UNSA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN AGUSTÍN DE AREQUIPA

INTEGRANTES

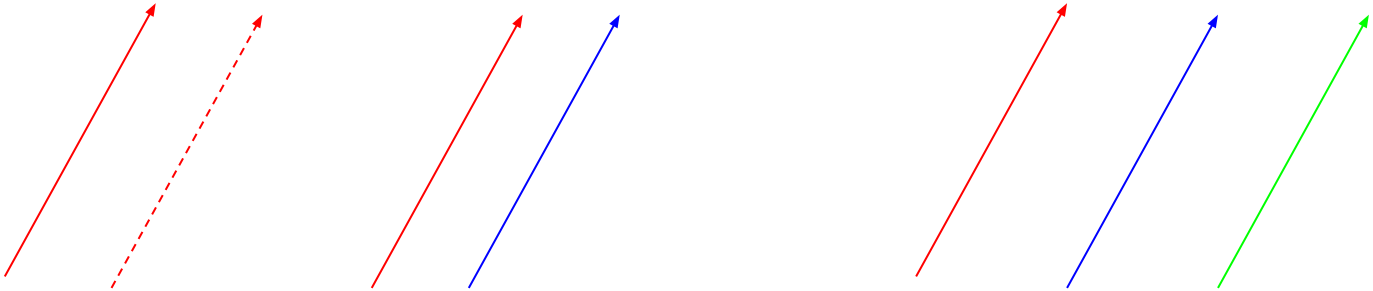
-Josue Gabriel Sumare Uscca
-Ronald Romario Gutierrez Arratia
-Alessander Jesus Carazas Quispe

RELACIONES DE EQUIVALENCIA

CONCEPTO DE EQUIVALENCIA

La equivalencia sirve para indicar que los elementos de un conjunto compartan las mismas características o propiedades con otros elementos del mismo conjunto.

Esto ayuda a clasificar los elementos de una relación que está sujeto a ciertas propiedades específicas.



L1 // L1 L1 // L2 L1 // l2 // l3 => l1//l3

Definición sobre Relaciones de equivalencia

-Una relación es un conjunto.
-Una relación binaria, es una relación de equivalencia siempre y cuando , cuando cumple las siguientes propiedades,que son reflexivas, simétricas y transitivas.
-Las relaciones de equivalencia son relaciones entre los elementos de un conjunto cualquiera.

Si $\mathrm{R} \in \mathrm{A} \times \mathrm{A}$ *es una relación de equivalencia, entonces decimos que el par* $(a,b) \in \mathrm{R}$ *tiene componentes equivalentes y se simboliza por* $a \approx b$*, decimos entonces que* a *es* ***equivalente*** *a* b.

Propiedades de las relaciones de equivalencia

Propiedad Reflexiva:

$$\forall a \in A \rightarrow a\,R\,a$$

-Todos los elementos que pertenecen al conjunto A deben estar presentes en la relación siendo pares idénticos de los elementos.

Ejemplo:

A={1,2,3,4}

R={(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);.........;(1,2)}

Propiedad Simétrica

$$\forall a,b \in A \rightarrow a\,R\,b \rightarrow b\,R\,a$$

-Para todo par ordenado cuyos elementos están en el conjunto A , perteneciente a la relación entonces debe estar su inversa.

Ejemplo:

A={1,2,3}

R={(1,2);(2,1);(2,3);(3,2);(1,1)}

Explicación : Los pares ordenados subrayados son la inversa de anteriores pares mencionados esto lo que hace es que esté presente la propiedad simétrica.

Ojo: La propiedad antisimétrica se cumple si y sólo si la relación no es simétrica y no tiene ningún par ordenado con esta relacion a excepción de los pares con iguales elementos: (a,a).

Propiedad Transitiva

$$\forall a,b,c \in A \rightarrow a\,R\,b \wedge b\,R\,c \rightarrow a\,R\,c$$

-Para toda pareja de par ordenado cuya característica sea que el último elemento del par ordenado es igual al primer elemento del segundo par ordenado , entonces para que se considere transitiva tiene que existir otro par ordenado cuyos elementos están conformados por los elementos restantes del elemento idéntico de ambos pares.

Ejemplo:

A={1,2,3}

R={(1,2);(2,3);(1,3)}

Explicación : El par ordenados subrayado es la consecuencia de la propiedad transitiva , ya que el número "2" se repite en el segundo elemento del primer par ordenado y el otro en el primero respectivamente por lo que debe haber una par ordenado que contenga al 1 y al 3 respectivamente Ojo: de haber elementos simétricos se debe asegurar que hay dos pares ordenados mas cuyos elementos cumplan sean iguales es decir:

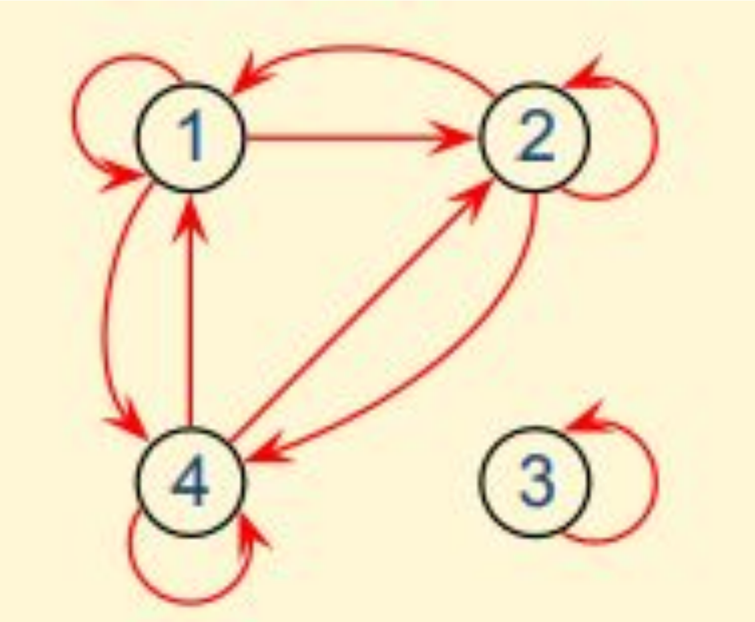
R={(1,2);(2,1);(1,1);(2,2)} es transitiva

Clases de equivalencia

Sea(A;~) [a]=Cl(a)={x ∈ A / x ~ a}

Donde:

- ~ : Se define que en el conjunto a hay una relación de equivalencia.
- [a] , Cl(a): Clase de "a".



Explicación: Una clase se define como todos aquellos elementos con los que está relacionado.

Propiedades de las Clases de equivalencia

1.No existe clases vacias:

$$\forall x \in X ; Cl(x) \neq \varnothing$$

Argumento: La propiedad reflexiva de una relación de equivalencia impide que las clases sean vacías.

2. Si $x \in Cl(x) \rightarrow Cl(y)=Cl(x): z \in Cl(y) \rightarrow z \in Cl(x)$

Argumento: Ya que al ser una clase igual que la otra , quiere decir que ambos elementos de las clases se relacionan, por lo que todo elemento "z" perteneciente a una clase por propiedad también pertenece a la otra clase

3. SI $x, y \in X$ se verifica que las $Cl(x), Cl(y)$ no son disjuntos -> $Cl(x) \cap Cl(y) \neq \varnothing$ -> $Cl(x)=Cl(y)$.

Argumento:

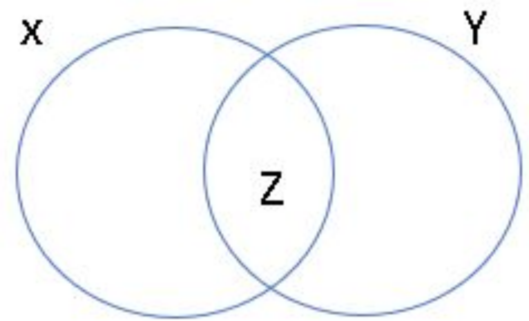
Si $x \in Cl(x)$ -> $Cl(y)=Cl(x)$:

$z \in Cl(y)$ -> $z \in Cl(x)$

-Sea $z \in Cl(x) \cap Cl(y) \neq \varnothing$:

-$z \in Cl(x)$ -> $z \; R \; x$................(I)

-$z \in Cl(y)$ -> $z \; R \; y$ ....(II)



-Por propiedad simétrica en (I): x ~ R~z

-Por propiedad transitiva en (I) y (II): " x R z " con z R y" -> x R y

-Como al final llegamos a relacionar a ambos elementos decimos que son de la misma clase como explicamos en el concepto de relación de equivalencia

Conjunto cociente

$$\text{Sea}(A;\sim) \quad A/\sim\ = \{Cl(a) / a \in A\}$$

Donde:

- ~ : Se define que en el conjunto a hay una relación de equivalencia.
- [a],Cl(a): Clase de "a".

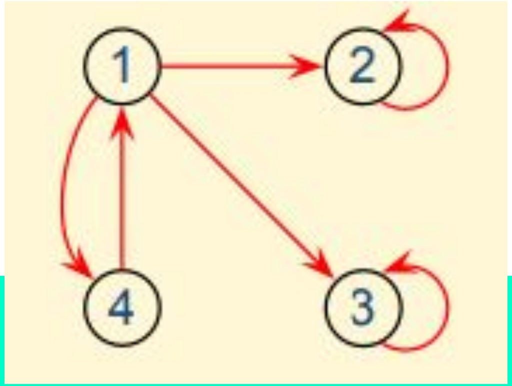
Explicación: Es el conjunto de las clases de equivalencia de todos los elementos.

EJEMPLOS DE RELACIONES DE EQUIVALENCIA

1. Determinar cuál Relación es de Equivalencia

A= {1,2,3,4}

R1= {(1,2),(1,3),(1,4),(4,1),(2,2),(3,3)}



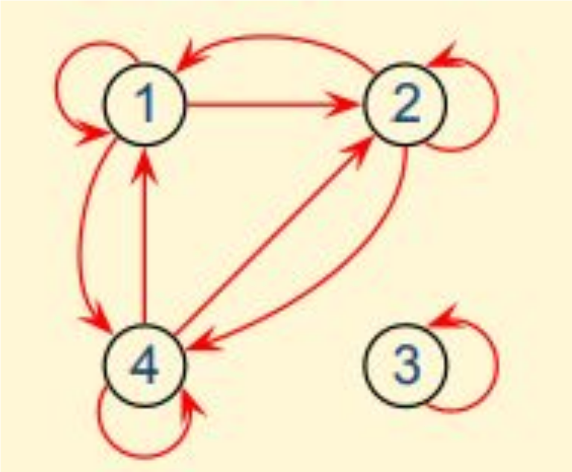
Reflexiva ✗

Simétrica ✗

Transitiva ✗

Relación NO de Equivalencia

R2={(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(1,4),(2,1),(4,1),(2,4),(4,1)}



Reflexiva ✓

Simétrica ✓

Transitiva ✓

Relación de Equivalencia

2. Demostrar la Relación de Equivalencia de:

$$\mathbb{R}\backslash\{1\}, \mathrm{aRb} \Leftrightarrow \frac{a^2}{a-1} = \frac{b^2}{b-1}$$

2.1 Reflexiva:

aRa $\longrightarrow$ $\frac{a^2}{a-1} = \frac{a^2}{a-1}$ **bRb** $\longrightarrow$ $\frac{b^2}{b-1} = \frac{b^2}{b-1}$

SI es reflexiva

2.2 Simétrica:

$$aRb \Rightarrow bRa$$

$$aRb \Rightarrow \frac{a^2}{a-1} = \frac{b^2}{b-1}$$

$$=$$

$$bRa \Rightarrow \frac{b^2}{b-1} = \frac{a^2}{a-1}$$

SI es Simétrica

2.3 Transitiva:

$$aRb,\ bRc \Rightarrow aRc$$

$$aRb \Rightarrow \frac{a^2}{a-1} = \frac{b^2}{b-1} \qquad bRc \Rightarrow \frac{b^2}{b-1} = \frac{c^2}{c-1}$$

$$\frac{a^2}{a-1} = \frac{c^2}{c-1} \Rightarrow \boxed{aRc}$$

SI es Transitiva

3. En el conjunto de los enteros Z, se define:

$$aRb \Leftrightarrow 5 \mid \mathrm{a}-\mathrm{b}$$

demuestra que R es de equivalencia.

$$\boxed{aRb \Leftrightarrow 5 \mid \mathrm{a}-\mathrm{b} \Leftrightarrow \mathrm{a}-\mathrm{b} = 5.\mathrm{k} \;\wedge\; \mathrm{k} \in \mathbb{Z}}$$

3.1 Reflexiva:

$$\forall \mathrm{x} \in \mathbb{Z} : \mathrm{x}-\mathrm{x} = 0 \;\Rightarrow \mathrm{x}-\mathrm{x} = 0.5 \;\Rightarrow 5 \mid \mathrm{x}-\mathrm{x} \;\Rightarrow xRx$$

SI es reflexiva

3.2 Simétrica:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : \boldsymbol{xRy} \Rightarrow 5 \mid x - y \Rightarrow x - y = 5.k \ \wedge \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow -(x - y) = -5.k \Rightarrow y - x = 5.(-k) \ \wedge \ -k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 5 \mid y - x \Rightarrow \boldsymbol{yRx}$$

SI es Simétrica

3.3 Transitiva:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Z} : \boldsymbol{xRy} \wedge \boldsymbol{yRz} \Rightarrow 5 \mid x - y \ \wedge \ 5 \mid y - z$$

$$\Rightarrow x - y = 5.k \ \wedge \ k \in \mathbb{Z} \ \wedge \ y - z = 5.t \ \wedge \ t \in \mathbb{Z}$$

Sumando mienbro a mienbro:

$$\Rightarrow x - y + y - z = 5.k + 5.t$$

$$\Rightarrow x - z = 5.(k + t) \ \wedge \ k + t \in \mathbb{Z} \Rightarrow 5 \mid x - z \Rightarrow \boldsymbol{xRz}$$

SI es Transitiva

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

http://www.revista.unam.mx/vol.10/num1/art03/int03-1.htm

https://www.dis.um.es/~ginesgm/files/sec4.2.pdf

https://ciencias-basicas.com/matematica/superior/relaciones-matematicas/relacion-de-equivalencia/?fbclid=IwAR28VP9r93ruAflBkf2JjLfk5esTz-nmzj3OA3A3Lw1wMGzUkPVbzrM1CbQ

GRACIAS