

1. Procedimiento (breve descripción)

Se simularon trayectorias de una cadena de Markov de tiempo discreto con espacio de estados $\{0,1,2,3\}$ y matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El procedimiento aplicado fue:

1. Definir la matriz de transición P y la función de simulación `simula_cadenas()` que, partiendo del estado inicial (0), realiza `n_steps` transiciones muestreando la siguiente posición según la fila de probabilidades del estado actual.
2. Fijar la semilla (`set.seed`) para reproducibilidad y ejecutar 1000 simulaciones independientes de 10000 pasos, registrando el estado final de cada simulación.
3. Repetir el experimento con 10001 pasos.
4. Construir tablas de frecuencias y gráficas de barras de los estados finales para comparar ambos casos.

2. Resultados y gráficas

Código usado

El código genérico para realizar las simulaciones en este problema:

```
simula_cadenas <- function(n_sims, n_steps, P, init) {  
  estados_finales <- integer(n_sims)  
  for (sim in seq_len(n_sims)) {  
    x <- init  
    for (t in seq_len(n_steps)) {  
      x <- sample(0:3, size = 1, prob = P[x + 1, ])  
    }  
    estados_finales[sim] <- x  
  }  
  return(table(factor(estados_finales, levels = 0:3)))  
}
```

Distribución estacionaria

Notemos inicialmente que la distribución estacionaria de la matriz es:

$$\pi = (1/8 \quad 3/8 \quad 3/8 \quad 1/8)$$

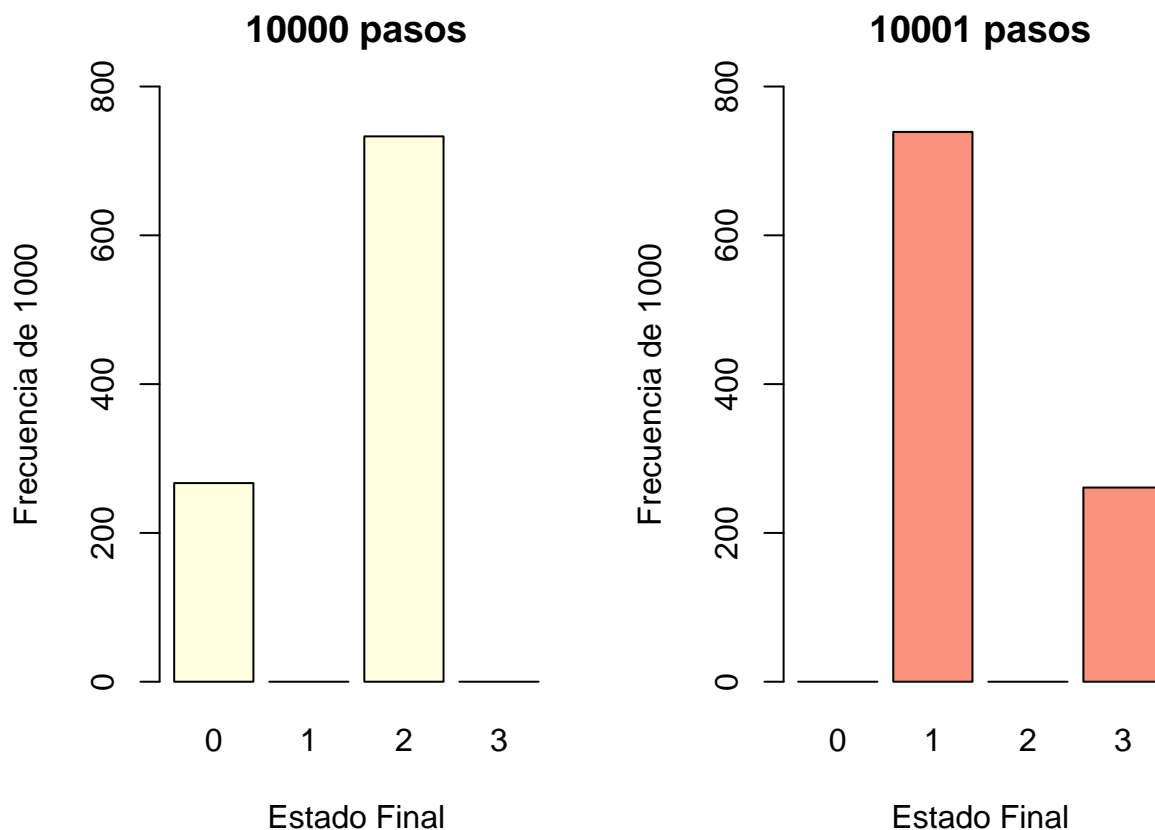
Resultados obtenidos

Los resultados obtenidos después de 10000 y 10001 movimientos empezando en el estado 0:

Table 1: Frecuencias de estados finales 1000 simulaciones

Estado	10000 transiciones	10001 transiciones	Error absoluto
0	267	0	0.017
1	0	739	0.011
2	733	0	0.017
3	0	261	0.011

Podemos visualizar los resultados de mejor manera en gráficas de barras:



3. Discusión (comparación con la teoría vista en clase)

Puntos clave observados:

- Las gráficas y tablas muestran claramente una propiedad teórica de la cadena: **periodicidad de periodo 2**. La matriz de transición conecta siempre estados de dos clases alternas $A = \{0,2\}$ y $B = \{1,3\}$ y cada transición lleva de A a B o de B a A. Por tanto, si se parte en 0 (conjunto A), después de un número **par** de pasos la cadena debe estar en A (0 ó 2) y después de un número **impar** de pasos la cadena debe estar en B (1 ó 3). Esto explica por qué, en la simulación con 10000 pasos (par), las frecuencias de los estados 1 y 3 son cero, y en la de 10001 pasos (impar) las frecuencias de 0 y 2 son cero.
- La cadena es **irreducible** (todos los estados se comunican entre sí) pero **periódica** (periodo 2). Según la teoría, una cadena irreducible y periódica no converge a una única distribución límite si observamos la cadena en cada paso; en cambio, la distribución de X_n oscila según la paridad de n. No obstante, existe una distribución estacionaria π que satisface $\pi P = \pi$; esa π es única por irreducibilidad, pero no es el límite de las distribuciones marginales cuando la cadena es observada paso a paso (debido a la periodicidad). Si interesa obtener comportamiento límite en sentido ergódico, se puede estudiar la cadena observada cada 2 pasos (i.e. P^2), donde la periodicidad desaparece y la cadena a pasos pares converge.
- De igual manera podemos observar que las matrices límite para potencias pares e impares se alinean tanto los resultados teóricos como los empíricos (simulaciones).

Límite de las potencias pares P^{2n} es la matriz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{2n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Límite de las potencias impares P^{2n+1} (o sea la matriz par multiplicada por P) es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Observemos que las filas 1 y 3 son idénticas entre sí; filas 2 y 4 idénticas entre sí, es decir, refleja la alternancia entre las dos clases.

- En términos prácticos, las simulaciones corroboran exactamente la predicción teórica (el error absoluto es de 1.4% algo esperable para una simulación de este estilo): la paridad del número de pasos determina qué clase (A o B) puede ocurrir como estado final.