# LATICES

Integrantes:
John Edson Sanchez Chilo
Ronald Andrés Gómez Flores
Edson Bryan Béjar Román
Manuel Angel Nifla Llallacachi

# DEFINICIÓN

Una látice o red es un conjunto parcialmente ordenado por una relación de orden, en el cual cada subconjunto {a, b} de este, que consta de dos elementos, tiene una mínima cota superior y una máxima cota inferior.

Se escribirá la mínima cota superior del conjunto {a,b} como m.c.s({a, b}) y se denotará por "a + b". Similarmente se escribirá la máxima cota inferior del conjunto {a, b} como M.C.I({a, b}) y se denotará por "a. b".

# EJEMPLO:

A = { X ϵ IR / 5 < x <=17 }


COTA SUPERIOR >= X ϵ A

COTA INFERIOR <= X ϵ A

COTA SUPERIOR = [17, +∞>

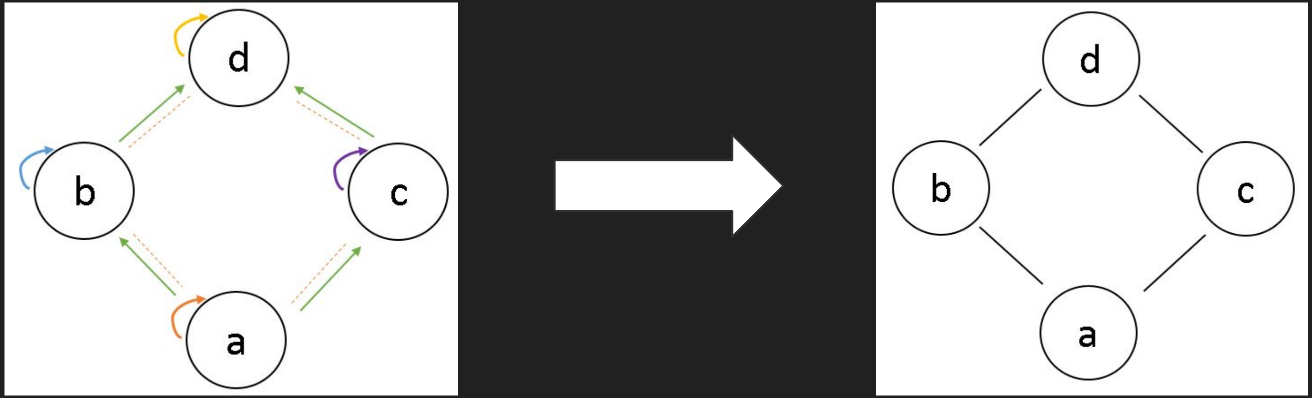
COTA INFERIOR = <-∞, 5]

MINIMA COTA SUPERIOR O SUPREMO = {17}

MAXIMA COTA INFERIOR O INFIMO = {5}

# Diagramas de Hasse

- Se usan para simplificar los gráficos de las relaciones binarias



Características:

- Necesitamos una relación binaria.

Por ejemplo:

$$aRb \mid a \leq b \longrightarrow (1,2)$$
$$(2,3)$$

- Necesitamos que la relación sea de orden **parcial**.

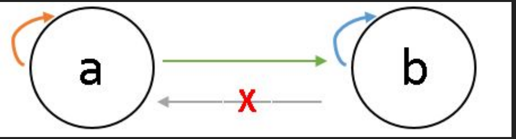
  Para que la relación sea parcial debe ser: Reflexiva, antisimétrica y transitiva.

  **-Reflexiva**

(a,a)(b,b)...

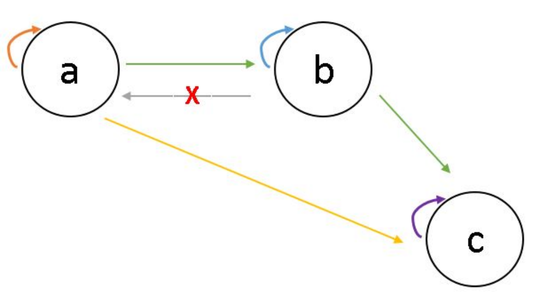
## -Antisimétrica:

$(a,b) \longrightarrow (b,a)$ X $\rightarrow$ no aparece




## -Transitiva:

$$(a,b),(b,c) \longrightarrow (a,c)$$



- Para nombrar usaremos la notación (A,R) donde "A" será el conjunto del que haremos el diagrama de Hasse, y "R" la relación que tendrá.

Por ejemplo:

$(\mathbb{N}, |)$

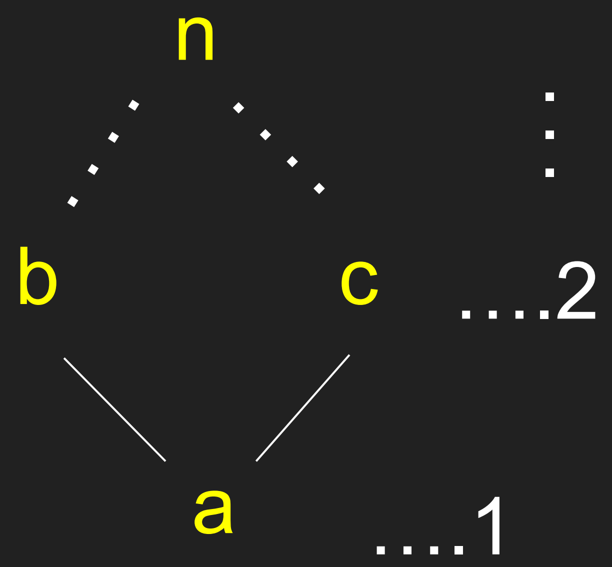
Donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales y "|" la relación de divisibilidad.

$(\mathbb{Z}, \leq)$

Donde $\mathbb{Z}$ es el conjunto de los números enteros y "$\leq$" nos indica que la relación es de "menor igual".

# Para graficar:

❖ Se dibuja de abajo hacia arriba



# Ejemplo:

Si nos piden hallar el diagrama de Hasse del conjunto de los divisores de 30, con relación de divisibilidad.**($H_{30}$)**

- La notación sería…

$(D_{30},|)$ →

Donde $D_{30}$ sería el conjunto de los divisores de 30, y "|" nos indica que la relación es de divisibilidad.

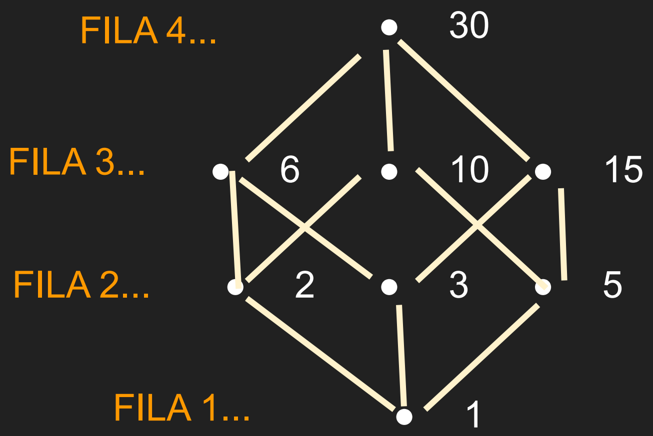
- Primero descomponemos el 30 para sacar sus divisores

| | |
|---|---|
| 30 | 2 |
| 15 | 3 |
| 5 | 5 |
| 1 | |

Por descomposición:
30 = 2.3.5.1

El conjunto sería:
{1,2,3,5,6,10,15,30}

- Se grafica de abajo hacia arriba, en la primera fila se coloca el número menor.



# Propiedades:

Si tenemos: $H_n$

- En el primer nivel, siempre se coloca el 1;y en el último, n.
- Si n es la potencia de un primo, el diagrama es una cadena.
- Los elementos de cada nivel no se relacionan entre ellos.
- Si $m|n \longrightarrow H_m \subset H_n$

Ejemplo:

1. Realizar el diagrama de Hasse del conjunto de los divisores de 32, con relacion de divisibilidad.($H_{32}$)

- La notación sería:

$(D_{32}, |)$

- Por descomposición:

$32=2^5$

2. Realizar el diagrama de Hasse de los conjuntos de de los divisores de 40 y 20 por relacion de divisibilidad.

- Las notaciones serian:

$(D_{40},|)$ $(D_{20},|)$

- Encontramos que:

$20|40$

- Por lo tanto:

$H_{20} \subset$

$H_{40} \subset$

- Los conjuntos serían:

$D_{20}$:{1,2,5,4,10,20}

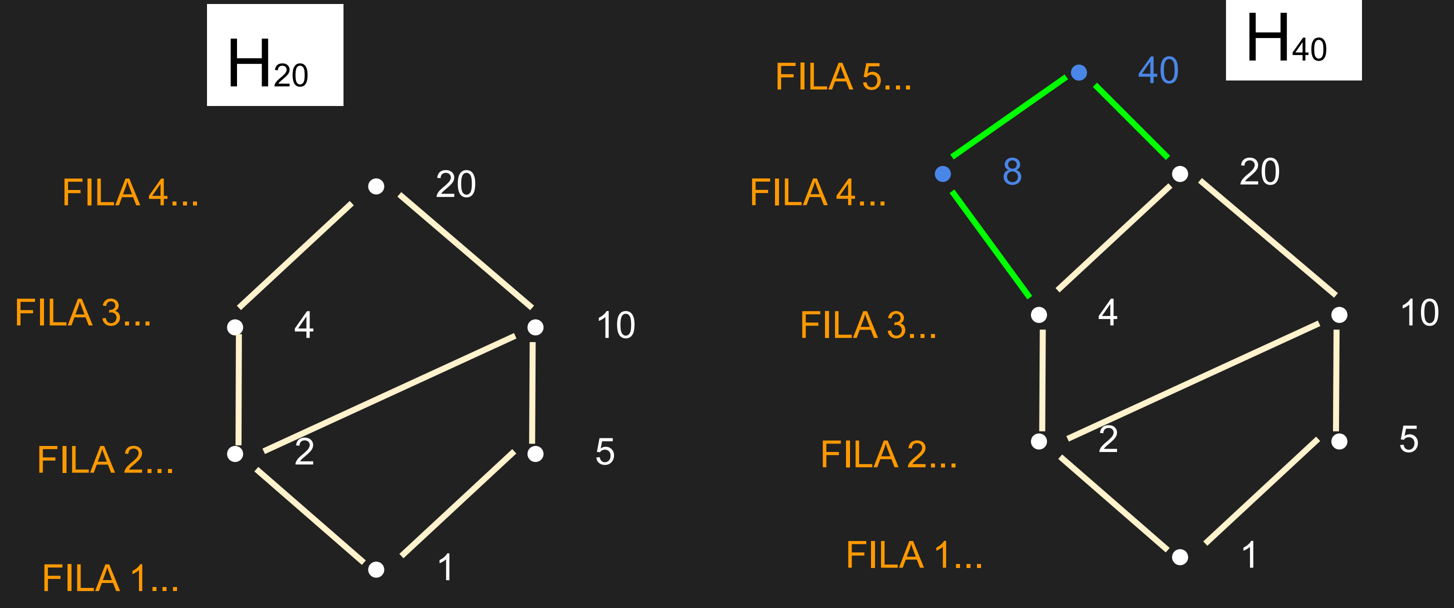
$D_{40}$:{1,2,5,4,10,8,20,40}

$D_{20}$:{1,2,5,4,10,20}

$20 = 2.2.5$

$D_{40}$:{1,2,4,5,8,10,20,40}

$40 = 2.2.2.5$



Diagramas de Hasse en Latices:

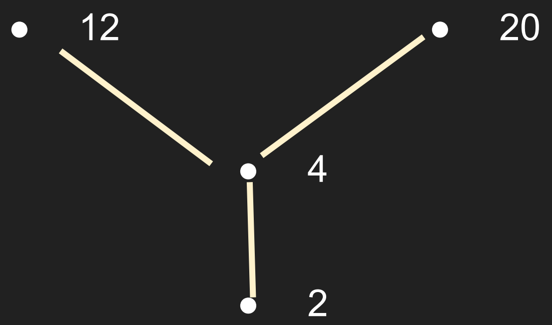
En un diagrama de Hasse encontramos los siguientes puntos:

- Máximo: Solo puede haber un elemento, y es el que no tiene elementos por encima de sí mismo.
- Maximal: El elemento o elementos que están por encima de todos.
- Mínimo:Sólo puede haber  un elemento, y es el que no tiene a nadie por debajo de sí mismo.
- Minimal:El elemento o elementos que están por debajo de todos los demás.

Ejemplo:

A:{2,4,12,20}

(A,|)




Mínimo:{2}

Máximo: No existe

Minimal:{2}

Maximales:{12,20}

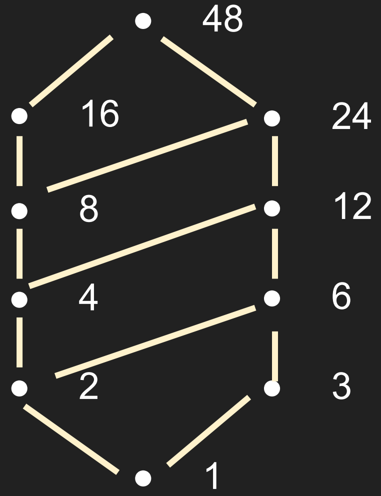
- También en cada par ordenado (a,b), podemos encontrar una Cota Superior y una Cota Inferior, dentro de estas mismas encontramos una Mínima Cota Superior y una Máxima Cota Inferior.

$H_{48}$

$(D_{48},|)$

$D_{48}$:{1,2,3,4,6,8,12,16,24,48}

40 = 2.2.2.2.3




Máximo:{48}
Mínimo:{1}
Maximal:{48}
Minimal:{1}
Cota superior (4,12)
:{12,24,48}
Cota inferior (4,12)
:{1,2,4}
Mínima Cota Superior (4,12)
:{12}
Máxima Cota Inferior (4,12)
:{4}

Si cada subconjunto (a,b) tiene Máxima Cota Inferior y Mínima Cota Superior, su diagrama de Hasse es Latice

# Sublátices

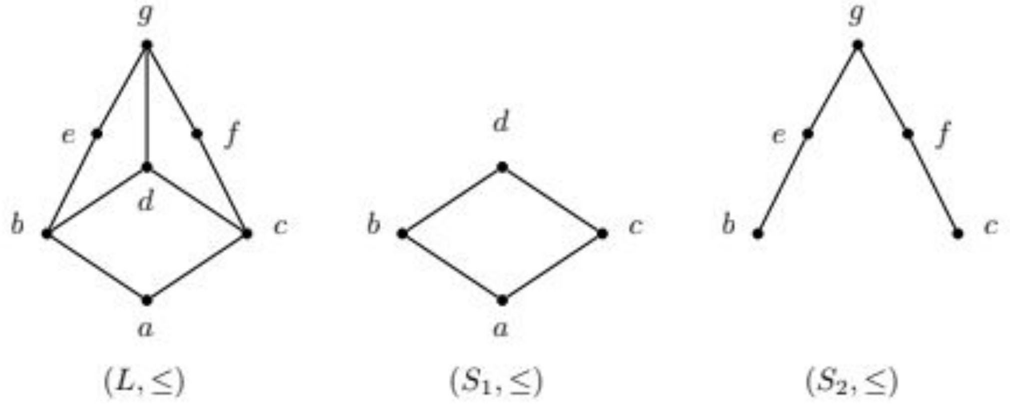



Figura 4.9: $(L, \leq)$ junto a $S_1$ y $S_2$

Es una látice

No es

Sea (L,<=) una látice. Un subconjunto no vacío S de L se denominará una sublátice si y sólo si

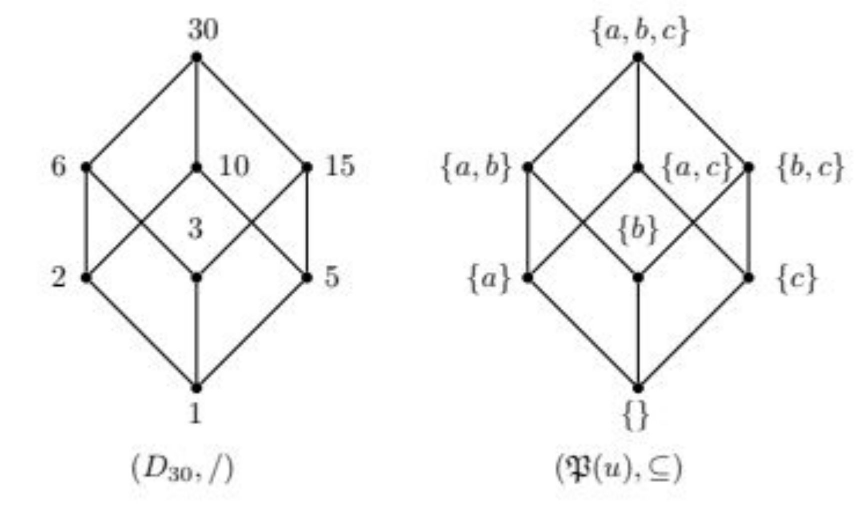
a ∨ b E S

a ∧ b E S

∀ a,b E S

# Latices isomorfas

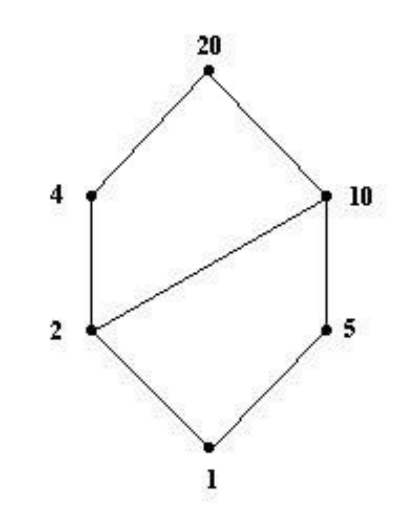
Dos latices son isomorfas si y sólo si el diagrama de Hasse de una de ellas se puede obtener a partir de otra reetiquetando los vértices.



# PROPIEDADES

**No olvidar:**
**a + b significa mínima cota superior**
**a.b significa máxima cota inferior**

**a <= a + b  y b  <= a + b, ya que a + b es la cota superior del conjunto { a , b }**



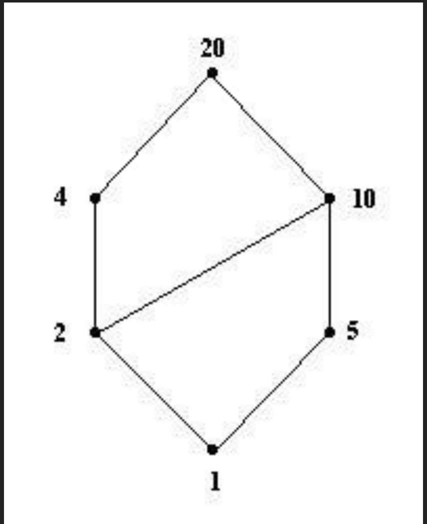

**{4,10}**

**4 <= 20 y 10 <= 20**

# PROPIEDADES

**No olvidar:**
**a + b significa mínima cota superior**
**a.b significa máxima cota inferior**

**a <= c  y b  <= c si y sólo si a + b <= c, ya que a + b es la mínima cota superior del conjunto { a , b }**




**{4,10}**

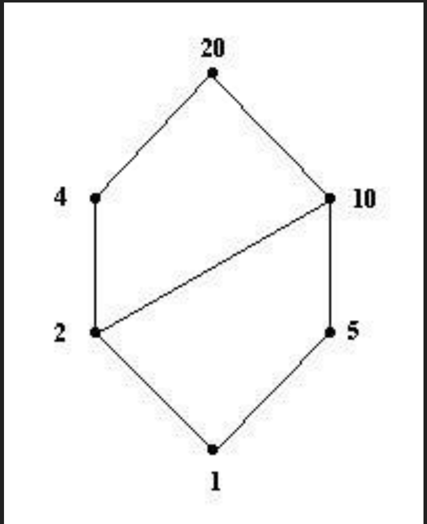
**4 <= 40 y 20 <= 40 si y sólo si**

**20 <= 40**

# PROPIEDADES

**No olvidar:**
**a + b significa mínima cota superior**
**a.b significa máxima cota inferior**

**a.b <= a  y a.b  <= b, ya que a.b es la cota inferior del conjunto { a , b }**



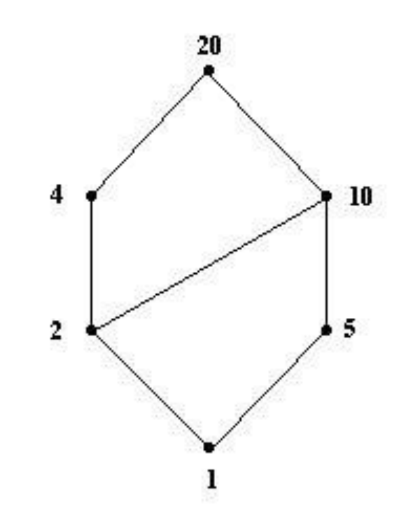

**{4,10}**

**1 <= 4 y**
**1 <= 10**

# PROPIEDADES

**No olvidar:**
**a + b significa mínima cota superior**
**a.b significa máxima cota inferior**

**c <= a y c <= b si y sólo si c <= a.b , ya que a.b es la máxima cota inferior del conjunto { a , b }**




**{4,10}**

**-2 <= 4 y**
**-2 <= 10 si**
**y sólo si**

**-2 <= 1**

# A tener en cuenta:

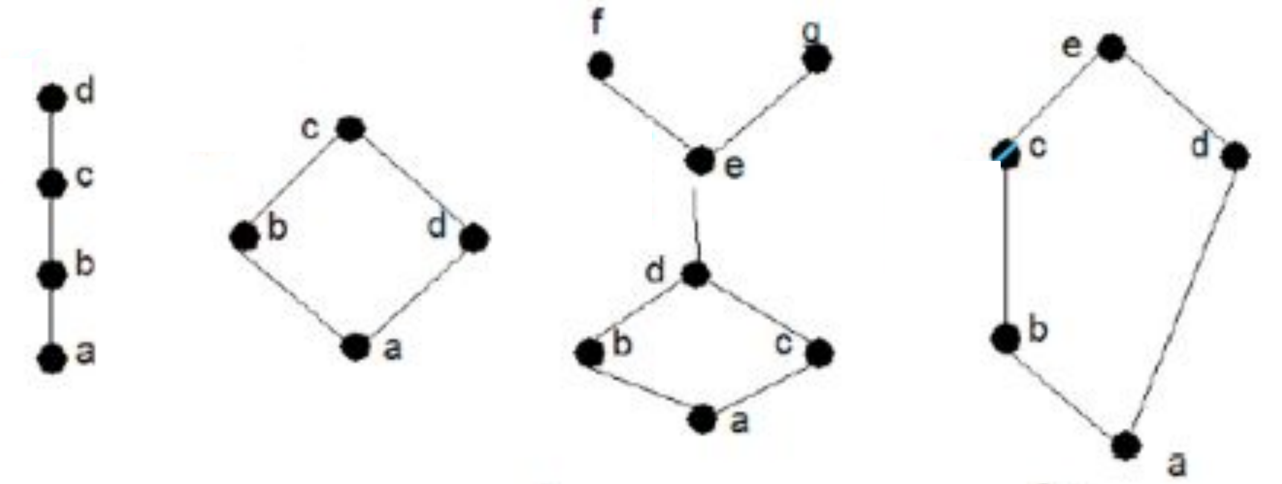
(1) Una retícula es un CPO $(L,\leq)$ tal que cada subconjunto $\{a,b\}$ de dos elementos de L tiene supremo e ínfimo.

(2) Elementos de un CPO:

Sea $(A,\leq)$ un CPO y $B \subseteq A$:

+ $a \in A$, a es una cota superior de B si $\forall b \in B$; $b \leq a$.
+ $a \in A$, a es una cota inferior de B si $\forall b \in B$; $a \leq b$.
+ mínima cota superior(SUPREMO):
  $\sup(\{a,b\}) = a + b = a \vee b$.

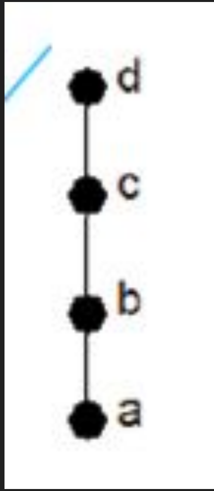
+ máxima cota inferior(ÍNFIMO):
  $\inf(\{a,b\}) = a \,.\, b = a \wedge b$.


d
c
b
a
c
b
d
a
f
g
e
d
b
c
a
e
c
d
b
a

# Propiedades de retículas:

Sea L una retícula.Para todo a y b $\in$ L:

- $a \vee b = b$ si solo si $a \leq b$.
- $a \wedge b = b$ si solo si $a \leq b$.
- $a \wedge b = b$ si solo si $a \vee b = b$.



# Propiedades de retículas:

Sea L una retícula, entonces:

(1) P. de Idempotencia:

$a \vee a = a$, $\qquad a \wedge a = a$

(2) P. Conmutativa:

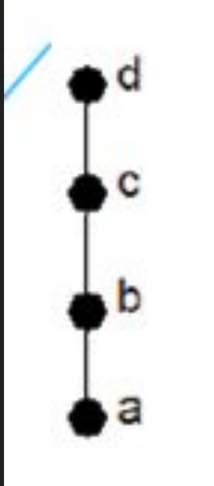
$a \vee b = b \vee a$, $\qquad a \wedge b = b \wedge a$

(3) P. Asociativa:

$a \vee (b \vee a) = (a \vee b) \vee c$, $\qquad a \wedge (b \wedge a) = (a \wedge b) \wedge c$

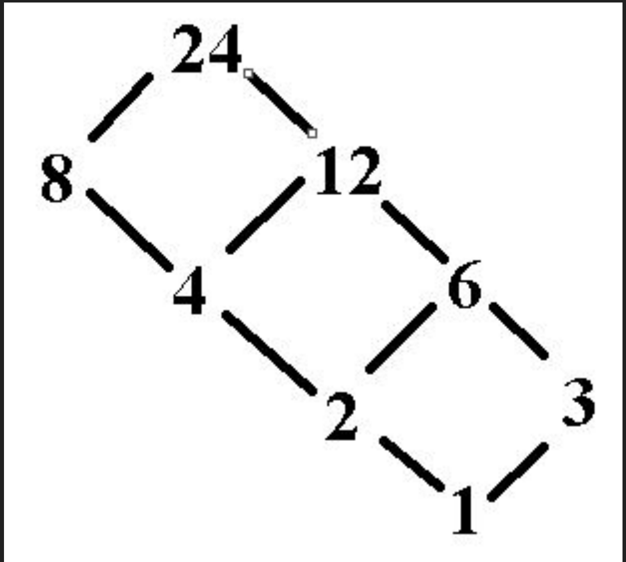
(4) P. Absorción:

$a \vee (a \wedge b) = a$, $\qquad a \wedge (a \vee b) = a$



# Ejercicios adicionales

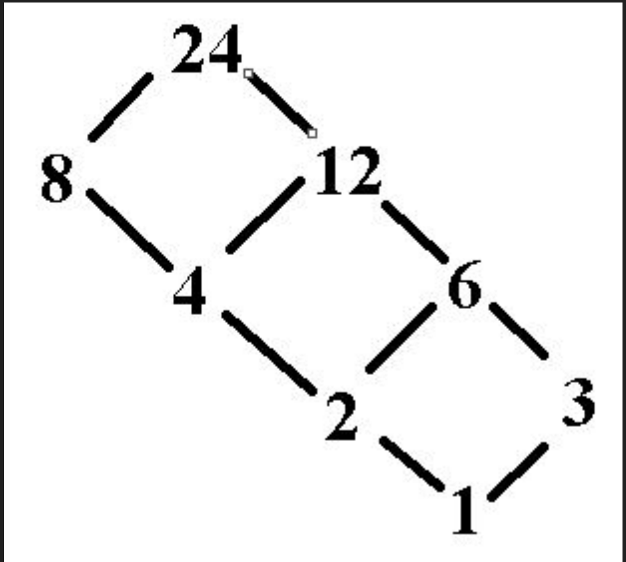
**Encuentre todas las sublátices de D(24) que contengan al menos 5 elementos**




**D(24)={1,2,3,4,5,6,8,12,24}**

# Ejercicios adicionales

**Encuentre todas las sublátices de D(24) que contengan al menos 5 elementos**




**D(24)={1,2,3,4,5,6,8,12,24}**

**Sublátices:**

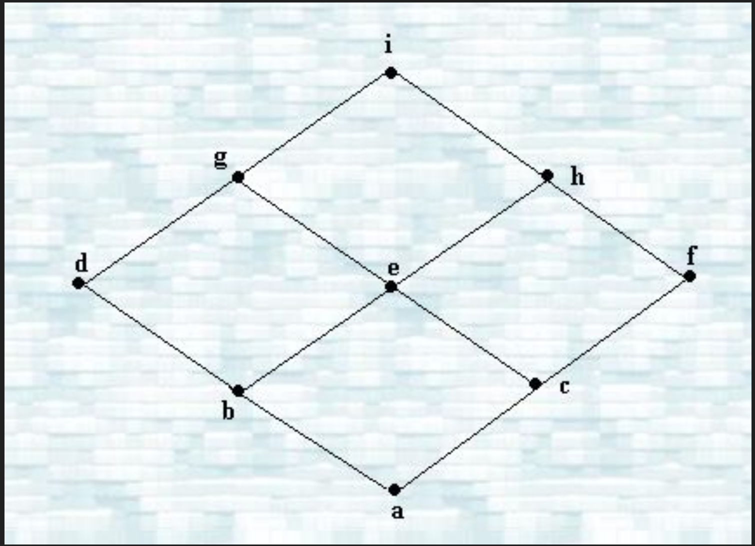
**{1,2,4,8,24} {1,3,6,12,24} {2,4,8,12,24}**

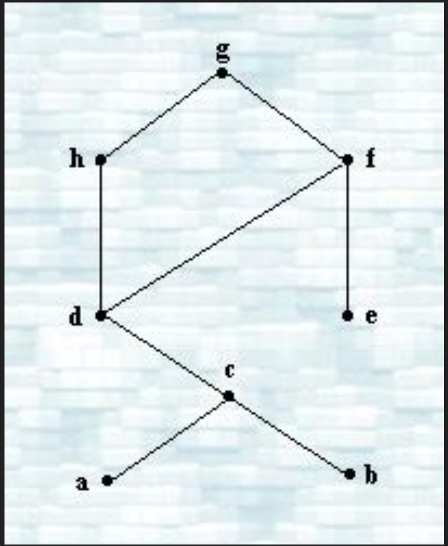
**{1,2,4,12,24} {1,2,6,12,24} {2,4,6,12,24}**

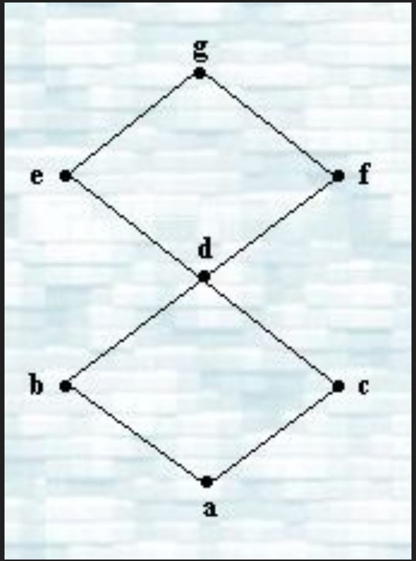
**{1,2,3,6,12} {1,2,4,6,12}**

# Ejercicios adicionales

**Indique cuáles de los siguientes son latices.**

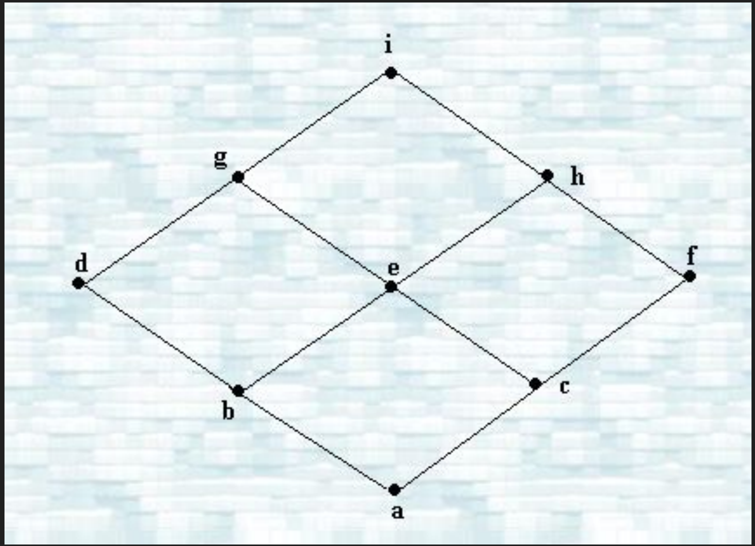


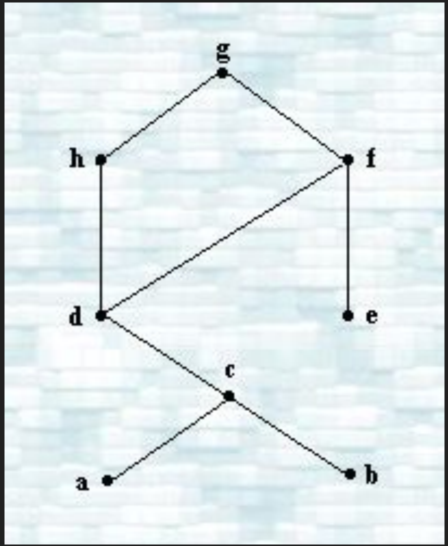



# Ejercicios adicionales

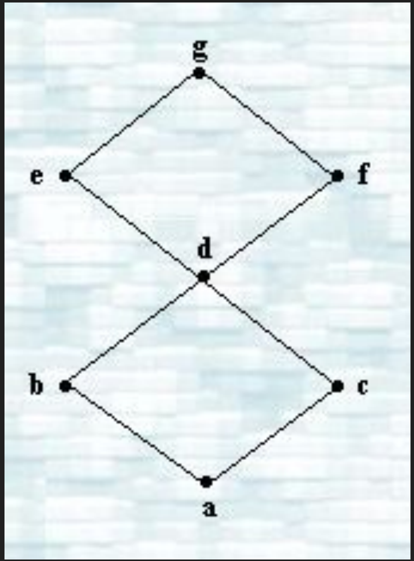
**Indique cuáles de los siguientes son latices.**




**Si**




**No**




**Si**

# Ejercicios adicionales

**¿Es el conjunto parcialmente ordenado**

$$A=\{ 2,3,6,12,24,36,72\}$$

**una látice baja la relación de divisibilidad?**

# Ejercicios adicionales

**¿Es el conjunto parcialmente ordenado**

**A={ 2,3,6,12,24,36,72}**

**una látice baja la relación de divisibilidad?**

**No ya que no posee una máxima cota inferior para el par {2,3}**