Electromagnetismo I

S11 - Circuitos de Corriente Continua

Josue Meneses Díaz

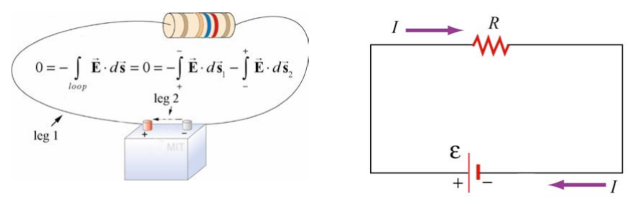
Universidad de Santiago de Chile

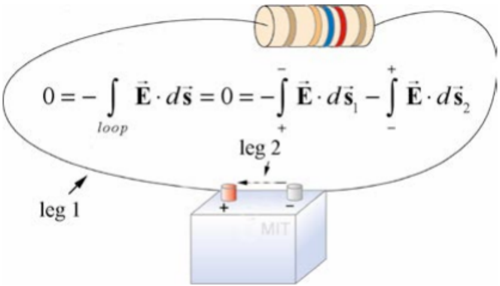
Circuitos Corriente Continua (CC)

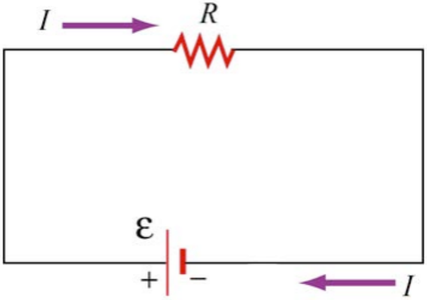
Fuerza electromotriz (FEM)

La bateria se conoce como una fuente de fuerza electromotriz (fem). La fem ε de una batería es el voltaje máximo posible que está puede suministrar entre sus terminales. La terminal positiva de la batería se encuentra a un potencial más alto que la negativa. Debido a que una batería verdadera está hecha de materia, existe una resistencia al flujo de las cargas dentro de la batería. Esta resistencia se conoce como resistencia interna r

$$\varepsilon \equiv V_{+} - V_{-}$$







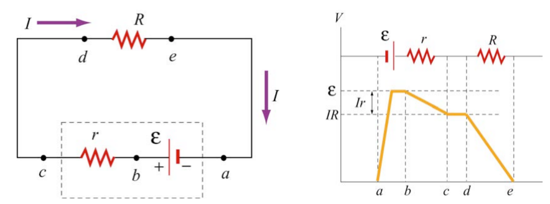
$$0 = -\int \vec{E} \cdot d\vec{s}_1 - \int \vec{E} \cdot d\vec{s}_2$$

$$0 = -\Delta V_R + \varepsilon$$

$$0 = -IR + \varepsilon$$

$$\Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R}$$

Sin embargo, una batería real siempre lleva una resistencia interna r. La diferencia de potencial entre los terminales de la batería se convierte en

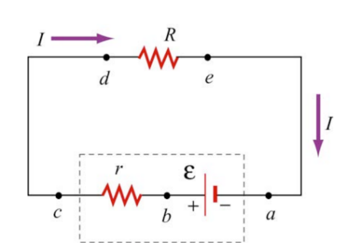


$$\Delta V = \varepsilon - Ir$$

$$\varepsilon - Ir - IR = 0$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

Para una batería con fem ε y resistencia interna r, la potencia o la tasa a la que se entrega energía química al circuito es

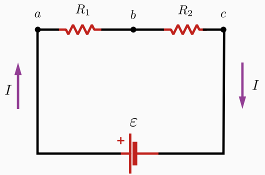


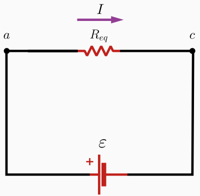
$$\begin{aligned} P &= I\varepsilon \\ &= I(IR + Ir) \\ &= I^2R + I^2r \end{aligned}$$

La potencia de la fem de la fuente es igual a la suma de la potencia disipada en ambas resistencias, interna y de carga, cumpliendo con la conservación de energía.

Resistencias en serie y paralelo

Resistencias en serie





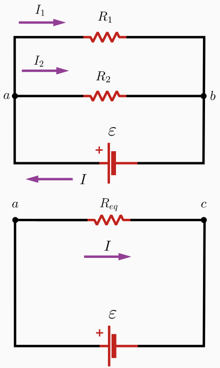
Por conservación de la corriente y energía

$$I = I_1 = I_2 \qquad \Delta V_{ac} = \Delta V_{ab} + \Delta V_bc$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \Delta V \\ &= IR_1 + IR_2 \\ &= I(R_1 + R_2) \\ &= IR_{eq} \end{aligned}$$

En general, N resistencias en serie:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots = \sum_{i=1}^{N} R_i$$



Por conservación de la corriente

$$
\begin{aligned}
I &= I_1 + I_2 \\
&= \frac{\varepsilon}{R_1} + \frac{\varepsilon}{R_2} \\
&= \varepsilon \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \\
&= \varepsilon \left(\frac{1}{R_{eq}} \right)
\end{aligned}
$$

En general, N resistencias en paralelo:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}$$

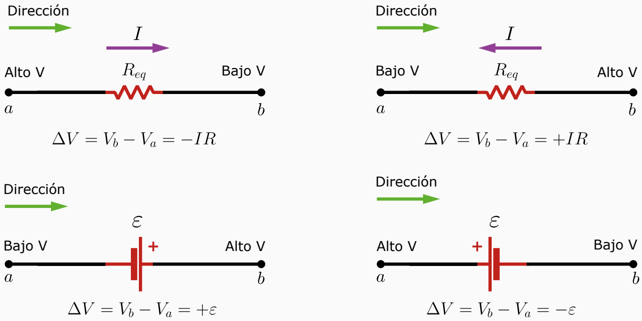
Leyes de Kirchhoff

Regla de lazo de Kirchhoff - Ley de voltaje de Kirchhoff (LKV)

La suma del cambio de voltaje a través de los elementos en un lazo cerrado es cero:

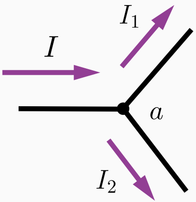
$$\sum_{\text{lazo cerrado}} \Delta V = 0$$

A continuación se muestran las reglas para determinar ΔV a través de una resistencia y una batería con una dirección de desplazamiento designada:



Regla de unión de Kirchhoff - Ley de corrientes de Kirchhoff (LCK)

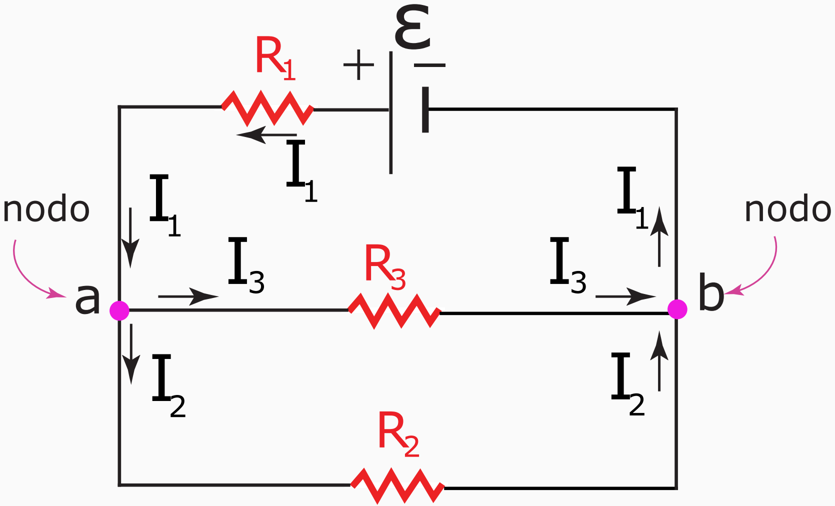
La suma de las corrientes que entran a un nodo debe ser igual a la suma de las corrientes que salen del nodo:



$$\sum I_{\text{in}} = \sum I_{\text{out}}$$

Un nodo se forma por la unión de tres o más cables que llevan corriente. En el circuito mostrado en la figura, la corriente I_1 está fluyendo hacia el nodo, y las corrientes I_2 e I_3 están saliendo, por lo tanto:

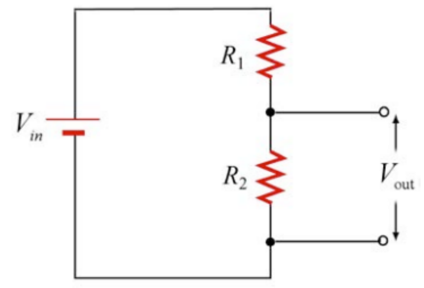
$$I_1 = I_2 + I_3$$



ε
+
−
R1
R3
R2
I1
I1
I1
I1
I3
I3
I2
I2
nodo
nodo
a
b

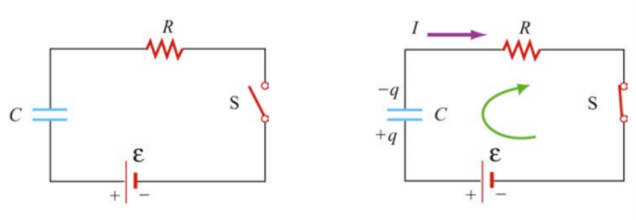
Ejemplo (Divisor de voltaje)

Considere una fuente de fem $\varepsilon = V_{in}$ que está conectada en serie a dos resistencias. Encontrar el valor de V_{out} en la resistencia R_2

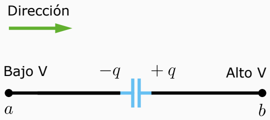


Circuitos RC

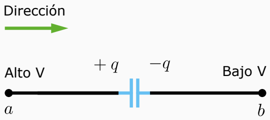
Considere el circuito que se muestra a continuación. El condensador está conectado a una fuente constante de ε que no varía en el tiempo. En $t = 0$ el switch S es cerrado. El condensador inicialmente está descargado, $q(t = 0) = 0$.



En este instante, la diferencia de potencial de los terminales de la batería es la misma que en la resistencia. Esto inicia la carga del condensador. A medida que el condensador comienza a cargarse, la diferencia de potencial a través del condensador aumenta con el tiempo



$\Delta V = V_b - V_a = +q/C$



$\Delta V = V_b - V_a = -q/C$

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C}$$

$$0 = \varepsilon - I(t)R - q(t)/C \qquad I(t) = \frac{q(t)}{RC}$$

$$0 = \varepsilon - \frac{dq(t)}{dt}R - \frac{q(t)}{C}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{R}\left(\varepsilon - \frac{q}{C}\right)$$

$$\frac{dq}{\left(\varepsilon - \frac{q}{C}\right)} = \frac{1}{R}dt$$

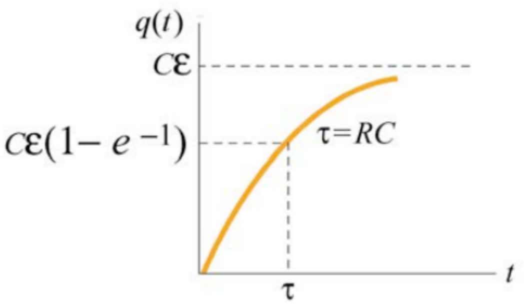
$$\frac{dq}{q - C\varepsilon} = -\frac{1}{RC}dt$$

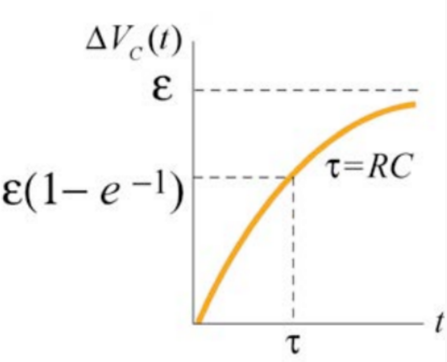
$$\int_0^q \frac{dq}{q - C\varepsilon} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt'$$

$$\ln\left(\frac{q - C\varepsilon}{-C\varepsilon}\right) = -\frac{t}{RC}$$

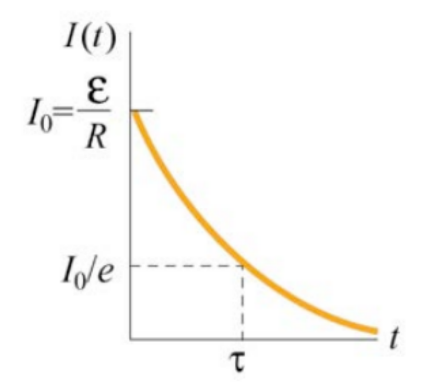
$$q(t) = C\varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$q(t) = Q\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$





$$\Delta V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{Q}{C}(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = \varepsilon(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$



$$I(t) = \frac{dq}{dt} = \left(\frac{\varepsilon}{R}\right) e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

De las ecuaciones anteriores, definimos $\tau = RC$ llamado tiempo característico. Sus unidades son:

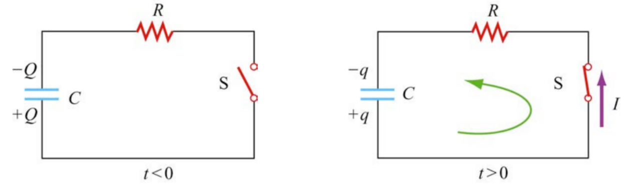
$$[\Omega][F] = \left(\frac{[V]}{[A]}\right)\left(\frac{[C]}{[V]}\right) = \frac{[C]}{[A]} = \frac{[C]}{[C]/[s]} = [s].$$

τ es una medida del tiempo de decaimiento de la función exponencial. Esta tasa de decaimiento satisface la siguiente propiedad,

$$I(t+\tau) = I(t)e^{-1}$$

lo que muestra que después de τ la corriente decae en un factor de $e^{-1} = 0.368$

Supongamos inicialmente que el condensador se ha cargado a algún valor Q. Para $t < 0$, el interruptor está abierto y la diferencia de potencial a través del condensador viene dada por $\Delta V_C = Q/C$. La diferencia de potencial a través de la resistencia es cero porque no hay corriente a través de ella, $I = 0$. Ahora supongamos que en $t = 0$ el interruptor está cerrado. El condensador comenzará a descargarse



$$\frac{q}{C} - IR = 0$$

$$0 = \frac{q}{C} - IR \qquad I = -\frac{dq}{dt}$$

$$0 = \frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt}$$

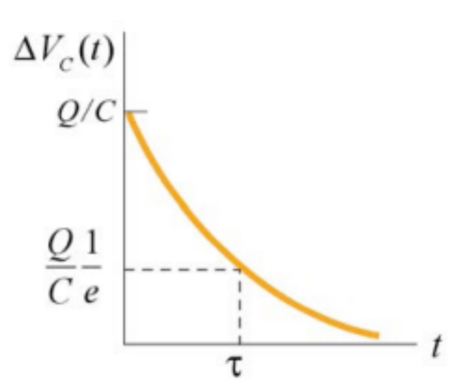
$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}dt$$

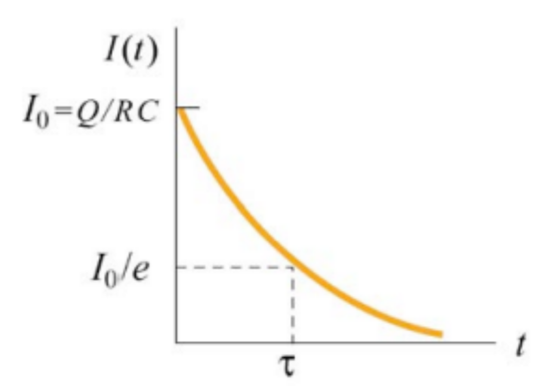
$$\int_Q^q \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt$$

$$\ln\left(\frac{q}{Q}\right) = -\frac{t}{RC}$$

$$q(t) = Qe^{-\frac{t}{RC}}$$

$$q(t) = Qe^{-\frac{t}{RC}}$$





$$\Delta V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{Q}{C}e^{-\frac{t}{RC}} \qquad I(t) = -\frac{dq}{dt} = -\frac{Q}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$$

Resolución de circuitos

Estrategia de Resolución de Problemas: Aplicación de las Reglas de Kirchhoff

1. Dibujar un diagrama de circuito y etiquetar todas las cantidades, tanto conocidas como desconocidas. El número de cantidades desconocidas es igual al número de ecuaciones linealmente independientes que debemos buscar.
2. Asignar una dirección a la corriente en cada rama del circuito. (Si la dirección real es opuesta a la que has asumido, tu resultado al final será un número negativo). Sea B igual al número de ramas.
3. Si hay M nodos, se debe aplicar LCK a $M-1$ nodos. Aplicar la regla de la nodos a la última intersección no producirá una nueva relación independiente entre las corrientes.

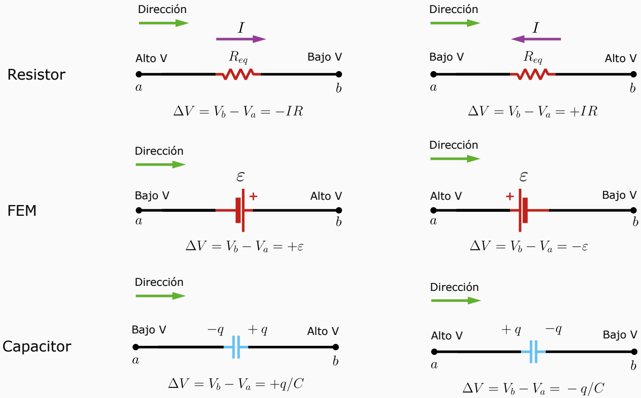
4. Si hay N mallas, aplicar LVK a las $N-1$ mallas. Aplicar la regla de voltajes a la última malla no producirá una nueva relación independiente entre las ecuaciones anteriores. Entonces,

$$B = (M-1) + (N-1)$$

Por ejemplo, si hay tres ramas con tres corrientes desconocidas, entonces debe haber dos nodos y tres mallas. Por lo tanto, debemos escribir una ecuación de nodos y dos ecuaciones de mallas para un total de tres ecuaciones linealmente independientes para tener una solución única.

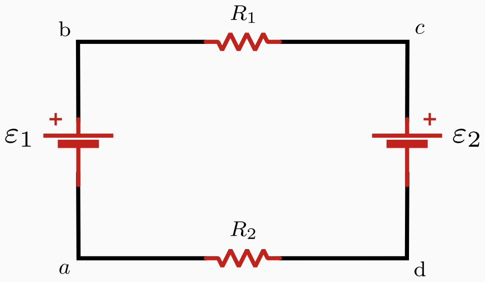
5. Resolver las ecuaciones simultáneas para obtener las soluciones de las cantidades desconocidas

Usar las siguientes convención para la diferencia de potencial eléctrico ΔV en cada elemento del circuito:



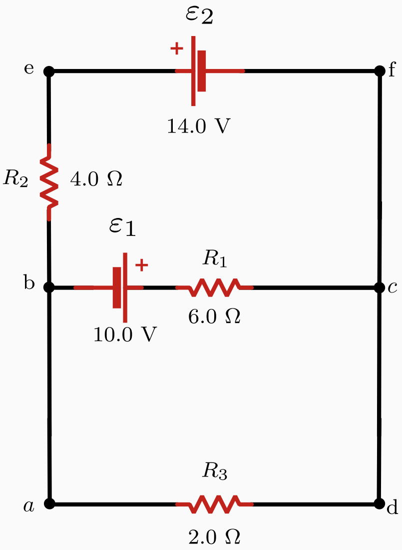
Ejemplo

Encontrar las corrientes en cada resistor del circuito mostrado en la figura, utilizando los pasos describidos anteriormente.



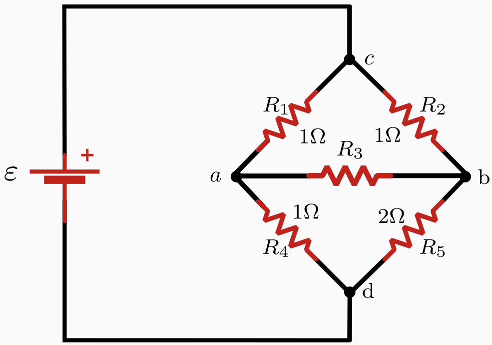
Ejemplo

Encontrar las corrientes en cada resistor del circuito mostrado en la figura, utilizando los pasos describidos anteriormente.



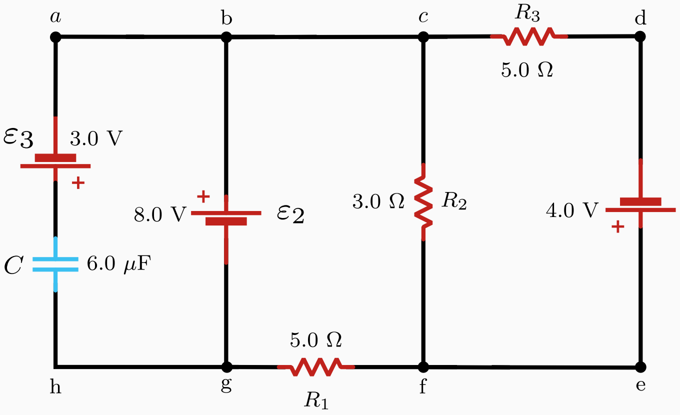
Ejemplo (Puente de resistencias)

Encontrar todas las corrientes del circuito. ¿Cúal es el valor de ΔV_{ab}? ¿Qué ocurre con ΔV_{ab} si $R_5 = 1\Omega$?



Ejemplo

El circuito de la figura ha sido conectado durante varios segundos (circuito en condición estable). Enconrtrar la intensidad de corriente en cada resistor. ¿Cúal es la carga en el capacitor?



Resumen

Resumen

- Resistencias en serie

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots = \sum_{i=1}^{N} R_i$$

- Resistencias en paralelo

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}$$

- Leyes de Kirchhoff

$$\text{LVK:} \quad \sum_{\text{lazo cerrado}} \Delta V = 0$$

$$\text{LVC:} \quad \sum I_{\text{in}} = \sum I_{\text{out}}$$

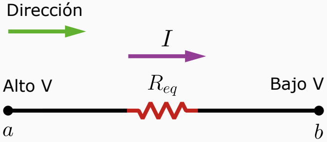
- Carga de un Capacitor

$$q(t) = Qe^{-\frac{t}{RC}} \qquad I(t) = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

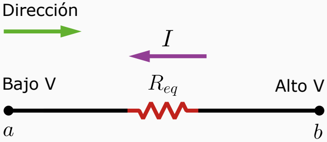
- Descarga de un Capacitor

$$q(t) = Qe^{-\frac{t}{RC}} \qquad I(t) = \frac{Q}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$$

Resistor

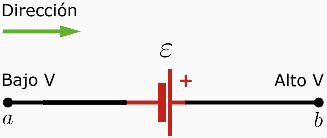


$$\Delta V = V_b - V_a = -IR$$

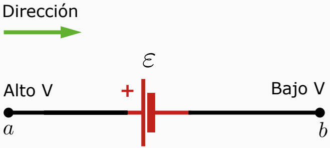


$$\Delta V = V_b - V_a = +IR$$

FEM

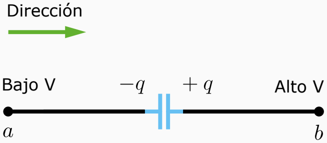


$$\Delta V = V_b - V_a = +\varepsilon$$

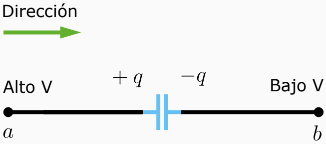


$$\Delta V = V_b - V_a = -\varepsilon$$

Capacitor



$$\Delta V = V_b - V_a = +q/C$$



$$\Delta V = V_b - V_a = -q/C$$

Referencia

Referencia

Freedman, Young, y S. Zemansky. 2009. «26 CIRCUITOS DE CORRIENTE DIRECTA. 26.1 Resistores En Serie y En Paralelo 26.2 Reglas de Kirchhoff 26.4 Circuitos R-C». En *Física Universitaria*.

Serway, Raymond A., y John W. Jewett. 2005. «28 Circuitos de Corriente Directa. 28.1 Fuerza Electromotriz 28.2 Resistores En Serie y En Paralelo 28.3 Leyes de Kirchhoff 28.4 Circuitos RC». En *Física Para Ciencias e Ingeniería Con Física Moderna*, 7ma ed. Vol. 2. CENGAGE learning.