Apuntes de teórico - Métodos Numéricos

Instituto de Matemáticas y Estadística "Rafael Laguardia"
Facultad de Ingeniería, Universidad de la República
2016 - Montevideo, Uruguay

Nota importante: El presente material forma parte de una versión **en proceso de revisión** de un texto teórico para la asignatura "Métodos Numéricos". Por lo tanto, para preparar los exámenes se debe utilizar el material de las clases teóricas y la **bibliografía recomendada**.

Índice general

Capítulo 5

Interpolación

El problema de interpolación consiste en encontrar una función $f(x)$ desconocida a partir de un conjunto de puntos $\{(x_i, y_i) : i = 0, \ldots, n\}$ tales que $f(x_i) = y_i$, que serán datos. Este problema es imposible de resolver ya que la ley subyacente que relaciona las variables podría ser cualquiera: existen infinitas funciones que pasan por esos puntos. Por tanto, el objetivo es encontrar buenas aproximaciones para $f(x)$, imponiendo además que la función que aproximará a $f(x)$ pase por todos los puntos.

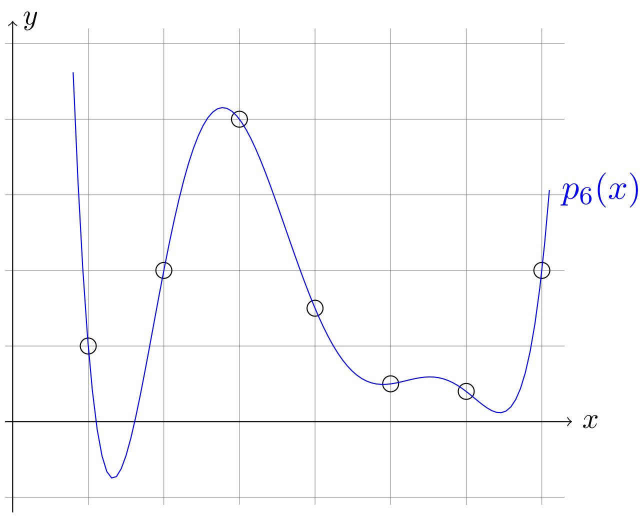

Figura 5.1: Interpolación polinómica

5.1. Interpolación de Vandermonde

La interpolación de Vandermonde se resume en encontrar un polinomio $P(x)$ tal que $P(x_i) = y_i = f(x_i)$ $\forall i = 0, \ldots, n$. Este es un método global ya que se busca una única expresión polinómica que funcione para la totalidad de los datos, a diferencia de ciertos métodos llamados a trozos, que veremos a partir de la Sección 5.6, en los que cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ tiene una expresión diferente.

Encontrar el polinomio interpolante significa determinar sus coeficientes, por lo que si tenemos $n+1$ datos, podríamos plantear un polinomio de grado menor o igual a n. Entonces escribimos su expresión de esta forma:

$$P(x) = \sum_{j=0}^{j=n} a_j x^j$$

Imponiendo que el polinomio pase por los puntos dados obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} P(x_0) = \sum_{j=0}^{j=n} a_j x_0^j \\ P(x_1) = \sum_{j=0}^{j=n} a_j x_1^j \\ \vdots \\ P(x_n) = \sum_{j=0}^{j=n} a_j x_n^j \end{cases}$$

No confundir: aquí las incógnitas son los a_j; los x_j son datos al igual que los y_j.

Por lo tanto, la versión matricial del sistema anterior es:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

A esta matriz que presenta una progresión geométrica en cada fila se le llama *Matriz de Vandermonde*, y la notaremos V.

Es así entonces que los coeficientes de $P(x)$ son solución del sistema 5.1.

Una propiedad de la Matriz de Vandermonde es que su determinante se expresa mediante la fórmula:

$$\det(V) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

y como $x_i \neq x_j \; \forall i \neq j$ se llega a que el $\det(V)$ es no nulo, y así el sistema tiene solución.

Otra propiedad de la Matriz de Vandermonde es que tiene un número de condición grande, por lo que el sistema está mal condicionado y podemos cometer errores importantes en la determinación de los a_i.

Finalmente, otra problemática con este método para obtener $P(x)$ es que resulta difícil agregar nuevos puntos a la tabla, ya que se debe recalcular un nuevo sistema.

Antes de continuar con otros métodos de interpolación veamos algunos resultados interesantes.

5.1.1. Aproximación por polinomios

Los beneficios de la interpolación polinómica es que además de ser funciones simples, los computadores pueden evaluarlos directamente.

Pero además, toda función continua en un intervalo $[a, b]$ puede ser aproximada uniformemente por un polinomio tan cerca como se quiera. En otras palabras, los polinomios son densos en las funciones continuas sobre un intervalo cerrado.

Teorema 5.1.1 (Stone-Weierstrass). *Sea f continua en $[a, b]$. Entonces, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists p(x)$ tal que $|f(x) - p(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]$.*

Veremos también que este teorema en realidad establece la existencia de un polinomio muy cercano a la función, pero que no necesariamente pasa por los puntos interpolantes. En realidad, cómo elegir los puntos para caer en la banda es aún un problema abierto.

5.1.2. Existencia y unicidad de P(x)

Haciendo uso de las propiedades de la Matriz de Vandermonde, se demuestra que siempre es posible encontrar un polinomio de grado menor o igual a n que pase por los $n + 1$ puntos.

Veremos ahora la unicidad:

Sean dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$ tales que:

$$\begin{cases} p(x_i) = y_i & \forall i = 0, \ldots, n \quad gr(p) \leq n \\ q(x_i) = y_i & \forall i = 0, \ldots, n \quad gr(q) \leq n \end{cases}$$

Sea el polinomio $o = p - q \implies o(x_i) = p(x_i) - q(x_i) = y_i - y_i = 0 \ \forall i = 0, \ldots, n$.

Entonces el polinomio o tiene $n + 1$ raíces y $gr(o) \leq n \implies o \equiv 0 \implies p = q$.

¿Pero qué importancia tiene esto?

La unicidad del polinomio interpolante implica que independientemente del método que utilicemos para hallar un polinomio que pase por $n + 1$ puntos, sus coeficientes van a ser los mismos. Continuaremos viendo en la próxima sección el método de Lagrange y en la siguiente el método de Newton, ¡pero todos estos métodos van a arrojar el mismo resultado! Sí, así es, veremos al menos dos procedimientos más para hallar lo mismo. Por tanto, posiblemente el sagaz lector se preguntará: ¿Y entonces qué sentido tiene verlos? Lo invitamos a descubrirlo continuando la lectura.

5.2. Interpolación de Lagrange

El método de *interpolación de Lagrange* busca encontrar un polinomio $P(x)$ tal que $P(x_i) = y_i = f(x_i) \ \forall i = 0, \ldots, n$.

Sin embargo, el planteo de Lagrange es escribir $P(x)$ como combinación lineal de una base de polinomios $\{l_j(x)\}$ a los que les llamamos polinomios de Lagrange. Así,

$$P(x) = \sum_{j=0}^{j=n} y_j l_j(x)$$

y como debe cumplirse $P(x_i) = y_i$ queda que $P(x_i) = \sum_{j=0}^{j=n} y_j l_j(x_i)$, por tanto:

$l_j(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Esto significa que un polinomio de Lagrange genérico $l_k(x)$ se tiene que anular en todos los puntos x_i, salvo en x_k. De esta manera, en la sumatoria $P(x_i) = \sum_{j=0}^{j=n} y_j l_j(x_i)$ sólo sobrevivirá $l_i(x_i) = 1$ y por tanto se verificará que $P(x_i) = y_1 l_1(x_i) + \cdots + y_i l_i(x_i) + \cdots + y_n l_n(x_i) = y_i l_i(x_i) = y_i$.

Ahora bien, para que $l_j(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ necesitamos que $l_j(x)$ tenga raíces en $x_0, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$ y que $l_j(x_j) = 1$. Ingeniosamente, se comprueban estas condiciones expresando:

$$l_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)(x_j - x_2) \ldots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \ldots (x_j - x_n)}$$

Observamos que:

- No tenemos problemas de mal condicionamiento
- Los únicos errores numéricos aparecen en el cálculo de los $l_i(x)$ y al realizar las operaciones.

Nótese que el método de Lagrange permite expresar directamente el polinomio interpolante, sin efectuar cálculos. No obstante, tal expresión polinómica no es simple de manipular (derivar, integrar o evaluar).

5.3. Interpolación de Newton

El *método de Newton* propone construir el polinomio interpolante mediante un proceso iterativo en el que en cada paso se lo obliga a pasar por un nuevo punto. Este método es particularmente útil cuando tenemos el polinomio interpolante que pasa por los $\{(x_i, y_i\}_{i=0,\ldots,n}$ y nos llega un nuevo dato (x_{n+1}, y_{n+1}), o sea, es sencillo recalcular $P(x)$ para agregar puntos interpolados.

El planteo es de este modo:

Sea $P_k(x)$ tal que $P_k(x_i) = y_i \ \forall i = 0, \ldots, k$.

Buscar $P_{k+1}(x)$ tal que $P_{k+1}(x_i) = y_i \ \forall i = 0, \ldots, k, k+1$.

Escribimos:

$$P_{k+1}(x) = P_k(x) + q_{k+1}(x)$$

¿Qué condiciones debemos imponer?

1. El nuevo polinomio debe pasar por todos los puntos anteriores:
   $P_{k+1}(x_i) = \underbrace{P_k(x_i)}_{y_i} + q_{k+1}(x_i) = y_i \quad \forall i = 0, \ldots, k$
   $\Longrightarrow q_{k+1}(x_i) = 0 \quad \forall i = 0, \ldots, k \quad gr(q_{k+1}) = k+1$
   Entonces
   $$q_{k+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_k)a_k$$

2. El nuevo polinomio debe pasar por el nuevo punto:
   $P_{k+1}(x_{k+1}) = P_k(x_{k+1}) + q_{k+1}(x_{k+1}) = y_{k+1}$
   $\Longrightarrow q_{k+1}(x_{k+1}) = y_{k+1} - P_k(x_{k+1})$
   De donde determinamos que:
   $$a_k = \frac{y_{k+1} - P_k(x_{k+1})}{(x_{k+1} - x_0)(x_{k+1} - x_1)\ldots(x_{k+1} - x_k)}$$

A modo de resumen, dados los $n+1$ puntos a interpolar: $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, el método de Newton consiste en encontrar los a_i que satisfacen:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{i=n} a_i w_i(x)$$

siendo

$$w_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ \prod_{0 \le j < i}(x - x_j) & \text{si } i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

A partir de esta base se plantea y resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{array}{ll} (x_0, y_0): & a_0 = y_0 \\ (x_1, y_1): & a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1 \\ (x_2, y_2): & a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2 \\ & \vdots \\ (x_n, y_n): & a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{j=0}^{j=i-1}(x_i - x_j) = y_n \end{array}$$

Además, el valor de a_k puede expresarse en términos de las llamadas *diferencias divididas*:

$$a_0 = f[x_0],\ a_1 = f[x_0, x_1], \ldots,\ a_j = f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$$

donde:

$$f[x_i] = f(x_i),$$

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i},$$

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i},$$

y en general:

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j-1}, x_{i+j}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+j-1}, x_{i+j}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}$$

Ejemplo 5.3.1. Expresemos el polinomio interpolante por los puntos $\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,4)\}$ utilizando el método de Newton.

El sistema queda:

$$\begin{array}{ll}
(0,0): & a_0 = 0 \\
(1,1): & a_0 + a_1(1-0) = 1 \Rightarrow a_1 = 1 \\
(2,2): & a_0 + a_1(2-0) + a_2(2-0)(2-1) = 2 \Rightarrow a_2 = 0 \\
(3,4): & a_0 + a_1(3-0) + a_2(3-0)(3-1) + a_3(3-0)(3-1)(3-2) = 4 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{6}
\end{array}$$

Finalmente $p(x) = x + \frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$.

Mostramos a continuación cómo es posible obtener los coeficientes del polinomio utilizando el esquema de diferencias divididas:

$$\begin{array}{llllll}
x_0 = 0 & f[x_0] = \boxed{0} & & & & \\
 & & f[x_0,x_1] = \frac{1-0}{1-0} = \boxed{1} & & & \\
x_1 = 1 & f[x_1] = 1 & & f[x_0,x_1,x_2] = \frac{1-1}{2-0} = \boxed{0} & & \\
 & & f[x_1,x_2] = \frac{2-1}{2-1} = 1 & & f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{\frac{1}{2}-0}{3-0} = \boxed{\frac{1}{6}} & \\
x_2 = 2 & f[x_2] = 2 & & f[x_1,x_2,x_3] = \frac{2-1}{3-1} = \frac{1}{2} & & \\
 & & f[x_2,x_3] = \frac{4-2}{3-2} = 2 & & & \\
x_3 = 3 & f[x_3] = 4 & & & &
\end{array}$$

5.4. Error de Interpolación Polinómica

Hasta el momento hemos intentado encontrar un polinomio que pase por el conjunto de puntos dados. Ahora bien, este polinomio es un "buen" polinomio para lo que queremos hacer que es a fin de cuentas aproximar la función subyacente.

Podríamos definir como medida del error para cada punto x, $E(x) = f(x) - P_n(x)$. Hacemos notar que en los datos del problema, este error es nulo, ya que $E(x_i) = f(x_i) - P_n(x_i) = y_i - y_i = 0$.

Pero con esta definición, cómo podemos establecer cuál es el error que cometemos si justamente $f(x)$ es desconocida.

Enunciamos a continuación un teorema que puede ser de utilidad si conocemos además algún otro dato de $f(x)$ por ejemplo, su velocidad de variación máxima (o pendiente).

Teorema 5.4.1 (Teorema de acotación del error en Interpolación Polinómica). *Sea f de clase C^{n+1} en el intervalo $[x_0, x_n]$ y p_n el polinomio interpolante a f por las abscisas $x_0 < x_1 < \ldots <$*

x_n. Luego, para cada $x \in [x_0, x_n]$ existe $\gamma_x \in [x_0, x_n]$ tal que se cumple la siguiente igualdad para el error $E(x)$:

$$E(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{n+1}(\gamma_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Demostración. Tomemos $x \in [x_0, x_n]$ fijo. Si $x = x_i$ para algún i, la igualdad es evidente, pues $E(x_i) = 0$. Supongamos entonces que x no coincide con ninguna de las abscisas. Consideremos la función auxiliar $F : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(t) = f(t) - p_n(t) - (f(x) - p_n(x)) \frac{\prod_{i=0}^{n}(t - x_i)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}.$$

Se menciona, ya que puede resultar confuso, que la función F depende de la variable t, no de x, que pensamos fijo. Se observa que $F(x_i) = 0$ para cada $i = 0, \dots, n$, y además $F(x) = 0$, por lo que F tiene al menos $n+2$ raíces en $[x_0, x_n]$. Como f es de clase C^{n+1}, resulta que F también es de clase C^{n+1}. Sean $p_0 < p_1 \dots < p_{n+1}$ las $n+2$ raíces de F. Aplicando el Teorema de Rolle en cada intervalo podemos asegurar que existen $n+1$ raíces $p'_0 < \dots < p'_n$ para F' (nuevamente recalcamos que la derivada es respecto a t). Aplicando reiteradas veces el teorema de Rolle es posible asegurar la existencia de una raíz $\gamma_x \in [x_0, x_n]$ de la función $F^{(n+1)}$. Como p_n es un polinomio de grado n o menos, tenemos que su derivada de orden $n+1$ es nula. Entonces, al derivar $n+1$ veces la función F tenemos que:

$$F^{(n+1)}(\gamma_x) = f^{(n+1)}(\gamma_x) - (n+1)! \frac{f(x) - p_n(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)} = 0.$$

Finalmente despejando $f(x) - p_n(x)$ se prueba el enunciado. $\square$

Corolario 5.4.2. $E(x) \leq \frac{(x_n - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} |f^{n+1}(\gamma_x)|$

Corolario 5.4.3. $E(x) \leq \frac{(x_n - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{n+1}\|_{\infty,[x_0,x_n]}$

Parecería natural pensar que conociendo más puntos se mejora la interpolación, y se constataría si se observa que si n crece, también lo hace $(n+1)!$ y el error de interpolación debería disminuir. Sin embargo, podría darse el caso en que $f^{n+1}(\gamma_x)$ crezca más rápido que $(n+1)!$ y hacer que el error aumente.

Un caso destacable en que se aprecia esta particularidad se desarrolla en lo que sigue.

5.4.1. Fenómeno de Runge

El fenómeno de Runge es un problema que aparece al aproximar determinadas funciones aplicando interpolación polinómica con polinomios de alto grado utilizando nodos equidistantes. El nombre se debe a Carl Runge cuando exploraba el comportamiento de los errores al usar interpolación polinómica, descubriendo que en algunos casos, aumentar el número de puntos empeora la aproximación.

Una función en la que se puede observar el fenómeno es la llamada *función de Runge*: $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$.

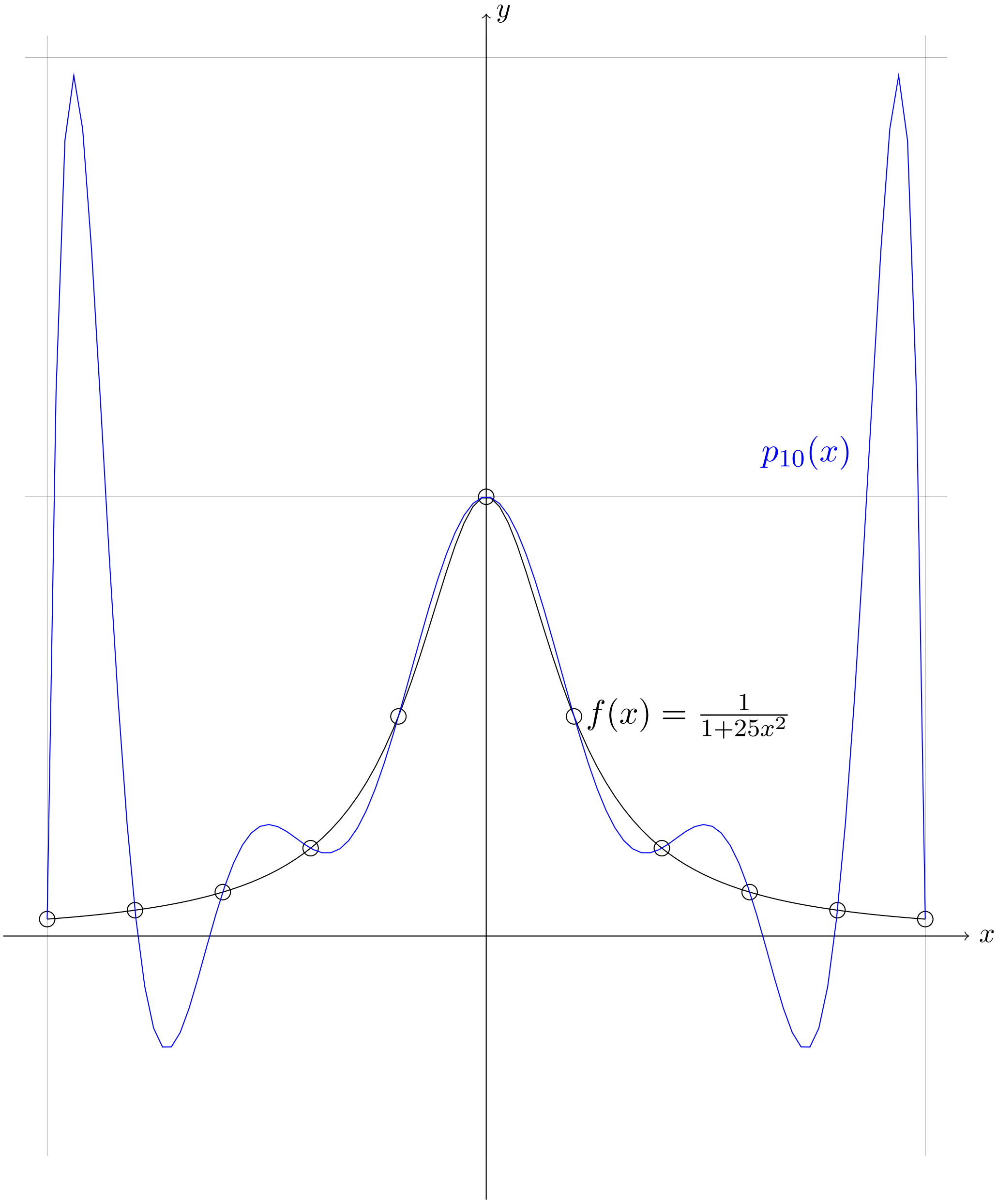

Figura 5.2: Función de Runge e interpolación

En efecto, si se interpola usando nodos equidistantes entre -1 y 1, el polinomio resultante presenta oscilaciones hacia los extremos del intervalo, como se aprecia en la Figura 5.2.

Se invita al lector a determinar la expresión genérica de los puntos $x_i \forall i = 0, \ldots, n$, implementar el método de resolución de Vandermonde, y verificar gráficamente el fenómeno al aumentar n.

El fenómeno demuestra que aumentar el grado del polinomio interpolante en general no es la mejor opción pese a lo que intuitivamente se podría esperar al forzar al polinomio a pasar por más puntos de $f(x)$.

Por otro lado, por el Teorema de Stone-Weierstrass, la familia de funciones polinómicas permite aproximación uniforme de cualquier función continua dentro de un dominio compacto. No obstante, la correcta selección de polinomios interpolantes depende de la elección de las abscisas de interpolación. Este problema de selección de puntos interpolantes es tema actual de investigación.

Algunas ideas de soluciones a este problema son elegir puntos que no sean equidistantes (ej. nodos de Chevyshev), utilizar interpolación a trozos, o tal vez se podría imponer en el polinomio interpolante no solamente que pase por el punto, sino que lo haga con cierta pendiente, obteniendo así un mayor control sobre el polinomio.

5.5. Interpolación de Hermite

En muchas aplicaciones interesa considerar polinomios $P(x)$ que además de interpolar a $f(x)$, interpolan a $f'(x)$, es decir:

$$\begin{cases} P(x_i) = y_i = f(x_i) \\ P'(x_i) = y_i' = f'(x_i) \quad \forall i = 0, 1, \ldots, n \end{cases} \tag{5.2}$$

Con estas restricciones, se controla no solamente por qué puntos debe pasar el polinomio, sino que además, con qué pendiente debe pasar por ellos. Es decir, que el $P(x)$ pasará por los puntos (x_i, y_i) con derivada y_i', donde estos valores son datos conocidos.

Al método que desarrollaremos a continuación que interpola una función $f(x)$ y su derivada $f'(x)$ en $n+1$ puntos se le llama *Método de Hermite*.

Es interesante observar que en este caso, se tienen $2n+2$ condiciones a imponer, por lo que se busca un polinomio $P(x)$ de al menos grado $2n+1$, es decir tenemos $2n+2$ coeficientes a hallar.

Es así que se define el *Polinomio de Hermite* mediante la siguiente expresión:

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{i=n} (y_i h_i(x) + y_i' \tilde{h}_i(x))$$

donde $h_i(x)$ y $\tilde{h}_i(x)$ pasan a ser nuevos polinomios, también de grado al menos $2n+1$ a determinar, pero que deben cumplir para todo $0 \leq i, j \leq n$:[1]

$$\begin{array}{ll} h_i(x_j) = \delta_{ij} & h_i'(x_j) = 0 \\ \tilde{h}_i(x_j) = 0 & \tilde{h}_i'(x_j) = \delta_{ij} \end{array}$$

¡Pero en esta ecuación hemos introducido $2n+2$ nuevos polinomios! ¿Cómo puede ser esto más conveniente?

Antes de responder esto, veamos primero que las condiciones impuestas hacen que $H_{2n+1}(x)$ interpole $f(x)$ y $f'(x)$ en los puntos x_i, es decir, que es equivalente al sistema 5.2. O dicho de

[1]Recordamos que $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

otro modo, evaluando en cualquiera de los puntos, por ejemplo en x_k, deberíamos constatar que $H_{2n+1}(x_k) = y_k$ y $H'_{2n+1}(x_k) = y'_k$.

En efecto, evaluando en x_k se anulan todas las $\tilde{h}_i$, pues $\tilde{h}_i(x_j) = 0 \forall i, j$, y además se apagan todas las h_i, salvo la k-ésima, pues $h_i(x_k) = 0$ para todos los i, salvo cuando $i = k$, que vale 1. Es decir, que en toda la sumatoria, solamente sobrevive el término $y_k h_k(x_k) = y_k$.

Se deja como ejercicio constatar que $H'_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{i=n}(y_i h'_i(x) + y'_i \tilde{h}'_i(x))$ y verificar de forma análoga, qué ocurre al evaluar en x_k.

Finalmente, es posible demostrar que los $h_i(x)$ tienen la forma:

$$h_i(x) = [1 - 2l'_i(x_i)(x - x_i)](l_i(x))^2 \tag{5.3}$$

y que los $\tilde{h}_i(x)$ tienen la forma:

$$\tilde{h}_i(x) = (x - x_i)(l_i(x))^2$$

en función de los polinomios $l_i(x)$ de la base de Lagrange.

Vamos a deducir 5.3:

1. $h'_i(x_j) = 0 \quad \forall j \Rightarrow h'_i(x) = l_i(x)r(x)/r(x_i) = 0$
2. $h_i(x_j) = \delta_{ij} \Rightarrow h_i(x) = l_i(x)q(x)$

para ciertos $r(x)$ y $q(x)$ que completan el grado de $h'_i(x)$ y $h_i(x)$.

Derivamos $h'_i(x) = l'_i(x)q(x) + l_i(x)q'(x) = l_i(x)r(x)$.

Entonces l_i divide también a q y así $q(x) = l_i(x)s(x)$, para cierto $s(x)$.

Ahora, remplazando tenemos que $h_i(x) = l_i^2(x)s(x)$. Pero el grado de $l_i^2(x)$ es $2n - 2$, por lo que $s(x)$ debe ser un polinomio de grado 1 y así:

$h_i(x) = l_i^2(x)(ax + b)$

Para hallar a y b imponemos:

1. $h'_i(x_j) = 0 \Rightarrow 2l_i(x_i)l'_i(x_i)(ax_i + b) + l_i^2(x_i)a = 0$
2. $h_i(x_i) = 1 \Rightarrow l_i^2(x_i)(ax_i + b) = ax_i + b = 1$

que resulta en un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas, con solución:

$$\begin{cases} a = -2l'_i(x_i) \\ b = 1 + 2l'_i(x_i)x_i \end{cases}$$

Sustituyendo se llega a 5.3.

Ejemplo 5.5.1. A modo de ejemplo, expresemos el polinomio interpolante de Hermite de la función $f(x) = sen(x)$ por los puntos $x_0 = 0$ y $x_1 = \pi/4$.

La tabla de datos es la siguiente:

x_i	y_i	y'_i
0	0	1
$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Los polinomios base de Lagrange son:

$$l_0(x) = \left(1 - \frac{\pi}{4}x\right)$$

$$l_1(x) = \frac{4}{\pi}x$$

Si recordamos la expresión dada anterior para el polinomio interpolante, se tiene en este caso:

$$H_3(x) = 0.h_0(x) + 1.\tilde{h}_0(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}.h_1(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}.\tilde{h}_1(x)$$

Ahora:

$$\tilde{h}_0(x) = x\left(1 - \frac{4}{\pi}x\right)^2$$

$$h_1(x) = \left[1 - \frac{8}{\pi}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]\left(\frac{4}{\pi}x\right)^2$$

$$\tilde{h}_1(x) = \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{4}{\pi}x\right)^2$$

Por lo tanto el polinomio interpolante es:

$$H_3(x) = x\left(1 - \frac{4}{\pi}x\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 - \frac{8}{\pi}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]\left(\frac{4}{\pi}x\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{4}{\pi}x\right)^2$$

El polinomio de Hermite está íntimamente relacionado con el polinomio de Newton en que ambos permiten ser derivados y calculados mediante el método de diferencias divididas. En este caso, debemos tomar los coeficientes de la diagonal de la tabla de diferencias divididas y multiplicarlos por el k-ésimo polinomio de la base de Hermite que tiene la siguiente expresión $\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$, así como lo hacíamos cuando generamos el polinomio de Newton.

Visualicemos el procedimiento mediante un ejemplo:

Ejemplo 5.5.2. Continuando con el caso de la interpolación de $f(x) = sen(x)$ mediante $H_3(x)$, ilustraremos cómo se puede obtener también el polinomio de Hermite utilizando el esquema de diferencias divididas. En ese caso:

0	0			
0	0	1		
$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$	$\frac{4(2\sqrt{2}-\pi)}{\pi^2} \approx -0{,}1269$	
$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2\sqrt{2}(\pi-4)}{\pi^2}$	$\frac{\pi(2\sqrt{2}+4)-16\sqrt{2}}{\pi^2}\frac{4}{\pi} \approx -0{,}1516$

Por lo tanto el polinomio interpolante de Hermite de la función $f(x) = sen(x)$ por las abscisas $x_0 = 0$ y $x_1 = \pi/4$ es:

$$H_3(x) = x + \frac{4\left(2\sqrt{2}-\pi\right)}{\pi^2}x^2 + \frac{\pi\left(2\sqrt{2}+4\right)-16\sqrt{2}}{\pi^2}\frac{4}{\pi}x^2(x-\pi/4)$$
$$H_3(x) = x - 0{,}1269x^2 - 0{,}1516x^2(x-\pi/4)$$

Finalmente, para cerrar esta sección enunciaremos sin demostrar que el error de interpolación en el intervalo $[x_0, x_n]$ tiene la forma:

$$f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{2n+2}(\xi(x))}{(2n+2)!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2\dots(x-x_n)^2,\ \xi(x) \in [x_0, x_n]$$

donde asumimos que los puntos se encuentran ordenados $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n$ por simplicidad.

La idea de la demostración consiste en llevar el problema a otro de interpolación clásica de puntos. Se tiene por un lado los $n+1$ puntos de interpolación $(x_i, y_i), i = 0, .., n$, y se introduce una sucesión de puntos artificiales (x_i^n, y_i^n) de manera que la pendiente generada por los segmentos $(x_i, y_i), (x_i^n, y_i^n)$ coincide con y_i' y cada x_i^n converge a x_i.

En el resultado es entonces idéntico al de interpolación polinómica, donde ahora figuran cuadrados (pues los puntos son "dobles").

Ejemplo 5.5.3. Es así que una cota superior posible para el error entre $f(x) = sen(x)$ y $H_3(x)$ en el intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$ es $E_{max} \leq \frac{\|f^{(4)}\|_\infty}{4!}(\pi/4)^2(\pi/4)^2$. En nuestro caso $f^{(4)}(x) = sen(x)$, por lo tanto $\max_{[0,\pi/4]} |f^{(4)}(x)| = \max_{[0,\pi/4]} sen(x) = sen(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Luego, una cota superior para el error (que no es rígida) es:

$$c = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 \simeq 1{,}121x10^{-2}$$

5.6. Interpolación Lineal

La forma más básica de atacar el problema de interpolar un set de puntos consiste en algo que puede realizar casi cualquier persona: unir los puntos.

Matemáticamente, se debe expresar entre cada par de puntos la ecuación de una recta que pase por ellos:

$$y = L^{(i)}(x) = \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}(x-x_i) + y_i$$

Esta expresión es solamente válida en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, habiendo distintas "fórmulas" para cada tramo, por lo que este método recibe el nombre de interpolación lineal a tramos.

Repasemos las ventajas de este tipo de interpolación:

- Es simple.
- Al agregar más puntos mejora la aproximación.
- Agregar puntos es fácil (por ser un método local).

Sin embargo, su principal desventaja es que, a diferencia de las anteriores formas de interpolación polinómica, no es derivable en los x_i. En las próximas secciones mostraremos otros tipos de interpolación a trozos para los que se obtienen curvas más suaves que subsanan la no derivabilidad de este método, pero antes, observemos que el error es:
$|L(x) - f(x)|_{[x_i,x_{i+1}]} = |(x-x_i)(x-x_{i+1})\frac{f''(\theta)}{2!}| \geq |h^2\frac{f''(\theta)}{2!}|$ si suponemos $x_{i+1} - x_i = h$.
Es decir que si la distancia entre los x_i es h, el error es $O(h^2)$.

Se deja como ejercicio al lector interesado mostrar que el error entre las pendientes para $x \neq x_i$ es $|L'(x) - f'(x)| = O(h)$.

5.7. Splines cúbicos

La interpolación por medio de Splines resuelve el problema de encontrar una función de clase C^2 que interpole un conjunto de datos.

Para tal fin, realizaremos una interpolación a trozos utilizando en cada intervalo $I_i = [x_i, i_{i+1}]$ $\forall i = 0, \ldots, n-1$ un polinomio cúbico $s_i(x)$.

A estos polinomios se les impondrá no sólo por dónde deben pasar en sus extremos (como el caso anterior), sino además con una pendiente y una concavidad tal que se solapen con la pendiente y concavidad del próximo polinomio con el objetivo de obtener una curva dos veces derivable en todos los puntos.

Le llamaremos Spline a un polinomio interpolante cúbico a trozos con derivadas primeras y segundas continuas.

Por tanto, dos splines adyacentes quedan relacionados por las siguientes ecuaciones:

- $s_{i-1}(x_{i-1}) = y_{i-1} \quad 1 \leq i \leq n$
- $s_{i-1}(x_i) = y_i \quad 1 \leq i \leq n$
- $s'_{i-1}(x_i) = s'_i(x_i) \quad 1 \leq i \leq n$
- $s''_{i-1}(x_i) = s''_i(x_i) \quad 1 \leq i \leq n$

Se comenta que puede verse cada spline como un polinomio cúbico a trozos de Hermite.

Es así que entre cada par de puntos $[x_i, x_{i+1}]$ tengo un polinomio cúbico con 4 parámetros. Por ende tengo en total $4n$ incógnitas.

Por su parte, contando la cantidad de restricciones impuestas por cada item tenemos: n por pasar por el extremo izquierdo del intervalo, n por pasar por el extremo derecho del intervalo, $n-1$ para tener derivada continua, y $n-1$ para tener concavidad continua, totalizando $4n-2$.

Obsérvese que tenemos más incógnitas que ecuaciones, nos faltarían dos restricciones más que corresponden a las derivadas en los extremos $\{x_0, x_n\}$.

Las constantes y parámetros anteriores se pueden escribir a partir de los datos como:

- $h_i = x_{i+1} - x_i$
- $t = \frac{x-x_i}{h_i}$
- $\Delta_i = y_{i+1} - y_i$
- $d_i = s_i'(x_i)$

y además

$$s_i(x_i + th_i) = y_i + t\Delta_i + t(t-1)(\Delta_i - h_i d_i) + t^2(t-1)(h_i(d_i + d_{i+1}) - 2\Delta_i)$$

Veamos que pese a lo intrincado de la formulación, $s_i(x_i + th_i)$ cumple todo lo que debe:

1. $s_i(x_i) = y_i$ se constata sustituyendo $t = 0$.
2. $s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$ se verifica haciendo $t = 1$ resultando $s_i(x_i+h_i) = s_i(x_{i+1}) = y_i+\Delta_i = y_{i+1}$.
   Ahora derivamos respecto a t:
   $$s_i'(x_i + th_i)h_i = \Delta_i + (2t-1)(\Delta_i - h_i d_i) + (3t^2 - 2t)(h_i(d_i + d_{i+1}) - 2\Delta_i)$$
3. $s_i'(x_i)h_i = \Delta_i - (\Delta_i - h_i d_i) = h_i d_i$
4. $s_i'(x_{i+1})h_i = \Delta_i + (\Delta_i - h_i d_i) + (h_i(d_i + d_{i+1}) - 2\Delta_i) = d_{i+1}$

Bien, ahora calculemos la derivada segunda:

$$s_i''(x_i + th_i)h_i^2 = 2(\Delta_i - h_i d_i) + (6t-2)(h_i(d_i + d_{i+1}) - 2\Delta_i)$$

e imponemos $s_i''(x_i) = s_{i+1}''(x_{i+1})$

$$\Rightarrow \frac{1}{h_i^2}[2\Delta_i - 2h_i d_i + 4h_i(d_i + d_{i+1}) - 8\Delta_i] = \frac{1}{h_{i+1}^2}[2\Delta_{i+1} - 2h_{i+1}d_{i+1} - 2h_{i+1}(d_{i+1} + d_{i+2}) + 4\Delta_{i+1}]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h_i^2}[-6\Delta_i + 2h_i d_i + 4h_i d_{i+1}] = \frac{1}{h_{i+1}^2}[6\Delta_{i+1} - 4h_{i+1}d_{i+1} - 2h_{i+1}d_{i+2}]$$

De donde finalmente se obtiene:

$$\frac{2}{h_i^2}d_i + (\frac{4}{h_i} + \frac{4}{h_{i+1}})d_{i+1} + \frac{2}{h_{i+1}}d_{i+2} = \frac{6}{h_{i+1}^2}\Delta_{i+1} + \frac{6}{h_i^2}\Delta_i$$

que es un sistema de ecuaciones lineales que permite calcular explícitamente los d_i.

Obsérvese que con los d_i es posible calcular los 4 coeficientes del Spline ya que tenemos 4 ecuaciones que lo determinan:

$$\begin{cases} s_i(x_i) = y_i \\ s_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \\ s_i'(x_i) = d_i \\ s_i'(x_{i+1}) = d_{i+1} \end{cases}$$

Si especificamos d_0 y d_n se llama Spline completos. Si imponemos que $d_0 = d_n = 0$ se llama Spline natural.

Un último comentario sobre este tema es que la matriz resultante asociada al sistema con incógnitas d_i es un sistema tridiagonal para el cual existen técnicas eficientes de resolución.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{2}{h_i} & [\frac{4}{h_i} + \frac{4}{h_{i+1}}] & \frac{2}{h_{i+1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

5.8. Curvas de Bézier*

Una curva de Bézier es una forma de interpolar puntos. Sin embargo, en este caso, dado un conjunto de puntos $P_0 = (x_0, y_0), \dots, P_n = (x_n, y_n)$, la curva de Bézier sólamente unirá los extremos de la serie, es decir P_0 con P_n, a los que se les llama “puntos de anclaje”. Los otros puntos (por los cuales en general no pasará la curva) se denominan “puntos de control” y funcionan como controladores de la forma que tomará la curva, es decir, proporcionan información sobre la dirección y movimiento que trazará la curva.

Curva lineal de Bézier:

Dados los puntos P_0 y P_1, una curva lineal de Bézier es una recta entre los dos puntos:

$B(x) = (1-x)P_0 + xP_1 \quad \forall x \in [0,1]$.

Curva cuadrática de Bézier:

Dados los puntos P_0, P_1 y P_2, una curva cuadrática de Bézier viene dada por la siguiente función:

$B(x) = (1-x)^2 P_0 + 2x(1-x)P_1 + x^2 P_2 \quad \forall x \in [0,1]$.

En general, dados los puntos $P_0, P_1, \dots, P_n$, una curva de Bézier de grado n es:

$B(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1-x)^{n-i} x^i P_i \quad \forall x \in [0,1]$.

Propiedades:

- El polígono formado por los puntos $P_0, P_1, \dots, P_n$ se denomina polígono de Bézier.

- La curva de Bézier se encuentra en el interior de la envolvente convexa del polígono de Bézier.
- El comienzo de la curva de Bézier es tangente al primer segmento del polígono de Bézier P_0P_1, lo mismo ocurre con el final de la curva y el último segmento del polígono.
- La curva de Bézier es C^∞.

Las curvas de Bézier encuentran su aplicación en sistemas CAD, dada su intuitiva interactividad con el usuario.