PEP 2

Electromagnetismo I - Ingeniería Física

Pregunta 1 - Circuito DC

En la Figura 1 se muestra un arreglo de resistencia, tipo puente, conectadas a una fuente ideal ε. En los puntos e y g se ha conectado un capacitor de valor C.

En t=0 el switch SW ha pasado de 0 a 1, cerrando el circuito. Considerando que el circuito se encuentra en **estado estacionario** ($t \to \infty$), determine:

a. Las diferencias de potencial eléctrico entre los puntos: ab, bc, cd, de, eg, dg, fh y ha. (0.3 pts.)
b. Las corrientes I en cada resistencia. (0.5 pts.)
c. La resistencia equivalente R_{eq} del circuito y su corriente I. (0.5 pts.)

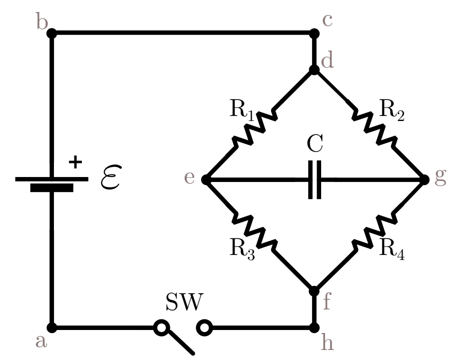

Figura 1

Para los siguientes puntos, considere los valores $R_1 = R_2 = R_3 = 1\ \Omega$ $\varepsilon = 12$, V $C = 1$ F y $R_4 = 5\ \Omega$. Desde el estado estacionario anterior, el switch SW es cambiado de 1 a 0. Encuentre:

d. La nueva resistencia equivalente R'_{eq} del circuito. (0.5 pts.)
e. La corriente en función del tiempo $I_C(t)$ sobre el capacitor y su gráfico. (0.5 pts.)
f. El voltaje sobre el capacitor $V_C(t)$ en función del tiempo y su gráfico. (0.5 pts.)
g. Para los dos casos del circuito estudiados, ¿qué ocurre si todas las resistencias son iguales a R? Justifique su respuesta. (0.2 pts.)

R.1.c (0.5 pts total)

Si ha pasado suficiente tiempo para que el capacitor se encuentre completamente cargado, no existe diferencia de potencial en los puntos eg y, por lo tanto, el capacitor no interviene en el análisis. El circuito puede ser simplificado reconociendo que las resistencias estan conectadas en series y paralelo.

La resistencia R_1 se encuentra en serie con la resistencia R_3, mientras que la resistencia R_2 se encuentra en serie con la resistencia R_4 (Figura 2).

$$R_{13} = R_1 + R_3$$

$$R_{24} = R_2 + R_4$$

(0.2 pts)

Las resistencias equivalentes R_{13} y R_{24} (Figura 3) se encuentran en paralelo, luego la resistencia equivalente del circuito es (Figura 4).

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{eq}} &= \frac{1}{R_{13}} + \frac{1}{R_{24}} \\ \frac{1}{R_{eq}} &= \frac{R_{13} + R_{24}}{R_{13}R_{24}} \\ R_{eq} &= \frac{R_{13}R_{24}}{R_{13} + R_{24}} \end{aligned} \tag{1}$$

(0.3 pts)

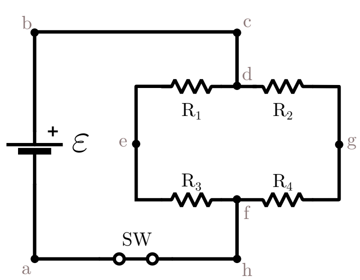

Figura 2

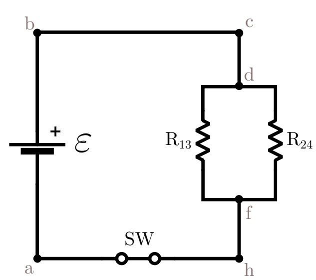

Figura 3

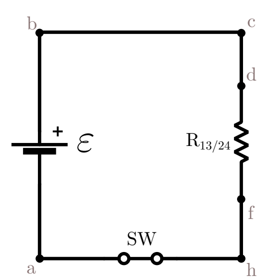

Figura 4

R.1.b (0.5 pts total)

Utilizando la resistencia equivalente Ecuación 1 la corriente total del circuito es calculada utilizando la ley de Ohm $V = IR$

$$I = \frac{V}{R} = \frac{\varepsilon}{R_{13/24}} = \varepsilon\frac{R_{13} + R_{24}}{R_{13}R_{24}} = \varepsilon\frac{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)} \tag{2}$$

(0.1 pts)

Del circuito equivalente de la Figura 2 se concluye que existen dos corrientes, I_1 y I_2, Utilinzando la ley de voltajes de Kirchhoff (LVK) se encuentran todas las corrientes del circuito

$$I = I_1 + I_2$$

LVK abcdefha

$$\begin{aligned} \sum V &= 0 \\ 0 &= \Delta V_{ab} + \Delta V_{bc} + \Delta V_{cd} + \Delta V_{de} + \Delta V_{ef} + \Delta V_{fh} + \Delta V_{ha} \end{aligned} \tag{3}$$

Las diferencias de pontecial eléctrico en los puntos bc, cd, fh y ha son **cables ideales** por lo que la diferencia de potencial es igual a cero:

$$\Delta V_{bc} = \Delta V_{cd} = \Delta V_{fh} = \Delta V_{ha} = 0 \tag{4}$$

Reemplazando en la Ecuación 3, la ecuación queda reducido a:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta V_{ab} + \Delta V_{de} + \Delta V_{ef} \\ 0 &= \varepsilon - I_1 R_1 - I_1 R_3 \\ I_1 &= \frac{\varepsilon}{R_1 + R_3} \end{aligned} \tag{5}$$

(0.2 pts)

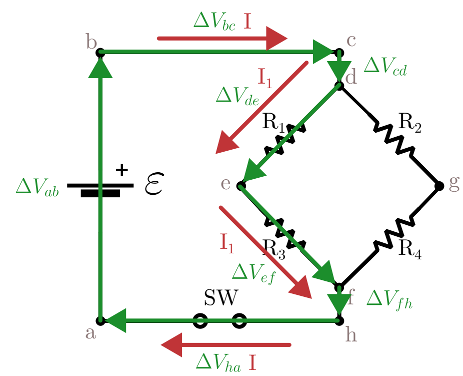

Figura 5

LVK abcdgfha

$$\begin{aligned} \sum V &= 0 \\ 0 &= \Delta V_{ab} + \Delta V_{bc} + \Delta V_{cd} + \Delta V_{dg} + \Delta V_{gf} + \Delta V_{fh} + \Delta V_{ha} \end{aligned} \tag{6}$$

Usando Ecuación 4, la Ecuación 6 se reduce a

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta V_{ab} + \Delta V_{dg} + \Delta V_{gf} \\ 0 &= \varepsilon - I_2 R_2 - I_2 R_4 \\ I_2 &= \frac{\varepsilon}{R_2 + R_4} \end{aligned} \tag{7}$$

(0.2 pts)

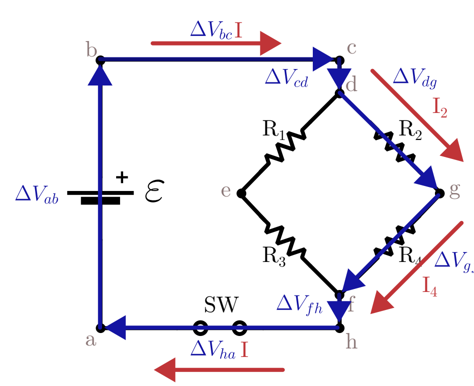

Figura 6

La corriente total del circuito I es

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 \\ &= \frac{\varepsilon}{R_1 + R_3} + \frac{\varepsilon}{R_2 + R_4} \\ &= \varepsilon \frac{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)} \end{aligned}$$

Lo cual concuerda con la Ecuación 2

R.1.a (0.3 pts total)

Directamente del circuito las siguientes diferencias de potencial eléctrico pueden ser determinadas:

$$\Delta V_{ab} = \varepsilon$$

$$V_{bc} = V_{cd} = V_{fh} = V_{ha}$$

Para encontrar los valores de V_{de}, V_{ef}, V_{dg} y V_{gf}, se requiere de las corrientes previamente encontradas del circuito.

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_3} \qquad I_2 = \frac{\varepsilon}{R_2 + R_4}$$

Aplicando directamente ley de Ohm se encuentran las diferencias de potencial eléctrico en cada resistencia:

$$V_{de} = I_1 R_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_3} R_1$$

$$V_{ef} = I_1 R_3 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_3} R_3$$

$$V_{dg} = I_2 R_2 = \frac{\varepsilon}{R_2 + R_4} R_2$$

$$V_{gf} = I_2 R_4 = \frac{\varepsilon}{R_2 + R_4} R_4$$

La diferencia de potencial entre eg se puede encontrar mediante LVK:

$$\begin{aligned} V_e &= \Delta V_{ab} + \Delta V_{de} \\ &= \varepsilon - I_1 R_1 \\ V_g &= \Delta V_{ab} + \Delta V_{dg} \\ &= \varepsilon - I_2 R_2 \\ \Delta V_{eg} &= V_g - V_e = \varepsilon + I_2 R_2 - \varepsilon + I_1 R_1 - \\ &= I_2 R_2 - I_1 R_1 \end{aligned}$$

R.1.d (0.5 total)

Las nuevas condiciones del circuito, pasando de un estado estacionaria con el capacitor totalmente cargado y abrimos el switch SW ($1 \to 0$), haciendo que la fuente quede fuera del circuito (Figura 7). Así, el circuito se encuentra alimentado por el capacitor C que será descargado a traves de las resistencias R_1, R_2, R_3 y R_4.

De la Figura 7 se observa que ahora la resistencia R_1 y R_2 se encuentran en serie al igual que las resistencias R_3 y R_4. Luego:

$$R_{12} = R_1 + R_2$$
$$R_{34} = R_3 + R_4$$

Finalmente, las resistencias equivalentes R_{12} y R_{34} se encuentran en paralelo, por lo que el valor de la resistencia equivalente del circuito es

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R_{12/34}} &= \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{34}} \\
\frac{1}{R_{12/34}} &= \frac{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \\
R_{12/34} &= \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{3}{2}\Omega
\end{aligned} \tag{8}$$

(0.5 pts)

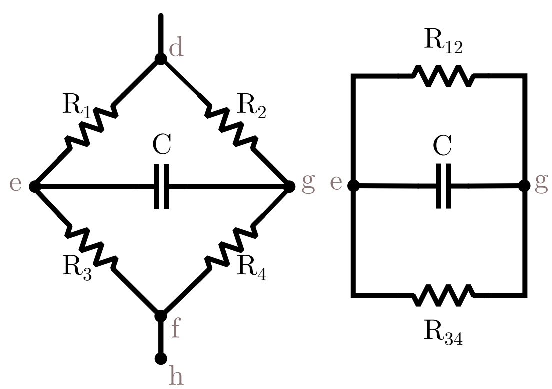

Figura 7

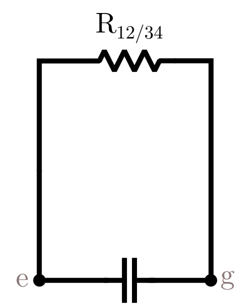

Figura 8

R.1.e (0.5 total)

Condiciones Iniciales

La corriente I_1 y I_2 han sido determinadas anteriormente, reemplazando sus valores encontramos

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{\varepsilon}{R_1 + R_3} = \frac{12}{1+1} = 6\text{A} \\
I_2 &= \frac{\varepsilon}{R_2 + R_4} = \frac{12}{1+5} = 2\text{A},
\end{aligned}$$

La diferencia de potencial inicial del capacitor se encuentra dada por ΔV_{eg}. Para encontrar el valor, se tiene que determinar el potencial en el punto e y el potencial en g

$$\begin{aligned} V_e &= \Delta V_{ab} + \Delta V_{de} \\ &= \varepsilon - I_1 R_1 = 12 - 6 \cdot 1 = 6\text{V} \\ V_g &= \Delta V_{ab} + \Delta V_{dg} \\ &= \varepsilon - I_2 R_2 = 12 - 2 \cdot 1 = 10\text{V} \\ \Delta V_{eg} &= V_g - V_e = 10 - 6 = 4\text{V} \end{aligned}$$

La diferencia de potencial eléctrico sobre el capacitor inicialmente es igual a 4V.

La carga inicial e intensidad de corriente inicial en el capacitor bajo descarga es

$$Q_0 = CV = 1 \cdot 4 = 4\text{C}$$

$$I_0 = \frac{Q_0}{RC} = \frac{4}{3/2} = \frac{8}{3}\text{A}$$

Ecuación

Del circuito equivalente de la Figura 8 de concluye que el problema es reducido a la descarga de un capacitor cargado:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{q}{C} - IR \qquad I = -\frac{dq}{dt} \\ 0 &= \frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} \\ \frac{dq}{q} &= -\frac{1}{RC}dt \\ \int_Q^q \frac{dq}{q} &= -\frac{1}{RC}\int_0^t dt \\ \ln\left(\frac{q}{Q}\right) &= -\frac{t}{RC} \\ q(t) &= Qe^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned} \tag{9}$$

(0.2 pts)

Derivando respecto al tiempo se encuentra la ecuación de la corriente:

$$I(t) = -\frac{dq}{dt} = -\frac{Q}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} = -I_0 e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{8}{3}e^{-\frac{2t}{3}}$$

(0.2 pts)

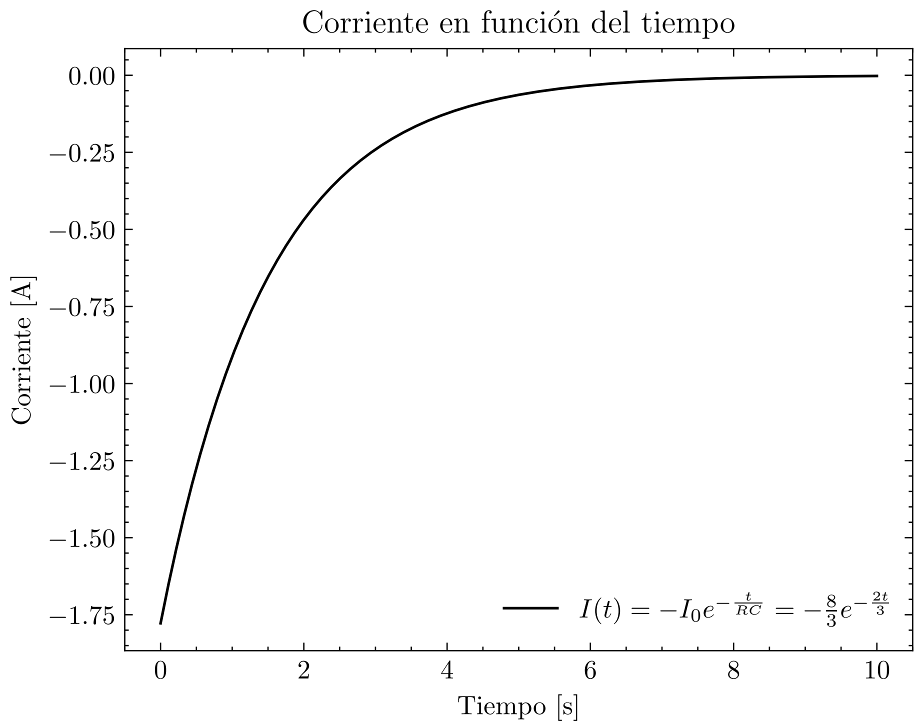

Figura 9

(0.1 pts)

R.1.f (0.5 total)

Ecuación y gráfica

Dividiendo la Ecuación 9 por la capacitancia C se encuentra la ecuación del voltaje en el capacitor:

$$\Delta V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{Q}{C}e^{-\frac{t}{RC}} = V_0 e^{-\frac{t}{RC}} = 4e^{-\frac{2t}{3}}$$

(0.4 pts)

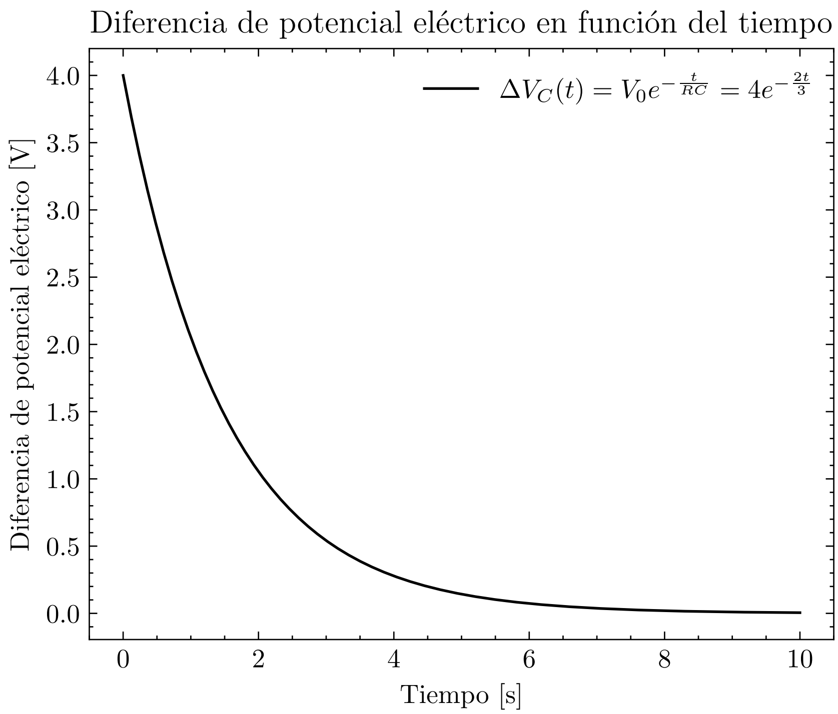

Figura 10

(0.1 pts)

R.1.g (0.2 total)

Si todas las resistencias son iguales $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$ entonces entre los puntos eg no existe diferencia de potencial en ninguno de los casos estudiados, el capacitor nunca es cargado ya que el puende de resistencias se encuentra en equilibrio.

Las corrientes I_1 y I_2 son iguales y por lo tanto:

$$I = 2I_1 = 2I_2$$

(0.2 pts)

Pregunta 2 - Potencial eléctrico y Capacitancias

Utilizando los datos del capacitor del problema anterior, diseñe un capacitor **de placas paralelas** que cumpla con el requirimiento del circuito. Para ello:

a. Encuentre la ecuación para calcular la diferencia de potencial eléctrica entre las dos placas de área A y distancia d. (1.5 pts.)

b. Demuestre, utilizando los resultados del punto a), que la capacitancia del capacitor es $C = \epsilon_0 A/d$. (1 pts.)
c. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del capacitor para cumplir con el circuito de la Figura 1? (0.5 pt)

R.2.a (1.5 pts)

La diferencia de potencial del capacitor se encuentra dada por la ecuación

$$\Delta V = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

(0.5 pts)

El campo eléctrico dentro del capacitor, utilizando ley de Gauss es

$$\begin{aligned} \iint \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} \\ EA &= \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \\ E &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

(0.5 pts)

La diferencia de potencial entra placas paralelas es

$$\begin{aligned} \Delta V &= -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= -\int_{-d/2}^{d/2} \frac{\sigma}{\epsilon_0}(-\hat{j}) \cdot d\vec{l}\hat{j} \\ &= \frac{\sigma d}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

(0.5 pts)

R.2.b (1 pts)

La capacitancia del capacitor de placas paralelas es

$$\begin{aligned} C &= \frac{Q}{|\Delta V|} \qquad \sigma = \frac{Q}{A} \\ &= \frac{\sigma A}{\frac{\sigma d}{\epsilon_0}} \\ &= \frac{\epsilon_0 A}{d} \end{aligned} \tag{10}$$

La capacitacia del condensador de placas paralelas **solo depende** de las dimensiones del capacitor.

(1.0 pts)

R.2.c (0.5 pts)

Una valor típico entre las placas paralelas es de $d = 1\ \mu m$. Luego el área que tiene que tener las placas del capacitor es

$$1\ F = \frac{\epsilon_0 A}{1 \mu m}$$
$$A = \frac{1 \cdot 10^{-6}}{8.85 \cdot 10^{-12}}\ m^2$$
$$A = 112994.35\ m^2 \text{ !!!}$$

(0.5 pts)

Una forma más general es escribiendo la relación entre la distancia y el área de la placa

$$A(d) = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot d$$

En la Figura 11 se muestra la relación entre la distancia y el área de la placa para obtener una capacitancia de 1 F.

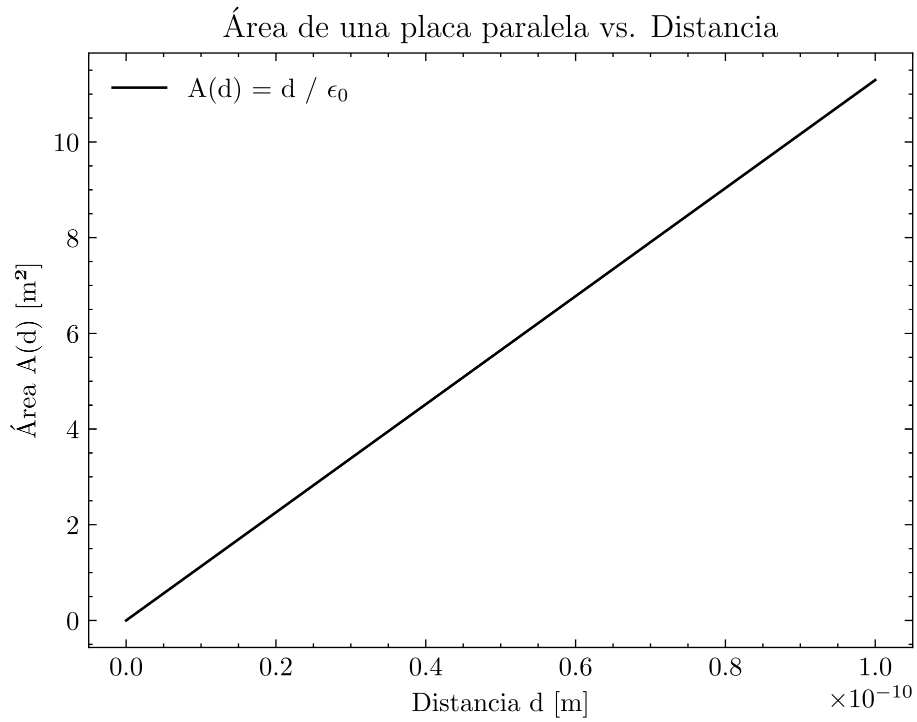

Figura 11: Distancia vs. A(d) para un capacitor de placas paralelas.