Electromagnetismo 1

S07 - Potencial Eléctrico

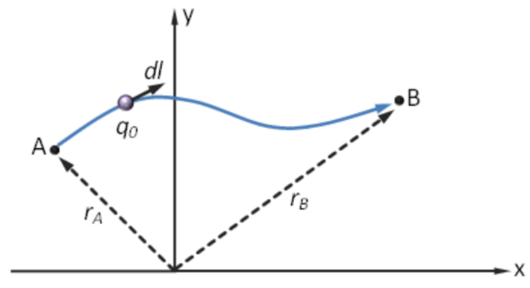
Josue Meneses Díaz

Universidad de Santiago de Chile

Potencial eléctrico

El concepto de potencial eléctrico tiene un gran valor práctico en la operación de circuitos eléctricos y aparatos que estudiaremos, así como en el cálculo de campos eléctricos.

Sea q_0 una carga de prueba se mueve desde A hasta B en la región de un campo eléctrico $\vec{E}$.



Se define la diferencia de potencial eléctrico como la integral de lineas de campo electromagnético entre dos puntos dados:

$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad [N/C][m] \equiv [J/C] = V(\text{Volt})$$

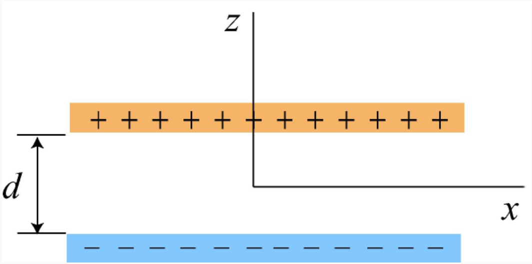
Donde la integral de línea significa:

- Dividir el camino en pequeños segmentos.
- Representar cada segmento por un vector que une sus extremos.
- Efectuar el producto escalar del vector segmento de camino por el campo $\vec{E}$ en este lugar.
- Sumar estos productos para todo el camino.

La integral se considera el límite de la suma al hacer los segmentos cada vez más pequeños y numerosos

Ejemplo (Potencial entre dos placas paralelas)

Calcular la diferencia de potencial entre dos placas infinitas paralelas con una densidad de carga σ (superior), $-\sigma$ (inferior) a una distancia entre ellas de d desde la carga positiva a la negativa.



Ejemplo (Potencial entre dos placas paralelas esfericas)

Calcular la diferencia de potencial entre dos placas esféricas paralelas con una carga $-Q$ (exterior, radio b) y $+Q$ (inferior, radio a) desde la carga $-Q$ a la carga $+Q$.

Ejemplo (Potencial entre dos placas paralelas cilindricas infinitas)
Calcular la diferencia de potencial entre dos placas cilindricas paralelas infinitas con una distribución de carga superficial $-\sigma$ (exterior, radio b) y $+\sigma$ (inferior, radio a) desde la placa exterior a la interior.

De las unidades de Potencial eléctrico $[J/C]$:

$$\Delta V_{AB} = -\frac{W_{AB}}{q_p}$$

Dado que el $\vec{E}$ es un campo conservativo:

$$\Delta U_{AB} = -W_{AB}$$

Así, mover una carga q desde un punto A hasta otro B sobre una diferencia de potencial ΔV es igual a:

$$\Delta U_{AB} = q\Delta V_{AB}$$

Recordando el principio de conservación de energía: El trabajo total realizado por una fuerza externa causará que la energía cinética de un objeto cambie más el cambio en la energía potencial.

$$W_{ext} = \Delta k + \Delta U$$

Usando la energía potencial proveniente de la interacción electrostática, ahora podemos resumir el principio de energía:

$$W_{ext} = \Delta k + q\Delta V$$

Ejemplo

Un protón se libera del reposo en un campo eléctrico uniforme $8 \cdot 10^4 \hat{i}$ [V/m]. El protón sufre un desplazamiento de 0.5 [m] en la dirección de $\vec{E}$.

a) Encuentre el cambio en el potencial eléctrico entre los puntos A y B.

b) Determine el cambio en la energía potencial del sistema para este desplazamiento.

c) Determine la velocidad del protón después de completar el desplazamiento de 0.5[m] en el campo eléctrico.

Potencial eléctrico de cargas puntuales

Trabajo para una mover una carga puntual

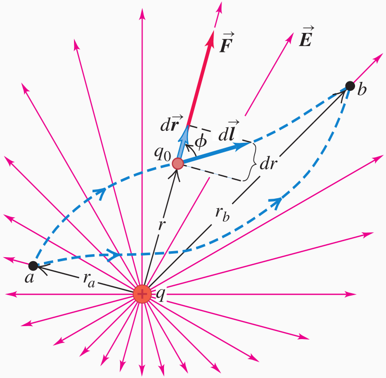
El trabajo realizado por una carga puntual puede ser calculado mediante la integral de lineas:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Donde $\vec{F}$ ya ha sido calculado anteriormente:

$$W_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} \frac{k_e q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \cdot (dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta})$$

$$= -k_e q_1 q_2 \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$



Trabajo negativo?

Potencial eléctrico de una carga puntal

$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Realizando el mismo análisis para el caso del trabajo, obtenemos

$$V(B) - V(A) = -\int_{r_A}^{r_B} \frac{k_e q_f}{r^2} dr = k_e q_f \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

La diferencia de potencial ΔV depende solo de los puntos finales, independientemente de la elección de la ruta tomada.

La diferencia de potencial eléctrico tiene un significado físico importante, ya que uno puede seleccionar un punto de referencia y definir su potencial como cero.

En la práctica, a menudo es conveniente elegir que el punto de referencia esté en el infinito, de modo que el potencial eléctrico en un punto P se convierta en:

$$V_P = -\int_{\infty}^{P} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}, \quad V(\infty) = 0.$$

Con esta elección de potencial cero, introducimos la **función de potencial eléctrico**, $V(r)$, donde r es la distancia desde el objeto cargado puntual con carga Q

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}.$$

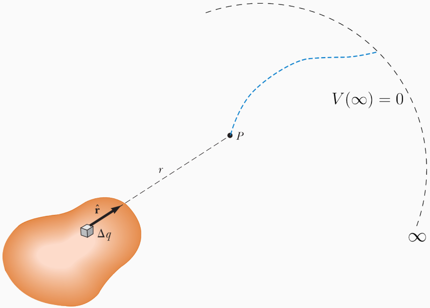
Al igual que lo hemos hecho con la ley de Coulomb y el campo eléctrico, cuando tenemos más de una carga puntual, podemos aplicar el principio de superposición para encontrar el potencial eléctrico. Este se obtiene como la suma de los potenciales debidos a las cargas individuales:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

Donde a cada una de las partículas se le ha aplicado la función de potencial eléctrico.

Potencial eléctrico de una distribución continua

Siguiendo con el análisis infinitesimal, subdividimos la distribución de carga en pequeños elementos de carga dq, utilizando el resultado de carga puntual:



$$dV_s = \frac{kdq_f}{r_{dq_f,p}}, \quad v(\infty) = 0$$

$$V(p) - V(\infty) = \int_0^p \frac{kdq_f}{r_{dq_f,p}}$$

El truco ahora es definir un vector $\vec{r}_{dq_f,p} = \vec{r}_p - \vec{r}_f$

$$V(\vec{r}_p) = \int \frac{k_e dq_f}{|\vec{r}_p - \vec{r}_f|}$$

con $\vec{r}_p$ el punto donde se quiere medir la función potencial y $\vec{r}_f$ el vector a la fuente de carga continua.

Ejemplo (Potencial a lo largo del eje de un anillo cargado uniformemente)
Calcular el potencial en un punto P a lo largo del eje de simetria de un anillo cargado uniformemente Q.

Ejemplo (Potencial a lo largo de una barra cargada uniformemente)
Calcular el potencial en un punto P en el eje x de una barra con una densidad de carga lineal λ.

Calculando $\vec{E}$ desde un Potencial

Gradiente de una función escalar

Introduciremos el concepto de vector gradiente de f como

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}\hat{k}$$

donde f(x, y, z) es cierta función continua y derivable, y $\vec{\nabla} f$ es un vector que expresa como varía la función f(x, y, z) en la proximidad de un punto.

El gradiente de la función es un vector en la dirección de la máxima pendiente y sentido ascendente, y su módulo es la pendiente, medida en aquella dirección.

Calculando $\vec{E}$ desde un Potencial

Hemos defino el diferencial de potencia eléctrica como:

$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Por otro lado, matemáticamente

$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{\nabla} V \cdot d\vec{s}$$

Donde se deduce directamente

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Donde se observa, como vimos previamente, que la dirección de $\vec{E}$ apunta hacia un potencial más bajo.

Si las coordenadas que se estan utilizando son cartesianas:

$$\vec{E} = -\left(\hat{\imath}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

Si la distribución de carga posee simetría esférica, entonces el campo eléctrico resultante es una función de la distancia radial

$$\vec{E} = E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

Ejemplo

Si $V = 3x^2y + y^2 + yz$ encuentre el campo eléctrico $\vec{E}$

Ejemplo (Potencial de una partícula)
El potencial de una partícula puntual q la hemos calculado anteriormente

$$V = k_e q/r$$

Obtener el campo eléctrico a partir de este potencial.

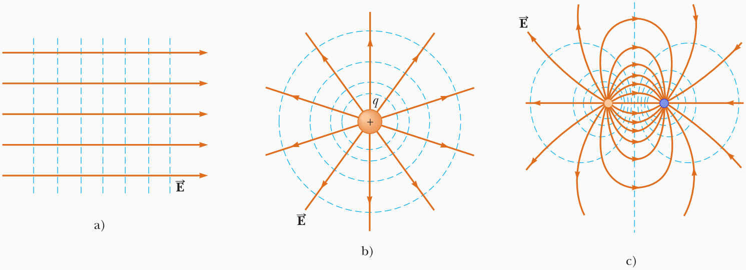
Ejemplo

Calcular el campo eléctrico a partir del potencial a lo largo del eje de un anillo con carga $+Q$ en el eje de simetría del anillo en un punto P.

$$V = \frac{k_e Q}{\sqrt{R^2 + Z^2}}$$

Superficies equipotenciales

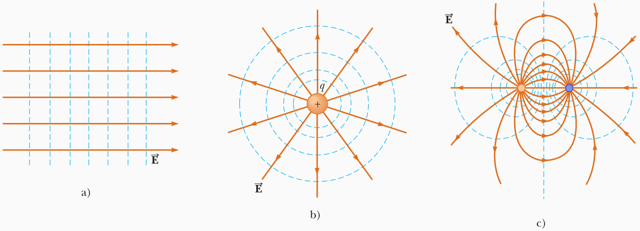
Supongamos que un sistema en dos dimensiones tiene un potencial eléctrico V(x,y). Las curvas caracterizadas por la constante V(x,y) se denominan **curvas equipotenciales**. Ejemplos de curvas equipotenciales se muestran en la Figura



En tres dimensiones, las superficies V(x,y,z)=constante se denominan **superficies equipotenciales**.

Las propiedades de las superficies equipotenciales se pueden resumir de la siguiente manera:

1. Las líneas del campo eléctrico son perpendiculares a los equipotenciales y apuntan de potenciales más altos a más bajos.
2. Por simetría, las superficies equipotenciales producidas por una carga puntual forman una familia de esferas concéntricas y, para un campo eléctrico constante, una familia de planos perpendiculares a las líneas de campo.
3. No se requiere trabajo para mover una partícula a lo largo de una superficie equipotencial.



Resumen

Gravedad	Electrostática
Masa m	Carga q
Fuerza gravitatoria $\vec{\mathbf{F}}_G = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$	Fuerza eléctrica $\vec{\mathbf{F}}_e = k_e\frac{Qq}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$
Campo gravitatorio $\vec{\mathbf{g}} = \vec{\mathbf{F}}_g/m$	Campo eléctrico $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{F}}_e/q$
Cambio de energía potencial	Cambio de energía potencial
$\Delta U = -\int_A^B \vec{\mathbf{F}}_G \cdot d\vec{\mathbf{s}}$	$\Delta U = -\int_A^B \vec{\mathbf{F}}_e \cdot d\vec{\mathbf{s}}$
Potencial gravitatorio $\Delta V_G = -\int_A^B \vec{\mathbf{g}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$	Potencial eléctrico $\Delta V = -\int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$
Función potencial, $V_G(\infty) = 0 : V_G = -\frac{GM}{r}$	Función potencial, $V(\infty) = 0 : V = k_e\frac{Q}{r}$
$\left\|\Delta U_g\right\| = mgd,$ (constante $\vec{\mathbf{g}}$)	$\|\Delta U\| = qEd,$ (constante $\vec{\mathbf{E}}$)

Referencias

Referencias