Electromagnetismo I

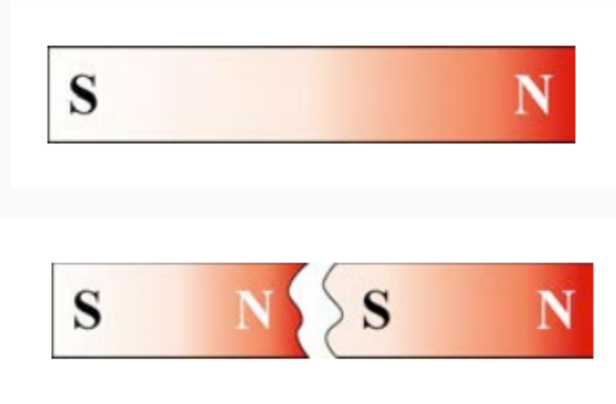
S14 - Segunda Ley de Maxwell y Dipolo Magnético

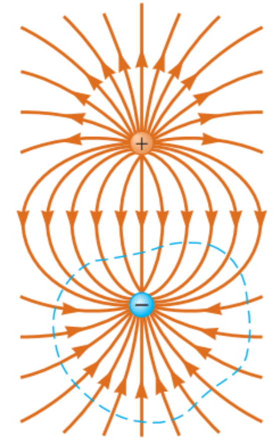
Josue Meneses Díaz

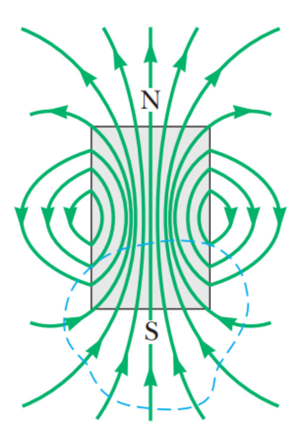
Universidad de Santiago de Chile

Dipolo magnético

Fuente de campo magnético

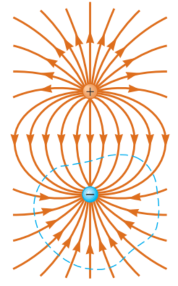





N
S

Monopolo magnético? - Ley de Gauss para el magnetismo

Dipolo eléctrico

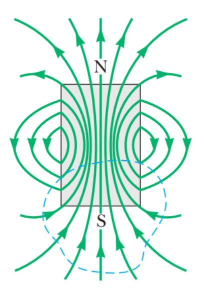


Si lo cortamos:

- Dos monopolos eléctricos (cargas)

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

Dipolo magnético



Si lo cortamos:

- Obtenemos dos dipolos magnéticos

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

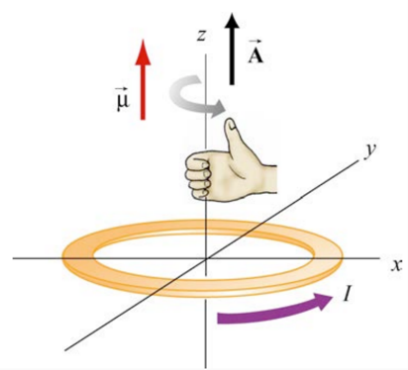
Momento dipolar magnético

Definimos el **momento dipolar magnético** como:

$$\vec{\mu} = IA\hat{n}_{RHR}$$

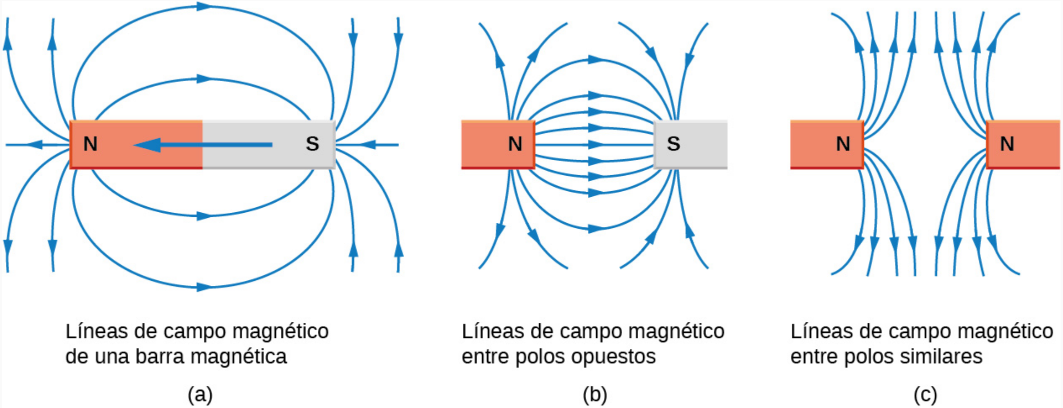
Y para N espiras

$$\boxed{\vec{\mu} = NIA\hat{n}_{RHR}}$$

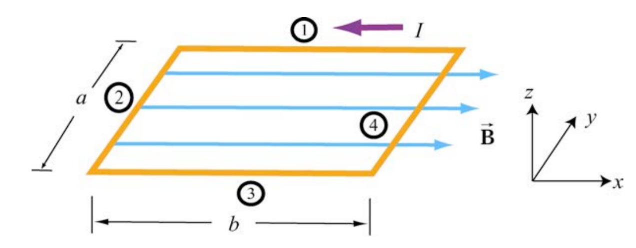


donde I es la intensidad de corriente eléctrica, A es el área del conductor y $\hat{n}_{RHR}$ es la normal al plano del lazo.

Atracción y repulsión entre lineas magnéticas



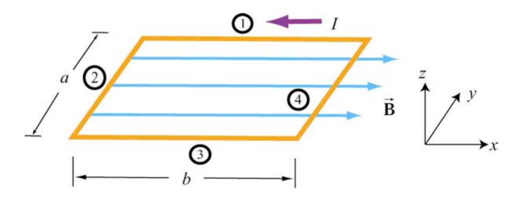
Ahora derivamos el torque generado por un campo magnético sobre un loop de corriente. ¿Qué sucede cuando colocamos un rectangular que transporta una corriente I en el plano xy y aplicamos un campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{i}$



$$\vec{F}_{neta} = \sum_i F_i$$
$$= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

$\vec{F}_1 = \vec{F}_3 = 0$ Misma dirección que $\vec{B}$

$$\vec{F}_2 = I\vec{L}_2 \times \vec{B} = Ia(-\hat{j}) \times B\hat{i}$$
$$= IaB\hat{k}$$
$$\vec{F}_4 = I\vec{L}_4 \times \vec{B} = Ia(\hat{j}) \times B\hat{i}$$
$$= -IaB\hat{k}$$

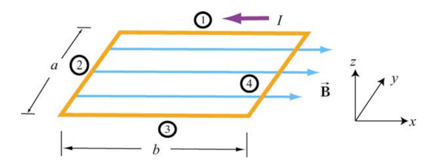


$$\vec{F}_{neta} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$
$$= \vec{0} + \vec{0} + IaB\hat{k} + -IaB\hat{k}$$
$$= \vec{0}$$

Torque sobre el dipolo (espira)

A pesar que la fuerza neta sobre el dipolo es cero, las fuerzas $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_4$ **no actúan a lo largo de la misma línea de acción**. Luego el torque sobre la esperia no es cero:

$$
\begin{aligned}
\vec{\tau}_{neto} &= \sum_i \vec{\tau}_i \\
&= \vec{L}_2/2 \times \vec{F}_2 + \vec{L}_4/2 \times \vec{F}_4 \\
&= -(b/2)\hat{i} \times (IaB\hat{k}) + (b/2)\hat{i} \times (-IaB\hat{k}) \\
&= (IabB/2 + IabB/2)\hat{j} \\
&= IabB\hat{j} \\
&= IAB\hat{j}
\end{aligned}
$$

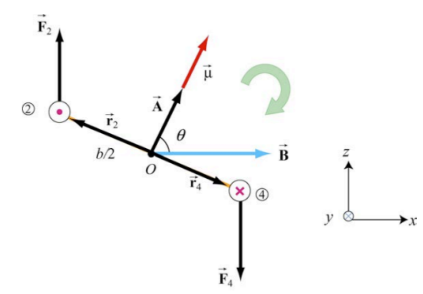


En general, si la espira ya a comenzado a rotar:

$$\vec{\tau}_{neto} = \sum_i \vec{\tau}_i = \vec{L}_2/2 \times \vec{F}_2 + \vec{L}_4/2 \times \vec{F}_4$$
$$= -(b/2)(-\sin\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{k}) \times (IaB\hat{k})$$
$$+ (b/2)(\cos(\pi/2-\theta)\hat{\imath} - \sin(\pi/2-\theta)\hat{k}) \times (-IaB\hat{k})$$
$$= (abIB/2)\sin\theta\hat{\jmath}$$
$$+ (abIB/2)\cos(\pi/2-\theta)\hat{\jmath}$$
$$= (IabB)\sin\theta\hat{\jmath}$$
$$= Iab\hat{n}_{RHR} \times \vec{B}$$

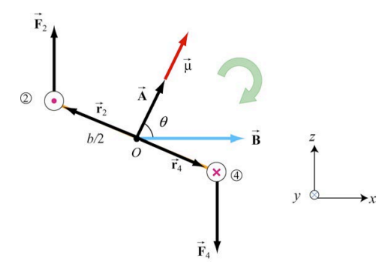
El torque sobre el dipolo es:

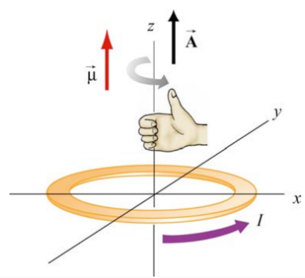
$$\boxed{\vec{\tau}_{neto} = I\vec{A} \times \vec{B}}$$



La dirección de $\vec{\mu}$ es la misma que la del vector de área $\vec{A}$ (perpendicular al plano del lazo) y está determinada por la regla de la mano derecha. La unidad del SI para el momento dipolar magnético es amperio-metro cuadrado (A·m²). Usando la expresión para $\vec{\mu}$, el torque ejercido sobre un lazo con corriente puede reescribirse como

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}}$$

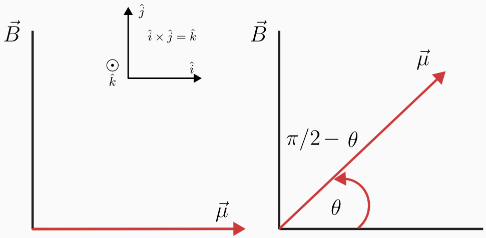




Energía del dipolo magnético

Notar de la figura que:

$$
\begin{aligned}
\vec{\mu} \times \vec{B} &= \mu B \sin(\pi/2 - \theta) \\
&= \mu B \cos(\theta) \\
\vec{\mu} \cdot \vec{B} &= \mu B \cos(\pi/2 - \theta) \\
&= \mu B \sin(\theta)
\end{aligned}
$$



La energía potencial es entonces:

$$\Delta U = -W = -\int_{\theta_0}^{\theta} \vec{\tau} \cdot \vec{\omega} dt = -\int_{\theta_0}^{\theta} [\mu B \cos\theta' \hat{k}] \cdot \left[\frac{d\theta'}{dt} \hat{k} \right] dt$$

$$U(\theta) - U_0 = -\int_{\theta_0}^{\theta} (\mu B \cos\theta')\, d\theta' = -\mu B(\sin\theta - \sin\theta_0)$$

Considerando $\theta_0 = 0$ y $U_0 = 0$

$$U(\theta) = -\mu B \sin\theta$$

$$U(\theta) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

- Si $U < 0$ entonces $\vec{\mu} \parallel \vec{B}$, el sistema se encuentra en equilibrio.
- Si $U > 0$ entonces $\vec{\mu} \perp \vec{B}$, el sistema es inestable

Como es un sistema conservativo:

$$\vec{F} = -\nabla U$$

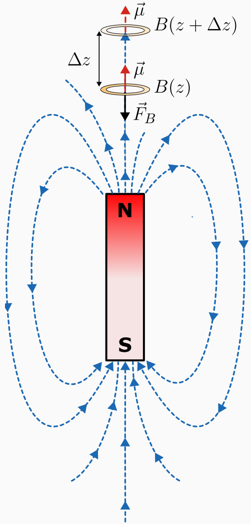
$$\boxed{\vec{F} = \nabla \vec{\mu} \cdot \vec{B}}$$

Fuerza magnética del dipolo

La fuerza experimentada por un lazo rectangular con corriente colocado en un campo magnético uniforme es cero.

¿Qué sucede si el campo magnético no es uniforme? En este caso, habrá una fuerza actuando sobre el dipolo.

Consideremos la situación donde un pequeño dipolo $\vec{\mu}$ está colocado a lo largo del eje simétrico de un imán de barra



El dipolo experimenta una fuerza atractiva por parte del imán de barra cuyo campo magnético es no uniforme en el espacio. Por lo tanto, se debe aplicar una fuerza externa para mover el dipolo hacia arriba. La cantidad de fuerza F_{ext} ejercida por un agente externo para mover el dipolo una distancia Δz se da por

$$F_{\text{ext}}\Delta z = W_{\text{ext}} = \Delta U = -\mu B(z+\Delta z) + \mu B(z) = -\mu[B(z+\Delta z) - B(z)]$$

Para Δz pequeño, la fuerza externa puede obtenerse como:

$$F_{\text{ext}} = -\mu \frac{1}{\Delta z}\left[B(z+\Delta z) - B(z)\right] = -\mu \frac{dB}{dz}$$

lo cual es una cantidad positiva ya que $\frac{dB}{dz} < 0$, es decir, el campo magnético disminuye con el aumento de z. Esta es precisamente la fuerza necesaria para superar la fuerza atractiva debido al imán de barra. Por lo tanto, tenemos

$$F_B = \mu \frac{dB}{dz} = \frac{d}{dz}(\vec{\mu}\cdot\vec{B})$$

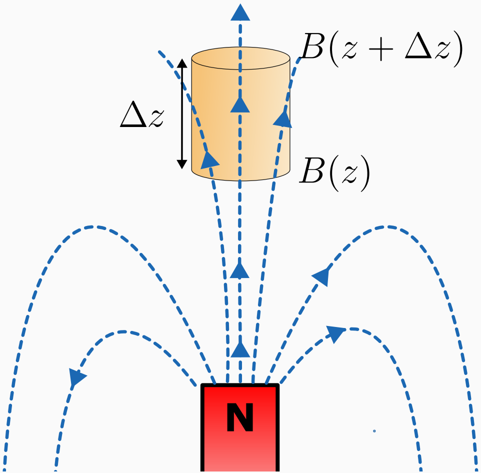
Y de forma general

$$\vec{F}_B = \nabla(\vec{\mu}\cdot\vec{B})$$

La fuerza en el borde del anillo es:

$$
\begin{aligned}
d\vec{F} &= I d\vec{s} \times \vec{B} \\
&= IRd\theta\hat{\theta} \times (B_r\hat{r} + B_z\hat{k}) \\
&= IRd\theta[-B_r\hat{k} + B_z\hat{r}] \\
&= -IRd\theta B_r\hat{k}
\end{aligned} \tag{1}
$$

Donde $B_z\hat{r} = \vec{0}$ por simetría



Utilizando la ley de Gauss para el magnetismo encontraremos la relación entre B_r y B_z

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$B_r 2\pi R \Delta z + B_{z+\Delta z} \pi R^2 - B_z \pi R^2 = 0$$

$$-\frac{r}{2} \frac{B_{z+\Delta z} - B_z}{\Delta z} = B_r$$

Si aplicamos el límite $\Delta z \to 0$:

$$B_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} \tag{2}$$

Utilizando la Ecuación 1 y la Ecuación 2:

$$\vec{F} = IR\hat{k} \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{R}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} \right] = I\pi R^2 \frac{\partial B_z}{\partial z} \hat{k} = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \hat{k}$$

Donde se corrobora nuevamente que

$$\boxed{\vec{F} = \nabla(\vec{\mu} \cdot \vec{B})}$$

Resumen

El torque $\vec{\tau}$ que actúa sobre un bucle cerrado de alambre con un área A que transporta una corriente I en un campo magnético uniforme $\vec{B}$ se encuentra dado por

$$\vec{\tau} = I\vec{A} \times \vec{B}$$

donde $\vec{A}$ es un vector en dirección perpendicular al bucle.

El momento dipolar magnético $\vec{\mu}$ de un bucle cerrado de alambre con un área A que transporta una corriente I está dado por

$$\vec{\mu} = I\vec{A}$$

El torque, energía potencial y fuerza sobre un dipolo magnetico puede ser calculado mediante:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \qquad U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \qquad \vec{F} = \nabla(\vec{\mu} \cdot \vec{B})$$

Referencia

Referencia

Freedman, Young, y S. Zemansky. 2009. «27 CAMPO MAGNÉTICO Y FUERZAS MAGNÉTICAS. 27.7 Fuerza y Torca En Una Espira de Corriente». En *Física Universitaria*.

Serway, Raymond A., y John W. Jewett. 2005. «29 Campos Magnéticos. 29.5 Momento de Torsión Sobre Una Espira de Corriente En Un Campo Magnético Uniforme.» En *Física Para Ciencias e Ingeniería Con Física Moderna*, 7ma ed. Vol. 2. CENGAGE learning.