuáles son las clases de equivalencia de R?

10. Suponga que A es un conjunto no vacío y R es una equivalencia relación en A. Demuestre que hay una función I con A como su dominio tal que (x, y) ER si y solo si I (x) = l (y).

11. Demuestre que la relación R que consta de todos los pares (x, y) tal que xey son cadenas de bits de tres o más que coinciden en sus primeros tres bits es una equivalencia re en el conjunto de todas las cadenas de bits de longitud tres o más.

12. Demuestre que la relación R que consta de todos los pares (x, y) tales que xey son cadenas de bits de longitud tres o más que de acuerdo, excepto quizás en sus primeros tres bits es un equivalente relación de lencia en el conjunto de todas las cadenas de bits de longitud tres o más.

13. Demuestre que la relación R que consta de todos los pares (x, y) tales que xey son cadenas de bits que concuerdan en su primera y tercera bits es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las cadenas de bits de longitud tres o más.

14. Sea R la relación que consta de todos los pares (x, y) tales que xey son cadenas de mayúsculas y minúsculas en inglés letras con la propiedad de que para cada entero positivo n, los n-ésimo caracteres en xey son la misma letra, ya sea mayúsculas o minúsculas. Demuestre que R es una equivalencia relación.

15. Sea R la relación en el conjunto de pares ordenados de enteros positivos tales que «a, b), (c, d» ER si y solo si a + d = b + c. Demuestre que R es una equivalencia relación.

16. Sea R la relación del conjunto de pares ordenados de pos enteros itivos tales que «a, b), (c, d» ER si y sólo si ad = bc. Muestre que R es una relación de equivalencia.

17. (Requiere cálculo)

a) Demuestre que la relación R en el conjunto de todos los diferenciables funciones de R a R que constan de todos los pares (f, g) tal que I '(x) = g' (x) para todos los números reales x es un relación de equivalencia.
b) Qué funciones están en la misma clase de equivalencia que la función I (x) = x 2 ?

18. (Requiere cálculo)

a) Sea n un número entero positivo. Demuestre que la relación R en el conjunto de todos los polinomios con coeffi- de valor real. clientes que constan de todos los pares (f, g) tales que I (n) (x) = g (n) (x) es una relación de equivalencia. [Aquí I (n) (x) es el n-ésima derivada de I (x).]
b) Qué funciones están en la misma clase de equivalencia que la función I (x) = x \ donde n = 3?

19. Sea R la relación en el conjunto de todas las URL (o anuncios web vestidos) tal que x R y si y solo si la página Web en x es igual que la página web en y. Demuestre que R es un relación de equivalencia.

20. Sea R la relación del conjunto de todas las personas que tienen visitó una página web en particular tal que x R y si y sólo si la persona x y la persona y han seguido el mismo conjunto de enlaces que comienzan en esta página web (que van de la página web a Página web hasta que dejen de usar la web). Demuestre que R es una relación de equivalencia.

En los ejercicios 21 a 23, determine si la relación con el Los gráficos dirigidos que se muestran es una relación de equivalencia.

21.

22.

Página 47

23.

39. a) ¿Cuál es la clase de equivalencia de (1, 2) con respecto a la relación de equivalencia en el ejercicio 15?
b) Dar una interpretación de las clases de equivalencia para la relación de equivalencia R en el ejercicio 15. [Sugerencia: observe la diferencia a - b correspondiente a

24. Determine si las relaciones representadas por estos
Las matrices zer ne son relaciones de equivalencia.

[i] [] $_b$ 1 0 1 [i] 0 0 0 1

a) b) c)

25. Demuestre que la relación R en el conjunto de todas las cadenas de bits como
eso s R t si y solo si syt contienen el mismo número
de 1 s es una relación de equivalencia.

26. ¿Cuáles son las clases de equivalencia de la relación de equivalencia
ciones en el ejercicio I?

27. ¿Cuáles son las clases de equivalencia de la equivalencia
relaciones en el ejercicio 2?

28. ¿Cuáles son las clases de equivalencia de la relación de equivalencia
ciones en el ejercicio 3?

29. ¿Cuál es la clase de equivalencia de la cadena de bits 01 1 para el
relación de equivalencia en el ejercicio 25?

30. ¿Cuáles son las clases de equivalencia de estas cadenas de bits para
la relación de equivalencia en el ejercicio II?
a) 010 b) 101 1
c) 1 1 1 1 1 d) 01010101

3 1. ¿Cuáles son las clases de equivalencia de las cadenas de bits en Ex
ercise 30 para la relación de equivalencia del ejercicio II?

32. ¿Cuáles son las clases de equivalencia de las cadenas de bits en
Ejercicio 30 para la relación de equivalencia del ejercicio
12?

33. ¿Cuáles son las clases de equivalencia de las cadenas de bits en Ex
Ejercicio 30 para la relación de equivalencia R4 del ejemplo 5
en el conjunto de todas las cadenas de bits? (Recuerde que las cadenas de bits sy
t son equivalentes bajo R4 si y solo si son iguales o
Ambos tienen al menos cuatro bits de longitud y están de acuerdo en su primer
cuatro bits.)

34. ¿Cuáles son las clases de equivalencia de las cadenas de bits en Ex
Ejercicio 30 para la relación de equivalencia Rs del Ejemplo 5
en el conjunto de todas las cadenas de bits? (Recuerde que las cadenas de bits sy
t son equivalentes bajo Rs si y solo si son iguales o
Ambos tienen al menos cinco bits de longitud y están de acuerdo en su primer
cinco bits.)

35. ¿Cuál es la clase de congruencia [nJs (es decir, la equivalencia
clase de n con respecto a la congruencia módulo 5) cuando n es
a) 2? b) 3?
c) 6? d) -3?

36. ¿Cuál es la clase de congruencia [4] m cuando m es
a) 2? b) 3?
c) 6? d) 8?

37. Dé una descripción de cada una de las clases de congruencia mod
ulo 6.

38. ¿Cuál es la clase de equivalencia de las cadenas con respecto
a la relación de equivalencia en el ejercicio 14?
a) No b) si
c) Ayuda

(a, b).]

40. a) ¿Cuál es la clase de equivalencia de (1, 2) con respecto
a la relación de equivalencia en el ejercicio 16?
b) Dar una interpretación de las clases de equivalencia para
la relación de equivalencia R en el ejercicio 16. [Sugerencia: observe
en la razón alb correspondiente a (a, b).]

41. ¿Cuáles de estas colecciones de subconjuntos son particiones de
{I, 2, 3, 4, 5, 6}?
a) {I, 2}, {2, 3, 4}, {4, 5, 6} b) {l}, {2, 3, 6}, {4}, {5}
c) {2, 4, 6}, {I, 3, 5} d) {I, 4, 5}, {2, 6}

42. ¿Cuáles de estas colecciones de subconjuntos son particiones de
{-3, -2, - 1, 0, 1, 2, 3}?
a) {-3, - 1, 1, 3}, {-2, 0, 2}
b) {-3, -2, - 1, O}, {O, 1, 2, 3}
c) {-3, 3}, {-2, 2}, {- I, I}, (DO
d) {-3, -2, 2, 3}, {- I, l}

43. ¿Cuáles de estas colecciones de subconjuntos son particiones en el
conjunto de cadenas de bits de longitud 8?
a) el conjunto de cadenas de bits que comienzan con 1, el conjunto de bits
cadenas que comienzan con 00 y el conjunto de cadenas de bits
que comienzan con 01
b) el conjunto de cadenas de bits que contienen la cadena 00, el conjunto
de cadenas de bits que contienen la cadena 01, el conjunto de bits
cadenas que contienen la cadena 10 y el conjunto de bits
cadenas que contienen la cadena 1 1
c) el conjunto de cadenas de bits que terminan en 00, el conjunto de bits
cadenas que terminan con 01, el conjunto de cadenas de bits que terminan
con 10, y el conjunto de cadenas de bits que terminan con 1 1
d) el conjunto de cadenas de bits que terminan en I ll, el conjunto de bits
cadenas que terminan con 0 1 1, y el conjunto de cadenas de bits que
terminar con 00
e) el conjunto de cadenas de bits que tienen 3k unos, donde k es un
entero no negativo; el conjunto de cadenas de bits que contienen
3k + l unos, donde k es un número entero no negativo; y el
conjunto de cadenas de bits que contienen 3k + 2 unos, donde k es
un entero no negativo

44. ¿Cuáles de estas colecciones de subconjuntos son particiones del
conjunto de enteros?
a) el conjunto de enteros pares y el conjunto de enteros impares
b) el conjunto de enteros positivos y el conjunto de negativos
enteros
c) el conjunto de enteros divisible por 3, el conjunto de enteros
dejando un resto de 1 cuando se divide por 3, y el
conjunto de enteros dejando un resto de 2 cuando se divide
por 3
d) el conjunto de enteros menores que - 100, el conjunto de enteros
con valor absoluto no superior a 100, y el conjunto de
enteros mayores que 100
e) el conjunto de enteros no divisibles por 3, el conjunto de pares
enteros y el conjunto de enteros que dejan un resto
de 3 cuando se divide por 6

Página 48

8-47

45. ¿Cuáles de estas son particiones del conjunto Z x Z de ordenadas
pares de enteros?
a) el conjunto de pares (x, y), donde xoy es impar; el conjunto de
pares (x, y), donde x es par; y el conjunto de pares (x, y),
donde y es par
b) el conjunto de pares (x, y), donde tanto x como y son impares;
el conjunto de pares (x, y), donde exactamente uno de x e y es
impar; y el conjunto de pares (x, y), donde tanto x como y son
incluso
c) el conjunto de pares (x, y), donde x es positivo; el conjunto de
pares (x, y), donde y es positivo; y el conjunto de parejas
(x, y), donde tanto x como y son negativos
d) el conjunto de pares (x, y), donde 3 I x y 3 I y; el conjunto de
pares (x, y), donde 3 I x y 3 yy; el conjunto de pares
(x, y), donde 3 yx y 3 I y; y el conjunto de parejas
(x, y), donde 3 yx y 3 yy
e) el conjunto de pares (x, y), donde x > 0 e y > 0; la

la partición que consta de subconjuntos de personas que viven en el
mismo estado.

51. Muestre que la partición del conjunto de cadenas de bits de longitud 16
. formado por clases de equivalencia de cadenas de bits que coinciden
los últimos ocho bits son un refinamiento de la partición formada
de las clases de equivalencia de cadenas de bits que coinciden
los últimos cuatro bits.

En los Ejercicios 52 y 53, Rn se refiere a la familia de equivalencia
relaciones definidas en el Ejemplo 5. Recuerde que s Rn t, donde sy
t son dos cadenas si s = t o s y t son cadenas con al menos n
personajes que coinciden en sus primeros n caracteres.

52. Muestre que la partición del conjunto de todas las cadenas de bits formadas
por clases de equivalencia de cadenas de bits con respecto a la
La relación de equivalencia R4 es un refinamiento de la partición.
formado por clases de equivalencia de cadenas de bits con respecto
a la relación de equivalencia R3 •

53. Muestre que la partición del conjunto de todos los identificadores en C

conjunto de pares (x, y), donde x > 0 e y :'s 0; el conjunto de pares (x, y), donde x :'s 0 e y > 0; y el conjunto de pares (x, y), donde x :'s 0 e y :' s 0

t) el conjunto de pares (x, y), donde x = 1 = 0 e y = 1 = 0; el conjunto de pares (x, y), donde x = 0 e y = 1 = 0; y el conjunto de pares (x, y), donde x = 1 = 0 e y = 0

46. ¿Cuáles de estas son particiones del conjunto de números reales?

a) los números reales negativos, {O}, el real positivo números

b) el conjunto de números irracionales, el conjunto de números racionales números

c) el conjunto de intervalos [k, k + 1], k =. . . , -2, -1, 0, 1, 2,. . .

d) el conjunto de intervalos (k, k + I), k =. . . , -2, -1, 0, 1, 2,. . .

e) el conjunto de intervalos (k, k + I], k =... , -2, -1, 0, 1, 2,. . .

t) los conjuntos { x + n I n E Z} para todo x E [0, I)

47. Enumere los pares ordenados en las relaciones de equivalencia pro producido por estas particiones de {O, 1, 2, 3, 4, 5}.

a) {DO, {I, 2}, {3, 4, 5}
b) {O, I}, {2, 3}, {4, 5}
c) {O, I, 2}, {3, 4, 5}
d) {O}, {I}, {2}, {3}, {4}, {5}

48. Enumere los pares ordenados en las relaciones de equivalencia pro producido por estas particiones de {a, b, c, d, e, f, g}.

a) {a, b}, {c, d}, {e, f, g}
b) {a}, {b}, {c, d}, {e, f} '{g}
c) {a, b, c, d}, {e, f, g}
d) {a, c, e, g}, {b, d}, {f}

Una partición PI se denomina refinamiento de la partición Pz si cada conjunto en PI es un subconjunto de uno de los conjuntos en Pz.

49. Demuestre que la partición se formó a partir de clases de congruencia módulo 6 es un refinamiento de la partición formada a partir de clases de congruencia módulo 3.

50. Muestre que la partición del conjunto de personas que viven en el Estados Unidos compuesto por subconjuntos de personas que viven en mismo condado (o parroquia) y mismo estado es un refinamiento de formado por las clases de equivalencia de identificadores con re

El espectro de la relación de equivalencia R31 es un refinamiento de la partición formada por clases de equivalencia de identificadores con respecto a la relación de equivalencia R 8. (Compiladores de Los "antiguos" C consideran los identificadores iguales cuando sus nombres coinciden en sus primeros ocho caracteres, mientras que los compiladores en estándar C considera los identificadores iguales cuando sus nombres están de acuerdo en sus primeros 31 caracteres).

54. Suponga que RI y Rz son relaciones de equivalencia en un conjunto A. Sean PI y Pz las particiones que corresponden a RI y R z, respectivamente. Muestre que RIR z si y solo si PI es un refinamiento de Pz.

55. Encuentre la relación de equivalencia más pequeña en el conjunto {a, b, c, d, e} que contiene la relación {(a, b), (a, c), (d, e)}.

56. Suponga que RI y Rz son relaciones de equivalencia en el conjunto S. Determine si cada una de estas combinaciones de RI y Rz deben ser una relación de equivalencia.

a) RI U R2 b) RI n R2 c) RI tB R2

57. Considere la relación de equivalencia del ejemplo 3, es decir, R = {(x, y) I x - y es un número entero}.

a) ¿Cuál es la clase de equivalencia de I para esta equivalencia? ¿relación?

b) ¿Cuál es la clase de equivalencia de 112 para esta equivalencia? relación lence?

* 58. Cada cuenta de una pulsera con tres cuentas es roja, blanco o azul, como se ilustra en la figura mostrada.

Bead I
rojo

Azul 30 Blanco

Perla Perla 2

Defina la relación R entre brazaletes como: (BI, B2), donde BI y B2 son brazaletes, pertenece a R si y solo

Página 49

si B2 se puede obtener de B1 girándolo o girándolo y luego reflejándolo.

a) Demuestre que R es una relación de equivalencia.

b) ¿Cuáles son las clases de equivalencia de R?

* 59. Sea R la relación en el conjunto de todos los colorantes del Tablero de ajedrez de 2 x 2 donde cada uno de los cuatro cuadrados es col rojo o azul de modo que (C 1, C 2), donde el y C 2 son tableros de ajedrez de 2 x 2 con cada uno de sus cuatro cuadrados de color azul o rojo, pertenece a R si y solo si C 2 puede ser obtenido de C 1 ya sea girando el tablero de ajedrez o girándolo y luego reflejándolo.

a) Demuestre que R es una relación de equivalencia.

b) ¿Cuáles son las clases de equivalencia de R?

60. a) Sea R la relación del conjunto de funciones de Z + a Z + tal que (j, g) pertenece a R si y solo si f es 8 (g) (consulte la Sección 3.2). Demuestre que R es una equivalencia relación.

b) Describa la clase de equivalencia que contiene fen) = n2 para la relación de equivalencia del inciso a).

61. Determinar el número de relaciones de equivalencia diferentes en un conjunto con tres elementos enumerándolos.

62. Determinar el número de relaciones de equivalencia diferentes en un conjunto con cuatro elementos enumerándolos.

* 63. ¿Obtenemos necesariamente una relación de equivalencia cuando forman el cierre transitivo del cierre simétrico del cierre reflexivo de una relación?

* 64. ¿Obtenemos necesariamente una relación de equivalencia cuando forman el cierre simétrico del cierre reflexivo del cierre transitivo de una relación?

65. Suponga que usamos el teorema 2 para formar una partición P a partir de una relación de equivalencia R. ¿Cuál es la relación de equivalencia R 'que resulta si usamos el Teorema 2 nuevamente para formar una relación de equivalencia de P?

66. Suponga que usamos el teorema 2 para formar una relación de equivalencia ción R de una partición P. ¿Cuál es la partición P 'que resultados si usamos el Teorema 2 nuevamente para formar una partición de R?

67. Diseñe un algoritmo para encontrar la equivalencia más pequeña entre lación que contiene una relación dada.

* 68. Sea pen) denota el número de equivalencias diferentes relaciones en un conjunto con n elementos (y por el teorema 2 el número de particiones de un conjunto con n elementos). Demuestre que p (n) satisface la relación de recurrencia p (n) = L: 6 C (n - I, j) p (n - j - I) y la condición inicial p (O) = I. (Nota: Los números p (n) se llaman Bell números según el matemático estadounidense E. T. Bell.)

69. Usa el ejercicio 68 para hallar el número de equivalentes diferentes relaciones de alencia en un conjunto con n elementos, donde n es un entero positivo que no exceda de 10.

8.6 Pedidos parciales

Introducción

A menudo usamos relaciones para ordenar algunos o todos los elementos de los conjuntos. Por ejemplo, ordenamos palabras usando la relación que contiene pares de palabras (x, y), donde x viene antes de y en el diccionario. Programamos proyectos utilizando la relación que consiste de pares (x, y), donde x e y son las tareas de una proyecto tal que x debe completarse antes de que comience y. Ordenamos el conjunto de enteros usando el relación que contiene los pares (x, y), donde x es menor que y. Cuando sumamos todos los pares de forma (x, x) a estas relaciones, obtenemos una relación que es reflexiva, antimétrica y transitiva. Estas son propiedades que caracterizan las relaciones utilizadas para ordenar los elementos de los conjuntos.

Enlaces

DEFINICIÓN 1 Una relación R en un conjunto S se llama una **ordenación parcial** o **orden parcial** si es reflexiva, un t isym métrica y transitiva. Un conjunto S tog et él R con un parcial de pedido R se llama un **parcialmente ordenado set**, o **poset**, y se denota por (S, R). Los miembros de S se denominan **elementos** del poset.

Damos ejemplos de conjuntos po en los ejemplos 1-3.

EJEMPLO 1 Muestre que la relación "mayor o igual que" C :: :) es un ordenamiento parcial en el conjunto de enteros.

Extra Ejemplos

Solución: Debido a que a ::: a para cada entero a, ::: es reflexivo. Si a ::: byb ::: a, entonces a = b. Por tanto, ::: es antisimétrico. Finalmente, ::: es transitivo porque a ::: by b ::: c implican que un ::: c. De ello se deduce que ::: es un ordenamiento parcial en el conjunto de enteros y (Z, :: :) ES un

Página 50

EJEMPLO 2 La relación de divisibilidad 1 es un ordenamiento parcial en el conjunto de enteros positivos, porque es reflexiva, antisimétrica y transitiva, como se mostró en la Sección 8.1. Vemos que (Z +, I) es un poset. Recuerde que (Z + denota el conjunto de enteros positivos). ...

EJEMPLO 3 Demuestre que la relación de inclusión es un ordenamiento parcial en el conjunto de potencias de un conjunto S.

Solución: porque AA siempre que A es un subconjunto de S, es reflexivo. Es anti simétrico porque AB y BA implican que A = B. Finalmente, es transitivo, porque AB y B C implican que A C. Por tanto, es un ordenamiento parcial en P (S), y (P (S),) es un conjunto po. ...

El ejemplo 4 ilustra una relación que no es un ordenamiento parcial.

EJEMPLO 4 Sea R la relación en el conjunto de personas de tal manera que x Ry si x e y son las personas y x es mayor que y. Muestre que R no es un ordenamiento parcial.

Extra EJEMPLOS ""

Solución: tenga en cuenta que R es antimétrico porque si una persona x es mayor que una persona y, entonces y no es mayor que x. Es decir, si x R y, entonces y R x. La relación R es transitiva porque si la persona x es mayor que la persona y e y es mayor que la persona z, entonces x es mayor que z. Es decir, si x R y y y R z, luego x R z. Sin embargo, R no es reflexivo, porque ninguna persona es mayor que él o ella. Es decir, x R x para todas las personas x. De ello se deduce que R no es un ordenamiento parcial. ...

En diferentes conjuntos po símbolos diferentes, tales como , , y I, se utilizan para una ordenación parcial. Sin embargo, necesitamos un símbolo que podamos usar cuando discutimos la relación de ordenamiento en un poset. Habitualmente, la notación a b se usa para denotar que (a, b) ER en un poset arbitrario (S, R). Esta notación se utiliza porque la relación "menor o igual a" en el conjunto de valores reales números es el ejemplo más familiar de un orden parcial y el símbolo es similar al símbolo. (Tenga en cuenta que el símbolo se usa para denotar la relación en *cualquier* poset, no solo el "menos que o es igual a "relación.) La notación a -< b denota que a b, pero a = 1 = b. Además, decimos " a es menor que b " o " b es mayor que a " si a -< b.

Cuando una y b son elementos de la poset (S,), no es necesario que sea un b o b a. Por ejemplo, en (P (Z),), {l, 2} no está relacionado con {I, 3}, y viceversa, porque ninguno el conjunto está contenido dentro del otro. De manera similar, en (Z + , I), 2 no está relacionado con 3 y 3 no está relacionado con 2, porque 2 [3 y 3 [2. Esto conduce a la Definición 2.

DEFINICIÓN 2 Los elementos a y b Poset OFA (S,) se denominan comparable si cualquiera de una b o r b a. Cuando un y b son elementos de S de tal manera que ni un B ni b a, un y b son llamados incomparable.

EJEMPLO 5 En el poset (Z +, I), ¿son comparables los números enteros 3 y 9 ? ¿Son comparables el 5 y el 7?

Solución: Los números enteros 3 y 9 son comparables, porque 3 1 9. Los números enteros 5 y 7 son incom parábola, porque 5 [7 y 7 [5. ...

El adjetivo "parcial" se utiliza para describir ordenaciones parciales porque los pares de elementos pueden sea incomparable. Cuando cada dos elementos del conjunto son comparables, la relación se llama orden total.

Página 51

DEFINICIÓN 3 Si (S,) es un conjunto y cada dos elementos de S son comparables, S se llama un conjunto totalmente ordenado o conjunto ordenado linealmente, y se denomina orden total o orden lineal. Un conjunto totalmente ordenado también se llama cadena.

Ejemplo 6 El poset (Z, ::::) está totalmente ordenado, porque un :::: b o b :::: una cada vez una y b son números enteros. - <III

EJEMPLO 7 El poset (Z +, I) no está totalmente ordenado porque contiene elementos que son incomparables, como como 5 y 7. - <III

En el Capítulo 4 notamos que (Z +, ::: :) está bien ordenado, donde :::: es el habitual "menor que o igual a "relación. Ahora definimos conjuntos bien ordenados.

D EFINITI 0 N 4 (S,) es un conjunto bien ordenado si es un poset tal que es un orden total y cada no vacío subconjunto de S tiene un elemento mínimo.

EJEMPLO 8 El conjunto de pares ordenados de enteros positivos, Z + x Z +, con (ai, a2) (bl, b2) si al < bl, o si al = bl y a2 :::: b2 (el orden lexicográfico), es un conjunto bien ordenado. La verificación de esto se deja como ejercicio al final de esta sección. El conjunto Z, con el habitual :::: ordenar, no está bien ordenado porque el conjunto de enteros negativos, que es un subconjunto de Z, no tiene por lo menos elemento. - <III

En la sección 4.3 mostramos cómo utilizar el principio de inducción bien ordenada (llamado inducción generalizada) para probar resultados sobre un conjunto bien ordenado. Ahora declaramos y demostramos que esta técnica de prueba es válida.

TEOREMA 1 EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN BIEN ORDENADA Suponga que S es un pozo conjunto ordenado. Entonces P (x) es cierto para todos los XES, si

PASO INDUCTIVO: Para cada y ES , si P (x) es verdadero para todos los XES con x - < y, entonces P (y) es cierto.

Demostración: Supongamos que no es el caso de que P (x) sea verdadero para todo XE S. Entonces hay un elemento y ES tal que P (y) es falso. En consecuencia, el conjunto A = {x ESI P (x) es falso} no está vacío. Porque S está bien ordenado, A tiene un elemento mínimo a. Por la elección de a como elemento mínimo de A, sabemos que P (x) es cierto para todos los XES con x - < a. Esto implica que el paso inductivo P (a) es cierto. Esta La contradicción muestra que P (x) debe ser verdadera para todo XE S. <l

Observación: No necesitamos un paso básico en una prueba que utilice el principio de inducción bien ordenada. porque si Xo es el elemento menor de un conjunto bien ordenado, el paso inductivo nos dice que P (xo) es verdad. Esto se sigue porque no hay elementos XES con x - < xo, entonces sabemos (usando un prueba vacía) de que P (x) es verdadera para todos los XES con x - < xo.

El principio de inducción bien ordenada es una técnica versátil para demostrar resultados sobre

Conjuntos bien ordenados. Incluso cuando es posible utilizar la inducción matemática para el conjunto de valores positivos enteros para demostrar un teorema, puede ser más sencillo utilizar el principio de inducción bien ordenada, como

vimos en los ejemplos 5 y 6 en la sección 4.2, donde probamos un resultado sobre el conjunto bien ordenado (N x N,) donde es el orden lexicográfico en N x N.

Orden lexicográfico

Las palabras de un diccionario se enumeran en orden alfabético o lexicográfico, que se basa en ordenación de las letras en el alfabeto. Este es un caso especial de un pedido de cuerdas en un conjunto. construido a partir de un pedido parcial en el set. Mostraremos cómo funciona esta construcción en cualquier poset.

Primero, mostraremos cómo construir un ordenamiento parcial sobre el producto cartesiano de dos posets, (AI, I) y (A2, 2). El orden lexicográfico en AI x A2 se define especificando que un par es menor que un segundo par si la primera entrada del primer par es menor que (en A d el primera entrada del segundo par, o si las primeras entradas son iguales, pero la segunda entrada de este par es menos que (en A2) la segunda entrada del segundo par. En otras palabras, (aI, a2) es menor que (bl, b2), es decir,

ya sea si al - <I bl o si al = bl y a2 - <2 b2.

Obtenemos un ordenamiento parcial agregando igualdad al ordenamiento - < en AI x A2. los la verificación de esto se deja como ejercicio.

EJEMPLO 9 Determine si (3, 5) - < (4, 8), si (3, 8) - < (4, 5) y si (4, 9) - < (4, 1 1) en el poset (Z x Z,) , donde es el ordenamiento lexicográfico construido a partir de la usual s: relación en Z.

Solución: Como 3 < 4, se sigue que (3, 5) - < (4 , 8) y que (3, 8) - < (4, 5). Tenemos (4 , 9) - < (4, 1 1), porque las primeras entradas de (4, 9) y (4, 1 1) son iguales pero 9 < 11. ....

En la Figura 1 los pares ordenados en Z + x Z + que son menores que (3, 4) se resaltan.

Un orden lexicográfico se puede definir sobre el producto cartesiano de n conjuntos po (AI, I) , (A2, 2),. . . , (An, n) . Definir la ordenación parcial en AI x A2 x . . . x An por

si al - <I b), o si hay un entero i > 0 tal que al = bl,. . . , ai = bi y ai + 1 - <i + 1 bi + l.
En otras palabras, una n-tupla es menor que una segunda n-tupla si la entrada de la primera n-tupla en el primera posición donde las dos n-tuplas no están de acuerdo es menor que la entrada en esa posición en la segunda n-tupla.

EJEMPLO 10 Observe que (l, 2, 3, 5) - < (l, 2, 4, 3), porque las entradas en las dos primeras posiciones de estas 4 tuplas de acuerdo, pero en la tercera posición la entrada en la primera 4-tupla, 3, es menor que en la segunda 4-tupla, 4. (Aquí el orden en 4-tuplas es el orden lexicográfico que proviene del relación habitual "menor o igual que" en el conjunto de números enteros). ....

Ahora podemos definir el orden lexicográfico de cadenas. Considere las cuerdas al a2. . . soy y bl b2. . . bn en un conjunto S. parcialmente ordenado. Suponga que estas cadenas no son iguales. Sea t el mínimo de my n. La definición de ordenamiento lexicográfico es que la cadena al a2. . . soy menor que

. . . .

(1, 7)	(2, 7)	(3, 7)	(4, 7)	(5, 7)	(6, 7)	(7, 7)
(dieciséis)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)	(7, 6)
(15)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(sesenta y cinco)	(7, 5)
(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)	(7, 4)
(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)	(7, 3)
(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)	(7, 2)
(Yo, 1)	(2, l)	(3, l)	(4, 1)	(5, l)	(6, 1)	(7, 1)

FIGURA 1 Los pares ordenados de menos de (3, 4) en Orden lexicográfico.

bl b2. . . bn si y solo si

(aI, a2, '", en} -« bl, b2,..., btl, o

(aI, a2, · · ·, at) = (bl, b2,..., btl y m < n,

donde -< en esta desigualdad representa el orden lexicográfico de st. En otras palabras, para de termine el orden de dos cadenas diferentes, la cadena más larga se trunca a la longitud de la cadena más corta, es decir, t = min (m, n} términos. Luego, las t-tuplas formadas por los primeros t términos de cada cadena se compara usando el orden lexicográfico en st. Una cuerda es menos que otra cadena si la t-tupla correspondiente a la primera cadena es menor que la t-tupla de la segunda cadena, o si estas dos t-tuplas son iguales, pero la segunda cadena es más larga. La verificación de que esto es un ordenamiento parcial se deja como ejercicio para el lector.

EJEMPLO 11 Considere el conjunto de cadenas de letras minúsculas en inglés. Usando el orden de letras en el alfabeto, se puede construir un ordenamiento lexicográfico en el conjunto de cadenas. Una cuerda es menor que una segunda cadena si la letra de la primera cadena en la primera posición donde las cadenas difieren viene antes de la letra en la segunda cadena en esta posición, o si la primera cadena y la segunda cadena están de acuerdo en todas las posiciones, pero la segunda cadena tiene más letras. Este orden es el mismo que el utilizado en diccionarios. Por ejemplo,

discreto -< discreto,

porque estas cadenas difieren primero en la séptima posición, ye -< t. También,

discreto -< discreción,

porque las primeras ocho letras concuerdan, pero la segunda cadena es más larga. Además,

discreto -< discreción,

porque

discreto -< discreti.

4 4

3

2

1

(segundo) (C)

FIGURA 2 Construcción del diagrama de Hasse para ({I, 2, 3, 4},).

Diagramas de Hasse

Muchas aristas en el grafo dirigido para un poset finito no tienen que mostrarse porque deben ser presente. Por ejemplo, considere la gráfica dirigida para el orden parcial {(a, b) I a S b} en el set {l, 2, 3, 4}, que se muestra en la Figura 2 (a). Debido a que esta relación es un ordenamiento parcial, es reflexiva, y su grafo dirigido tiene bucles en todos los vértices. En consecuencia, no tenemos que mostrar estos bucles porque deben estar presentes; en la Figura 2 (b) no se muestran los bucles. Porque un pedido parcial es transitivo, no tenemos que mostrar esos bordes que deben estar presentes debido a la transitividad. por Por ejemplo, en la Figura 2 (c) los bordes (1, 3), (1, 4) y (2, 4) no se muestran porque deben ser presente. Si asumimos que todas las aristas apuntan "hacia arriba" (como se dibujan en la figura), no tiene que mostrar las direcciones de los bordes; La figura 2 (c) no muestra direcciones.

En general, podemos representar un ordenamiento parcial en un conjunto finito usando este procedimiento: Comience con el gráfico dirigido para esta relación. Como un ordenamiento parcial es reflexivo, hay un bucle en cada vértice. Elimina estos bucles. Quite todos los bordes que deben estar en el orden parcial porque de la presencia de otras aristas y transitividad. Por ejemplo, si (a, b) y (b, c) están en el Al hacer el pedido, retire el borde (a, c), porque también debe estar presente. Además, si (c, d) también es en el ordenamiento parcial, retire el borde (a, d), porque debe estar presente también. Finalmente, arregla cada borde de modo que su vértice inicial esté por debajo de su vértice terminal (como está dibujado en papel). Eliminar todas las flechas en los bordes dirigidos, porque todos los bordes apuntan "hacia arriba" hacia su terminal vértice. (Los bordes de la izquierda corresponden a pares en la relación de cobertura del poset. Ver el preámbulo al ejercicio 28.)

Estos pasos están bien definidos y solo es necesario realizar un número finito de pasos para un poset finito. Cuando se han realizado todos los pasos, el diagrama resultante contiene suficientes información para encontrar el pedido parcial. Este diagrama se llama diagrama de Hasse y recibe su nombre el matemático alemán del siglo XX Helmut Hasse.

Enlaces

HELMUT HASSE (1898-1 979) Helmut Hasse nació en Kassel, Alemania. Sirvió en el alemán marina después de la escuela secundaria. Inició sus estudios universitarios en la Universidad de Göttingen en 1918, pasando en 1920 a Universidad de Marburg para estudiar con el teórico de números Kurt Hensel. Durante este tiempo, Hasse hizo fundamental Contribuciones a la teoría algebraica de números. Se convirtió en el sucesor de Hensel en Marburg y luego se convirtió en director del famoso instituto de matemáticas de Gotinga en 1934, y ocupó un puesto en la Universidad de Hamburgo en 1950. Hasse se desempeñó durante 50 años como editor de Crelle s Journal, un famoso periódico alemán de matemáticas, asumiendo el control . el trabajo de editor en jefe en 1936 cuando los nazis obligaron a Hensel a dimitir. Durante la Segunda Guerra Mundial, Hasse trabajó en investigación en matemáticas aplicadas para la marina alemana. Se destacó por la claridad y el estilo personal de sus conferencias. y se dedicó tanto a la teoría de números como a sus alumnos. (Hasse ha sido controvertido por sus conexiones con el partido nazi. Las investigaciones han demostrado que era un fuerte nacionalista alemán, pero no un nazi ferviente).

Página 55

8 12

4 6

2 3

(una) (segundo) (C)

FIGURA 3 Construcción del diagrama de Hasse de ({I, 2, 3, 4, 6, 8, 12}, I).

EJEMPLO 12

Dibuja el diagrama de Hasse que representa el orden parcial {(a, b) 1 a divide b} en {I, 2, 3, 4, 6, 8, 12}.

Solución: comience con el dígrafo para este orden parcial, como se muestra en la Figura 3 (a). Eliminar todo bucles, como se muestra en la Figura 3 (b). Luego elimine todos los bordes implicados por la propiedad transitiva. Estos son (1, 4), (1, 6), (1, 8), (1, 12), (2, 8), (2, 12) y (3, 12). Organizar todos los bordes para señalar hacia arriba y elimine todas las flechas para obtener el diagrama de Hasse. El diagrama de Hasse resultante es mostrado en la Figura 3 (c).

EJEMPLO 13 Dibuje el diagrama de Hasse para el ordenamiento parcial {(A, B) 1 A B} en el conjunto de potencia P (S) donde S = {a, b, c}.

Solución: El diagrama de Hasse para este ordenamiento parcial se obtiene del dígrafo asociado eliminando todos los bucles y todos los bordes que se producen por la transitividad, a saber, (0, {a, b}), (0, {a, c}), (0, {b, cD, (0, {a, b, cD, ({a}, {a, b, cD, ({b}, {a, b, c}) y ({c}, {a, b, c}). Finalmente todos los bordes apuntan hacia arriba y las flechas se eliminan. El diagrama de Hasse resultante se ilustra en Figura 4.

Elementos máximos y mínimos

Los elementos de conjuntos po que tienen ciertas propiedades extremas son importantes para muchas aplicaciones. Un elemento de un conjunto po se llama máximo si no es menor que cualquier elemento del conjunto po. Es decir, a es máxima en el poset (S, = :; <) si no hay b E S tal que a -< b. Del mismo modo, un elemento de un poset se llama mínimo si no es mayor que cualquier elemento del po set. Es decir, a es mínimo si no hay ningún elemento b E S tal que b -< a. Los elementos máximos y mínimos son fáciles de detectar usando un diagrama de Hasse. Son los elementos "superior" e "inferior" del diagrama.

EJEMPLO 14 ¿Qué elementos del conjunto po ({2, 4, 5, 10, 12, 20, 25}, I) son máximos y cuáles son mínimos?

Solución: El diagrama de Hasse en la Figura 5 para este conjunto muestra que los elementos máximos son 12, 20 y 25, y los elementos mínimos son 2 y 5. Como muestra este ejemplo, un poset puede tener más de un elemento máximo y más de un elemento mínimo.

Página 56

(a B C)

{a, c} (antes de Cristo)

{una } (C)

o

FIGURA 4 El diagrama de Hasse de (P ({a, b, c}),).

12 20

4 25

2 5

FIGURA 5 El Hasse Diagrama de un conjunto Po.

A veces hay un elemento en un poset que es mayor que cualquier otro elemento. Tal elemento se llama el elemento más grande. Es decir, a es el elemento más grande del poset (S,) si b a para todo b E S. El elemento más grande es único cuando existe [ver Ejercicio 40 (a) al final de esta sección]. Del mismo modo, un elemento se denomina elemento mínimo si es menor que todos los demás. elementos en el conjunto po. Es decir, a es el elemento menor de (S,) si a b para todo b E S. El menor el elemento es único cuando existe [consulte el ejercicio 40 (b) al final de la sección].

EJEMPLO 15 Determine si los conjuntos po representados por cada uno de los diagramas de Hasse en la Figura 6 tienen elemento mayor y elemento menor.

Solución: El elemento mínimo del conjunto po con el diagrama de Hasse (a) es a. Este poset no tiene mayor elemento. El poset con diagrama de Hasse (b) no tiene ni un elemento menor ni mayor. El poset con el diagrama de Hasse (c) no tiene ningún elemento mínimo. Su mayor elemento es d. El poset con Hasse diagrama (d) tiene menos elemento de un mejor y más elemento d. ....

EJEMPLO 16 Sea S un conjunto. Determinar si hay un elemento mayor y un elemento menor en el conjunto de po (P (S),).

Solución: El elemento mínimo es el conjunto vacío, porque 0 T para cualquier subconjunto T de S. El conjunto S es el elemento más grande en este conjunto, porque T S siempre que T es un subconjunto de S. ....

EJEMPLO 17 ¿Hay un elemento mayor y un elemento mínimo en el poset (Z +, I)?

Solución: El número entero 1 es el elemento mínimo porque l en siempre que n es un número entero positivo. Porque no hay un número entero que sea divisible por todos los números enteros positivos, no hay ningún elemento ~~m~~ayor.

(una) (segundo) (C) (re)

FIGURA 6 Diagramas de Hasse de cuatro Posets.

Página 57

A veces es posible encontrar un elemento que sea mayor o igual a todos los elementos en un subconjunto A de un conjunto po (S, = :; <). Si u es un elemento de S tal que a = :; <u para todos los elementos a E A, entonces u se llama un límite superior de A. Asimismo, puede haber un elemento menor o igual a todos los elementos en A. Si I es un elemento de S tal que I = :; <a para todos los elementos a E A, entonces I es llamado límite inferior de A.

EJEMPLO 18 Encuentre los límites superior e inferior de los subconjuntos {a, b, c}, {j, h} y {a, c, d, f} en el poset con el diagrama de Hasse que se muestra en la Figura 7.

h

j f

gramo

mi

re

c

segundo

una

Solución: Los límites superiores de {a, b, c} son e, J, j y h, y su único límite inferior es a. Ahí no son límites superiores de {j, h} , y sus límites inferiores son a, b, c, d, e y J. Los límites superiores de {a, c, d, J } son J, h y j, y su límite inferior es a. <III

El elemento x se llama el límite superior mínimo del subconjunto A si x es un límite superior que es menor que cualquier otro límite superior de A. Porque solo hay uno de esos elementos, si existe, tiene sentido llamar a este elemento el mínimo límite superior [véase el ejercicio 42 (a) al final de este sección]. Es decir, x es el límite superior mínimo de A si a = :; < x siempre que a E A, y x = :; < z siempre z es un límite superior de A. De manera similar, el elemento y se llama el límite inferior más grande de A si y es un límite inferior de A y z = :; < y siempre que z es un límite inferior de A. El límite inferior mayor de A es único si existe [consulte el ejercicio 42 (b) al final de esta sección]. El mayor límite inferior y el límite superior mínimo de un subconjunto A se indican mediante glb (A) y lub (A), respectivamente.

FIGURA 7 El Diagrama de Hasse de un Poset.

EJEMPLO 19 Encuentre el límite inferior más grande y el límite superior mínimo de {b, d, g } , si existen, en el poset se muestra en la Figura 7.

Solución: Los límites superiores de {b, d, g} son gy h. Como g -< h, g es el límite superior mínimo. Los límites inferiores de {b, d, g} son una y b. Como a -< b, b es el límite inferior más grande. <III

EJEMPLO 20 Encuentre el límite inferior más grande y el límite superior mínimo de los conjuntos {3, 9, 12} y {I, 2, 4, 5, IO}, si existen, en el poset (Z +, I).

Elltra Ejemplos

Solución: un número entero es un límite inferior de {3, 9, 12} si 3, 9 y 12 son divisibles por este número entero. Los únicos números enteros son 1 y 3. Porque 1 I 3, 3 es el límite inferior más grande de {3, 9, 12}. El único límite inferior para el conjunto {I, 2, 4, 5, iO} con respecto a I es el elemento 1. Por lo tanto, 1 es el mayor límite inferior para {I, 2, 4, 5, iO}.

Un número entero es un límite superior para {3, 9, 12} si y solo si es divisible entre 3, 9 y 12. Los números enteros con esta propiedad son los divisibles por el mínimo común múltiplo de 3, 9 y 12, que es 36. Por tanto, 36 es el límite superior mínimo de {3, 9, 12}. Un número entero positivo es superior límite para el conjunto {I, 2, 4, 5, iO} si y solo si es divisible por 1, 2, 4, 5 y 10. Los números enteros con esta propiedad son aquellos enteros divisibles por el mínimo común múltiplo de estos enteros, que es 20. Por tanto, 20 es el límite superior mínimo de {1, 2, 4, 5, iO}. <III

Celosías

Un conjunto parcialmente ordenado en el que cada par de elementos tiene un límite superior mínimo y un el límite inferior más grande se llama celosía. Las celosías tienen muchas propiedades especiales. Además, Las celosías se utilizan en muchas aplicaciones diferentes, como modelos de flujo de información y juegan un papel importante en el álgebra de Boole.

h
mi mi
re gramo gramo
C
re
segundo segundo C segundo re re
una una una
(una) (segundo) (C)

FIGURA 8 Diagramas de Hasse de tres Posets.

EJEMPLO 21 Determine si los posets representados por cada uno de los diagramas de Hasse en la Figura 8 son celosías.

Solución: Los posets representados por los diagramas de Hasse en (a) y (c) son reticulados porque en cada conjunto de po, cada par de elementos tiene un límite superior mínimo y un límite inferior máximo, como el lector debe verificar. Por otro lado, el poset con el diagrama de Hasse que se muestra en (b) no es un enrejado, porque los elementos B y C no tienen ningún extremo superior. Para ver esto, tenga en cuenta que cada uno de los elementos d, eyf es un límite superior, pero ninguno de estos tres elementos precede los otros dos con respecto al pedido de este poset. ...

EJEMPLO 22 ¿Es el poset (Z +, I) una celosía?

Solución: Deje una y B dos números enteros positivos. El límite superior mínimo y el límite inferior máximo de estos dos enteros son el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de estos enteros, respectivamente, como el lector debería verificar. De ello se deduce que este poset es una celosía. ....

EJEMPLO 23 Determine si los conjuntos po ({1, 2, 3, 4, 5}, I) y ({1, 2, 4, 8, 16}, I) son retículas.

Solución: debido a que 2 y 3 no tienen límites superiores en ({1, 2, 3, 4, 5}, I), ciertamente no tienen un límite mínimo superior. Por tanto, el primer poset no es un retículo.

Cada dos elementos del segundo conjunto po tienen un límite superior mínimo y un límite inferior máximo. Unido. El límite superior mínimo de dos elementos en este conjunto es el mayor de los elementos y el El límite inferior más grande de dos elementos es el más pequeño de los elementos, como el lector debe verificar. Por tanto, este segundo poset es una celosía. ...

EJEMPLO 24 Determine si (P (S),) es una red donde S es un conjunto.

Solución: Sean A y B dos subconjuntos de S. El límite superior mínimo y el límite inferior mayor de A y B son A UB y A n B, respectivamente, como puede demostrar el lector. Por tanto, (P (S),) es un enrejado. ...

EJEMPLO 25 El modelo de celosía del flujo de información En muchos entornos, el flujo de información de una persona o programa de computadora a otro está restringido a través de autorizaciones de seguridad. Podemos usar una celosía modelo para representar diferentes políticas de flujo de información. Por ejemplo, una información común

LinIIS

La política de flujo es la política de seguridad multinivel utilizada en los sistemas gubernamentales y militares. Cada pieza de información se asigna a una clase de seguridad, y cada clase de seguridad está representada por un par (A, C) donde A es un nivel de autoridad y C es una categoría. Las personas y los programas de computadora son luego permitió el acceso a la información de un conjunto restringido específico de clases de seguridad.

Los niveles de autoridad típicos utilizados en el gobierno de los EE. UU. Son sin clasificar (0), confidenciales (I), secreto (2) y alto secreto (3). Las categorías utilizadas en las clases de seguridad son los subconjuntos de un conjunto de todos compartimentos relevantes para un área de interés particular. Cada compartimento representa un particular área temática. Por ejemplo, si el conjunto de compartimentos es {espías, topos, agentes dobles}, entonces Hay ocho categorías diferentes, una para cada uno de los ocho subconjuntos del conjunto de compartimentos, como como {espías, topos}.

Podemos ordenar las clases de seguridad especificando que (A \, Cd 0; <(A2, C2) si y solo si A \ :: s A2 y C \ C2. Se permite que la información fluya desde la clase de seguridad (A \, Cd en la clase de seguridad (A2, C2) si y sólo si (A \, C \) 0; «A2, C2). Por ejemplo, información tiene permitido pasar de la clase de seguridad (secreto, {espías, topos}) a la clase de seguridad (ultrasecreto, {espías, topos, agentes dobles}), mientras que la información no puede fluir de la clase de seguridad (ultrasecreto, {espías, topos}) en cualquiera de las clases de seguridad (secreto, {espías, topos, agentes dobles}) o (ultrasecreto, {espías}).

Dejamos que el lector (vea el ejercicio 48 al final de esta sección) muestre que el conjunto de todas las clases de seguridad con el orden definido en este ejemplo forman una celosía. ....

Clasificación topológica

Enlaces

Suponga que un proyecto se compone de 20 tareas diferentes. Algunas tareas se pueden completar solo después otros se han terminado. ¿Cómo se puede encontrar un pedido para estas tareas? Para modelar este problema establecemos un orden parcial en el conjunto de tareas de modo que a -< b si y solo si a y b son tareas donde b no puede iniciarse hasta que una se ha completado. Para producir un cronograma para el proyecto, necesitamos para producir una orden para las 20 tareas que sea compatible con esta orden parcial. Te mostraremos como esto puede hacerse.

Comenzamos con una definición. Un orden total 0; < se dice que es compatible con el ordenando R si a 0; <b siempre que aRb. Construir un ordenamiento total compatible a partir de un el ordenamiento se denomina ordenamiento topológico. * Necesitaremos usar el Lema 1.

LEMMA 1 Cada poset finito no vacío (S, 0; <) tiene al menos un elemento mínimo.

Prueba: Elija un elemento ao de S. Si ao no es mínimo, entonces hay un elemento a \ con a \ -< ao. Si al no es mínimo, hay un elemento a2 con a2 -< a \. Continuar este proceso, de modo que si una es no mínimo, hay un elemento an + \ con un + I -< an. Porque solo hay un número finito de elementos en el poset, este proceso debe terminar con un elemento mínimo an. <l

El algoritmo de ordenamiento topológico que describiremos funciona para cualquier poset finito no vacío. Para definir un orden total en el poset (A, 0; <), primero elija un elemento mínimo a \; Tal El elemento existe por el Lema 1. A continuación, tenga en cuenta que (A - {ad, 0; <) también es un poset, como el lector debería verificar. (Aquí por 0; < nos referimos a la restricción de la relación original 0; < de A a A - {a \}.) Si es no vacío, elija un elemento mínimo a2 de este poset. Luego elimine a2 también, y si hay elementos adicionales que quedan, elija un elemento mínimo a3 en A - {a \, a2}. Continúe este proceso por eligiendo ak + 1 como elemento mínimo en A - {ai, a2,. . . , ad, mientras queden elementos.

Como A es un conjunto finito, este proceso debe terminar. El producto final es una secuencia de elementos ai, a2, "" an. El pedido total deseado O; <t está definido por

" 'Clasificación topológica "es la terminología utilizada por los científicos informáticos; los matemáticos usan la terminología" linealización de un ordenamiento parcial "para lo mismo. En matemáticas, la topología es la rama de la geometría que se ocupa de las propiedades de Figuras que se aplican a todas las figuras que pueden transformarse unas en otras mediante biyecciones continuas. En informática, un La topología es cualquier disposición de objetos que se pueda conectar con bordes.

Página 60

Este pedido total es compatible con el pedido parcial original. Para ver esto, tenga en cuenta que si b -<c en el orden parcial original, c se elige como el elemento mínimo en una fase del algoritmo donde b ya se ha eliminado, porque de lo contrario c no sería un elemento mínimo. Pseudocódigo para este algoritmo de clasificación topológica se muestra en el algoritmo 1.

ALGORITMO 1 Clasificación topológica

procedimiento orden topológico «S, =; <): poset finito)
k: = yo
mientras que S = 1 = 0

empezar

ak : = un elemento mínimo de S {tal elemento existe por el Lema I}

S: = S - { a d

k: = k + 1

end {ai, a2,. . . , an es un pedido total compatible de S}

EJEMPLO 26 Encuentre un orden total compatible para el conjunto de po ({1, 2, 4, 5, 12, 20}, I).

Solución: el primer paso es elegir un elemento mínimo. Debe ser 1, porque es el único elemento mínimo. A continuación, seleccione un elemento mínimo de ({2, 4, 5, 12, 20}, I). Hay dos mínimos elementos en este conjunto, a saber, 2 y 5. Seleccionamos 5. Los elementos restantes son {2, 4, 12, 20}. El único elemento mínimo en esta etapa es 2. A continuación, se elige 4 porque es el único mínimo elemento de ({4, 12, 20}, I). Debido a que tanto 12 como 20 son elementos mínimos de ({12, 20}, I), se puede elegir a continuación. Seleccionamos 20, lo que deja 12 como último elemento que queda. Esto produce el orden total

1 -< 5 -< 2 -< 4 -< 20 -< 12.

Los pasos utilizados por este algoritmo de clasificación se muestran en la Figura 9.

La clasificación topológica tiene una aplicación para la programación de proyectos.

12 20 12 20 12 20 12 20 12 20 12

4 / +1 4 r V 4

2 5 2 5 2

1

Mínimo elemento elegido 1 5 2 4 20 12

FIGURA 9 Un tipo topológico de ({t, 2, 4, 5, t2, 20}, I).

Página 61

GRAMO GRAMO GRAMO GRAMO GRAMO GRAMO GRAMO

GRAMO

re

kl. (1 A .

segundo

UNA C mi C mi mi mi

UNA C mi

r1 ~

Mínimo elemento elegido UNA C . segundo mi F re GRAMO

FIGURA 10 El Diagrama de Hasse para Siete tareas.

FIGURA 1 1 Una clasificación topológica de las tareas.

EJEMPLO 27 Un proyecto de desarrollo en una empresa de informática requiere la realización de siete tareas. Algunos de estas tareas se pueden iniciar solo después de que se terminen otras tareas. Se configura un pedido parcial de tareas considerando la tarea X -< tarea Y si la tarea Y no se puede iniciar hasta que la tarea X se haya completado. los El diagrama de Hasse para las siete tareas, con respecto a este orden parcial, se muestra en la Figura 10. Encuentre un orden en el que se pueden realizar estas tareas para completar el proyecto.

Solución: Se puede obtener una ordenación de las siete tareas realizando una ordenación topológica. los

los pasos de un tipo se ilustran en la Figura 1 1. El resultado de este tipo, A -< C -< B -< E -< F -< D -< G, da un posible orden para las tareas.

Ejercicios

1. ¿Cuáles de estas relaciones en {O, 1, 2, 3} son de orden parcial? ings? Determinar las propiedades de un ordenamiento parcial que los demás carecen.
   a) {(O, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)}
   b) {(O, 0), (1, I), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)}
   c) {(O, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)}
   d) {(O, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)}
   e) {(O, 0), (0, I), (0, 2), (1, 0), (I, I), (1, 2), (2, 0), (2, 2), (3, 3)}
2. ¿Cuáles de estas relaciones en {O, 1, 2, 3} son de orden parcial? ings? Determinar las propiedades de un ordenamiento parcial que los demás carecen.
   a) {(O, 0), (2, 2), (3, 3)}
   b) {(O, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 3)}
   c) {(O, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 1), (3, 3)}
   d) {(O, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 0), (3, 3)}
   e) {(O, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (I, D), (1, I), (I, 2), (I, 3), (2, 0), (2, 2), (3, 3)}
3. ¿Es (S, R) un poset si S es el conjunto de todas las personas del mundo? y (a, b) E R, donde a y b son personas, si
   a) ¿ a es más alto que b?
   b) ¿ a no es más alto que b?
   c) a = bo a es un ancestro de b?
   d) ¿A y B tienen un amigo en común?
4. ¿Es (S, R) un poset si S es el conjunto de todas las personas del mundo? y (a, b) E R, donde a y b son personas, si
   a) ¿ a no es más corto que b?
   b) a pesa más que b?
   c) a = bo a es descendiente de b?
   d) ayb no tienen un amigo en común?
5. ¿Cuáles de estos son posets?
   a) (Z, =) b) (Z, #) c) (Z, ::: :) d) (Z, f)
6. ¿Cuáles de estos son posets?
   a) (R, =) b) (R, <) c) (R, :: s) Dr, #)
7. Determine si las relaciones representadas por estos las matrices cero-uno son órdenes parciales.

Página 62

8. Determine si las relaciones representadas por estos Las matrices zer () - {) ne son órdenes parciales.

una) [1 yo ∘] [segundo) yo ∘]

C) [1 ∘ 1 1 1 ∘ 1 f 1 ∘ 1]

En los Ejercicios 9-1 1 determine si la relación con el El gráfico dirigido que se muestra es un orden parcial.

1

11.

12. Sea (S, R) un poset. Demuestre que (S, R-1) también es un poset, donde R -I es el inverso de R. El poset (S, R -I) se llama el dual de (S, R).
13. Encuentra los duales de estos posets.
    a) ({O, 1, 2), ::: :) b) (Z,)
    c) (P (Z), 2) d) (Z +, I)
14. ¿Cuáles de estos pares de elementos son comparables en el poset (Z +, I)?
    a) 5, 15 b) 6, 9 c) 8, 16 d) 7, 7
15. Encuentra dos elementos incomparables en estos posets.
    a) (P ({0, 1, 2}), S;) b) ({1, 2, 4, 6, 8} '1)
16. Sea S = {I, 2, 3, 4}. Con respecto al lexicográfico orden basado en la habitual relación "menor que",

22. Dibuja el diagrama de Hasse para la divisibilidad en el conjunto
    a) {1, 2, 3, 4, 5, 6}. b) {3, 5, 7, 1 1, 13, 16, 17}.
    c) {2, 3, 5, 10, 1 1, IS, 25}. d) {I, 3, 9, 27, 81, 243}.
23. Dibuja el diagrama de Hasse para la divisibilidad en el conjunto
    a) {I, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. b) {I, 2, 3, 5, 7, 1 1, 13}.
    c) {I, 2, 3, 6, 12, 24, 36, 48}.
    d) {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64}.
24. Dibuje el diagrama de Hasse para incluirlo en el conjunto peS), donde S = {a, b, c, d}.

En los Ejercicios 25-27, enumere todos los pares ordenados en el orden parcial con el diagrama de Hasse adjunto.

25. C re y una b lj

26. mi re , una

27. > k segundo una C

Sea (S,) un poset. Decimos que un elemento SÍ cubre un elemento XES si x - <y y no hay ningún elemento z ES tal que x - <z - <y. El conjunto de pares (x, y) tal que y cubre x es llamada la relación de cobertura de (S,).

28. ¿Cuál es la relación de cobertura del ordenamiento parcial? {(a, b) I a divide b} en {l, 2, 3, 4, 6, 121?
29. ¿Cuál es la relación de cobertura del ordenamiento parcial? {(A, B) I A B } en el conjunto de potencias de S, donde S = {a B C}?
30. Demuestre que el par (x, y) pertenece a la relación de cobertura

a) encuentre todos los pares en S x S menores que (2, 3).
b) encuentre todos los pares en S x S mayores que (3, 1).
c) dibuja el diagrama de Hasse del poset (S x S,).

17. Encuentre el orden lexicográfico de estas n-tuplas:

a) (1, 1, 2), (1, 2, 1) b) (0, 1, 2, 3), (0, 1, 3, 2)
c) (1, 0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 1, 0)

18. Encuentre el orden lexicográfico de estas cadenas de letras del caso en inglés:

a) curandero, rápido, mercurio, arenas movedizas, graznido
b) abierto, abridor, opera, operando, abierto
c) zoológico, cero, zoom, zoología, zoológico

19. Encuentre el orden lexicográfico de las cadenas de bits 0, 01, 1 1, 001, 010, Oi l, 0001 y 0101 según el pedido 0 <1.

20. Dibuja el diagrama de Hasse para "mayor o igual que" relación con, 1, 2, 3, 4, 5}.

21. Dibuja el diagrama de Hasse para "menor o igual que" relación a, 2, 5, 10, 1 1, 15}.

y del poset finito (S,) si x y solo si x el diagrama de Hasse de este poset.

31. Demuestre que un poset finito se puede reconstruir a partir de su cov relación ering. [Sugerencia: demuestre que el poset es el reflexivo cierre transitivo de su relación de cobertura.]

32. Responda estas preguntas para el pedido parcial representado por este diagrama de Hasse.

metro

gramo

F

una segundo C

Página 63

580 8 / Relaciones 8-62

a) Encuentra los elementos máximos.
b) Encuentra los elementos mínimos.
c) ¿Existe un elemento mayor?
d) ¿Hay algún elemento mínimo?
e) Encuentre todos los límites superiores de {a, b, c}.
I) Encuentre el límite superior mínimo de {a, b, c}, si existe.
g) Encuentre todos los límites inferiores de {j, g, h}.
h) Encuentre el mayor límite inferior de {f, g, h}, si existe.

33. Responda estas preguntas para el poset ({3, 5, 9, IS, 24, 45}, I).

a) Encuentra los elementos máximos.
b) Encuentra los elementos mínimos.
c) ¿Existe un elemento mayor?
d) ¿Hay algún elemento mínimo?
e) Encuentre todos los límites superiores de {3, 5}.
I) Encuentre el límite superior mínimo de {3, S}, si existe.
g) Encuentre todos los límites inferiores de {IS, 4S}.
h) Encuentre el mayor límite inferior de {IS, 4S}, si existe.

34. Responda estas preguntas para el poset ({2, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 48, 60, 72l. YO).

a) Encuentra los elementos máximos.
b) Encuentra los elementos mínimos.
c) ¿Existe un elemento mayor?
d) ¿Hay algún elemento mínimo?
e) Encuentre todos los límites superiores de {2, 9}.
I) Encuentre el límite superior mínimo de {2, 9}, si existe.
g) Encuentre todos los límites inferiores de {60, 72}.
h) Encuentre el mayor límite inferior de {60, 72}, si existe.

35. Responda estas preguntas para el poset ({{I}, {2}, {4}, {I, 2}, {I, 4}, {2, 4}, {3, 4}, {I, 3, 4}, {2, 3, 4}},).

a) Encuentra los elementos máximos.
b) Encuentra los elementos mínimos.
c) ¿Existe un elemento mayor?
d) ¿Hay algún elemento mínimo?
e) Encuentre todos los límites superiores de {{2}, {4}}.
I) Encuentre el límite superior mínimo de {{2}, {4}}, si existe.
g) Encuentre todos los límites inferiores de {{I, 3, 4}, {2, 3, 4}}.
h) Encuentre el límite inferior más grande de {{l, 3, 4}, {2, 3, 4}}, si existiera.

36. Dar un po set que tenga

a) un elemento mínimo pero no un elemento máximo.
b) un elemento máximo pero no un elemento mínimo.
c) ni un elemento máximo ni mínimo.

37. Muestre que el orden lexicográfico es un ordenamiento parcial en el Producto cartesiano de dos posets.

38. Demuestre que el orden lexicográfico es un ordenamiento parcial en el conjunto de cadenas de un poset.

41. a) Demuestre que hay exactamente un elemento máximo en una poset con un elemento más grande.
b) Demuestre que hay exactamente un elemento mínimo en un poset con un elemento mínimo.

42. a) Demuestre que el límite superior mínimo de un conjunto en un conjunto es único si existe.
b) Demuestre que el mayor límite inferior de un conjunto en un conjunto po es único si existe.

43. Determine si los posets con estos diagramas de Hasse son celosías.

una) segundo) c)

gramo h

F F gramo h

re mi re mi F gramo

mi

re

segundo C segundo C C

segundo

una una una

44. Determine si estos posets son celosías.

a) ({I, 3, 6, 9, 12}, I) b) ({I, 5, 2S, 12S}, I)
c) (Z, ::: :)
d) (P (S), 2), donde peS) es el conjunto de potencias de un conjunto S

45. Demuestre que todo subconjunto finito no vacío de una red tiene un límite superior mínimo y límite inferior máximo.

46. Demuestre que si el poset (S, R) es un enrejado, entonces el poset dual (S, R- 1) también es una red.

47. En una empresa, se utiliza el modelo de celosía del flujo de información para controlar información sensible con clases de seguridad rep resentido por pares ordenados (A, C). Aquí A es una autoridad nivel, que puede ser no propietario (0), propietario (1), restringido (2) o registrado (3). Una categoría C es un subconjunto de el conjunto de todos los proyectos {Cheetah, Impala, Puma}. (Nombres de animales se utilizan a menudo como nombres en clave para proyectos en compañías.)

a) ¿Se permite que la información fluya desde (Propietario, {Cheetah, Puma}) en (Restricted, {Puma})?
b) ¿Se permite que la información fluya desde (restringido, {Cheetah}) en (Registrado, {Cheetah, Impala})?
c) ¿ A qué clases pertenece la información (propietaria, {Cheetah, Puma}) ¿se le permite fluir?
d) De qué clases se permite que fluya la información en la clase de seguridad (restringido, {Impala, Puma})?

48. Demuestre que el conjunto S de clases de seguridad (A, C) es una red, donde A es un número entero positivo que representa una autoridad clase y C es un subconjunto de un conjunto finito de compartimentos, con (A1, C1) (A2, C2) si y solo si A1 ::'S A2 y C1 C2. [Sugerencia: primero muestre que (S,) es un poset y luego muestre

39. Suponga que (S, \) y (T, 2) son posets. Muestra esa (S x T,) es un poset donde (s, t) (u, v) si y solo si s 1 u y t 2 v.

40. a) Demuestre que hay exactamente un elemento mayor de una poset, si tal elemento existe.
b) Demuestre que hay exactamente un elemento mínimo de un conjunto po, si tal elemento existe.

que el menor límite superior y el mayor límite inferior de (A1, e1) y (A2, C2) son (max (A1, A2), C1 U C2) y (min (A1, A2), C1 n C2), respectivamente.]

* 49. Demuestre que el conjunto de todas las particiones de un conjunto S con el relación P1 P 2 si la partición P1 es un refinamiento de la la partición P2 es una celosía. (Ver el preámbulo del ejercicio 49 de la Sección 8.5.)

Página 64

8-63

50. Demuestre que todo conjunto totalmente ordenado es una celosía.

51. Demuestre que cada retícula finita tiene un elemento mínimo y un mayor elemento.

52. Da un ejemplo de una celosía infinita con
a) ni un elemento menor ni mayor.
b) un elemento menor pero no mayor.
c) un elemento mayor pero no menor.
d) tanto un elemento menor como un elemento mayor.

53. Verifique que (Z + x Z +, = <-) sea un conjunto bien ordenado, donde = < es el orden lexicográfico, como se reivindica en el Ejemplo 8.

54. Determine si cada uno de estos conjuntos de opciones está bien ordenado.
a) (S, S), donde S = {10, II, 12,. . .}
b) (Q n [0, I], S) (el conjunto de números racionales entre 0 y yo inclusive)
c) (S, S), donde S es el conjunto de números racionales positivos con denominadores no superiores a 3
d) (Z-, 2 :), donde Z- es el conjunto de enteros negativos

Un poset (R, = <-) está **bien fundado** si no hay infinito de Secuencia de plegado de elementos en el poset, es decir, elementos XI, X2, ..., Xn tal que · . . - <X n - <. . . - <X2 - <XI. Un poset (R, = <-) es **denso** si para todo XES y y ES con X - < y, hay es un elemento z E R tal que X - <Z - < y.

55. Muestre que el poset (Z, = <-), donde X - <Y si y solo si Ixi < Iyl está bien fundado pero no es un orden total conjunto.

56. Demuestre que un poset denso con al menos dos elementos que son comparables no está bien fundada.

57. Demuestre que el conjunto de números racionales con el habitual La relación "menor o igual a", (Q, S), es un poset denso.

* 58. Muestre que el conjunto de cadenas de inglés en minúsculas deja tros con orden lexicográfico no está bien fundado ni denso.

59. Demuestre que un poset está bien ordenado si y solo si está totalmente ordenado y bien fundado.

60. Demuestre que un poset finito no vacío tiene un elemento máximo.

61. Encuentre un pedido total compatible para el poset con Hasse diagrama que se muestra en el ejercicio 32.

62. Encuentra un orden total compatible para la relación de divisibilidad en el set {I, 2, 3, 6, 8, 12, 24, 36}.

63. Encuentre un orden diferente al construido en Ex suficiente 27 para completar las tareas en el desarrollo proyecto.

64. Programe las tareas necesarias para construir una casa, especificando su orden, si el diagrama de Hasse que representa estas tareas es como se muestra en la figura.

Accesorios interiores
Accesorios exteriores
Tejido de alfombra
Pintura interior
piso
Pintura exterior
Tablero de pared
Plomería
Alambrado
Revestimiento exterior
Techo
Enmarcado
Fundación

65. Encuentre un orden de las tareas de un proyecto de software si el El diagrama de Hasse para las tareas del proyecto es como se muestra.

Terminación
prueba f3
Desarrollar el módulo A
Escribir documentación
Preparar sitios de prueba
Escribir requisitos funcionales
Determinar las necesidades del usuario

Términos y resultados clave

CONDICIONES

relación binaria de A a B: un subconjunto de A x B

relación en A: una relación binaria de A a sí mismo (es decir, un subconjunto de A x A)

S o R: compuesto de R y S

R-1: relación inversa de R

Rn: enésima potencia de R

reflexiva: una relación R sobre A es reflexiva si (a, a) E R para todos un EA

simétrico: una relación R sobre A es simétrica si (b, a) E R cuando siempre (a, b) E R

antisimétrico: una relación R sobre A es antisimétrica si a = b siempre que (a, b) E R y (b, a) E R

transitiva: una relación R sobre A es transitiva si (a, b) E R y (b, c) E R implica que (a, c) E R

Relación n-aria en At, A2, ..., An: un subconjunto de Al x A 2 x . . . x An

modelo de datos relacionales: un modelo para representar bases de datos usando relaciones n-arias

clave primaria: un dominio de una relación n-aria tal que una n-tupla se determina de forma única por su valor para este dominio

Página 65

582

clave compuesta: el producto cartesiano de dominios de un n-ario relación tal que una n-tupla está determinada únicamente por su valores en estos dominios
operador de selección: una función que selecciona las n-tuplas en un Relación n-aria que satisface una condición especificada
proyección: una función que produce relaciones de menor gree de una relación n-aria eliminando campos
join: una función que combina relaciones n-arias que coinciden ciertos campos
grafo dirigido o dígrafo: un conjunto de elementos llamados vértices y pares ordenados de estos elementos, llamados bordes
bucle: un borde de la forma (a, a)
cierre de una relación R con respecto a una propiedad P: el relación S (si existe) que contiene R, tiene propiedad P, y está contenido dentro de cualquier relación que contenga R y tenga propiedad P
ruta en un dígrafo: una secuencia de aristas (a, Xl), (Xl, X2),. . . , (Xn-2, Xn-l), (Xn-l, b) tal que el vértice terminal de cada borde es el vértice inicial del borde siguiente en el secuencia
circuito (o ciclo) en un dígrafo: un camino que comienza y termina en el mismo vértice
R * (relación de conectividad): la relación que consiste en aquellos pares ordenados (a, b) tales que hay un camino desde un a b
Relación de equivalencia: reflexiva, simétrica y transitiva. relación
equivalente: si R es una relación de equivalencia, a es equivalente a b ifaR b
lab (clase de equivalencia de a con respecto a R): el conjunto de todos elementos de A que son equivalentes a un
[aIm (clase de congruencia módulo m): el conjunto de enteros con gruent a un módulo m
partición de un conjunto S: una colección de disj oint por pares no vacíos subconjuntos que tienen S como su unión
ordenamiento parcial: una relación que es reflexiva, antimétrica, y transitivo
poset (S, R): un conjunto S y un orden parcial R en este conjunto
comparable: los elementos ayb en el poset (A,) son comparable si un b o b una
incomparable: elementos en un poset que no son comparables
ordenamiento total (o lineal): un ordenamiento parcial para el cual cada par de elementos son comparables
conjunto total (o linealmente) ordenado: un conjunto con un total (o lineal) ordenar
conjunto bien ordenado: un poset (S,), donde es un orden total y cada subconjunto no vacío de S tiene un elemento mínimo
orden lexicográfico: una ordenación parcial de productos cartesianos o cuerdas (consulte las páginas 569-570)
Diagrama de Hasse: una representación gráfica de un poset donde bucles y todos los bordes resultantes de la propiedad transitiva no se muestran, y se indica la dirección de los bordes por la posición de los vértices
elemento máximo: un elemento de un poset que no es menor que cualquier otro elemento del poset
elemento mínimo: un elemento de un poset que no es mayor que cualquier otro elemento del poset
elemento mayor: un elemento de un poset mayor o igual que a todos los demás elementos de este conjunto
elemento mínimo: un elemento de un poset menor o igual que todos otros elementos de este conjunto
límite superior de un conjunto: un elemento en un conjunto mayor que todos otros elementos del conjunto
límite inferior de un conjunto: un elemento en un poset menor que todos los demás elementos en el conjunto
límite superior mínimo de un conjunto: un límite superior del conjunto que es menos que todos los demás límites superiores
mayor límite inferior de un conjunto: un límite inferior del conjunto que es mayor que todos los demás límites inferiores
celosía: un conjunto parcialmente ordenado en el que cada dos elementos tienen un límite inferior máximo y un límite superior mínimo
pedido total compatible para un pedido parcial: un total o dering que contiene el orden parcial dado
ordenamiento topológico: la construcción de una compatibilidad de ordenamiento total ible con un orden parcial dado

RESULTADOS

El cierre reflexivo de una relación R en el conjunto A es igual a R U Ll, donde Ll = {(a, a) I a E A } .
El cierre simétrico de una relación R en el conjunto A es igual a R U Rl, donde Rl = {(b, a) I (a, b) ER} .
El cierre transitivo de una relación es igual a la conectividad re lación formada a partir de esta relación.
El algoritmo de Warshall para encontrar el cierre transitivo de un re lación (consulte las páginas 550--553).
Sea R una relación de equivalencia. Entonces los siguientes tres las declaraciones son equivalentes: (I) a R b ; (2) [aJR n [b] R # - 0; (3) [a] R = [bJR.
Las clases de equivalencia de una relación de equivalencia en un conjunto A formar una partición de A. Por el contrario, una relación de equivalencia se puede construir a partir de cualquier partición para que el equivalente las clases de lence son los subconjuntos de la partición.
El principio de inducción bien ordenada.
El algoritmo de clasificación topológica (consulte las páginas 576-578).

Preguntas de revisión

1. a) ¿Qué es una relación en un conjunto?
   b) ¿Cuántas relaciones hay en un conjunto con n ¿elementos?
2. a) ¿Qué es una relación reflexiva?
   b) ¿Qué es una relación simétrica?
   c) ¿Qué es una relación antimétrica?
   d) ¿Qué es una relación transitiva?
3. Da un ejemplo de una relación en el conjunto {I, 2, 3, 4} es decir
   a) reflexivo, simétrico y no transitivo.
   b) no reflexivo, simétrico y transitivo.
   c) reflexiva, antimétrica y no transitiva.
   d) reflexiva, simétrica y transitiva.
   e) reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Página 66

4. a) ¿Cuántas relaciones reflexivas hay en un conjunto con n ¿elementos?
   b) ¿Cuántas relaciones simétricas hay en un conjunto con n elementos?
   c) ¿Cuántas relaciones antimétricas hay en un conjunto? con n elementos?
5. a) Explica cómo se puede usar una relación n-aria para representar información sobre estudiantes de una universidad.
   b) ¿Cómo puede la relación 5 aria que contiene nombres de estu dents, sus direcciones, números de teléfono, especialidades y
10. a) Definir una relación de equivalencia.
   b) ¿Qué relaciones en el conjunto {a, b, c, d} son equivalencia relaciones y contienen (a, b) y (b, d)?
11. a) Demuestre que la congruencia módulo m es una equivalencia re lación siempre que m sea un número entero positivo.
   b) Demuestre que la relación {(a, b) I a = ± b (mod 7)} es una Relación de equivalencia en el conjunto de números enteros.
12. a) ¿Cuáles son las clases de equivalencia de una equivalencia? ¿relación?
   b) ¿Cuáles son las clases de equivalencia de las "congruentes

Los promedios de calificaciones se utilizarán para formar una relación tripartita. que contenga los nombres de los estudiantes, sus especialidades y sus promedios de calificaciones?

c) ¿Cómo puede la relación 4-aria que contiene nombres de estu abolladuras, sus direcciones, números de teléfono y especialidades y la relación 4-aria que contiene los nombres de los estudiantes, su número de estudiantes, especialidades y número de crédito las horas se pueden combinar en una sola relación n-aria?

6. a) Explica cómo usar una matriz cero-uno para representar una relación en un conjunto finito.

b) Explica cómo usar la matriz cero-uno que representa un relación para determinar si la relación es reflexiva, simétrico y / o antisimétrico.

7. a) Explica cómo usar una gráfica dirigida para representar una relación en un conjunto finito.

b) Explica cómo usar la gráfica dirigida que representa un relación para determinar si una relación es reflexiva, simétrico y / o antisimétrico.

8. a) Definir el cierre reflexivo y el cierre simétrico de una relación.

b) ¿Cómo se puede construir el cierre reflexivo de un ¿relación?

c) ¿Cómo se puede construir el cierre simétrico de un ¿relación?

d) Encuentra el cierre reflexivo y el cierre simétrico de la relación {(I, 2), (2, 3), (2, 4), (3, I)} en el conjunto {I, 2, 3, 4}.

9. a) Definir el cierre transitivo de una relación.

b) ¿Se puede obtener el cierre transitivo de una relación por incluyendo todos los pares (a, c) tales que (a, b) y (b, c) sean largo a la relación?

c) Describe dos algoritmos para encontrar el clo transitivo seguro de una relación.

d) Encuentra el cierre tranSItIvo de la relación {(l, l), (1, 3), (2 , 1), (2,3), (2,4), (3,2), (3,4), (4,1)}.

módulo 5 "relación?

c) ¿Cuáles son las clases de equivalencia de la equivalencia relación en la Pregunta II (b)?

13. Explique la relación entre relaciones de equivalencia en un conjunto y particiones de este conjunto.

14. a) Definir un ordenamiento parcial.

b) Demuestre que la relación de divisibilidad en el conjunto de positivos enteros es un orden parcial.

15. Explique cómo los ordenamientos parciales en los conjuntos Al y A2 se puede utilizar para definir un orden parcial en el set Al x A2.

16. a) Explica cómo construir el diagrama de Hasse de un orden en un conjunto finito.

b) Dibuje el diagrama de Hasse de la relación de divisibilidad en el conjunto {2, 3, 5, 9, 1 2 , IS, 1 8}.

17 . a) Definir un elemento máximo de un poset y el mayor elemento de un conjunto de po.

b) Da un ejemplo de un poset que tenga tres máximos elementos.

c) Da un ejemplo de un poset con un elemento mayor.

18. a) Defina una celosía.

b) Da un ejemplo de un poset con cinco elementos que sea una celosía y un ejemplo de poset con cinco elementos eso no es una celosía.

19. a) Demuestre que todo subconjunto finito de una red tiene un mayor límite inferior y un límite superior mínimo.

b) Demuestre que toda celosía con un número finito de elementos tiene un elemento menor y un elemento mayor.

20. a) Defina un conjunto bien ordenado.

b) Describe un algoritmo para producir un conjunto bien ordenado. de un conjunto parcialmente ordenado.

c) Explique cómo se puede usar el algoritmo de (b) para ordenar las tareas en un proyecto si cada tarea se puede hacer sólo después de que una o más de las otras tareas hayan sido terminado.

Ejercicios complementarios

1. Sea S el conjunto de todas las cadenas de letras inglesas. Determinar si estas relaciones son reflexivas, irreflexivas, simétricas ric, antisimétrico y / o transitivo.

a) RI = {(a, b) I ayb no tienen letras en común}

b) R2 = {(a, b) I a y b no tienen la misma longitud}

c) R3 = {(a, b) I a es más largo que b }

2. Construya una relación en el conjunto {a, b, c, d} que sea

a) reflexivo, simétrico, pero no transitivo.

b) irreflexivo, simétrico y transitivo.

c) irreflexivo, antisimétrico y no transitivo.

d) reflexivo, ni simétrico ni antisimétrico, y transitivo.

e) ni reflexivo, irreflexivo, simétrico, antisymmet ric, ni transitivo.

Página 67

3. Demuestre que la relación R sobre Z x Z definida por (a, b) R (c, d) si y solo si a + d = b + c es un equivalente relación lence.

4. Demuestre que un subconjunto de una relación antimétrica también es anti simétrico.

5. Sea R una relación reflexiva en un conjunto A. Demuestre que R R2.

6. Suponga que R \ y R2 son relaciones reflexivas en un conjunto A. Demuestre que R \ EB R2 es irreflexivo.

7. Suponga que R \ y R2 son relaciones reflexivas en un conjunto A. ¿R \ n R2 también es reflexivo? ¿Es R \ U R2 también reflexivo?

8. Suponga que R es una relación simétrica en un conjunto A. ¿Es R también simétrico? ·

9. Sean R \ y R2 relaciones simétricas. ¿Es R \ n R2 también ¿simétrico? ¿Es R \ U R2 también simétrico?

10. Una relación R se llama circular si aRb y b R c implican que era. Demuestre que R es reflexivo y circular si y solo si es una relación de equivalencia.

11. Muestre que una clave primaria en una relación n-aria es una clave primaria clave en cualquier proyección de esta relación que contenga esta clave como uno de sus campos.

12. ¿Es la clave primaria en una relación n-aria también una clave en una relación más amplia obtenida al tomar la combinación de este

b) Describe la relación R *.

c) El número de Erdos de un matemático es I si este matemático escribió un artículo con el prolífico Hun matemático de Garian Paul Erdos, es 2 si esta matemática El matemático no escribió un artículo conjunto con Erdos, pero escribió un artículo conjunto con alguien que escribió un conjunto papel con Erdos, y así sucesivamente (excepto que el Erdos número del propio Erdos es 0). Dar una definición de Número de Erdos en términos de caminos en R.

15. a) Dé un ejemplo para mostrar que el cierre transitivo de el cierre simétrico de una relación no es necesariamente lo mismo que el cierre simétrico del transitivo cierre de esta relación.

b) Demuestre, sin embargo, que el cierre transitivo del símbolo El cierre métrico de una relación debe contener el simétrico cierre del cierre transitivo de esta relación.

16. a) Sea S el conjunto de subrutinas de un profesional informático. gramo. Defina la relación R por P R Q si la subrutina P llama a la subrutina Q durante su ejecución. Describe el cierre transitivo de R.

b) Para que subrutinas P hace (P, P) pertenecen a la cierre transitivo de R?

relación con una segunda relación?

13. Demuestre que el cierre reflexivo del cierre simétrico de una relación es el mismo que el cierre simétrico de su cierre reflexivo.

14. Sea R la relación del conjunto de todos los matemáticos que contiene el par ordenado (a, b) si y sólo si una y b tienen escribieron un artículo juntos.

a) Describe la relación R2.

c) Describe el cierre reflexivo del cierre transitivo de R.

17. Suponga que R y S son relaciones en un conjunto A con R S tal que los cierres de R y S con respecto a un puntal erty P existen ambos. Demuestre que el cierre de R con respeto a P es un subconjunto del cierre de S con respecto a P.

18. Demuestre que el cierre simétrico de la unión de dos re laciones es la unión de sus cierres simétricos.

unkS

PAUL ERDOS (19 1 3-1996) Paul Erdos, nacido en Budapest, Hungría, era hijo de dos estudiantes de secundaria profesores de matemáticas. Era un niño prodigio; a los 3 años podía multiplicar números de tres dígitos en su cabeza, ya los 4 años descubrió los números negativos por su cuenta. Porque su madre no quiso exponerlo a enfermedades contagiosas, la mayoría de las veces fue educado en casa. A los 17 Erdos ingresó en la Universidad de Eotvos, graduándose cuatro años después con un Ph.D. en matemáticas. Después de graduarse, pasó cuatro años en Manchester, Inglaterra, en un beca postdoctoral. En 1938 se fue a los Estados Unidos debido a la difícil situación política en Hungría, especialmente para los judíos. Pasó gran parte de su tiempo en los Estados Unidos, excepto de 1954 a 1962, cuando fue prohibido como parte de la paranoia de la era McCarthy. También pasó un tiempo considerable en Israel.

Erdos hizo muchas contribuciones significativas a la combinatoria y a la teoría de números. Uno de los descubrimientos de lo que estaba más orgulloso es su prueba elemental (en el sentido de que no utiliza ningún análisis complejo) del número primo Teorema, que proporciona una estimación del número de primos que no exceden un entero positivo fijo. También participó en el desarrollo moderno de la teoría de Ramsey.

Erdos viajó extensamente por todo el mundo para trabajar con otros matemáticos, visitar conferencias, universidades y laboratorios de investigación. No tenía un hogar permanente. Se dedicó casi por completo a las matemáticas, viajando desde un mathe matician al siguiente, proclamando "Mi cerebro está abierto". Erdos fue autor o coautor de más de 1500 artículos y tenía más de 500 coautores. Ron Graham, un famoso matemático discreto con quien colaboró, conserva copias de sus artículos. extensamente y que se hizo cargo de muchas de sus necesidades mundanas.

Erdos ofreció recompensas, que iban desde $ 10 a $ 10,000, por la solución de problemas que encontraba particularmente interesantes, con la tamaño de la recompensa dependiendo de la dificultad del problema. Pagó cerca de $ 4000. Erdos tenía su propio lenguaje especial, usando términos como "épsilon" (niño), "jefe" (mujer), "esclavo" (hombre), "capturado" (casado), "liberado" (divorciado), "fascista supremo" (Dios), "Sam" (Estados Unidos) y "Joe" (Unión Soviética). Aunque sentía curiosidad por muchas cosas, concentró casi todas su energía en la investigación matemática. No tenía pasatiempos ni trabajo a tiempo completo. Nunca se casó y aparentemente permaneció célibe. Erdos fue extremadamente generoso, donando gran parte del dinero que recaudó de premios, premios y estipendios para becas y para causas valiosas. Viajaba con extrema ligereza y no le gustaba tener muchas posesiones materiales.

Página 68

* 19. Diseñar un algoritmo, basado en el concepto de interior ver tices, que encuentra la longitud del camino más largo entre dos vértices en un grafo dirigido, o determina que hay caminos arbitrariamente largos entre estos vértices.

20. ¿Cuáles de estas son relaciones de equivalencia en el conjunto de todos ¿personas?

a) {(x, y) I xey tienen el mismo signo del zodíaco}

b) {(x, y) I xey nacieron en el mismo año}

c) {(x, y) I xey han estado en la misma ciudad}

* 21. ¿Cuántas relaciones de equivalencia diferentes con exactamente Hay tres clases de equivalencia diferentes en un conjunto con ¿cinco elementos?

22. Demuestre que {(x, y) I x - Y EQ} es una relación de equivalencia en el conjunto de números reales, donde Q denota el conjunto de numeros racionales. ¿Qué son [1] , [] y [JT]?

23. Supongamos que P I = {AI, A2, . . . , Am} y P2 = {BI, B2, ⋯ , Bn} son ambas particiones del conjunto S. Mostrar que la colección de subconjuntos no vacíos del formulario Ai n Bj es una partición de S que es un refinamiento de ambos PI y P2 (consulte el preámbulo del ejercicio 49 de la sección 8.5).

* 24. Demuestre que el cierre transitivo del cierre simétrico del cierre reflexivo de una relación R es el menor relación de equivalencia que contiene R.

25. Sea R (S) el conjunto de todas las relaciones en un conjunto S. Defina la relación en R (S) por RI R2 si RI S; R2, donde RI y R2 son relaciones en S. Demuestre que (R (S),) es un poset.

26. Sea P (S) el conjunto de todas las particiones del conjunto S. Defina el relación en peS) por PI P2 si PI es un refinamiento de P2 (vea el ejercicio 49 de la sección 8.5). Demuestre que (P (S),) es un poset.

27. Programe las tareas necesarias para cocinar una comida china especificando su orden, si el diagrama de Hasse que representa estas tareas se muestran aquí.

Un subconjunto de un poset tal que cada dos elementos de este subconjunto conjunto son comparables se llama cadena. Un subconjunto de un poset es llamado antichain si cada dos elementos de este subconjunto son incomparable.

28. Encuentra todas las cadenas en los conjuntos po con los diagramas de Hasse que se muestra en los ejercicios 25 a 27 de la sección 8.6.

29. Encuentra todos los antichains en los conjuntos po con los diagramas de Hasse que se muestra en los ejercicios 25 a 27 de la sección 8.6.

30. Encuentra una anti-cadena con la mayor cantidad de elementos. en el poset con el diagrama de Hasse del ejercicio 32 en Sección 8.6.

31. Demuestre que cada cha máxima, en un poset finito (S,) contiene un elemento mínimo de S. (Una cadena máxima es una cadena que no es un subconjunto de una cadena más grande).

** 32. Demuestre que cada poset finito se puede dividir en k cadenas, donde k es el mayor número de elementos en una antichain en este poset.

* 33. Muestre que en cualquier grupo de millones + 1 personas hay un lista de m + 1 personas donde una persona en la lista (excepto para la primera persona en la lista) es un descendiente del anterior por hijo en la lista, o hay n + 1 personas tales que ninguno de estas personas son descendientes de cualquiera de las otras n personas. [Sugerencia: utilice el ejercicio 32].

Suponga que (S,) es un conjunto parcialmente ordenado bien fundado. El principio de inducción bien fundada establece que P (x) es verdadero para todos los XES ifVx (Vy (y -< x -+ P (y » -+ P (x».

34. Demuestre que no se necesita un caso base separado para el prin principio de inducción bien fundada. Es decir, P (u) es cierto para todos los elementos mínimos u en S ifVx (Vy (y -< x -+ P (y » -+ P (x ».

* 35. Demuestre que el principio de inducción bien fundado es válido.

Una relación R en un conjunto A es un cuasi ordenamiento en A si R es reflexiva y transitiva.

36. Sea R la relación en el conjunto de todas las funciones desde Z + hasta Z + tal que (f, g) pertenece a R si y solo si f es O (g). Demuestre que R es un cuasi ordenamiento.

37. Sea R un cuasi-ordenamiento en un conjunto A. Demuestre que R n RI es una relación de equivalencia.

*38. Sea R un cuasi ordenamiento y sea S la relación en el conjunto de clases de equivalencia de R n R -I tales que (C, D) pertenece a S, donde C y D son clases de equivalencia de R, si y solo si hay elementos c de C yd de D tales que (c, d) pertenece a R. Demuestre que S es un ordenamiento parcial.

Vapor arroz

Sea L una celosía. Definir las operaciones meet (! \) Y join (v) por x! \ Y = glb (x, y) y x V y = lub (x, y).

Cortar pez

39. Demuestre que las siguientes propiedades son válidas para todos los elementos. x, y, z de una celosía L.

a) x! \ y = y! \ x y x V y = y V x (conmutativo leyes)

Limpiar pez

b) (x! \ y)! \ z = x! \ (y! \ z) y (x v y) V z = x V (y V z) (leyes asociativas)

c) x! \ (x V y) = x y x V (x! \ y) = x (absorción leyes)

Encontrar receta

d) x! \ x = x y x V x = x (leyes idempotentes)

Página 69

40. Mostrar que si x e y son elementos de un enrejado L, entonces x vy = y si y solo si x / \ y = x.

Una celosía L está **acotada** si tiene un **límite superior**, de anotado por I, tal que x I para todo x EL y un **límite inferior**, denotado por 0, tal que 0 x para todo x E L.

41. Muestre que si L es un retículo acotado con límite superior I y límite inferior 0, entonces estas propiedades son válidas para todos los elementos x E L.

a) x v yo = yo   b) x / \ I = x
c) x v 0 = x   d) x / \ 0 = 0

42. Demuestre que todo retículo finito está acotado.

Una celosía se llama **distributiva** si x v (y / \ z) = (x vy) / \ (x v z) y x / \ (y v z) = (x / \ y) v (x / \ z) para todo x, y, y z en L.

*43. Da un ejemplo de una red que no sea distributiva.

44. Demuestre que la red (P (S),) donde P (S) es la potencia conjunto de un conjunto finito S es distributivo.

45. ¿Es distributiva la retícula (Z +, I)?

El **complemento** de un elemento a de una celosía acotada L con el límite superior I y el límite inferior 0 es un elemento b tal que a v b = I y a / \ b = O. Tal celosía se **complementa** si cada elemento de la celosía tiene un complemento.

46. Da un ejemplo de una red finita donde al menos una elemento tiene más de un complemento y al menos un elemento no tiene complemento.

47. Demuestre que la red (P (S),) donde P (S) es la potencia se complementa el conjunto de un conjunto finito S.

*48. Demuestre que si L es una red distributiva finita, entonces un elemento ment de L tiene como máximo un complemento.

El juego de Chomp, presentado en el Ejemplo 12 de la Sección I. 7, se puede generalizar para jugar en cualquier conjunto finito parcialmente ordenado (S,) con un elemento mínimo a. En este juego, un movimiento consiste en seleccionar un elemento x en S y eliminar x y todos los elementos más grande que de S. El perdedor es el jugador que se ve obligado a seleccione el elemento menor a.

49. Demuestre que el juego de Chomp con galletas arregladas en una cuadrícula rectangular de m x n, descrita en el Ejemplo 12 en la Sección 1.7, es el mismo que el juego de Chomp en el conjunto po (S, I), donde S es el conjunto de todos los inte Gers que dividen pm - l qn - l, donde p y q son distintos primos.

50. Demuestre que si (S,) tiene un elemento mayor b, entonces Existe una estrategia ganadora para Chomp en este conjunto de po. [Sugerencia: generalice el argumento del ejemplo 12 en la sección ción 1 .7.]

Proyectos informáticos

Escriba programas con estas entradas y salidas.

1. Dada la matriz que representa una relación en un finito establecer, determinar si la relación es reflexiva y / o irreflexivo.

2. Dada la matriz que representa una relación en un finito establecer, determinar si la relación es simétrica y / o anti simétrico.

3. Dada la matriz que representa una relación en un conjunto finito, determinar si la relación es transitiva.

4. Dado un entero positivo n, muestre todas las relaciones en un conjunto con n elementos.

*5. Dado un entero positivo n, determine el número de trans relaciones sitivas en un conjunto con n elementos.

*6. Dado un entero positivo n, determine el número de equiv.

campos comunes, encontrar la unión de estas relaciones con el respeto a estos campos comunes.

10. Dada la matriz que representa una relación en un conjunto finito, encontrar la matriz que representa el cierre reflexivo de este relación.

11. Dada la matriz que representa una relación en un conjunto finito, encontrar la matriz que representa el cierre simétrico de este relación.

12. Dada la matriz que representa una relación en un conjunto finito, encontrar la matriz que representa el cierre transitivo de este relación calculando la unión de las potencias de la matriz representando la relación.

13. Dada la matriz que representa una relación en un conjunto finito,

relaciones de alencia en un conjunto con n elementos.

* 7. Dado un entero positivo n, muestre todos los equivalentes relaciones de lanza en el conjunto de las n menores positivas enteros.

8. Dada una relación n-aria, calcule la proyección de esta relación cuando se eliminan los campos especificados.

9. Dada una relación m-aria y una relación n-aria, y un conjunto de encontrar la matriz que representa el cierre transitivo de este relación utilizando el algoritmo de Warshall.

14. Dada la matriz que representa una relación en un conjunto finito, encuentre la matriz que representa la relación de equivalencia más pequeña que contiene esta relación.

15. Dado un orden parcial en un conjunto finito, encuentre un orden total compatible con él mediante clasificación topológica.

Página 70

Cálculos y exploraciones

Utilice un programa o programas computacionales que haya escrito para realizar estos ejercicios.

1. Muestre todas las relaciones diferentes en un conjunto con cuatro elementos.
2. Mostrar todas las diferentes relaciones simétricas y reflexivas en un set con seis elementos.
3. Mostrar todas las relaciones reflexivas y transitivas en un conjunto. con cinco elementos.

« 4. Determinar cuántas relaciones transitivas hay en un conjunto. con n elementos para todos los enteros positivos n con n ::: 7.

5. Encuentra el cierre transitivo de una relación de tu elección en un conjunto con al menos 20 elementos. O use una relación que corresponde a enlaces directos en un transporte particular o red de comunicaciones o utilizar una red generada aleatoriamente relación.
6. Calcule el número de relaciones de equivalencia diferentes en un conjunto con n elementos para todos los enteros positivos n que no excedan 20.
7. Muestre todas las relaciones de equivalencia en un conjunto con siete elementos.

* 8. Muestra todos los pedidos parciales en un conjunto con cinco elementos.
* 9. Muestre todas las celosías en un conjunto con cinco elementos.

Proyectos de escritura

Responda a estas preguntas con ensayos utilizando fuentes externas.

1. Analice el concepto de relación borrosa. ¿Cómo son borrosos relaciones utilizadas?
2. Describe los principios básicos de las bases de datos relacionales, ve más allá de lo cubierto en la Sección 8.2. Cuán ampliamente utilizadas son bases de datos relacionales en comparación con otros tipos de bases de datos?
3. Busque los documentos originales de Warshall y Roy (en Francés) en el que desarrollan algoritmos para encontrar tran cierres sitivos. Discuta sus enfoques. Por qué supongamos que lo que llamamos el algoritmo de Warshall fuera cubierto de forma independiente por más de una persona?
4. Describa cómo se pueden utilizar las clases de equivalencia para definir los números racionales como clases de pares de enteros y cómo las operaciones aritméticas básicas en números racionales puede definirse siguiendo este enfoque. (Ver ejercicio 40 en la Sección 8.5.)
5. Explique cómo Helmut Hasse usó lo que ahora llamamos Hasse. diagramas.
6. Describa algunos de los mecanismos utilizados para hacer cumplir la información. políticas de flujo de información en los sistemas operativos de las computadoras.
7. Analizar el uso de la evaluación y revisión del programa. Técnica (PERT) para programar las tareas de un gran com proyecto plicado. ¿Qué tan ampliamente se usa PERT?
8. Analice el uso del método de ruta crítica (CPM) para encontrar el tiempo más corto para la finalización de un proyecto. Cómo ¿Se utiliza ampliamente el CPM?
9. Discuta el concepto de dualidad en una red. Explique cómo la dualidad se puede utilizar para establecer nuevos resultados.
10. Explique qué se entiende por celosía modular. Describir algunas de las propiedades de las celosías modulares y describen cómo surgen las celosías modulares en el estudio de proyectivas geometría.

Página 71