GRUPOS Y SEMIGRUPOS

INTEGRANTES

➢Sumare Uscca, Josue Gabriel

➢Gutierrez Arratia, Ronald Romario

¿Qué es una operación cerrada?

También llamado ley de composición interna, ley de cierre u operación binaria interna, *es una operación binaria cerrada en A si y sólo si: ∀ x, y E A: x * y E A

Sea un conjunto A diferente de nulo

*: A x A -> A es operación cerrada en A si o solo si * es función.

Propiedades

PROPIEDAD ASOCIATIVA

Se dice que * es asociativa si y sólo si

$\forall$ a, b, c $\in$ A : a* (b * c) = (a * b) *c

Ejemplo:

En la adición y multiplicación N, Z, Q y R son asociativas

En la potenciación N no es asociativa

PROPIEDAD CONMUTATIVA

Se dice que * es conmutativa si y sólo si a, b ∈ A: a * b = b * a

Ejemplo:

- La adición y multiplicación son conmutativas en todos los conjuntos numéricos
- La potenciación en N no es conmutativa
- En una tabla sería su simétrico con respecto a su diagonal

ELEMENTO NEUTRO

Se dice que * tiene neutro o identidad si y sólo si Existe $e \in A: \forall a \in A: e * a = a * e = a$

Ejemplo

- En (Z; +) el neutro es 0
- En (Z; *) el neutro es 1.
- En la potenciación no tiene neutro.

ELEMENTO SIMÉTRICO

Se dice $a' \in A$ tal que $a * a' = a' * a = e$

Ejemplo:

- En (Z, +), $a' = -a$
- En (Q, *), $a´= 1/a$, pero no existe 0' podría denotarse Q^+

ELEMENTO IDEMPOTENTE

Dado un elemento a $\in$ A, a es idempotente si y sólo si $a * a = a$

Ejemplo

- En la multiplicación de enteros, los únicos elementos idempotentes sería n 1 y 0.

ELEMENTO ABSORBENTE

Dado un elemento b $\in$ A, b es Absorbente si y sólo si $\forall$ a $\in$ A: $b * a = a * b = b$

Ejemplos

- En la multiplicación de enteros el absorbente es el 0

EJEMPLO

Sea: A = {1,2,3,6} con: a * b = mcd (a, b)

*	1	2	3	6
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
3	1	1	3	3
6	1	2	3	6

- ¿Es Asociativo? Suele ser muy complejo para comprobar, por ende, ya nos dan de que si es asociativo
- ¿Es conmutativa? Si
- ¿Tiene elementos neutros? Si, es 6
- ¿Tiene propiedad idempotente? Si, los 4 elementos
- ¿Tiene algún elemento absorbente? Si, es el 1 en fila y su columna

¿Qué es un semigrupo?

Sea A un conjunto no vacío y * es una operación binaria definida en A.

(A ; *)

Para ser un semigrupo debe cumplir las siguientes propiedades:

- Operación cerrada.
- Asociativa

Ejemplo:

Relación M.C.D:

(N; M.C.D)

-Al multiplicar N me devuelven N entonces cumplen la **propiedad Cerrada**.

-El M.C.D en N es **Asociativa.**

-Recopilando esta información podemos decir que cumple con la propiedad de operación cerrada y asociativa ; por lo tanto podemos decir que es un **Semigrupo.**

¿Qué es un monoide?

Sea A un conjunto no vacío y * es una operación binaria definida en A.

(A ; *)

Para ser un monoide debe cumplir las siguientes propiedades:

- Operación cerrada.
- Asociativa
- Tiene un elemento neutro.

Ejemplo:

Relación Multiplicación:

(R; *)

-Al multiplicar R me devuelven R entonces cumplen la **propiedad Cerrada**.

-La multiplicación en R es **Asociativa.**

-Tiene al número 1 entonces tiene un **Neutro.**

-No todos tienen simétricos , ya que no todos al multiplicar un cero por cualquier numero no me dara 0 entonces **No es Simétrico**

-Recopilando esta información podemos decir que cumple con la propiedad de operación cerrada,asociativa,elemento neutro ; por lo tanto podemos decir que es un **MONOIDE.**

¿Qué son los elementos regulares?

Puede estar en semigrupo con neutro (A;*)

En un grupo todos los elementos son regulares.

a * x = a * y entonces x= y -> A es regular a izquierda

Ejemplo

(Z,+) Todos los elementos son regulares

(R,*) cuando tomamos el 0, no es un elemento regular.

x * a = y * a entonces x= y -> A es regular a derecha

¡ En la adición de enteros, todos los elementos son regulares.

¡ En la multiplicación de reales, todos excepto el cero son regulares

EJERCICIOS

1. **Comprobar si (Z ; +) si es semigrupo o Monoide:**
2. **Comprobar si (Z ; *) si es semigrupo o Monoide**
3. **Comprobar si (Z ; /) si es semigrupo o Monoide**
4. **Comprobar si (Z ; ^) si es semigrupo o Monoide**

Recordar : el 0 no está dentro de los conjuntos de los números Z

Resolución

1) **Comprobar si (Z ; +) si es semigrupo o Monoide:**

   1-Es una operación cerrada: SÍ ,ya que al sumar un entero con otro entero te dará un entero

   2-Es asociativa: SÍ, ya que podemos sumar de la siguiente manera:

   $(a+b)+c=a+(b+c)$

   3-Tiene un elemento neutro: SÍ , ya que podemos designar al cero como neutro:

   $a+0=a$

   -Entonces es **MONOIDE.**

2) **Comprobar si (Z ; *) si es semigrupo o Monoide:**

   1-Es una operación cerrada: SÍ, si multiplicas un número entero con un entero pues te saldra un entero.

   2-Es asociativa: SÍ , ya que podemos multiplicar de la siguiente manera:

   $(a*b)*c=a*(b*c)$

   3-Tiene un elemento neutro : SI , el 1 ya que al multiplicar cualquier número con 1, me da el mismo número.

   $a*1=a$

   -Entonces es **MONOIDE.**

3) Comprobar si (Z ; /) si es semigrupo o Monoide:

1-Es una operación cerrada: NO porque tu puedes dividir dos enteros y no estar en el conjunto de enteros.

Por lo tanto cumple que no es ni semigrupo ni monoide.

-Entonces **NO** es ni **SEMIGRUPO** ni **MONOIDE**.

4) Comprobar si (Z +; ^) si es semigrupo o Monoide:

1-Es una operación cerrada: SÍ porque puedes elevar dos enteros y este sigue en los enteros.

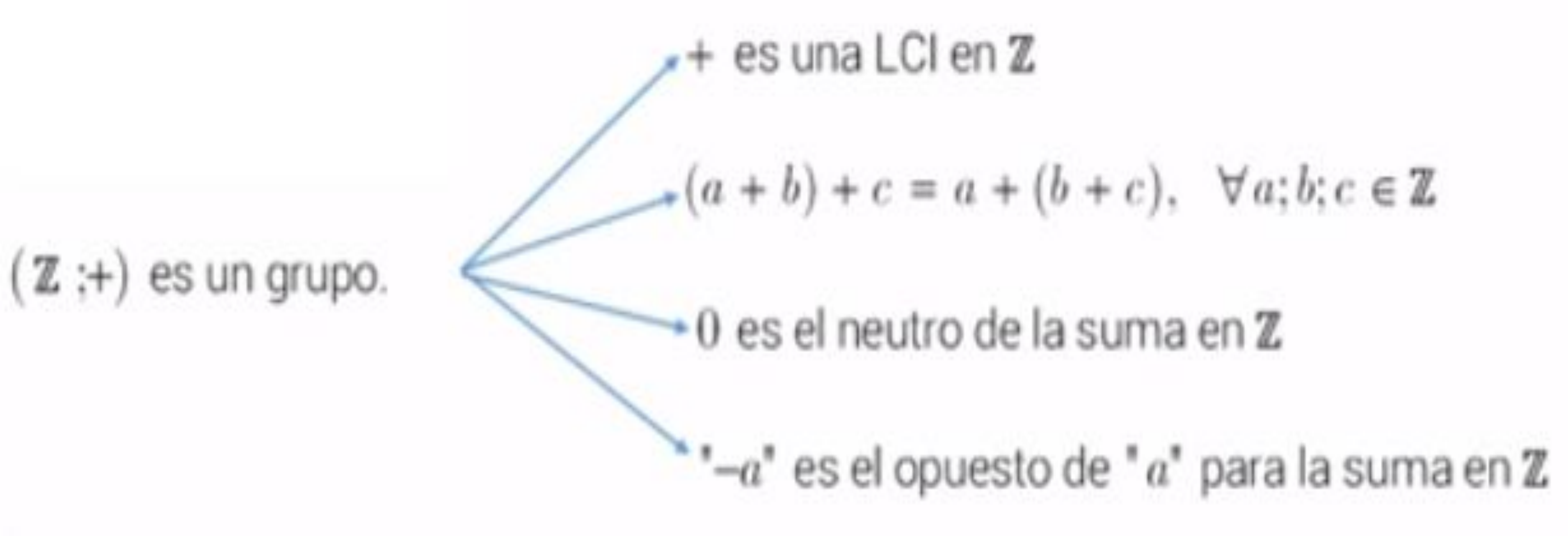
2-Es asociativa: NO, es asociativa ya que NO puedes hacer lo siguiente:

(a^b)^c=a^(b^c)

-Entonces **NO** es ni **SEMIGRUPO** ni **MONOIDE**.

¿Qué es un grupo?

- Se dice que es un grupo si cumple lo siguiente,
- (G;*) es un grupo si y solo si cada elemento a ∈ G posee inverso a’.



- Para los (Z; *) no es un grupo. Sus elementos no poseen inverso

¿Qué es un grupo abeliano?

- Los grupos abelianos son así llamados en honor al matemático noruego Niels Henrik Abel, quien utilizó estos grupos en el estudio de las ecuaciones algebraicas, un grupo abeliano o grupo conmutativo es un grupo en el cual la operación interna satisface la propiedad conmutativa.
- **(G;*) es un grupo abeliano si y sólo si * es conmutativa en G**

RECUERDA

Si * es una operación cerrada => (A;*) es **GRUPOIDE**

Si * es asociativa => (A;*) es **SEMIGRUPO**

Si * es neutro => (A;*) es **MONOIDE**

Si * es simétrico o inverso => (A;*) es **GRUPO**

Si * es conmutativa => (A;*) es **GRUPO ABELIANO**

EJEMPLO 1

(M,+). M={2,5,1} M pertenece a Z.

1) Es LCI

+: Z,Z -> Z

+: 4 + 5 = 9

2) Propiedad Asociativa

$a + (b + c) = (a + b) + c$

$2 + (5 + 1) = (2 + 5) + 1$

$8 = 8$

3) Elemento neutro

$a + e = a$

$2 + e = 2$

$e=0$

$2 + (-2) = 0$

4) Elemento simétrico

$a + (a') = e$

$2 + (-2) = 0$

5) Propiedad Conmutativa

$a + b = b + a$

$2 + 5 = 5 +2$

$7 = 7$

EJEMPLO 2

En $\mathbb{R}^2$ se define la operación $*$ mediante: $(a;b)*(c;d)=(a+c-2;b+d)$

$$a,b,c,d\in\mathbb{R} \Rightarrow (a+c-2)\in\mathbb{R}\wedge (b+d)\in\mathbb{R}\Rightarrow (a+c-2;b+d)\in\mathbb{R}^2$$

$*$ es una ley de composición interna en $\mathbb{R}^2$.

$$[(a;b)*(c;d)]*(f;g)=$$
$$=(a+c-2;b+d)*(f;g)$$
$$=(a+c-2+f-2;b+d+g)$$
$$=(a+c+f-4;b+d+g)$$

$$(a;b)*[(c;d)*(f;g)]=$$
$$=(a;b)*(c+f-2;d+g)$$
$$=(a+c+f-2-2;b+d+g)$$
$$=(a+c+f-4;b+d+g)$$

$$[(a;b)*(c;d)]*(f;g)=(a;b)*[(c;d)*(f;g)]$$

$*$ es asociativa en $\mathbb{R}^2$.

$$(a;b)*(c;d)=(a+c-2;b+d)$$

$$e=(e_1;e_2)$$

$$(a;b)*(e_1;e_2)=(a+e_1-2;b+e_2)=(a;b) \iff \begin{cases} a+e_1-2=a \\ b+e_2=b \end{cases} \iff e=(2;0).$$

$$(a;b)*(2;0)=(a+2-2;b+0)=(a;b) \qquad (2;0)*(a;b)=(2+a-2;0+b)=(a;b)$$

$*$ tiene neutro en $\mathbb{R}^2$ y es el elemento $e=(2;0)$.

Elemento original: $(a;b)$ Inverso: $(a';b')$

$$(a;b)*(a';b')=(a+a'-2;b+b')=(2;0) \iff \begin{cases} a+a'-2=2 \\ b+b'=0 \end{cases} \iff (a';b')=(4-a;-b)$$

$$(a;b)*(4-a;-b)=(a+4-a-2;b-b)=(2;0) \qquad (4-a;-b)*(a;b)=(4-a+a-2;-b+b)=(2;0)$$

Todos los elementos de $\mathbb{R}^2$ tienen inverso según $*$ y se obtienen: $(a;b)'=(4-a;-b)$

$$(a;b) * (c;d) = (a + c - 2; b + d) = (c + a - 2; d + b) = (c;d) * (a;b)$$

$*$ es conmutativa en $\mathbb{R}^2$.

$(\mathbb{R}^2; *)$ es un grupo abeliano.

EJERCICIOS PARA DESARROLLAR

- **1. Analiza la estructura de $(Z_5; +)$ e indicar qué propiedades cumple y de qué tipo es.**
- **2. Sea la matriz $X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ y el conjunto A= {I,-I, X, -X} , (A;°)e indicar qué propiedades cumple y de qué tipo es. (°=producto)**
- **3.Qué propiedades cumple (Z,#,¬), donde (a#b) = a+b-8 y (a¬b)=a+b-ab**
- **4. Comprobar si (R ; /) si es grupo ,semigrupo ,monoide o grupo Abeliano**
- **5. Comprobar si (Z ; M.C.M) si es grupo, semigrupo , monoide o grupo Abeliano**

EJERCICIOS PARA DESARROLLAR

5. Indiquemos las propiedades de (A ; $\otimes$) siendo A = { a, b, c } y la operación $\otimes$ dada en la siguiente tabla

$\otimes$	a	b	c
a	b	c	a
b	c	b	c
c	a	c	b

EJERCICIOS PARA DESARROLLAR

6. Analizar la estructura de $(P ; +)$ siendo el conjunto P el siguiente: $P = \{ x \in Z / x = 2k$ y $\in k \in Z \}$

7. Sea el conjunto $A = \{ a, b, c \}$ con la operación( )dada por la siguiente tabla, demostrar que propiedades cumple.

	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

EJERCICIOS PARA DESARROLLAR

8. Indique qué propiedades cumple (Q ; *) siendo $x *y = x + y - 3$

9. Comprobar si (N ; +) si es grupo,semigrupo, monoide o grupo Abeliano

10. Comprobar si (N ; *) si es grupo,semigrupo ,monoide o grupo Abeliano

11.Demostrar que si un semigrupo G 6= ∅ tiene neutro derecho y neutro izquierdo estos son iguales.

12. Comprobar si (N ;-) si es grupo, semigrupo , monoide o grupo Abeliano

13. Estudiar si $(Q \setminus \{0\}, *)$ es grupo siendo $a * b = ab /7$