PEP 3

Electromagnetismo I - Ingeniería Física

Pregunta 1 - Ley de Biot-Savart

Considere el alambre formado por dos semi-circulos de radio R_1 y R_2 conectados en la dirección radial (Figura 1). Utilizando la ley de Biot-Savart, encuentre el campo magnético $\vec{B}$ en el punto P generado por la corriente I_0. (2.0 pts)

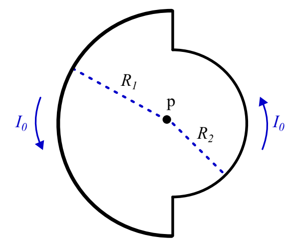

Figura 1: Esquema problema 1

R.1 (2.0 pts total)

Considere el diferencial de segmento $d\vec{s} = rd\theta\hat{\theta}$ mostrado en la Figura 2. Notar que $\hat{r}_{ds,p} = -\hat{r}$

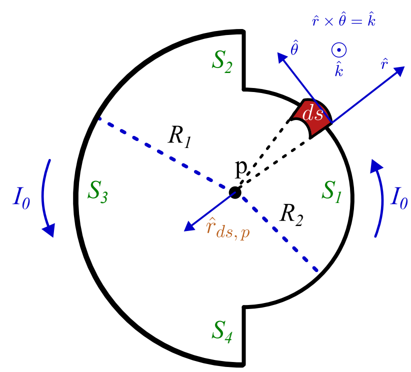

Figura 2: Vectores, segmentos y diferencial utilizados en el problema 1

(0.5 pts)

Utilizando la ley de Biot-Savart en el punto p, reconocemos 4 distintos segmentos, S_1, S_2, S_3 y S_4:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \oint \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_0 d\vec{s} \times \hat{r}_{ds,p}}{r_{ds,p}^2} \\ &= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi}\left[\int_{S_1}\frac{d\vec{s} \times \hat{r}_{ds,p}}{r_{ds,p}^2} + \int_{S_2}\frac{d\vec{s} \times \hat{r}_{ds,p}}{r_{ds,p}^2} + \int_{S_3}\frac{d\vec{s} \times \hat{r}_{ds,p}}{r_{ds,p}^2} + \int_{S_4}\frac{d\vec{s} \times \hat{r}_{ds,p}}{r_{ds,p}^2}\right]\end{aligned} \tag{1}$$

(0.5 pts)

Notar que en los segmentos S_2 y S_4 el producto cruz es igual a cero, por lo que estas integrales son nulas

$$d\vec{s} \times \hat{r}_{ds,p} = dr\hat{r} \times \hat{r} = 0$$

Así las integrales de la Ecuación 1 se simplifican a:

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi}\left[\int_{S_1} \frac{d\vec{s} \times \hat{r}_{ds,p}}{r^2_{ds,p}} + \int_{S_3} \frac{d\vec{s} \times \hat{r}_{ds,p}}{r^2_{ds,p}}\right] \\
&= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi}\left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{R_2\ d\theta\hat{\theta} \times (-\hat{r})}{R_2^2} + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{R_1\ d\theta\hat{\theta} \times (-\hat{r})}{R_1^2}\right] \\
&= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi}\left[\frac{\pi}{R_1} + \frac{\pi}{R_2}\right] = \frac{\mu_0 I_0}{4}\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right]
\end{aligned}$$

(1.0 pts)

El problema también puede ser resulto utilizando el principio de superpoción: El campo magnético total es la suma de cada uno de los campos por cadaalambres circulares y dividiendo la suma por la mitad(la mitad en S_1 y la otra mitad en S_3).

Pregunta 2 - Ley de Ampère

Un cable coaxial infinito está compuesto por dos conductores concéntricos (Figura 3). El conductor interno es un cilindro de radio R_1 que transporta una corriente uniforme I_0 a lo largo de su sección transversal. El conductor externo es una carcasa cilíndrica con un radio interno R_2 y un radio externo R_3, que también lleva una corriente I_0 distribuida uniformemente en su sección transversal, pero en dirección opuesta a la corriente del conductor interno. Calcular el campo magnético $\vec{B}$ como función de la distancia r desde el centro del cable. (3.0 pts)

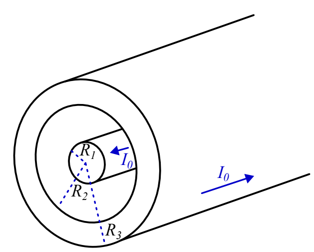

Figura 3: Esquema problema 2

R.2 (3.0 pts total)

En la Figura 4 se muestran las distintas rutas amperianas utilizadas para calcular el campo magnético. Se considera positivo las rutas según la regla de la mano derecha

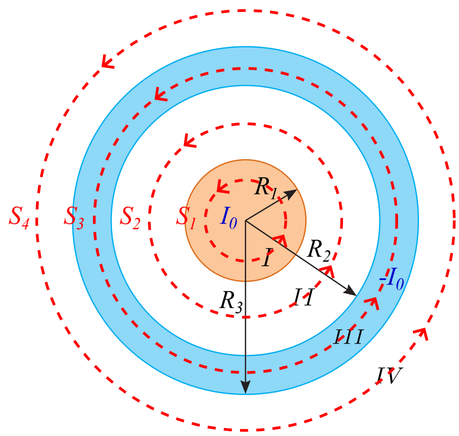

Figura 4

Región 1. $r < R_1$ **(0.75 pts)**

$$\oint_{S_1} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} = \mu_0 \iint \vec{J}\cdot\ d\vec{A}$$

$$\oint_{S_1} B\hat{r}\cdot dr\hat{\theta} = \mu_0 \iint J\hat{k}\cdot\ dA\hat{k}$$

$$B\ 2\pi r = \mu_0 J\pi r^2$$

$$B = \mu_0 J\frac{r}{2} \qquad r < R_1$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J r}{2}\hat{\theta} \equiv \frac{\mu_0 I_0 r}{2\pi R_1^2}\hat{\theta}$$

(0.75 pts)

Región 2. $R_1 < r < R_2$ **(0.75 pts)**

El campo magnético entre R_1 y R_2 es:

$$\oint_{S_2} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} = \mu_0 I_0$$

$$B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \qquad R_1 < r < R_2$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\hat{\theta}$$

(0.75 pts)

Región 3. $R_2 < r < R_3$ **(0.75 pts)**

La corriente encerrada es la corriente I_0 y una fracción del cascaron cilindrico externo:

$$\oint_{S_3} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$
$$\oint_{S_3} B\hat{r}\cdot dr\hat{\theta} = \mu_0\left[I_0 - \iint J'\hat{k}\cdot\ dA\hat{k}\right]$$
$$\oint_{S_3} B\hat{r}\cdot dr\hat{\theta} = \mu_0\left[I_0 - \int_0^{2\pi}\int_{R_2}^{r} J'\ r'dr'd\theta\right]$$
$$B\ 2\pi r = \mu_0\left[I_0 - J'\pi(r^2 - R_2^2)\right]$$
$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r}\left[I_0 - J'\pi(r^2 - R_2^2)\right]$$

Como $J' = I_0/[\pi(R_3^2 - R_2^2)]$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r}\left[I_0 - \frac{I_0\pi(r^2 - R_2^2)}{\pi(R_3^2 - R_2^2)}\right]$$
$$= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\left[1 - \frac{(r^2 - R_2^2)}{(R_3^2 - R_2^2)}\right]$$
$$= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\frac{(R_3^2 - r^2)}{(R_3^2 - R_2^2)} \qquad R_2 < r < R_3$$
$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\frac{(R_3^2 - r^2)}{(R_3^2 - R_2^2)}\hat{\theta} \qquad R_2 < r < R_3$$

(0.75 pts)

Región 4. $R_3 < r$ **(0.75 pts)**

Fuera del cable coaxial no hay campo magnético:

$$\oint_{S_4} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} = \mu_0[I_0 - I_0] = 0 \Rightarrow \vec{B} = \vec{0} \qquad R_2 < r$$

(0.75 pts)

R.3.a (0.5 pts total)

El campo magnético generado por un alambre de largo infinito está dado por:

$$B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}$$

(0.2 pts)

Usando Ley de Faraday:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Pregunta 3 - Ley de Faraday-Lenz

El alambre infinito conduce una corriente constante I_0. A una distancia d del alambre, una barra metálica de longitud L se mueve a velocidad constante $\vec{V}$ (Figura 5).

a) Calcule la fem inducida en la barra. (0.3 pts)
b) ¿En cuál punto, a o b, el potencial es mayor? (0.2 pts)

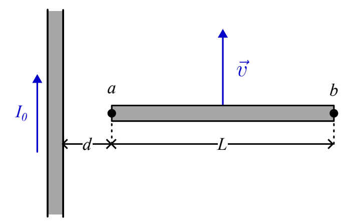

Figura 5: Esquema problema 3

Al flujo de campo magnético de la barra es:

$$\begin{aligned}\Phi_B &= \iint \vec{B}\cdot\vec{A} = \int_d^{d+L} \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} z dr \\ &= \frac{\mu_0 I_0 z}{2\pi}\ln(r)|_d^{d+L} = \frac{\mu_0 I_0 z}{2\pi}[\ln(d+L)-\ln(d)] \\ &= \frac{\mu_0 I_0 z}{2\pi}\ln\left(\frac{d+L}{d}\right) = \frac{\mu_0 I_0 z}{2\pi}\ln\left(1+\frac{L}{d}\right)\end{aligned}$$

donde z es la distancia que ha avanzado la barra en un intervalo de tiempo. Notar que:

$$v = \frac{dz}{dt}$$

Diferenciamos Φ_B con respecto al tiempo:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\mu_0 I_0 z}{2\pi}\ln\left(1+\frac{L}{d}\right)\right] = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\frac{dz}{dt}\ln\left(1+\frac{L}{d}\right) = \frac{\mu_0 I_0 v}{2\pi}\ln\left(1+\frac{L}{d}\right)$$

La fem inducida en la barra es:

$$\varepsilon = \Delta V_{ba} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I_0 v}{2\pi}\ln\left(1+\frac{L}{d}\right) \tag{2}$$

(0.3 pts)

Otra forma de encontrar la fem mediante el equilibrio de fuerzas sobre la barra. Como la velocidad v es constante:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}) = \vec{0} \\ &= E\hat{r} - vB\hat{r} = 0 \\ \Rightarrow E &= vB\end{aligned}$$

Utilizando la defición de diferencia de potencial eléctrico en los puntos a y b:

$$\begin{aligned}\Delta V_{ba} &= -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} \\ &= -\int_{a=d}^{b=d+L} vB\ dr = -v\int_{a=d}^{b=d+L}\frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}dr = -\frac{\mu_0 I_0 v}{2\pi}\ln\left(1+\frac{L}{d}\right)\end{aligned}$$

Obteniendo el mismo resultado que la Ecuación 2.

R.3.b (0.5 pts total)

Como ΔV_{ba} tiene un signo negativo, el punto a está a un potencial más alto que el punto b. La fuerza $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ sobre las cargas positiva en la barra está dirigida hacia a, por lo que a está a un potencial más alto.

La diferencia de potencial aumenta cuando I o v aumentan, o d disminuye. (0.5 pts)