Estructuras Discretas 2

Mgter. Carlo Corrales Delgado

Universidad Nac. San Agustín- Escuela Profesional de Ciencias de la Computación - 2020C

ccorrales@unsa.edu.pe

Clase 5: Isomorfismo en grafos

Mgter. Carlo Corrales Delgado

Introducción

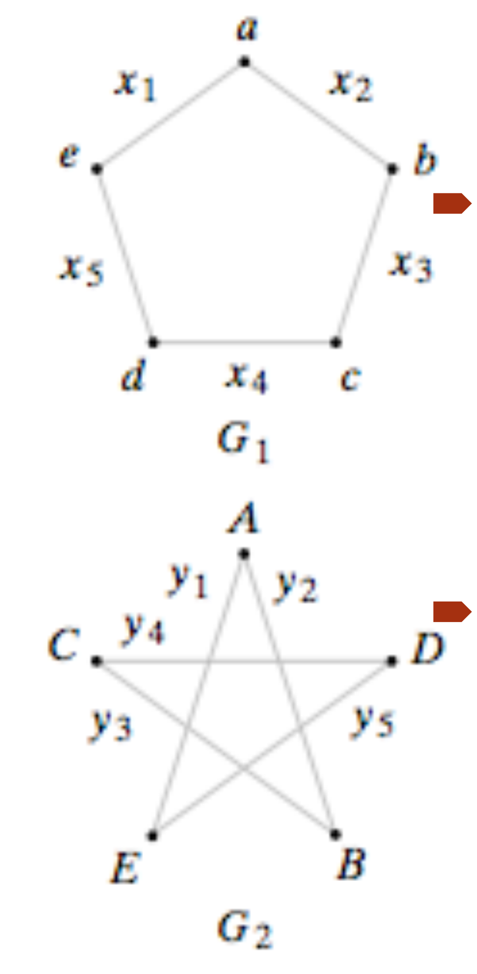


Figura 8.6.1 Gráficas isomorfas.

- Las siguientes instrucciones se dan a dos personas que no pueden ver el papel de la otra: “Dibuje y etiquete cinco vértices *a, b, c, d y e. Conecte a con b, b con c, c con d, d con e, y a con e*”. *Las gráficas producidas se aprecian en la figura 8.6.1. Sin duda estas figuras definen la misma gráfica aun cuando parezcan diferentes. Se dice que estas gráficas son* ***isomorfas.***
- Las gráficas G1 y G2 son *isomorfas* si existe una función *f* uno a uno y sobre de los vértices de G1 a los vértices de G2 y una función *g* uno a uno y sobre de las aristas de G1 a las aristas de G2, de manera que una arista e es incidente en v y w en G1 si y sólo si la arista *g*(e) es incidente en *f*(v) y *f*(w) en G2. El par de funciones *f* y *g* reciben el nombre de *isomorfismo* de G1 en G2.

Ejemplo 8.6.2

- Un isomorfismo para las gráficas G1 y G2 de la figura 8.6.1 se define por

  $f(a) = A$, $f(b) = B$, $f(c) = C$, $f(d) = D$, $f(e) = E$, $g(x_i)=y_i$, $i=1,\ldots,5$.

- Si se define una relación R en un conjunto de gráficas mediante la regla G_1RG_2 si G_1 y G_2 son isomorfas, R es una relación de equivalencia. Cada clase de equivalencia consiste en un conjunto de gráficas isomorfas mutuamente excluyentes.

Ejemplo 8.6.3 Modelo de rejilla para computación en paralelo

- Antes se estudió el problema de cuándo el cubo-n podía simular un modelo de anillo para computación en paralelo (vea el ejercicio 8.3.5). Ahora consideramos cuándo el cubo-n puede simular el **modelo de rejilla para computación en paralelo**.
- El modelo de rejilla de dos dimensiones para computación en paralelo, cuando se describe como una gráfica, consiste en un arreglo rectangular de vértices conectados como se indica (figura 8.6.2). El problema "¿Cuándo puede un cubo-n simular una rejilla de dos dimensiones?" se enuncia de otra manera en la terminología de gráficas como "¿Cuándo un cubo-n contiene una subgráfica isomorfa a una rejilla de dos dimensiones?" Se mostrará que si M es una rejilla de p vértices por q vértices, donde $p \leq 2^i$ y $q \leq 2^j$, entonces el cubo-$(i + j)$ contiene una subgráfica isomorfa a M. (En la figura 8.6.2, se puede tomar $p = 6$, $q = 4$, $i = 3$ y $j = 2$. Entonces, el resultado indica que el cubo-5 contiene una subgráfica isomorfa a la gráfica de la figura 8.6.2).

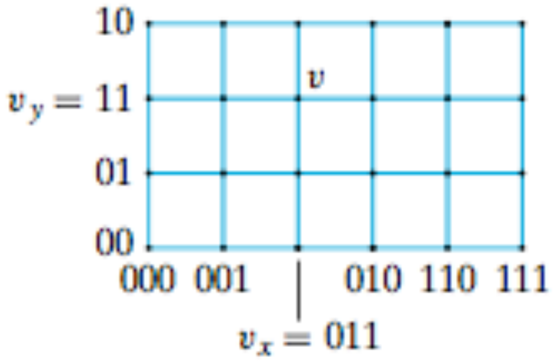


Figura 8.6.2 Modelo de rejilla para computación en paralelo.

Ejemplo 8.6.3 Modelo de rejilla para computación en paralelo

- Sea M una rejilla de p por q vértices, donde $p \leq 2^i$ y $q \leq 2^j$. Se considera que M es un arreglo rectangular en el espacio de 2 dimensiones ordinario con p vértices en dirección horizontal y q vértices en dirección vertical (figura 8.6.2). Como coordenadas para los vértices se usan elementos de los códigos Gray. (Los códigos Gray se explican en el ejemplo 8.3.5). Las coordenadas en dirección horizontal son los primeros p miembros de un código Gray de i bits y las coordenadas en dirección vertical son los primeros q miembros de un código Gray de j bits (vea la figura 8.6.2). Si un vértice v está en la rejilla, sean v_x la coordenada horizontal de v y v_y la coordenada vertical de v. Entonces se define una función f sobre los vértices de M por

$$f(v) = v_x v_y.$$

- (La cadena $v_x v_y$ es la cadena v_x seguida de la cadena v_y). Observe que f es uno a uno.
Si (v, w) es una arista en M, las cadenas de bits $v_x v_y$ y $w_x w_y$ difieren exactamente en un bit. Entonces $(v_x v_y, w_x w_y)$ es una arista en el cubo-(i + j). Se define la función g en las aristas de M por

$$g((v, w)) = (v_x v_y, w_x w_y).$$

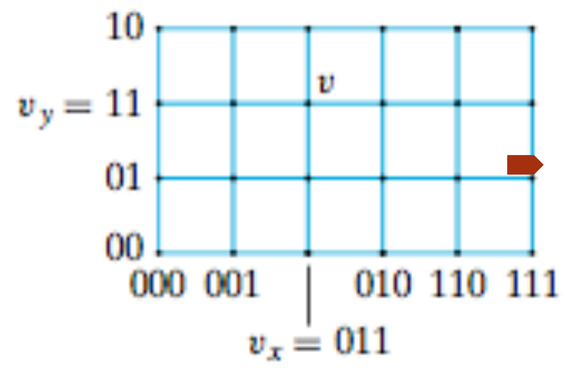


Figura 8.6.2 Modelo de rejilla para computación en paralelo.

Ejemplo 8.6.3 Modelo de rejilla para computación en paralelo

- Note que *g* es uno a uno. El par de funciones *f*, *g* es un isomorfismo de *M* sobre la subgráfica (*V*, *E*) del cubo-($i + j$), donde $V = \{f(v) \mid v$ es un vértice en $M\}$, $E = \{g(e) \mid e$ es una arista en $M\}$.
- Por lo tanto, si *M* es una rejilla de *p* por *q* vértices, donde $p \leq 2^i$ y $q \leq 2^j$, el cubo-($i+j$) contiene una subgráfica isomorfa a *M*.
- El argumento dado se extiende a un número arbitrario de dimensiones; es decir, si *M* es una rejilla de $p1 \times p2 \times \cdots \times pk$, donde $pi \leq 2^{t}i$ para $i=1,\ldots,k$, entonces el cubo-($t1 + t2 + \cdots + tk$) contiene una subgráfica isomorfa a *M*.
- En general, la matriz de adyacencia de una gráfica cambia cuando se modifica el orden de sus vértices. También es posible demostrar que las gráficas *G*1 y *G*2 son isomórficas si y sólo si *para algún* orden de los vértices, sus matrices de adyacencia son iguales.

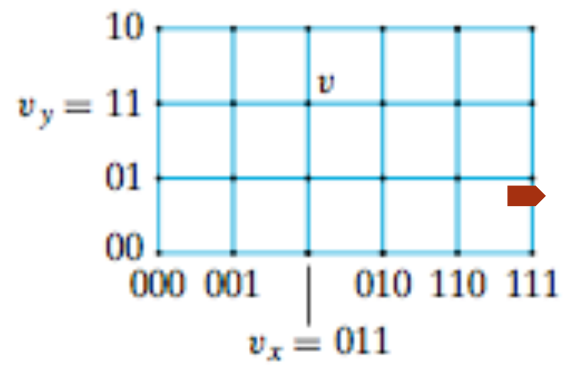


Figura 8.6.2 Modelo de rejilla para computación en paralelo.

Teorema 8.6.4

- *Las gráficas $G1$ y $G2$ son isomorfas si y sólo si, para algún orden de sus vértices, sus matrices de adyacencia son iguales.*
- ***Demostración*** Suponga que $G1$ y $G2$ son isomorfas. Entonces existe una función f uno a uno y sobre, de los vértices de $G1$ a los vértices de $G2$, y una función g uno a uno y sobre de las aristas de $G1$ a las aristas de $G2$, de manera que una arista e es incidente en v y w si y sólo si la arista $g(e)$ incide en $f(v)$ y $f(w)$ en $G2$.
- Sea $v1, \ldots, vn$ un orden de los vértices de $G1$. Sea $A1$ la matriz de adyacencia de $G1$ relativa al orden $v1, \ldots, vn$, y sea $A2$ la matriz de adyacencia de $G2$ relativa al orden $f(v1),\ldots,f(vn)$.Suponga que el elemento en el renglón I y la columna j, $i \neq j$, de $A1$ es igual a k. Entonces existen k aristas, digamos $e1, \ldots, ek$, incidentes en vi y vj. Por lo tanto, hay exactamente k aristas $g(e1), \ldots, g(ek)$ incidentes en $f(vi)$ y $f(vj)$ en $G2$. Entonces el elemento en el renglón i, columna j en $A2$, que cuenta el número de aristas que inciden en $f(vi)$ y $f(vj)$ también es igual a k. Un argumento similar señala que los elementos en las diagonales de $A1$ y $A2$ son iguales. Por lo tanto, $A1 = A2$.
- El inverso es similar y se deja como ejercicio (vea el ejercicio 25).

Corolario 8.6.5

- *Sean G1 y G2 gráficas simples. Las siguientes son equivalentes:*

  a) G1 y G2 son isomorfas.

  b) Existe una función f uno a uno y sobre del conjunto de vértices de G1 al conjunto de vértices de G2 que satisface lo siguiente: los vértices v y w son adyacentes en G1 si y sólo si los vértices f (v) *y f* (w) *son adyacentes en G2.*

- ***Demostración*** A partir de la definición 8.6.1 se concluye de inmediato que *a)* implica *b)*.

  Se probará que *b)* implica *a)*. Suponga que existe una función *f* uno a uno y sobre del conjunto de vértices en G1 al conjunto de vértices en G2 que satisface lo siguiente: los vértices v y *w* son adyacentes en G1 si y sólo si los vértices *f*(v) y *f*(*w*) son adyacentes en G2.

  Sea v1, . . . , v*n* un orden de los vértices de G1. Sea *A*1 la matriz de adyacencia de G1 relativa al orden v1, . . . , v*n* y sea *A*2 la matriz de adyacencia de G2 relativa al orden *f* (v1), . . . , *f* (v*n*). Como G1 y G2 son gráficas simples, los elementos de las matrices de adyacencia son 1 (para indicar que los vértices son adyacentes) o 0 (para indicar que los vértices no son adyacentes). Como los vértices v y *w* son adyacentes en G1 si y sólo si lo vértices *f* (v) y *f* (*w*) son adyacentes en G2, se concluye que *A*1 = *A*2. Por el Teorema 8.6.4, G1 y G2 son isomorfas.

Ejemplo 8.6.6

- La matriz de adyacencia de la gráfica G1 en la figura 8.6.1 relativa al orden de los vértices *a, b, c, d, e,*

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

- es igual a la matriz de adyacencia de la gráfica G2 en la figura 8.6.1 relativa al orden de los vértices *A, B, C, D, E,*

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

- De nuevo, se ve que G1 y G2 son isomorfas.

Ejemplo 8.6.6

- Un problema interesante es determinar si dos gráficas son isomorfas. Aunque todos los algoritmos conocidos para probar un isomorfismo entre dos gráficas requieren tiempo exponencial o factorial en el peor caso, existen algoritmos que pueden determinar si un par de gráficas son isomorfas en tiempo lineal en el caso promedio.
- La siguiente es una forma de demostrar que dos gráficas simples $G1$ y $G2$ *no* son isomorfas. Encuentre una propiedad de $G1$ que $G2$ *no* tenga, pero que $G2$ *tendría* si $G1$ y $G2$ fueran isomorfas. Esta propiedad se llama **invariante**. De forma más precisa, una propiedad P es una invariante si siempre que $G1$ y $G2$ sean gráficas isomorfas:

  Si $G1$ tiene la propiedad P, $G2$ también tiene la propiedad P.
- Por la definición 8.6.1, si las gráficas $G1$ y $G2$ son isomorfas, existen funciones uno a uno y sobre de las aristas (y vértices, respectivamente) de $G1$ a las aristas (y vértices respectivamente) de $G2$. Así, si $G1$ y $G2$ son isomorfas, $G1$ y $G2$ tienen el mismo número de aristas y el mismo número de vértices. Por lo tanto, si e y n son enteros no negativos, las propiedades "tiene e aristas" y "tiene n vértices" son invariantes.

Ejemplo 8.6.7

- Las gráficas G1 y G2 en la figura 8.6.3 no son isomorfas, ya que G1 tiene siete aristas y G2 tiene seis, y "tiene siete aristas" es una invariante.

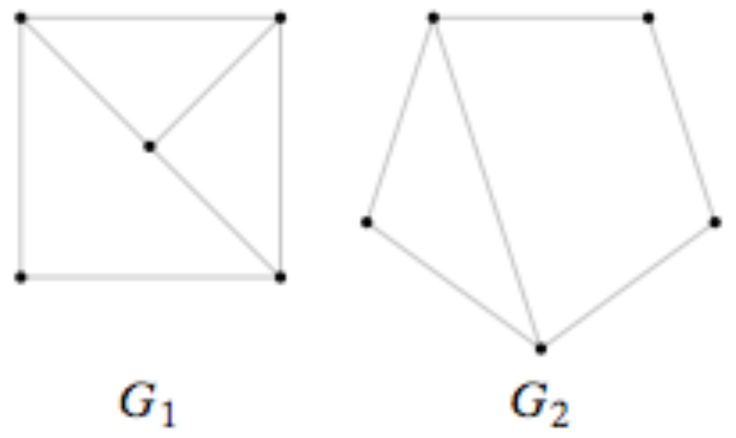


Figura 8.6.3 Gráficas no isomorfas. G_1 tiene siete aristas, G_2 tiene seis aristas.

Ejemplo 8.6.8

- Demuestre que si k es un entero positivo, "tiene un vértice de grado k" es una invariante. Suponga que $G1$ y $G2$ son gráficas isomorfas y f (o g) es una función uno a uno y sobre de los vértices (o aristas) de $G1$ sobre los vértices (o aristas) de $G2$. Suponga que $G1$ tiene un vértice v de grado k. Entonces hay k aristas $e1, \ldots, ek$ que inciden en v. Por la definición 8.6.1, $g(e1), \ldots, g(ek)$ son incidentes en $f(v)$. Como g es uno a uno, $\delta(f(v)) \geq k$.
- Sea E una arista que incide en $f(v)$ en $G2$. Como g es sobre, existe una arista e en $G1$ con $g(e) = E$. Puesto que $g(e)$ incide en $f(v)$ en $G2$, por la definición 8.6.1, e incide sobre v en $G1$. Como $e1,\ldots,ek$ son las únicas aristas en $G1$ que inciden en v, $e=ei$ para alguna $i \in \{1, \ldots, k\}$. Ahora bien, $g(ei) = g(e) = E$. Entonces $\delta(f(v)) \geq k$, de manera que $G2$ tiene un vértice, a saber $f(v)$, de grado k.

Ejemplo 8.6.9

- Puesto que "tiene un vértice de grado 3" es una invariante, las gráficas G1 y G2 de la figura 8.6.4 no son isomorfas; G1 tiene vértices (*a* y *f*) de grado 3, pero G2 no tiene vértices de grado 3. Observe que G1 y G2 tiene el mismo número de vértices y aristas.

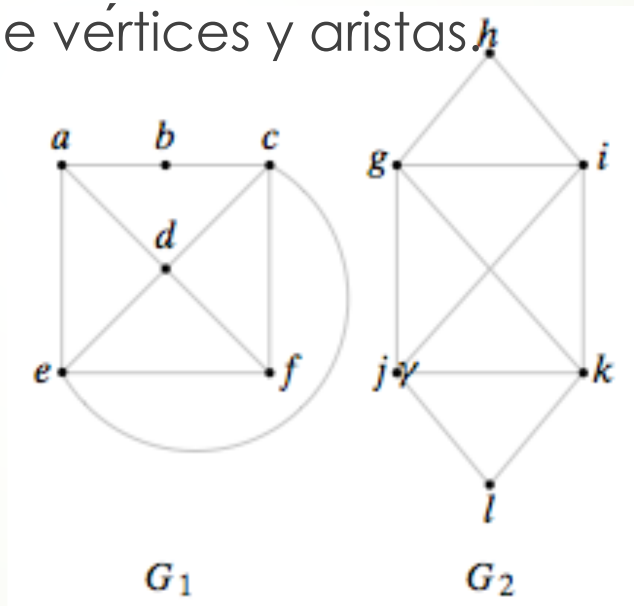


Figura 8.6.4 Gráficas no isomorfas. G_1 tiene vértices de grado 3, pero G_2 no tiene vértices de grado 3.

Ejemplo 8.6.10

- Otra invariante frecuentemente útil es "tiene un ciclo simple de longitud *k*". Se deja la prueba de esta propiedad como una invariante para los ejercicios (ejercicio 12).
- Dado que "tienen un ciclo simple de longitud 3" es una invariante, las gráficas *G*1 y *G*2 de la figura 8.6.5 no son isomorfas; la gráfica *G*2 tiene un ciclo simple de longitud 3, pero todos los ciclos simples en *G*1 tienen longitud de al menos 4. Observe que *G*1 y *G*2 tienen el mismo número de aristas y vértices y que cada vértice en *G*1 o *G*2 tiene grado 4.
- Sería sencillo probar si un par de gráficas son isomorfas si se pudiera encontrar un pequeño número de invariantes que fuera fácil verificar y que *sólo* las gráficas isomorfas compartieran. Desafortunadamente, nadie ha tenido éxito en encontrar tal conjunto de invariantes.

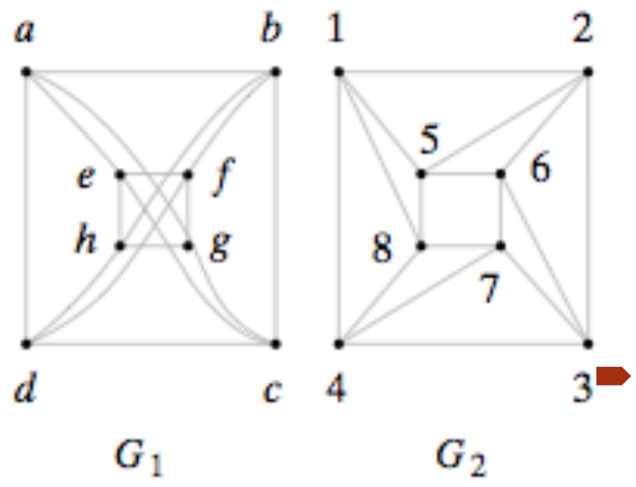


Figura 8.6.5 Gráficas no isomorfas. G_2 tiene un ciclo simple de longitud 3, pero G_1 no tiene ciclos simples de longitud 3.

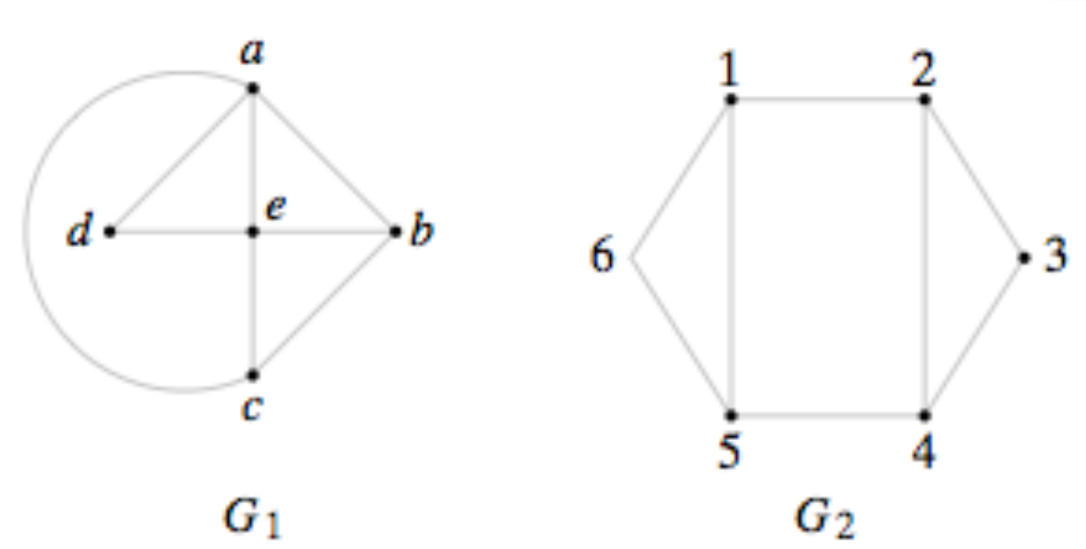
Ejercicios de Repaso

1. *Establezca qué significa que dos gráficas sean isomorfas.*
2. *Dé un ejemplo de gráficas no idénticas isomorfas. Explique por qué son isomorfas.*
3. *Dé un ejemplo de dos gráficas que no sean isomorfas. Explique por qué no lo son.*
4. *¿Qué es una invariante en una gráfica?*
5. *¿Cuál es la relación de una "invariante" con un isomorfismo?*
6. *¿Cómo se puede determinar si las gráficas son isomorfas a partir de sus matrices de adyacencia?*
7. *¿Cuál es el modelo de rejilla para computación en paralelo?*

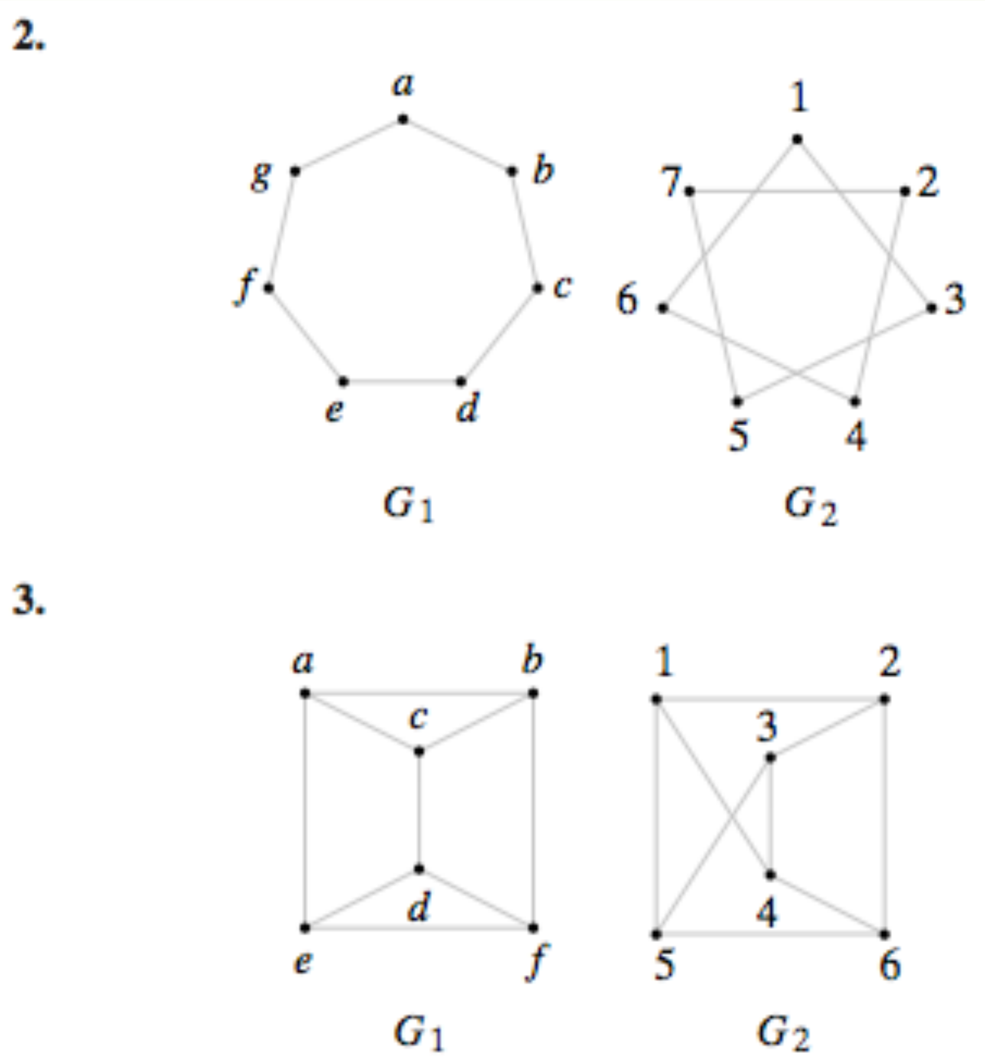
Ejercicios

En los ejercicios 1 al 10, determine si las gráficas G1 y G2 son isomorfas. Si las gráficas son isomorfas, encuentre funciones f y g para la definición 8.6.1; de otra manera, dé una invariante que las gráficas no compartan.

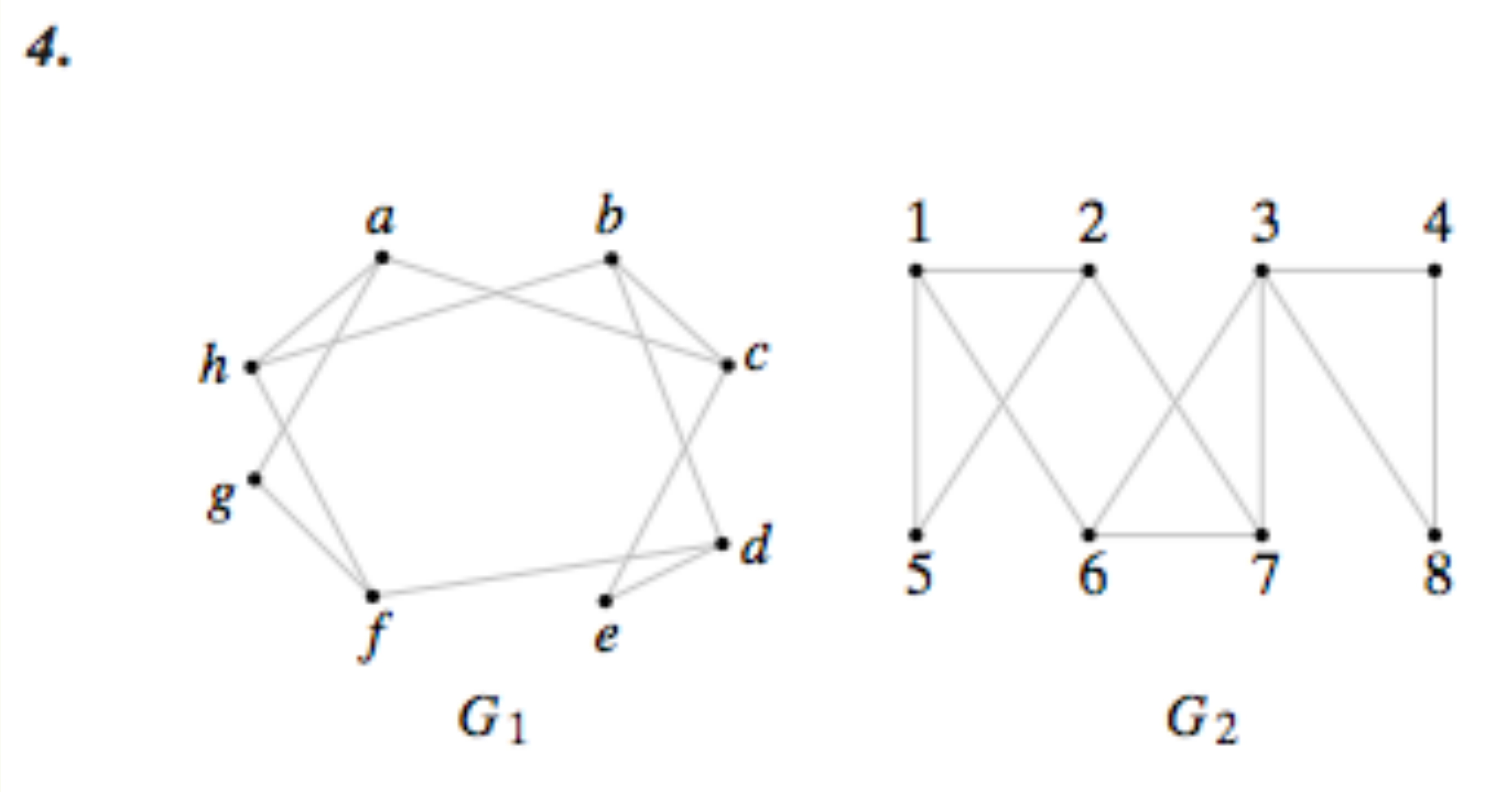
- **1.**



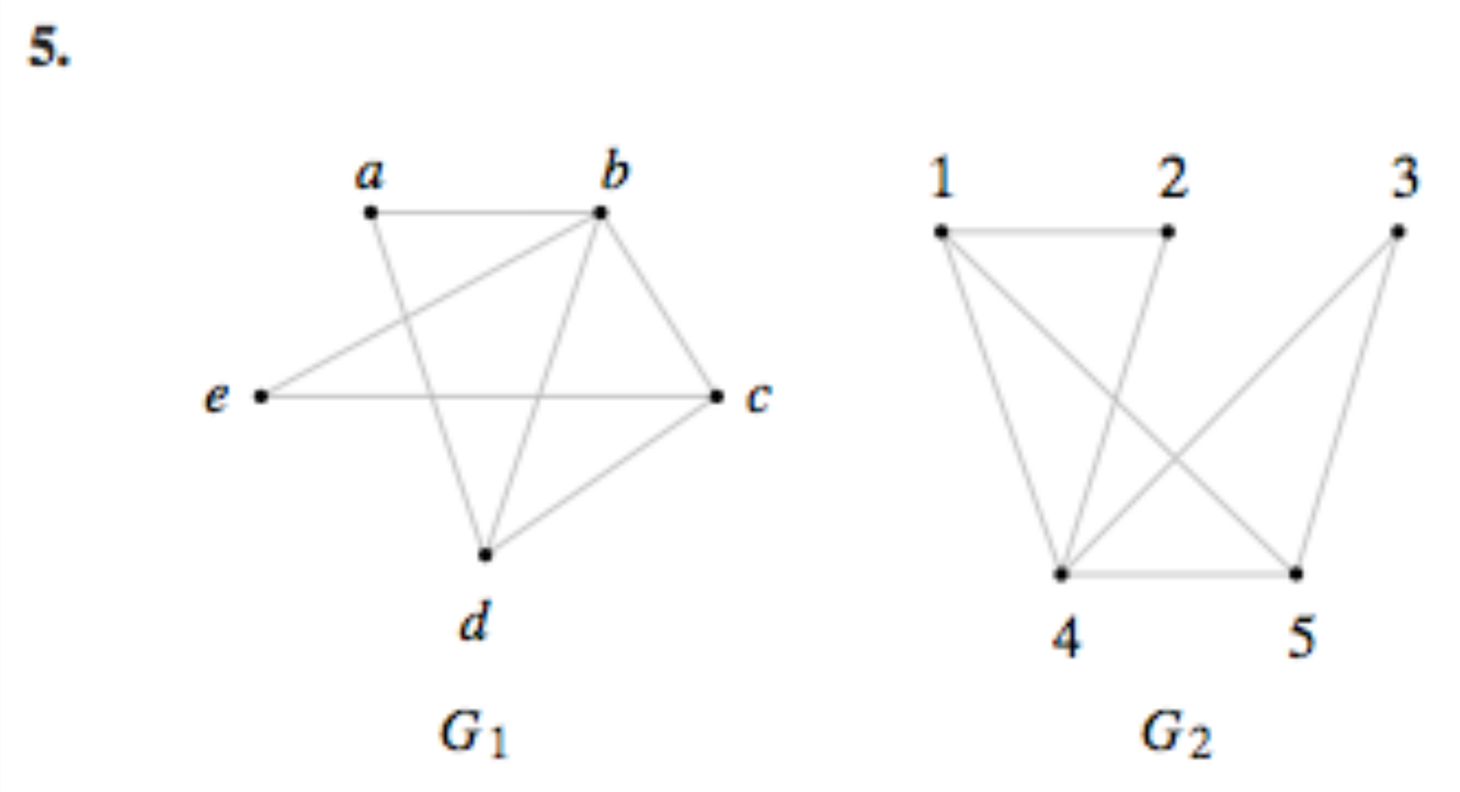
Ejercicios



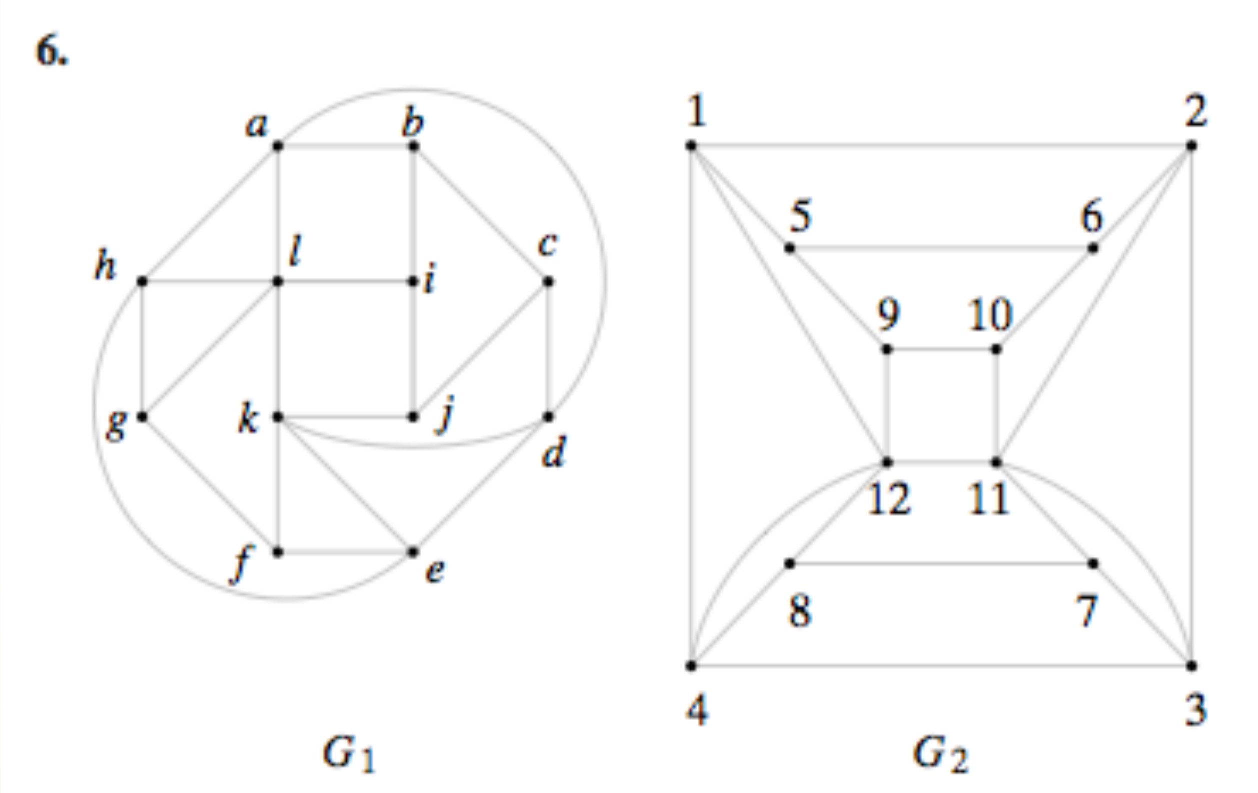
Ejercicios



Ejercicios

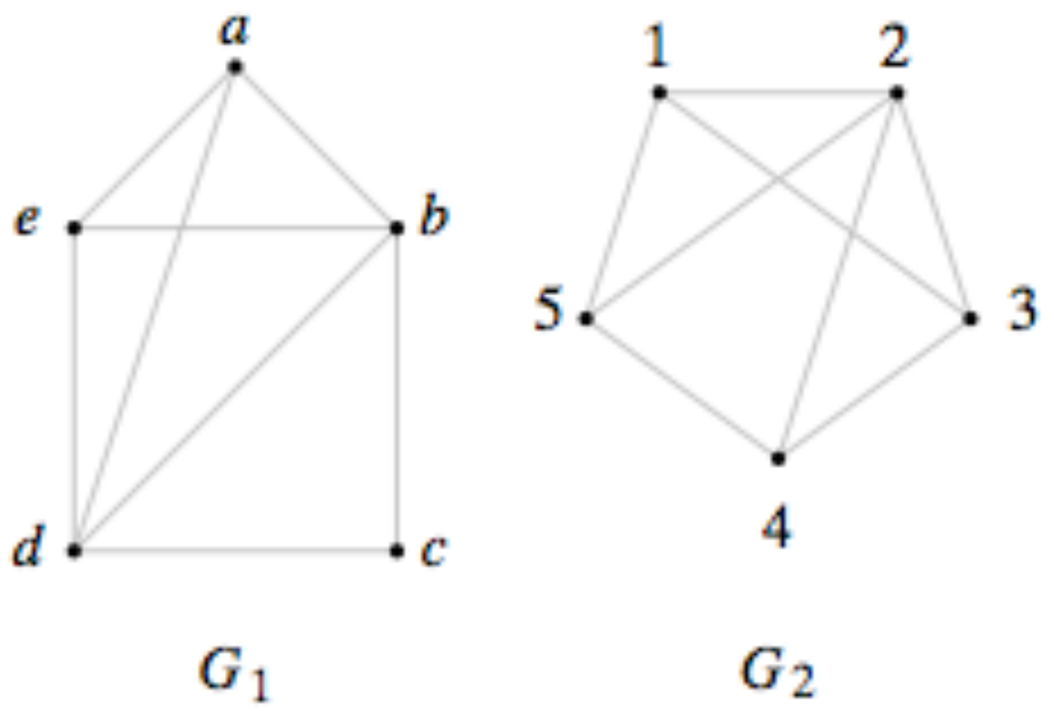


Ejercicios



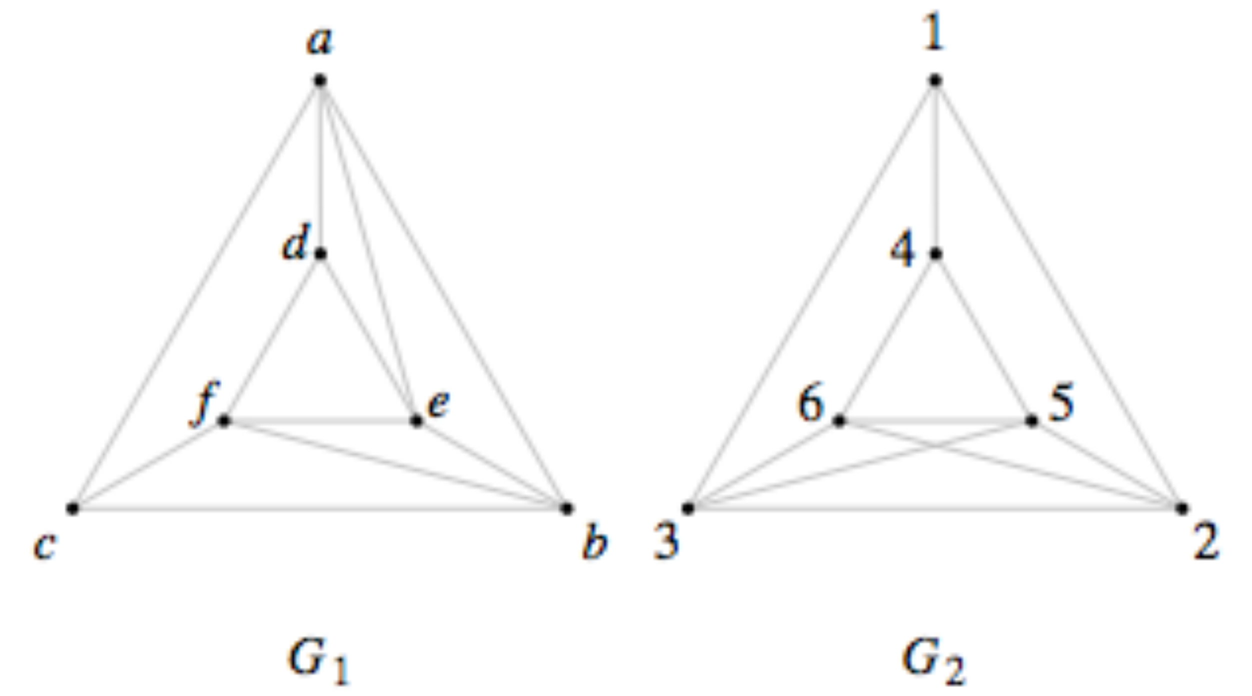
Ejercicios

7.



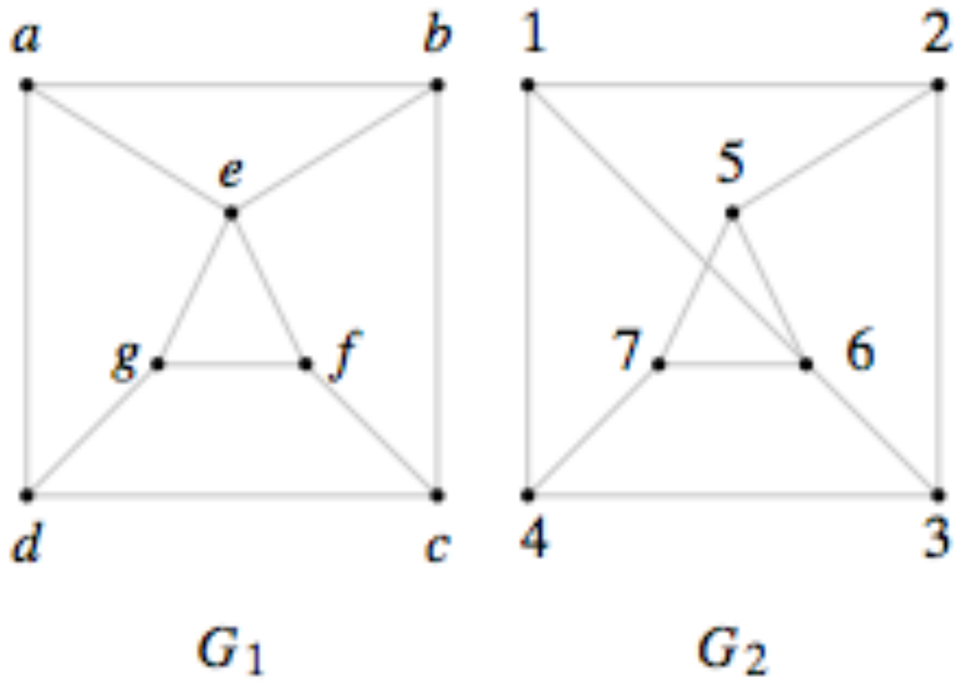
Ejercicios

8.



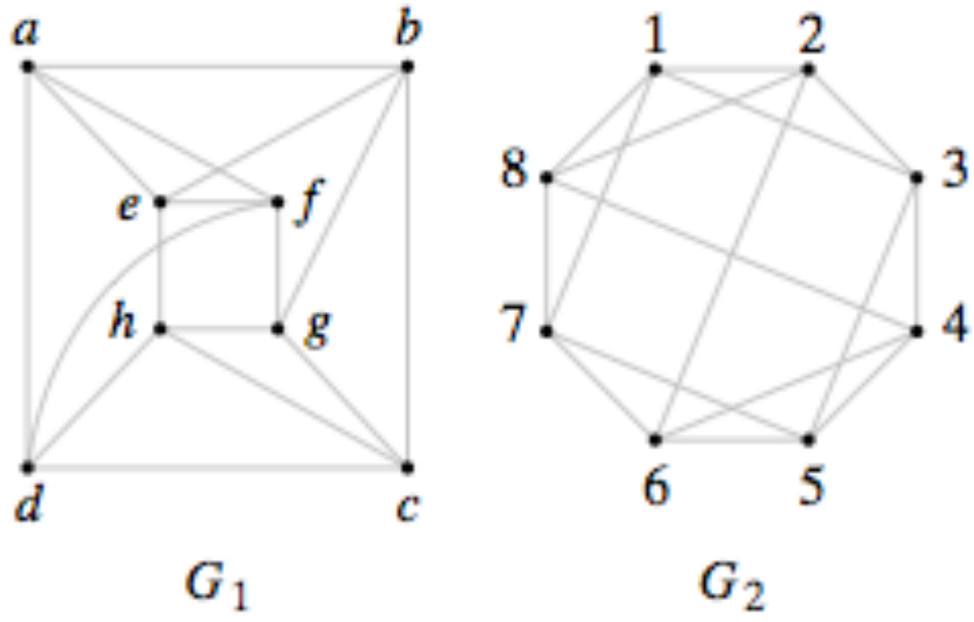
Ejercicios

9.



Ejercicios

10.



Ejercicios

- **11.** Demuestre que si M es una rejilla de $p1 \times p2 \times \cdots \times pk$, donde $pi \leq 2ti$, para $i = 1, \ldots, k$, entonces el cubo-$(t1 + t2 + \cdots + tk)$ contiene una subgráfica isomorfa a M.

En los ejercicios 12 al 16, muestre que la propiedad indicada es una invariante.

- ***12.*** *Tiene un ciclo simple de longitud k*
- **13.** Tiene n vértices de grado k
- **14.** Es conexa
- ***15.*** *Tiene n ciclos simples de longitud k*
- **16.** Tiene una arista (v, w), donde $\delta(v) = i$ y $\delta(w) = j$

Ejercicios

- **17.** Encuentre una invariante que no esté dada en esta sección o en los ejercicios 12 al 16. Pruebe que su propiedad es invariante.

En los ejercicios 18 al 20, diga si cada propiedad es una invariante. Si es una invariante, pruebe que lo es; de otra manera, dé un contraejemplo.

- ***18.*** *Tiene un ciclo de Euler*
- **19.** Tiene un vértice dentro de algún ciclo simple
- **20.** Es bipartita

Ejercicios

- ***21.*** *Dibuje todas las gráficas simples no isomorfas de tres vértices.*
- **22.** Dibuje todas las gráficas simples no isomorfas de cuatro vértices.
- **23.** Dibuje todas las gráficas no isomorfas, sin ciclos y conexas que tienen cinco vértices.
- ***24.*** *Dibuje todas las gráficas no isomorfas, sin ciclos y conexas que tienen seis vértices.*
- **25.** Demuestre que las gráficas $G1$ y $G2$ son isomorfas si sus vértices se puede ordenar de manera que sus matrices de adyacencia sean iguales.

Ejercicios

- *El complemento de una gráfica simple G es la gráfica simple ~~G~~ con los mismos vértices que G. Una arista existe en ~~G~~ si y sólo si no existe en G.*
- **26.** Dibuje el complemento de la gráfica G1 del ejercicio 1.
- **27.** Dibuje el complemento de la gráfica G2 del ejercicio 1.
- **28.** Demuestre que si G es una gráfica simple, G1 o bien ~~G~~ es conexa.
- **29.** *Una gráfica simple es autocomplementaria si G y ~~G~~ son isomorfas.*
  - *a) Encuentre una gráfica autocomplementaria que tenga cinco vértices.*
  - *b) Encuentre otra gráfica autocomplementaria.*
- **30.** Sean G1 y G2 gráficas simples. Muestre que G1 y G2 son isomorfas si y sólo si ~~G1~~ y ~~G2~~ son isomorfas.
- **31.** *Dadas dos gráficas G1 y G2, suponga que existe una función f uno a uno y sobre de los vértices de G1 a los vértices de G2, y una función g uno a uno y sobre de las aristas de G1 a las aristas de G2, de manera que si una arista e incide en v y w en G1, la arista g(e) incide en f (v) y f (w) en G2. ¿Son isomorfas G1 y G2?*

Ejercicios

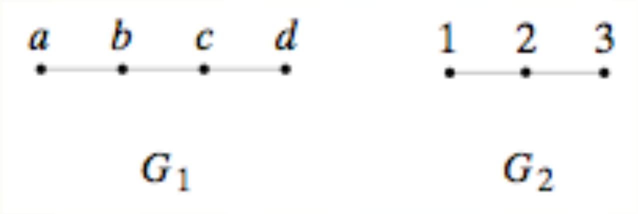
Un homomorfismo de una gráfica G1 a una gráfica G2 es una función f del conjunto de vértices de G1 al conjunto de vértices de G2 con la propiedad de que si v y w son adyacentes en G1, entonces f (v) y f (w) son adyacentes en G2.

- **32.** Suponga que G1 y G2 son gráficas simples. Demuestre que si *f* es un homomorfismo de G1 a G2 y *f* es uno a uno y sobre, G1 y G2 son isomorfas.

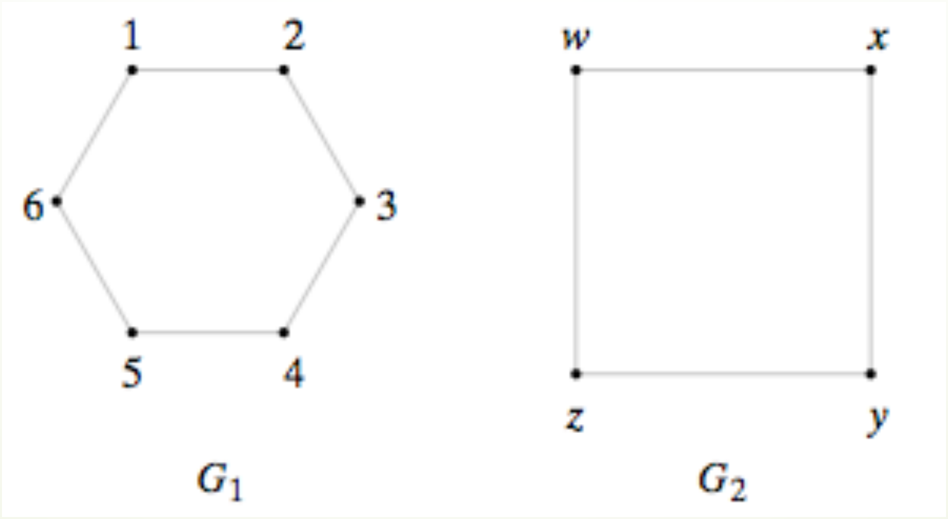
Ejercicios

En los ejercicios 33 al 37, para cada par de gráficas, dé un ejemplo de un homomorfismo de G1 a G2.

- **33.**

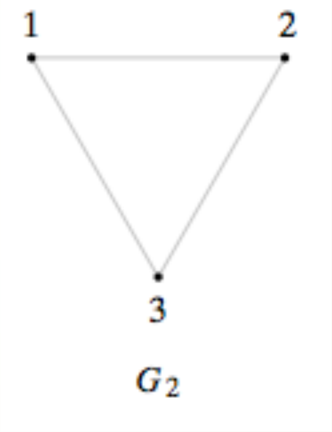


- **34.**

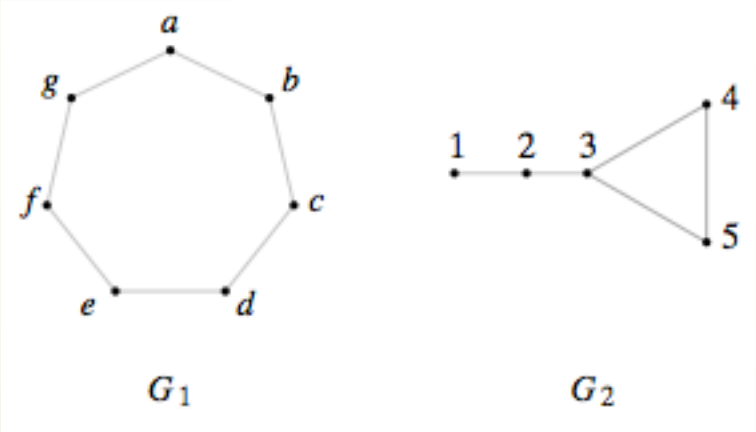


Ejercicios

- **35.** G1 = G1 del ejercicio 34; G2 = G1 del ejercicio 33
- **36.** G1 = G1 del ejercicio 33

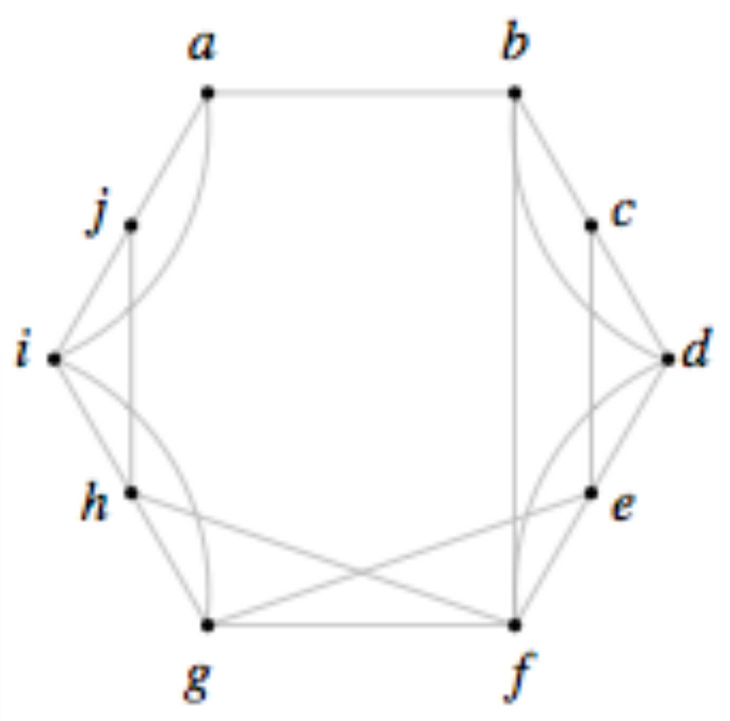


- **37.**



Ejercicios

- **38.** [Hell] Demuestre que el único homomorfismo de una gráfica a sí misma es la función identidad.



Fin.