

# **MATEMÁTICA**

## **CAPÍTULO 1 - OPERAÇÕES MATEMÁTICAS BÁSICAS: COMO SÃO UTILIZADAS NO ENSINO SUPERIOR?**

Thuysa Schlichting de Souza

# Introdução

O conhecimento da Matemática é essencial para que possamos compreender diversas situações do mundo real e de outras áreas que a utilizam enquanto linguagem. Você já imaginou quantas informações que envolvem os números são utilizadas no nosso dia a dia? Podemos citar como exemplos as quantidades de objetos, os preços dos produtos, as unidades de tempo e de medida, por exemplo. É possível afirmar que é quase impraticável a vida cotidiana sem esses conhecimentos.

Os números, suas propriedades e operações, permitem a formulação de equações e expressões analíticas para a realização de cálculos que nos viabilizam modelar diversas situações. Além da importância dos conjuntos numéricos para expressarmos as informações cotidianas, trata-se, ainda, de um conhecimento imprescindível para a própria Matemática. Podemos pensar os numéricos e suas propriedades como um conjunto de ferramentas básicas, com as quais construímos os conceitos matemáticos mais sofisticados.

Neste capítulo, estudaremos especificamente as ferramentas básicas que nos permitem entender melhor o conceito de função. Realizaremos, inicialmente, uma revisão das operações numéricas elementares no conjunto dos números reais, das operações com frações, das regras de potenciação, da divisão polinomial e da fatoração de expressões algébricas.

Você pode se perguntar: realmente é necessário a compreensão de tais conteúdos, tendo em vista a predominância de ferramentas tecnológicas, como *softwares* e calculadoras, que realizam operações com excelente desempenho? É essencial entendermos os conceitos matemáticos básicos, justamente para usufruir integralmente das potencialidades que as tecnologias nos oferecem atualmente. Assim, vamos explorar o uso do ferramental tecnológico para viabilizar as operações aritméticas e algébricas estudadas no capítulo.

Ao final do capítulo, abordaremos o conceito de função como ferramenta necessária em diversas áreas do conhecimento. Assim, você será capaz de responder algumas questões relacionadas ao assunto, como: o que caracteriza uma função? Para que servem as funções? Quando e como posso usá-las em situações da vida real?

Vamos em frente! Bons estudos!

## 1.1 Operações numéricas elementares

Você sabia que os números podem ser classificados em conjuntos? Podemos agrupar, em um mesmo conjunto numérico, os números que compartilham características em comum. Tais conjuntos, suas operações e propriedades, foram estudados pelos matemáticos ao longo do tempo. Assim, eles desenvolveram as teorias que nos permitem manipular e operar com os números da forma que fazemos atualmente.

Os primeiros números foram criados pela necessidade de contagem e constituem o conjunto dos **naturais**, representados pela forma  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ . Porém, com o desenvolvimento da Matemática, os números naturais se tornaram insuficientes para a realização de muitas operações numéricas e houve a necessidade da criação de novos conceitos. Por exemplo, a impossibilidade de se efetuar a subtração entre dois números naturais quaisquer, foi um dos motivos que impulsionou a formalização do conjunto dos números **inteiros**, que é representado como:  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

## VOCÊ SABIA?



O sistema de numeração que utilizamos hoje é o indo-arábico. Trata-se de um sistema posicional de base 10, ou seja, formado por dez algarismos decimais (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Cada um dos algarismos possui um valor numérico que depende da posição ocupada dentro do numeral. Porém, existem modos diferentes de escrever números. Por exemplo, a aritmética dos computadores usa a base 2, ou binária. Em lugar de unidades, dezenas, centenas, e assim por diante, os computadores usam as potências de 2, como: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, e assim por diante (STEWART, 2014).

Seguindo a dinâmica de criação de conceitos, conforme a necessidade para se resolver operações e problemas, foram criados também os números **racionais** e os **irracionais**. Os primeiros formam o conjunto de números que podem ser escritos como uma razão entre dois números inteiros. Em notação matemática:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0 \right\}.$$
 De modo geral,  $a$  é chamado de numerador e  $b$  de denominador da fração.

São exemplos de racionais, os números decimais com uma quantidade finita de algarismos após a vírgula, como  $\frac{1}{2} = 0,5$ ,  $\frac{25}{4} = 6,25$  e, também, as dízimas periódicas, isto é, os números decimais que apresentam uma repetição

infinita de algarismos após a vírgula, como  $\frac{22}{3} = 7,\overline{3}$  e  $\frac{82}{15} = 5,4\overline{6}$ . A barra sobre os algarismos indica que eles se repetem infinitamente.

Note que o conjunto dos números naturais é um subconjunto dos inteiros, assim como o conjunto dos inteiros é subconjunto dos racionais. Ou ainda, em linguagem matemática  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$  (lê-se: está contido). Sendo assim, todos os números naturais e inteiros admitem também uma representação na forma fracionária. Veja alguns

exemplos:  $2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{10}{5}$ ,  $-9 = \frac{-9}{1} = \frac{-27}{3} = \frac{36}{-4}$ . No caso do número 0, podemos representá-lo por uma fração com numerador igual a 0. Por exemplo,  $\frac{0}{1} = \frac{0}{5} = \frac{0}{-12} = 0$ .

Já o **conjunto dos irracionais** é constituído pelos números que não podem ser representados na forma racional. Alguns exemplos são  $\pi = 3,1415926\dots$ ,  $e = 2,71828\dots$ ,  $\sqrt{3} = 1,7320508\dots$  e  $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$ , os quais representam números decimais com infinitos algarismos após a vírgula e não são dízimas periódicas. A notação mais usual do

conjunto dos irracionais é  $\mathbb{I}$ . Contudo, alguns livros optam pela utilização da notação  $\mathbb{Q}^c$ , que evidencia o fato de o conjunto dos irracionais se completar aos racionais.

## VOCÊ O CONHECE?



Carl Friedrich Gauss (1777-1855) foi um importante matemático alemão que contribuiu para diversas áreas das Ciências e da Matemática. Aos três anos de idade, ele supostamente corrigiu a aritmética de seu pai. Em 1801, publicou o livro “Investigações em Aritmética”, até hoje, a obra mais importante sobre a teoria dos números (STEWART, 2014).

Desse modo, existe um conjunto numérico mais abrangente do que os descritos anteriormente. Trata-se do conjunto dos números **reais** que é formado pelos números decimais e indicado por  $\mathbb{R}$ . Assim, são subconjuntos dos reais o conjunto dos naturais, dos inteiros, dos racionais e dos irracionais. O diagrama seguinte nos ajuda a visualizar melhor a relação:



Figura 1 - O conjunto dos reais é formado pelos números racionais e pelos irracionais.  
Fonte: Elaborado pela autora, adaptado de ADAMI; DORNELLES FILHO; LORANDI, 2015.

Uma maneira de representar um número real é indicá-lo como um ponto de uma reta horizontal, geralmente denominada de reta numérica ou real. O número zero é chamado de origem e é a referência da reta. Por convenção, os números positivos ficam à direita da origem e os números negativos são indicados à sua esquerda.

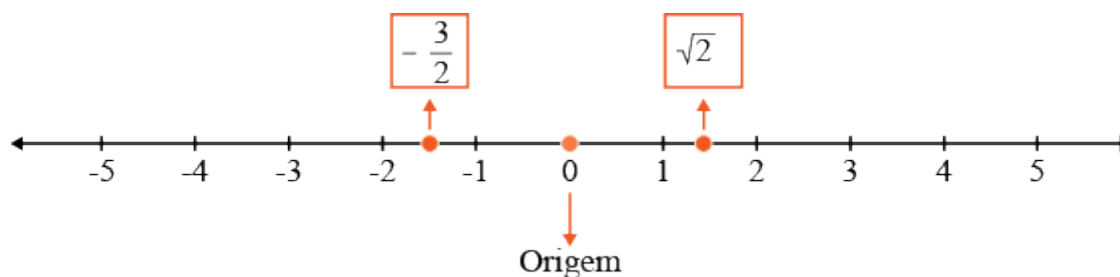


Figura 2 - Representação geométrica dos números reais numa reta horizontal.  
Fonte: Elaborado pela autora, 2018.

Observe que a reta é ordenada e que podemos representar geometricamente cada número natural, inteiro, racional e irracional como um único ponto na reta real. Isto significa que os números reais ocupam totalmente a reta numérica, de modo que um número real genérico  $x_1$  é menor que qualquer número  $x$  situado à sua direita e maior que qualquer número localizado à sua esquerda. Por exemplo, temos que  $\sqrt{2} > 1$  e que  $\sqrt{2} < 2$ .

## VOCÊ SABIA?



Existem números que não pertencem ao conjunto dos reais, eles são chamados de números complexos e descritos pela expressão:  $z = a + bi$ , onde os coeficientes  $a$  e  $b$ , são números reais e  $i$  representa o número imaginário  $\sqrt{-1}$ . Os antigos matemáticos consideravam tal descrição absurda e precisaram de um longo tempo para considerar que os números são invenções artificiais criadas pelo homem, as quais podem captar muitos aspectos da natureza, mas não são parte dela. Atualmente, os números complexos são amplamente utilizados nas áreas da física e da engenharia, como no estudo das correntes alternadas (STEWART, 2014).

Na sequência, vamos realizar uma breve discussão sobre os números reais e relembrar as suas operações elementares.

### 1.1.1 As quatro operações básicas no conjunto dos reais

Você já reparou que, quando adicionamos, subtraímos, multiplicamos e dividimos quaisquer dois números reais, com a exceção da divisão por 0, o resultado da operação é sempre um número real? Esta é uma propriedade algébrica do conjunto dos reais que nos permite realizar as operações elementares com todos os seus elementos. O conjunto dos números reais apresenta duas operações fundamentais, denominadas de adição e de multiplicação. A adição é indicada pelo símbolo “+” e, a cada par de números  $x, y \in \mathbb{R}$ , associa um número real dado pela soma  $x + y$ . Já a multiplicação é representada pelo símbolo “.” e, a cada par da mesma forma, associa seu produto  $x \cdot y$ .

As duas operações apresentam algumas propriedades que são chamadas de elementares, pois assumimos que são válidas sem a necessidade de demonstrações matemáticas. Assim, sejam  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , temos as seguintes propriedades:

Propriedade Elementar	Adição	Multiplicação
Comutatividade	$x + y = y + x$	$x \cdot y = y \cdot x$
Associatividade	$x + (y + z) = (x + y) + z$	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
Elemento neutro	$x + 0 = x$	-
Elemento identidade	-	$1 \cdot x = x$
Elemento inverso	$x + (-x) = 0$	$x \cdot \frac{1}{x} = 1, x \neq 0$
Distributividade	$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$	

Tabela 1 - As propriedades elementares do conjunto dos números reais.

Fonte: Elaborado pela autora, adaptado de DEMANA et al., 2013.

Vamos trocar as variáveis  $x, y, z$ , da tabela anterior por números reais para exemplificar as propriedades elementares. Veja:

Propriedade Elementar	Adição	Multiplicação
Comutatividade	$5 + 3 = 3 + 5 = 8$	$5 \cdot 3 = 3 \cdot 5 = 15$
Associatividade	$4 + (2 + 6) = (4 + 2) + 6 = 12$	$4 \cdot (2 \cdot 6) = (4 \cdot 2) \cdot 6 = 48$
Elemento neutro	$\sqrt{7} + 0 = \sqrt{7}$	-
Elemento identidade	-	$1 \cdot 32 = 32$
Elemento inverso	$21 + (-21) = 0$	$1 \cdot 32 = 32$
Distributividade	$1,25 \cdot (9 + 6,7) = 1,25 \cdot 9 + 1,25 \cdot 6,7 = 19,625$	

Tabela 2 - Podemos exemplificar as propriedades elementares com qualquer número real.

Fonte: Elaborado pela autora, 2018.

Note que não foram definidas ainda a subtração e a divisão de números reais. Para isso, vamos utilizar os próprios termos da soma e da multiplicação. Assim, a subtração, a cada par de números  $x, y \in \mathbb{R}$ , associa um número real  $x - y = x + (-y)$ . Na divisão, cada par de números será associado a um número real da forma:  $\frac{x}{y} = x \cdot \left(\frac{1}{y}\right)$ ,  $b \neq 0$ . Podemos dizer, então, que subtrair é *somar o oposto* e dividir é *multiplicar pelo inverso*.

## VOCÊ SABIA?



A Álgebra é um ramo da Matemática que utiliza letras e outros símbolos para representar os números reais. Chama-se **variável** uma letra ou um símbolo (por exemplo,  $x, y, b$ ) que representa um número real que não foi especificado. E denomina-se de **constante** um número ou um símbolo (por exemplo,  $0, \sqrt{3}, \pi$ ) que representa um número real específico (DEMANA, *et al.*, 2013). Em alguns casos, a palavra “incógnita” também pode ser utilizada quando nos referimos às letras que representam números desconhecidos. Porém, elas indicam uma quantidade desconhecida, cujo valor pode ser encontrado pelas condições de uma equação. Enquanto as variáveis representam quantidades indeterminadas com valor variável.

As demais propriedades algébricas dos números reais são demonstradas a partir das definições de operações e das propriedades elementares. Para facilitar o entendimento de tais propriedades, vamos apresentá-las com alguns exemplos na tabela a seguir:

Propriedades	Exemplos
$-(-x) = x$	$-(-2) = 2$
$-x \cdot (y) = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$	$-3 \cdot (5) = 3 \cdot (-5) = -(3 \cdot 5) = -12$
$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$	$(-4) \cdot (-6) = 4 \cdot 6 = 24$
$(-1) \cdot x = -x$	$(-1) \cdot 9 = -9$
$-(x + y) = (-x) + (-y)$	$-(7 + 8) = (-7) + (-8) = -15$

Tabela 3 - Exemplos ajudam a visualizar as propriedades da inversa aditiva dos reais.

Fonte: Elaborado pela autora, adaptado de DEMANA et al., 2013.

Vale destacar que as operações envolvendo os números irracionais, em geral, são realizadas utilizando sua representação decimal aproximada. Por exemplo, podemos considerar  $\sqrt{3} \cong 1,73$  e, assim, realizar a soma  $\sqrt{3} + 2,10$  da seguinte forma:  $\sqrt{3} = 1,73$ ,  $1,73 + 2,10 = 3,83$ .

E como podemos realizar as operações elementares e utilizar as propriedades anteriores quando estamos lidando com números reais fracionários (ou racionais)? Primeiro, precisamos definir a soma e a multiplicação para as frações.

Dados dois números racionais  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$ , com  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}, b \neq 0, d \neq 0$ , definimos:

- adição:  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$ ;
- multiplicação:  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ .

Logo, utilizando a definição de subtração e de divisão para números reais, temos:

- subtração:  $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \left(-\frac{c}{d}\right) = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}$ ;
- divisão:  $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ .

Agora, vejamos alguns exemplos que nos ajudam a compreender melhor tais operações com números fracionários:

$$\frac{3}{19} + \frac{5}{19} = \frac{3 \cdot 19 + 5 \cdot 19}{(19 \cdot 19)} = \frac{19 \cdot (3 + 5)}{19 \cdot 19} = \frac{8}{19}$$

Na última igualdade, estamos considerando a equivalência entre as frações  $\frac{19 \cdot 8}{19 \cdot 19}$  e  $\frac{8}{19}$ . Portanto, quando os denominadores das frações são iguais, basta somar seus numeradores e considerar o mesmo denominador.

$$\frac{7}{6} + \frac{11}{8} = \frac{7 \cdot 8 + 11 \cdot 6}{6 \cdot 8} = \frac{56 + 66}{48} = \frac{122}{48} = \frac{61}{24}$$

Note que o mínimo múltiplo comum (m.m.c.) dos denominadores 6 e 8 é 24, assim podemos escrever as frações

na forma equivalente com denominador 24:  $\frac{7}{6} = \frac{28}{24}$  e  $\frac{11}{8} = \frac{33}{24}$ . Logo, uma segunda maneira de realizarmos a soma

$$\text{seria: } \frac{7}{6} + \frac{11}{8} = \frac{28 + 33}{24} = \frac{61}{24}$$

$$4 - \frac{2}{8} = \frac{4}{1} + \left(-\frac{2}{8}\right) = \frac{4}{1} + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{4 \cdot 4 - 1 \cdot 1}{4} = \frac{16 - 1}{4} = \frac{15}{4}$$

Neste caso, para efetuarmos o algoritmo da subtração, foi necessário representar o número inteiro 4 como  $\frac{4}{1}$ .  
 $\frac{2}{3} : 5 = \frac{2}{3} : \frac{5}{1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}$ .

Observe que também utilizamos a fração com denominador 1 para representar o número inteiro 5 e, assim, foi possível obter a fração inversa  $\frac{1}{5}$ .

Podemos perceber que os números racionais possuem várias representações na forma de frações. Por exemplo,  $\frac{28}{24} = \frac{2 \cdot 14}{2 \cdot 12} = \frac{14}{12} = \frac{2 \cdot 7}{2 \cdot 6} = \frac{7}{6}$ . A última fração é chamada de **irredutível**, pois eliminamos os fatores comuns entre os numeradores e os denominadores até que não fosse mais possível seguir a simplificação.

Dependendo dos valores dos seus numeradores e dos denominadores, as frações costumam receber nomenclaturas especiais. Chamamos a fração  $\frac{a}{b}$  de **imprópria** quando  $a < b$ , como nos casos:  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{5}{17}$  e  $\frac{23}{625}$ . E

denominamos a fração  $\frac{a}{b}$  de **própria** quando  $a > b$ . Como nos exemplos:  $\frac{9}{5}$ ,  $\frac{17}{100}$  e  $\frac{815}{311}$ . Outra nomenclatura bastante utilizada é de **fração decimal** que indica uma fração cujo denominador é uma potência de base 10. Por exemplo:  $\frac{1}{10}$ ,  $\frac{13}{100}$  e  $\frac{561}{1000}$ . Uma fração decimal bastante utilizada em nosso cotidiano são aquelas com o denominador 100. Estes números são denominados de percentuais e identificados pela notação % no lugar da divisão. Frequentemente, eles aparecem no comércio, na Estatística, na Matemática Financeira e em diversas outras áreas do conhecimento. Sendo assim, para transformar um número percentual em número real basta dividi-lo por 100 (SILVA; SILVA; SILVA, 2010).

Observe os exemplos:

$$5\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20} = 0,05;$$

$$10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0,1;$$

$$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0,25;$$

$$150\% = \frac{150}{100} = \frac{3}{2} = 1,5;$$

Note que toda fração decimal pode ser escrita como um número decimal finito. Além desse caso, podemos afirmar que uma fração cujo denominador é uma potência de 2 ou uma potência de 5 também haverá uma representação decimal finita. Verifique alguns exemplos:

$$\frac{3}{2} = 1,5; \frac{11}{16} = 0,6875; \frac{45}{32} = 1,40625;$$

$$\frac{3}{5} = 0,6; \frac{42}{25} = 1,68; \frac{86}{625} = 0,1392.$$



## VOCÊ QUER LER?



O artigo de Ronaldo Nicolai (2004), intitulado “Algumas técnicas operatórias (de outros tempos e de outros lugares)”, busca descrever algumas técnicas operatórias usadas em outros tempos e lugares para efetuar as quatro operações elementares. Ele apresenta ainda algumas variações dos algoritmos utilizados atualmente, que nos ajudam a entender porque estes algoritmos fornecem as respostas adequadas. Disponível nas páginas 101 a 105 do texto: <[http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat\\_icap2.pdf](http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_icap2.pdf)>. Vale a pena conferir!

Você teve a oportunidade de relembrar as operações elementares e suas propriedades principais no conjunto dos números reais. Agora, vamos estudar outra operação que podemos realizar dentro do mesmo conjunto: a potenciação.

### 1.1.2 A potenciação com expoentes inteiros e suas propriedades

Em algumas áreas do conhecimento, é frequente a utilização de dados e números escritos de forma muito extensa, apresentando muitos algarismos. Por exemplo, quando se trabalha com a massa do nosso planeta, temos que lidar com um número grande, na casa dos sextilhões, mais precisamente são 5 972 000 000 000 000 000 000 000 de toneladas.

Para facilitar a manipulação de números dessa forma e a realização de operações matemáticas, foi inventada a notação científica que permite escrevê-los como um número decimal utilizando poucos algarismos. Note que 5 972 000 000 000 000 000 000 000 pode ser obtido multiplicando 24 vezes o número 5,972 por 10. Assim, podemos reescrevê-lo como  $5,972 \cdot 10^{24}$ . O número  $10^{24}$  é chamado de potência de base 10 e expoente 24, e indica que podemos obter o número original da massa da terra em toneladas, ao movermos a vírgula do número decimal 24 casas para a direita.

Sendo assim, a notação de potência é utilizada para reduzir a quantidade de fatores repetidos numa multiplicação. Sejam  $a$  um número real e  $n$  um número real inteiro positivo, denomina-se **potência de base  $a$  e expoente  $n$**  o número da forma:

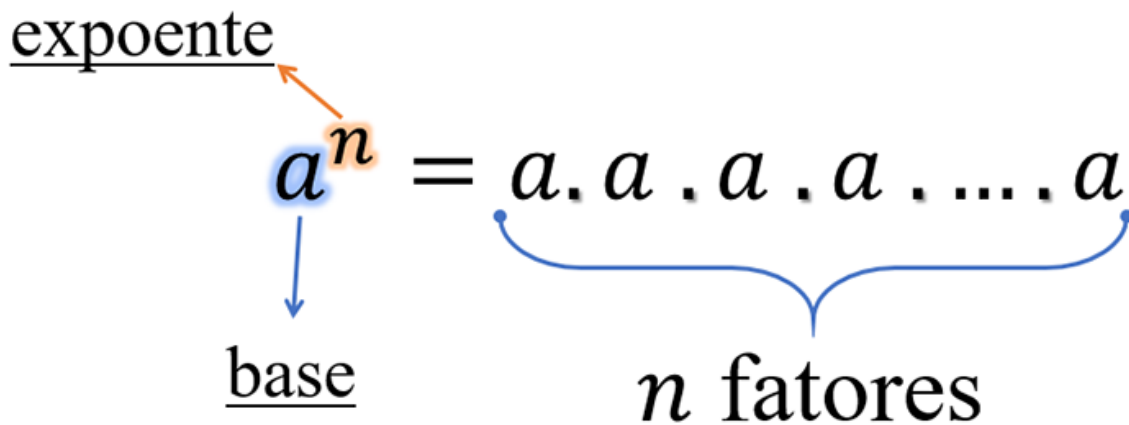


Figura 3 - Os termos de uma potência de base  $a$  e expoente  $n$ .

Fonte: Elaborado pela autora, 2018.

Vejamos:

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$$

$$\left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{7}{8} \cdot \frac{7}{8} = \frac{49}{64}$$

$$(6,91)^3 = 6,91 \cdot 6,91 \cdot 6,91 = 329,939371$$

$$(\sqrt{5})^4 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5^4}$$

Por definição, quando o expoente for igual a zero, a potência será 1 para qualquer valor da base, exceto a base com valor nulo. Isto é,  $a^0 = 1$ , para  $a \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ .

A seguir, vamos estudar as propriedades da potenciação. Sejam  $a$  e  $b$ , dois números reais, com  $a \neq 0$  e  $b \neq 0$  e  $m$  e  $n$ , números inteiros.

Propriedades	Exemplos
Multiplicação de potências de mesma base $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$(-2)^2 \cdot (-2)^3 = (-2)^{2+3} = (-2)^5$
Divisão de potências de mesma base $a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$3^8 : 3^2 = \frac{3^8}{3^2} = 3^{8-2} = 3^6$
Potência de potência. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(5^7)^6 = 5^{7 \cdot 6} = 5^{42}$
Potência de expoente negativo $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$(-4)^{-2} = \frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{16}$
Potência de produto $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$	$(3 \cdot 4)^3 = 3^3 \cdot 4^3$
Potência de divisão $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	$\left(\frac{-1}{5}\right)^4 = \frac{(-1)^4}{5^4} = \frac{1}{625}$

Tabela 4 - Exemplos ajudam a visualizar as propriedades da potência.

Fonte: Elaborado pela autora, 2018.

Vamos aplicar a propriedade da potência negativa para uma base na forma fracionária:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}\right]^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}.$$

Note que usamos o inverso de  $\frac{3}{4}$ , assim o número fracionário elevado à potência  $-2$  é igual ao inverso desse número elevado à potência 2. Portanto, sempre que um número racional  $\frac{a}{b}$  for elevado à um número inteiro negativo  $-n$ , podemos usar a propriedade:  $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$ .

Retomando o exemplo da notação científica, potências com expoentes negativos são bastante utilizadas para exprimir números muito pequenos, como, por exemplo, massas de moléculas. Segundo Demana (*et al.*, 2013), o oxigênio tem 0,000 000 000 000 000 000 000 053 g.

Note que podemos representá-lo como um número decimal entre 1 e 10, usando a multiplicação do número 5,3 por uma potência de base 10. Se dividirmos 23 vezes o número 5,3 por 10 temos a massa original de oxigênio.

Isto é,  $0,000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 053 = \frac{5,3}{10^{23}}$ . Usando as propriedades da potenciação, temos:  $\frac{5,3}{10^{23}} = 5,3 \cdot \frac{1}{10^{23}} = 5,3 \cdot 10^{-23}$ . Logo o expoente negativo indica a quantidade de casas que deve ser movida para a esquerda para se obter o número original.

Veja outros exemplos de transformação de números para a notação científica:

$$\frac{5\,684\,000\,000\,000}{0,000812} = \frac{5,684 \cdot 10^{12}}{8,12 \cdot 10^{-4}} = \frac{5,684}{8,12} \cdot 10^{12-(-4)} = 0,7 \cdot 10^{16} = 7 \cdot 10^{15}$$

$$\frac{42\,000 \cdot 526\,000\,000}{25\,000\,000} = \frac{4,2 \cdot 10^4 \cdot 5,26 \cdot 10^8}{2,5 \cdot 10^7} = \frac{4,2 \cdot 5,26}{2,5} \cdot 10^{4+8-7} = 8,8368 \cdot 10^5$$

Você pôde perceber que as propriedades das operações básicas (soma, subtração, multiplicação, divisão) e da potenciação facilitam a manipulação dos números reais e a própria realização das operações. Podemos empregar estes conhecimentos em situações do cotidiano e em problemas das diversas ciências, por exemplo, para simplificar operações e melhorar a representação do número. Além disso, vamos usá-los para resolver expressões algébricas, isto é, expressões que envolvem variáveis, incógnitas, constantes e as próprias operações definidas no conjunto dos reais.

## 1.2 Operações algébricas elementares

Você já percebeu que o uso de símbolos em Matemática ultrapassa sua presença na notação numérica? A história do desenvolvimento do raciocínio simbólico está estritamente relacionada ao contexto da resolução de problemas. No Antigo Período Babilônico, já existiam diversos problemas que tratavam da determinação de alguma quantidade desconhecida. Um exemplo de problema típico é achar o peso de um objeto sabendo que, quando se acrescenta um segundo objeto com metade do seu peso, o peso total é 15 gin (unidade de medida da época) (STEWART, 2014).

Como a Álgebra nos ajuda a resolver esse tipo de problema? Note que podemos representar o valor do peso desconhecido por uma letra, que usualmente é a letra  $x$ . Assim, é possível usar as operações matemáticas para expressar as condições impostas a  $x$ . Logo, o problema descrito anteriormente pode ser representado pela

equação:  $x + \frac{x}{2} = 15$ . Se observarmos apenas o primeiro termo da equação  $\left(x + \frac{x}{2}\right)$ , temos um exemplo de **expressão algébrica**.

As expressões algébricas são expressões matemáticas formadas por letras ou por números e letras. Como podemos observar nos exemplos:  $-xy^2$ ;  $x^2 + 4x + 5$ ;  $x^2y + 2xy - 9z$ . De modo geral, podemos classificar alguns tipos de expressões algébricas que apresentam características especiais, como podemos verificar na tabela a seguir.

Nome	Definição	Exemplos
Monômio	Expressão algébrica que não contém operações de adição e de subtração, isto é, que apresenta um único termo. É da forma: $ax^m y^n$ , onde $a$ é um número real e os coeficiente $m, n$ são inteiros não negativos.	$3$ $12x$ $-xy^2$ $6x^2$ $\frac{3}{2}y^4$
Polinômio	Consiste em um monômio ou na soma de dois ou mais monômios. Cada monômio é o um termo do polinômio	$18x^3 + 7x^2 - 15x + 2$ $x^2y^3 - 4zy^2 - \frac{2}{9} + 20xz$ $x^2 + 4x + 5$
Binômio	Nome especial para um polinômio formado por dois monômios.	$x + 7$ $x^3 - 5y^2$ $\sqrt{11}y^5 + \frac{xy}{3}$
Trinômio	Nome especial para um polinômio formado por três monômios.	$-x + 5y + 2z$ $y^6 + \frac{4xy^2}{3} + 8xz$ $x^2y + 2xy - 9z$
Expressão fracionária	Nome dado ao quociente de duas expressões algébricas.	$\frac{8x^3 + 2x^2 - 10}{-x + 6yz}$ $\frac{xy^2 - x^2y}{6xy}$

Figura 4 - Classificação de expressões algébricas, de acordo com suas características.

Fonte: Elaborado pela autora, 2018.

Cabe destacar que um monômio é dividido em duas partes: uma constante que é chamada de **coeficiente** e uma parte literal formada por uma ou mais letras, que são denominadas de **variáveis**. No monômio da forma  $12x$ , o coeficiente é 12 e a variável é  $x$ . Já no monômio  $-xy^2$ , o coeficiente é  $-1$ , e a parte literal é  $xy^2$ , formada pelas variáveis  $x$  e  $y$ .

A soma dos expoentes da parte literal, determina o grau de um monômio. Assim, o grau do monômio  $12x$  é 1, pois, quando o expoente de  $x$  não aparece, sabemos que ele assume o valor 1. O grau do monômio  $-xy^2$  é 3, pois este é o valor da soma dos expoentes 1 e 2 das variáveis  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Podemos definir ainda a semelhança entre monômios. Dizemos que dois ou mais monômios são semelhantes quando apresentam a mesma parte literal. Observe que  $12x$ ,  $\frac{6}{5}x$  e  $-3x$  são semelhantes. Porém,  $12x$  e  $6x^2$ , não são semelhantes, pois as partes literais diferem pelo expoente.

Os monômios e os polinômios apresentam muitas aplicações na própria matemática e em diversas áreas do conhecimento. Podemos citar sua utilização na Economia, para a análise de custos e lucros, na Física, para a descrição da trajetória de um projétil, na Engenharia, com cálculos de áreas, na Matemática, no estudo de funções, entre muitas outras aplicações. Sendo assim, vamos estudar mais detalhadamente o conceito de polinômios e como operá-los na sequência.

### 1.2.1 Adição, subtração e multiplicações de polinômios

Vamos iniciar nosso estudo, analisando a figura a seguir, que é formada por dois polígonos regulares: um quadrado de área  $A1$  e um retângulo de área  $A2$ . Como podemos encontrar o perímetro e a área total da figura?

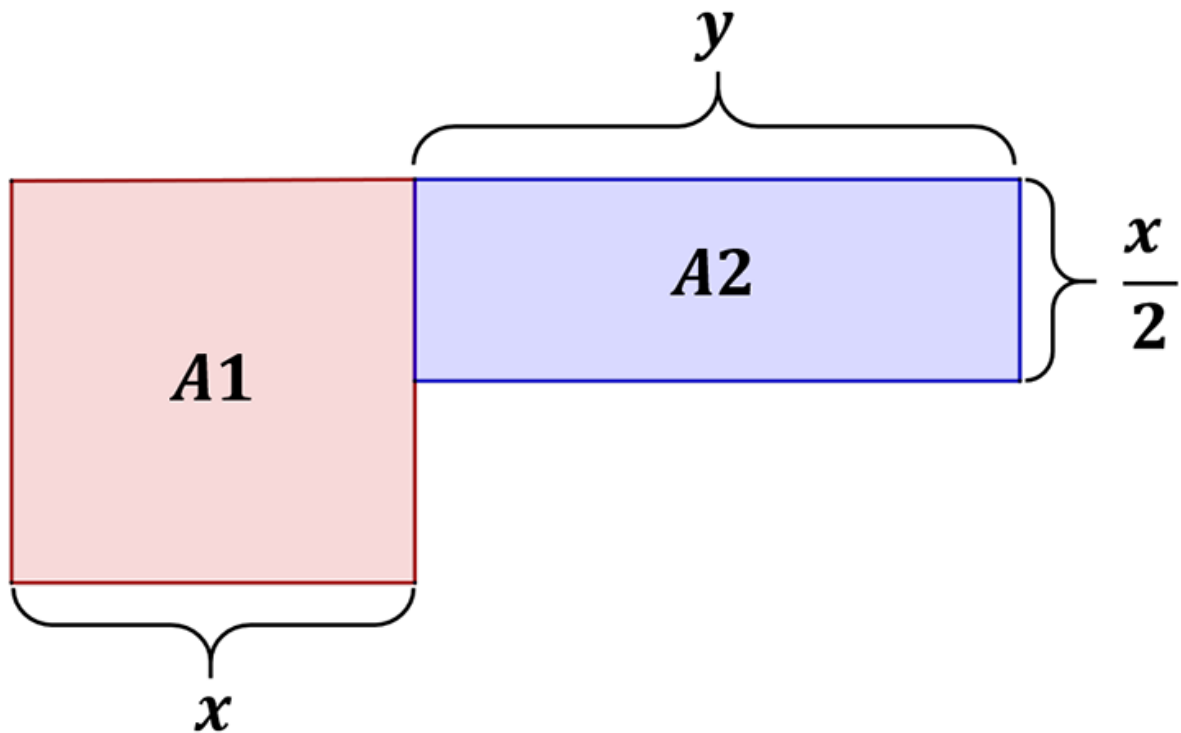


Figura 5 - A figura é formada por um quadrado de lado  $x$  e por um retângulo de lados  $x/2$  e  $y$ .

Fonte: Elaborado pela autora, 2018.

Sabemos que o perímetro é dado pela soma de todos os lados da figura. Note que os lados do quadrado medem  $x$ , porém devemos desconsiderar metade do lado que está encostado no retângulo. Portanto, o perímetro da figura será dado pela expressão:  $x + x + x + y + \frac{x}{2} + y + \frac{x}{2}$ . Esta expressão representa um polinômio e alguns de seus termos são semelhantes entre si. Assim, podemos combiná-los adicionando seus coeficientes numéricos:

$$x + x + x + y + \frac{x}{2} + y + \frac{x}{2} = \left(1 + 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)x + (1 + 1)y = 4x + 2y$$

Agora, vamos determinar a área total da figura somando a área  $A1$  do quadrado com a área  $A2$  do retângulo. Sabemos que as áreas do quadrado e do retângulo são encontradas quando multiplicamos o valor da base pelo

valor da altura. Logo,  $A_2 = \frac{x}{2} \cdot y = \frac{xy}{2}$  e  $A_1 = x \cdot x = x^2$ . Realizando a soma das áreas, temos que a área total da figura é  $x^2 + \frac{xy}{2}$ .

Podemos observar que não é mais possível reduzir os polinômios que representam a área da figura, pois não existem mais termos semelhantes entre si.

Suponha agora que  $x = 5 \text{ cm}$  e  $y = 7,5 \text{ cm}$ , como podemos calcular o valor numérico das expressões algébricas que representam o perímetro e a área da figura? Devemos substituir o valor das variáveis  $x$  e  $y$ , pelos valores indicados e, em seguida, realizar as operações dadas nas expressões. Portanto, o perímetro da figura é:  $P = 45 + 27,5 = 72,5 \text{ cm}$ . E a área total da figura é:

$$A = 5^2 + \frac{5 \cdot 7,5}{2} = 43,75$$

Note que as expressões algébricas  $4x + 2y$  e  $x^2 + \frac{xy}{2}$ , que representam o perímetro e a área da figura respectivamente, são exemplos de polinômios formados por dois termos e por duas variáveis distintas. Contudo, estamos interessados nos polinômios constituídos por apenas uma variável  $x$ , pois sua compreensão é muito importante para o estudo das funções.

Um polinômio de uma variável  $x$ , geralmente, é escrito em ordem decrescente dos graus de seus termos, da seguinte forma:  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ . Esta forma é conhecida como **forma padrão** dos polinômios. Lembrando que os coeficientes são sempre números reais e que o grau do polinômio será dado pelo valor de  $n$ . Veja alguns exemplos:

$$3x^4 + x^3 - 7x^2 + x - 12 \text{ (grau 4)}$$

$$5x^3 + x^2 + 2x + 2 \text{ (grau 3)}$$

$$8x^2 - 7x \text{ (grau 2)}$$

No último exemplo, está faltando o termo constante. Quando o polinômio não possui uma ou mais potências na variável  $x$ , trata-se de um **polinômio incompleto**.

Vejamos como efetuar a adição, a subtração e a multiplicação com os polinômios de uma variável  $x$ .

Para **somar ou diminuir polinômios**, devemos agrupar seus termos semelhantes e realizar as operações apenas com os coeficientes, mantendo as variáveis iguais, da mesma forma que procedemos no exemplo do cálculo do perímetro da figura. Acompanhem:

$$(7x^3 - 2x^2 + 5x - 1) + (x^3 + 8x^2 - 2x + 1) = (7x^3 + x^3) + (-2x^2 + 8x^2) + (5x + (-2x)) + (-1 + 1) = 8x^3 + 6x^2 + 3x;$$

$$(3x^3 + 6x^2 + 4x + 20) - (x^3 - 7x^2 - x + 9) = (3x^3 - x^3) + (6x^2 - 7x^2) + (4x - (-x)) + (20 - 9) = 2x^3 - x^2 + 5x + 11;$$

$$(x^2 + 6x - 7) - (4x^3 - 2x^2 + 3x + 9) = (0 - 4x^3) + (x^2 - 2x^2) + (6x - 3x) + (-7 - 9) = -4x^3 - x^2 + 3x - 16.$$

Para **multiplicarmos** dois polinômios, devemos multiplicar cada termo do primeiro polinômio para cada termo do segundo. Você se recorda da propriedade distributiva dos números reais que estudamos no início do capítulo? É justamente esta propriedade que devemos usar. Observe os exemplos:

$$x^2 \cdot (4x^4 - 2x^2 + 2) = (x^2) \cdot (4x^4) + (x^2) \cdot (-2x^2) + (x^2) \cdot (2) = 4x^6 - 2x^4 + 2x^2;$$

$$(2x + 3) \cdot (2x + 3) = (2x) \cdot (2x) + (2x) \cdot (3) + (3) \cdot (2x) + (3) \cdot (3) = 4x^2 + 6x + 6x + 9. \text{ Como } 6x \text{ e } 6x \text{ são termos semelhantes, podemos reduzir o polinômio, obtendo-se: } (2x + 3) \cdot (2x + 3) = 4x^2 + 12x + 9;$$

$$(3x - 7) \cdot (3x - 7) = (3x) \cdot (3x) + (3x) \cdot (-7) + (-7) \cdot (3x) + (-7) \cdot (-7) = 9x^2 - 21x - 21x + 49 = 9x^2 - 42x + 49;$$

$$(4x - 6) \cdot (4x + 6) = (4x) \cdot (4x) + (4x) \cdot (6) + (-6) \cdot (4x) + (-6) \cdot (6) = 16x^2 + 24x - 24x - 36 = 16x^2 - 36.$$

Os três últimos exemplos de produtos entre polinômios são bastante úteis para os nossos estudos, pois nos ajudam a realizar multiplicações, sem precisarmos efetuar a propriedade distributiva, o que simplifica a operação. Portanto, sejam  $a$  e  $b$ , números reais, variáveis ou monômios, podemos escrever as seguintes relações:

Produtos notáveis	
Quadrado da soma	$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
Quadrado da diferença	$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - 2ab + b^2$
Produto da soma pela diferença	$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Tabela 5 - Principais produtos notáveis que auxiliam a fatoração de polinômios.

Fonte: Elaborado pela autora, 2018.

Na sequência, vamos aplicar os produtos notáveis para fatorar polinômios e simplificar expressões algébricas.

### 1.2.2 Fatoração e simplificação de expressões algébricas

Para entendermos no que consiste uma fatoração, vamos analisar o polinômio  $2x^3 - 32x$ . Pense sobre a questão: é possível representá-lo como uma multiplicação de dois fatores polinomiais? Se escrevermos a potência  $x^3$  como um produto de fatores  $x$  e a constante 32 como uma multiplicação por 2, podemos perceber que existem fatores comuns entre os termos do polinômio:  $2x^3 - 32x = 2 \cdot x \cdot x \cdot x - 2 \cdot 16 \cdot x$ . Colocando os fatores comuns em evidência, temos que:  $2x^3 - 32x = 2 \cdot (x^2 - 16)$ . Podemos transformar  $(x^2 - 16)$  num produto de uma soma e de uma diferença, da forma  $(x + 4) \cdot (x - 4)$ . Portanto, chegamos ao resultado  $2x^3 - 32x = 2x \cdot (x + 4) \cdot (x - 4)$ .

O processo que acabamos de realizar se chama fatoração. Sendo assim, fatorar um polinômio é escrevê-lo como um produto de dois ou mais fatores polinomiais. Quando um polinômio não pode ser mais fatorado utilizando-se coeficientes inteiros, dizemos que se trata de um **polinômio irredutível**. Assim, um polinômio está fatorado completamente somente quando estiver escrito como um produto de fatores irredutíveis (DEMANA *et al.*, 2013).

No exemplo anterior, o polinômio  $2x \cdot (x^2 - 16)$  é uma forma fatorada do polinômio  $2x^3 - 32x$ , mas não se trata de um polinômio irredutível, uma vez que pôde ser fatorado novamente como um produto de uma soma e de uma diferença de polinômios.

De modo geral, inicia-se a fatoração de um polinômio, colocando-se em evidência os fatores comuns de seus termos, como no exemplo anterior. Depois, utilizamos algumas técnicas usuais de fatoração, como: fatoração por agrupamento, colocando o termo em comum em evidência duas vezes, e reversão dos processos usuais envolvendo o uso dos produtos notáveis já destacados. Observe outros exemplos, abaixo.

#### Fatoração por fator comum em evidência:

$$3x^3 - 18x^2 = 3x^2 \cdot x - 3 \cdot 6 \cdot x^2 = 3x^2 (x - 6);$$

$$4x^4 - x^3 = 4 \cdot x^3 \cdot x - x^3 = x^3 (4x - 1);$$

$$x^3y + 2x^2y^2 = x \cdot x^2 \cdot y + 2 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot y = x^2y \cdot (x + 2y).$$

#### Fatoração pelo produto de uma soma e de uma diferença:

$$16x^2 - 49 =;$$

$$x^4 - 9x^2 =.$$



### Fatoração pelo quadrado da soma ou da diferença:

$$25x^2 + 20x + 4 = (5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot 2 + 2^2 = (5x + 2)^2;$$

$$64x^2 - 144x + 81 = (8x)^2 - 2 \cdot 8x \cdot 9 + 9^2 = (8x - 9)^2.$$

•

### Fatoração por agrupamento:

$$4x^3 + x^2 + 20x + 5 = (4x^3 + x^2) + (20x + 5) = x^2(4x + 1) + 5(4x + 1) = (4x + 1)(x^2 + 5);$$

$$2x^2 + 3xy - 2xz - 3zy = (2x^2 + 3xy) - (2xz + 3zy) = x \cdot (2x + 3y) - z \cdot (2x + 3y) = (2x + 3y) \cdot (x - z).$$

Sendo assim, podemos sistematizar algumas orientações para fatorar polinômios na tabela seguinte.

Estratégia de fatoração
1. Observar os fatores comuns; 2. Observar as formas especiais de polinômios; 3. Usar pares de fatores; 4. Se existirem quatro termos, tentar agrupá-los.

Tabela 6 - Algumas estratégias de fatoração geral.

Fonte: DEMANA et al., 2013, p. 29.

A fatoração é uma ferramenta importante para a realização de simplificação de expressões algébricas, principalmente quando estamos lidando com uma **expressão racional**, isto é, uma expressão que pode ser escrita como o quociente de dois polinômios, como por exemplo,

$\frac{12x^3y^2z}{6xy^3z^2}$  ( $x, y, z \neq 0$ ),  $\frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$  ( $x \neq 2$ ) e  $\frac{9x^2 - 16y^2}{6x - 8y}$  ( $x \neq \frac{4}{3}y$ ). Note que as expressões racionais só podem ser definidas para os valores reais das variáveis que tornam o denominador diferente de zero.

Vamos simplificar as duas expressões racionais, eliminando os fatores comuns do numerador e do denominador até que a expressão fique numa forma mais simples, acompanhe:

$\frac{12x^3y^2z}{6xy^3z^2} = \frac{2 \cdot 6 \cdot x \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot z}{6 \cdot x \cdot y \cdot y^2 \cdot z \cdot z} = \frac{2x^2}{yz}$ . Neste caso, utilizamos apenas a simplificação dos fatores comuns dos polinômios do quociente.

$\frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = \frac{(x - 2) \cdot (x - 2)}{(x - 2)} = x - 2$ . Usamos a fatoração pelo quadrado da diferença no polinômio do numerador da fração.

$\frac{9x^2 - 16y^2}{6x - 8y} = \frac{(3x - 4y)(3x + 4y)}{2 \cdot (3x - 4y)} = \frac{3x + 4y}{2}$ . Observe que fatoramos o numerador pelo produto de uma soma e de uma diferença. Já o denominador foi fatorado usando o fator comum entre os dois termos do denominador.

Uma outra maneira de simplificar uma expressão racional é utilizando a divisão de polinômios. Dividir um polinômio  $P_2$  por um polinômio  $P_1$  é encontrar outros dois polinômios, que serão um quociente  $Q$  e um resto  $r$ , como você pode observar no esquema a seguir:

$$P_2 = P_1 \cdot Q + r$$

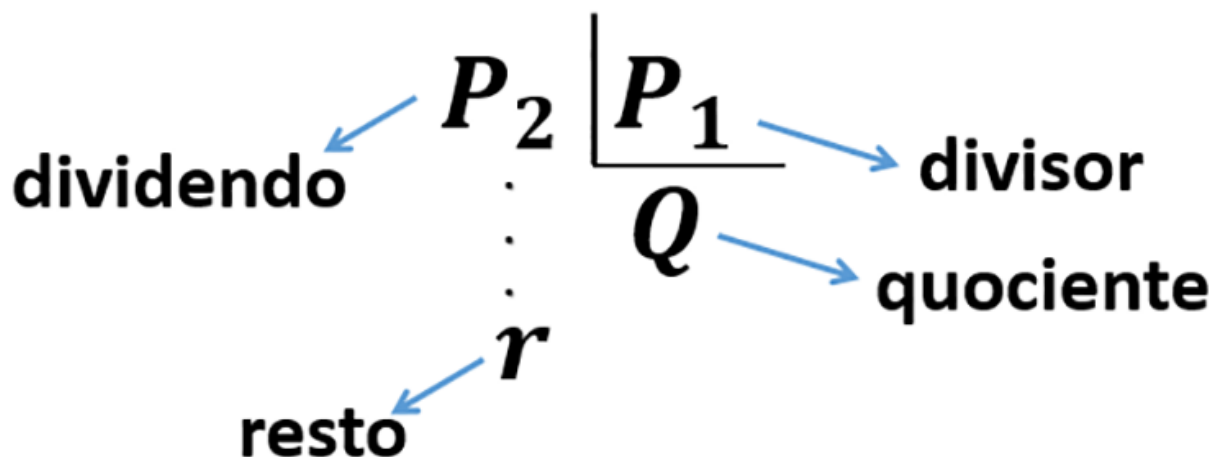


Figura 6 - O método da chave para a divisão de dois polinômios.

Fonte: Elaborado pela autora, 2018.

O resto será ou um polinômio, que terá o grau menor do que o grau do polinômio  $P_1$ , ou zero. Somente quando o resto for zero, podemos usar o resultado na simplificação da expressão racional, pois aí teremos o polinômio  $P_2$  como um produto de dois fatores,  $P_1$  e  $Q$ .

Veja a divisão  $\frac{2x^3 - 11x^2 + 22x - 15}{x^2 - 4x + 5}$  pelo método da chave:

$$\begin{array}{r}
 2x^3 - 11x^2 + 22x - 15 \quad \bigg| \quad x^2 - 4x + 5 \\
 -2x^3 + 8x^2 - 10x \phantom{- 15} \\
 \hline
 -3x^2 + 12x - 15 \\
 +3x^2 - 12x + 15 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Figura 7 - Divisão de dois polinômios na forma padrão.

Fonte: Elaborado pela autora, 2018.

Note que a divisão segue o mesmo algoritmo da divisão dos números reais. Inicialmente, procuramos o termo que multiplicado por  $x^2$  resulta em  $2x^3$ . No caso, o termo  $2x$  satisfaz essa condição. Assim, ele é registrado no espaço do quociente e, em seguida, é realizada a multiplicação de  $2x$  por todos os termos do polinômio divisor ( $x^2 - 4x + 5$ ). O resultado da multiplicação é registrado abaixo do dividendo ( $2x^3 - 11x^2 + 22x - 15$ ), mas com o sinal de cada termo trocado. Depois, esse resultado é somado ao polinômio dividendo, obtendo-se  $-3x^2 + 12x$ . Para continuar a divisão, baixamos a constante  $-15$  e realizamos todos os processos novamente, até que não seja mais possível continuar a divisão.

Sendo assim, podemos perceber que o polinômio  $2x - 3$  é a forma mais simplificada da expressão racional  $\frac{2x^3 - 11x^2 + 22x - 15}{x^2 - 4x + 5}$ .

Agora que temos uma melhor compreensão dos algoritmos e das propriedades das operações numéricas e algébricas básicas, podemos explorar a utilização do ferramental tecnológico para viabilizar e reduzir nossos esforços na realização de tais operações.

## 1.3 Atividades com uso de *software* e calculadora

Após estudar as operações numéricas elementares, seus algoritmos e propriedades, você pode se perguntar: existe algum sentido em continuar aprendendo isso, se posso realizar estas operações nas calculadoras ou em *softwares* matemáticos? Primeiro, devemos pensar que quem desenvolve as calculadoras e os *softwares* precisa desse conhecimento para fazê-los funcionar adequadamente e dar os resultados corretos.

Além disso, se você só souber ler o número resultante da operação na calculadora, provavelmente não conseguirá identificar quando alguma conta, como a do mercado, foi cobrada indevidamente. Mas a questão mais importante é que, sem interiorizar o significado das operações numéricas elementares, todo o conhecimento matemático se tornará inacessível para você.

Isso não significa que não devemos utilizá-los, pelo contrário, as calculadoras e os *softwares* são ótimas ferramentas tecnológicas que nos poupam tempo e esforço. É importante compreendermos seu funcionamento para que possamos usufruir totalmente das suas potencialidades.

## VOCÊ QUER LER?



O artigo intitulado “As dízimas periódicas e a calculadora” de José Paulo Carneiro (2004) trata da representação decimal da subtração de duas dízimas periódicas. O autor apresenta uma forma de realizar a operação e mostra as limitações da calculadora, neste caso específico. Você pode ler o artigo nas páginas 31 a 35 do livro disponível em: <[http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat3\\_1\\_1.pdf](http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat3_1_1.pdf)>.

Para utilizarmos corretamente a calculadora, devemos compreender as propriedades matemáticas, principalmente a ordem que as operações são efetuadas. Lembre-se que:

PRIORIDADE DOS SINAIS	PRIORIDADE DAS OPERAÇÕES
1.   ( )	1.   Exponenciação e logaritmação
2.   [ ]	2.   Potenciação e radiciação
3.   { }	3.   Multiplicação e divisão
	4.   Adição e subtração

Figura 8 - Prioridades dos sinais e das operações para a resolução de expressões numéricas.

Fonte: SILVA; SILVA; SILVA, 2010.

A atividade seguinte evidencia a importância do entendimento sobre a ordem das operações quando estamos fazendo uso de calculadoras para a realização de cálculos numéricos.

Escreva a operação  $4,2 + 6,5 \cdot 8,3$  numa calculadora qualquer e, em seguida, aperte a tecla = ou **enter**, dependendo do tipo de calculadora que estiver utilizando. Qual é o resultado que sua calculadora fornece: 58,15 ou 88,81?

Se o resultado obtido foi 58,15, então sua calculadora seguiu a prioridade das operações e calculou primeiro o produto  $6,5 \cdot 8,3$  para, em seguida, efetuar a soma com o resultado da multiplicação. No entanto, se o resultado foi 88,81, sua calculadora interpretou a entrada acima como  $(4,2 + 6,5) \cdot 8,3$ . Este não é o resultado correto, pois numa expressão numérica sem sinais devemos seguir a prioridade de operações como indicado na tabela anterior.

Como trabalhar, então, com calculadoras que fornecem o resultado 88,81? Você precisa mudar a ordem dos termos, inserindo a expressão na forma:  $6,5 \cdot 8,3 + 4,2$ . Neste caso, independentemente da calculadora utilizada, o resultado que aparecerá na tela é 58,15.

Sendo assim, sempre que estiver trabalhando com uma calculadora, confira primeiro como ela efetua expressões numéricas do tipo apresentado anteriormente.

Outra maneira de se efetuar expressões numéricas, garantindo que a calculadora interprete a expressão da forma que você deseja, é utilizar as teclas de parênteses, quando estas existirem. Vamos encontrar o resultado da expressão  $(2,34 + 6,03)(1,2 - 0,76)$  numa calculadora. Como você deve inserir a expressão nesse caso?

As teclas devem ser selecionadas da seguinte forma:

( 2 . 3 4 + 6 . 0 3 ) × ( 1 . 2 - 0 . 7 6 )

Depois de apertar a tecla **enter** ou =, o resultado que deve ser obtido é 3,6828.

Atualmente, existem muitas opções de calculadoras que estão disponíveis inclusive como *softwares* de computadores. No próximo exemplo, utilizaremos o WolframAlpha ([www.wolframalpha.com](http://www.wolframalpha.com)), que é um *software* livre de calculadora gráfica disponível *online*.

Como você pode encontrar a forma expandida da expressão algébrica  $(8x + 7y)^2$ ? Quais são as entradas que devemos inserir no programa?

Em geral, nos programas computacionais, representamos a potência como um acento circunflexo e devemos usar parênteses para indicar o que está sendo elevado ao expoente. Logo, devemos representar a expressão da seguinte forma:

The image shows the WolframAlpha website interface. At the top, the WolframAlpha logo is displayed with the tagline "computational intelligence". Below the logo is a search bar containing the input  $(8x+7y)^2$ . To the right of the search bar are icons for a star and a menu. Below the search bar are icons for various input methods (text, image, etc.) and links for "Browse Examples" and "Surprise Me". The main content area is divided into sections: "Input:" showing  $(8x + 7y)^2$  with an "Open code" link; "Alternate forms:" showing  $x(64x + 112y) + 49y^2$  and  $64x^2 + y(112x + 49y)$ , each with a download icon; and "Expanded form:" showing  $64x^2 + 112xy + 49y^2$  with a "Step-by-step solution" button.

Figura 9 - Área para entrada de dados do Programa Computacional WolframAlpha.

Fonte: [www.wolframalpha.com](http://www.wolframalpha.com).

Observe que sua forma expandida é dada pela expressão  $64x^2 + 12xy + 49y^2$ .

Aproveite que o WolframAlpha é um programa gratuito e escreva as expressões algébricas que já resolvemos durante o capítulo. Somente mexendo, testando e manipulando o programa que você vai adquirir o domínio da ferramenta.

Agora, vamos estudar o conceito de função que abrange os conhecimentos das operações e suas propriedades estudados anteriormente.

## 1.4 Função: ferramental para todas as áreas

Você já reparou que muitas situações cotidianas envolvendo duas variáveis apresentam uma relação de dependência entre seus valores? Por exemplo, o valor de uma conta de eletricidade depende da quantidade de

energia elétrica gasta durante o mês; o consumo de combustível de um automóvel depende da quantidade de quilômetros rodados; ou, ainda, o preço pago no envio de um pacote pelos Correios depende do seu peso. Situações desse tipo podem ser descritas e analisadas detalhadamente quando utilizamos o conceito de **função**. Em geral, nos estudos científicos de um caso ou de um fenômeno, buscamos reconhecer as grandezas mensuráveis para estabelecer relações existentes entre elas. Vejamos, por exemplo, o caso de um taxista, que cobra numa corrida de táxi R\$ 4,80 pela bandeirada e R\$ 1,82 por cada quilômetro rodado. Para termos uma ideia dos valores pagos de acordo com a quilometragem realizada, construímos a seguinte tabela:

Quilômetros rodados	Valor pago
1	$1 \cdot 1,82 + 4,80 = 6,62$
2	$2 \cdot 1,82 + 4,80 = 8,44$
3	$3 \cdot 1,82 + 4,80 = 10,26$
4	$4 \cdot 1,82 + 4,80 = 12,08$
5	$5 \cdot 1,82 + 4,80 = 13,09$

Tabela 7 - Relação entre quilômetros rodados e valor pago em uma corrida de táxi de até 5 km.  
Fonte: Elaborada pela autora, 2018.

Neste caso, estão sendo mensuradas duas grandezas: o número de quilômetros rodados e o respectivo valor. A cada quilômetro rodado pelo táxi corresponde um único valor a ser pago. Sendo assim, podemos considerar que o preço da corrida está em **função** da quantidade de quilômetros rodados.

Note que é possível determinar uma fórmula que estabelece a relação de dependência entre o valor a ser pago ( $f(x)$ ) e o número de quilômetros realizados durante a corrida ( $x$ ):  $f(x) = 1,82x + 4,80$ . Agora, podemos calcular o preço de uma corrida para qualquer quilometragem. Por exemplo, em 10 quilômetros rodados, devemos pagar:  $f(10) = 1,82 \times 10 + 4,80 = 23$  reais.

Dado isso, podemos definir uma função  $f$  como uma regra que associa a cada objeto de um conjunto  $D$  **um e apenas um** objeto de um conjunto  $E$  (HOFFMANN; BRADLEY, 2011).

Precisamos ressaltar as seguintes nomenclaturas e notações importantes:

- o conjunto  $D$  é chamado de **domínio** da função;
- o conjunto  $E$  é chamado de **contradomínio** da função e é representado por  $CD(f)$ ;
- o conjunto **imagem** de  $f$  é o conjunto de todos os valores possíveis de  $f(x)$ , obtidos quando  $x$  varia por todo o domínio;
- uma notação comumente usada para representar uma função de  $D$  em  $E$  é:  $f: D \rightarrow E$ . Lê-se: função que associa valores do conjunto  $D$  a valores do conjunto  $E$ ;
- outra notação usual é  $x \rightarrow y = f(x)$ , que quer dizer que  $y$  é a imagem de  $x$  gerada pela função  $f$ . Neste caso, denota-se  $x$  de **variável independente** e  $y$  de **variável dependente**;
- uma **função real** é aquela que tem como **contradomínio** o conjunto dos reais. Se seu **domínio** é também o conjunto dos reais ou um subconjunto dos reais, dizemos que trata-se de uma **função real de variável real**.

## VOCÊ QUER VER?



O vídeo *Descobrendo o algoritmo de Guido* (ROMAN, 2012) apresenta a história de um jovem que aprende o segredo de um monge antigo para compor músicas no estilo gregoriano. Utilizando uma linguagem de fácil compreensão, podemos aprender sobre alguns conceitos musicais e verificar uma possibilidade de composição algorítmica utilizando os conceitos matemáticos de relação entre conjuntos e funções. Para assisti-lo, acesse: <<https://www.youtube.com/watch?v=HCr6Ys0zvr8>>.

Para compreender na prática, vamos analisar agora o caso dos valores do Produto Interno Bruto (PIB), em bilhões de dólares, dos países mais ricos do mundo em 2014.

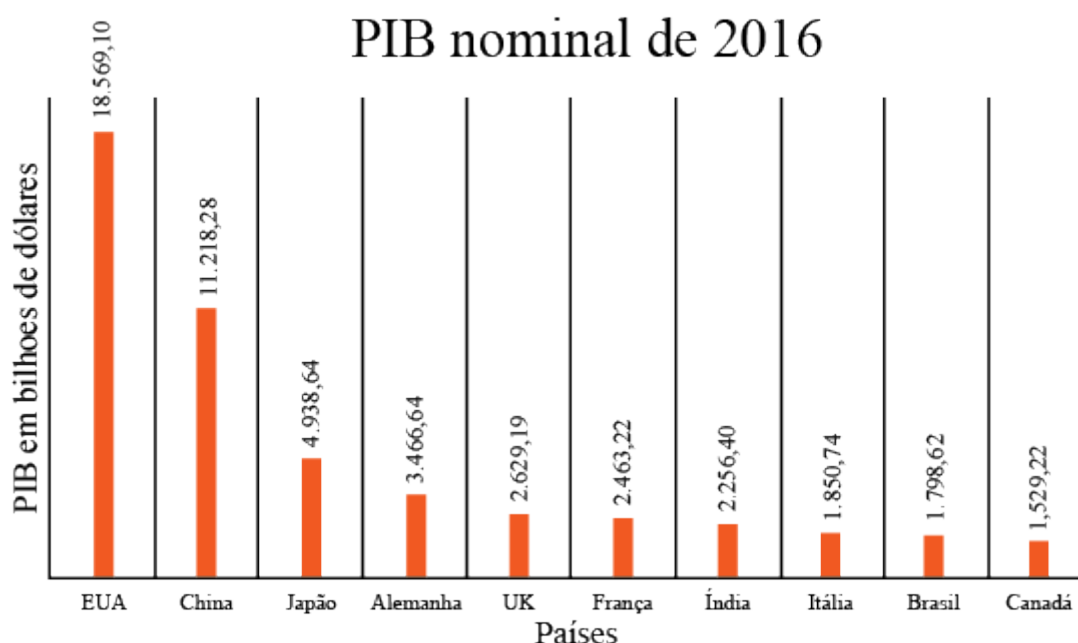


Figura 10 - O gráfico de barras apresenta o valor do Produto Interno Bruto dos países mais ricos do mundo em 2016.

Fonte: Elaborado pela autora, informações do FMI, World Economic Outlook Database (2017).

Note que o gráfico representa uma relação entre os países mais ricos do mundo e o valor do PIB. Além disso, a cada país corresponde **um único** valor do PIB. Portanto, tal relação pode ser caracterizada como uma função. O domínio da função é o conjunto dos países e a sua imagem é o conjunto de valores de seus PIBs.

O gráfico nos permite visualizar muitas informações sobre a relação entre os países e seus PIBs. Observe, por exemplo, que o valor do PIB dos Estados Unidos é consideravelmente maior que o PIB dos demais países. Se o compararmos com o valor do PIB brasileiro, veremos que o PIB dos Estados Unidos é um pouco mais de seis vezes maior do que o brasileiro.

Perceba que, nesse caso específico, a função foi representada exclusivamente por um gráfico de barras. Já no exemplo da corrida de táxi, utilizamos dados tabulares e uma expressão algébrica.

Vale ressaltar que existem quatro maneiras distintas de representar uma função: verbalmente, quando são descritas com palavras; numericamente, por meio de uma tabela de valores; visualmente, por meio de um gráfico; e algebricamente, utilizando-se uma fórmula explícita. Conseguir transitar entre essas quatro formas de representação é bastante útil para se obter um entendimento adicional da função (STEWART, 2013).  
Vejam agora outro caso que representa uma função.

## CASO



Beatriz vai fazer uma viagem aérea com a companhia Viajante. Ela sabe que os aviões desta companhia mantêm uma velocidade média de cruzeiro de aproximadamente  $890 \text{ km/h}$ . Ela gostaria de saber em quanto tempo o avião percorrerá  $4895 \text{ km}$ , que é a distância até o seu destino final. É possível que ela obtenha essa informação com os dados disponíveis?

Note que as duas grandezas que estão sendo medidas são o número de horas de voo e a respectiva distância realizada. A cada hora decorrida da partida do avião corresponde **um único** valor de distância percorrida pelo avião. Sendo assim, a distância é **função** da quantidade de horas. Após 1 hora decorrida da partida, o avião faz  $890 \text{ km}$ ; após 2 horas, o avião faz  $1.780 \text{ km}$  ( $2.890 \text{ km}$ ); após 3 horas, o avião percorre  $2.670 \text{ km}$  ( $3.890 \text{ km}$ ); e assim por diante. Logo, é possível determinar a fórmula que estabelece a relação entre a distância percorrida ( $f(x)$ ) e o tempo de voo em horas ( $x$ ) como  $f(x)=890x$ . Com essa fórmula, Beatriz consegue determinar as horas de voo até o destino final, basta resolver a equação

$$4895 = 890x \Rightarrow x = \frac{4895}{890} \Rightarrow x = 5,5$$

. Isto é, o voo de Beatriz terá 5h30min de duração.

Assim, podemos concluir este conteúdo inicial, básico para seus estudos, pois as funções são utilizadas como ferramentas para a resolução de problemas de diversas áreas do conhecimento e em situações do próprio cotidiano.

## Síntese

Chegamos ao final deste capítulo. Aqui, você lembrou os principais algoritmos e propriedades das quatro operações numéricas e algébricas elementares. Além disso, estudou o conceito de função, considerado um dos mais importantes da Matemática, principalmente por ser aplicável em muitas situações práticas do nosso dia a dia.

Neste capítulo, você teve a oportunidade de:

- lembrar conceitos matemáticos relativos aos conjuntos numéricos e suas operações elementares;
- reconhecer as diferentes formas de representação dos números racionais;
- lembrar o conceito de potência de expoente inteiro e suas propriedades principais; identificar e classificar polinômios;
- aprender a fatorar e a simplificar expressões algébricas;
- utilizar o ferramental tecnológico para viabilizar a realização de operações numéricas e algébricas;
- estudar o conceito de função e suas representações numéricas;
- reconhecer e aplicar o conceito de função em situações reais.



# Bibliografia

- ADAMI, A. M.; DORNELLES FILHO, A. A.; LORANDI, M. M. **Pré-cálculo**. Porto Alegre: Bookman, 2015.
- CARNEIRO, J. P. Q. As dízimas periódicas e as calculadoras. In: BÁSICA, Secretaria da Educação (Org.). **Explorando o Ensino da Matemática: Artigos**. Brasília: Ministério da Educação, 2004. p. 31-35. Disponível em: <[http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat3\\_1\\_1.pdf](http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat3_1_1.pdf)>. Acesso em: 10/06/2018.
- DEMANA, F. D.; *et al.* **Pré-cálculo**. 2. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2013.
- FMI. **World Economic Outlook Database**. Fundo Monetário Internacional, 2017.
- HOFFMANN, L. D.; BRADLEY, G. L. **Cálculo: um curso moderno e suas aplicações**. Rio de Janeiro: LTC, 2011.
- NICOLAI, R. Algumas técnicas operatórias: de outros tempos e de outros lugares. In: BÁSICA, Secretaria da Educação (Org.). **Explorando o Ensino da Matemática: Álgebra**. Brasília: Ministério da Educação, 2004. p. 101-108. Disponível em: <[http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat\\_icap2.pdf](http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_icap2.pdf)>. Acesso em: 10/06/2018.
- ROMAN, P. **Descobrimo o algoritmo de Guido**. Canal M3 Matemática Multimídia, YouTube, publicado em 23 de novembro de 2012. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=HCr6Ys0zvr8>>. Acesso em: 10/06/2018.
- SILVA, S. M.; SILVA, M. E.; SILVA, E. M. **Matemática básica para cursos superiores**. São Paulo: Atlas, 2010.
- STEWART, I. **Em busca do infinito: uma história da matemática dos primeiros números à teoria do caos**. Rio de Janeiro: Zahar, 2014.
- STEWART, J. **Cálculo**. São Paulo: Cengage Learning, 2013.