UNSA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN AGUSTÍN DE AREQUIPA

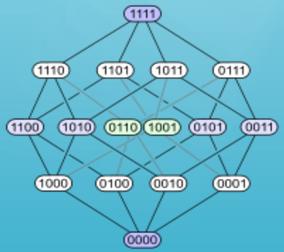
School of Computer Science

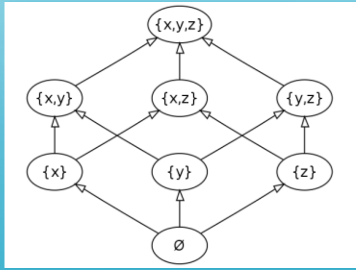
CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS

Presentado por:

-ALVAREZ/ASTETE, JHEEREMY MANUEL
-VILCA/SAMANEZ, JESUS ALONSO
-CARY/BERNAL, TOMAS GABRIEL
-ITUCCAYASI/UMERES, MARKO MARCELO

CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS





RELACIÓN DE ORDEN PARCIAL

aRa

REFLEXIVA

ANTISIMÉTRICA

aRb y bRa $\Rightarrow$ a=b

aRb y bRc $\Rightarrow$ aRc

TRANSITIVA

RELACIÓN DE DIVISIÓN (|)

¿ES LA RELACIÓN DE DIVISIÓN DE ORDEN PARCIAL?

A | A
para A entero
positivo

ANTISIMÉTRICA

si A|B ^ B|C para
A, B y C enteros
positivos entonces
A | C

REFLEXIVA

si A| B^ B| A para
A y B enteros

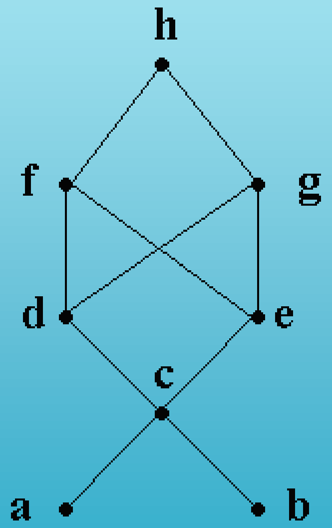
positivos

entonces A = B

TRANSITIVA

CONJUNTO PARCIALMENTE ORDENADO

¿QUÉ SON?



un conjunto no vacío S con orden parcial R en S es llamado

conjunto de orden parcial

o simplemente poset. denotado por (S, ≼).

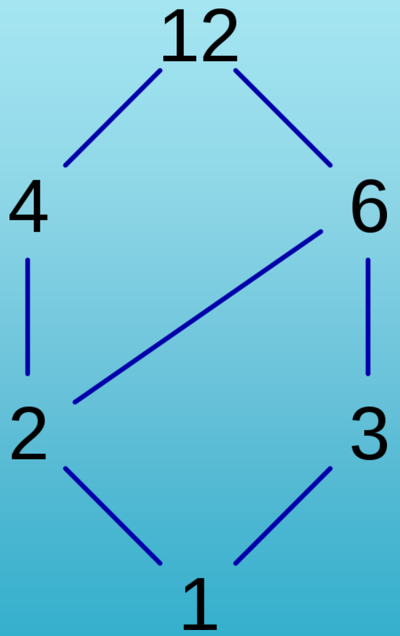
Para $S = \{2, 3, 6, 12, 18\}$ con $(S, |)$

¿ES UN CONJUNTO DE ORDEN PARCIAL?

SI, LA RELACIÓN DE ORDEN DE S ES DE ORDEN PARCIAL

DIAGRAMAS DE HASSE

¿QUÉ ES?



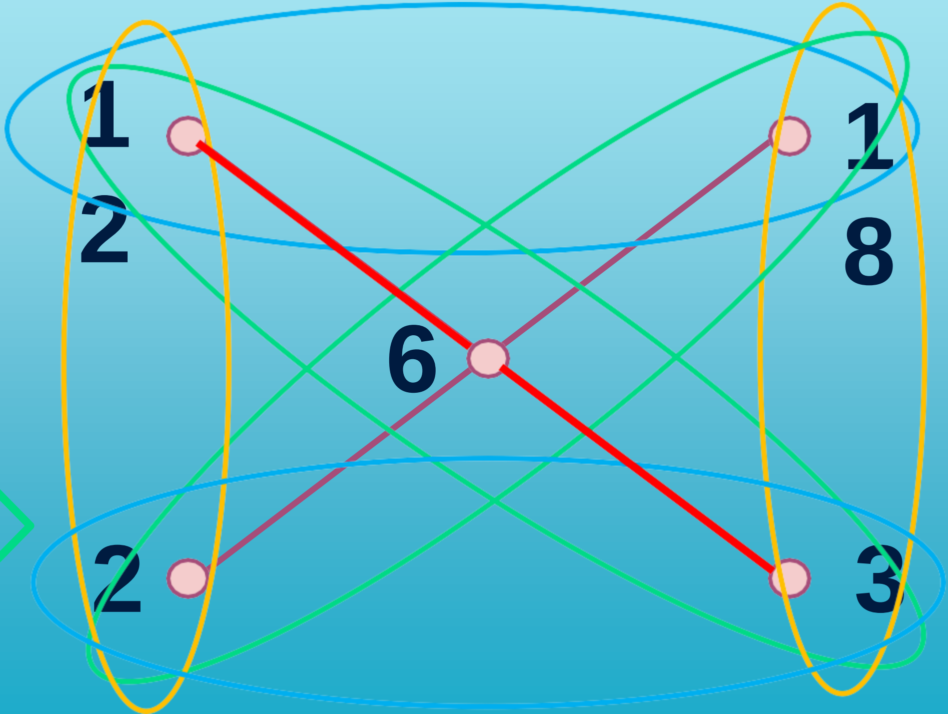
Un diagrama de hasse en un poset (S, $\preccurlyeq$), es una colección de puntos en el plano llamados vértices , los cuales son los puntos del conjunto S

CONDICIONES PARA GRAFICAR UN DIAGRAMA DE HASSE EN UN POSET

Para $S = \{2, 3, 6, 12, 18\}$ con $(S, |)$

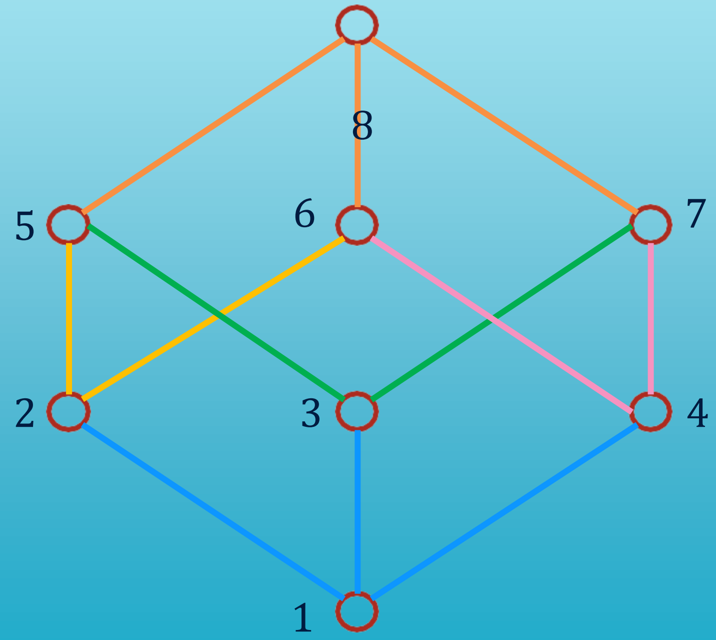
Si $a \preccurlyeq b$ entonces el vértice b es colocado arriba del vértice a en el diagrama.

Si $a \preccurlyeq b$ y no existe un elemento $c \in S$ tal que $a \preccurlyeq c \preccurlyeq b$ entonces se dibuja una línea que une a con b.

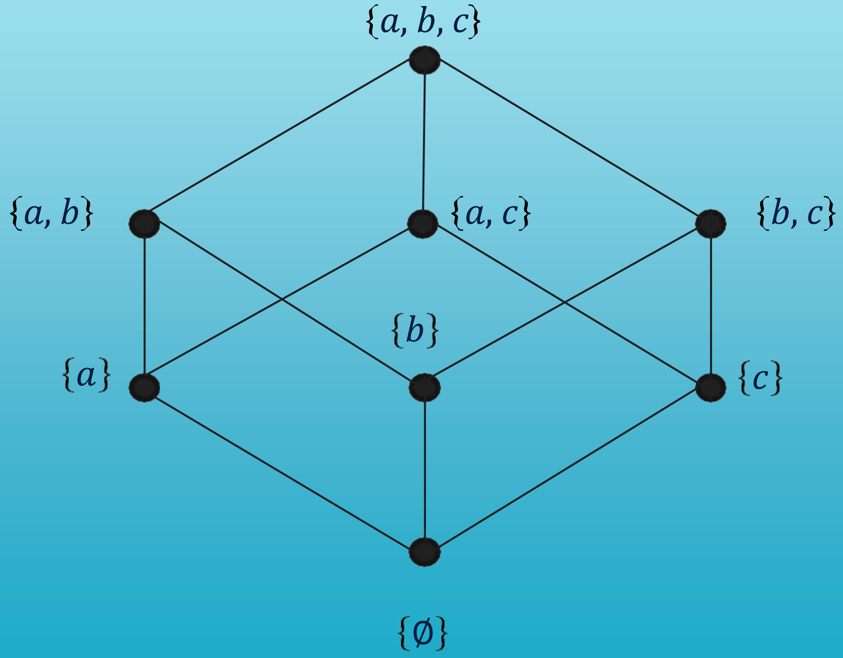


$(P, \subseteq) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

1 2 3 4 5 6 7 8



$(P,\subseteq)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$



CONJUNTO DE ORDEN TOTAL

ELEMENTOS COMPARABLES E INCOMPARABLES

DOS ELEMENTOS A y B EN UN CONJUNTO PARCIALMENTE ORDENADO $(S,\preccurlyeq)$ SON LLAMADOS COMPARABLES SI

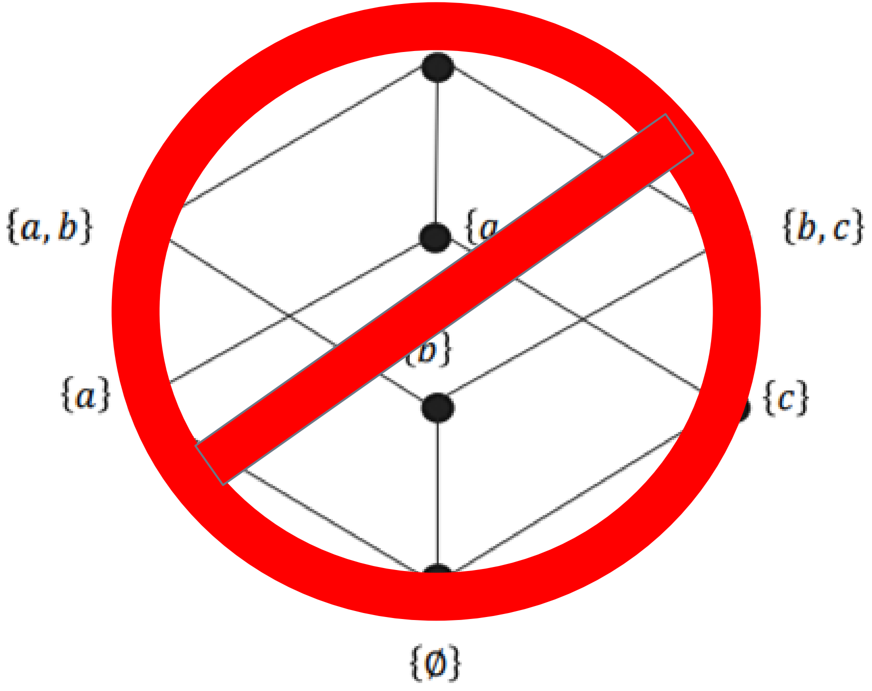
$A \preccurlyeq B$ o $B \preccurlyeq A$

SI NO SE DA QUE

$A \preccurlyeq B$ o $B \preccurlyeq A$

ENTONCES A y B SON INCOMPARABLES

¿QUÉ SON?



UN CONJUNTO DE ORDEN PARCIAL (S,≼) EN LOS QUE CADA PAR DE ELEMENTOS DE S

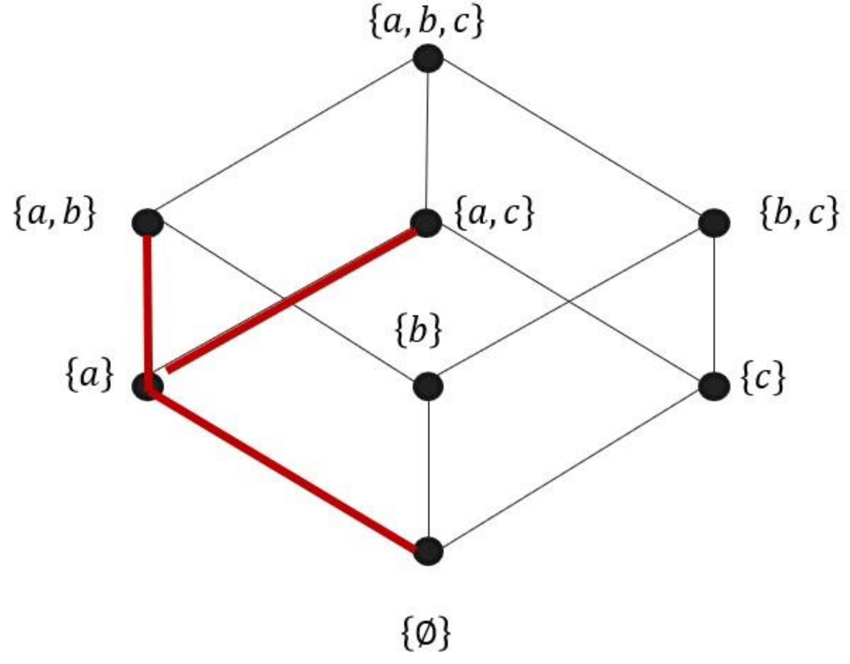
SON COMPARABLES ES LLAMADO

UN CONJUNTO DE ORDEN TOTAL

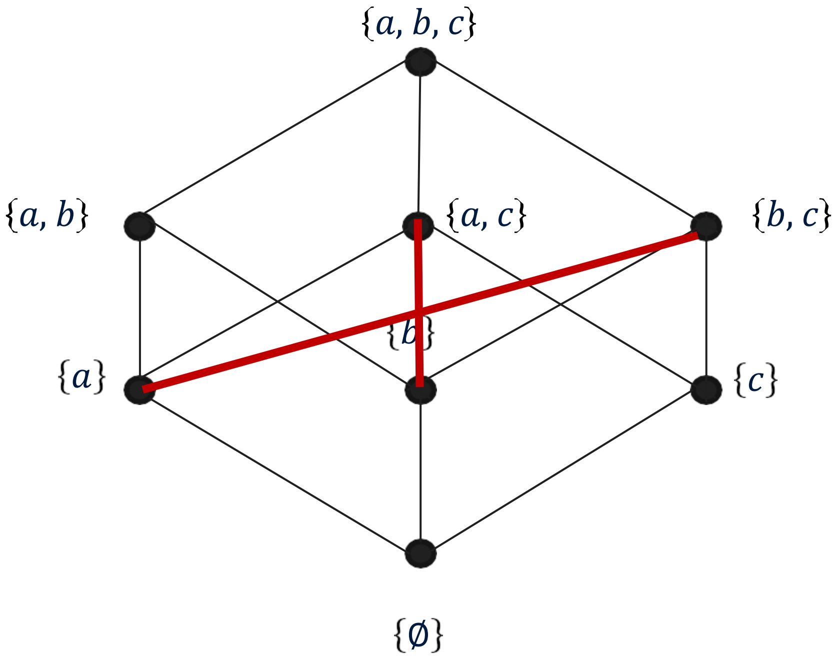
(O CONJUNTO DE ORDEN LINEAL)

CADENAS Y ANTICADENAS

Se llama cadena a un subconjunto de orden total de un poset $(S, \preccurlyeq)$



CADENAS Y ANTICADENAS



Una anticadena o transversal es un subconjunto de un poset $(S, \preccurlyeq)$ en el que ningún par de elementos son comparables.

Algunos ejemplos:

El poset $(\mathbb{Z}, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado mientras que el poset $(\mathbb{N}, |)$ no es totalmente ordenado.

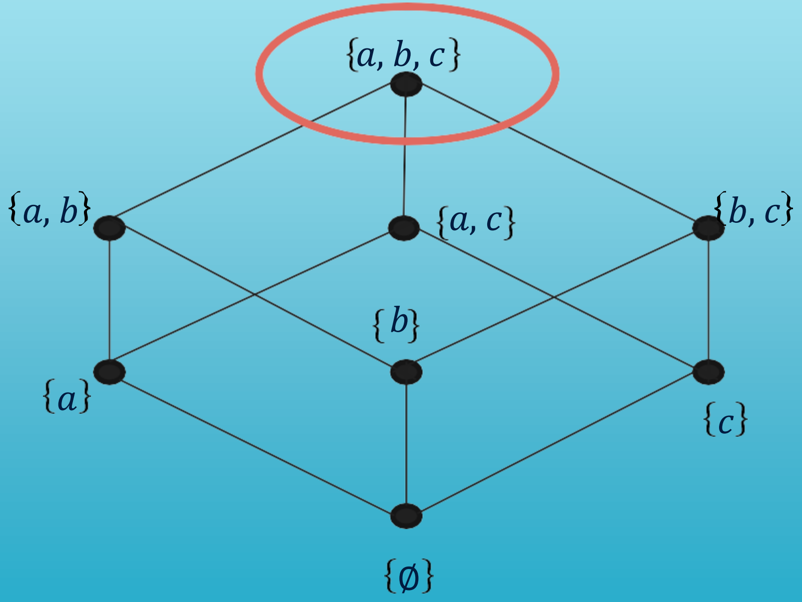
Los elementos del subconjunto $S =$ {1,2, 22, 23, 24, . . .}produce una cadena

en $(\mathbb{N}, |)$, mientras que

el conjunto de todos los números primos es una anticadena en $(\mathbb{N}, |)$

Máximo y Maximal

¿CUÁL ES EL MÁXIMO?

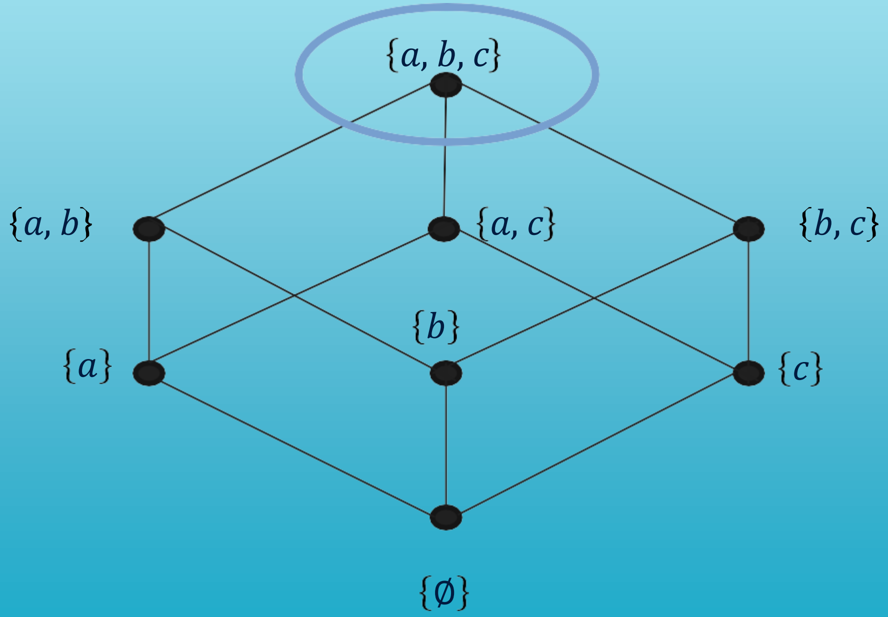


máximo

Un elemento M de un poset $(S, \preccurlyeq)$, es llamado un elemento máximo de S si $a \preccurlyeq \boldsymbol{M}$, $\forall\, a \in \boldsymbol{S}$.

¿CUÁL ES EL MAXIMAL?

Un elemento M de un poset $(S, \preccurlyeq)$, es llamado un elemento maximal de S si M no es menor que ningún otro elemento de S; esto es M es un elemento maximal de S si no existe ningún elemento $a \in S$ tal que $M \preccurlyeq a$

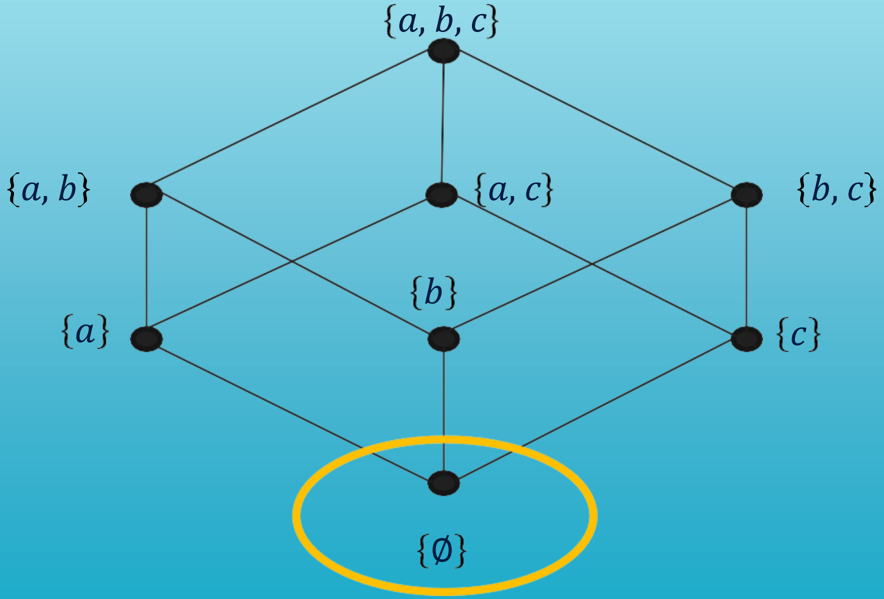


Mínimo y Minimal

¿CUÁL ES EL MÍNIMO?

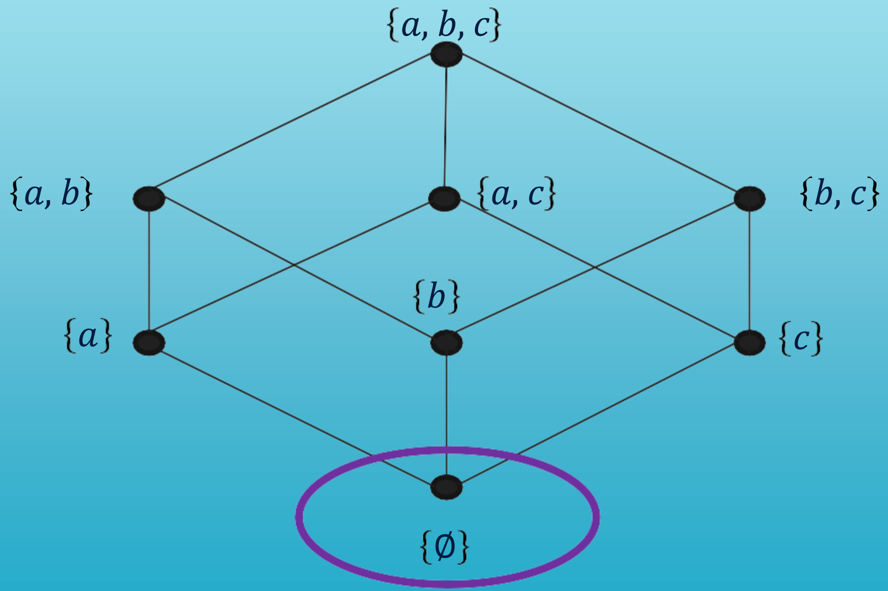
Un elemento m de un poset $(S, \preccurlyeq)$, es llamado un elemento mínimo de S si

$$\mathbf{m} \preccurlyeq \boldsymbol{a}\,, \forall\, \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{S}.$$



¿CUÁL ES EL MINIMAL?

Un elemento m de un poset $(S, \preccurlyeq)$, es llamado un elemento minimal de S si m no es mayor que ningún otro elemento de S; esto es m es un elemento minimal de S si no existe ningún elemento $a \in S$ tal que a $\preccurlyeq m$



$(S,\leq) = \{2, 3, 6, 12, 18\}$

En el poset dado el elemento 18 es el maximal y el máximo a la vez, mientras que el elemento 2 es el minimal y mínimo a la vez. Sin embargo si consideramos al poset $(S,|)$ los enteros 12 y 18 son dos elementos maximales y los elementos 2 y 3 son dos elementos minimales, no obstante en este conjunto no existe el máximo ni el mínimo.

Un análisis similar se puede hacer para

$(P,\subseteq)=\{\emptyset,\{\boldsymbol{a}\},\{\boldsymbol{b}\},\{\boldsymbol{c}\},\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\},\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\},\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\},\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}\}$

Teorema
"Cualquier poset finito y no vacío contiene un elemento minimal"

Prueba:

Sea $(\boldsymbol{S}, \preccurlyeq)$ un poset, y considere la cadena de longitud máxima:

$\boldsymbol{x1} \preccurlyeq \boldsymbol{x2}$ … $\preccurlyeq \boldsymbol{xn}$.

Ahora supóngase que existe un elemento $\boldsymbol{x0}$ tal que $\boldsymbol{x0} \preccurlyeq \boldsymbol{x1}$ así la cadena:

$\boldsymbol{x0} \preccurlyeq \boldsymbol{x1} \preccurlyeq \boldsymbol{x2}$ … $\preccurlyeq \boldsymbol{xn}$ es de longitud mayor a la que teníamos inicialmente, pues tiene n+1 elemento lo cual contradice la maxidad de nuestra cadena inicial, por lo que $\boldsymbol{x1}$ es el mínimo que se buscaba.

Teorema:
"Cualquier poset contiene a lo sumo un elemento máximo y a lo sumo un elemento mínimo"

Prueba:

Se probará el teorema para el caso del elemento máximo, el otro caso es análogo. Sea $(\boldsymbol{S}, \preccurlyeq)$ un poset, si este no contiene ningún elemento máximo, el teorema se cumple. Ahora si suponemos que tiene más de un elemento máximo y llamémoslos M y M' ahora de la definición del máximo se debe cumplir: $M \preccurlyeq M'$ y $M' \preccurlyeq M$ dado que $\preccurlyeq$ es antisimétrica se sigue que M=M'

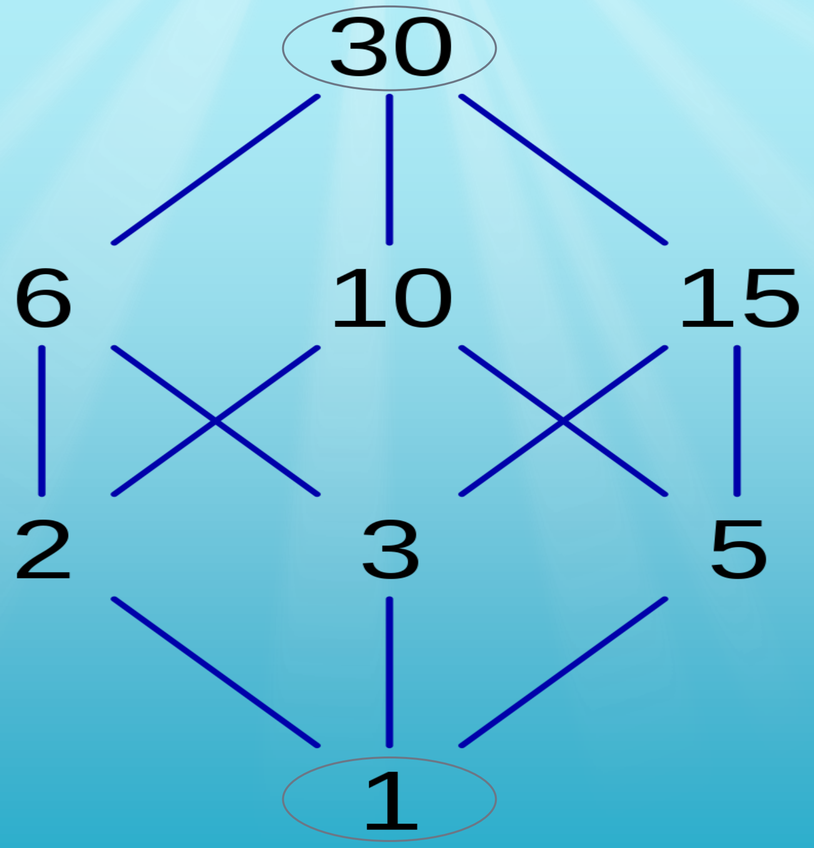
OBSERVACIONES GENERALES

Es fácil ver que una cadena finita tiene un máximo y un mínimo.

Se llama cadena maximal a aquella que no está contenida en ninguna otra.

La definición para una anticadena maximal es similar

Es claro que toda cadena está contenida en una cadena maximal C, que se puede obtener agregando a C uno a uno los elementos de $(\boldsymbol{S}, \preccurlyeq)$ que sean comparables con todos los de C (este argumento no sería válido si S fuera infinito, pero el resultado sigue siendo cierto y se puede probar usando el lema de Zorm.


30
6
10
15
2
3
5
1

APLICACIÓN EN LA TEORÍA DE GRAFOS

Denotaremos mediante c(S) al mínimo número de cadenas que puede haber en una partición de S en cadenas, y mediante a(S) al máximo número de elementos que puede tener una anticadena en S

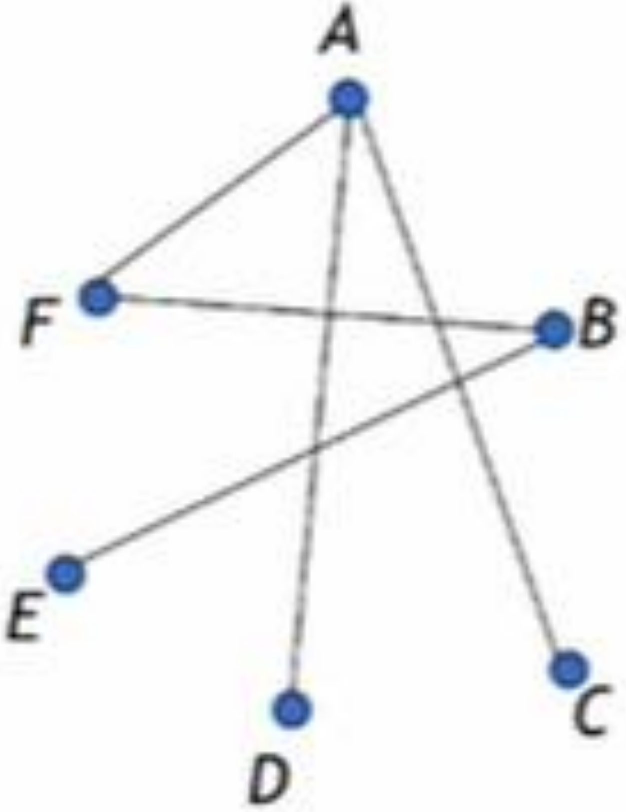
Se puede probar usando inducción el siguiente resultado: "Para todo poset $(\boldsymbol{S}, \preccurlyeq)$ finito se cumple que a(S) = c(S)"

La afirmación anterior se conoce como teorema de Dilworth.

- Sea G un grafo bipartito con conjuntos partitos $\boldsymbol{V1}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{V2}$ definamos a la

<u>siguiente función:</u>

- $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{V1} \rightarrow \boldsymbol{V2}$, tal que $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})\} \in \boldsymbol{E}(\boldsymbol{G}\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V1})$
- A la función anterior se la conoce como función matching de $\boldsymbol{V1}$ en $\boldsymbol{V2}$



$$V = \{A, B, C, D, E, F\}$$

$$E = \{(A,F), (A,D), (A,C), (F,B), (B,E)\}$$

Por otra parte $\boldsymbol{V2}$ en sí mismo es una anticadena, así tenemos que el máximo número de elementos en una anticadena es $|\boldsymbol{V2}|$, luego por el teorema de Dilworth se tiene que existe una partición de $\boldsymbol{V}$ en $|\boldsymbol{V2}|$ cadenas disjuntas. Es claro que cada una de esas cadenas contiene uno y solo un element de $\boldsymbol{V2}$ y además cada elemento $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V1}$ pertenece a una y solo una de esas cadenas, digamos $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$con $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V2}$ y $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\} \in \boldsymbol{E}(\boldsymbol{G})$.

Así haciendo $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})= \boldsymbol{v}$ se tiene a la función matching de $\boldsymbol{V1}$ en $\boldsymbol{V2}$.

GRACIAS