Electromagnetismo I

S17 - Inductancia y Autoinducción

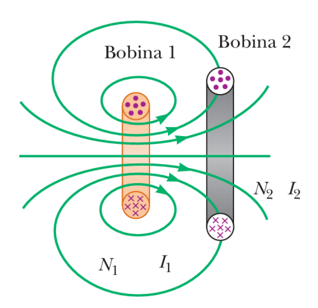
Josue Meneses Díaz

Universidad de Santiago de Chile

Inducción electromagnética

Inductancia Mutua

Cuando dos bobinas están cerca una de la otra, un cambio en la corriente de una bobina induce un voltaje en la otra.



Se tienen dos bobinas (solenoides) donde la primera tiene N_1 vueltas y la segunda N_2. La primera lleva una corriente I_1 generando $\vec{B}_1$. Debido a que las dos bobinas están cerca una de la otra, algunas de las líneas de campo magnético que atraviesan la bobina 1 también pasarán a través de la bobina 2. Sea Φ_{12} el flujo magnético a través de una vuelta de la bobina 2 debido a I_1. Ahora, al variar I_1 con el tiempo, habrá una fuerza electromotriz inducida asociada con el cambio del flujo magnético en la segunda bobina:

$$\varepsilon_{12} = -N_2 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{\text{espira 2}} \vec{B}_1 \cdot d\vec{A}_2$$

La tasa de cambio del flujo magnético Φ_{12} en la bobina 2 es proporcional a la tasa de cambio de la corriente en la bobina 1:

$$N_2 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = M_{12} \frac{dI_1}{dt}$$

donde la constante de proporcionalidad M_{12} se llama inductancia mutua. También se puede escribir como

$$M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1}$$

La unidad del SI para inductancia es el henrio [H]:

$$1 \text{ henry} = 1\,\mathrm{H} = 1\,\mathrm{T} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{A}$$

De manera similar, supongamos que hay una corriente I_2 en la segunda bobina y que está variando con el tiempo. Entonces, la fuerza electromotriz inducida en la bobina 1 se convierte en

$$\varepsilon_{21} = -N_1 \frac{d\Phi_{21}}{dt} = -\frac{d}{dt} \int\int_{\text{bobina 1}} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{A}_1$$

y se induce una corriente en la bobina 1.

La corriente cambiante en la bobina 2 produce un flujo magnético cambiante en la bobina 1. Este flujo cambiante en la bobina 1 es proporcional a la corriente cambiante en la bobina 2,

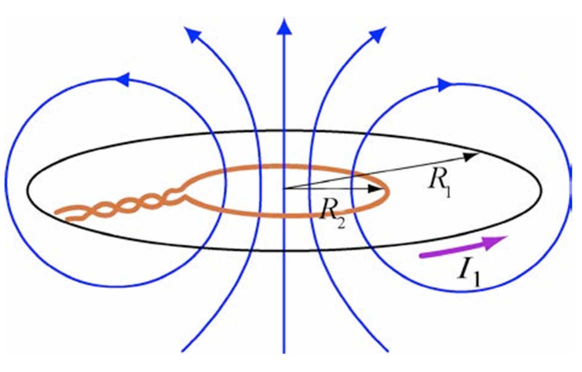
$$N_1 \frac{d\Phi_{21}}{dt} = M_{21} \frac{dI_2}{dt} \qquad M_{21} = \frac{N_1 \Phi_{21}}{I_2}.$$

donde la constante de proporcionalidad M_{21}. El teorema de reciprocidad de la inductancia mutua establece que las constantes son iguales

$$M_{12} = M_{21} \equiv M$$

Ejemplo (Inductancia Mutua de Dos Bobinas Concentricas y Coplanares)

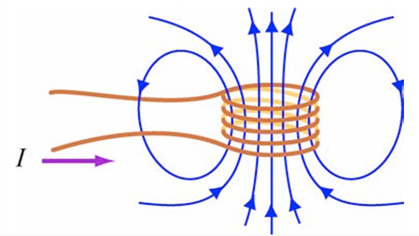
Consideremos dos bobinas concéntricas y coplanares de una sola vuelta con radios R_1 y R_2, donde $R_1 \gg R_2$, como se muestra en la Figura. ¿Cuál es la inductancia mutua entre las dos bobinas?



Autoinducción

Autoinductancia

Consideremos una bobina de la figura con N espiras y una corriente $I = I(t)$. De acuerdo con la ley de Faraday, se generará una fuerza electromotriz (fem) inducida que se opondrá a cualquier cambio de la corriente. La propiedad del lazo en la que su propio campo magnético se opone a cualquier cambio en la corriente se llama ***autoinducción***, y la fem generada se denomina ***fem autoinducida*** o ***fem de retroceso***, que denotamos como ε_L. La autoinducción puede surgir de una bobina y el resto del circuito, especialmente los cables de conexión.



Matemáticamente, la emf autoinducida se puede escribir como

$$\varepsilon_L = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -N\frac{d}{dt}\int\int_{\text{turn}} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A}.$$

Debido a que el flujo es proporcional a la corriente I, también podemos expresar esta relación como

$$\varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt}.$$

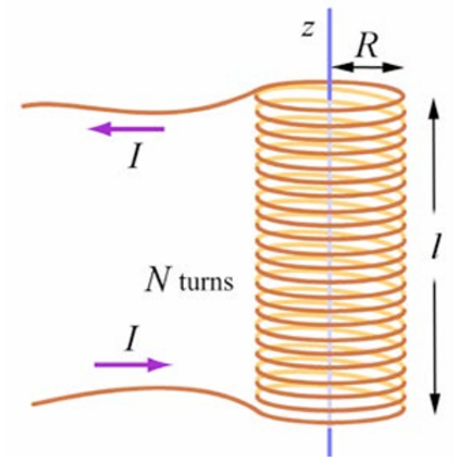
donde la constante L se llama autoinducción. Las dos expresiones se pueden combinar para obtener

$$L = \frac{N\Phi_B}{I}.$$

Físicamente, la autoinducción L es una medida de la “resistencia” de un inductor al cambio de corriente; cuanto mayor sea el valor de L, menor será la tasa de cambio de corriente.

Ejemplo (Autoinductancia de un solenoide)

Calcule la autoinductancia de un solenoide con N vueltas, longitud l y radio R con una corriente I que fluye a través de cada espira.

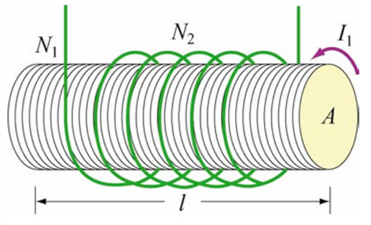


Ejemplo (Autoinductancia de un solenoide 2)

Un solenoide de largo l de área transversal A tienen N_1 vueltas. Una bobina aislada de N_2 vueltas se envuelve a su alrededor.

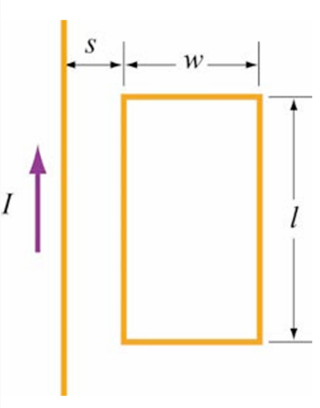
a. Calcular la inductancia mutua M, suponiendo que todo el flujo del solenoide pasa a través de la bobina exterior.

b. Relacionar la inductancia mutua M con las autoinductancias L_1 y L_2 del solenoide y la bobina.



Ejemplo

Un cable infinito que transporta corriente I se coloca a la izquierda de un bucle rectangular de alambre con ancho w y largo l, como se muestra en la figura. Determine la inductancia mutua del sistema.



Energía Almacenada en Campos Magnéticos

Debido a que un inductor en un circuito sirve para oponerse a cualquier cambio en la corriente a través de él, *se debe realizar trabajo por parte de una fuente externa*, como una batería, para establecer una corriente en el inductor. A partir del teorema de trabajo-energía, concluimos que la energía puede ser almacenada en un inductor. **El papel que desempeña un inductor en el caso magnético es análogo al de un capacitor en el caso eléctrico**.

La potencia, o tasa a la que una fem externa ε_{ext} trabaja para superar la fem autoinducida ε_L y pasar la corriente I en el inductor es

$$P_L = \frac{dW_{\text{ext}}}{dt} = I\varepsilon_{\text{ext}}.$$

Si solo están presentes la emf externa y el inductor, entonces $\varepsilon_{\text{ext}} = -\varepsilon_L$, lo que implica que

$$P_L = \frac{dW_{\text{ext}}}{dt} = -I\varepsilon_L = +IL\frac{dI}{dt}.$$

Si la corriente está aumentando con $\frac{dI}{dt} > 0$, entonces $P > 0$, lo que significa que la fuente externa está realizando trabajo positivo para transferir energía al inductor. Así, la energía interna U_B del inductor aumenta. Por otro lado, si la corriente está disminuyendo con $\frac{dI}{dt} < 0$, entonces tenemos $P < 0$. En este caso, la fuente externa toma energía del inductor, causando que su energía interna disminuya. El trabajo total realizado por la fuente externa para aumentar la corriente de cero a I es entonces

$$W_{\text{ext}} = dW_{\text{ext}} = \int_0^I LI'dI' = \frac{1}{2}LI^2.$$

Esto es igual a la energía magnética almacenada en el inductor. Notar la analogía con la energía almacenada en un capacitor

$$U_B = \frac{1}{2} L I^2 \qquad\qquad U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}.$$

Desde una perspectiva energética, hay una distinción importante entre un inductor y un resistor. Siempre que una corriente I pasa a través de un resistor, la energía fluye hacia el resistor y se disipa en forma de calor, independientemente de si I es constante o dependiente del tiempo. La energía fluye hacia un inductor ideal solo cuando la corriente está variando con $\frac{dI}{dt} > 0$. La energía no se disipa, sino que se almacena allí; se libera más tarde cuando la corriente disminuye con $\frac{dI}{dt} < 0$. Si la corriente que pasa a través del inductor es constante, entonces no hay cambio en la energía, ya que $P_L = LI\left(\frac{dI}{dt}\right) = 0$.

Ejemplo (Energía almacenada en un solenoide)
Un solenoide largo con longitud l y un radio R consta de N vueltas. Una corriente I pasa a través de la bobina. Encuentre la energía almacenada en el sistema.

Densidad de energía magnética

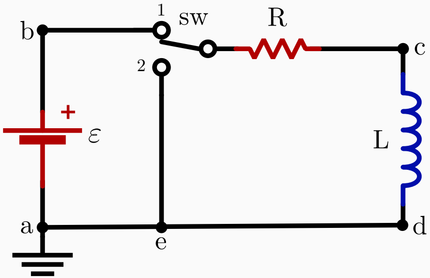
La densidad de energía magnética, o la energía almacenada por cada unidad de volumen en el campo magnético del inductor, es igual a

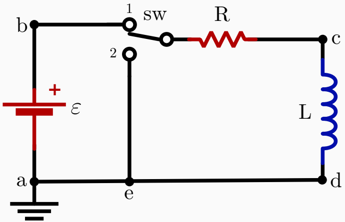
$$u_B = \frac{U}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

A pesar de que esta expresión se dedujo para el caso especial de un solenoide, aplica también para cualquier región del espacio en el que exista un campo magnético. Observe que la ecuación encontrada es similar en forma a la ecuación encontrada para la energía por cada unidad devolumen almacenada en un campo eléctrico, $u_E = 1/2\varepsilon_0 E^2$. En ambos casos, la densidad deenergía es proporcional al cuadrado de la magnitud del campo.

Circuitos RL

Consideremos el circuito de la figura, donde la fem tiene una resistencia interna despreciable. Supongamos que S_2 se pone en 1 y que el interruptor S_1 se abre para $t < 0$ y luego se cierra en $t = 0$. La corriente en el circuito comienza a aumentar y en el inductor se induce una fuerza contraelectromotriz que se opone a la corriente creciente.





Aplicar la LVK en la malla abcda:

$$\varepsilon - IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$

$$\frac{dI}{I - \frac{\varepsilon}{R}} = -\frac{dt}{\frac{L}{R}}$$

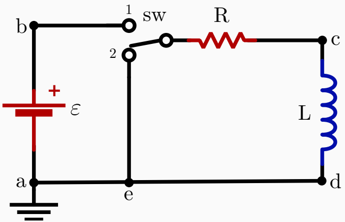
Integrando ambos lados e imponiendo la condición $I(t=0) = 0$, la solución de la ecuación diferencial es

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-t/\tau_L}\right) \qquad \tau_L = \frac{L}{R}$$

Notar que $I(\infty) = \frac{\varepsilon}{R}$ y $I(t=0) = 0$.

Descarga circuito RL

Considerando el paso del estado estacionario anterior al cambio del sw al estado 2 y aplicando la LVK



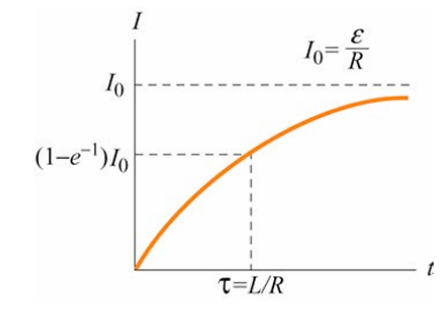
$$-IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$

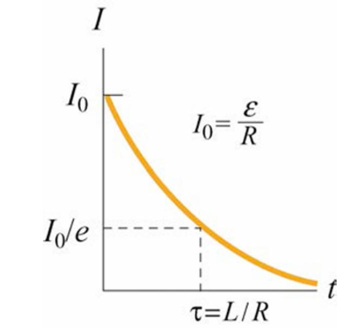
$$\frac{dI}{I} = -\frac{dt}{L/R}$$

La solución a la ecuación diferencial anterior es

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}e^{-t/\tau}$$

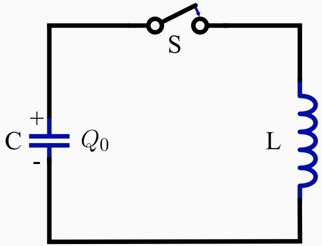
donde $\tau = \frac{L}{R}$ es la misma constante de tiempo que en el caso de la corriente creciente.


I
$I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$
I_0
$(1-e^{-1})I_0$
t
$\tau = L/R$


I
I_0
$I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$
I_0/e
t
$\tau = L/R$

Oscilaciones LC

Considere un circuito LC en el que un capacitor está conectado a un inductor. Si el capacitor inicialmente tiene una carga Q_0. Cuando se cierra el interruptor, el capacitor comienza a descargarse y la energía eléctrica disminuye. Por otro lado, la corriente generada por el proceso de descarga produce energía magnética que luego se almacena en el inductor.



En ausencia de resistencia, la energía total se transforma de un lado a otro entre la energía eléctrica en el capacitor y la energía magnética en el inductor. Este fenómeno se llama oscilación electromagnética.

La energía total en el circuito LC en algún instante después de cerrar el interruptor es

$$U = U_C + U_L = \frac{1}{2}\left(\frac{Q^2}{C}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}LI^2\right)$$

El hecho de que U permanezca constante implica que

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2}LI^2\right) = \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} + LI\frac{dI}{dt} = 0$$

$$\frac{Q}{C} + L\frac{d^2Q}{dt^2} = 0,$$

donde $I = -\frac{dQ}{dt}$ (y $\frac{dI}{dt} = -\frac{d^2Q}{dt^2}$). Observe la convención de signos que hemos adoptado aquí. El signo negativo implica que la corriente I es igual a la tasa de disminución de carga en la placa del capacitor inmediatamente después de que se ha cerrado el interruptor.

La solución general a la ecuación es de forma armónica

$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$$

donde Q_0 es la amplitud de la carga, $\omega_0 t + \phi$ es la fase, y ϕ es la constante de fase. La frecuencia angular ω_0 está dada por

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

La corriente correspondiente en el inductor es

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = \omega_0 Q_0 \sin(\omega_0 t + \phi) = I_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$$

Aplicando las condiciones iniciales $Q(t=0) = Q_0$ y $I(t=0) = 0$, $\phi = 0$.

$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$I(t) = I_0 \sin(\omega_0 t)$$

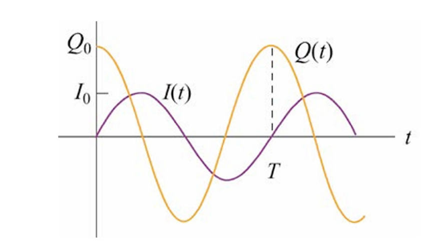
Las energías eléctrica y magnética pueden ser calculadas ahora como

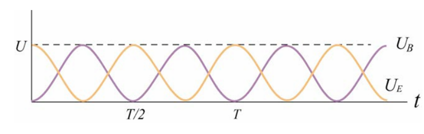
$$U_E = \frac{Q^2(t)}{2C} = \frac{Q_0^2}{2C}\cos^2(\omega_0 t)$$

$$U_B = \frac{1}{2}LI^2(t) = \frac{LI_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t) = L\left(-\omega_0 Q_0\right)^2 \frac{1}{2}\sin^2(\omega_0 t) = \frac{Q_0^2}{2C}\sin^2(\omega_0 t)$$

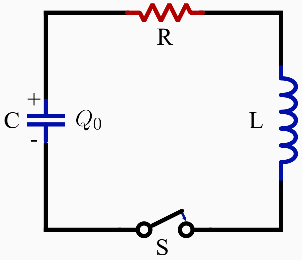
Se puede demostrar fácilmente que la energía total permanece constante:

$$U = U_E + U_B = \frac{Q_0^2}{2C}\cos^2(\omega_0 t) + \frac{Q_0^2}{2C}\sin^2(\omega_0 t) = \frac{Q_0^2}{2C}$$


Q_0
I_0
$I(t)$
$Q(t)$
t
T


U
U_B
U_E
t
$T/2$
T

Circuito serie RLC



Consideramos un circuito RLC donde el capacitor está inicialmente cargado a Q_0. Después de que se cierra el interruptor, comenzará a fluir corriente. Sin embargo, a diferencia del circuito LC, la energía se disipará a través del resistor. La tasa a la cual se disipa la energía es

$$\frac{dU}{dt} = -I^2 R$$

donde el signo negativo en el lado derecho implica que la energía total está disminuyendo. Sustituyendo como el análisis realizado para el circuito LC, se obtiene

$$\frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} + LI\frac{dI}{dt} = -I^2 R$$

Nuevamente, por nuestra convención de signos donde la corriente es igual a la tasa de disminución de carga en las placas del capacitor, $I = -\frac{dQ}{dt}$. Dividiendo ambos lados por I, la ecuación anterior se puede reescribir como

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

Si R es pequeño (el caso subamortiguado), se puede verificar fácilmente que una solución a la ecuación anterior es

$$Q(t) = Q_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \phi)$$

donde el factor de amortiguamiento y la frecuencia angular de las oscilaciones amortiguadas es

$$\gamma = \frac{R}{2L} \qquad \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

- Las constantes Q_0 y ϕ son cantidades reales que se determinarán a partir de las condiciones iniciales.
- Si, $R = 0$,K recuperamos la frecuencia angular natural no amortiguada $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.
- Hay tres escenarios posibles:
  - Oscilaciones subamortiguadas, Sobreamortiguación y Amortiguación crítica

El análogo mecánico del circuito RLC en serie es el sistema oscilador armónico amortiguado. La ecuación de movimiento para este sistema está dada por

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

donde el término dependiente de la velocidad tiene en cuenta la fuerza no conservativa y disipativa

$$F = -b\frac{dx}{dt}$$

siendo b el coeficiente de amortiguamiento. La correspondencia entre el circuito RLC y el sistema mecánico.

Resumen

1. **Inductancia Mutua**: Cuando dos bobinas están cerca una de la otra, un cambio en la corriente de una bobina induce un voltaje en la otra.

$$M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1}$$

2. **Autoinducción**: Es la capacidad de una bobina para inducir un voltaje en sí misma cuando una corriente que la atraviesa cambia con el tiempo.

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$$

donde L es la inductancia propia de la bobina.

3. La energía magnética almacenada en el inductor es

$$U_B = \frac{1}{2}LI^2$$

4. La densidad de energía magnética, o la energía por unidad de volumen del campo magnético, se da por

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Referencia

Referencia

Freedman, Young, y S. Zemansky. 2009. «30 INDUCTANCIA. 30.1 Inductancia Mutua 30.2Autoinductancia e Inductores 30.3 Energía Del Campo Magnético 30.4Circuito R-L 30.5Circuito L-C 30.6Circuito L-R-Cen Serie». En *Física Universitaria*.

Serway, Raymond A., y John W. Jewett. 2005. «32 Inductancia. 32.1 Autoinducción e Inductancia 32.2 Circuitos RL 32.3 Energía En Un Campo Magnético 32.4 Inductancia Mutua 32.5 Oscilaciones En Un Circuito LC 32.6 Circuito RLC». En *Física Para Ciencias e Ingeniería Con Física Moderna*, 7ma ed. Vol. 2. CENGAGE learning.