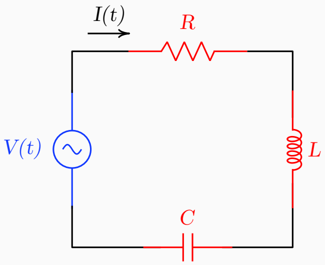
Electromagnetismo I

S19 - Circuito RLC, transformadores y filtros

Josue Meneses Díaz

Universidad de Santiago de Chile

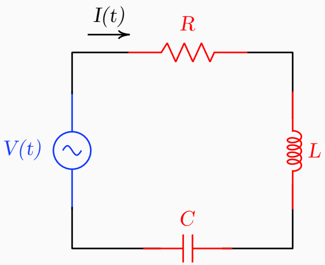
Circuito RLC en corriente Alterna



Analicemos el circuito RLC forzado. Lo primero que tenemos que hacer es encontrar la impedancia compleja

$$\begin{aligned} Z_{eq} &= Z_R + Z_L + Z_C \\ &= R + i\omega L + i\frac{1}{\omega C} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \end{aligned}$$

$$|Z_{eq}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad \sigma = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$



$$v = z_{\text{eq}} I$$

$$V_0 e^{i\omega t} = |Z_{eq}| e^{i\sigma} I_0 e^{i\omega t} e^{-i\phi}$$

$$I_0 = \frac{V_0}{|Z_{eq}|} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\delta = \phi = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

Vemos la simpleaz de usar la impedancia para la resolución del circuito. Vemos que no ha sido necesario resolver la ecuación diferencial del circuito (algo complicada)

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + IR = V(t) \qquad I = \frac{dQ}{dt}$$

De la ecuación de corriente

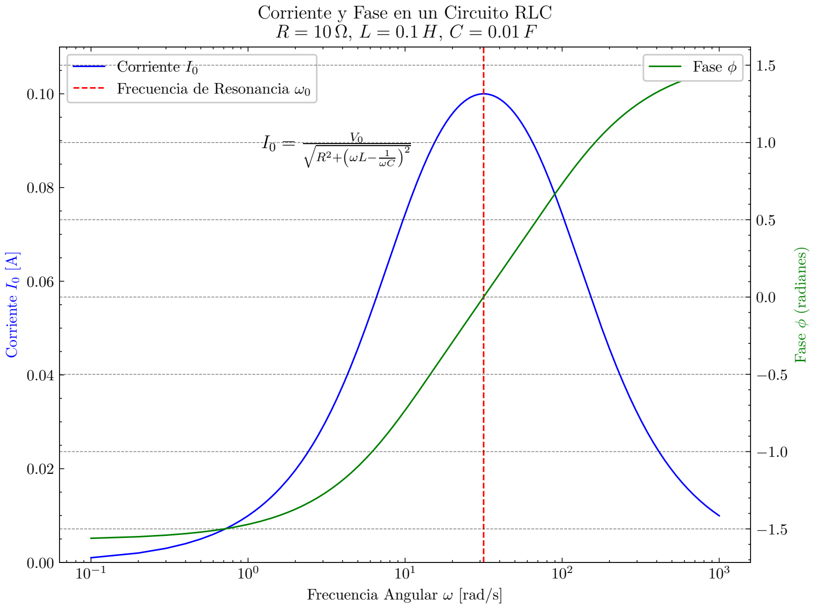
$$I_0 = \frac{V_0}{|Z_{eq}|} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Vemos que I_0 es máxima cuando la parte reactiva es igual a cero

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Cuando ω es igual a $\frac{1}{\sqrt{LC}}$, **la corriente tiene su valor máximo, y la fase es 0**. a esta frecuencia angular lo llamaremos **resonancia**.


Corriente y Fase en un Circuito RLC
$R = 10\,\Omega,\ L = 0.1\,H,\ C = 0.01\,F$
Corriente I_0
Frecuencia de Resonancia ω_0
Fase ϕ
$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$
Corriente I_0 [A]
Fase ϕ (radianes)
Frecuencia Angular ω [rad/s]
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}

Valor eficaz o RMS

El valor eficaz o RMS (Root Mean Square) es una medida estadística del tamaño de una cantidad variable, en este caso, de la corriente y el voltaje en un circuito de corriente alterna (AC). El valor RMS de una señal se define como el valor cuadrático medio, y se calcula de la siguiente manera:

$$X_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [x(t)]^2\, dt}$$

donde:

- X_{rms} es el valor eficaz o RMS de la señal.
- T es el periodo de la señal.
- $x(t)$ es la función que describe la señal en el dominio del tiempo.

Para una señal sinusoidal de voltaje o corriente, como $v(t) = V_{\text{pico}} \sin(\omega t)$ o $i(t) = I_{\text{pico}} \sin(\omega t)$, el valor RMS es más simple de calcular y resulta ser:

$$V_{\text{rms}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$$

$$I_{\text{rms}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

Donde:

- V_0 e I_0 son los valores pico de la señal de voltaje y corriente, respectivamente.
- V_{rms} e I_{rms} son los valores RMS de voltaje y corriente, respectivamente.

El valor RMS es crucial porque cuando hablamos de un voltaje de 110V en una toma de corriente doméstica, nos referimos al valor RMS. Este valor proporciona una medida equivalente a la energía disipada por una corriente continua de la misma magnitud.

Potencia instantanea

La potencia instantánea $p(t)$ en un circuito AC varía en magnitud y signo a lo largo del tiempo, dependiendo del desfase entre corriente $i(t)$ y voltaje $v(t)$. Por esto, la potencia media P_{media}, calculada como el promedio temporal de la potencia instantánea, es de mayor interés práctico:

$$P_{\text{media}} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t)\, dt$$

donde T es el periodo de la señal.

La potencia media en un resistor se puede calcular utilizando los valores RMS de corriente I_{rms} y voltaje V_{rms}:

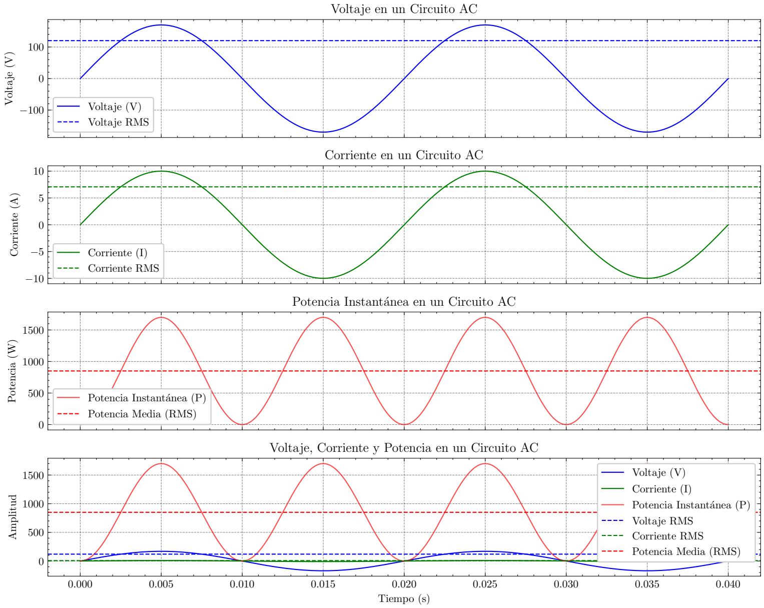
$$P_{\text{media}} = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos\phi$$

donde ϕ es el ángulo de fase entre el voltaje y la corriente.

El factor de potencia $\cos\phi$ mide la eficiencia con la que un circuito AC convierte la energía de entrada en trabajo útil, afectado por el desfase entre voltaje y corriente.

En inductores y capacitores, la potencia media es cero ya que absorben y liberan energía en diferentes partes del ciclo, lo que se describe matemáticamente por:

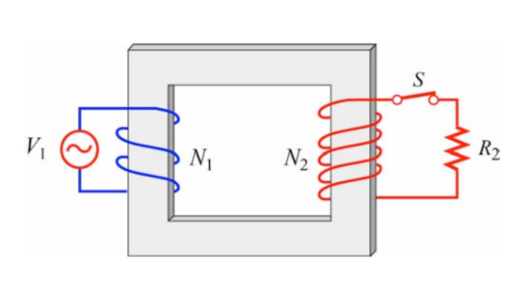
$$P_{\text{media}} = 0$$

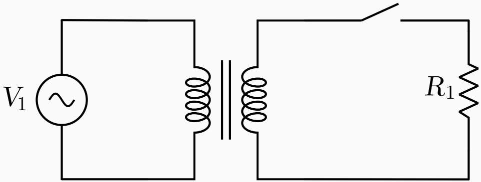


Voltaje en un Circuito AC
Voltaje (V)
100
0
−100
Voltaje (V)
Voltaje RMS
Corriente en un Circuito AC
Corriente (A)
10
5
0
−5
−10
Corriente (I)
Corriente RMS
Potencia Instantánea en un Circuito AC
Potencia (W)
1500
1000
500
0
Potencia Instantánea (P)
Potencia Media (RMS)
Voltaje, Corriente y Potencia en un Circuito AC
Amplitud
1500
1000
500
0
Voltaje (V)
Corriente (I)
Potencia Instantánea (P)
Voltaje RMS
Corriente RMS
Potencia Media (RMS)
0.000
0.005
0.010
0.015
0.020
0.025
0.030
0.035
0.040
Tiempo (s)

Transformadores

Un transformador es un dispositivo utilizado para aumentar o disminuir el voltaje de CA en un circuito. Típicamente consiste en dos bobinas de alambre, una primaria y una secundaria, enrolladas alrededor de un núcleo de hierro.





En la bobina 1, utilizando la ley de inducción de Faraday implica:

$$V_1 = -N_1 \frac{d\Phi_B}{dt}$$

donde Φ_B es el flujo magnético a través de una vuelta de la bobina primaria.

El núcleo de hierro, que se extiende desde las bobinas primaria a secundaria, sirve para aumentar el campo magnético producido por la corriente en la bobina primaria y asegura que casi todo el flujo magnético a través de la bobina primaria también pase a través de cada vuelta de la bobina secundaria. Así, el voltaje (o fuerza electromotriz inducida) a través de la bobina secundaria es:

$$V_2 = -N_2 \frac{d\Phi_B}{dt}$$

En el caso de un transformador ideal, la potencia suministrada por la bobina primaria se transfiere completamente a la bobina secundaria:

$$I_1 V_1 = I_2 V_2$$

El flujo Φ_B a través de cada vuelta es el mismo en ambas bobinas, primaria y secundaria. Combinando las dos expresiones, llegamos a la ecuación del transformador:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

Al combinar las dos ecuaciones anteriores, se puede obtener la transformación de corrientes en las dos bobinas como:

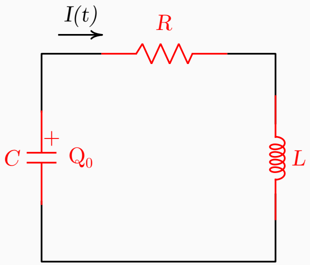
$$I_1 = \frac{V_2}{V_1} I_2 = \frac{N_2}{N_1} I_2$$

La relación entre el voltaje de salida y el voltaje de entrada está determinada por la relación de vueltas $\frac{N_2}{N_1}$.

- Si $\frac{N_2}{N_1} > 1$, entonces $\frac{V_2}{V_1} > 1$, lo que significa que el voltaje de salida en la bobina secundaria es mayor que el voltaje de entrada en la bobina primaria.
    - Un transformador con $\frac{N_2}{N_1} > 1$ se llama transformador elevador.
- Si $\frac{N_2}{N_1} < 1$, entonces $\frac{V_2}{V_1} < 1$, y el voltaje de salida es menor que el voltaje de entrada.
    - Un transformador con $\frac{N_2}{N_1} < 1$ se llama transformador reductor.

Ejercicios

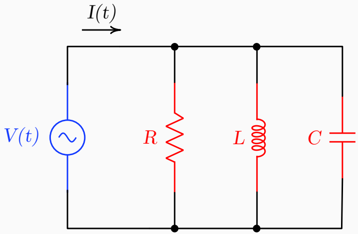
Ejemplo (RLC transitorio)
Utilizando la notación compleja, resolver el circuito RLC cuando el capacitor tiene una carga inicial Q_0



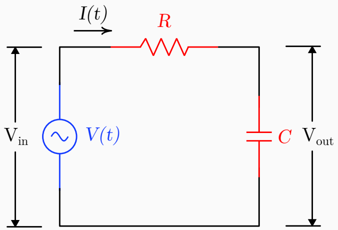
Ejemplo (RLC en paralelo)

Del siguiente circuito, encontrar:

- La admitancia equivalente - La corriente del circuito - La Corriente en cada elemento



Ejemplo (Filtro pasa bajo con RC)
En un circuito RC alterno, encontrar la relación entre el $V_{\text{out}}/V_{\text{in}}$. Grafique la relación en función de la frecuencia ω.



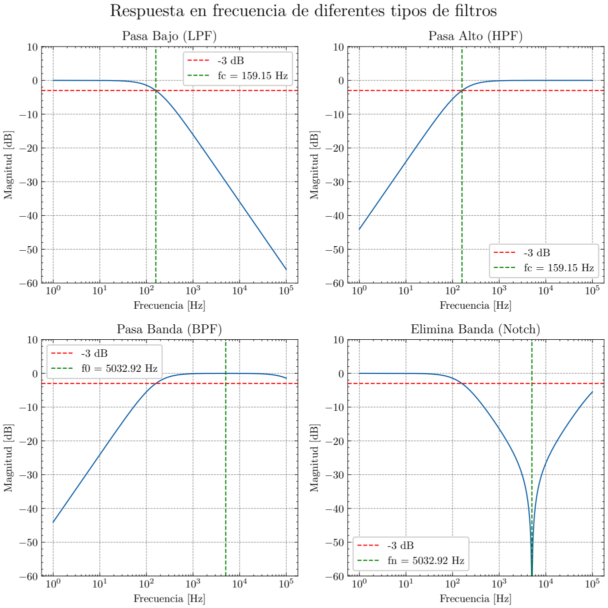
Filtros

Filtros

Un filtro electrónico es circuito que **discrimina** una determinada **frecuencia o gama de frecuencias** de una señal eléctrica que pasa a través de él, pudiendo **modificar tanto su amplitud como su fase**.

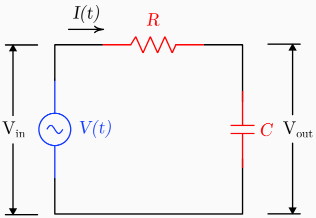
Los filtros pueden ser clasificados como:

- activos o pasivos.
- pasa alto (HPF),
- pasa bajo (LPF),
- pasa banda (BPF),
- elimina banda (notch-filter)
- pasa-todo


Respuesta en frecuencia de diferentes tipos de filtros
Pasa Bajo (LPF)
-3 dB
fc = 159.15 Hz
Pasa Alto (HPF)
-3 dB
fc = 159.15 Hz
Pasa Banda (BPF)
-3 dB
f0 = 5032.92 Hz
Elimina Banda (Notch)
-3 dB
fn = 5032.92 Hz
Magnitud [dB]
Frecuencia [Hz]

–>

Filtro RC



La impedancia equivalente es

$$
\begin{aligned}
Z_{eq} &= Z_R + Z_C \\
&= R - \frac{i}{\omega C}
\end{aligned}
$$

Donde la amplitud y la fase será

$$
|Z_{eq}| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad \beta = \arctan\left(\frac{1}{\omega c R}\right)
$$

Así la amplitud de la corriente esta dada por la ley de Ohm

$$
I_0 = \frac{V_0}{|Z_{eq}|} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}
$$

Filtro RC - Voltaje en el capacitor. Amplitud de la Función de transferencia

La amplitud de la función de transferencia puede ser encontrada con la ley de Ohm para alterna aplicada sobre el capacitor, así el voltaje complejo sobre el capacitor C de forma genérica es

$$V_c(t) = V_{out,0} e^{\omega t} e^{-i\beta} \qquad \text{Notar que} \qquad \Re(Vc(t)) = V_{out,0} \cos(\omega t - \beta)$$

$$V_{out,0} e^{i\omega t} e^{-i\beta} = Z_C I_0 e^{i\omega t} e^{-i\phi}$$

$$V_{out,0} = \frac{e^{-i\pi/2}}{\omega C} I_0 e^{-i\phi} e^{i\beta} = \frac{I_0}{\omega C} e^{-i\pi/2} e^{-i\phi} e^{i\beta}$$

$$V_{out,0} = \frac{I_0}{\omega C} e^{i(-\pi/2 - \phi + \beta)}$$

La función exponencial compleja tiene que ser igual a 1, por lo tanto los exponentes tienen que ser iguales a cero

$$-\pi/2 - \phi + \beta = 0 \Rightarrow \beta = \pi/2 + \phi$$

Las amplitudes son entonces

$$V_{out,0} = \frac{I_0}{\omega C} = \frac{\frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}}}{\omega C} = \frac{V_0}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$V_{out,0} = \frac{V_0}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}$$

Así, la amplitud de la la función de transferencia queda definida como

$$|H(\omega)| = \frac{V_{out,0}}{V_{in,0}} = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}$$

donde $V_{in,0} = V_0$.

- si $\omega \to \infty$ $H(\omega) \to 0$
- si $\omega \to 0$ $H(\omega) \to 1$

Por lo tanto, el voltaje en el capacitor se comporta como un **filtro pasa-bajo**

La **frecuencia de corte** se define como la frecuencia a la cual la potencia de salida de un circuito ha caído a la mitad de:

- La mitad de la potencia en la banda de paso.
- En términos de decibeles, como una caida de **punto de 3 dB**
- A una caida de $1/\sqrt{2} \approx 0.707$ de la tensión en la banda de paso.

Filtro RC pasa-bajo - Frecuencia de corte

La frecuencia de corte del filtro para el filtro es definida cuando $\frac{V_{out,0}}{V_{in,0}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (Notar que el valor de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ proviene el calculo del RMS para funciones sinusoidales).

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}$$

$$\sqrt{(\omega RC)^2 + 1} = \sqrt{2}$$

$$(\omega RC)^2 + 1 = 2$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{RC}} \qquad \text{ó} \qquad f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{RC}}$$

Filtro RC - Voltaje en la resistor. Amplitud de la Función de transferencia

$$V_{out,0}e^{i\omega t}e^{-i\beta} = Z_R I_0 e^{i\omega t}e^{-i\phi}$$
$$V_{out,0} = R I_0 e^{-i\phi}e^{i\beta}$$

La función exponencial compleja tiene que ser igual a 1, por lo tanto los exponentes tienen que ser iguales a cero

$$-\phi + \beta = 0$$
$$\beta = \phi$$

Las amplitud es

$$V_{out,0} = I_0 R$$

$$V_{out,0} = \frac{RV_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \frac{\omega C}{\omega C}$$

$$V_{out,0} = \frac{\omega RCV_0}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}$$

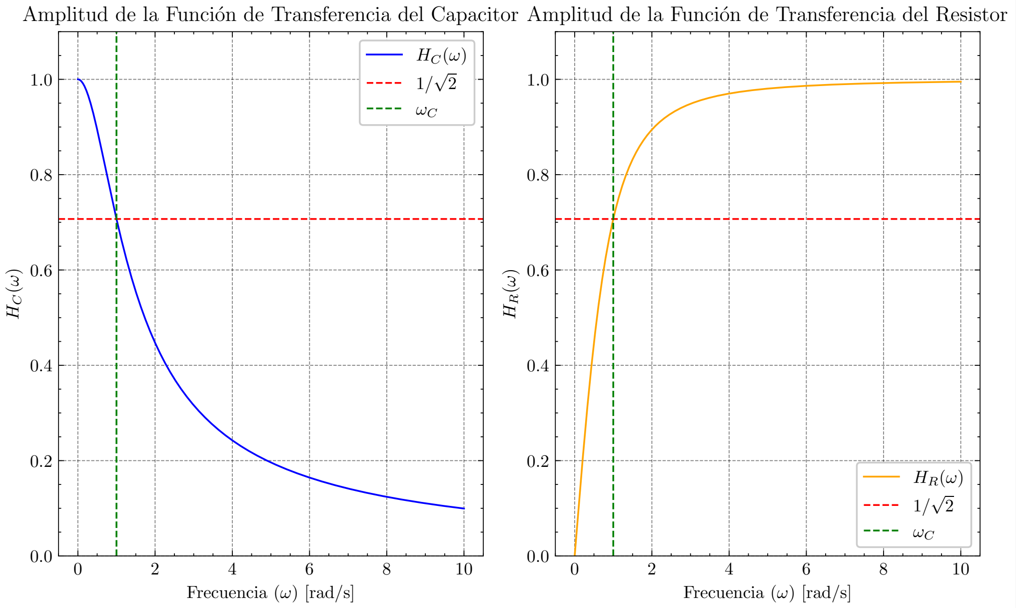
Así, la amplitud de la función de transferencia queda definida como

$$|H(\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}$$

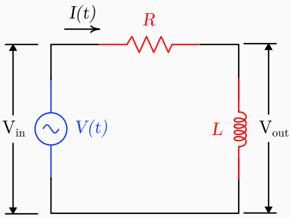
donde $V_{in,0} = V_0$.

- si $\omega \to \infty$ $H(\omega) \to 1$
- si $\omega \to 0$ $H(\omega) \to 0$

Por lo tanto, el voltaje en el resistor se comporta como un filtro pasa-alto


Amplitud de la Función de Transferencia del Capacitor
Amplitud de la Función de Transferencia del Resistor
$H_C(\omega)$
$1/\sqrt{2}$
ω_C
$H_R(\omega)$
$1/\sqrt{2}$
ω_C
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
2
4
6
8
10
Frecuencia (ω) [rad/s]
Frecuencia (ω) [rad/s]

Filtro RL



$$Z_{eq} = Z_R + Z_L = R + i\omega L$$

$$|Z_{eq}| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

La fase β de la impedancia es:

$$\beta = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

$$I_0 = \frac{V_0}{|Z_{eq}|} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

Filtro RL - Voltaje en el Inductor. Amplitud de la Función de transferencia

$$V_L(t) = V_{L,0} e^{i\omega t} e^{-i\beta}$$

$$V_L(t) = Z_L I_0 e^{i\omega t} e^{-i\phi}$$

$$V_L(t) = i\omega L I_0 e^{-i\phi} e^{i\beta}$$

$$V_L(t) = \frac{i\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{i(\beta - \phi)}$$

La función exponencial compleja debe igualar a 1:

$$\beta - \phi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \phi - \frac{\pi}{2}$$

Las amplitudes son entonces:

$$V_{L,0} = \omega L I_0$$

Sustituyendo I_0:

$$V_{L,0} = \omega L \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

$$V_{L,0} = \frac{V_0 \omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

Así que la amplitud de la función de transferencia para el voltaje en el inductor es:

$$|H(\omega)| = \frac{V_{L,0}}{V_{in,0}} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

Filtro RL - Voltaje en el resistor. Amplitud de la Función de transferencia

$$V_R(t) = V_{R,0} e^{i\omega t} e^{-i\beta}$$

Aplicando la ley de Ohm en el resistor:

$$V_R(t) = R I_0 e^{i\omega t} e^{-i\phi}$$

$$V_R(t) = R \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{i(\phi - \beta)}$$

La función exponencial compleja debe igualar a 1:

$$\phi - \beta = 0 \Rightarrow \beta = \phi$$

Las amplitudes son entonces:

$$V_{R,0} = RI_0$$

Sustituyendo I_0:

$$V_{R,0} = \frac{RV_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

La amplitud función de transferencia para el voltaje en el resistor es:

$$|H(\omega)| = \frac{V_{R,0}}{V_{in,0}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

$$\frac{V_{L,0}}{V_{in,0}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Sustituyendo:

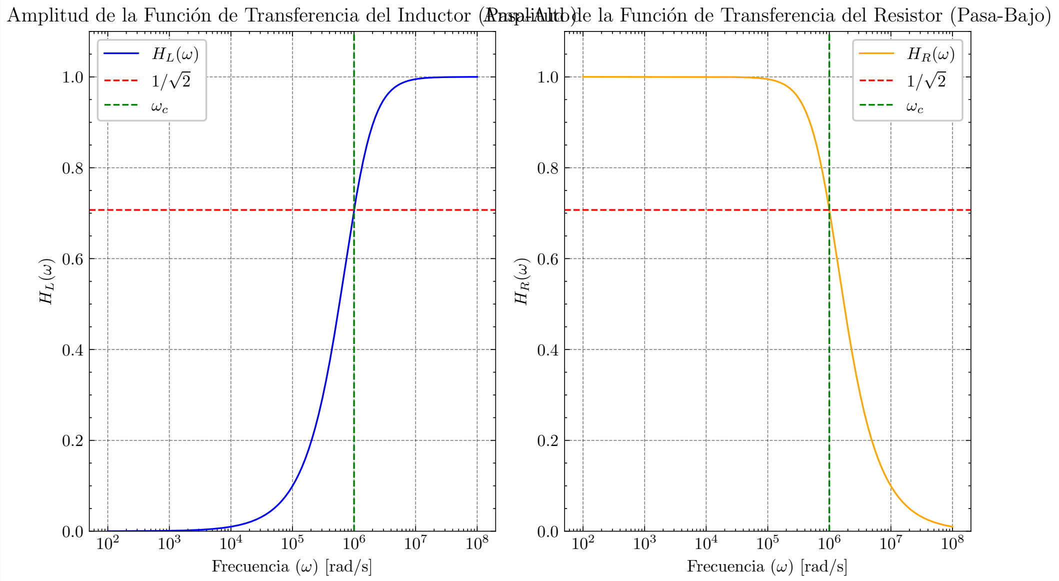
$$\frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{2}\omega L$$

$$R^2 + (\omega L)^2 = 2(\omega L)^2$$

$$R^2 = (\omega L)^2$$

$$\omega = \frac{R}{L} \qquad \text{ó} \qquad f_c = \frac{R}{2\pi L}$$


Amplitud de la Función de Transferencia del Inductor (Pasa-Alto)
$H_L(\omega)$
$1/\sqrt{2}$
ω_c
$H_L(\omega)$
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
10^2 10^3 10^4 10^5 10^6 10^7 10^8
Frecuencia (ω) [rad/s]
Amplitud de la Función de Transferencia del Resistor (Pasa-Bajo)
$H_R(\omega)$
$1/\sqrt{2}$
ω_c
$H_R(\omega)$
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
10^2 10^3 10^4 10^5 10^6 10^7 10^8
Frecuencia (ω) [rad/s]

Resumen

Circuito RLC en Corriente Alterna

Impedancia Equivalente

$$Z_{eq} = R + i\omega L + i\frac{1}{\omega C} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Magnitud y Fase de la Impedancia

$$|Z_{eq}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\sigma = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

Transformadores

Ecuación del Transformador

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

Relación de Corrientes

$$I_1 = \frac{N_2}{N_1} I_2$$

Filtro RC Pasa-Bajo (Voltaje en el Capacitor)

$$|H(\omega)| = \frac{V_{out,0}}{V_{in,0}} = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}$$

Filtro RC Pasa-Alto (Voltaje en el Resistor)

$$|H(\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}$$

Frecuencia de Corte para Filtro RC

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{RC}} \quad \text{ó} \quad f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{RC}}$$

Filtro RL Pasa-Alto (Voltaje en el Inductor)

$$|H(\omega)| = \frac{V_{L,0}}{V_{in,0}} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

Filtro RL Pasa-Bajo (Voltaje en el Resistor)

$$|H(\omega)| = \frac{V_{R,0}}{V_{in,0}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

Frecuencia de Corte para Filtro RL

$$\omega = \frac{R}{L} \quad \text{ó} \quad f_c = \frac{R}{2\pi L}$$

Referencia

Referencia

Freedman, Young, y S. Zemansky. 2009. «29 INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA. 29.1 Experimentos de Inducción. 29.2 Ley de Faraday. 29.3 Ley de Lenz. 29.4 Fuerza Electromotriz de Movimiento. 29.5 Campos Eléctricos Inducidos». En *Física Universitaria*.

Reitz, John R. 2009. «Ch 13 Slowly Varying Currents». En *Foundations of Electromagnetic Theory*. Pearson Education India.

Serway, Raymond A., y John W. Jewett. 2005. «29 Campos Magnéticos. 29.5 Momento de Torsión Sobre Una Espira de Corriente En Un Campo Magnético Uniforme.» En *Física Para Ciencias e Ingeniería Con Física Moderna*, 7ma ed. Vol. 2. CENGAGE learning.