Electromagnetismo I

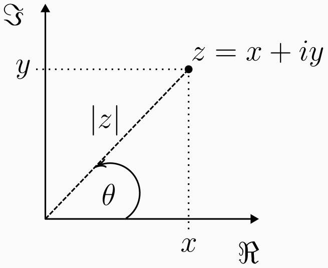
S18 - Circuitos AC

Josue Meneses Díaz

Universidad de Santiago de Chile

Notación compleja

Utilizar números complejos para resolver circuitos de CA hace que la resolución de circuitos de CA sea mucho más simple. Haremos una introducción a los números complejos para sentar las herramientas necesarias para abordar los problemas de circuitos en corriente alterna.



Comenzaremos representando los números complejos en su forma más simple:

$$z = x + iy$$

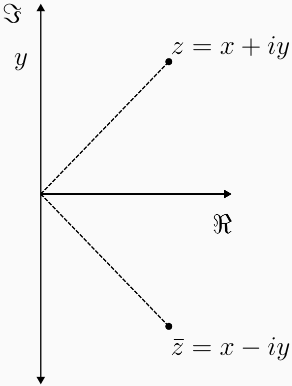
donde i se define $\sqrt{-1}$.
Definimos $\Re(z) = x$ como la parte real de z y $\Im(z) = y$ como la parte imaginaria de z.

Representamos un número complejo en el plano donde tenemos x e y donde dibujamos ángulo θ en el plano complejo el modulo de z como la longitud de la línea mostrada

- El módulo de z es $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- El ángulo de z es $\theta = \arctan(y/x)$

Podemos escribir z en terminos de θ y $|z|$ como

$$z = x + iy = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$



Otra forma de definir el módulo es por medio del **número complejo conjugado**. Definamos el número complejo conjugado $\bar{z}$ como

$$\bar{z} = x - iy$$

Entonces

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (x+iy)(x-iy) \\ &= x^2 - ixy + ixy - i^2y^2 \\ &= x^2 + y^2 \\ &= |z|^2 \end{aligned}$$

Inverso de un número complejo

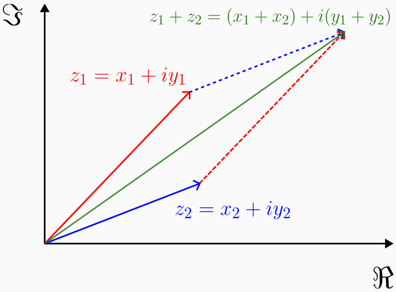
Definimos el inverso de un número complejo $\frac{1}{z}$ como

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1} &= \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} \\
&= \frac{1 \cdot \bar{z}}{|z|^2} \\
&= \frac{1}{z} \cdot \frac{x - iy}{x - iy} \\
&= \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \\
&= a + ib
\end{aligned}$$

donde

$$a = \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad \text{y} \qquad b = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

Suma de números complejos



Sean dos números complejo $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$. La suma de ambos números es

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)$$
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

Por lo tanto, la suma de números complejos la podemos representar como suma de vectores en el plano complejo.

Así que cuando hacemos la suma de vectores $z_1 + z_2$, vemos que su componente x es $x_1 + x_2$. Y el componente imaginario y es $y_1 + y_2$. Así que vemos que cuando tenemos esta representación de números complejos en el plano, podemos pensar en ello casi como vectores que se suman en el plano para obtener la suma vectorial de dos números complejos.

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\
&= x_1 x_2 + ix_1 y_2 + iy_1 x_2 + iy_1 iy_2
\end{aligned}
$$

Notar que $iy_1 iy_2 = i^2 y_1 y_2$ y como i^2 es -1

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= x_1 x_2 + ix_1 y_2 + iy_1 x_2 + iy_1 iy_2 \\
&= x_1 x_2 + ix_1 y_2 + iy_1 x_2 + -y_1 y_2 \\
&= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(y_1 x_2 + x_1 y_2) \\
&= a + ib
\end{aligned}
$$

Donde el modulo es $\sqrt{a^2 + b^2}$ y el ángulo $\arctan(b/a)$

Fórmula de Euler para números complejos

La fórmula de Euler para los números complejos $e^{i\theta}$ es

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Para demostrarla, hacemos la expansión en series de Taylor de $e^{i\theta}$

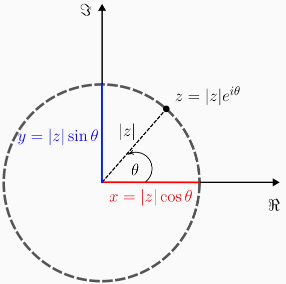
$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \cdots \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{i\theta^3}{3!} - \cdots \end{aligned}$$

Recordando que i^2 es -1

$$e^{i\theta} = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{i\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{i\theta^4}{4!} + \cdots = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Notar que el modulo de $e^{i\theta}$ es $\sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = 1$. Así que es un número complejo de longitud unitaria.

Para representar la fórmula de Euler en el plano tenemos y, x y como $e^{i\theta}$ tiene longitud 1, falta encontrar el ángulo θ.



Podemos las componentes de z en función del módulo de z como

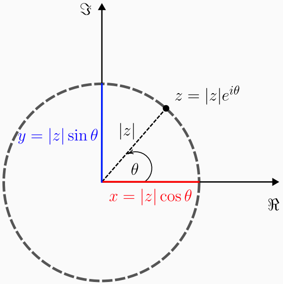
$$x = |z|\cos(\theta) \qquad y = |z|\sin(\theta)$$

Para el caso de $|z| = 1$ tenemos es un **círculo unitario en el plano complejo**, dependiendo del ángulo θ, nuestro número complejo z puede estar en cualquier lugar de este plano, cuando restringimos θ entre 0 y 2π.

Notar que

- Cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Entonces $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$,
- Si $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

Desde ahora, cuando nos refiramos a θ, lo llamamos la **fase**.

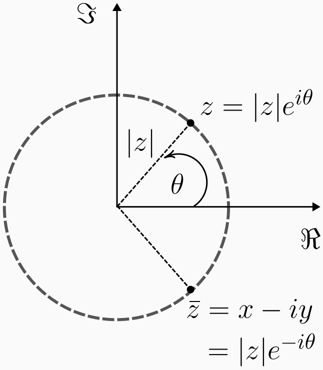


Ahora escribiremos un número complejo arbitrario z en términos de un módulo y una fase utilizando la fórmula de Euler. Si $|e^{i\theta}| = 1$ entonces podemos escribir un número complejo cualquiera multiplicando por el módulo como

$$z = x + iy = |z|\cos(\theta) + i|z|\sin(\theta) = |z|e^{i\theta}$$

donde $|z|$ es el módulo del número complejo y θ es la fase.

Ahora, con esta notación, podemos hacer las cosas muy simples. Así que empecemos a ver eso con el conjugado.



$$\bar{z} = |z|e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta) = x - iy$$

Lo que estamos haciendo es, efectivamente, cambiar el i por $-i$. Veamos qué sucede cuando tomamos el inverso de un número complejo.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|e^{i\theta}} = \frac{1}{|z|e^{i\theta}}\frac{e^{-i\theta}}{e^{-i\theta}}$$
$$= \frac{e^{-i\theta}}{|z|}$$

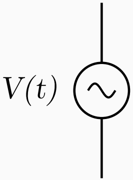
Así el inverso hace dos cosas: La fase pasa de $+\theta$ a $-\theta$ y el radio del círculo cambia de $|z|$ a $1/|z|$.

Circuitos Corriente alterna (AC)

Comenzaremos a explorar circuitos impulsados por corriente alterna (CA). En lugar de tener una batería con un voltaje constante, ε, como hemos utilizado anteriormente, impulsaremos circuitos con una fuente de energía que tiene un voltaje, $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$. Esto producirá una corriente que también es de naturaleza sinusoidal, una corriente alterna.

Fuente de voltaje alterna

Los circuitos de corriente alterna (CA) son impulsados con una fuente de voltaje que oscila en el tiempo. Lo que queremos es encontrar el comportamiento de los elementos que ya hemos visto en el curso, R, L y C, cuando son sometidos a variaciones periodicas de la fuente de voltaje.



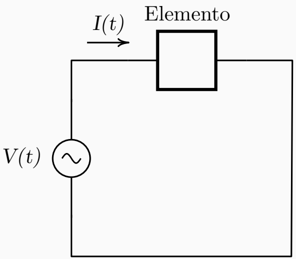
Comenzaremos describiendo algunas funciones para la fuente de voltaje alterna. Escribiremos nuestra fuente de voltaje como una función del tiempo como

$$V(t) = V_0 \cos(\omega_0 t)$$

donde ω es la frecuencia de excitación (frecuencia angular).

Definición de impedancia Z

Supongamos el siguiente circuito donde la “caja” podría ser una resistencia, un inductor, un capacitor, o cualquier combinación de esos en serie o en paralelo. Queremos obtener esa respuesta de corriente.



Escribimos la fuente y la corriente del sistema como

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t) \qquad I(t) = I_0 \cos(\omega t - \phi)$$

Usando notación compleja junto con la formula de Euler $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$ reescribimos el voltaje y la corriente complejo como:

$$Vc(t) = V_0 e^{i\omega t}$$

$$Ic(t) = I_0 e^{i(\omega t - \phi)} = I_0 e^{i\omega t} e^{-i\phi}$$

Cuando escribimos esto como un número complejo, lo que estamos tomando es la parte real de la función compleja

$$
\begin{aligned}
\Re(Vc(t)) &= \Re(V_0 \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) \\
&= V_0 \cos(\omega t) \\
\Im(Vc(t)) &= V_0 \sin(\omega t)
\end{aligned}
$$

Notar que el voltaje se relaciona con la corriente mediante

$$V(t) = ZI(t)$$

donde la cantidad Z la llamaremos **impedancia**.

$$Z = x + iy = |Z|e^{i\delta}$$

x es conocida como la **parte resistiva** o real de la impedancia e y es la **parte reactiva** o imaginaria de la impedancia.

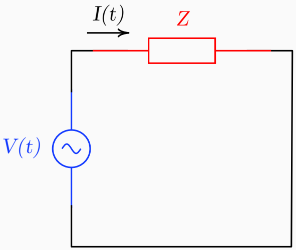
Notar que si conocemos Z, entonces

$$V_0 e^{i\omega t} = |Z|e^{i\delta} I_0 e^{i(\omega t - \phi)}$$
$$V_0 = |Z| I_0 e^{i\delta} e^{-\phi} = |Z| I_0 e^{i\delta - \phi}$$

Como V_0 es real entonces $e^{i\delta-\phi} = 1$, luego $\delta = \phi$ y

$$I_0 = \frac{V_0}{|Z|}$$

En resumen, utilizaremos tanto para el análisis de R, C, y L:



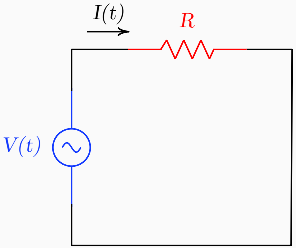
$$V = ZI$$

$$Z = |Z|e^{i\delta}$$

$$V_0 e^{i\omega t} = |z| e^{i\delta} I_0 e^{i\omega t} e^{-i\phi}$$

$$|Z| = \frac{V_0}{I_0}$$

$$\delta = \phi$$



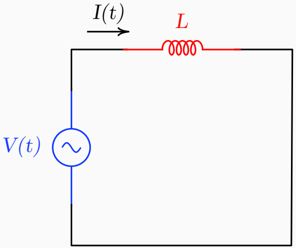
Definimos el primer ejemplo simple, con un resistor puro R, entonces

$$V = RI$$
$$V_0 e^{i\omega t} = RI_0 e^{i\omega t} e^{-i\phi}$$
$$V_0 = RI_0 e^{-i\phi}$$
$$\phi = \delta = 0$$

Como R es un número real, entonces V y I tiene que ser reales con fase igual a cero. Las amplitudes

$$R = \frac{V_0}{I_0} = |Z|$$

Y así vemos que la impedancia es un número real puro, R.



$$V(t) = L\frac{dI}{dt}$$

$$V_0 e^{i\omega t} = L\frac{d}{dt} I_0 e^{-i\phi} e^{i\omega t} = L I_0 i\omega e^{-i\phi} e^{i\omega t}$$

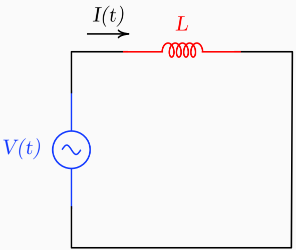
$$V_0 = L I_0 i\omega e^{-i\phi}$$

Como V_0 es real, la derecha también debe serlo.

$$V_0 = L I_0 i\omega e^{-i\phi}$$

$$V_0 = L I_0 e^{i\pi/2}\omega e^{-i\phi}$$

$$V_0 = L I_0 \omega e^{i(\pi/2-\phi)} \Rightarrow \phi = \pi/2$$



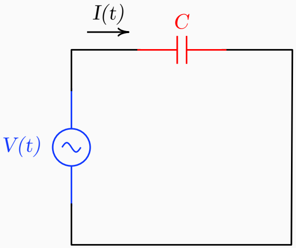
Con lo que la impedancia es

$$|Z| = \frac{V_0}{I_0} = \omega L$$

$$Z_L = |Z|e^{i\delta} = \omega L e^{i\pi/2} = i\omega L$$

La impedancia de un inductor es puramente imaginario llamada **reactancia inductiva**:

$$X_L = \omega L$$



$$V = \frac{Q}{C}$$

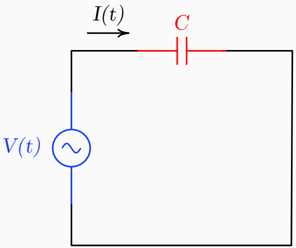
Consideramos que el capacitor se está cargando

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} = \frac{I}{C}$$

$$i\omega V_0 e^{i\omega t} = \frac{1}{C} I_0 e^{-i\phi} e^{i\omega t}$$

$$i\omega V_0 = \frac{I_0}{C} e^{-i\phi}$$



Hacemos nuevamente que los dos lados de estas ecuaciones sean iguales:

$$e^{i\frac{\pi}{2}}\omega V_0 = \frac{I_0}{C}e^{-i\phi}$$

$$\phi = -\frac{\pi}{2} = \delta$$

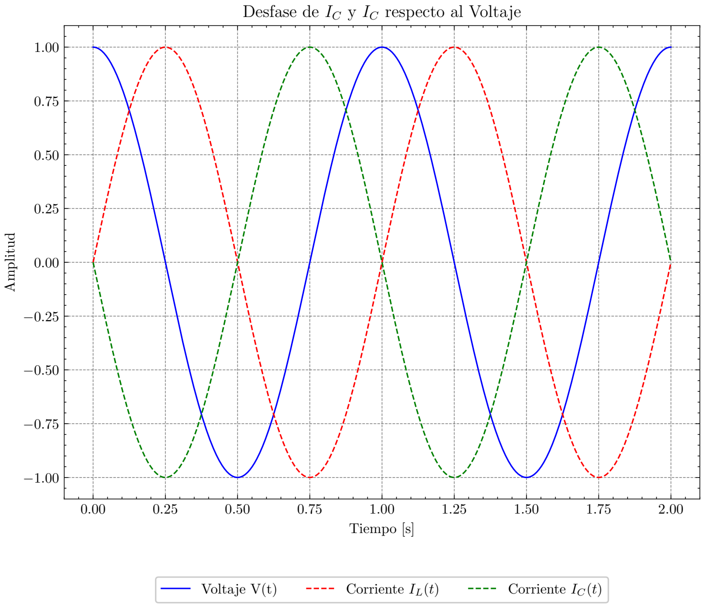
$$|Z| = \frac{V_0}{I_0} = \frac{1}{\omega C}$$

y la impedancia para el capacitor es

$$Z_C = |Z_C|e^{i\delta} = \frac{1}{\omega C}e^{-i\pi/2} = \frac{-i}{\omega C}$$

La impedancia para un capacitor puro es un número puramente imaginario llamada **reactancia capacitiva**:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$


Desfase de I_C y I_C respecto al Voltaje
Amplitud
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00
Tiempo [s]
Voltaje V(t)
Corriente $I_L(t)$
Corriente $I_C(t)$

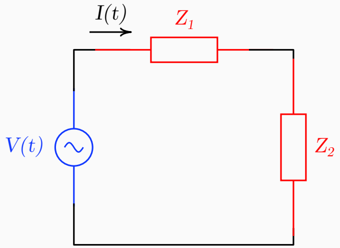
Resumen de impedancia

	$\lvert z \rvert$	δ	z
R 	R	0	R
L 	ωL	$\pi/2$	$\omega L e^{i\pi/2} = i\omega L$
C 	$\frac{1}{\omega C}$	$-\pi/2$	$\frac{1}{\omega C} e^{-i\pi/2} = \frac{-i}{\omega C}$

Impedancia en serie

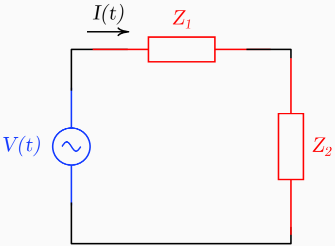
Impedancia en serie

Supongamos dos impedanciass Z_1 y Z_2 y queremos encontrar la $I(t)$ en el circuito dada la fuente $V(t)$, oscilante.



Como los voltajes se suman en serie por la LVK.

$$V(t) = Z_1 I(t) + Z_2 I(t)$$
$$V(t) = (Z_1 + Z_2) I(t)$$
$$V(t) = Z_{\text{eq}} I(t)$$



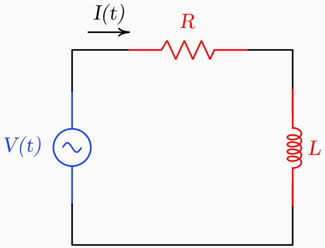
Si conocemos $Z_{\text{eq}} = |Z_{\text{eq}}|e^{i\delta}$, podemos encontrar entonces I y V.

$$V_0 e^{i\omega t} = |Z_{\text{eq}}| e^{i\delta} I_0 e^{i\omega t} e^{-i\phi}$$

$$V_0 = |Z_{\text{eq}}| I_0 e^{i\delta} e^{-i\phi} \Rightarrow \delta = \phi$$

$$V_0 = |Z_{\text{eq}}| I_0 \qquad I_0 = \frac{V_0}{|Z_{\text{eq}}|}$$

Impedancia RL en serie



La impedancia Z_{eq} es igual a la suma de la impedancia de R + L

$$Z_{\text{eq}} = Z_R + Z_L = R + i\omega L = x + iy = |Z_{\text{eq}}|e^{i\delta}$$

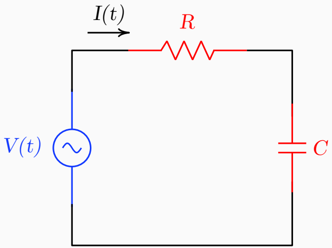
donde $|Z_{\text{eq}}| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ y $\delta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$

$$I_0 = \frac{V_0}{|Z|} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

Y la fase de la corriente ϕ es igual a

$$\delta = \phi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

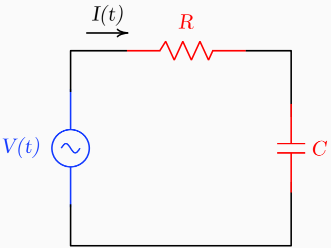
Notar que si tomamos $\lim_{R\to 0} I_0 = \frac{V_0}{\omega L}, \qquad \phi = \pi/2,$ recuperamos el resultados para el inductor puro.



La impedancia Z_{eq} es igual a la suma de la impedancia de R + C

$$Z_{\text{eq}} = Z_R + Z_C = R - \frac{i}{\omega C}$$

$$|Z_{\text{eq}}| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad \delta = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\omega C}\right)$$



$$I_0 = \frac{V_0}{|Z_{\text{eq}}|} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Como el voltaje y la corriente son

$$V(t) = V_0 e^{i\omega t} \qquad I(t) = I_0 e^{-i\phi} e^{i\omega t}$$

$$\begin{aligned} V &= Z_{\text{eq}} I \\ V_0 e^{i\omega t} &= |Z_{\text{eq}}| e^{i\delta} I_0 e^{-i\phi} e^{i\omega t} \\ V_0 &= |Z_{\text{eq}}| e^{i\delta} I_0 e^{-i\phi} \end{aligned}$$

Recordemos que $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$.

$$\phi = \delta = \arctan\left(-\frac{1}{\omega RC}\right) \qquad -\pi/2 \leq \delta < 0$$

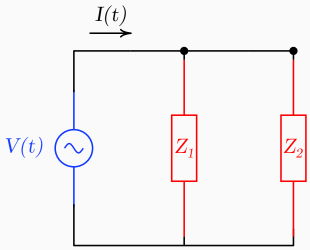
Notar que si ω se vuelve muy grande, el término del capacitor se vuelve cada vez menos importante hasta el límite cuando este término no hace ninguna contribución. Es solo $\frac{V_0}{R}$, una resistencia pura.

Impedancia en paralelo - Admitancia

Admitancia

Consideremos un caso donde tenemos elementos de circuito que no están en serie, sino que se suman en paralelo. Sabemos que la corriente se suma por conservación de la corriente.

Definimos **admitancia** como el inverso de la impedancia.



$$Y = \frac{1}{Z} \Rightarrow V = \frac{I}{Y} \Rightarrow I = VY \qquad [Y] = \frac{1}{\Omega}$$

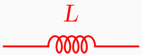
Del circuito

$$I = I_1 + I_2$$
$$Y_{\text{eq}} V = Y_1 V + Y_2 V$$
$$Y_{\text{eq}} = Y_1 + Y_2 \qquad \text{en paralelo}$$

Cuando tenemos elementos en serie, sumamos impedancias Z.

Cuando tenemos elementos en paralelo sumamos admitancias Y.

Resumen admitancia

	Z	$Y = \frac{1}{Z}$
	R	$\frac{1}{R}$
	$\omega L e^{i\pi/2} = i\omega L$	$\frac{1}{i\omega L} = -\frac{i}{\omega L}$
	$\frac{1}{\omega C} e^{-i\pi/2} = \frac{-i}{\omega C}$	$i\omega C$

Resumen

Resumen

Notación compleja

- Número complejo: $z = x + iy$
- Módulo: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Ángulo: $\theta = \arctan(y/x)$
- Forma polar: $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$
- Conjugado: $\bar{z} = x - iy$
- Fórmula de Euler: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

Circuitos de Corriente Alterna (AC)

- Fuente de voltaje alterna: $V(t) = V_0\cos(\omega_0 t)$
- Impedancia: $Z = x + iy = |Z|e^{i\delta}$
- Relación voltaje-corriente: $V(t) = ZI(t)$

Impedancias específicas

- Resistor: $Z_R = R$
- Inductor: $Z_L = i\omega L$
- Capacitor: $Z_C = \frac{-i}{\omega C}$

Impedancia en serie

- Impedancia equivalente: $Z_{\text{eq}} = Z_1 + Z_2$
- Circuito RL: $Z_{\text{eq}} = R + i\omega L$
- Circuito RC: $Z_{\text{eq}} = R - \frac{i}{\omega C}$

Admitancia

- Definición: $Y = \frac{1}{Z}$
- Relación corriente-voltaje: $I = VY$
- Admitancia equivalente en paralelo: $Y_{\text{eq}} = Y_1 + Y_2$

Reactancias

- Reactancia inductiva: $X_L = \omega L$
- Reactancia capacitiva: $X_C = \frac{1}{\omega C}$

Referencia

Referencia

Freedman, Young, y S. Zemansky. 2009. «31 CORRIENTE ALTERNA 31.1 Fasores y Corrientes Alternas 31.2 Resistencia y Reactancia». En *Física Universitaria*.

Reitz, John R. 2009. «Ch 13 Slowly Varying Currents». En *Foundations of Electromagnetic Theory*. Pearson Education India.

Serway, Raymond A., y John W. Jewett. 2005. «33 Circuitos de Corriente Alterna 33.1 Fuentes de CA 33.2 Resistores En Un Circuito de CA 33.3 Inductores En Un Circuito de CA 33.4 Capacitores En Un Circuito de CA». En *Física Para Ciencias e Ingeniería Con Física Moderna*, 7ma ed. Vol. 2. CENGAGE learning.