PEP 1 - Solución

Electromagnetismo I - Ingeniería Física

25/04/2024

Pregunta 1 - Ley de Coulomb

1. Considere las cargas puntuales de la Figura 1. ($q_1 = q_2 = +Q$ y $q_3 = -Q$).

   Determine:

   a. El campo eléctrico $\vec{E}$ en el punto (0, b). (1.0 pts).
   b. La fuerza que experimenta la carga $q_3 = -Q$ (1.0 pts).
   c. Si el campo eléctrico en el punto $p = (0, -0.1)$ [m] es $\vec{0}$ cuando $b = 0$. Encuentre la distancia a donde las particulas q_1 y q_2 se encuentran. (1.0 pts).

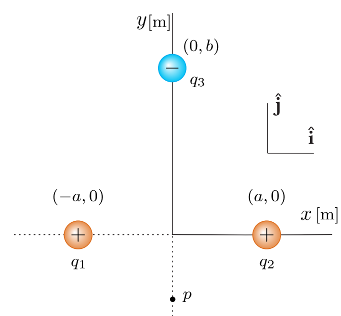

Figura 1: Esquema problema 1

R.1.a (1.0 pts total):

Encontrar los vectores $\vec{r}_{12}$ y $\vec{r}_{13}$: El campo eléctrico $\vec{E}$ en el punto (0, b) es la suma de los campos $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$.

$$\begin{aligned}\vec{E}_3 &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \\ &= k_e Q\left(\frac{\vec{r}_{13}}{r_{13}^3} + \frac{\vec{r}_{23}}{r_{23}^3}\right)\end{aligned} \tag{1}$$

(0.3 pts)

Calcular los vectores y magnitudes de $\vec{r}_{12}$ y $\vec{r}_{13}$ en la ecuación de la campo eléctrico:

$$\begin{aligned}&\vec{r}_{13} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1 = (a, b) \\ &r_{13} = \sqrt{(a^2 + b^2)}\end{aligned} \tag{2}$$

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_{23} &= \vec{r}_3 - \vec{r}_2 = (-a, b) \\
r_{23} &= \sqrt{(a^2 + b^2)}
\end{aligned} \tag{3}
$$

(0.3 pts)

Reemplazando la Ecuación 2 y Ecuación 3 en Ecuación 1, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_3 &= \frac{k_e Q}{(a^2 + b^2)^{3/2}} [(a, b) + (-a, b)] \\
&= \frac{k_e Q}{(a^2 + b^2)^{3/2}} (0, 2b)
\end{aligned}
$$

(0.4 pts)

R.1.b (1.0 pts total):

La fuerza que experimental la carga $q_3 = -Q$ es igual a

$$
\vec{F}_3 = q_3 \vec{E}_3
$$

(0.5 pts)

$$
\vec{F}_3 = -\frac{k_e Q^2}{(a^2 + b^2)^{3/2}} (0, 2b)
$$

(0.5 pts)

R.1.c (1.0 pts total):

Los vectores asociados a la distancia $-p$ son:

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_{1p} &= \vec{r}_p - \vec{r}_1 = (a, -p) \\
r_{2p} &= \sqrt{(a^2 + p^2)} \\
\\
\vec{r}_{2p} &= \vec{r}_p - \vec{r}_2 = (-a, -p) \\
r_{3p} &= \sqrt{(a^2 + p^2)} \\
\\
\vec{r}_{3p} &= \vec{r}_p - \vec{r}_3 = (, -b - p) \\
r_{3p} &= \sqrt{(-b - p)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (b + p)^2} = b + p
\end{aligned}
$$

(0.2 pts)

El campo eléctrico en el punto -p es igual a la suma de los campos $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ y $\vec{E}_3$:

$$\begin{aligned}
\vec{E}_p &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 \\
&= k_e Q \left[\frac{(a,-p)}{(a^2+b^2)^{3/2}} + \frac{(-a,-p)}{(a^2+b^2)^{3/2}} - \frac{(0,-b-p)}{(b+p)^3} \right] \\
&= k_e Q \left[\frac{(0,-2p)}{(a^2+b^2)^{3/2}} + \frac{(0,b+p)}{(b+p)^3} \right]
\end{aligned}$$

(0.3 pts)

La componente en x es igual a cero, nos centramos en al componente en y:

$$\begin{aligned}
E_{py} &= k_e Q \left[\frac{-2p}{(a^2+p^2)^{3/2}} + \frac{1}{(b+p)^2} \right] = 0 \\
&= \frac{-2p}{(a^2+p^2)^{3/2}} + \frac{1}{(b+p)^2} = 0 \\
&= -2p(b+p)^2 + (a^2+p^2)^{3/2} = 0
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
-2p(b+p)^2 + (a^2+p^2)^{3/2} &= 0 \\
2p(b+p)^2 &= (a^2+p^2)^{3/2}
\end{aligned}$$

Si $b = 0$

$$\begin{aligned}
2p(p)^2 &= (a^2+p^2)^{3/2} \\
2p^3 &= (a^2+p^2)^{3/2} \quad \cdot \backslash()^{2/3} \\
\sqrt[3]{4}p^2 &= a^2+p^2 \\
\Rightarrow a^2 &= \sqrt[3]{4}p^2 - p^2 \\
a &= \pm\sqrt{\sqrt[3]{4}-1} \cdot p
\end{aligned}$$

Si $p = -0.1$ [m], entonces $a = \pm 0.0766$ [m]. (0.5 pts.)

Pregunta 2 - Ley de Gauss

1. Considere dos cascarones esféricos concéntricos, no conductores, de radios a y b (a < b) (Figura 3). Las cargas $+Q$ (interna) y $-Q$ (externa) están distribuidas de manera uniformemente.

   Determine:

   a. El campo eléctrico $\vec{E}$ en las regiones I, II y III. (1.5 pts).
   b. Grafique el comportamiento del campo eléctrico en función de r. (0.5 pts).
   c. ¿Cuál es la fuerza eléctrica que experimenta una carga $q_1 = -Q$ colocada en el punto p, en el centro de ambos cascarones? Justifique. (1.0 pts).

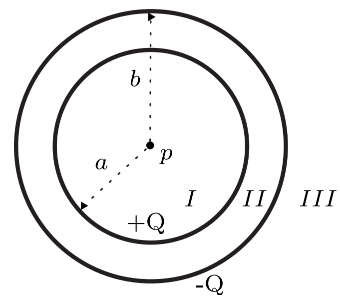

Figura 2: Esquema problema 2

R.2.a (1.5 pts total):

Región I

Si la superficie gaussiana es esférica con $r < a$, $q_{in} = 0$, luego $\vec{E}_I = \vec{0}$

$$\Phi_E = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = 0$$
$$\Rightarrow \vec{E}_I = \vec{0}$$

(0.3 pts)

Región II

Si la superficie gaussiana es esférica con $a < r < b$. La carga encerrada es $q_{in} = +Q$. El problema tiene simetría esférica, luego $\vec{E}_{II} = E_{II}\hat{r}$ y $d\vec{A} = \hat{r}dA$

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \\ &= \oiint E_{II}\hat{r} \cdot \hat{r}dA = \frac{+Q}{\epsilon_0} \\ &= E_{II} \oiint_{S.G.} dA = \frac{+Q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

La integral de superficie corresponde a la superficie de la esfera gaussiana con $a < r < b$. Encontes el campo eléctrico en la región II es:

$$E_{II} = \frac{+Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$
$$E_{II} = \frac{k_e Q}{r^2}$$
$$\Rightarrow \vec{E}_{II} = \frac{k_e Q}{r^2}\hat{r}$$

(0.5 pts)

Región III

Fuera de las dos cascarones, con $r > b$, las cargas encerradas son

$$q_{in} = \sum q_i = +Q - Q = 0$$

Luego aplicando la ley de Gauss, el campo elecrtico en la región III es:

$$\Phi_E = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$
$$= \oiint E_{III}\hat{r} \cdot \hat{r} dA = 0$$
$$\Rightarrow E_{III} = 0$$
$$\vec{E}_{III} = \vec{0}$$

(0.3 pts)

Entonces, el campo eléctrico es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{0}, & \text{si } r \leq a \\ \frac{k_e Q}{r^2}\hat{r}, & \text{si } a \leq r \leq b \\ \vec{0}, & \text{si } r \geq b \end{cases}$$

(0.4 pts)

R.2.b (0.5 pts total):

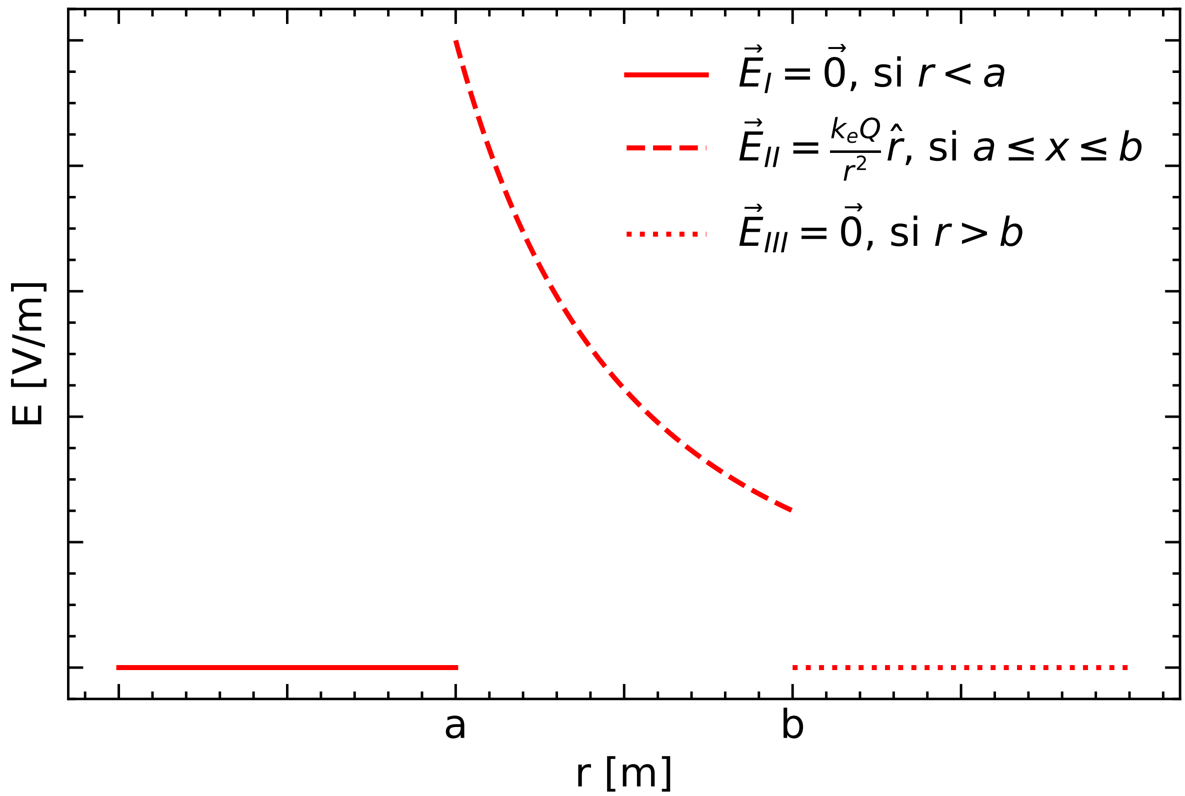

Figura 3

(0.5 pts)

R.2.c (1.0 pts total):

Independiente de donde se coloque la carga $q_1 = -Q$ dentro del cascarón esférico interior, la fuerza que experimenta la carga q_1 es igual a cero, pues, por ley de Gauss, el campo eléctrico dentro del cascarón esférico es igual a cero.

$$\vec{F} = q_1 \vec{E}_I = -Q \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

(1.0 pts)