Estructuras Discretas II

Docente: Carlo Corrales Delgado

Actividad N° 2

Ejercicios de Lección 2

Escuela:

Ciencia de la computación (Primer año)

Temas:

-Representación de gráficos

Alumno:

Josue Gabriel Sumare Uscca

Ejercicios de Repaso

1 ¿Que es una matriz de adyacencia?

Es una representación mas formal de una gráfica en el que se ordena en filas y columnas, en esta matriz en el que se pone el número de incidencias entre las aristas, cuando es un vértice simétrico su grado es dos

2. Si A es la matriz de adyacencia de una gráfica simple ¿Cuales son los valores de los elementos de A^n?

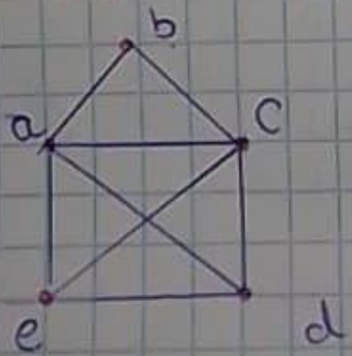
Los elementos son el número de trayectorias de longitud n de un Vertices "a" a uno "b"

3 ¿Que es una matriz de incidencia?

Es una representación de una gráfica en matriz que se introducen booleanos si una arista es incidente a un vértice.

Ejercicios

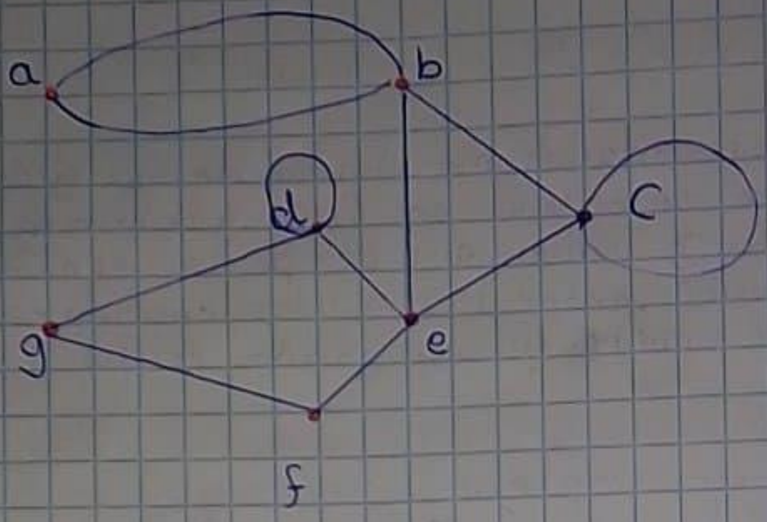
1.



Matriz adyacencia

$$\begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline a & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ d & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ e & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

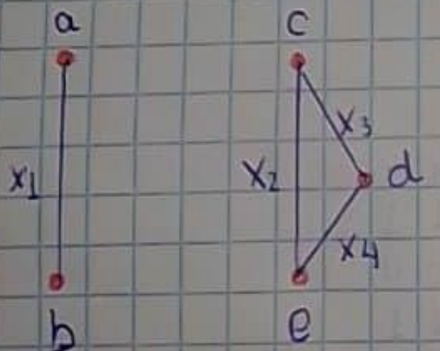
2



Matriz de adyacencia

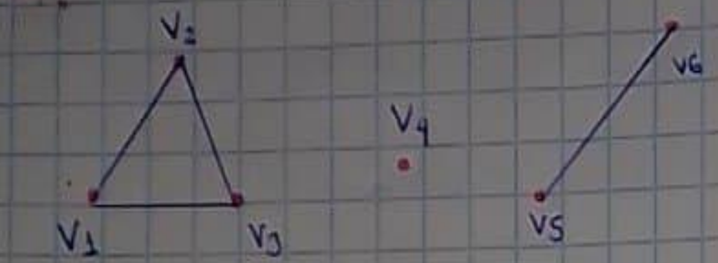
$$\begin{array}{c|ccccccc} & a & b & c & d & e & f & g \\ \hline a & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ e & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ f & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ g & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

3



$$\begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ d & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ e & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

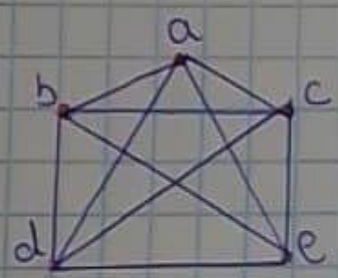
4.



Matriz de adyacencia

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 \end{matrix} \\
\begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

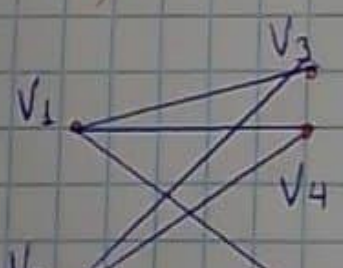
5. K_5



Matriz de adyacencias

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\
\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

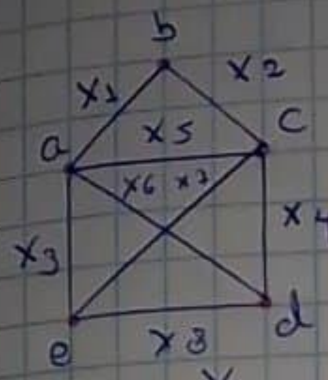
6 $K_{2,3}$



Matriz de Adyacencia

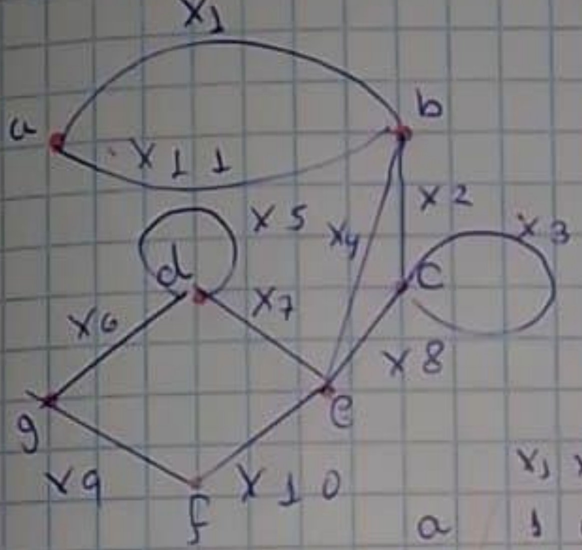
$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \end{matrix} \\
\begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

7. Matriz de incidencia



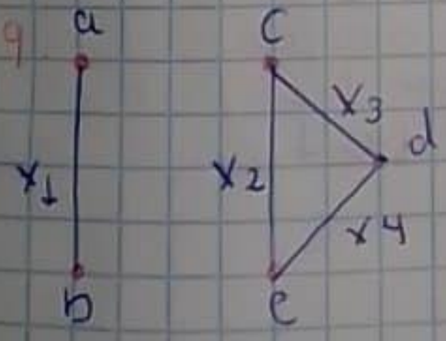
$$
\begin{array}{c}
 \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

8.



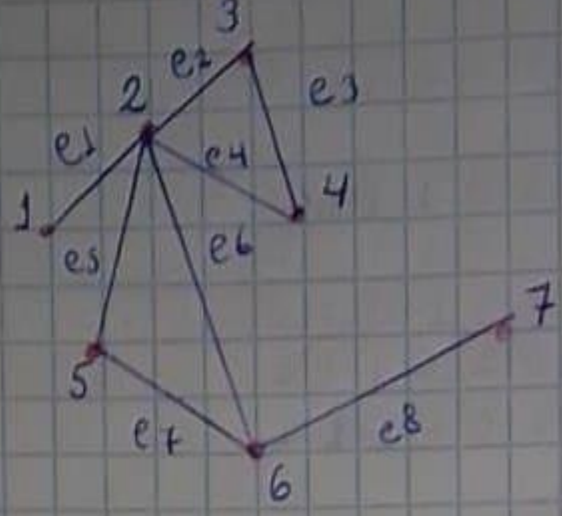
$$
\begin{array}{c}
 \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

9.



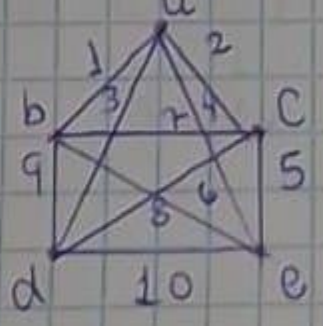
$$
\begin{array}{c}
 \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

10.



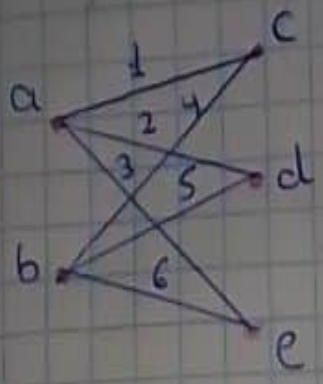
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	1	1	1	0	0
3	0	1	1	0	0	0	0	0
4	0	0	1	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	1	0
6	0	0	0	0	0	1	1	1
7	0	0	0	0	0	0	0	1

11. K_5



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
b	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0
c	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0
d	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1
e	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1

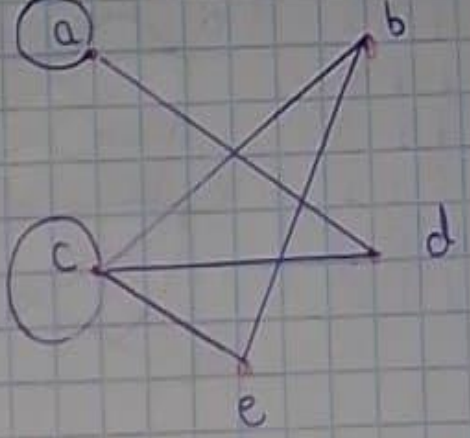
12. $K_{2,3}$



$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{matrix} \\ \begin{matrix}a\\b\\c\\d\\e\end{matrix} & \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

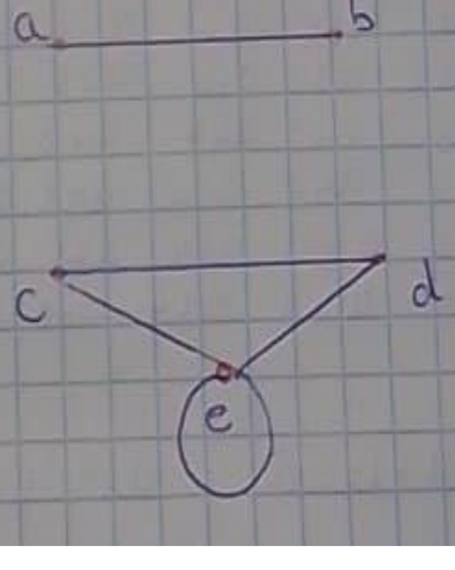
13. Armar matriz de adyacencia en gráfica

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix}a & b & c & d & e\end{matrix} \\ \begin{matrix}a\\b\\c\\d\\e\end{matrix} & \begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 1\\0 & 1 & 2 & 1 & 1\\1 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{array}$$



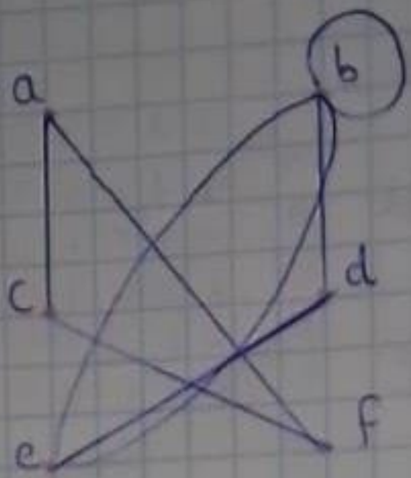
14.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix}a & b & c & d & e\end{matrix} \\ \begin{matrix}a\\b\\c\\d\\e\end{matrix} & \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\end{array}$$



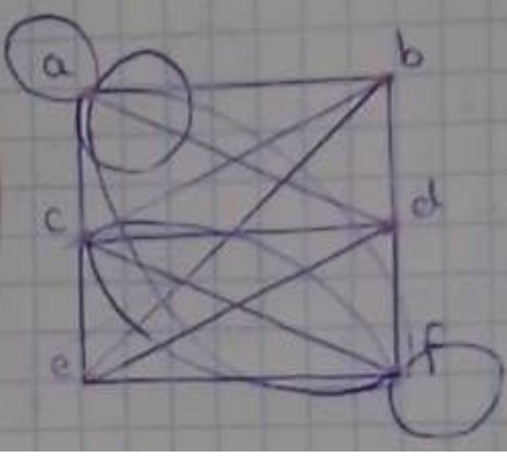
15

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & a & b & c & d & e & f \\
\hline
a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
b & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\
c & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
d & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
e & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
f & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$



16

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & a & b & c & d & e & f \\
\hline
a & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\
b & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
c & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\
d & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
e & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
f & 2 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

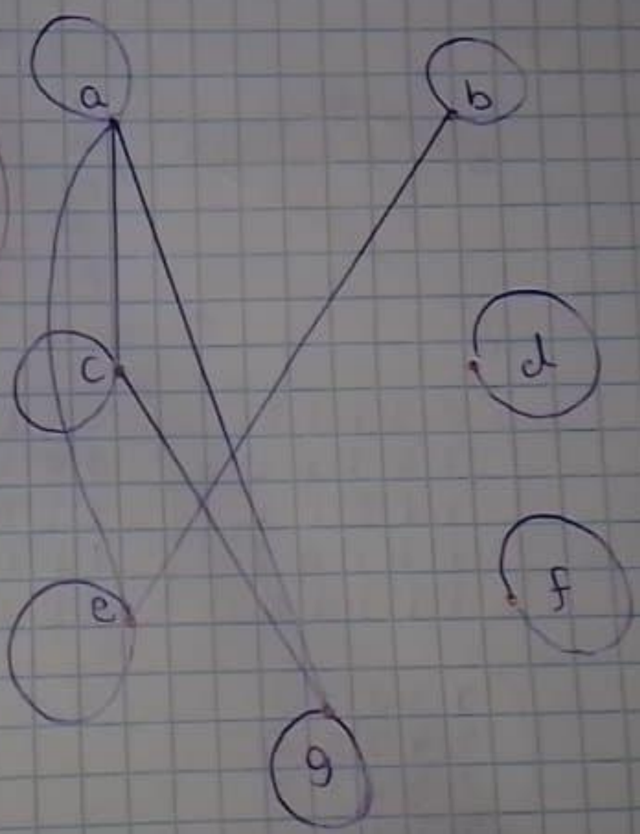


11.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} \end{pmatrix} \quad 7 \times 7$$

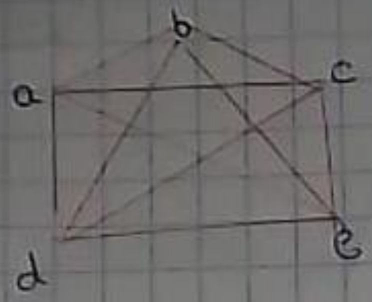
$$\begin{cases} i+1 \,/\, j+1 = 2 \text{ ó } j+1 \,/\, i+1 = 2,\ i \neq j, & 1 \\ i = j, & 2 \\ 0 & \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|ccccccc} & a & b & c & d & e & f & g \\ \hline a & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ b & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ e & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ g & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}$$



19. Matrices de K5 y 1, 2 al cuadrado

K5

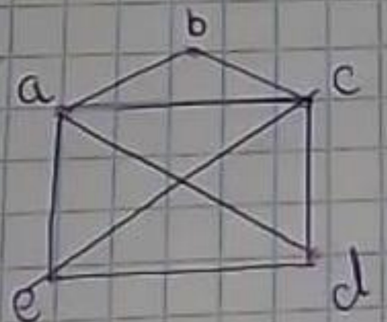


$$\begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline a & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ d & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ e & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{5\times5} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{5\times5} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1

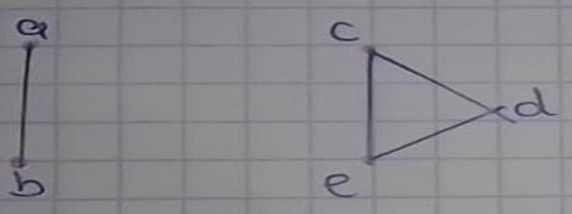


2

$$\begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline a & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ d & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ e & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

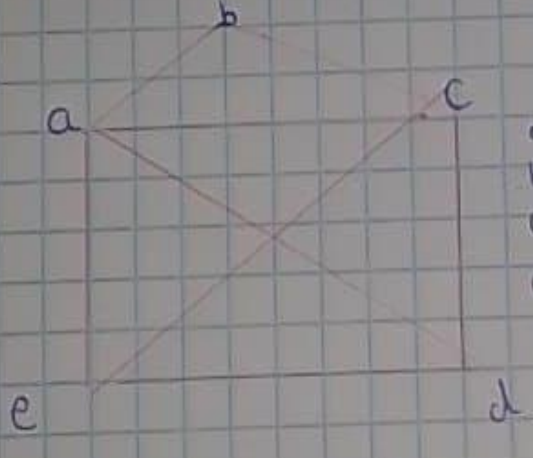
$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3.



$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)^2 \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

20. Sea A la matriz de adyacencia del ejercicio 1 ¿Cuál es el elemento ad de A^5?



$$A^5 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 102 & 67 & 103 & 93 & 93 \\ 67 & 34 & 67 & 52 & 52 \\ 103 & 67 & 102 & 93 & 93 \\ 93 & 52 & 93 & 76 & 77 \\ 93 & 52 & 93 & 77 & 76 \end{pmatrix} \end{array}$$

El reglon A me indica la cantidad de trayectorias de longitud 5 a sus respectivos vertices y la columna d, también me da la cantidad de trayectorias que hay de longitud 5 del vértice d al resto

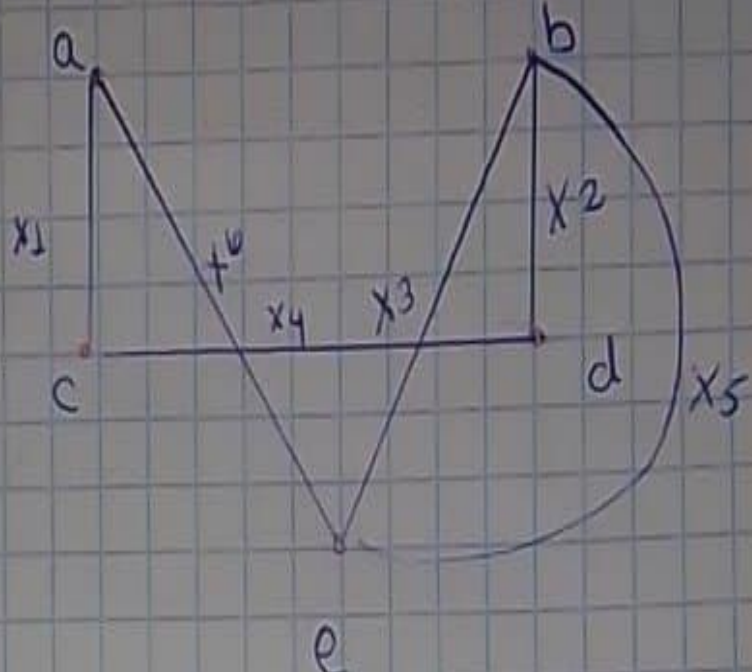
23. Sea A una matriz de adyacencia de una gráfica ¿Por qué A^n es simétrica respecto a la diagonal principal para todo entero positivo n?

$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & \cdots & x \\ \hline a & n & a & b \cdots & c \\ b & a & n & & \\ \vdots & b & & & \\ x & c & & & n \end{array}$$

Porque los elementos de las matrices se repiten, por lo que la cantidad de aristas adyacentes es el mismo

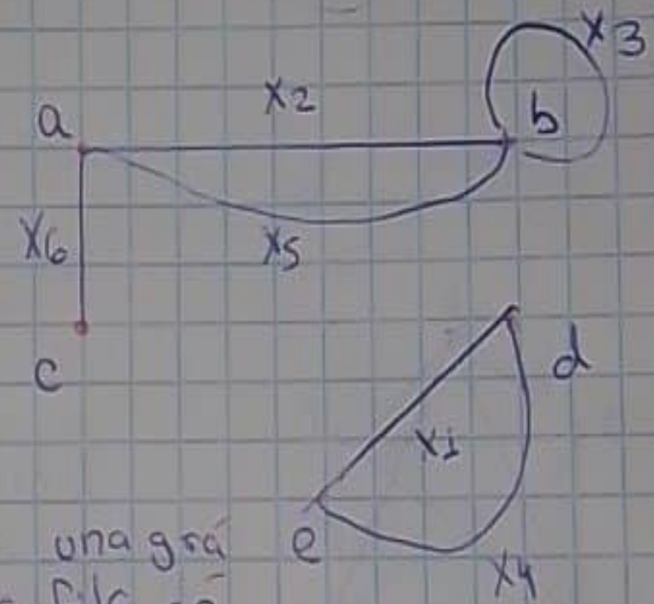
24

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
a	1	0	0	0	0	1
b	0	1	1	0	1	0
c	1	0	0	1	0	0
d	0	1	0	1	0	0
e	0	0	1	0	1	1

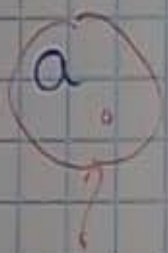


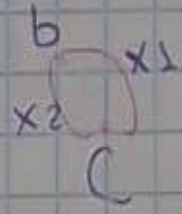
25.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
a	0	1	0	0	1	1
b	0	1	1	0	1	0
c	0	0	0	0	0	1
d	1	0	0	1	0	0
e	1	0	0	1	0	0



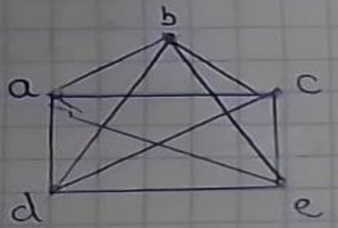
26. ¿Como debe verse una gráfica con ceros en una fila en una matriz de incidencia





Debe haber un vértice aislados

22 K_5



1. ¿Por qué la diagonal de A^n son iguales

Porque como dice la definición el grado que tienen las diagonales es el mismo para todos los vértices por ser un grafo completo

2. ¿Por qué los de fuera de diagonal son iguales?

Porque de manera similar es el mismo recorrido para todos los vértices

29 Demuestre

$d_{n+1} = 4a_n$ .... (I)

$a_{n+1} = d_n + 3a_n$ .... (II)

$a_{n+1} = 3a_n + 4a_{n-1}$ .... (III)

II - III

$d_n = 4a_{n-1}$ ... Probando $n+1$

$\boxed{d_{n+1} = 4a_n} = I$

30 Demuestre

$a_n = 1/5\,[4^n + (-1)^{n+1}]$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	3	13	51	205

- $n = 1$

$a_1 = \frac{1}{5}[4 + 1] = 1$

- $n = 3$

$a_n = 13$

- $n = 4$ → $n = 5$

$a_n \; 51$ $a_n = 205$

31. Demostrar

$$d_n = 4/_5 \left[(4^{n-1} + (-1)^n \right]$$

- $n = 1$

	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5
$d_1 = 0$	0	4	12	52	204

- $n = 3$

$$d_n = 4/_5 \cdot \left[4^2 + (-1)^3 \right]$$

$$d_3 = 12$$

- $n = 4$

$$d_n = \frac{4}{5} \left[4^3 + (-1)^4 \right]$$

$$d_4 = 52$$