Universidad Rafael Landívar
Facultad de Ingeniería
Matemática Discreta I
Ing. Juan Carlos Soto
DIVISIÓN BINARIA

Proyecto

Análisis Macro

Williams Gilberto Alfredo Ruano Calderón (1281414)
Byron Víctor Hugo Morales Lemus (1320114)
Francisco Josué Solís Ruano (1050014)
Maria Reneé Palma Ayala (1024414)

- **Álgebra Booleana:**

Algebra booleana es un álgebra que le permite abstraer las principales operaciones algebraicas en un sistema binario.

Esta fue formulada por George Bool en su libro: "An Investigation of the laws of thought" que significa: "Una investigación sobre las leyes del pensamiento".

Se basa en un conjunto de valores N = {0,1} . Los cuales están estrechamente relacionados a los de la lógica siendo F = 0 y 1 = V.

Como las operaciones del álgebra ordinaria van sobre los números reales, el álgebra de Boole se lleva sobre números binarios.

Se permiten las siguientes operaciones:

- Suma (+) como un "O" (V) en leyes de la lógica.
- Multiplicación (×) como un "Y" (^) en leyes de la lógica.
- Complemento ($\bar{x}, x'$) como "NOT" (¬) en leyes de la lógica.

Las cuales están definidas según la siguiente tabla de verdad:

H	J	H + J	H*J	$\bar{H}$	$\bar{J}$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0

- **La Lógica Proposicional**:

El álgebra booleana le permite procesar las expresiones y la forma algebraica siguiendo una lógica proposicional en donde las funciones devuelven sólo los resultados cero o uno.

- **Forma normal Disyuntiva (FND):**

Para cualquier n ϵ $\mathbb{Z}^+$, si f es una función booleana sobre las variables $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$.

a) Cada termino x_i o su complemento x_i para $1 \leq i \leq n$ es una literal.
b) Cada término de la forma $y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$ donde cada $y_i = x_i$ o x_i, es una conjunción fundamental.
c) **Una representación de suma de conjunciones.**

FND se liga directamente a los 1's.

Ejemplo:

x	y	z	f	
0	0	0	1	$= \bar{x}\bar{y}\bar{z}$
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	$= \bar{x}yz$
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	1	$= xy\bar{z}$
1	1	1	0	

Cada **1** se transforma a una multiplicación de las variables y se suman cada uno de los términos. Obteniendo así la función resultante. Cuando se trata de FND, **si la variable posee un valor de 0 se dispone como negada.**

$$f = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + xy\bar{z}$$

- **Forma normal conjuntiva (FNC):**

Para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$, si f es una función booleana sobre las variables $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$.

a) Cada término x_i o su complemento x_i para $1 \leq i \leq n$ es una literal.

b) Cada término de la forma $y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$ donde cada $y_i = x_i$ o x_i, es una disyunción fundamental.

c) Una representación de multiplicación de disyunciones.

FNC se liga directamente a 0's.

Ejemplo:

x	y	z	f	
0	0	0	0	$= (x + y + z)$
0	0	1	1	
0	1	0	1	
0	1	1	0	$= (x + \bar{y} + \bar{z})$
1	0	0	1	
1	0	1	1	
1	1	0	0	$= (\bar{x} + \bar{y} + z)$
1	1	1	1	

Cada **0** se transforma a una suma de las variables y se multiplican cada uno de los términos. Obteniendo así la función resultante. Cuando se trata de FNC, **si la variable posee un valor de 1 se dispone como negada.**

$$f = (x + y + z)(x + \bar{y} + \bar{z})(\bar{x} + \bar{y} + z)$$

- **Compuertas Lógicas:**

Representación gráfica de las operaciones del álgebra booleana.

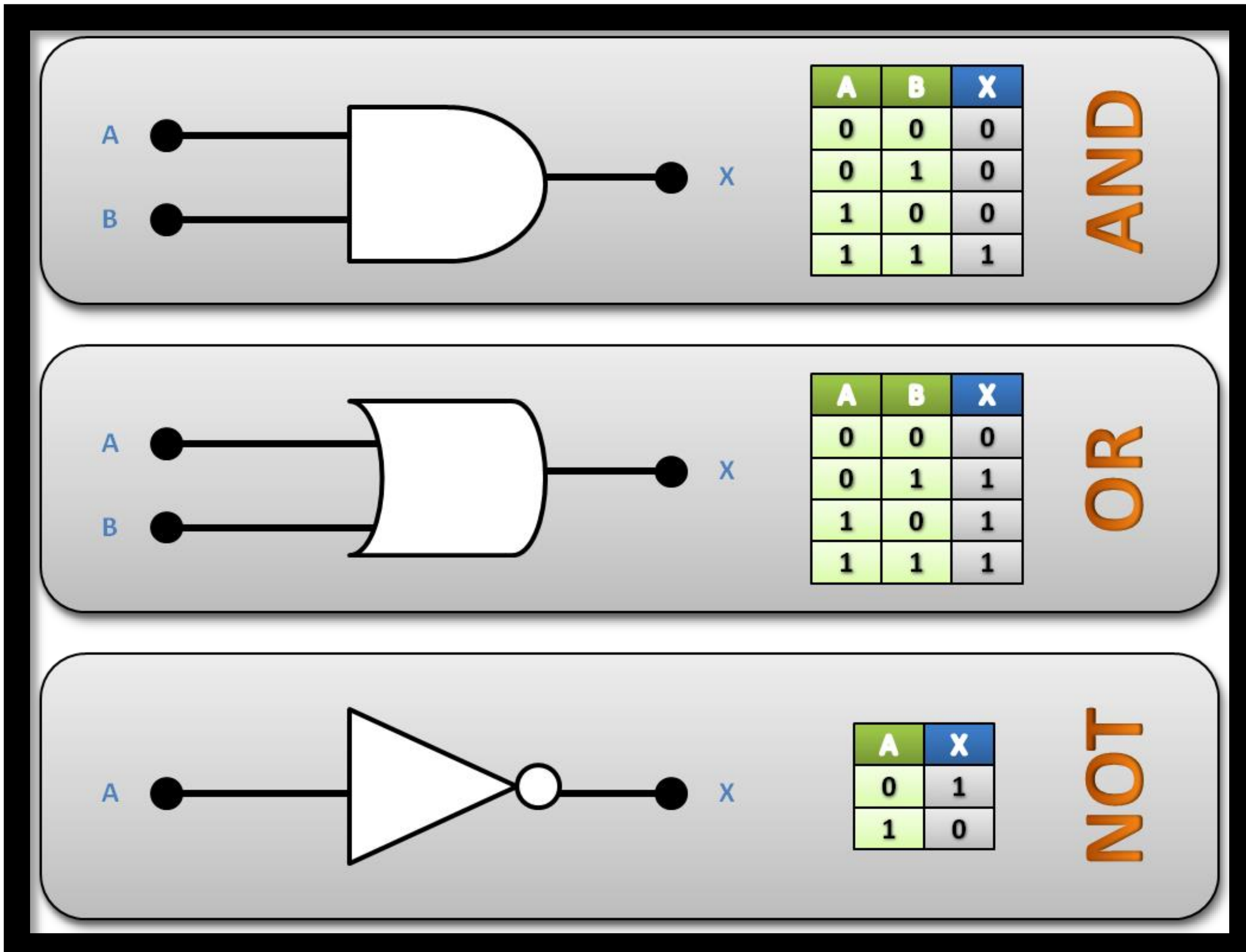


Ilustración 1. Resumen de compuertas lógicas.

Se pueden unir múltiples variables en una sola compuerta (no es exclusivamente de 2 variables), se basa en 2 debido a su relación directa con chips de electrónica que ejecutan una determinada acción.

En general, cuando obtenemos expresiones mediante la simplificación por mapas de Karnaugh, quedan **dos pasos** en el diagrama.

- Si es de **mintérminos**, quedarían X compuertas **AND** unidas por una gran compuerta **OR**.

- Si es de **maxtérminos**, quedarían Y compuertas **OR** unidas por una gran compuerta **AND**.

- **Mapa de Karnaugh:**

Es un diagrama basado en las tablas de verdad que nos ayuda a simplificar funciones del álgebra booleana. La base para simplificar es agrupar 1's o 0's en potencias de 2 (1, 2, 4, etc.) e identificar qué es lo común a dichos elementos en sus representaciones binarias.

$$\left.\begin{array}{l} 2^0 = 1 \\ 2^1 = 2 \\ 2^2 = 4 \\ 2^3 = 8 \end{array}\right\}$$

Indica la cantidad que puedo agrupar, 1, 2, 4 u 8.
Solo se pueden agrupar horizontal y verticalmente.

Indica la cantidad de variables que se van a eliminar, las variables que no están en común, u, v, w, x, y, z.

- Cuando se manipula **1's (mintérminos),** si el valor común de una variable es 1 se dispone la variable normal (x), en caso sea 0 se dispone la variable negada $(\bar{x})$, todas las variables que no cambian se unen por medio de la multiplicación.

- Cuando se manipula **0's (maxtérminos)**, si el valor común de una variable es 1 se dispone la variable negada $(\bar{x})$, en caso sea 0 se dispone la variable normal(x), todas las variables que no cambian se unen por medio de la suma.

Universidad Rafael Landívar
Tradición Jesuita en Guatemala

Ejemplo:

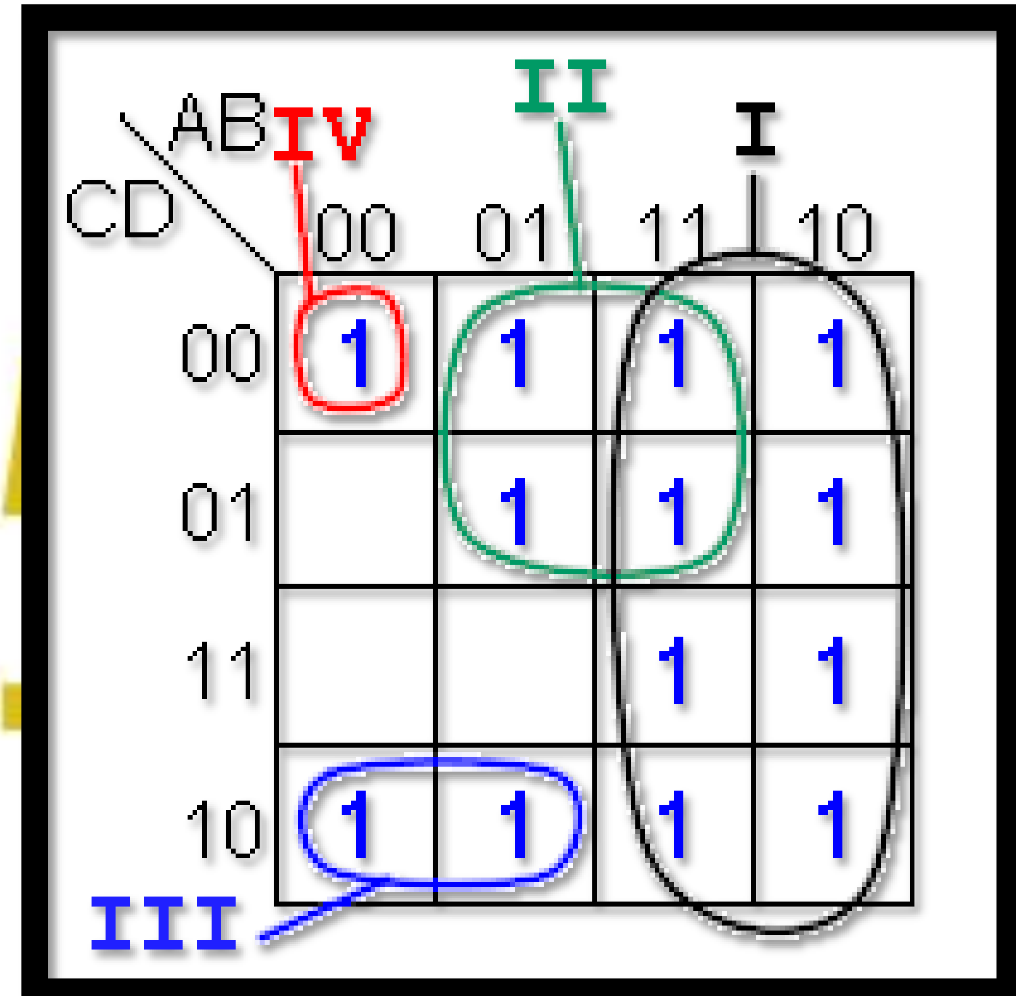


Ilustración 2. Ejemplo de un mapa de Karnaugh.

1) A
2) B¬C
3) ¬AC¬D
4) ¬A¬B¬C¬D

R/ (A) + (B¬C) + (¬AC¬D) + (¬A¬B¬C¬D)

- **Compuertas Lógicas:**

Son circuitos que generan voltajes de salida en función de la combinación de entrada correspondientes a las funciones lógicas.

Trabajan con dos estados lógicos (0, 1) los cuales pueden asignarse de acuerdo a la lógica o a la lógica negativa.

- **Lógica Positiva:**

En la lógica positiva una tensión alta representa un 1 y una tensión baja representa un 0.

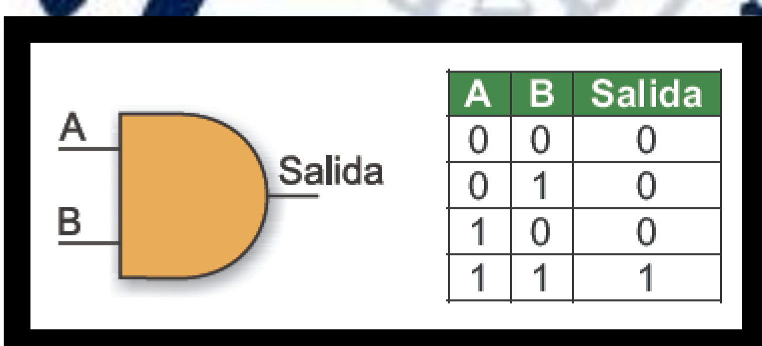
- **Lógica Negativa:**

En la lógica negativa una tensión alta equivale a un 0 y una tensión baja representa a un 1.

Por lo general se suele trabajar con lógica positiva.

1) **Compuerta AND:** (p^q – xy)
Puede tener varias entradas pero solo tiene una salida.

Ejemplo:

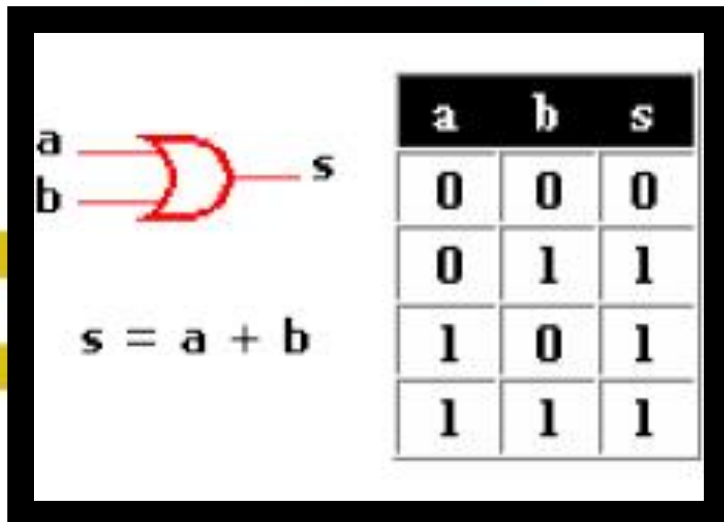


A	B	Salida
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Ilustración 3. Compuerta lógica AND.

2) Compuerta OR: (pVq – x+y)
Entrega una salida positiva si en sus entradas está presente al menos un 1.

Ejemplo:

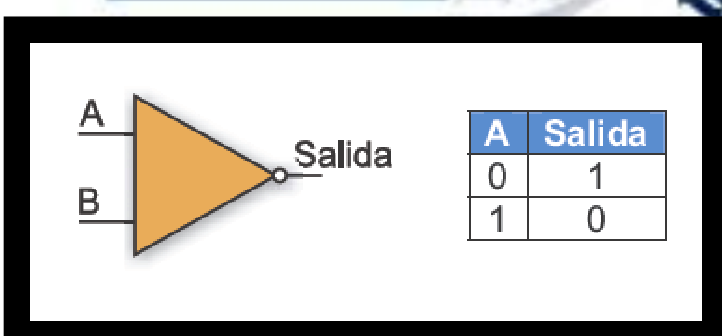


a	b	s
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Ilustración 4. Compuerta lógica OR.

3) Compuerta NOT: (¬p – x')
La compuerta NOT (compuerta NO) también es llamada Compuerta Inversora.

Ejemplo:



A	Salida
0	1
1	0

Ilustración 5. Compuerta lógica NOT.

4) **Compuerta NAND:** ¬(a*b)

La compuerta NAND (No Y) opera de forma contraria a un AND, es su negación.

Ejemplo:

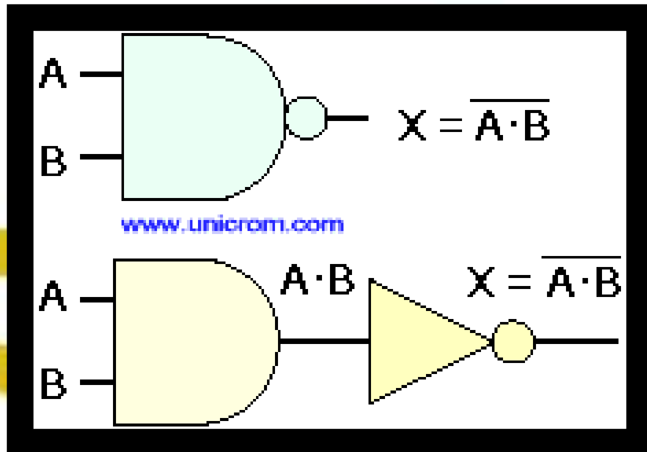


Ilustración 6. Compuerta lógica NAND.

5) **Compuerta NOR:** ¬(a+b)

Esta compuerta es el resultado de invertir la salida de una compuerta OR.

Ejemplo:

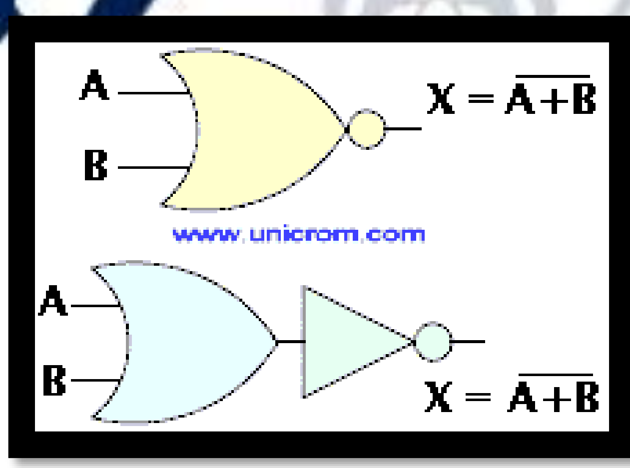


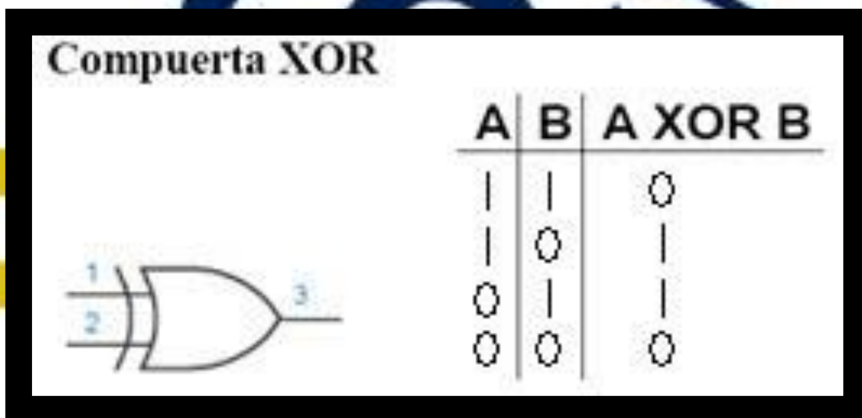
Ilustración 7. Compuerta lógica NOR.

6) **Compuerta OR exclusiva, XOR:** (a¬b + b¬a)

Esta compuerta realiza una suma lógica entre A por B invertida y A invertida por B. Por lo cual se le denomina OR exclusivo.

Esta compuerta tendrá una salida alta siempre y cuando sus entradas tengan niveles distintos.

Ejemplo:



A	B	A XOR B
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Ilustración 8. Compuerta lógica XOR.

7) **Compuerta NOR exclusiva, XNOR:** ¬(¬(a+b))

SU valor de verdad es igual a la doble condicional. La compuerta XNOR opera en forma opuesta a la XOR. Entrega una salida alta cuando sus entradas tienen el mismo nivel. Es ideal para su aplicación en comparadores.

Ejemplo:

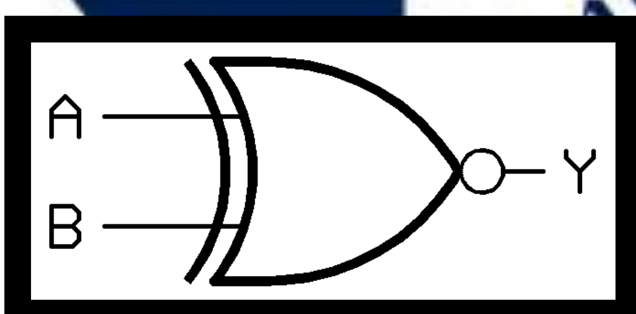


Ilustración 9. Compuerta lógica XNOR.

- **Sistemas de Numeración:**

Conjunto de reglas y símbolos que sirve para representar números. Surgieron por la necesidad de contar.

- **Digito:**

Deriva del latín "Digitus" que quiere decir dedo. Representa cantidades.

- **Número:**

Idea o sensación de cantidad.

- **Numeral:**

Representación de un número.

Hay 3 tipos de sistemas:

- Aditivo: Símbolos y la suma del valor.
- Posicional: El calor es de la posición.
- Hibrido: Aditivo y Posicional.

1. **Sistema Aditivo:**

El valor se representa en figuras y el total se obtiene sumando la cantidad de figuras por el valor de cada una. (Palitos, piedras, etc.)

- Lo usaban los egipcios.
- No se necesita el 0.

No importa el orden, cada vez que aparezca se suma su valor.

2. Sistema Posicional:

Es la solución más práctica para representar grandes cantidades. Cuando se alcanzaba un determinado número se hacía una marca distinta que representaba a todos ellos. Este número se denominó "la Base".

3. Sistema Híbrido:

Son la unión del sistema aditivo y el sistema posicional. Utiliza tanto la suma como la multiplicación.
Ejemplos de sistemas híbridos son los números romanos, mayas, babilónicos y chino.

- **Notación Posicional:**

La notación posicional es un sistema de numeración en el cual cada digito posee un valor que depende de su posición relativa, la cual está determinada por la base, que es el número de dígitos necesarios para escribir cualquier número.

Se utiliza la notación posicional usando la base en notación exponencial.

En Binario:

$$2^5, 2^4, 2^3, 2^2, 2^1, 2^0 = 32, 16, 8, 4, 2, 1$$

A. SISTEMA DECIMAL:

Emplea 10 símbolos llamados dígitos.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Emplea la base de 10.

10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
10,000	1,000	100	10	1

B. SISTEMA BINARIO:

Emplea 2 símbolos llamados dígitos.

0, 1.

Emplea la base de 2.

2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
16	8	4	2	1

C.SISTEMA HEXADECIMAL:

Emplea 16 símbolos llamados dígitos.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

Emplea la base de 16.

16^3	16^2	16^1	16^0
4096	256	16	1

V. POTENCIA BINARIA

La potencia binaria se basa en la multiplicación binaria continua, la cual es la más sencilla que en cualquier otro sistema de numeración. Ya que los factores de la multiplicación solo pueden ser ceros o unos, el producto únicamente puede ser cero o uno.

X	Y	X * Y
0	0	0 x 0 = 0
0	1	0 x 1 = 0
1	0	1 x 0 = 0
1	1	1 x 1 = 1

En un ordenador, la operación de multiplicar se realiza por medio de sumas repetitivas. Aunque puede generar algunos problemas en la programación ya que cada suma de dos unos origina un arrastre. Por lo que para evitar el problema, es necesario contar el número de unos y arrastres en cada columna. Si el número de unos es par, la sumas será cero y si es impar será uno.

Ejemplo

$$101\ x\ 111$$

$$\begin{array}{r} 111 \\ \underline{x \quad 101} \\ 111 \\ 000 \\ \underline{+111} \\ 100011 \end{array}$$