Historia del análisis combinatorio:

Los conceptos básicos sobre la combinatoria y los resultados enumerativos han aparecido a lo largo del mundo antiguo. En el siglo vi a. C., en la antigua India, el médico Sushruta asegura en el Susruta-samhita que es posible formar 63 combinaciones a partir de 6 sabores distintos, tomados de uno en uno, de dos en dos, etc., así calculando todas las 26 − 1 posibilidades. El historiador griego Plutarco debatió con Crisipo de Solos (siglo iii a. C.) e Hiparco de Nicea (siglo ii a. C.) sobre un problema enumerativo un tanto delicado, el cual se demostró más adelante que guardaba relación con el número Schröder–Hiparcos.12.

En la Edad Media, la combinatoria continuó siendo estudiada, sobre todo fuera de la civilización Europea. El matemático indio Mahāvīra (c. 850) acuñó una fórmula para el número de permutaciones y combinaciones,34 y es posible que estas fórmulas ya resultaran familiares a los matemáticos indios a principios del siglo vi d. C.5 El filósofo y astrónomo Rabbi Abraham ibn Ezra (c. 1140) estableció la simetría de los coeficientes binomiales, mientras que una fórmula concreta fue hallada más adelante por el talmudista y matemático Gersónides, en 1321.6El triángulo aritmético —un diagrama gráfico mostrando las relaciones entre los coeficientes binomiales— ya había aparecido en tratados matemáticos tan atrás como el siglo x, y con el tiempo serían mejor conocidos como el Triángulo de Pascal.

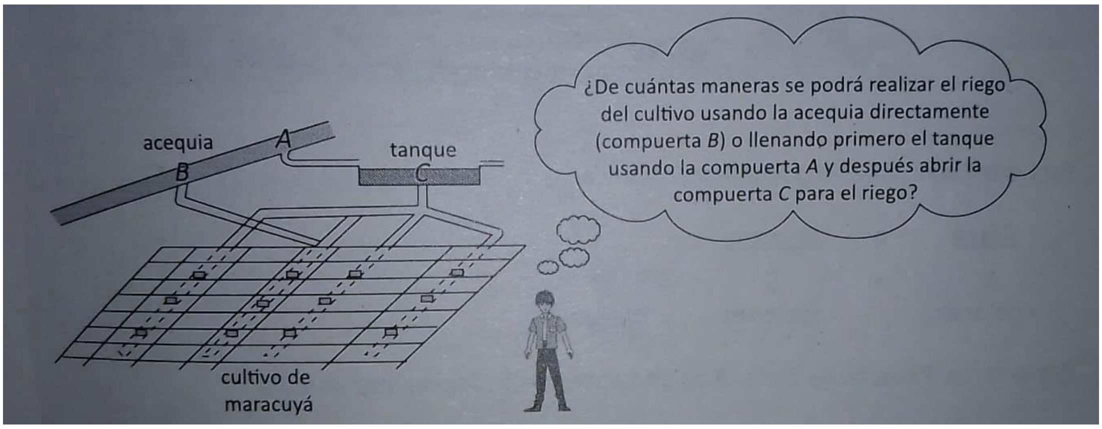
Durante el Renacimiento, junto al resto de las matemáticas y las ciencias, la combinatoria disfrutó de un renacer. Trabajos de Pascal, Newton, Jacob Bernoulli y Euler se volvieron fundamentales en el emergente campo. En los tiempos modernos, los trabajos de J. J. Sylvester (a finales del siglo xix) y Percy MacMahon (a principios del siglo xx) ayudaron a asentar las bases para la combinatoria enumerativa y combinatoria algebraica. La teoría de grafos también disfrutó de una explosión de interés al mismo tiempo, en especial conexión con el teorema de los cuatro colores.

En la segunda mitad del siglo xx, la combinatoria sufrió un crecimiento rápido, que llevó al establecimiento de docenas de nuevos diarios y conferencias sobre este tema.7 En parte, el crecimiento fue estimulado por las nuevas conexiones y aplicaciones en otros campos, desde álgebra hasta probabilidades, desde el análisis funcional a la teoría de números, etc. Estas conexiones terminaron por romper los bordes entre la combinatoria y partes de la matemática y la informática teórica, pero al mismo tiempo causó cierta fragmentación dentro del campo.

Análisis combinatorio

Es la parte de las matemáticas que estudia las formas de contar los diferentes ordenamientos y agrupamientos que se pueden realizar con los elementos de un conjunto, los cuales nos permiten resolver problemas prácticos.

En nuestra vida diaria nos encontramos con situaciones en las cuales nos preguntamos de cuantas maneras se puede realizar. Como ejemplo, a continuación, se muestra un modelo de riego para un cultivo de maracuyá



Para desarrollar estas preguntas, haremos uso de los principios fundamentales de conteo y de las técnicas de conteo que a continuación presentamos.

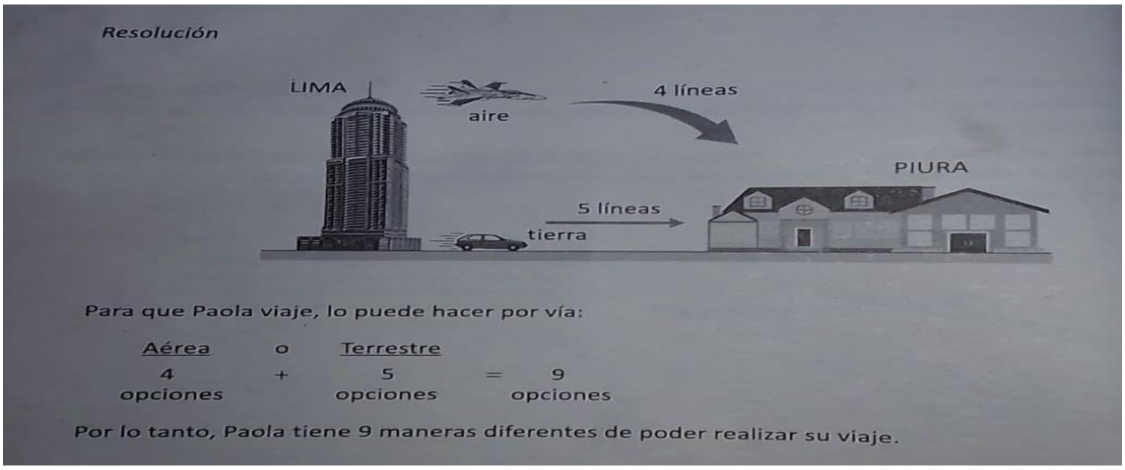
Principios fundamentales del conteo:

1)Principio de la adición:

Si un evento A ocurre de m maneras diferentes y otro evento B ocurre de n maneras diferentes, y no es posible realizar ambos eventos de forma simultánea o uno seguido del otro (eventos mutuamente excluyentes), entonces el evento (A o B) se podrá realizar m + n maneras diferentes.

Ejemplos:

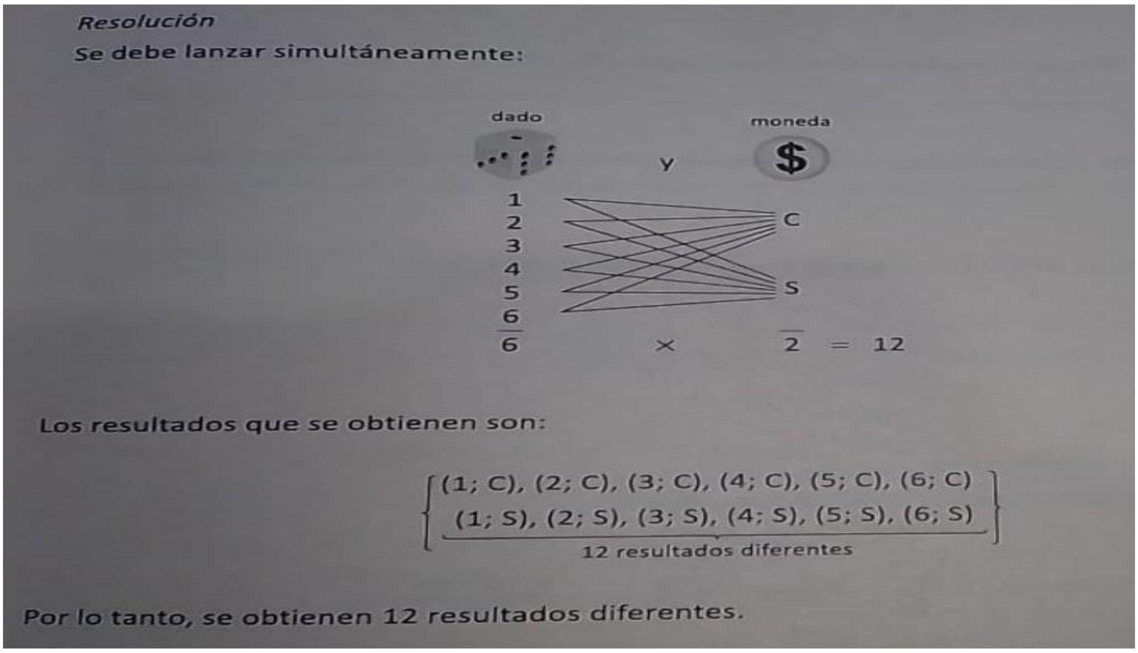
1. Si Paola desea viajar de Lima a Piura y tiene a su disposición 4 líneas aéreas y 5 líneas terrestres, ¿de cuantas maneras diferentes puede realizar su viaje?



2)Principio de la multiplicación: Si un evento A ocurre de m maneras diferentes y otro evento B ocurre de n maneras diferentes (pudiendo realizar los eventos de manera simultánea o consecutiva), entonces los eventos A y B se podrán realizar de m x n maneras diferentes.

Ejemplos:

1. Si se lanza un dado y una moneda simultánea, ¿Cuántos resultados diferentes se obtienen?



Técnicas de conteo

Las técnicas de conteo son procedimientos que se realizan bajo ciertas condiciones para contar de forma directa los casos en que puede realizar un evento. Entre ellas tenemos:

Permutaciones:

-Permutación lineal

-Permutación circular

-Permutación con elementos repetidos

Combinaciones:

-Combinación simple

-Combinación con elementos repetidos

Permutaciones:

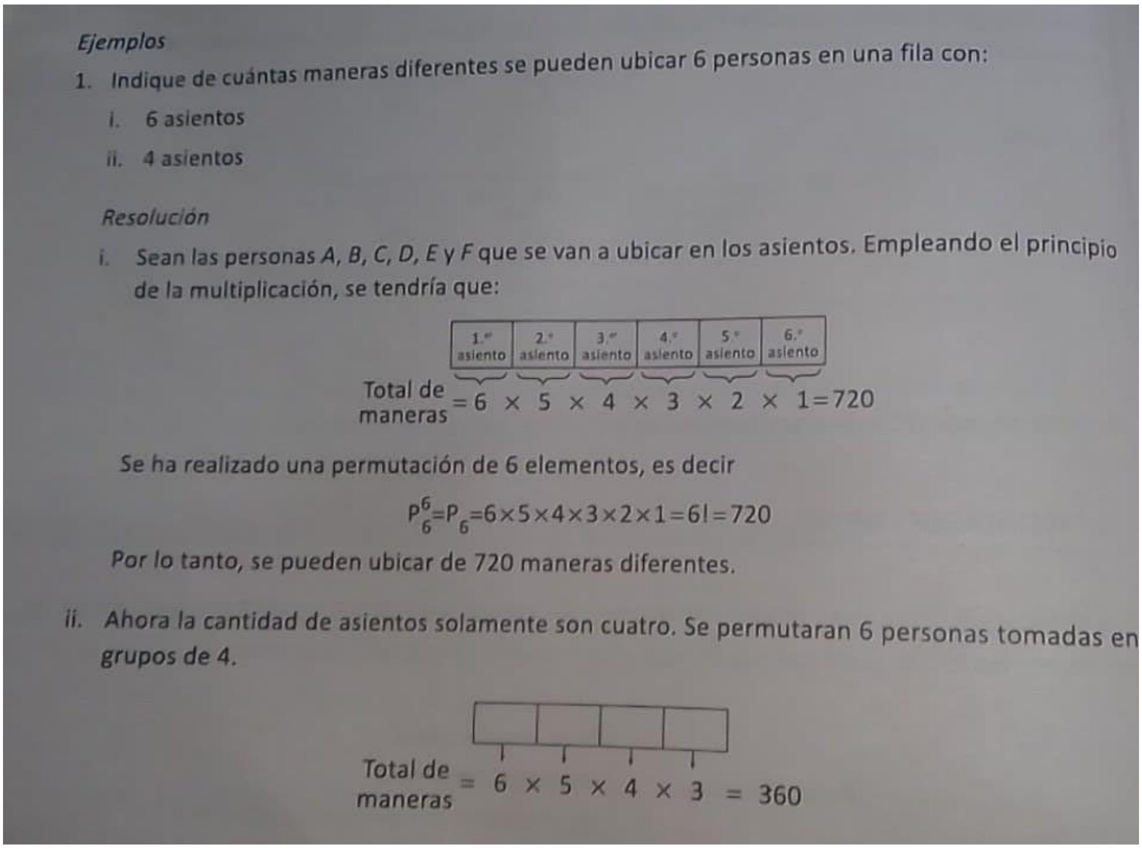
Son los diferentes ordenamientos que se pueden realizar con parte o todos los elementos de un conjunto.

1)Permutación lineal:

Son los ordenamientos que se pueden realizar con elementos diferentes en una fila o línea recta.

Si n objetos diferentes se deben ordenar en una fila tomados en grupos de r objetos (r<n), se denotará y calculará así:

$$\boxed{n\,P\,r = n! / (n-r)!}$$



Ejemplos

1. Indique de cuántas maneras diferentes se pueden ubicar 6 personas en una fila con:

   i. 6 asientos

   ii. 4 asientos

Resolución

i. Sean las personas *A, B, C, D, E* y *F* que se van a ubicar en los asientos. Empleando el principio de la multiplicación, se tendría que:

1.er asiento	2.º asiento	3.er asiento	4.º asiento	5.º asiento	6.º asiento

Total de maneras $= 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

Se ha realizado una permutación de 6 elementos, es decir

$$P_6^6 = P_6 = 6\times5\times4\times3\times2\times1 = 6! = 720$$

Por lo tanto, se pueden ubicar de 720 maneras diferentes.

ii. Ahora la cantidad de asientos solamente son cuatro. Se permutaran 6 personas tomadas en grupos de 4.

Total de maneras $= 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

2)Permutación circular

Son los distintos ordenamientos que se pueden realizar con objetos alrededor de un círculo.

Si n objetos diferentes se deben ordenar circularmente, se denotará y calculará así:

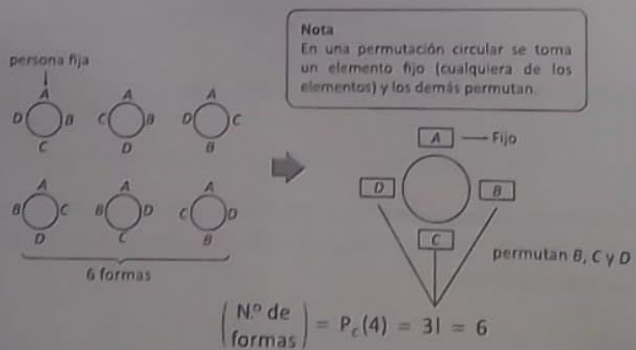
$$\boxed{Pc(n) = (n-1)!}$$

Ejemplos

1. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ubicar 4 personas alrededor de una mesa circular con espacio para 4 personas?

Resolución

Sean *A*, *B*, *C* y *D* las personas que se van a ubicar alrededor de la mesa.



$$\left(\begin{matrix}\text{N.º de}\\ \text{formas}\end{matrix}\right) = P_c(4) = 3! = 6$$

Por lo tanto, se pueden ubicar de 6 maneras diferentes.

3)Permutación con elementos repetidos

Es un ordenamiento lineal cuyos elementos no son todos distintos entre sí, es decir, hay elementos que se repiten.

Si se tienen n objetos y se ordenan todos a la vez en donde hay un primer grupo de n1 objetos iguales, entre si de un primer tipo, n2 objetos iguales entre sí de un segundo tipo, y así sucesivamente hasta nk objetos iguales de un k-ésimo tipo; entonces el numero de permutaciones se denotará y calculará así:

$$\boxed{n\ P\ n1\ ;\ n2;n3;\ldots;nk = (n)!/(n1)!(n2)!(n3)!\ldots(nk)!}$$

-Donde n1+n2+…+nk=n

Combinaciones

Son los diferentes grupos que se pueden formar con parte o todos los elementos de un conjunto sin considerar el orden en que son agrupados.

1)Combinaciones simple:

Son los diferentes grupos o subconjuntos que se pueden formar con los elementos de un conjunto (tomando parte o todos a la vez), considerando que en los grupos los elementos son diferentes.

Si se dispone de n elementos diferentes y se les quiere combinar (agrupar) de r en r, el número de combinaciones se denota y se calcula así:

$$\boxed{n\,C\,r = n!/(n-r)! \times r!}$$

2. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las letras de la palabra PATATA?

Resolución

Se observa que en la palabra PATATA hay letras que se repiten, es decir:

$$\underbrace{A\ A\ A}_{3\text{ veces}}\ \underbrace{T\ T}_{2\text{ veces}}\ \underbrace{P}_{1\text{ vez}}$$

$$P^{6}_{3;2;1} = \frac{6!}{3!\times 2!\times 1!} = \frac{3!\times 4\times 5\times 6}{3!\times 2\times 1}$$

$$= \frac{4\times 5\times 6}{2} = 60$$

Por lo tanto, las letras se pueden ordenar de 60 maneras diferentes.

Tenga en cuenta:

(Permutación) ≠ (Combinación)

* En las permutaciones **interesa el orden**, se busca los ordenamientos.

* En las combinaciones **no interesa el orden**, se busca los agrupamientos.

2) Combinación con repetición:

Nota:

Si queremos distribuir n objetos iguales en r espacios diferentes, entonces el número de formas se calculará así:

r CR n = (r+n-1)!/(r-1)! x n!

Son los diferentes grupos o subconjuntos que se pueden formar con una parte o todos los elementos de un conjunto, pero considerando que hay elementos que son iguales.

Si tenemos r elementos diferentes y queremos formar grupos de n elementos, se denotará y calculará así:

Ejemplos

1. *¿De cuántas formas diferentes se puede comprar 7 pliegos de papel lustre, si los hay de 3 colores distintos?*

Resolución

Se tienen 3 colores diferentes, pero se deben formar grupos de 7.

3 elementos diferentes

$$CR_7^3 = C_7^{3+7-1} = C_7^9 = \frac{9!}{2!\times 7!}$$

se requieren grupos de 7

$$= \frac{7!\times 8\times 9}{2!\times 7!} = \frac{8\times 9}{2} = 36$$

Por lo tanto, son 36 las formas diferentes en que se puede realizar la compra.