Lógica de predicados

1. Lenguaje formal

(parte 2)

Juan Carlos León

Universidad de Murcia

Esquema del tema

- 1.1. Nombres y predicados
- 1.2. Cuantificadores y variables
- 1.3. Silogística y lógica de predicados
- 1.4. Relaciones
- 1.5. Formalización
- 1.6. Lógica de primer orden y lógica de orden superior

Lógica de predicados
1. Lenguaje formal

1.4. Relaciones

Proposiciones relacionales

- Algunas proposiciones, más que atribuir una propiedad a un objeto, expresan que se da una cierta relación entre objetos
- Por ejemplo

  El rey Felipe VI es el padre de la princesa Leonor

  dice que entre el rey y la princesa se da la relación de filiación (ser padre de)
- Podemos expresar esto escribiendo

  Fab

  (*a*: el rey; *b*: la princesa; *Fxy*: *x* es padre de *y*)
- El orden de las constantes es relevante: "*Fab*" es verdadera; "*Fba*" es falsa

Propiedades y relaciones

- El ejemplo anterior puede también analizarse así:

  Ga

  (*a*: el rey; *Gx*: *x* es el padre de la princesa). O sea, como la atribución de una propiedad a un objeto
- Y también de este modo:

  Hb

  (*b*: la princesa; *Hx*: el rey es el padre de *x*; o *x* tiene por padre al rey)
- Los tres análisis son correctos, pero el primero ("*Fab*") es más revelador de la estructura relacional de la proposición, y permite examinar con más detalle sus consecuencias lógicas

Cuantificación y relaciones

- Combinando la notación de cuantificadores y variables con la de relaciones, podemos expresar "la princesa tiene un padre" escribiendo

  ∃x *Fxb*
- Para decir que el rey tiene una hija, escribiríamos

  ∃x *Fax*
- El orden de las constantes y variables es, de nuevo, relevante: "∃x *Fbx*" nos habla de un hijo de la princesa; y "∃x *Fxa*", del padre del rey

Cuantificación múltiple

- Podemos también combinar en una misma fbf el cuantificador universal y el existencial
- Por ejemplo, para decir que todos tienen un padre, escribiríamos

  $\forall x \exists y\ Fyx$
- Eso debe distinguirse cuidadosamente de

  $\forall x \exists y\ Fxy$

  que dice que todos son padres de alguien

El orden de los cuantificadores

- El orden de los cuantificadores es también esencial:

  $\exists y \forall x\ Fyx$

  dice que alguien es el padre de todos, y

  $\exists y \forall x\ Fxy$

  que alguien es hijo de todos
- Por supuesto, aquí es fundamental usar dos variables distintas:

  $\exists x\ Fxx$

  $\forall x\ Fxx$

  significan, respectivamente, que alguien es su propio padre, y que todos son sus propios padres

Predicados poliádicos

- Una letra predicativa seguida de una sola constante o variable es una letra monádica; seguida de dos, es una letra diádica; seguida de tres, triádica; de cuatro, tetrádica; etc.
- En general, una letra predicativa seguida de *n* constantes o variables es una letra *n*-ádica
- Por ejemplo, una relación entre tres objetos, como la expresada en "Madrid está entre La Coruña y Cartagena" se representaría con tres constantes y un predicado triádico:

  Fabc

  (*a*: Madrid; *b*: La Coruña; *c*: Cartagena; *Fxyz*: *x* está entre *y* y *z*)

Lógica de predicados

1. Lenguaje formal

1.5. Formalización

Adjetivos y cláusulas relativas

- Los adjetivos, las cláusulas relativas y las exceptivas dan lugar a conjunciones de predicados. Ejemplos:
- Los colores brillantes llaman la atención

  $\forall x\ (Fx \wedge Gx \rightarrow Hx)$

  (Fx: x es un color; Gx: x es brillante; Hx: x llama la atención)
- Un enfermo que no se cuida empeora

  $\forall x\ (Fx \wedge \neg Gx \rightarrow Hx)$

  (Fx: x es un enfermo; Gx: x se cuida; Hx: x empeora)
- A Pepe le gustan todas las chicas excepto las pelirrojas

  $\forall x\ (Fx \wedge \neg Gx \rightarrow Hxa)$

  (a: Pepe; Fx: x es una chica; Gx: x es pelirroja; Hxy: x le gusta a y)

Sólo los *F* son *G*

- Decir que

  Sólo los hombres fuman

  equivale a afirmar que

  para todo x, sólo si x es hombre, x fuma
- Teniendo en cuenta que “sólo si A, entonces B” equivale a “si B, entonces A”, lo anterior equivaldrá a

  para todo x, si x fuma, x es hombre

  o sea,

  Todo fumador es hombre
- En general, “sólo los *F* son *G*” habrá se simbolizarse así:

  $\forall x\ (Gx \rightarrow Fx)$

Cuantificación múltiple y predicados complejos

- Según el énfasis que pongamos en el artículo indeterminado “una”, la frase

  Todos los chicos aman a una chica

  puede significar dos proposiciones distintas:

  (1) Para todo chico, hay alguna chica a la que él ama

  (2) Hay una chica que es amada por todo chico

Formalización de (1)

- La proposición (1) tiene, globalmente, la estructura de una proposición de tipo A:

  $\forall x$ (x es un chico $\rightarrow$ x ama a alguna chica)

- Pero el segundo predicado es complejo: incluye una cuantificación existencial y una relación:

  $\exists y$ (y es una chica $\wedge$ x ama a y)

- La formalización completa será, pues,

  $\forall x\, (Fx \rightarrow \exists y\, (Gy \wedge Hxy))$

  (Fx: x es un chico; Gx: x es una chica; Hxy: x ama a y)

Formalización de (2)

- En la proposición (2) tenemos, globalmente, una estructura de tipo I:

  $\exists x$ (x es una chica $\wedge$ x es amada por todo chico)

- Aquí el segundo predicado incluye una cuantificación universal y una relación:

  $\forall y$ (y es un chico $\rightarrow$ y ama a x)

- Manteniendo las convenciones simbólicas anteriores, la formalización completa será

  $\exists x\ (Gx \wedge \forall y\ (Fy \rightarrow Hyx))$

El argumento de De Morgan

- Para evidenciar la incapacidad de la lógica tradicional para analizar las proposiciones relacionales, De Morgan (1860) propuso como ejemplo el siguiente argumento:

  Todo caballo es un animal

  luego, la cabeza de un caballo es la cabeza de un animal

- Aunque es obviamente válido, la teoría silogística es incapaz de dar cuenta de esa validez, al no contar con los necesarios instrumentos para el análisis lógico de su conclusión

Augustus De Morgan

Formalización del argumento (Ejercicio 1.09)

- La formalización de la premisa no ofrece dificultad:

  $\forall x\ (Fx \rightarrow Gx)$

  (Fx: x es un caballo; Gx: x es un animal)
- Globalmente, la conclusión tiene la estructura de una proposición de tipo A:

  $\forall x$ (x es la cabeza de un caballo $\rightarrow$ x es la cabeza de un animal)
- Necesitamos usar una letra diádica para la relación que figura en antecedente y consecuente

  Hxy: x es la cabeza de y
- La formalización de la conclusión es entonces

  $\forall x\ (\exists y\ (Fy \land Hxy) \rightarrow \exists y\ (Gy \land Hxy))$

Proposiciones inclasificables en los cuatros tipos tradicionales

- Consideremos este argumento:

  Si alguien se dirige a alguien, es que alguien les ha presentado. Nadie presenta nadie a nadie a no ser que conozca a ambos. Todos se dirigen a Pepe. Luego, todos le han sido presentados por alguien que le conoce
- Cualquier intento de clasificar las proposiciones que componen este argumento en una de las cuatro formas clásicas resultaría sumamente forzado
- Para formalizarlo necesitamos estas convenciones:

  Fxy: x se dirige a y; $Gxyz$: x presenta a y a z;

  Hxy: x conoce a y; a: Pepe

Formalización del argumento (Ejercicio 1.16)

- En la primera premisa, las dos primeras apariciones de la palabra “alguien” tienen sentido universal; la tercera, en cambio, tiene un sentido existencial:

  $\forall x \forall y\ (Fxy \rightarrow \exists z\ Gzxy)$
- La segunda premisa puede formalizarse así:

  $\forall x \forall y \forall z\ (\neg Gxyz \vee (Hxy \wedge Hxz))$

  o , alternativamente,

  $\forall x \forall y \forall z\ (Gxyz \rightarrow Hxy \wedge Hxz)$
- La tercera es simplemente

  $\forall x\ Fxa$
- Y la conclusión:

  $\forall x \exists y\ (Gyxa \wedge Hya)$

Lógica de predicados
1. Lenguaje formal

1.6. Lógica de primer orden y lógica de orden superior

La lógica elemental

- La lógica que estamos estudiando se denomina de dos maneras, la segunda de ellas bastante más precisa que la primera:
  - Lógica elemental
  - Lógica de predicados de primer orden
- Obviamente, esta segunda denominación implica la existencia de una lógica de predicados de orden superior

Predicación y cuantificación de primer orden

- Los predicados que hemos usado hasta aquí son predicados de primer nivel, o de primer orden: se atribuyen a individuos y se presume que significan propiedades de individuos
- Los cuantificadores se refieren igualmente a objetos individuales: es decir, hasta aquí hemos usado también una cuantificación de primer orden
- Por ello, las constantes y las variables que hemos usado son constantes y variables individuales

Predicados de orden superior

- Evidentemente, existen también predicados de predicados, que no se atribuyen a objetos individuales, sino a otros predicados
- Por ejemplo, “ser vacío” (o “no darse en ningún objeto”) es un predicado de segundo orden, que puede atribuirse con verdad al predicado de primer nivel “ser un unicornio”

Jerarquía de predicados

- Frege únicamente distinguía dos niveles de predicación: predicados de individuos y predicados de predicados
- Este planteamiento natural condujo a ciertas contradicciones; la más importante de las cuales es la paradoja de Russell, que se estudiará más tarde
- Para evitar esas dificultades, Russell propuso una infinita jerarquía de niveles de predicación:
  - Nivel 1: predicados de individuos
  - Nivel 2: predicados de predicados de individuos
  - Nivel 3: predicados de predicados de predicados de individuos
  - Etc.

Cuantificación de orden superior

- También es evidente que podemos cuantificar sobre propiedades, y no sólo sobre individuos, como cuando decimos, por ejemplo, que un padre y un hijo tienen ciertos rasgos en común:

  $\forall x \forall y\ (Fxy \rightarrow \exists G\ (Gx \wedge Gy))$

  (*Fxy*: *x* es padre de *y*; aquí *“G*” no puede interpretarse como un predicado concreto: es una variable predicativa)

Leyes lógicas de orden superior

- Algunas leyes y reglas de inferencia más o menos usuales requieren de cuantificación de segundo orden
- Por ejemplo, el principio de identidad de los indiscernibles: dos cosas que tengan todas las propiedades en común, serán la misma cosa
- O el principio de inducción matemática: una propiedad que corresponda al número 0 y al sucesor de cualquier número natural que la tenga, corresponde a todos los números naturales

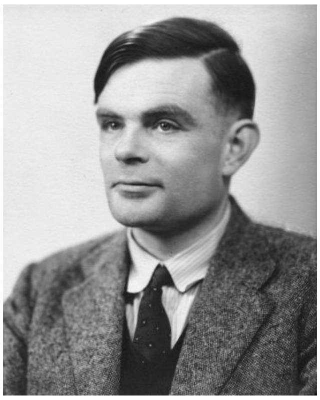
Dificultades en lógica de orden superior

- El paso de la lógica de primer orden a la lógica de orden superior es mucho más drástico de lo que pueda imaginarse inicialmente
- La lógica elemental es algo bien conocido y puede considerarse plenamente desarrollada
- La lógica de orden superior, en cambio, es terreno en buena parte ignoto, y escasamente bajo control, donde han surgido importante dificultades, que sólo han logrado solventarse de forma un tanto *ad hoc*

Situación metateórica comparativa

	Consistencia	Completitud	Decidibilidad
Lógica proposicional	Sí	Sí	Sí
Lógica de primer orden	Sí	Sí	No (Church y Turing, 1936)
Lógica de orden superior	¿?	No, supuesta la consistencia (Gödel, 1931)	No

Alonzo Church y Alan Turing



Bertrand Russell y Kurt Gödel