EJERCICIOS PARA LA CLASE

1

Analiza la estructura de (Z_5 ; $\overline{+}$)

$\overline{+}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$

¿Es operación cerrada? SI

¿Es asociativa? SI

¿Es conmutativa? SI

¿Tiene elemento neutro? SI

¿Tiene elemento simétrico? SI

$\overline{0}' = \overline{0}$ $\quad \overline{1}' = \overline{4}$

$\overline{2}' = \overline{3}$ $\quad \overline{3}' = \overline{2}$ $\quad \overline{4}' = \overline{1}$

Por lo tanto la estructura de (Z_5 ; $\overline{+}$) es GRUPO ABELIANO

2) Consideremos $n = 5$ y verifiquemos que (Z_5 ; $\overline{+}$) es grupo abeliano (la misma estructura que el conjunto original).

$\overline{+}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$

De la tabla se desprende que es cerrada, conmutativa (ya que es simétrica respecto de su diagonal principal) , tiene elemento neutro: $\overline{0}$, cada uno tiene simétrico: $\overline{0}' = \overline{0}$, $\overline{1}' = \overline{4}$, $\overline{2}' = \overline{3}$, $\overline{3}' = \overline{2}$ y $\overline{4}' = \overline{1}$

En el punto 1 del ejemplo demostramos que la congruencia módulo **n** es compatible con la adición en los enteros. Por lo tanto, podemos garantizar, en virtud del Teorema Fundamental de Compatibilidad que (Z_5 ; $\overline{+}$) es grupo abeliano., ya que (Z_5 ; $\overline{+}$) es un grupo abeliano.

Sea la matriz $X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ y el conjunto $A = \{ I, -I, X, -X \}$

a) Completa la tabla de la operación producto matricial en A e indica si es cerrada.

•	I	-I	X	-X
I	I	-I	X	-X
-I	-I	I	-X	X
X	X	-X	I	-I
-X	-X	X	-I	I

$$X \bullet X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

b) Analiza las propiedades e indica la estructura de (A ; •)

b) Analiza las propiedades e indica la estructura de (A ; •)

•	I	-I	X	-X
I	I	-I	X	-X
-I	-I	I	-X	X
X	X	-X	I	-I
-X	-X	X	-I	I

¿Es operación cerrada? SI

¿Es asociativa? SI

¿Es conmutativa? SI

¿Tiene elemento neutro? SI

¿Tiene elemento simétrico? SI

$I' = I$ $-I' = -I$

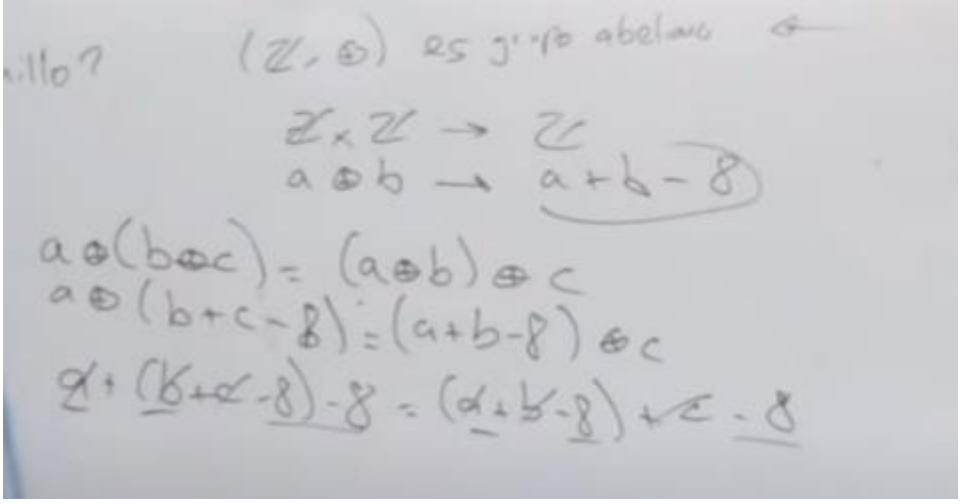
$X' = X$ $-X' = -X$

Por lo tanto la estructura de (A ; •) es GRUPO ABELIANO

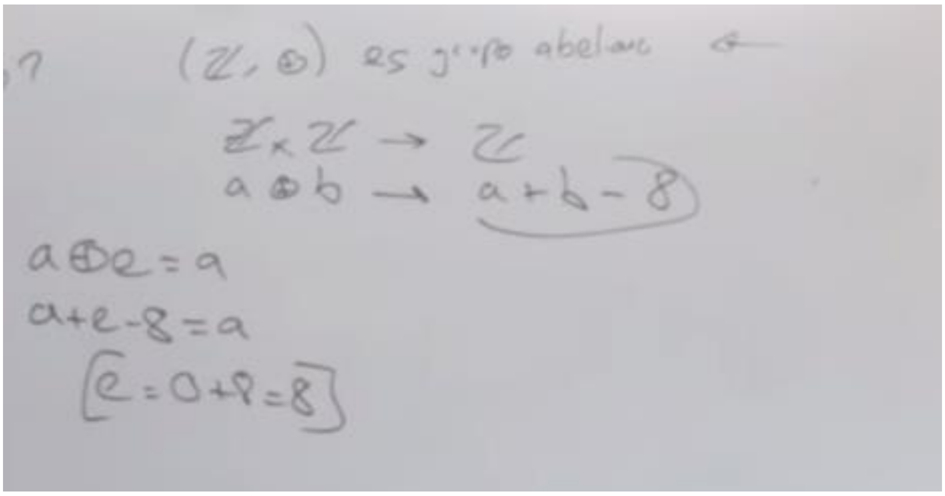
Sea la matriz $X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ y el conjunto $A = \{ I, -I, X, -X \}$

Qué propiedades cumple (Z,#,¬), donde (a#b) = a+b-8 y (a¬b)=a+b-ab

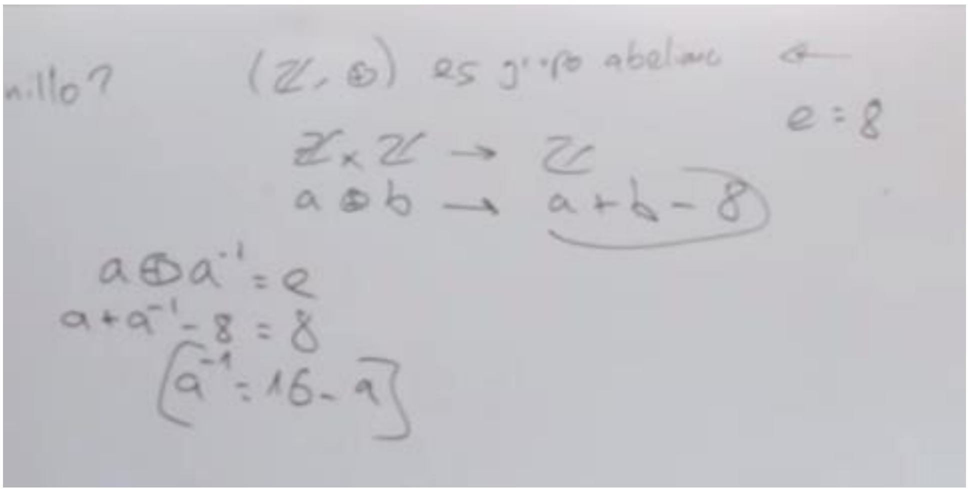
asociativa



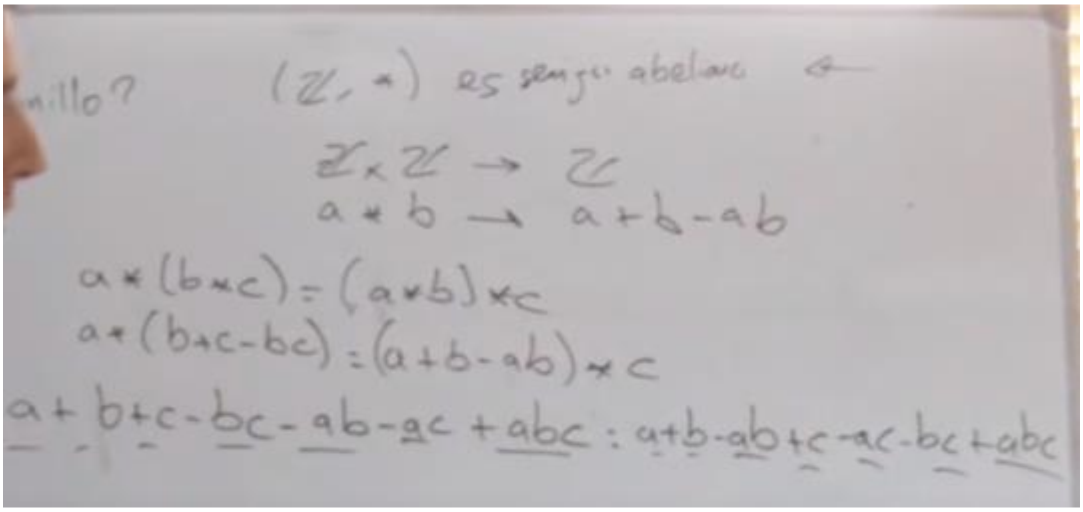
Elemento neutro



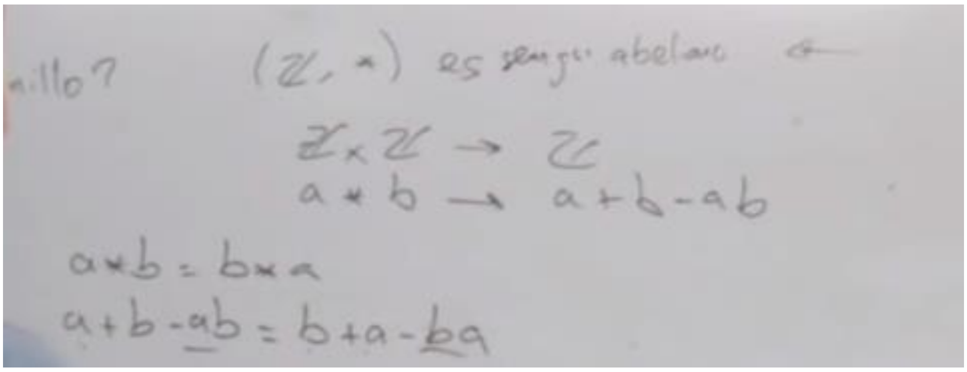
Simétrico

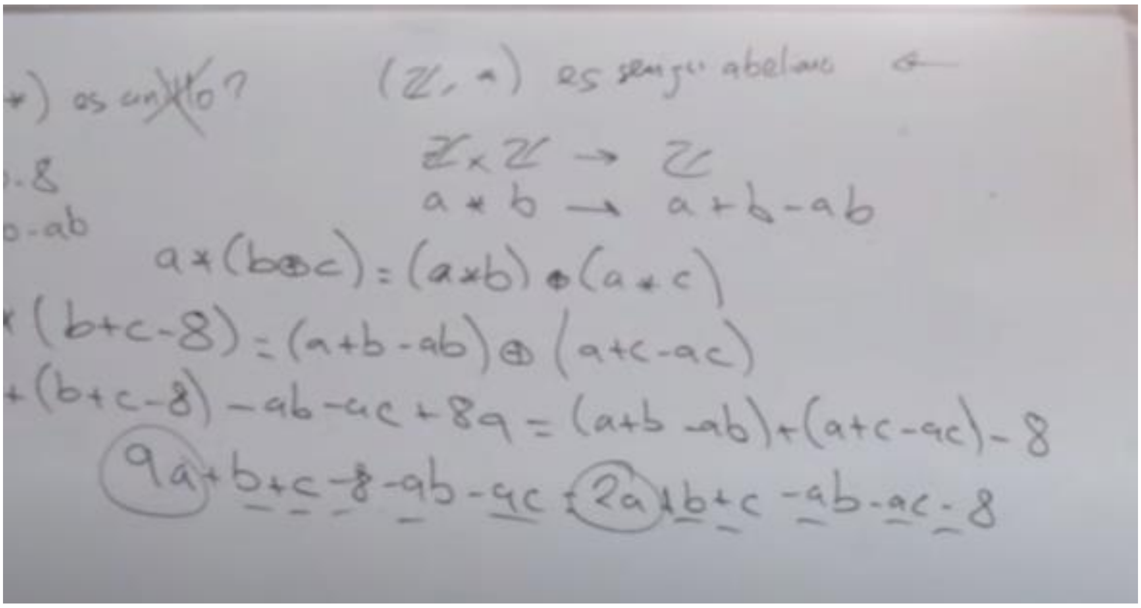


Asiociativo



No es conmutativo





1) ¿Es $\otimes$ una operación cerrada en $\mathbf{A}$? Eso se comprueba observando la tabla. Como todos los resultados están en el conjunto $\mathbf{A}$, entonces $\otimes$ es cerrada en $\mathbf{A}$.

2) ¿Es $\otimes$ conmutativa? Para que lo sea, la tabla debe ser simétrica respecto de su diagonal principal. Como lo es, entonces $\otimes$ es conmutativa.

3) ¿Tiene $\otimes$ elemento neutro? Recordemos que debemos fijarnos si alguna fila y columna repiten los elementos en el mismo orden en que están dispuestos en la tabla. Vemos que ello no ocurre en este caso. Por lo tanto no existe elemento neutro de $\otimes$ en $\mathbf{A}$.

4) Como $\otimes$ no tiene neutro, no tiene sentido analizar si hay elementos con simétrico.

5) ¿Es $\otimes$ asociativa? Lamentablemente, como ya dijimos, para analizar esta propiedad no podemos hacerlo a simple vista observando la tabla, sino que debemos verificar todos los casos de elementos tomados de a tres con o sin repetición.

6.

1) ¿Es + cerrada en **P**? Debemos probar que $\forall$ a, b $\in$ P : a + b $\in$ P

Dem./ $\forall$ a, b $\in$ P: $a = 2 \bullet k_1 \wedge b = 2 \bullet k_2$ con $k_1, k_2 \in Z$

Sumando miembro a miembro: $a + b = 2 \bullet k_1 + 2 \bullet k_2 \Rightarrow a + b = 2 \bullet (k_1 + k_2)$

Como k_1 y k_2 son enteros, su suma también lo es $\Rightarrow a + b = 2 \bullet k_3 \wedge k_3 \in Z$

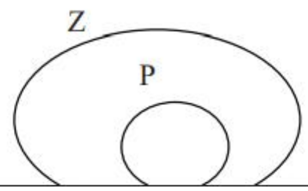
Por lo tanto **a + b $\in$ P**. Y entonces + es cerrada en **P.**

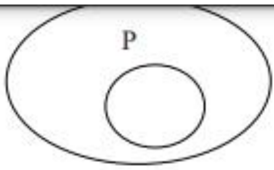
2) ¿Es + asociativa en **P**? Debemos ver si $\forall$ a, b, c $\in$ P: a + (b+ c) = (a+ b) + c

Dem./ El conjunto **P** está incluido en **Z**. Nosotros sabemos que + es asociativa en **Z**, es decir que

$\forall$ a, b, c $\in$ Z: a + (b+ c) = (a+ b) + c

Por lo tanto, los elementos de **P** cumplen con esta propiedad.





Se dice que el subconjunto **P** "hereda" la propiedad del conjunto **Z** que lo incluye.

3) ¿Es + conmutativa en **P**? Ocurre lo mismo que con la asociativa. El conjunto **P** "hereda" la propiedad conmutativa de **Z**.

4) ¿Tiene + neutro en **P**? En este caso hay que fijarse, ya que no es algo que pueda heredarse del conjunto mayor. Puede ser que el neutro esté en el subconjunto o no.

En este caso, el neutro de + es el cero. Debemos ver si el cero pertenece a **P**. Si tenemos en cuenta que

$0 = 2 \bullet 0 \wedge 0 \in Z \Rightarrow 0 \in P \Rightarrow$ P tiene neutro de +.

5) ¿Tiene + simétrico en **P**? Al igual que con el neutro, debemos fijarnos si en este caso todos los elementos de **P** tienen su simétrico en **P**. El simétrico respecto de la suma usual es el opuesto. Entonces debemos ver si $\forall$ $a \in P : -a \in P$.

Dem./ $\forall a \in P \Rightarrow a = 2 \bullet k \wedge k \in Z \Rightarrow$ multiplicando ambos miembros por (-1):

$-a = (-1) \bullet 2 \bullet k \Rightarrow$ asociando el -1 con k: $-a = 2 \bullet (-k) \wedge -k \in Z$

Por lo tanto el opuesto de todo número par es par.
Finalmente la estructura de (P ; +) es GRUPO ABELIANO.

¨7.

<u>Ejemplo 4:</u> Sea el conjunto **A** = { **a, b, c** }con la operación dada por la siguiente tabla:

	a	**b**	**c**
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

1) ¿Es cerrada en **A**? Eso se comprueba observando la tabla. Como todos los resultados están en el conjunto **A**, entonces es cerrada en **A.**

2) ¿Es conmutativa? Para que lo sea, la tabla debe ser simétrica respecto de su diagonal principal. Como lo es, entonces es conmutativa.

	a	**b**	**c**
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

Aquí podemos ver que los elementos simétricos respecto de la diagonal principal son iguales.

3) ¿Tiene elemento neutro? Debemos fijarnos si alguna fila y columna repiten los elementos en el mismo orden en que están dispuestos en la tabla. Vemos que ello ocurre en este caso con la fila y columna del elemento **b**. Por lo tanto **b** es el neutro de .

	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

Aquí podemos ver que la fila y columna del elemento "**b**" repite los elementos dados.

4) ¿Tiene elemento simétrico? Debemos buscar el simétrico de cada elemento, buscando en su fila y columna al neutro. Por ejemplo, en la fila y columna de **a**, el elemento **b** (el neutro) se encuentra cuando se opera al elemento **a** con el elemento **c**. Ello significa que **a** y **c** son simétricos. Por lo tanto, $a' = c, c' = a$ y $b' = b$. Todos tienen simétrico, por lo tanto la operación tiene simétrico.

	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

Aquí podemos ver la ubicación del elemento neutro como resultado en cada fila y columna para poder encontrar para cada elemento su simétrico

5) ¿Es asociativa? Para analizar esta propiedad no podemos observar la tabla únicamente, sino que debemos verificar todos los casos posibles. Como la definición de la propiedad asociativa nombra a tres elementos genéricos, hay que pensar en todos los casos que existen de valores que pueden tomar dichos elementos. Cada uno de ellos podrá tener cualquier valor de los elementos del conjunto, por lo tanto, en total habrá en este caso $3 \bullet 3 \bullet 3 = 3^3 = 27$ casos posibles. Por ejemplo:

(a b) a = a (b a) ya que (a b) a = a a = c y a (b a) = a a = c

(c b) a = c (b a) ya que (c b) a = c a = b y c (b a) = c a = b

(b b) a = b (b a) ya que (b b) a = b a = a y b (b a) = b a = a

... análogamente con los restantes 24 casos.

En general, si el conjunto tiene **n** elementos, la cantidad total de casos posibles es n^3.

Si en todos los casos se cumple la igualdad, entonces la operación es asociativa.
Por lo tanto la estructura de (**A** ;) es GRUPO ABELIANO.

Ejemplo 3: Indiquemos la estructura de $(Q ; *)$ siendo $x * y = x + y - 3$

Esta es una operación combinada, no es de las usuales. Ya estuvimos trabajando con este tipo de operaciones en la unidad 2.
Analicemos primero si es operación cerrada y luego las propiedades que cumple:

1) ¿Es $*$ cerrada.? Debemos ver si se cumple que $\forall$ a, b $\in Q$: $a * b \in Q$

Dem./ como $a \in Q \wedge b \in Q \Rightarrow a + b \in Q$ por ser + cerrada en Q.

Luego como $3 \in Q \Rightarrow (a+b)-3 \in Q \Rightarrow a + b - 3 \in Q \Rightarrow a * b \in Q$

2) ¿Es $*$ asociativa? Debemos ver si $\forall$ a, b, c $\in Q$: $a * (b * c) = (a * b) * c$

Dem./ Desarrollamos cada miembro de nuestra tesis por separado:

(I) $a * (b * c) = a * (b + c - 3) = a + (b + c - 3) - 3 = \mathbf{a + b + c - 6}$

(II) $(a * b) * c = (a + b - 3) * c = (a + b - 3) + c - 3 = \mathbf{a + b + c - 6}$

Las expresiones finales son iguales. Por lo tanto, $*$ es asociativa.

3) ¿Es $*$ conmutativa? Debemos ver si $\forall$ a, b $\in Q$: $a * b = b * a$

Dem./ Desarrollamos cada miembro de nuestra tesis por separado:

(I) $a * b = \mathbf{a + b - 3}$

(II) $b * a = b + a - 3 = \mathbf{a + b - 3}$

Las expresiones finales son iguales. Por lo tanto, $*$ es conmutativa.

4) ¿Tiene $*$ elemento neutro? Debemos ver si $\exists\, e \in Q : \forall\, a \in Q : e * a = a * e = a$

Dem./ Como ya sabemos que $*$ es conmutativa, podemos buscar el neutro sólo a derecha y el mismo será neutro a izquierda.

$a * e = a \Rightarrow a + e - 3 = a \Rightarrow e - 3 = 0 \Rightarrow e = 3$

Por lo tanto $*$ tiene neutro que es $e = 3$

5) ¿Tiene $*$ elemento simétrico? Debemos ver si $\forall\, a \in Q : \exists\, a' \in Q : a * a' = a' * a = 3$

Dem./ Como ya sabemos que $*$ es conmutativa, podemos buscar el simétrico sólo a derecha y el mismo será simétrico a izquierda.

$a * a' = 3 \Rightarrow a + a' - 3 = 3 \Rightarrow a' = 6 - a$

Esto significa, por ejemplo, que el simétrico del **5** es el **1**, el simétrico del **2** es el **4**, etc.

Como todos los racionales tienen simétrico, con esa operación, se dice que $*$ tiene simétrico en ese conjunto.

Por lo tanto la estructura de $(Q ; *)$ es GRUPO ABELIANO

Ejercicio 13

10. Interna. El producto de dos números racionales no nulos es un número racional no nulo y $1/7$ es un racional no nulo, en consecuencia se verifica la propiedad interna.

Asociativa. Para a, b, c elementos de $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$:

$$(a * b) * c = \frac{ab}{7} * c = \frac{\frac{ab}{7}c}{7} = \frac{abc}{49},$$

$$a * (b * c) = a * \frac{bc}{7} = \frac{a\frac{bc}{7}}{7} = \frac{abc}{49}.$$

Se cumple.

Elemento neutro. $e \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ es elemento neutro si y sólo si $a * e = e * a = a$ para todo $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ o equivalentemente si y sólo si

$$\frac{ae}{7} = \frac{ea}{7} = a \quad \forall a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\},$$

relaciones que se verifican para $e = 7$.

Elemento simétrico. Sea $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, entonces $a' \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ es simétrico de a si y sólo si $a * a' = a' * a = 7$ o equivalentemente si y sólo si

$$\frac{aa'}{7} = \frac{a'a}{7} = 7,$$

relaciones que se verifican para $a' = 49/a$. Hemos demostrado que $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, *)$ es grupo.

Es además abeliano pues para a, b elementos de $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$:

$$a * b = \frac{ab}{7} = \frac{ba}{7} = b * a.$$