Electromagnetismo I

S20 - Ecuaciones de Maxwell

Josue Meneses Díaz

Universidad de Santiago de Chile

Ecuaciones de Maxwell

Ecuaciones de Maxwell

Hasta el momento hemos visto las cuatro ecuaciones de Maxwell. Sin embargo, hay una de las ecuaciones que se encuentra incompleta. En una de ellas hay algo mal. Las cuatro ecuación de Maxwell son

1. **Ley de Gauss para el campo eléctrico**:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

2. **Ley de Gauss para campos magnéticos**:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

3. **Ley de Faraday de la inducción**:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

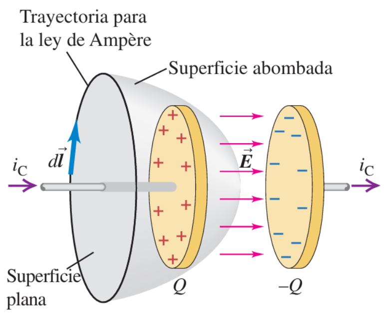
4. **Ley de Ampère-Maxwell**:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

La ley de Ampère nos dice **que las corrientes generan campos magnéticos**

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{enc}$$

Consideremos el siguiente diagrama



Notar que en la superficie S_2 no hay corriente pasando a través de ella, pero si campo eléctrico que está cambiando en el tiempo.

Maxwell se dio cuenta que debe haber algún nuevo término que vaya aquí en la ley de Ampère que cumpla:

- El nuevo elemento tiene que tener unidades de corriente [A].
- Tiene que ser no cero en la superficie S_2, y cero en la superficie S_1 para que se equilibre.

Maxwell resolvió esta ambigüedad al agregar al lado derecho de la ley de Ampère un término extra

$$\oint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 (I_{enc} + \square)$$

De la figura se sugiere que debería haber una relación entre el campo eléctrico variable en el tiempo y la superficie S_2. Notar que si el parámetro que buscamos es proporcional a $\frac{dE}{dt}$, entonces es 0 en la superficie S_1.

La modificación que hizo Maxwell no hay forma de derivarla sino de forma experimental. Lo que veremos ahora es una **motivación** de como maxwell completó la ley de Ampère.

Recordando que el campo eléctrico en un capacitor de placas paralelas $\vec{E} = \frac{qA}{\epsilon_0}$, despejando Q tenemos

$$q = \epsilon_0 EA$$

Y ahora derivando respecto al tiempo, tenemos

$$\frac{dq}{dt} = \epsilon_0 A \frac{d|E|}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Definimos así la **Corriente de desplazamiento** I_{dis} como:

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

La corriente de desplazamiento es proporcional al cambio en el flujo eléctrico. La ley de Ampère generalizada (o la ley de Ampère-Maxwell) ahora se expresa como

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (I + I_d) = \mu_0 \left(I + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$$

La corriente de conducción que pasa a través de S_1 es precisamente igual a la corriente de desplazamiento que pasa a través de S_2, es decir, $I_d = I$. Con la ley de Ampère-Maxwell, se elimina la ambigüedad en la elección de la superficie delimitada por el lazo amperiano.

Ley de Gauss para $\vec{E}$	$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$
Ley de Faraday	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$
Ley de Gauss para $\vec{B}$	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$
Ley de Ampère-Maxwell	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$

Forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell

Tenemos la ley de Gauss

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}_{out} dA = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho(\vec{r}) d^3 r$$

En matemáticas, tenemos el teorema de la divergencia donde una superficie cerrada es igual **a la divergencia de ese campo vectorial integrado sobre el volumen**.

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}_{out} dA = \iiint (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV$$

$$\iiint (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho(\vec{r}) d^3 r$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Ahora tenemos en lugar de hablar de una ley macroscópica que involucra superficies cerradas y volúmenes, estamos reduciendo nuestra superficie cerrada a esencialmente un punto que está contenido en ella, y tenemos una relación diferencial que rige la divergencia del campo eléctrico en cualquier punto dado en comparación con la densidad de carga en ese punto.

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}_{out} dA = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho(\vec{r}) d^3 r \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Usando el teorema de la divergencia a campos magnéticos

$$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n}_{out} dA = 0$$

$$\iiint (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dV = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Esto significa que cualquier flujo magnético que entra en una superficie cerrada tiene que ser igual al flujo que sale de esa superficie cerrada. Y así, cuando ahora aplicamos el teorema de la divergencia a ese caso, es muy sencillo que la divergencia del campo magnético es siempre 0 en cada punto del espacio.

El segundo teorema matemático que utilizaremos es el teorema de Stokes, que involucraba superficies cerradas bidimensionales con en volúmenes tridimensionales:

$$\oint \vec{C} \cdot d\vec{s} = \iint_{\text{S.A.}} (\vec{\nabla} \times \vec{C}) \cdot \hat{n} \, da$$

Ahora, lo que nos gustaría hacer es aplicar esto a nuestras dos ecuaciones que involucran integrales de un camino cerrado

Forma diferencial de la ley de Faraday-Lenz

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\iint (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Forma diferencial de la ley de Ampère-Maxwell

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (I + I_d) = \mu_0 \left(I + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$$

$$= \mu_0 \iint \vec{J} \cdot \hat{n} da + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint \vec{E} \cdot \hat{n} da$$

$$\iint (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Forma diferencial de las Ecuaciones de Maxwell

1. Ley de Gauss para el campo eléctrico:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

2. Ley de Gauss para campos magnéticos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

3. Ley de Faraday de la inducción:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

4. Ley de Ampère-Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Ecuaciones de Maxwell en el vacío

Consideremos las ecuaciones de Maxwell en el vacío, en una región en ausencia de cargas y corrientes:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Vamos a suponer el caso más simple donde

$$\vec{E} = \vec{E}(z,\ t)$$

$$\vec{B} = \vec{B}(z,\ t)$$

Para un vector que solo depende de z y t, tenemos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\partial A_y}{\partial z}\hat{i} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\hat{j}$$

Reemplazando en las ecuaciones de Maxwell:

$$-\frac{\partial B_y}{\partial z}\hat{i} + \frac{\partial B_x}{\partial z}\hat{j} = \mu_0\epsilon_0\left(\frac{\partial E_x}{\partial t}\hat{i} + \frac{\partial E_y}{\partial t}\hat{j} + \frac{\partial E_z}{\partial t}\hat{k}\right)$$

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z}\hat{i} + \frac{\partial E_x}{\partial z}\hat{j} = -\left(\frac{\partial B_x}{\partial t}\hat{i} + \frac{\partial B_y}{\partial t}\hat{j} + \frac{\partial B_z}{\partial t}\hat{k}\right)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

Las ecuaciones anteriores dan:

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 = \frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

de forma que E_z y B_z son constantes. Por simplicidad tomaremos que:

$$E_z = B_z = 0$$

Las demás componentes se comportan como sistemas independientes:

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \qquad \frac{\partial B_x}{\partial z} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \qquad \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

El segundo par de ecuaciones solo difiere del primero por las sustituciones siguientes:

$$E_x \to E_y$$

$$B_y \to -B_x$$

de forma que solo vamos a resolver el primer par:

$$\left.\begin{cases} \dfrac{\partial B_y}{\partial z} = -\mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial E_x}{\partial t} & \Rightarrow \dfrac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = -\mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial t \partial z} \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} = -\dfrac{\partial B_y}{\partial t} & \Rightarrow \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial t} = -\dfrac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \end{cases}\right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = 0$$

Por otro lado:

$$\left.\begin{cases} \dfrac{\partial B_y}{\partial z} = -\mu_0\epsilon_0 \dfrac{\partial E_x}{\partial t} & \Rightarrow \dfrac{\partial^2 B_y}{\partial z \partial t} = -\mu_0\epsilon_0 \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} = -\dfrac{\partial B_y}{\partial t} & \Rightarrow \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\dfrac{\partial^2 B_y}{\partial t \partial z} \end{cases}\right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

Luego tanto E_x como B_y satisfacen la ecuación:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{\nu^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Y lo mismo ocurre para E_x y B_y en el segundo sistema de ecuaciones. De este modo, todas las componentes de los campos electromagnéticos satisfacen la ecuación de ondas unidimensional, con una velocidad de propagación:

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \qquad \epsilon_0 \approx \frac{10^{-9}}{4\pi \cdot 8.98755}\ \text{F/m} \quad \text{y} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{H/m}$$

entonces

$$\nu \approx 2.99792 \cdot 10^8\ \text{m/s} = c$$

donde c es la velocidad de la luz. Así, concluimos que la **luz es una onda electromagnética**.

La solución general de la ecuación de ondas unidimensional

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{\nu^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

es

$$f(z,t) = F(z - \nu t) + G(z + \nu t)$$

donde F y G son funciones arbitrarias. Físicamente, F representa un perfil cualquiera de onda propagándose en el sentido de z positivo (onda progresiva) y G es una onda en sentido opuesto (onda regresiva).

Consideremos una solución para el primer sistema que se propaga en un solo sentido, por ejemplo, en el sentido positivo de la eje:

$$E_x(z,t) = E_x(z-ct)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B_y}{\partial z} = -\mu_0\epsilon_0 \dfrac{\partial E_x}{\partial t} = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial E_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} = -\dfrac{\partial B_y}{\partial t} \end{cases}$$

Realizando el cambio de variables $\zeta \equiv z - ct$, tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial z} \to \frac{d}{d\zeta} \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial t} \to -c\frac{d}{d\zeta}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dB_y}{d\zeta} &= \frac{1}{c}\frac{dE_x}{d\zeta} \\ \frac{dE_x}{d\zeta} &= c\frac{dB_y}{d\zeta} \end{aligned}\right\} \quad B_y(z,t) = \frac{1}{c}E_x(z-ct)$$

Por lo tanto,

$$\vec{E} = E_x(z - ct)\hat{i}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}E_x(z - ct)\hat{j} = \frac{1}{c}\hat{k} \times \vec{E}$$

En general, las ondas son transversales a la dirección de propagación $\hat{k}$, y tenemos:

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\hat{k} \times \vec{E}$$

Hasta ahora no hemos especificado la dependencia de la variable $z - ct$. La forma más simple de onda es aquella para la cual esta dependencia es oscilatoria, con una frecuencia angular ω en el tiempo:

$$\vec{E} = A\cos(kz - \omega t + \delta)\hat{i}$$

donde $k = \frac{\omega}{c}$ es el número de onda y A es la amplitud de la onda. A partir de este resultado, tenemos que:

$$\vec{B} = \frac{A}{c}\cos(kz - \omega t + \delta)\hat{j}$$

Este tipo de onda recibe el nombre de armónica o monocromática. Estas ondas cumplen que:

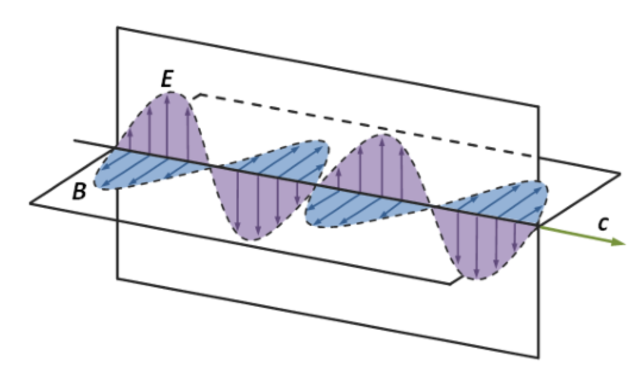
- $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (periodo temporal)
- $\nu = \frac{1}{T}$ (frecuencia)
- $k = \frac{c}{T}$ (periodo espacial; longitud de onda)
- $\phi \equiv kz - \omega t + \delta$ (fase de la onda)
- δ (constante de fase)

Además de ser transversal a la dirección de propagación, el campo eléctrico permanece siempre en un mismo plano. Es por esto que se dice que la onda es linealmente polarizada.

En el caso general de una onda electromagnética plana monocromática propagándose en una dirección arbitraria $\hat{\mu}$ y linealmente polarizada en una dirección $\hat{\epsilon}$, tenemos:

$$\vec{E} = \text{Re}\left[Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\delta)}\right]\hat{\epsilon}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\hat{\mu}\times\vec{E} \quad (6.72)$$


E
B
c

Resumen

Ecuaciones de Maxwell en forma integral

1. Ley de Gauss para el campo eléctrico:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

2. Ley de Gauss para campos magnéticos:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

3. Ley de Faraday de la inducción:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

4. Ley de Ampère-Maxwell:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(I + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$$

Ecuaciones de Maxwell en forma diferencial

1. Ley de Gauss para el campo eléctrico:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

2. Ley de Gauss para campos magnéticos:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

3. Ley de Faraday de la inducción:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

4. Ley de Ampère-Maxwell:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Ecuación de ondas electromagnéticas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{\nu^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

donde $\nu = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c$ (velocidad de la luz)

Ondas electromagnéticas planas

$$\vec{E} = E_x(z - ct)\hat{i}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}E_x(z - ct)\hat{j} = \frac{1}{c}\hat{k} \times \vec{E}$$

Ondas planas monocromáticas

$$\vec{E} = A\cos(kz - \omega t + \delta)\hat{i}$$

$$\vec{B} = \frac{A}{c}\cos(kz - \omega t + \delta)\hat{j}$$

donde $k = \frac{\omega}{c}$ es el número de onda.

Referencia

Referencia

Escrig Murua, Juan. s. f. «Capítulo 6 Ecuaciones de Maxwell 6.1. Ecuaciones de Maxwell 6.2. Ondaselectromagnéticas». En *Introducción al ELECTROMAGNETISMO*.