MÉTODOS NUMÉRICOS

CURSO 2008

Ejemplo: Cálculo de e^x con la serie de Taylor

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Voy sumando los términos, obteniendo una suma parcial s, matemáticamente siempre agrego algo a la suma, pero en la PC que los números están representados en punto flotante llega un momento en el cual los términos que agrego son tan pequeños que no varían la suma, lo cual la hace finita.

Programa:

```
s=1;
i=1;
t=x/i;
while (s+t) ~= s
s= s+t ;
i=i+1 ;
t= t.x/i ;
end;
```

distinto

$$\left\{ t_1 = \frac{x}{1} \quad t_2 = \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2} \quad t_3 = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x}{3} = \frac{x^3}{3!} \right.$$

Se tiene que la expresión $s+t$ va a ser igual a s para t suficientemente pequeño.

Miremos los resultados:

	Al correr el prog.	exp(x)	dif relativa.
$x = 8$	$2{,}9810 \cdot 10^{3}$	$2{,}9810 \cdot 10^{3}$	$1{,}5 \cdot 10^{-16}$
$x = 32$	$7{,}8963 \cdot 10^{13}$	$7{,}8963 \cdot 10^{13}$	$-9{,}9 \cdot 10^{-16}$
$x = -15$	$3{,}0591 \cdot 10^{-7}$	$3{,}0590 \cdot 10^{-7}$	$-2{,}2 \cdot 10^{-5}$
$x = -21$	$-3{,}16 \cdot 10^{-9}$	$7{,}58 \cdot 10^{-10}$	
$x = -38$	$-0{,}1$		

absurdo

¿Como puedo resolver este problema?

Si $x \geq 0 \rightarrow$ aplico el programa

si $x < 0 \rightarrow$ aplico el programa con $x' = -x$

valor final = $1/s$

$$e^{x} = e^{-x'} = \frac{1}{e^{x'}}$$

Ejemplo: Sistema lineal de 2 ecuaciones (Problema mal condicionado)

$$\begin{cases} 0{,}780\,x + 0{,}563\,y = 0{,}217 \\ 0{,}457\,x + 0{,}330\,y = 0{,}127 \end{cases}$$

escalerizando:

la 2ª ecuación $- \frac{0{,}457}{0{,}780} \cdot$ la 1ª ecuación

$$\left(0{,}330 - \frac{0{,}457}{0{,}780} \cdot 0{,}563\right) y = 0{,}127 - \frac{0{,}457}{0{,}780} \cdot 0{,}217$$

$$8{,}2 \cdot 10^{-5}\, y = -1{,}62 \cdot 10^{-4}$$

$$y^* = -1{,}98 \longrightarrow x^* = 1{,}71$$

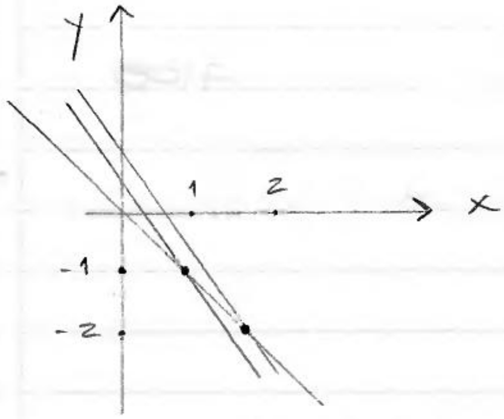
Solución exacta $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

Llegué a una solución que no tiene nada que ver con la solución exacta. Si sustituyo x^* e y^* en las ecuaciones:

$$0{,}78 \cdot 1{,}71 + 0{,}563\,(-1{,}98) - 0{,}217 = 0{,}00206$$

$$0{,}457 \cdot 1{,}71 + 0{,}33\,(-1{,}98) - 0{,}127 = 0{,}00107$$

(x^*, y^*) se comporta como una solución en el sentido que "casi" verifica las ecuaciones, el vector residuo es muy pequeño.



El ángulo entre las dos rectas es muy pequeño y la representación de ellas en la PC puede resultar en una recta paralela y por consiguiente el punto de corte ser muy lejano

Podría utilizar mayor presición al realizar los cálculos pero al realizar los cálculos con una PC la presición tiene un limite.

Ejemplo: Cálculo derivada: lim cociente incremental

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

si h es pequeño: $\Delta_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx f'(x)$

$f(x) = e^x$, $x_0 = 1$ $\quad f'(x_0) = e = 2{,}7183$

$\Delta_h = \frac{e^{1+h} - e}{h}$

h	Δ_h	error
1	4,67	$-1{,}95$
$1/10$	2,8588	$-1{,}4 \cdot 10^{-1}$
$1/100$	2,7319	$-1{,}36 \cdot 10^{-2}$
⋮		
$1/10^8$	2,7183	$6{,}6 \cdot 10^{-9}$
$1/10^9$		$-6{,}59 \cdot 10^{-7}$
⋮		
$1/10^{14}$		$-3{,}5 \cdot 10^{-2}$

Hay un h óptimo para el cual obtengo la mejor aproximación por cociente incremental

Notación Binaria.

Usamos 2 dígitos: 0 y 1

Teorema:

Cualquier número real α se puede escribir como

$$\alpha = \sum_{k=0}^{k=N} a_k 2^k + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \cdot \frac{1}{2^j}$$

$a_k = 0$ ó 1 $\qquad b_j = 0$ ó 1.

$$[\alpha]_2 = a_N\, a_{N-1} \dots a_1\, a_0 \,,\, b_1\, b_2 \dots$$

Ejemplo $3{,}25 = 2+1+1.\frac{1}{4} = 1.2^1 + 1.2^0 + 1.2^{-2}$

$$(3{,}25)_{10} = (11{,}01)_2$$

Como pasar de decimal a binario.

ej: 18,275

$$\begin{array}{lllll}
18 & \underline{|2} & & & \\
0 & 9 & \underline{|2} & & \\
 & 1 & 4 & \underline{|2} & \\
 & & 0 & 2 & \underline{|2} \\
 & & & 0 & 1
\end{array}$$

$$18 = \underset{0}{0.2^0} + \underset{2}{1.2^1} + \underset{0}{0.2^2} + \underset{0}{0.2^3} + \underset{16}{1.2^4} = 18$$

Para hallar los b_j tomo la parte fraccionaria y la voy multiplicando por 2.

$$\left.\begin{array}{l}
0{,}275 \times 2 = 0{,}55 < 1 \longrightarrow b_1 = 0 \\
0{,}55 \times 2 = 1{,}\underline{10} \geq 1 \longrightarrow b_2 = 1 \\
0{,}10 \times 2 = 0{,}20 < 1 \longrightarrow b_3 = 0
\end{array}\right\} \text{parte no periódica}$$

$0{,}2 \times 2 = 0{,}4 < 1 \longrightarrow b_4 = 0$

$0{,}4 \times 2 = 0{,}8 < 1 \longrightarrow b_5 = 0$

$0{,}8 \times 2 = 1{,}6 \geq 1 \longrightarrow b_6 = 1$

$0{,}6 \times 2 = 1{,}2 \geq 1 \longrightarrow b_7 = 1$

$0{,}2 \times 2 = 0{,}4 < 1 \longrightarrow b_8 = 0$

vuelvo a

parte periódica

$\longrightarrow 18{,}275 = 10010{,}01\overline{0011}\ldots$

Hay números que tienen representación finita en base 10 pero al pasar a binario pasan a tener representación infinita.

Como pasar de binario a decimal

ej: $(1010{,}101)_2 =$

$$2^3 + 2^1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^3} = 8 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 10 + 0{,}5 + 0{,}125$$
$$= 10{,}625$$

Representación en punto flotante:

IEEE 754 Floating Point Standard (1985)

Dos formatos básicos: Simple presición (32 bits)
Doble presición (64 bits)

Un número a se almacena en 3 campos
- un signo s
- un exponente e
- una mantisa m

La representación r de a en el caso normal es:

$$r = (-1)^s . (1m) . 2^e$$

FORMATO	Nº de bits	S	m	e	emin	emax
Simple	32	1	23	8	-126	127
Doble	64	1	52	11	-1022	1023

Número mas grande que se puede representar (realmax)

Simple $\sim$ $2{,}0 \cdot 2^{127} \approx 3{,}4028 \cdot 10^{38}$

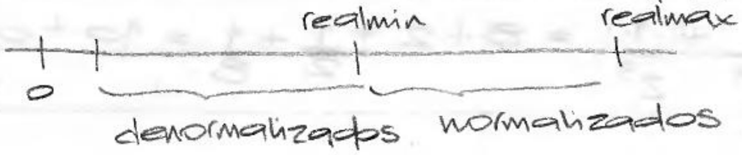
Doble $\sim$ $2{,}0 \cdot 2^{1023} \approx 1{,}7977 \cdot 10^{308}$

¿Cual es el número normalizado positivo más chico que puedo representar?

$1{,}00\ldots0 \cdot 2^{emin}$ = realmin
- simple $2^{-126} \approx 1{,}175 \cdot 10^{-38}$
- doble $2^{-1022} \approx 2{,}2251 \cdot 10^{-308}$

Un exponente $e = emin - 1$ y $m \neq 0$ significa que el número es denormalizado $v = (-1)^s (0\,m) \cdot 2^{emin}$

El número mas chico denormalizado que se puede representar es
- simple $2^{-126-23} \approx 1{,}4 \cdot 10^{-45}$
- doble $2^{-1022-52} \approx 4{,}94 \cdot 10^{-324}$



Un resultado mayor que realmax es OVERFLOW

" " menor que el número denormalizado mas peq. es UNDERFLOW — En Matlab se le asigna el valor 0

Otra forma de almacenar: NAN: Not a number

x ej 0/0, log 0, ...

En la norma se admiten dos formas de aproximación:

Redondeo (rounding): el num. representable mas cercano

Truncamiento (chopping): el " " $\leq$ " "

Ejemplo: Base 10, mantisa de 4 digitos, exp de 2 digitos

$\alpha = 1{,}234 \cdot 10^{0} + \beta = 5{,}678 \cdot 10^{-4} = 1{,}234 + 0{,}0005678$

$= 1{,}2345678$
- Redondeo: $1{,}235 \cdot 10^{0}$
- Truncamiento: $1{,}234 \cdot 10^{0}$

Matlab utiliza redondeo.

12/08

Epsilon de la Máquina (EM)

Def: Es el número en punto flotante, positivo, mas pequeño que se puede sumar a 1 y obtener un número en punto flotante > 1

depende de: - simple presicion ó doble presición
- si la aproximación es por redondeo o por truncamiento

Ejemplo: supongamos una aritmética con 4 digitos decimales

$\rightarrow$ EM = 0,001 si se trunca
EM = 0,0005 si se redondea

Si trunco:

$1{,}0 + 0{,}001 = 1{,}001$

$1{,}0 + 0{,}000999 = 1{,}000999$ — lo almacena como 1,0

Si redondeo:

$1{,}0 + 0{,}00051 = 1{,}00051$ — lo almacena como 1,001

$1{,}0 + 0{,}00049 = 1{,}00049$ — " " 1,0

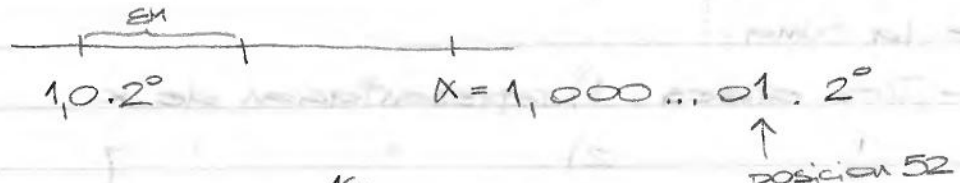
En Matlab que usa doble presición y redondea

$EM = 2{,}22 . 10^{-16}$

simple presición con redondeo $2^{-24} + 2^{-47} \cong 6{,}0 . 10^{-8}$

En doble presición:

64 bits $\rightarrow$ s = 1 bit m = 52 bits



$\rightarrow EM = \frac{1}{2^{52}} \cong 2{,}22 . 10^{-16}$

SHIFT OUT: Es cuando en una suma x + y = x, esto ocurre si |x| es muy grande respecto a |y|

$x+y = x(1+y/x)$

Si $(y/x) < \varepsilon_M \to x+y$ se almacena como x.

Error de representación:

Es el error que se comete al almacenar un valor.

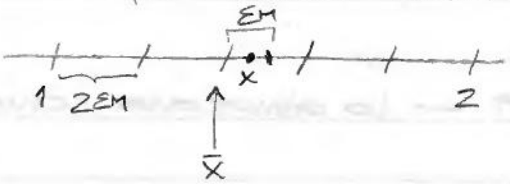
Sea x un valor y $\bar{x}$ el valor almacenado

Prop: El error relativo de la representación es $\le \varepsilon_M$.

Error relativo: $\dfrac{\bar{x}-x}{x} = \dfrac{x(1+\delta x)-x}{x} = \delta x$

$|\text{Error relativo}| = \delta x < \varepsilon_M$

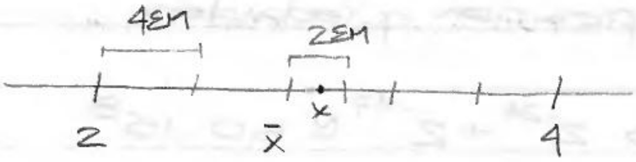
Se tiene: entre dos potencias consecutivas de 2 tenemos la misma cantidad de numeros en pto. flotante.



$|\bar{x}-x| \le \varepsilon_M$

$\left|\dfrac{\bar{x}-x}{x}\right| < \left|\dfrac{\bar{x}-x}{1}\right| \le \varepsilon_M$

$\to |\delta x| \le \varepsilon_M$



$|\bar{x}-x| \le 2\varepsilon_M$

$\left|\dfrac{\bar{x}-x}{x}\right| \le \left|\dfrac{\bar{x}-x}{2}\right| \le \dfrac{2\varepsilon_M}{2} = \varepsilon_M$

Error de la suma:

$x+y$ → Tres errores:
1) representación de x
2) " " y
3) puede haber error en la suma de 2 num en punto flotante (x ej: $1+2^{-100}=1$)

supongamos x e y positivos

$x \to \bar{x}$

$y \to \bar{y}$ $\qquad |\text{Error relativo}| = \left| \dfrac{(\bar{x}+\bar{y}) - (x+y)}{(x+y)} \right|$

$$= \frac{|(\bar{x}-x)+(\bar{y}-y)|}{(x+y)} \leq \frac{|\bar{x}-x|}{x+y} + \frac{|\bar{y}-y|}{x+y}$$

$\bar{x} = x(1+\delta x)$ $\quad \to \quad = \dfrac{x|\delta x|}{x+y} + \dfrac{y|\delta y|}{x+y} \leq \dfrac{x\,\varepsilon_M}{x+y} + \dfrac{y\,\varepsilon_M}{x+y} = \varepsilon_M$

$\bar{y} = y(1+\delta y)$

Cancelación catastrófica:

En una resta podemos tener un error relativo muy grande cuando x e y son parecidos.

Ejemplo: Raíces de $x^2 - 56x + 1 = 0$

$r = 28 \pm \sqrt{783}$

tomo la raíz con 5 dígitos correctos

$r_1 = 28 + 27{,}982 = 55{,}982 \pm 1/2 \cdot 10^{-3}$

$r_2 = 28 - 27{,}982 = 0{,}018 \pm 1/2 \cdot 10^{-3}$

en r_2 se obtienen solo 2 dígitos significativos y el error relativo $< 10^{-2}$

Solución: Usamos relaciones entre coeficientes y raíces

$r_1 \cdot r_2 = 1 \longrightarrow r_2 = \dfrac{1}{r_1} = \dfrac{1}{55{,}982} = 0{,}017863$

término independiente

14/08

Error de truncamiento - Cociente incremental

$$\Delta_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \underset{\text{Taylor}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{f(x) + f'(x)h + f''(c)\frac{h^2}{2} - f(x)}{h} \qquad c \in [x, x+h]$$

$$= f'(x) + f''(c)\frac{h}{2}$$

Error de truncamiento: $\Delta_h f(x) - f'(x) = f''(c)\frac{h}{2}$

Error total del cociente incremental:
cuando calculamos $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ los valores $f(x+h)$ y $f(x)$ no van a ser en general exactos ya que vamos a operar con sus representaciones en punto flotante.

$f(x+h) \longrightarrow \overline{f(x+h)}$

$f(x) \longrightarrow \overline{f(x)}$

$$\text{Error total} = \frac{\overline{f(x+h)} - \overline{f(x)}}{h} - f'(x)$$

$$= \underbrace{\frac{\overline{f(x+h)} - \overline{f(x)}}{h} - \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\text{Error de redondeo}} + \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)}_{\text{Error de truncamiento}}$$

$|E_{trunc}| = f''(c)\frac{h}{2}$

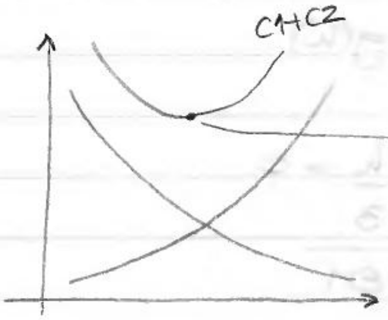
$$\frac{\overline{f(x+h)} - f(x+h)}{h} + \frac{f(x) - \overline{f(x)}}{h}$$

$$|\text{Error de redondeo}| \leq \left| \frac{\overline{f(x+h)} - f(x+h)}{h} \right| + \left| \frac{f(x) - \overline{f(x)}}{h} \right|$$

Si tenemos un valor $y \longrightarrow \overline{y} = (1 + \delta_y) y$ con $|\delta_y| \leq \varepsilon_M$

$$\leq \frac{|f(x+h)|\,\varepsilon_M}{h} + \frac{|f(x)|\,\varepsilon_M}{h} \simeq \frac{2|f(x)|\,\varepsilon_M}{h}$$ si h es chico $\rightarrow f(x+h) \sim f(x)$

$$\Rightarrow |\text{Error total}| \leq \underbrace{\frac{2|f(x)|}{h}\varepsilon_M}_{\text{crece cuando } h \text{ disminuye}} + \underbrace{|f''(c)|\frac{h}{2}}_{\text{crece cuando } h \text{ aumenta}} = C_1 + C_2$$



valor que minimiza la función: es donde tengo el menor error.

$$\frac{d\,\overline{C}(h)}{d(h)} = 0 = \frac{-2|f(x)|\,\varepsilon_M}{h^2} + \frac{|f''(x)|}{2}$$

$$h \text{ óptimo} = 2\sqrt{\frac{|f(x)|}{|f''(x)|}\,\varepsilon_M}$$

Si $f(x)$ y f'' tienen orden de magnitud parecida

$\rightarrow$ regla empírica $h\text{óptimo} \simeq 2\sqrt{\varepsilon_M}$: en matlab 10^{-8}.

Para mejorar lo anterior $\rightarrow$ 1) Usar otra fórmula para aproximar $f'(x)$

2) Extrapolación de Richardson

1) Usar en vez de $\Delta_h f(x)$ la diferencia centrada $= \delta_h f(x)$

$$\delta_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Error de truncamiento de $\delta_h f(x)$

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{\left(\cancel{f(x)} + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} + \dots\right) - \left(\cancel{f(x)} - f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} - f'''(x)\frac{h^3}{3!} + \dots\right)}{2h}$$

$$\rightarrow \delta_h f(x) = f'(x) + f'''(x)\frac{h^2}{3!} + \alpha h^4 + \dots$$

$\rightarrow \delta_h f(x) = f'(x) + f'''(c)\dfrac{h^2}{3!} \quad c \in [x-h, x+h]$

$\delta_h f(x)$ tiene un error de truncamiento $= f'''(c)\dfrac{h^2}{3!}$

Para este caso llegamos a:

$$|\text{Error total}| \leq \frac{|f(x)|\,\varepsilon_M}{h} + |f'''(c)|\frac{h^2}{3!} = g(h)$$

$$h_{óptimo}: \frac{dg(h)}{dh} = -\frac{|f(x)|\,\varepsilon_M}{h^2} + |f'''(c)|\frac{h}{3} = 0$$

$$h_{óptimo} = \sqrt[3]{\frac{3|f(x)|\,\varepsilon_M}{f'''(c)}} \qquad h_{óptimo} \simeq \sqrt[3]{\varepsilon_M}$$

ejemplo: $f(x) = e^x \quad x = 1 \quad f'(1) = e$

$\Delta_h f(1)$: $h_{opt} \simeq 10^{-6}$ error $= 1{,}36 \cdot 10^{-6}$
$h_{opt} \simeq 10^{-5}$ error $= 8{,}58 \cdot 10^{-10}$

2) Extrapolación de Richardson

$$\delta_h f(x) = f'(x) + \frac{h^2}{6} f'''(x) + \frac{h^4}{120} f^{(5)}(x) + \ldots$$

$$\delta_{h/10} f(x) = f'(x) + \frac{1}{100}\frac{h^2}{6} f'''(x) + \frac{1}{10000}\frac{h^4}{120} f^{(5)}(x) + \ldots$$

si combinamos las dos anteriores:

$$\frac{100\,\delta_{h/10} - \delta_h}{99} = f'(x) - \frac{h^4}{100 \cdot 120} f^{(5)} x + \ldots$$

$\rightarrow$ la expresión $\dfrac{100\,\delta_{h/10} - \delta_h}{99}$ es una mejor aproximación de $f'(x)$ que $\delta_{h/10}$.

En la práctica se escribe como:

$\delta_{h/10} + \dfrac{\delta_{h/10} - \delta_h}{99}$ es menos suceptible a errores de redondeo.

Obs: no necesito saber el coef de h^4, solo saber que el de h^3 es 0.

Ejemplo: $f(x) = e^x$ $\quad x=1$ $\quad f'(1) = e$

h	δh	Error δh	Valor extrapolado	Error valor extrapolado
10^0	3,19...	$4,7 \cdot 10^{-1}$		
10^{-1}	2,7...	$4,5 \cdot 10^{-3}$	2,718...	$-2,3 \cdot 10^{-4}$
10^{-2}		$4,5 \cdot 10^{-5}$		$-2,2 \cdot 10^{-8}$

$$\delta_{1/10} + \frac{\delta_{1/10} - \delta_1}{99}$$

La mejor estimación extrapolada tiene error $9 \cdot 10^{-12}$
sin extrapolar tenemos el mejor error $\simeq 10^{-9}$

Extrapolación de Richardson repetida:
Si llamamos R_h a los valores extrapolados obtenidos

$$R_h = f'(x) + c_1 h^4 + c_2 h^6 + \ldots$$

$$R_{h/10} = f'(x) + \frac{c_1 h^4}{10000} + \frac{c_2 h^6}{1000000} + \ldots$$

$$\frac{10000 \, R_{h/10} - R_h}{9999} = f'(x) + k h^6 + \ldots = R^{(2)}_h$$

h	δh	Error δh	Error R_h	Error $R_h^{(2)}$
10^0	3,19...	$4,7 \cdot 10^{-1}$	x	x
10^{-1}	2,7...	$4,5 \cdot 10^{-3}$	$-2,3 \cdot 10^{-4}$	x
10^{-2}		$4,5 \cdot 10^{-5}$	$-2,26 \cdot 10^{-8}$	$5,4 \cdot 10^{-10}$

el mejor es 10^{-13}

19/08

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Teorema: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\Rightarrow \Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \sigma \Delta x)\, \Delta x_i \quad \text{con } \sigma \in [0,1]$$

dem: Por Taylor $f(x+\Delta x) = f(x) + df\big|_x \Delta x + (\Delta x)^t \frac{d^2 f}{2}\Big|_x (\Delta x) + \dots$

o bien $f(x + \Delta x) = f(x) + df\big|_{x+\sigma\Delta x} \Delta x$

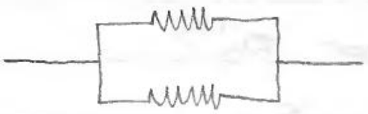
$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right), \quad \Delta x = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix}$$

$$\to f(x+\Delta x) = f(x) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x + \sigma\Delta x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x+\sigma\Delta x) \right)$$

$$\to f(x+\Delta x) = f(x) + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \sigma\Delta x) \cdot \Delta x_i$$

además: $\displaystyle |f(x+\Delta x) - f(x)| \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \sigma\Delta x) \right| |\Delta x_i|$

Ejemplo: resistencia en paralelo:



resistencia equivalente

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \qquad R = \frac{xy}{x+y}$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{y^2}{(x+y)^2} \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{x^2}{(x+y)^2}$$

Si $x = 1{,}523 \pm 0{,}5 \cdot 10^{-3}$

$y = 2{,}214 \pm 0{,}5 \cdot 10^{-3}$

$$|\Delta R| \leq \frac{2{,}214^2}{(1{,}523 + 2{,}214)^2} \left(\tfrac{1}{2} \cdot 10^{-3}\right) + \frac{1{,}523^2}{(1{,}523 + 2{,}214)^2} \cdot 10^{-3} = 6{,}6 \cdot 10^{-4}$$

$\rightarrow R = 0{,}9023 \pm 6{,}6 \cdot 10^{-4}$

SISTEMAS DE ECUACIONES

$Ax = b$ — A matriz $n \times n$ no singular (invertible)

$b \in \mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$) dato.

$x \in \mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$) incógnita

x, b vectores columna (matrices $n \times 1$)

Descomposición LU de A. (L: lower, U: upper)

la idea es escribir $A = L \cdot U$ donde L es de la forma

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ L_{21} & 1 & & 0 & \\ \vdots & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ L_{n1} & \cdots & & L_{nn-1} & 1 \end{bmatrix}$$

es triangular inferior con 1 en la diagonal

y $$U = \begin{bmatrix} U_{11} & \cdots & & U_{1n} \\ & U_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & U_{nn} \end{bmatrix}$$

es triangular superior.

¿para que sirve?

$Ax = b$

$LUx = b$ si $Ux = y$ entonces $Ly = b$

este sistema es triangular $\rightarrow$ está escalerizado $\rightarrow$ se resuelve facilmente

pues sus sistemas son triangulares

$Ux=y$ back sustitution
$Ly=b$ forward sustitution

$Ly=b$ $\quad L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ L_{21} & 1 & & \\ \vdots & & 1 & \\ \vdots & & & 1 \\ L_{n1} & & L_{nn-1} & 1 \end{bmatrix}$

$y_1 = b_1$
$y_2 = b_2 - L_{21} y_1$
$y_3 = b_3 - L_{31} y_1 - L_{32} y_2$
$\vdots$
$y_k = b_k - \sum_{j=1}^{j=k-1} L_{kj} y_k$
$\vdots$
$y_n = b_n - \sum_{j=1}^{n-1} L_{nj} y_j$

$Ux=y \quad x_n = \frac{y_n}{U_{nn}}$

$x_{n-1} = \frac{y_{n-1} - U_{n-1,n} x_n}{U_{n-1,n+1}}$

$\vdots$

$x_{n-k} = y_{n-k} = \frac{y_{n-k} \sum_{j=1}^{k} U_{n-k,n-k+j}}{U_{n-k,n-k}}$

$\vdots$

x_1

flop: floating point operations
flop: 1 operación de punto flotante
En MATLAB: flops cuenta la cantidad de operaciones en punto flotante.

Cuanto me cuesta resolver el sistema (en flops) para cada ecuación $2xk-1$
en total $2(1+2+3+\ldots+n-1) = (n-1)(n) \sim$ orden (n^2)
1° sistema.

El 2° sistema hay que adjuntarle n divisiones:
cuesta $n^2 - \cancel{n} + \cancel{n}$ sigue siendo de orden n^2

¿Como hallar la descomposición LU?
Se basa en el algoritmo de escalerización (eliminación gaussiana)

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -6 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ F2 - 2F1 \longrightarrow L21 = 2 \\ F3 - 3F1 \longrightarrow L31 = 3 \\ F4 - 2F1 \longrightarrow L41 = 2 \end{array}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & -4 \\ 0 & 0 & -10 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{ll} & \\ & \\ F3 + F2 & L32 = -1 \\ F4 + F2 & L42 = -1 \end{array}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = U \qquad \longrightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$F4 - F3 \quad L43 = 1$

Ejemplo $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ L & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & u^{11} \\ 0 & u^{1} \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} u & u^{11} \\ L\cdot u & Lu^{11} + u^{1} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 0 = u \\ 1 = u^{11} \\ Lu = 1 \\ Lu^{11} + u^{1} = 0 \end{cases}$$

incompatible

la matriz A no tiene descomposición LU

Si intercambio filas me queda la matriz identidad $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ la cual tiene descomposición LU

En gral: Si A es invertible nxn entonces hay una permutación de filas de A tal que la matriz resultado tiene descomposición LU.

Si en la escalerización hay que necesariamente en algún momento intercambiar filas $\rightarrow$ A no tiene descomposición LU.

Estas matrices son aquellas tales que sus n determinantes diagonales son $\neq 0$

$\rightarrow a_{11} \neq 0$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$

21/08

PIVOTEO

Ejemplo
$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2{,}099 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3{,}901 \\ 6 \end{pmatrix}$$
Solución exacta $(0, -1, 1)$

Escalerizamos y operamos con 5 dígitos significativos.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & -0{,}001 & 6 & 6{,}001 \\ 0 & 2{,}5 & 5 & 2{,}5 \end{array}\right)$$
si seguimos adelante

$$\underbrace{(5+\underbrace{(2{,}5.10^{3}).6}_{1{,}5.10^{4}})}_{1{,}5005.10^{4}} x_3 = \underbrace{(2{,}5+\underbrace{(2{,}5.10^{3}).6{,}001}_{1{,}50025.10^{4} \text{ se redondea a } 1{,}5002.10^{4}})}_{\text{se redondea a } 1{,}5004.10^{4}}$$

$$\rightarrow x_3 = \frac{1{,}5004}{1{,}5005} = 0{,}99993$$

para x_3 es una buena aproximación, desafortunadamente x_2 debe despejarse de $-0{,}001x_2 + 6.\,0{,}99993 = 6{,}001$

$$\rightarrow x_2 = \frac{1{,}4.10^{-3}}{-1{,}0.10^{-3}} = -1{,}4$$

y en la primera ecuación $x_1 = -0{,}28$.

La solución obtenida es muy distinta de la solución exacta

Si en el segundo paso intercambiamos la 2ª fila con la 3ª

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & 2{,}5 & 5 & 2{,}5 \\ 0 & -0{,}001 & 6 & 6{,}001 \end{array}\right) \rightarrow \text{el siguiente paso quedaría}$$

$$\underbrace{(6+\underbrace{\frac{0{,}001}{2{,}5}}_{\text{multiplicador}}.5)}_{6{,}002} x_3 = \underbrace{6{,}001 + \frac{0{,}001}{2{,}5}.2{,}5}_{6{,}002}$$

$x_3 = 1$

de la segunda ecuación:

$2{,}5x_2 + 5.1 = 2{,}5$

$\rightarrow x_2 = -1$

de la primera ecuación:

$10x_1 - 7.1 + 0 = 7 \rightarrow x_1 = 0$

Intercambio filas adecuadamente de modo de utilizar multiplicadores pequeños.

Estrategias de pivoteo mas usadas:

1) Pivoteo Parcial $(O(n^2))$

si estamos en la posición a_{kk} en la escalerización buscamos el elemento de mayor valor absoluto en $\{a_{kk}, a_{k+1\,k}, \dots, a_{nk}\}$

Sea r la fila tal que $|a_{rk}|$ es ese valor → a continuación intercambiamos la fila k con la fila r. Tenemos que comparar $n+1-k$ números. Con esto los multiplicadores del siguiente paso son ≤ 1.

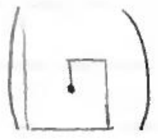
2) Pivoteo Total $(O(n^3))$

Identificamos el mayor en valor absoluto. Sea a_{rs}

Intercambiamos fila k con fila r, columna k con columna s.

En cada etapa hay que hacer $(n+1-k)^2$ comparaciones.

3) Rook Pivoting



Intermedio entre Parcial y total.

Identifico el mas grande de la columna.

Si es el mas grande de la fila → fin

si no es así → me muevo a esa nueva posición y repito. Continua encontrar uno que es el más grande de la fila y de la columna.

Intercambio fila y columna del encontrado.

P = matriz de permutación = matriz que es el resultado de permutar filas en la matriz identidad

Entrada: A $n \times n$ invertible.

Salida: P matriz de permutación

L triangular inferior con 1 en la diagonal

U " superior

tales que $\underbrace{PA}_{\uparrow} = LU$

permutación de filas de A

1) Hacer P la matriz identidad $n \times n$, idem L
2) Para i variando entre 1 y n hacer:
3) Pivoteo parcial: Buscar el primer j tal que $|a_{ji}|$ sea máximo de $\{|a_{ii}|, |a_{i+1\,i}|, \dots, |a_{ni}|\}$
Intercambiar en P la fila i con la fila j
" " L " " i " " " j pero dejamos los 1 de la diagonal sin cambiar.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ L_{21} & 1 & & \\ L_{31} & L_{32} & 1 & \\ L_{41} & L_{42} & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{F3 con F4}]{\text{intercambiar}} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ L_{21} & 1 & & \\ L_{41} & L_{42} & 1 & \\ L_{31} & L_{32} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4) Para $j > i$ hasta $j = n$ hacer: $L_{ji} = \dfrac{a_{ji}}{a_{ii}}$

cambiar la fila F_j de A por $F_j - L_{ji} F_i$
5) incrementar i en 1 y volver a 2)
Al finalizar tenemos como último valor de A a U.

Aplicación:
$Ax = b$
Hallo las matrices P, L, U
— $APx = Pb$
— $LUx = Pb = b'$
— $LUx = b' \rightarrow \begin{cases} 1) & Ly = b' \\ 2) & Ux = y \end{cases}$

Costo operacional de hallar la LU.
en el primer momento:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

$i = 1$ Calculo de los multiplicadores

$l_{21} = \dfrac{a_{21}}{a_{11}}, \dots, l_{n1} = \dfrac{a_{n1}}{a_{11}}$

$n-1$ divisiones

$(n-1)$ veces $\left\{ \begin{array}{l} F_2 - l_{21}F_1 \\ F_3 - l_{31}F_1 \\ \vdots \\ F_n - l_{n1}F_1 \end{array} \right.$

$F_2 - l_{21}F_1 : (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) - l_{21}(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$
$= (0, a_{22} - l_{21}a_{12}, \dots, \underbrace{a_{2n} - l_{21}a_{1n}}_{\text{2 operaciones}})$

cuesta $2(n-1)$

$\rightarrow$ en total $\quad 2(n-1)^2 + n \quad$ (para $i=1$)
$2(n-2)^2 + n-1 \quad$ (para $i=2$)
$\vdots$
$2(1)^2 + 2 \quad$ (para $i = n-1$)

$\text{Total} = 2(1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2) + 2 + 3 + \dots + n$

$1 + 2^2 + \dots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$1 + 2 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Costo total : $\dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{6} + \dfrac{n(n+1)}{2}$

$= \dfrac{2}{3}n^3 + \dots \quad \simeq \Theta(n^3)$ (orden n^3)

Teo 26/08.

$Ax = b$

$A \longrightarrow L.U$ cuesta $\frac{2n^3}{3} + \dots = O(n^3)$.

$L.Ux = b$ $\begin{cases} Ly = b & \text{cuesta } n^2 + \dots = O(n^2) \\ Ux = y & \text{" } \quad n^2 + \dots = O(n^2) \end{cases}$

$Ax = b$ costaría $\frac{2n^3}{3} + \dots + n^2 + \dots + n^2 + \dots = \frac{2}{3}n^3 + \dots + 2n^2 + \dots$

Un solo sistema $Ax = b$, escalerizando, cuesta $\frac{2}{3}n^3 + \dots$

Supongamos un programa en el cual hay que resolver varios sistemas: $Ax = b_k$ $k = 1, 2, \dots, N$.
Si cada vez escalerizo, la parte de resolver los sistemas estaría costando: $N\left(\frac{2}{3}n^3 + \dots\right)$

Si hago la LU de A en el principio y luego la uso para cada sistema: $\frac{2}{3}n^3 + N(2n^2) + \dots$

Si $N > 1$ el 2° valor es más chico.

Cálculo de la inversa de A

A^{-1} verifica: $AX = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} = I_{n,n}$.

$\longrightarrow$ (igualdad de la columna k-ésima) $= AX^{(k)} = e^k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ← pos k

esto costaría, con el esquema anterior

$\frac{2}{3}n^3 + \dots + n(2n^2 + \dots) = \frac{8}{3}n^3 + \dots = O(n^3)$

Si quiero hacer A.B con A y B matrices $n \times n$.
Hay que calcular las n^2 posiciones:

$$(A.B)_{i,j} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}\, b_{kj} = (a_{i1} b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj})$$

cuesta n productos y $n-1$ sumas

A.B cuesta $n^2(2n-1)$ flops $= 2n^3 + \dots = O(n^3)$

Def: Sea A, $n \times n$, real, simétrica
A es definida positiva si $x^t A x > 0 \ \forall x \neq \vec{0}$

Teorema: los valores propios de A son positivos.
dem: Por el teorema espectral los valores propios son reales
Sea λ un valor propio y $v \neq \vec{0}$ un vector propio asociado.

$$\rightarrow v^t A v = v^t(\lambda v) = \lambda v^t v = \lambda \underbrace{\|v\|^2}_{\neq 0} > 0 \Rightarrow \lambda > 0.$$

Además los determinantes diagonales de A son positivos
(vale el recíproco: si los det. diag. son positivos $\Rightarrow$ A definida positiva)

ejemplo:
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad 2 > 0.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 2 - 3 = 1 > 0.$$

A es definida positiva.

Factorización de Choleski $A = L.L^t$
A real simétrica definida positiva.

L es triangular inferior $L = \begin{bmatrix} l_{11} & & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \\ \vdots & & \ddots \\ l_{n1} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$

$A = L \cdot L^t$

$$a_{ik} = \sum_{j=1}^{j=k} l_{ij} \cdot l_{kj} \qquad i > k$$

$$\rightarrow a_{ik} = \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} \cdot l_{kj} + l_{ik} l_{kk} \Rightarrow l_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} l_{kj}}{l_{kk}} \qquad i > k$$

$$\text{además } a_{kk} = \sum_{j=1}^{j=k} l_{kj}^2 = \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2 + l_{k,k}^2 \rightarrow l_{k,k} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}$$

(sub radical es > 0 xq' A es def. positiva)

$k = 1, \ldots, n$

$l_{11} \rightarrow l_{21} \rightarrow \ldots \; l_{n1}$

$l_{22} \rightarrow l_{32} \rightarrow \ldots \; l_{n2}$

$\vdots$

$l_{n-2,n-1} \quad l_{n,n-1}$

l_{nn}.

ejemplo:
$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 4 \\ -4 & 4 & 17 \end{bmatrix}$$

$$l_{11}^2 = a_{11} = 4 \rightarrow l_{11} = 2$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$l_{22} = \sqrt{2 - l_{21}^2} = \sqrt{2 - (-1)^2}$$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - \sum_{k=1}^{1} l_{3j} l_{2j}}{l_{22}} = \frac{a_{32} - l_{31} l_{21}}{l_{22}} = \frac{(4) - (-2)(-1)}{1} = 2$$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{17 - 4 - 4} = 3.$$

$$\rightarrow L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad L \cdot L^t = A.$$

Ventajas: 1) mitad de operaciones que la L.U.

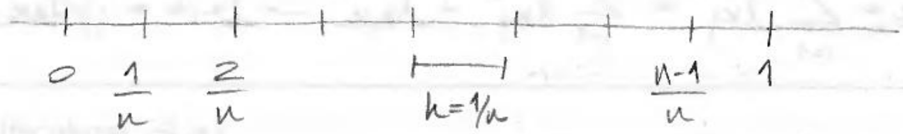
2) es estable sin necesidad de pivoteo porque

$$a_{kk} = \sum_{j=1}^{k} l_{kj}^2 \longrightarrow l_{kj} \leq \sqrt{a_{kk}} \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k.$$

Ejemplo:

$$y'' + f(x)y = g(x) \qquad y(0) = a$$
$$y(1) = b.$$

f, g conocidas, y función a determinar.



$$x_i = \frac{i}{n} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots n.$$

$$y''(x_i) \approx \frac{y(x_{i-1}) - 2y(x_i) + y(x_{i+1})}{h^2} = \frac{y(x_i - h) - 2y(x_i) + y(x_i + h)}{h^2}$$

$$= \frac{\cancel{y(x_i)} - \cancel{y'(x_i)h} + y''(x_i)\frac{h^2}{2} - \cancel{y'''(x_i)\frac{h^3}{6}} + y''''(x_i)\frac{h^4}{24} + \ldots - \cancel{2y(x_i)} + \ldots}{h^2}$$

$$= y''(x_i) + y''''(x_i)\frac{h^2}{12} + \ldots$$

$$\Delta^2 y = y''(x_i) + y''''(c_i)\frac{h^2}{12}$$

$$y''(x_i) \Big/ \quad \frac{y(x_{i-1}) - 2y(x_i) + y(x_{i+1})}{h^2} = \Delta^2 y.$$

Ecuación k-ésima:

$$y''(x_k) + f(x_k)y(x_k) = g(x_k)$$
$$\frac{y(x_{k-1}) - 2y(x_k) + y(x_{k+1})}{h^2} - f(x_k)y(x_k) = g(x_k)$$

$$y_k = y(x_k)$$

$1/h^2$

Sistema queda:
$$\begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \\ \vdots \\ g(x_{n-1}) \end{pmatrix}$$

$f(x_k) = \frac{2}{h^2}$

$1/h^2$

sistema
tridiagonal

28/08

MATLAB: RETROBARRA (\)

Sistema: $Ax = b$

Solución MATLAB: $x = A \backslash b$.

Si b es una matriz $n \times k$ $A\backslash b$ es una matriz x $n\times k$ tal que $Ax = b$.

$A \backslash b$ matemáticamente es equivalente a $A^{-1} b$ ($\overset{\text{Matlab}}{=}$ inv(A) * b)

NORMA:

Norma de un vector:

$\|\ \| : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ (o $\mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$)

1) $\|u\| \geq 0$, $\|u\| = 0 \leftrightarrow u = \vec{0}$

2) $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$

3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (desigualdad triangular)

Norma p: $p \geq 1$, p real.

$$\|x\|_p = \|(x_1, x_2, \dots, x_k)\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_k|^p\right)^{1/p}$$

En particular: $p = 2$: norma euclidiana

$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_k|^2}$$

$p = 1$: norma 1.

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_k|$$

norma infinito: $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq k} \{|x_i|\}$ $\left(= \lim\limits_{p \to +\infty} \|x\|_p\right)$

Ejemplo:

$\|(1,2)\|_1 = 3$

$\|(1,2)\|_2 = \sqrt{5}$

$\|(1,2)\|_\infty = 2$

Norma de una Matriz:

$\mathbb{R}^{m,n}$ = matriz real $m \times n$ ($\mathbb{C}^{m,n}$ idem complejos)

$\| \ \| : \mathbb{R}^{m,n} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que:

1) $\|A\| > 0$; $\|A\| = 0 \leftrightarrow A = 0$
2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$
3) $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$

Otras:
- $\|A \cdot B\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$ (sub-multiplicativa)
- $\|I\| = 1$
- $\|A^t\| = \|A\|$

Norma de matriz inducida por una norma de vector:

Consideremos matrices cuadradas $\in \mathbb{R}^{k \times k}$ (ó $\mathbb{C}^{k \times k}$)

En $\mathbb{R}^k$ tenemos una cierta norma: $\| \ \| : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

Def: Si A es una matriz $k \times k$

Sea $\|A\| = \max\limits_{x \neq \vec{0}} \left\{ \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \right\} = \max\limits_{\|x\|=1} \{\|Ax\|\}$

si $\|x\| \neq 1$: $\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = \dfrac{\left\| A \left(\|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|} \right) \right\|}{\left\| \|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|} \right\|} = \dfrac{\|x\|}{\|x\|} \dfrac{\left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\|}{\underbrace{\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|}_{=1}}$

$= \left\| A \cdot \dfrac{x}{\|x\|} \right\|$

Teorema: La anterior es una norma de matriz.

Propiedad: $\|Ax\| \leqslant \|A\| \|x\|$

Dem: Si $x \neq \vec{0} \to \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \leqslant \|A\| \longrightarrow \|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|$.

Si $x = \vec{0}$ tengo igualdad : $\|\vec{0}\| = \|A\| \cdot \|\vec{0}\|$

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ Calcular $\|A\|_\infty$ (= norma de matriz inducida cuando tomo en $\mathbb{R}^2$ la norma infinito: $\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$

Veamos que $\|A\|_\infty = 7$

Sean $\binom{x}{y} / \|\binom{x}{y}\|_\infty = 1$ (o sea $\max\{|x|,|y|\} = 1$)

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ 3x+4y \end{pmatrix}$$

$\to \|Ax\|_\infty = \max\{|2x+y|, |3x+4y|\} \leq 7$
$\max\{|x||y|\}=1$

$|2x+y| \leq 2|x| + |y| \leq 2+1 = 3$

$|3x+4y| \leq 3|x| + 4|y| \leq 3+4 = 7$

$\max\limits_{\|x\|=1} \{\|Ax\|\} = \|A\|$ $\to$ si $x=1, y=1$ queda $\|A\binom{1}{1}\|_\infty = 7$

$\Rightarrow \|A\|_\infty = 7$

Prop: La norma inducida es submultiplicativa.

Prop: Si A es $n \times n$
$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^{j=n} |a_{ij}| \right\}$$

ejemplo: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ $\|A\|_\infty = \max\{6,7,8\} = 8$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^{i=n} |a_{ij}| \right\}$$

para el ejemplo anterior $\|A\|_1 = \max\{5,9,7\} = 9$

$(\|A\|_2)^2 = \max\{\lambda / \lambda$ es valor propio de $\underbrace{A^t A}_{n}\}$ — Es def. pos. (por Choleski)

Def: A matriz $n \times n$

Radio espectral de A $= \rho(A) = \max\{|\lambda| / \lambda$ es valor propio de A$\}$

Prop: $\rho(A) \leq \|A\|$ si $\|\ \|$ es una norma de matriz que cumple $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$

Dem: Sea λ un valor propio de A

Sea $v \neq \vec{0}$ un vector propio asociado : $Av = \lambda v$

$\Rightarrow \|Av\| = \|\lambda v\|$

tenemos: $\|Av\| \leq \|A\|\|v\|$ y $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$

$\rightarrow |\lambda| \|v\| \leq \|A\| \|v\|$ como $v \neq \vec{0} \rightarrow \|v\| \neq 0$.

$\Rightarrow |\lambda| \leq \|A\|$ vale para todos los valores propios de A.

$\rightarrow \rho(A) \leq \|A\|$.

MÉTODOS ITERATIVOS.

$Ax = b$.

La idea es partiendo de un x inicial, $x^{(0)}$, ir generando una sucesión (en $\mathbb{R}^n$), $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots x^{(k)}, \dots$ que se intenta que converja a la solución del sistema x^* $(Ax^* = b)$

MIG: método iterativo general.

$Ax = b$ $\quad A = M + N \quad (N = A - M)$

partir A en 2 matrices.

$(M+N)x = b$.

$\Rightarrow Mx = -Nx + b$.

Esto sugiere la iteración siguiente:

$$Mx^{(k+1)} = -Nx^{(k)} + b.$$

$$Mx^{(k+1)} = (M-A)x^{(k)} + b$$

M se toma invertible: $\rightarrow x^{(k+1)} = \underbrace{M^{-1}(M-A)}_{B} x^{(k)} + \underbrace{M^{-1}b}_{f}$

$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$ $\quad$ matriz de iteración

Método de Jacobi

Se toma $M = D =$ la diagonal de A

Ejemplo: $4x + y = 5$ $\quad 4x = 5 - y$

$x + 4y = 5$ $\quad 4y = 5 - x$

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = \dfrac{5 - y^{(k)}}{4} \\ y^{(k+1)} = \dfrac{5 - x^{(k)}}{4} \end{cases}$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 5/4 \end{pmatrix} \longrightarrow x^{(2)} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/16 \\ 15/16 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \dots \longrightarrow x^{(k)} \dots$$

2/09.

Si
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$x_1^{(k+1)} = \frac{-a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1}{a_{11}} = \frac{\left(-\sum_{j\neq 1}^{n} a_{1j}x_j^{(k)}\right) + b_1}{a_{11}}$$

$\vdots$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\left(-\sum_{j\neq i} a_{ij}x_j^{(k)}\right) + b_i}{a_{ii}}$$

$$B_{JACOBI} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ & & 0 & & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & & \ddots & 0 \end{bmatrix}$$

Obs: Propiedad: Si A es invertible $\exists$ una permutación de filas de A tal que no hay ningún elemento nulo en la diagonal.

MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL:

En las formulas anteriores uso los nuevos valores calculados a medida que los voy generando:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{-\sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(k)} + b_i}{a_{ii}}$$

Ejemplo: $x_1 + 2x_2 = 3$
$2x_1 + 2x_2 = 1$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \text{Jacobi} \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{G-S} \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5/2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Para Gauss-Seidel si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Longrightarrow$

$M = \begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ tomo la matriz triangular inferior.

$$B_{G-S} = - \begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & a_{n-1\,n} \\ & & & 0 \end{bmatrix} \qquad x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$$

Estudio de la Convergencia

$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$

Supongamos x^* es la solución exacta del sistema: $Ax^* = b$

o bien $x^* = Bx^* + f$.

Error del iterado k-ésimo $(x^{(k)} - x^* = e^{(k)}$

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= Bx^{(k)} + f \\ - \; x^* &= Bx^* + f \\ \hline x^{(k+1)} - x^* &= B(x^{(k)} - x^*) \longrightarrow \boxed{e^{(k+1)} = Be^{(k)}} \end{aligned}$$

$e^{(k+1)} = Be^{(k)} = (B(Be^{(k-1)}) = B^2 e^{k-1} = \ldots B^{k+1} e^0$

$\longrightarrow \boxed{e^k = B^k e^0}$

Teorema:

El método iterativo converge $\forall x^{(0)} \leftrightarrow \rho(B) < 1$.

dem: Si $\rho(B) \geq 1 \Rightarrow \exists \lambda$, valor propio de B tal que $|\lambda| \geq 1$.

Sea $\vec{v} \neq \vec{0}$ un vector propio asociado a $\lambda \rightarrow$

$$Bv = \lambda v$$

$$B^2 v = B(Bv) = B(\lambda v) = \lambda B v = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v$$

$\vdots$

$B^k v = \lambda^k v$ Como $|\lambda| \geq 1$ $v \neq \vec{0} \Rightarrow B^k v \nrightarrow \vec{0}$

Si $e^0 = v$ (o sea $x^0 = v + x^*$) $\rightarrow e^k \nrightarrow \vec{0}$ $\rightarrow$ el método iterativo no converge

b) Supongamos que $\rho(B) < 1$.

Veamos que $B^k \rightarrow 0$ (la matriz nula)

Si B es diagonalizable $B = P^{-1} D P$ $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$$B^2 = (P^{-1} D P)(P^{-1} D P) = P^{-1} D^2 P$$

$\vdots$

$B^k = P^{-1} D^k P = P^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & 0 \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$ Como $\rho(B) < 1 \rightarrow |\lambda_i| < 1 \; \forall i$

$\lambda_i^k \rightarrow 0 \; \forall i$

Caso general: Usamos la forma canónica de Jordan.

$B = P^{-1} J P$ $J = \begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_s(\lambda) \end{bmatrix}$

$J \uparrow$ diagonal x bloques.

$$J_i(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

$$B^k = P^{-1} J^k P$$

$$J^k = \begin{bmatrix} J_1(\lambda_1)^k & & & \\ & J_2(\lambda_2)^k & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_s(\lambda_s)^k \end{bmatrix}$$

$$J_i(\lambda_i)^k = \left.\begin{bmatrix} \lambda_i^{(k)} & & & \\ & \lambda_i^{(k)} & & 0 \\ & & \ddots & \\ \cdot & & & \lambda_i^{(k)} \end{bmatrix}\right\} m_i$$

Primera diagonal inferior

$\hookrightarrow C_1^k \lambda_i^{k-1} = k\lambda_i^{k-1} \longrightarrow 0$ $\quad k \to +\infty$

$C_{m_i - s}^k \lambda_i^{k-m_i+1}$

$\hookrightarrow$ tiende a 0.

Obs: Si $\rho(B) \geq 1$ el método puede converger xa ciertos $x^{(0)}$.

Def: A es una matriz estrictamente diagonal dominante por filas si $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$

Ejemplo: $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -5 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{matrix} 3 > 2 \\ 7 > 6 \\ 8(7) \end{matrix}$

Teo: Para las matrices anteriores entonces Jacobi y Gauss-Seidel convergen.

dem: (Jacobi)

$$B_J = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1\,n-1}}{a_{11}} & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & \frac{a_{2\,n-1}}{a_{22}} & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & \cdots & -\frac{a_{n\,n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{bmatrix}$$

MN (Teo)

$$\|B_J\|_\infty = \max\left\{ \frac{|a_{12}|+|a_{13}|+\ldots+|a_{1n}|}{|a_{11}|}, \frac{|a_{21}|+|a_{23}|+\ldots+|a_{2n}|}{|a_{22}|}, \ldots, \frac{|a_{n1}|+|a_{n2}|+\ldots+|a_{nn-1}|}{a_{nn}} \right\}.$$

Si A es diag dominante $\rightarrow$ todos los términos son < 1

$\rightarrow \|B_J\|_\infty < 1$ Como $\rho(B_J) \leq \|B\|_\infty \Rightarrow \rho(B_J) < 1$

$\underset{\text{Teo}}{\Rightarrow}$ El método converge.

Propiedad: Si A es simétrica definida positiva $\Rightarrow$ Gauss-Seidel converge.

El radio espectral determina además la velocidad de la convergencia.

Se puede probar que $\dfrac{\|e^{(k+1)}\|}{\|e^{k}\|} \longrightarrow \rho(B)$.

si $\rho(B) = 1/2$ nos dice que (asintóticamente) el error se divide por 2 (en norma) por cada iteración que damos.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2{,}28 \end{bmatrix} \qquad Ax = \begin{pmatrix} 7 \\ 5{,}28 \end{pmatrix} \quad x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\rho_{\text{JACOBI}} = 0{,}9934$.

$\rho_{GS} = 0{,}9868$.

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{100 iteraciones}} \begin{pmatrix} 1{,}2021 \\ 0{,}7341 \end{pmatrix}$$

MÉTODO SOR (Sobre Relajación)

$Ax=b$

Multiplico por w, real: $wAx = wb$

$wA = M(w) + N(w)$

$$wA = \begin{bmatrix} wa_{11} & wa_{12} & \dots & wa_{1n} \\ wa_{21} & wa_{22} & \dots & wa_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ & & & wa_{n-1n} \\ wa_{n1} & wa_{n2} & \dots & wa_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ wa_{21} & a_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ wa_{n1} & \dots & wa_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (w-1)a_{11} & wa_{12} & \dots & wa_{1n} \\ & (w-1)a_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & wa_{n-1n} \\ 0 & & & (w-1)a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$M(w)\,x^{(k+1)} = -N(w)x^{(k)} + wb$$

o bien: $x^{(k+1)} = \underbrace{-M^{-1}(w)N(w)}_{B_{SOR}:\ \text{matriz de iteración}}\,x^{(k)} + M^{-1}(w)\,wb$

Queda: $$x_j^{(k+1)} = (1-w)x_j^{(k)} + w\left(-\sum_{r=1}^{r=j-1}\frac{a_{jr}}{a_{jj}}x_r^{(k+1)} - \sum_{r=j+1}^{r=n}\frac{a_{jr}}{a_{jj}}x_r^{(k)} + \frac{b_j}{a_{jj}}\right)$$

Obs: si $w=1$ SOR es igual a Gauss-Seidel.

Teorema: si $w \notin [0,2]$ el método SOR no converge.

dem: $$|\det(B_{SOR})| = |\det(-M^{-1}(w).N(w))| = \frac{|\det(N(w))|}{|\det(M(w))|}$$

$$= \frac{|(w-1)a_{11}(w-1)a_{22}(w-1)a_{33}\dots(w-1)a_{nn}|}{a_{11}a_{22}\dots a_{nn}} = |(w-1)^n| = |(w-1)|^n.$$

$\det(B_{SOR})$ = producto de sus valores propios $= \lambda_1 . \lambda_2 \dots \lambda_n$

$\rightarrow |\lambda_1||\lambda_2|\dots|\lambda_n| = |w-1|^n$

Si $w \notin [0,2] \rightarrow |w-1| > 1 \rightarrow |w-1|^n > 1$

$\rightarrow |\lambda_1||\lambda_2|\dots|\lambda_n| > 1 \rightarrow \exists\, \lambda_i \,/\, |\lambda_i| > 1 \rightarrow \rho(B_{SOR}) > 1$

SOR no converge.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2{,}5 \end{bmatrix} \qquad \rho_{Gauss-Seidel} = 0{,}8$$

MNT.

$w = 0{,}5 \rightarrow \rho = 0{,}993$.
$w = 1{,}5 \rightarrow \rho = 0{,}566$
$w = 1{,}4 \rightarrow \rho = 0{,}477$
$w = 1{,}3 \rightarrow \rho = 0{,}575$.
$w = 1{,}45 \rightarrow \rho = 0{,}52$.
$w = 1{,}35 \rightarrow \rho = 0{,}434 \leftarrow$

Direcciones de parada:

1) Manejando una aproximación al error relativo (en norma)
Si $\dfrac{\|x^{(k)} - x^*\|}{\|x^*\|} < \varepsilon$. terminamos las iteraciones.

Como no conocemos x^*
Usamos: $\dfrac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{\|x^{(k+1)}\|} < \varepsilon$

2) Si tengo $\|B\|$ para alguna norma, $\|B\| < 1$ o una cota H / $\|B\| \leq H < 1$

$$x^{(k)} - x^* = -B(x^{(k)} - x^{(k-1)}) + B(x^{(k)} - x^*)$$

cierto porque $\begin{cases} x^* = Bx^* + f \\ x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + f \end{cases}$

Tomando normas: $\|x^{(k)} - x^*\| \leq \|B(x^{(k)} - x^{(k-1)})\| + \|B(x^{(k)} - x^*)\|$
$\Rightarrow \|x^{(k)} - x^*\| \leq \|B\| \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| + \|B\| \|x^{(k)} - x^*\|$
$\Rightarrow \|x^{(k)} - x^*\| \leq \dfrac{\|B\|}{1 - \|B\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$

Si $\dfrac{\|B\|}{1 - \|B\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| < \varepsilon \Rightarrow \|x^{(k)} - x^*\| < \varepsilon$.

Cuando usar métodos iterativos:

1) Matrices esparzas: matrices con muchos ceros.
Una matriz de este tipo, si n es muy grande, no puedo (o es ineficiente) guardarla en memoria. Sin embargo si los elementos de la matriz no nulos no son demasiados puedo hallar una solución aproximada usando un método iterativo y no mediante un método directo.

Numero de condición de una Matriz.

$Ax = b$ $\quad x^*$ solución exacta

Sea x un candidato a solución (obtenido por algún método)

Def: Residuo: $r = b - Ax$

Si el residuo es pequeño ($\|r\| < \varepsilon$) entonces x puedo decir que "casi" resuelve todas las ecuaciones del sistema.

Si x está cercano a x^* ($\|x - x^*\| < \varepsilon$) entonces el residuo es pequeño.

Entonces si r no es pequeño, x no está cerca de x^*

Recíproco: ¿Si el residuo es pequeño x está cerca de x^*?

A invertible.

Def: numero de condición de $A = \|A\| . \|A^{-1}\| = \text{cond}(A)$.

obs. depende de la norma que se esté usando.

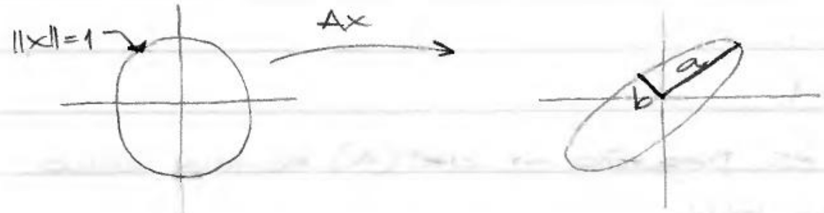
$$\|A\| = \max_{x \neq \vec{0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

$$\|A^{-1}\| = \max_{y \neq \vec{0}} \frac{\|A^{-1}y\|}{\|y\|} = \max_{x \neq \vec{0}} \frac{\|x\|}{\|Ax\|} = \max_{x \neq \vec{0}} \frac{1}{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}} = \frac{1}{\min_{x \neq \vec{0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}$$

cambio de variable $y = Ax$

$$\Rightarrow \text{cond}(A) = \frac{\max\limits_{x\neq\vec{0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}{\min\limits_{x\neq\vec{0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}} = \frac{\max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|}{\min\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|}$$

si la matriz no es invertible
$\rightarrow \text{cond}(A) = \infty$



$\text{cond}(A) = \frac{a}{b}$

Cuando el número de condición es razonable $\rightarrow$ se cumple el recíproco: si el residuo es pequeño entonces x está cerca de x^* de lo contrario, el recíproco no se cumple.

9/09/08

Número de Condición

$$\text{Cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\| = \frac{\max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|}{\min\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|}$$

Propiedades: 1) $\text{Cond}\, A \geq 1$

2) $\text{Cond}\,(I_n) = 1$

3)

Esto es porque $\|Ax\|_2 = \|x\|_2$ si A es ortogonal

Si $\|x\|_2 = 1 \longrightarrow \|Ax\|_2 = 1$

4) $\text{cond}(\alpha A) = \max \|\alpha A x\|$

Si $A = \alpha I \longrightarrow \text{Cond}(A) = 1$

$\det(A) = \alpha^m$ Si α es pequeño $\rightarrow$ $\det(A)$ es muy chico.

$$\begin{aligned} \alpha x_1 &= b_1 & x_1 &= b_1/\alpha \\ \alpha x_2 &= b_2 & &\vdots \\ &\vdots & x_i &= b_i/\alpha \\ \alpha x_n &= b_n & & \end{aligned}$$

$\rightarrow$ No tengo problemas numéricos.

los problemas numéricos se reflejan mejor en que $\text{cond}(A)$ sea grande mas que en que $\det(A)$ sea pequeño

5) Si A es diagonal $\rightarrow$ $\text{Cond}(A) = \dfrac{\max_i |d_{ii}|}{\min_i |d_{ii}|}$

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 0{,}5 & & 0 \\ & -2 \; 3 & \\ 0 & & -5 \end{bmatrix}$ $\text{Cond}(A) = \dfrac{5}{0{,}5} = 10$

Error relativo de una solución aproximada

$Ax = b$, x solución exacta, $\hat{x}$ solución aproximada.

Residuo: $r = b - A\hat{x}$

$= Ax - A\hat{x}$

$= A(x - \hat{x})$

Si A es invertible: $A^{-1} r = x - \hat{x}$

$\rightarrow \|x - \hat{x}\| = \|A^{-1} r\| \leq \|A^{-1}\| \|r\|$ (1)

$Ax = b$

$\rightarrow \|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \quad (2)$

$$\Rightarrow \frac{\|x-\hat{x}\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \|r\| \frac{\|A\|}{\|b\|}$$

$$\Rightarrow \frac{\|x-\hat{x}\|}{\|x\|} \leq cond(A) \frac{\|r\|}{\|b\|} \quad (3)$$

Error relativo (en norma) de la sol aprox $\hat{x}$.

Cota inferior:

$r = A(x-\hat{x})$

$\rightarrow \|r\| \leq \|A\| \|x-\hat{x}\| \quad (4)$

$x = A^{-1} b$ — $\|x\| \leq \|A^{-1}\| \|b\| \quad (5)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|A\| \|A^{-1}\|} \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x-\hat{x}\|}{\|x\|} \longrightarrow \frac{1}{cond(A)} \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x-\hat{x}\|}{\|x\|} \quad (6)$$

si $k(A) = cond(A)$

$$\frac{1}{k(A)} \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x-\hat{x}\|}{\|x\|} \leq k(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

Obs:

a) si $k(A)$ no es muy grande entonces, si el residuo es pequeño se tiene que el error relativo (en norma) de la sol aprox $\hat{x}$ es pequeño $\Rightarrow$ $\hat{x}$ está próximo a x que es la solución exacta

b) si $k(A) >> 1$ entonces, aunque el residuo sea pequeño, puede pasar que $\hat{x}$ esté lejos de la sol. exacta.

c) Wilkinson: Escalerización gaussiana con pivoteo genera soluciones $\hat{x}$ que tienen residuos pequeños.

Si $K(A)$ es muy grande (relacionado con $\frac{1}{\varepsilon_M}$) entonces decimos que el problema de resolver $Ax=b$ está mal condicionado

Idea general: Nº de condición de un problema

$$\xrightarrow{d} \boxed{\text{Problema}} \xrightarrow{S}$$

$K(P)$ = coeficiente de magnificación de los errores relativos en la entrada para obtener los errores relativos en la salida

$$\frac{\|s-\hat{s}\|}{\|s\|} \leq K(P) \frac{\|d-\hat{d}\|}{\|d\|}$$

ECUACIONES NO LINEALES:

Caso Escalar: $f(x)=0$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. f continua.

Método de bipartición

Bolzano:

si $f(a) \cdot f(b) < 0 \longrightarrow \exists\, x_0 \in [a,b] \,/\, f(x_0)=0$.

condiciones de parada: a) encontramos un $x \,/\, |f(x)| <$ tolerancia$_1$ (casi una raiz)

y/o. b) el intervalo en el cual está la raiz es suficientemente pequeño. ($b-a <$ tolerancia$_2$)

$a, b \,/\, f(a) \cdot f(b) < 0$

1) si $b-a <$ tol2 STOP

2) $m = \frac{a+b}{2}$ Calcular $f(m)$

si $|f(m)| < tol_1$ STOP

3) if $f(a).f(m) < 0$

$b = m$

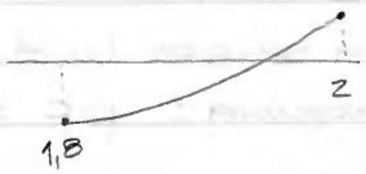
else $a = m$

Volver a 1

Si se toma en cada paso a m como estimación de la raiz x^* entonces el error se reduce en por lo menos la mitad en cada iteración.

Ejemplo:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \operatorname{sen} x = 0$$



$I_0 = [1{,}8, 2] = [a_0, b_0]$

k	a_k	b_k	m_k	$f(m_k)$
1	1,8	2	1,9	<0
2	1,9	2	1,95	>0
3	1,9	1,95	1,925	<0
4	1,925	1,95	1,9375	>0
5	1,925	1,9375	1,93125	<0
6	1,93125	1,9375	1,934375	>0

Después de 6 iteraciones tenemos que $x^* \in (1{,}93125, 1934375)$ con intervalo de largo $0{,}2 . 10^{-6} = 0{,}003125$

Obs: $\log_2 10 = 3{,}3$

Cada 3,3 iteraciones el error relativo se divide por 10

Como ε_M (en Matlab) $\sim 2{,}2 . 10^{-16}$
en $16 . 3{,}3 \simeq 52$ iteraciones voy a estar en un error relativo del orden de ε_M. si el error relativo inicial < 1

11/09

MÉTODO DE BISECCIÓN.

$f(x) = 0$

x^* es la raiz de f a la que converge m^k

Si e_i es el error en la iteración i $\quad e_i = m_i - x^*$

entonces para bisección tenemos $\dfrac{|e_{i+1}|}{|e_i|} \simeq 1/2$

Def: Si $x_1, x_2, \dots, x_m \longrightarrow \alpha$, $e_m = x_m - \alpha$

$\exists \lim\limits_{m \to +\infty} \dfrac{|e_{m+1}|}{|e_m|^r} = c \quad (c \neq 0)$

decimos que la solución (o el método que la genera) tiene órden de convergencia r y c se llama constante asintótica del error

si r=1 decimos que la convergencia es lineal

si r>1 " " " " " superlineal

si r=2 " " " " " cuatrática.

si r=3 " " " " " cúbica.

Ejemplos: a) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \longrightarrow 0$ con convergencia lineal

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|(1/2)^{n+1} - 0|}{|(1/2)^n - 0|^1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1/2^{n+1}}{1/2^n} = 1/2 \longrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ c = 1/2 \end{cases}$$

b) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{2^n} \longrightarrow 0 \qquad (\alpha^n)^\gamma = \alpha^{n\gamma}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\left|(3/7)^{2^{n+1}} - 0\right|}{\left|(3/7)^{2^n} - 0\right|^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(3/4)^{2^{n+1}}}{\left((3/7)^{2^n}\right)^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(3/7)^{2^{n+1}}}{(3/7)^{2^{n+1}}} = 1.$$

r=2 c=1 → Convergencia cuadrática.

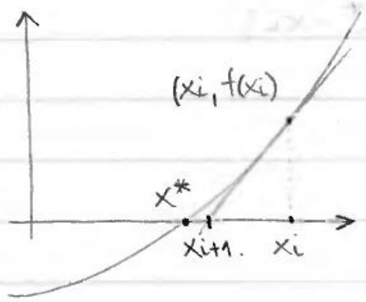
MNT

c) si $0<\beta<1$ $\quad \beta^{3^n}$ tiene convergencia cuadrática a 0.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\beta^{3^{n+1}}}{(\beta^{3^n})^3} = 1 \longrightarrow \begin{cases} r=3 \\ c=1 \end{cases}$$

MÉTODO DE NEWTON.

Supongamos que x_i es una aproximación a la raiz x^* de $f(x)=0$.



En vez de "cortar" el gráfico de la función con el eje OX, "cortamos" la recta tangente a ese gráfico en el punto $(x_i, f(x_i))$

La pendiente de esa recta es $m = f'(x_i)$.

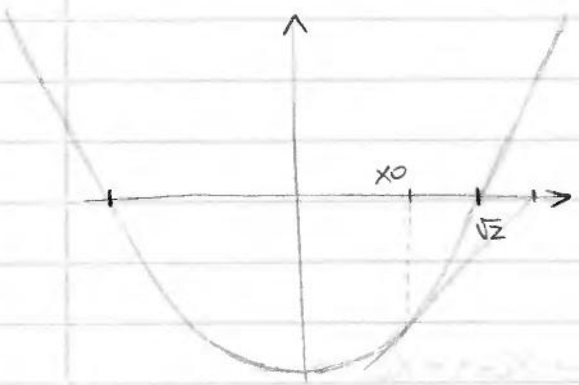
Recta tangente: $Y - f(x_i) = f'(x_i)(X - x_i)$

Cortamos con OX $(Y=0)$ $\quad -f(x_i) = f'(x_i)(X - x_i)$

$$\rightarrow X = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \Rightarrow \boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$$

Método de Newton.

Ejemplo: $\quad f(x) = x^2 - 2 \qquad x_0 = 1$



$f' = 2x$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i^2 - 2)}{2x_i} = \frac{1}{2}\left(x_i + \frac{2}{x_i}\right)$$

$x_1 = 3/2 \qquad \sqrt{2} = 1{,}414214\ldots$

$x_2 = 17/12$

$x_3 = 577/408 \simeq 1{,}414216$

Si el Método de Newton converge, en general converge muy rápido con convergencia cuadrática.

Desarrollamos por Taylor alrededor de x_i

$\to$ $f(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x-x_i) + \frac{1}{2} f''(c)(x-x_i)^2 \quad c \in [x, x_i]$.

si $x = x^* \to \underset{f(x^*)=0}{0} = f(x_i) + f'(x_i)(x^*-x_i) + \frac{1}{2} f''(c)(x^*-x_i)^2$

$$0 = \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} + (x^* - x_i) + \frac{1}{2}\frac{f''(c)}{f'(x_i)}(x^*-x_i)^2$$

$\to$ $x_{i+1} - x^* = \frac{1}{2}\frac{f''(c)}{f'(x_i)}(x_i - x^*)^2$

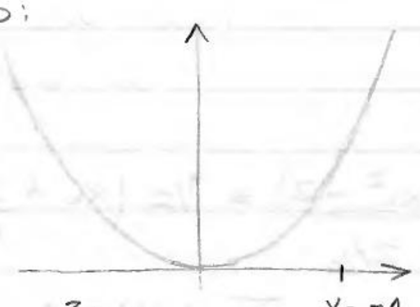
$\to$ $e_{i+1} = \frac{1}{2}\frac{f''(c)}{f'(x_i)} e_i^2$

(si f' es continua en $x^* \to f'(x_i) \to f'(x^*)$)

Si suponemos que $f'(x^*) \neq 0$ (o sea x^* es raíz simple de f)

$\to$ $\lim\limits_{i \to +\infty} \frac{|e_{i+1}|}{e_i^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} = c$ (supuse f'' continua en x^*)

ejemplo:



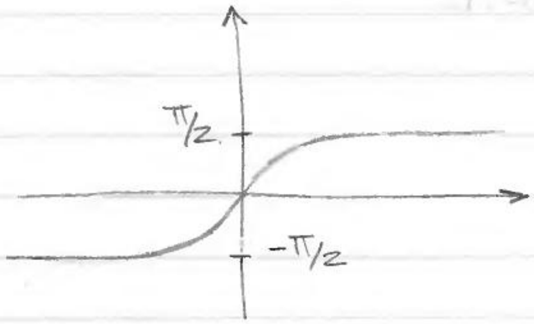
$f(x) = x^2 = 0$. $x_0 = 1$.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^2}{2x_i} = x_i - \frac{x_i}{2} = \frac{x_i}{2} \quad \to x_{i+1} = \frac{x_i}{2}$$

$x_0 = 1$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1/4$, ..., $x_n = 1/2^n$ $\quad x_n \to 0$ linealmente.

No hay convergencia cuadrática porque 0 no es raíz simple de $f(x) = x^2$.

Ejemplo: $f(x) = \text{Arctg}(x)$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$



$x^* = 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\text{arctg}(x_n)}{\frac{1}{1+x_n^2}}$$

$$x_{n+1} = x_n - (1+x_n^2)\,\text{arctg}(x_n)$$

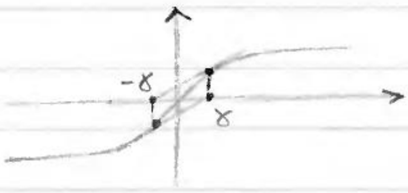
Si $x_0 = \dfrac{\pi}{4} = 0{,}7854 \longrightarrow x_1 = -0{,}2911 \longrightarrow x_2 = 0{,}0162$

$\longrightarrow x_3 = -2{,}8 \cdot 10^{-6} \longrightarrow x_4 = 1{,}49 \cdot 10^{-17}$

Si $x_0 = \dfrac{\pi}{2} = 1{,}57 \longrightarrow x_1 = -1{,}91 \longrightarrow x_2 = 3{,}15 \longrightarrow x_3 = -10{,}64$

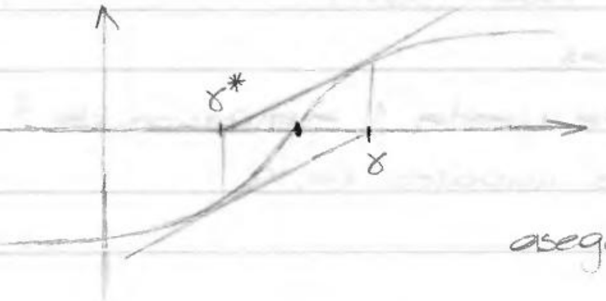
$\longrightarrow x_4 = 158 \longrightarrow x_5 = -3{,}9 \cdot 10^4$ no converge.

En el valor crítico



$\gamma = 1{,}3415$ para este valor paso de un paso al siguiente de γ a $-\gamma$ y viceversa

Ejemplo: $f(x) = \text{sg}(x-a)\sqrt{|x-a|}$

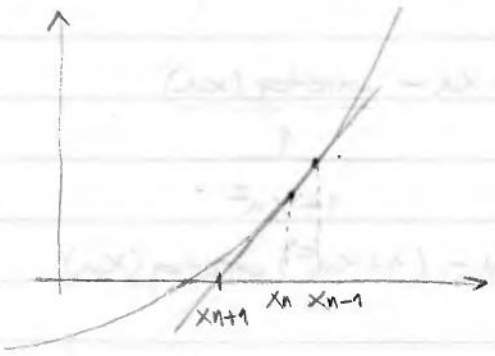


Si el valor inicial x_0 no está próximo a la raíz → no podemos asegurar la convergencia.

si $0 < a < f' < b \longrightarrow \exists$ un entorno de x^* tal que si $x_0 \in$ a ese entorno hay convergencia a x^*

16/09.

MÉTODO DE LA SECANTE



En el método de newton $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ← pendiente de la recta.

Esto surge de la intersección de la recta por $(x_n, f(x_n))$ y pendiente $f'(x_n)$ con el eje $\overline{Ox}$.

Ahora usamos la cuerda o secante cuya pendiente es:

$$m = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

→ Método de la secante:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Obs: 1) No calculo derivadas

2) Cada iteración me cuesta 1 evaluación de f.

3) Necesito 2 valores iniciales x_0, x_1.

Ejemplo : calcular $\sqrt{15}$

$$x^2 - 15 = 0$$

Secante: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{(x_n^2 - 15)(x_n - x_{n-1})}{x_n^2 - x_{n-1}}$

$\rightarrow x_{n+1} = x_n - \dfrac{(x_n^2 - 15)}{x_n + x_{n-1}}$

$x_0 = 3$
$x_1 = 4$
$\rightarrow x_2 = 3{,}857142857$
$x_3 = 3{,}8729\ldots$
$x_4 = 3{,}872983347$

En matlab sqrt(15) = 3,8729883462O742.

Teorema: Si la sucesión x_n del método de la secante converge a una raíz simple x^* de f y f'' es cont en x^*

$\rightarrow$ hay convergencia superlineal con $r \neq \phi$ = num de oro

$$\phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \cong 1{,}618$$

y constante $c = \left| f''(x^*) / 2f'(x^*) \right|^{1/\phi}$

o sea si el error es $e_n = x_n - x^*$

se tiene $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{|e_{n+1}|}{|e_n|^{\phi}} = c$.

Se puede probar : $e_{n+2} = K e_{n+1} \cdot e_n$

$\sigma_n = \log(e_n) \longrightarrow \sigma_{n+2} = \log k + \sigma_{n+1} + \sigma_n$.

Ecuación Homogénea

$\gamma_{n+2} - \gamma_{n+1} - \gamma_n = 0$ (sucesión de Fibonacci)

Si buscamos soluciones de la forma $\gamma_n = \lambda^n$

$\longrightarrow \lambda^{n+2} - \lambda^{n+1} - \lambda^n = 0$

$\lambda^n(\lambda^2 - \lambda - 1) = 0$. $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$

$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \left< \begin{array}{l} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array} \right.$

$\longrightarrow \gamma_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

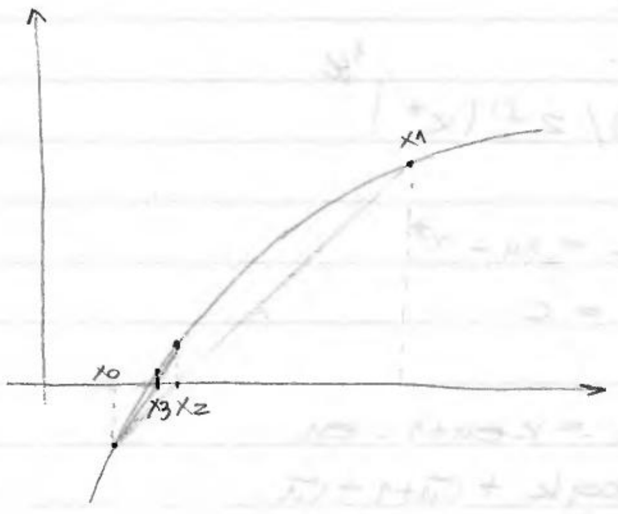
Convergencia: Resultados análogos al Método de Newton.

Método de Regula Falsi derivado de la secante pero forzamos la convergencia. (perjuicio posible: podemos perder la superlinealidad)

$x_0, x_1 \;/\; f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$.

aplico el método de la secante entre x_n y x_m / m es el máximo índice $< n$ / $f(x_n) f(x_m) < 0$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_m)}{f(x_n) - f(x_m)}$$



$x_0, x_1 \xrightarrow{\text{secante}} x_2$

$x_2, x_0 \xrightarrow{\text{secante}} x_3$

$x_3, x_0 \xrightarrow{\text{secante}} x_4$

SISTEMAS NO LINEALES DE ECUACIONES

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad f(x) = 0.$

$f_1: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$f_2: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$\vdots$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Método de Newton - Raphson para sistemas.

Supongamos que x^* es una solución del sistema $(f(x^*) = \vec{0})$
Si tenemos al iterando $x^{(k)}$ y suponemos que está cerca de x^* entonces desarrollando por Taylor alrededor de $x^{(k)}$:

$$f_1(x) = f_1(x^{(k)}) + df_1 \Big|_{x = x^{(k)}} + \text{términos de 2° orden.}$$

$$df_1 \Big|_{x = x^{(k)}} = \frac{\partial f_1(x^{(k)})}{\partial x_1} (x_1 - x_1^{(k)}) + \frac{\partial f_1(x^{(k)})}{\partial x_2} (x_2 - x_2^{(k)}) + \dots + \frac{\partial f_1(x^{(k)})}{\partial x_n} (x_n - x_n^{(k)})$$

$$\text{términos de 2° órden} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 f_1(\ )}{\partial x_i^2} (x_i - x_i^{(k)})^2 + 2 \sum_{i<j} \frac{\partial^2 f_1(\ )}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - x_i^{(k)})(x_j - x_j^{(k)}) \right)$$

$0 \leq \theta \leq 1$

$x + \theta(x - x^{(k)})$

dejando de lado los términos de segundo órden

$$f_1(x) \simeq f(x^{(k)}) + \frac{\partial f_1(x^{(k)})}{\partial x_1} (x_1 - x_1^{(k)}) + \dots + \frac{\partial f_1(x^{(k)})}{\partial x_n} (x_n - x_n^{(k)})$$

$\vdots$

$$f_n(x) \simeq f_n(x^{(k)}) + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x^{(k)})(x_1 - x_1^{(k)}) + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x^{(k)})(x_n - x_n^{(k)})$$

J = matriz jacobiana.

$$J(x^{(k)})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^{(k)}) \quad \text{Matriz } n \times n \text{ numérica.}$$

$$\longrightarrow f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \simeq f(x^{(k)}) + J(x^{(k)}) \begin{pmatrix} x_1 - x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n - x_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow f(x) \simeq f(x^{(k)}) + J(x^{(k)})(x - x^{(k)})$$ (x y $x^{(k)}$ son vectores columna)

El nuevo iterado $x^{(k+1)}$ se halla resolviendo (o es la solución del sistema

$$J_f(x^{(k)}) \cdot (x - x^{(k)}) = -f(x^{(k)})$$

18/09.

Dado $x^{(k)}$ calculamos $x^{(k+1)}$ de forma tal que:

$$J_f(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -f(x^{(k)})$$

o bien: $$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left[J_f(x^{(k)})\right]^{-1} f(x^{(k)})$$

El caso escalar $f(x) = 0$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad x_{n+1} = x_n - \left[f'(x_n)\right]^{-1} f(x_n)$$

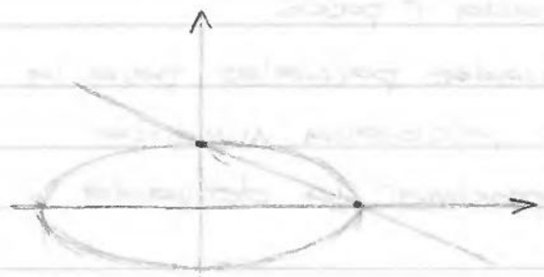
En la práctica si $s^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$ ($s^{(k)}$ es el paso del Método de Newton)

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$$

1) Resuelvo el sistema: $J_f(x^{(k)})\, s^{(k)} = -f(x^{(k)})$

2) $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$

Ejemplo: $f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - 2 \\ x_1^2 + 4x_2^2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



$$J_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2x_1 & 8x_2 \end{bmatrix}$$

$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \end{pmatrix}$ $\quad J_f(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 16 \end{bmatrix}$

$x^{(1)} = x^{(0)} + s^{(0)} = \begin{pmatrix} -0{,}83 \\ 1{,}42 \end{pmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 16 \end{bmatrix} s^{(0)} = \begin{pmatrix} -3 \\ 13 \end{pmatrix} \rightarrow s^{(0)} = \begin{bmatrix} -1{,}83 \\ -0{,}58 \end{bmatrix}$

$f(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4{,}72 \end{pmatrix}$ $\quad J_f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1{,}67 & 11{,}3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1{,}67 & 11{,}3 \end{bmatrix} s^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4{,}72 \end{pmatrix} \rightarrow s^{(1)} = \begin{pmatrix} 0{,}64 \\ -0{,}32 \end{pmatrix}$

$x^{(2)} = x^{(1)} + s^{(1)} = \begin{pmatrix} -0{,}19 \\ 1{,}10 \end{pmatrix}$, iterando converge a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Costo de la iteración de Newton:

1) Cálculo de la jacobiana $J_f(x^{(k)})$

Evaluación de n^2 funciones escalares $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^{(k)})\right)$

2) Resolución del sistema $O(n^3)$

Obs: 1) Se puede implementar que la J_f no se recalcula en cada iteración si no cada r pasos.

2) Si no dispongo de las derivadas parciales para la jacobiana puedo hallar una jacobiana numérica aproximada. (equivale a aproximar la derivada por cociente incremental)

$$\frac{\partial f_i(x^{(k)})}{\partial x_j} \simeq \frac{f_i(x^{(k)}+he_j)-f_i(x^{(k)})}{h}$$

$$e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{posición } j$$

MÉTODO TIPO SECANTE

Escalar: $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\underbrace{\left(\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}\right)}_{=m}}$$

$$x_{n+1} = x_n - m^{-1} f(x_n)$$

m verifica: $m \cdot (x_n - x_{n-1}) = f(x_n) - f(x_{n-1})$

Quisiéramos una matriz M tal que: $M_m(x^{(m)} - x^{(m-1)}) = f(x^{(m)}) - f(x^{(m-1)})$

$\longrightarrow x^{(m+1)} = x^{(m)} - M_m^{-1} f(x^{(m)})$ $\left(\begin{array}{l} M_m \cdot s^{(m)} = -f(x^{(m)}) \\ x^{(m+1)} = x^{(m)} + s^{(m)} \end{array}\right)$

$\rightarrow$ actualización de la matriz M_{m+1}

$$M_{n+1}\left(x^{(n+1)} - x^{(n)}\right) = f\left(x^{(n+1)}\right) - f(x^{n}) \qquad (I)$$

M_{n+1} es una matriz $n \times n$.

Tengo n^2 incógnitas
Tiene que verificar n ecuaciones.

Broyden elige la $M_{n'+1}$ tal que verifica (I)
y $\| M_{n'} - M_{n'+1} \|_{Fro}$ sea mínima.

$$\|A\|_{Fro} = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}$$

$$M_i = M_{i-1} + \frac{\left[f(x^{(i)}) - f(x^{(i-1)}) - M_{i-1}\,(x^{(i)} - x^{(i-1)})\right](x^{(i)} - x^{(i-1)})^t}{\|x^{(i)} - x^{(i-1)}\|_2^2}$$

(perturbación de rango 1 de la anterior).

Método de Broyden (tipo secante)

$x^{(0)}$ valor inicial.
B_0 (por ejemplo una aproximación a $J(x^{(0)})$)
for $k = 0, 1, 2, \ldots$
  Resolver $B_k \cdot s^{(k)} = -f(x^{(k)})$
  $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$
  $y^{(k)} = f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)})$
  $B_{k+1} = B_k + (y^{(k)} - B_k s^{(k)})\, s_k^t \,/\, s_k^t s_k$

Ejemplo anterior:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \end{pmatrix} \qquad B_0 = J(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 16 \end{bmatrix} s^{(0)} = \begin{pmatrix} -3 \\ 13 \end{pmatrix} \longrightarrow s^{(0)} = \begin{pmatrix} -1{,}83 \\ -0{,}058 \end{pmatrix}$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + s^{(0)} = \begin{pmatrix} -983 \\ -1{,}42 \end{pmatrix}$$

$$f(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4{,}72 \end{pmatrix} \qquad y^{(0)} = f(x^{(1)}) - f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} -3 \\ -8{,}28 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2{,}34 & -0{,}74 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -0{,}34 & 15{,}3 \end{bmatrix}$$

$$B_1 s^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4{,}72 \end{pmatrix}$$

$$s^{(1)} = \begin{pmatrix} 0{,}59 \\ -0{,}30 \end{pmatrix} \qquad x^{(2)} = x^{(1)} + s^{(1)} = \begin{pmatrix} -0{,}24 \\ 1{,}12 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1{,}12 & \end{bmatrix}$$ converge a

23/09.

MÉTODO ITERATIVO GENERAL (MIG)

(Parecido a $Ax = b \longrightarrow x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$)

En vez de plantear $f(x) = 0$ vamos a considerar una ecuación equivalente $x = g(x)$

Consideremos métodos iterativos de punto fijo: $x_{n+1} = g(x_n)$ con cierta condición inicial x_3.

(puede ser mas general $x_{n+1} = g(x_n, x_{n-1})$)

Ejemplo: $f(x) = \operatorname{sen} x - x^2 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = g_1(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x} \\ x = g_2(x) = \operatorname{Arcsen}(x^2) \\ x = g_3(x) = \operatorname{sen} x - x^2 + x \end{cases}$

También $x = x - \beta f(x)$ con β cte apropiado.

Teorema 1: Si $g : [a,b] \to [a,b]$ continua
$\to \exists\, x^* \in [a,b] \,/\, x^* = g(x^*)$

Dem: Si $g(a) = a \to x^* = a$ verifica.
Si $g(b) = b \to x^* = b$ "

Si no es así $g(a) > a$ y $g(b) < b$.
$\to F(x) = g(x) - x$ es continua en $[a,b]$, $F(a) > 0$
$F(b) < 0$

$\xrightarrow{\text{Bolzano}}$ $\exists\, x^* \in (a,b) \,/\, F(x^*) = 0 \to g(x^*) = x^*$

Def: $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se dice contractiva si $\exists\, k$, $0 \leq k < 1$ tal que $\| g(x) - g(x') \| \leq k \| x - x' \| \quad \forall x, x' \in A$

Teorema 2: Si $g : [a,b] \to [a,b]$ contractiva entonces:

a) La sucesión generada por el MIG $(x_{n+1} = g(x_n)$
$x_0 \,/\, x_0 \in [a,b])$
converge a un punto fijo de g.

b) $\exists$ un único punto fijo α de g en $[a,b]$.

c) $\| \alpha - x_{n+1} \| \leq k \| \alpha - x_n \|$

Dem: a) se prueba que la sucesión x_n es de cauchy (en $[a,b]$)
$x_n \to \alpha$, como $x_{n+1} = g(x_n)$, $\lim g(x_n) \xleftarrow{g \text{ cont}} \alpha = g(\alpha)$, α es pto fijo de g

b) supongamos existen 2 puntos fijos de g en $[a,b]$
$g(\alpha) = \alpha$
$g(\beta) = \beta$

$$|\alpha - \beta| = |g(\alpha) - g(\beta)| \leq k\, |\alpha - \beta| \underset{k<1}{<} |\alpha - \beta| \quad \text{absurdo}$$

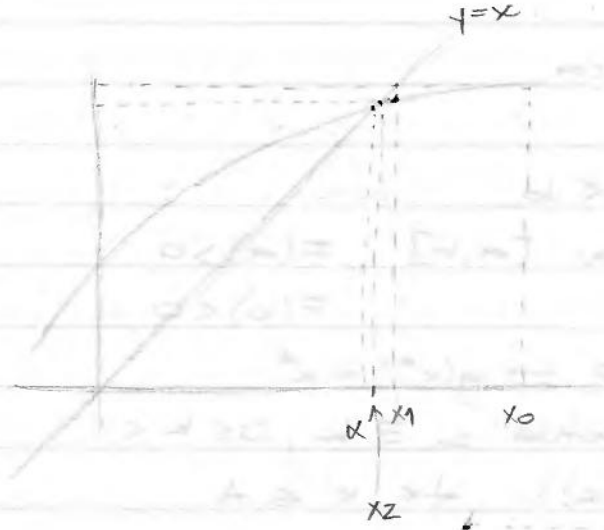
c) $|\alpha - x_{n+1}| = |g(\alpha) - g(x_n)| \leq k\, |\alpha - x_n|$

Teorema 3: Si $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ tiene derivada continua y $\alpha \in [a,b]$ es un punto fijo de g entonces

i) si $|g'(\alpha)| < 1$, la iteración de MIG converge a α siempre que x_0 se elija suficientemente próximo a α

ii) Si $|g'(x)| > 1$, la iteración de MIG no converge a α

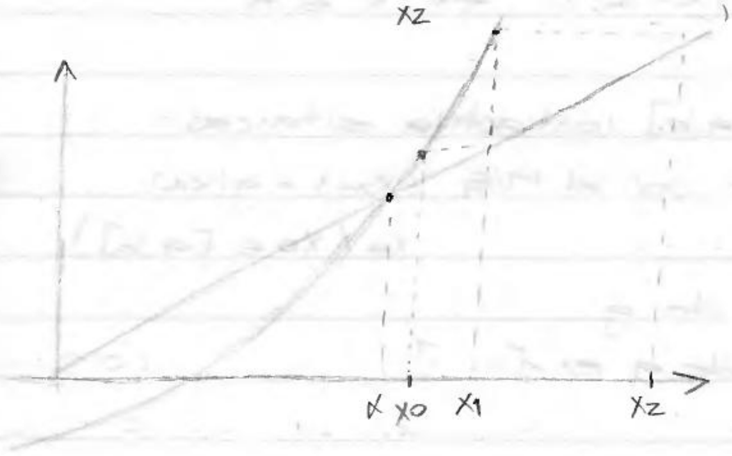
$(x_0 \neq \alpha)$



x_0

$x_1 = g(x_0)$

$x_2 = g(x_1)$



$g'(x) > 1$

Dem: i) Por la continuidad de g' $\exists$ un intervalo B $B \subset [a,b]$, de centro α, tal que $|g'(x)| \leq k < 1 \ \forall x \in B$

$(g'(\alpha) < 1)$

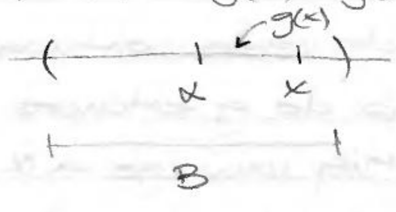
Por lagrange: $|g(x') - g(x)| = |g'(c) . (x - x')|$ $\quad c \in [x, x']$

$\rightarrow |g(x') - g(x)| = |g'(c)||x - x'| \leq k |x - x'|$

$\rightarrow g$ es contractiva en B.

Veamos que $g(x) \in B$ si $x \in B$

$|g(x) - \alpha| = |g(x) - g(\alpha)| \leq k|x - \alpha|$



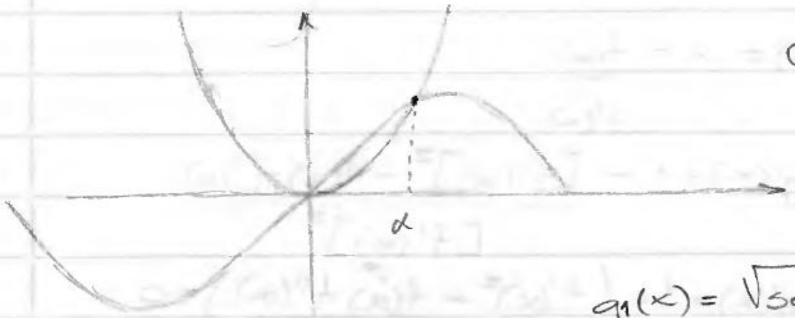
$\rightarrow g(x)$ esta mas próximo a α que a x

$(k < 1) \rightarrow g(x) \in B$

$\rightarrow$ Vale el teorema 2 donde k es una cota de g' en un entorno de α.

ii) si $|g'(\alpha)| > 1 \rightarrow \exists B \,/\, |g'(x)| \geq k > 1$.
$|g(x') - g(x)| \geq k|x - x'| \;\; \forall x, x' \in B$.
Entonces si $x_n \in B$
$|x_{n+1} - \alpha| = |g(x_n) - g(\alpha)| \geq k|x_n - \alpha| \geq k(k|x_{n-1} - \alpha|)$
$\ldots \geq \underbrace{k^{n+1}}_{\downarrow\; +\infty} |x_0 - \alpha| \rightarrow x_{n+1}$ no converge a α.

Ejemplo: $f(x) = \operatorname{sen} x - x^2 = 0$



$0{,}8 < \alpha < 0{,}9$.

$g_1(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$
$|g_1'(x)| = \left| \frac{1}{2} \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} \right| < 0{,}45 \rightarrow g_1$ sirve.
$(k = 0{,}45)$

$g_2(x) = \operatorname{Arcsen} x^2 \quad |g_2'(x)| = \left| \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}} x^2 \right| > 2$ en $(0{,}8, 0{,}9)$
$\rightarrow g_2$ no sirve.

$g_3(x) = \operatorname{sen} x - x^2 + x \quad |g_3'(x)| = |\cos x - 2x + 1| < 0{,}18$ en $(0{,}8, 0{,}9) \rightarrow$
g_3 sirve $(k = 0{,}18)$

Criterio de parada.

1) Si $\dfrac{\|x_{n+1} - x_n\|}{\|x_{n+1}\|} < \varepsilon$ ponemos fin a las iteraciones

2) Si estamos en el MIG y tenemos el valor de k (o una estimación de el)
$x_n - \alpha = -g(x_n) + g(x_{n-1}) + g(x_n) - g(\alpha)$

$$\to |x_n - \alpha| \leq |g(x_{n-1}) - g(x_n)| + |g(x_n) - g(\alpha)|$$

$$|x_n - \alpha| \leq k|x_{n-1} - x_n| + k|x_n - \alpha|$$

$$\to |x_n - \alpha| \leq \frac{k}{1-k} |x_n - x_{n-1}|$$

Entonces si paramos cuando $\frac{k}{1-k} |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$.

se tiene que el error real (absoluto) es $< \varepsilon$.

Método de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Si $f(\alpha) = 0$ $(g(\alpha) = 0)$ $\quad g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2}$

$$g'(\alpha) = 1 - \left(\frac{f'(\alpha)^2 - \overset{0}{f(\alpha)} f''(\alpha)}{(f'(\alpha))^2} \right) = 0.$$

$\to$ En un entorno de α g es una contracción.

$\to$ Si x_0 está prox. a α — Newton converge.

MNT

7/10

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

MÉTODO DE EULER:

Tenemos un intervalo $[x_0, a]$ y lo dividimos en subintervalos

$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots < a$

La solución exacta es $y(x)$

Si desarrollamos por Taylor:

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)\,h + y''(x)\frac{h^2}{2} + y'''(x)\frac{h^3}{6} + \dots$$

o bien $y(x+h) = y(x) + y'(x)\,h + y''(c)\frac{h^2}{2}$ con $c \in [x, x+h]$

$y'(x) = f(x, y(x))$

$\rightarrow y(x+h) = y(x) + h f(x, y(x)) + y''(c)\frac{h^2}{2} \quad c \in [x, x+h]$

si despreciamos $y''(c)\frac{h^2}{2}$ (error de truncamiento) tendríamos:

$y(x+h) \simeq y(x) + h f(x, y(x))$; $y(x_n + h) \simeq y(x_n) + h f(x_n, y(x_n))$

si a su vez y_n es una aproximación a $y(x_n)$ nos queda para y_{n+1} la aproximación:

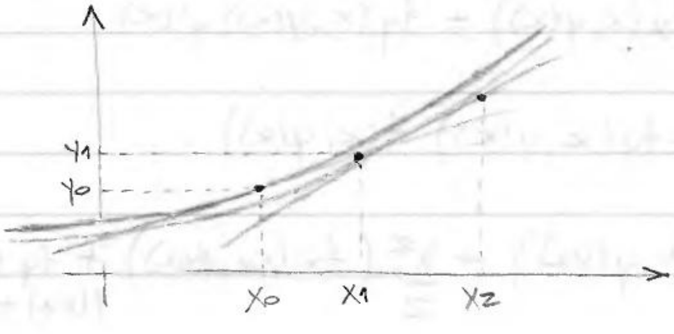
$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$, y_0 lo tenemos por la condición inicial

$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0)$

$y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1)$

$\vdots$

Gráficamente:



$y'(x_0) = f(x_0, y_0)$

$y_1 = y_0 + h \underbrace{f(x_0, y_0)}_{y'(x_0)}$

$y_2 = y_1 + h \underbrace{f(x_1, y_1)}_{\varphi'(x_1)}$

φ es otra solución de $y' = f(x,y)$ que pasa por (x_1, y_1)

Def. Error global en $x_n = y(x_n) - y_n$ donde $y(x)$ es la solución exacta de la ecuación evaluada en x_n. e y_n es el resultado obtenido por el método correspondiente a $x = x_n$

Error local en $x_n = \varphi(x_{n+1}) - y_{n+1}$ donde $\varphi(x_n)$ es la solución exacta de $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_n) = y_n \end{cases}$

En el método de euler el error local (o error de truncamiento) vale $\varphi''(c)\frac{h^2}{2}$ $c \in [x_n, x_{n+1}]$

Teorema: Bajo condiciones muy generales si error local $= \sigma(h^{p+1})$ entonces el error global $= \sigma(h^p)$

A p se le llama orden de consistencia del método. Decimos entonces que el método de euler es de orden 1.

Veamos una flia de métodos con error local mas chico:

$$* \; y_{n+1} = y_n + h\left[A_1 f(x_n, y_n) + A_2 f(x_n + \alpha h, y_n + \alpha h f(x_n, y_n))\right]$$

tenemos 3 parámetros: A_1, A_2, α (con $A_1 = 1$ y $A_2 = 0$ → método de euler.

Vamos a imponer que el error local sea $\sigma(h^3)$.

$$y(x+h) = y(x) + \underbrace{y'(x)}_{f(x,y(x))}h + y''(x)\frac{h^2}{2} + y'''(x)\frac{h^3}{6} + \dots$$

$$y'(x) = f(x, y(x)) \longrightarrow y'' = f_x(x,y(x)) + f_y(x,y(x))\,y'(x)$$

$$\longrightarrow y''(x) = f_x(x,y(x)) + f_y(x,y(x))\,f(x,y(x))$$

$$\longrightarrow y(x_n+h) = y(x_n) + h f(x_n, y(x_n)) + \frac{h^2}{2}\left(f_x(x_n,y(x_n)) + f_y(x_n,y(x_n))f(x_n, y(x_n)\right) + y'''(x_n)\frac{h^3}{6} + \dots$$

$$\overbrace{}^{\Delta x} \qquad \overbrace{}^{\Delta y}$$

$f(x_n + \alpha h, y_n + \alpha h f(x_n, y_n)) =$ ↙ Taylor en x_n, y_n

$f(x_n, y_n) + f_x(x_n, y_n)\alpha h + f_y(x_n, y_n)\alpha h f(x_n, y_n) + \underbrace{o(h^2)}_{\text{diferencial } 2^a}$

$*$

$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + h(A_1 f(x_n, y_n) + A_2 f(x_n, y_n))$
$\quad + h^2(\alpha f_x(x_n, y_n) + \alpha f_y(x_n, y_n) \cdot f(x_n y_n))A_2 + o(h^3)$

comparando e identificando todos los términos que pueda.

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ \alpha A_2 = 1/2 \end{cases}$$

$\rightarrow$ si $\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ \alpha A_2 = 1/2 \end{cases}$ tenemos un método cuyo error local es $o(h^3)$

Son métodos de 2° órden

MÉTODO DE HEUN:

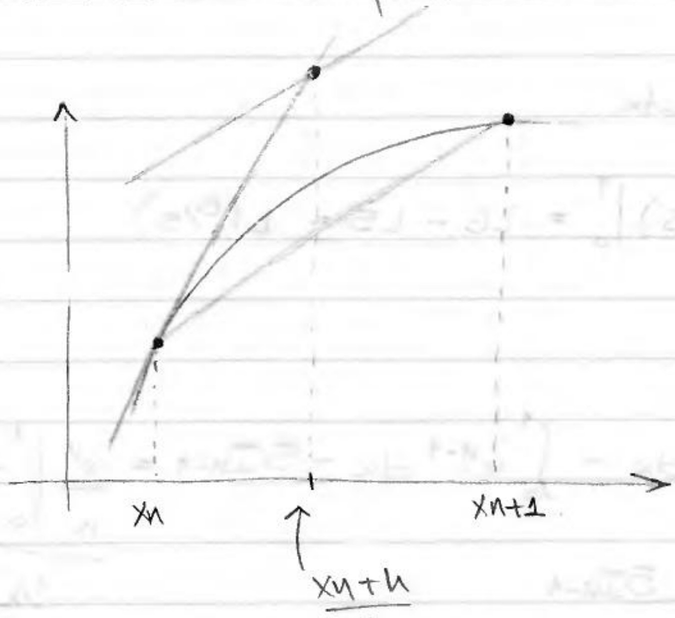
$\alpha = 1 \rightarrow A_2 = 1/2, \ A_1 = 1/2$

$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\Big(f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + h(f(x_n, y_n)))\Big)$

$\alpha = 1/2 \rightarrow A_2 = 1, \ A_1 = 0$

$y_{n+1} = y_n + h f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n))$

es el método del punto medio o método de euler modificado



hago euler con $h/2$

$y_{n+1/2} = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)$

Calculo $f(x_{n+1/2}, y_{n+1/2})$.

$\rightarrow y_{n+1} = y_n + h f(x_{n+1/2}, y_{n+1/2})$

Método de Heun.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))\right]$$

Es runge kutta de orden 2 (Error local $\sigma(h^3)$).

MATLAB: ode23. usa un método de este tipo.

Runge-kutta de orden 4: error local $= \sigma(h^5)$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]$$

$k_1 = f(x_n, y_n)$

$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1)$

$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2)$

$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$.

ESTABILIDAD NUMÉRICA.

Ejemplo : $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5}\,dx$

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+5}\,dx = L(x+5)\Big|_0^1 = L6 - L5 = L(6/5).$$

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n + 5x^{n-1} - 5x^{n-1}}{x+5}\,dx$$

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x+5) - 5x^{n-1}}{(x+5)}\,dx = \int_0^1 x^{n-1}\,dx - 5I_{n-1} = \underbrace{\frac{x^n}{n}\Big|_0^1}_{=1/n} - 5I_{n-1}$$

$$I_n = \frac{1}{n} - 5I_{n-1}.$$

Con matlab:

$I_0 = 0,1823$

$I_1 = 0,0884$

$I_2 = 0,058.$

$\vdots$

$I_{18} = 0,0087$

$I_{19} = 0,0092$

$I_{20} = 0,0042.$

$I_{21} = 0,0264$

$I_{22} = -0,0866$

$I_{23} = 0,43$

$I_{24} = -2,34$

$I_{25} = 11,74$

$I_{26} = -58,66$

En cada paso el error anterior se multiplica por 5
→ en el paso n se habrá multiplicado por 5^n y por lo tanto la solución no queda acotada

Iteración hacia atrás:

$$I_{n-1} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{n} - I_n\right)$$

Estimación de I_{26}: considero que I_{26} es parecido a I_{25}

$$I_{26} \approx \frac{1}{26} - 5I_{26} \longrightarrow I_{26} \approx \frac{1}{6.26} = 0,0064$$

$I_{20} = 0,0080$

$I_{19} = 0,0084$

$\vdots$

$I_4 = 0,0343$

$\vdots$

$I_1 = 0,0884$

$I_0 = 0,1823$

En cada iteración el error se divide por 5. Al final llego al I_0 exacto.

Aplicado a ecuaciones diferenciales:

Ejemplo: $\begin{cases} y' = 2y + \alpha e^{-x} \\ y(0.1) = 0.1 \end{cases}$ solución exacta. $y(x) = -\frac{1}{3} e^{-x}$.

$y_H : y' = 2y \longrightarrow y_H = C e^{2x}$

$y_P : y_P = A e^{-x}$

$$A(-e^{-x}) = 2Ae^{-x} + \alpha e^{-x}$$

$$-3Ae^{-x} = \alpha e^{-x} \qquad A = -\frac{\alpha}{3}.$$

Sol. general:

$$y = Ce^{2x} - \frac{\alpha}{3} e^{-x}$$

$$y(0) = C - \frac{\alpha}{3} = -\frac{\alpha}{3} \Longrightarrow C = 0.$$

Con el metodo de euler

$$y_{n+1} = y_n + h(2y_n + e^{-x_n})$$

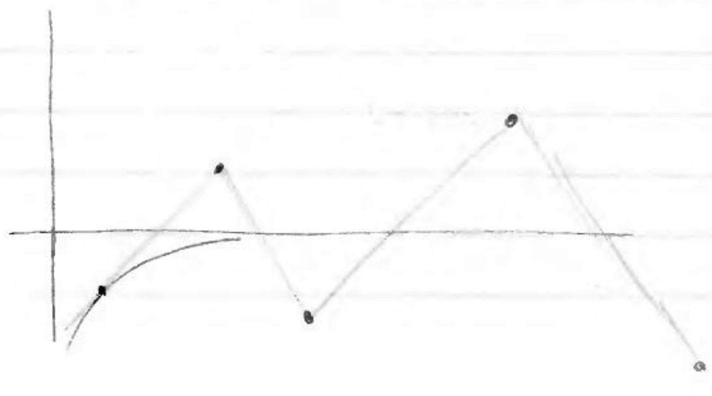
$$\begin{cases} y_{n+1} = (1+2h) y_n + h e^{-x_n} \\ y_0 = -1/3 \end{cases}$$

Si $h = 1/2$

$$\begin{cases} y_{n+1} = 2y_n + 0{,}5\, e^{-x_n} \\ y_0 = -1/3 \end{cases}$$

$$y_1 = 2(-1/3) + 0{,}5 \cdot e^0 = -2/3 + 1/2 = -2/3 + 1/2 = \frac{-4+3}{6} = -1/6.$$

$$y_2 = 2(-1/6) + 0{,}5\, e^{-0{,}5} = -1/3 + 0{,}5 \cdot e^{-0{,}5}$$



Hay un problema de estabilidad matematica.

Problema Test:

$$\begin{cases} y' = qy \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Def: Región de estabilidad de un método numérico.
$= \{ z \in \mathbb{C} \ / \ z = qh$ y la sucesión y_n generada por el método se mantiene acotada.

Región de estabilidad del método de euler.

$$\begin{cases} y' = qy \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$

$y_{n+1} = y_n + hq y_n \quad \rightarrow \quad \begin{cases} y_{n+1} = (1+hq) y_n \\ y_0 = 1 \end{cases}$

$y_0 = 1$

sol: $y_n = (1+hq)^n$

$y_{n+1} = (1+hq) y_n = (1+hq)(1+hq) y_{n-1} = \ldots = (1+hq)^n$

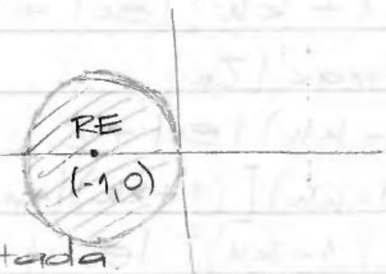
Si $|1+hq| > 1 \rightarrow y_n$ no queda acotada

Si $hq = z \rightarrow$ region de estabilidad es $|1+z| \leq 1$

Recordemos: $|z - z_0| =$ distancia del afijo de z al afijo de z_0

$|z+1| \, |z-(-1)|]$

Si h es tal que hq no pertenece a ese circulo entonces la y_n no queda acotada.



Teorema:

Consistencia + Estabilidad = convergencia

$\downarrow$ Se refiere a error local que tiende a 0.

$\downarrow$ la solución numérica refleja la solución exacta de la ecuación numérica.

Error local y Error Global

$y' = f(x,y)$
$y(x_0) = y_0$ $\quad y(x)$ sol en $[x_0, a]$.

Supongamos el método dado por $y_{n+1} = y_n + h\,\Phi(x_n, y_n, h)$
Supongamos Φ es lipchitz en y : $\exists\ k \geq 0$ /

$$|\Phi(x,y,h) - \Phi(x,\bar{y},h)| \leq k\,|y-\bar{y}|$$

Fijamos un paso $h = \frac{a - x_0}{m}$ y llamamos e_n al error global
$e_n = y(x_n) - y_n$.

Sea τ_n el error local del método tenemos:

$$y_{n+1} = y_n + h\,\Phi(x_n, y_n, h)$$
$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h\,\Phi(x_n, y(x_n), h) + \tau_n$$

restando: $e_{n+1} = e_n + h\big(\Phi(x_n, y(x_n), h) - \Phi(x_n, y_n, h)\big) + \tau_n$

$$\to |e_{n+1}| \leq |e_n| + hk\,\overbrace{|y(x_n) - y_n|}^{e_n} + |\tau_n|$$
$$\to |e_{n+1}| \leq (1+kh)|e_n| + |\tau_n|$$

Sea $\tau = \max|\tau_n|$

$$\to |e_{n+1}| \leq (1+kh)|e_n| + \tau.$$
$$\to |e_{n+1}| \leq (1+kh)\big[(1+kh)|e_{n-1}| + \tau\big] + \tau$$
$$\to |e_{n+1}| \leq (1+kh)^2 |e_{n-1}| + \tau\big((1+kh)+1\big)$$

continuando

$$|e_{n+1}| \leq (1+kh)^{n+1} \underbrace{|e_0|}_{=0} + \tau\big(1 + (1+kh) + \dots + (1+kh)^n\big)$$

$$\to |e_{n+1}| \leq \tau\,\frac{(1+kh)^{n+1} - 1}{(1+kh) - 1}$$

MNT.

$$|e_{n+1}| \leq \frac{\tau}{h} \cdot \frac{1}{k}\left[(1+kh)^{n+1} - 1\right] \leq \frac{\tau}{h}\frac{1}{k}\left(e^{(n+1)hk} - 1\right)$$

Ahora observamos : $(1+\alpha)^{n+1} \leq e^{(n+1)\alpha}$

$$\left(1+\alpha \leq e^{\alpha} \to (1+\alpha)^{n+1} \leq (e^{\alpha})^{n+1} \right)$$

$$\to |e_{n+1}| \leq \frac{\tau}{h}\left(\frac{e^{kx_{n+1}} - 1}{k}\right) \leq \frac{\tau}{h}\left(\frac{e^{ka} - 1}{k}\right)$$

Def: El método se dice consistente si

$$\frac{\text{error local}}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

Por lo anterior si el método es consistente entonces el error global $e_n \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ $\Rightarrow$ El método converge
$(y_n - y(x_n))$

Si $\tau_n = \sigma(h^{p+1})$
$\to e_n = \sigma(h^p)$ y decimos que el órden de consistencia es p.

CASO EULER.

$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$
Se tiene $\Phi(x_n, y_n, h) = f(x_n, y_n)$
entonces si f es lipchitz en $y \to \Phi$ lo es.

Método de Heun.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_n + h,\ y_n + h f(x_n, y_n)) \right]$$

$\downarrow \Phi(x_n, y_n, h)$

$$|\Phi(x,y,h) - \Phi(x,\bar{y},h)| = \Big| \frac{1}{2}(f(x,y) - f(x,\bar{y})) +$$

$$\frac{1}{2}(f(x+h, y+hf(x,y)) - f(x+h, \bar{y} + hf(x,\bar{y}))) \Big|$$

$$\leq \frac{1}{2}|f(x,y) - f(x,\bar{y})| + \frac{1}{2}|f(x+h, y+hf(x,y)) - f(x+h, \bar{y}+hf(x,\bar{y}))|$$

f es lipchitz.

$$\leq \frac{1}{2}k|y-\bar{y}| + \frac{1}{2}k\,|\underbrace{y + hf(x,y) - (\bar{y} + hf(x,\bar{y}))}_{y-\bar{y} + h(f(x,y) - f(x,\bar{y}))}|$$

$$\leq \frac{1}{2}k|y-\bar{y}| + \frac{1}{2}k\left(|y-\bar{y}| + h|f(x,y) - f(x,\bar{y})|\right)$$

$$\leq k|y-\bar{y}| + \frac{1}{2}kh(k|y-\bar{y}|) = \Big(\underbrace{k + \frac{k^2 h}{2}}_{k^*}\Big)|y-\bar{y}|$$

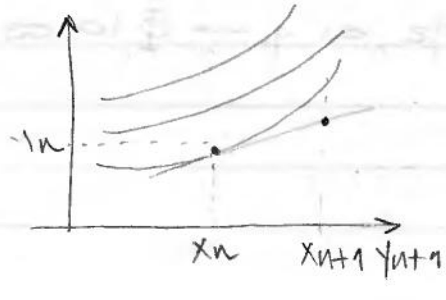
$\rightarrow \Phi$ es lipchitz

MÉTODOS IMPLÍCITOS

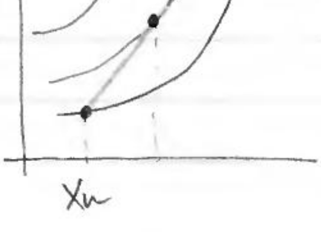
1) EULER hacia atrás (Backward EULER

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$

EULER hacia adelante



hacia atrás



Ejemplo: $y' = 2y$ $\quad y(0)=1$ $\quad h=0{,}1$

EULER hacia adelante:

$$y_1 = y_0 + h(2y_0) = 1 + h(2.1) = 1+0{,}1 . 2$$
$$= 1+0{,}2$$
$$= 1{,}2$$

y_1 (euler hacia adelante) $= 1{,}2$

EULER hacia atrás $\quad y_1 = y_0 + h(2y_1)$

$$y_1 = 1+0{,}1 . 2(y_0)$$
$$y_1 = (1+0{,}2)y_0$$
$$(1-0{,}2)y_0 = 1 \quad y_1 = \frac{1}{0{,}8} = 1{,}25$$

Euler hacia atrás tiene error local $\sigma(h^2)$
es un método de primer orden.

Método del Trapecio:

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{f(x_n,y_n) + f(x_{n+1},y_{n+1})}{2}\right)$$

Error local es $\sigma(h^3)$, es un método de segundo orden.

En estos métodos hay que, para hallar y_{n+1}, resolver en gral una ecuación no lineal o un sistema de ecuaciones no lineales.
Podemos usar un Método de Newton-Raphson donde como valor inicial de y_{n+1} $(y_{n+1}^{(0)})$ se puede tomar el y_n.

Método Predictor - Corrector: (x ej para el método del trapecio)
Predigo con x ej EULER hacia adelante $y_{n+1}^{(P)} = y_n + hf(x_n, y_n)$
corrijo con el método del trapecio

$$y_{n+1}^{(C)} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n,y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(P)})\right)$$

ESTABILIDAD

1) Euler hacia atrás

Problema test $\quad y' = qy$
$\qquad\qquad\qquad y(0)=1$

$$y_{n+1} = y_n + h(q\, y_{n+1})$$

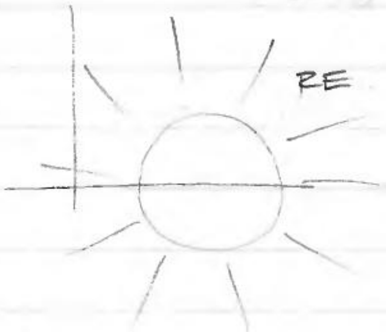
$$(1-hq)\,y_{n+1} = y_n$$

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1-hq} \qquad y_0 = 1$$

$$y_n = \left(\frac{1}{1-hq}\right)^n$$

y_n estable si $\left|\dfrac{1}{1-\underbrace{hq}_{z}}\right| < 1 \longleftarrow 1 < |z-1|$

los z distan de $(1,0)$ mas que 1



16/10

Ejemplo:

$$y' = \frac{y^2 - 2x}{y} \qquad y(0) = 1$$

Predicción: $\quad y_{n+1}^{(P)} = y_n + h f(x_n, y_n)$
(EULER)

Corrección
(TRAPECIO) $\quad y_{n+1}^{(C)} = y_n + \dfrac{h}{2}\left(f(x_n,y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(P)})\right)$

Hallar valor aprox de $y(1)$ con $h = 0{,}1$

MNT.

$$y_1^{(P)} = y_0 + h\left(y_0 - \frac{2x_0}{y_0}\right) = 1 + 0{,}1\left(1 - 2\cdot\frac{0}{1}\right) = 1{,}1$$

$$y_1^{(C)} = y_0 + \frac{h}{2}\left(\left(y_0 - \frac{2x_0}{y_0}\right) + \left(y_1^{(P)} - \frac{2x_1}{y_1^{(P)}}\right)\right) =$$

$$1 + 0{,}05\left(\left(1 - 2\cdot\frac{0}{1}\right) + \left(1{,}1 - \frac{2\cdot 0{,}1}{1{,}1}\right)\right) = 1{,}0959 = y_1$$

aprox de $y(0{,}1)$

$$y_2^{(P)} = y_1 + h\left(y_1 - \frac{2x_1}{y_1}\right) = 1{,}0959 + 0{,}1\left(1{,}0959 - \frac{2\cdot 0{,}1}{1{,}0959}\right) = 1{,}1873$$

$$y_2^{(C)} = y_1 + \frac{h}{2}\left(y_1 - \frac{2x_1}{y_1} + y_2^{(P)} - \frac{2x_2}{y_2^{(P)}}\right)$$

$$= 1{,}0959 + 0{,}05\left(1{,}0959 - \frac{2\cdot 0{,}1}{1{,}0959} + 1{,}1873 - \frac{2\cdot 0{,}2}{1{,}1873}\right) = 1{,}1841$$

$y_2 = 1{,}1841$ (aprox de $y(0{,}2)$

⋮

Repetimos hasta obtener y_{10} que será una aproximación de $y(1)$

EN MATLAB:

- Ode23
- Ode45

Ejemplo:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow \ddot{x} = -\dot{y} = -x \\ \longrightarrow \ddot{x} = -x \end{array} \quad \begin{cases} \ddot{x} + x = 0 \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow x = \cos t$

$Y' = F(t, Y)$

intervalo de la variable t.

$[T, Y]$ = Ode23 ('F', TSPAN, Y0)

condición inicial (es 1 columna)

nombre del programa.m (function) donde calculamos $F(t,Y)$ (el resultado debe ser una columna.

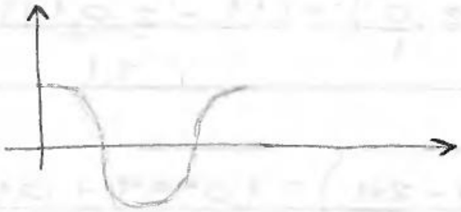
abcisas en las que fue evaluado.

Valores de Y en esas abscisas

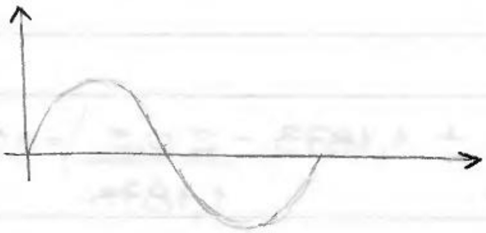
```
function yp = circ(t,y)
  yp = [-y(2)  y(1)];
```
} archivo circ.m

```
[T,Y] = ode23('circ',[0 2*pi],[1,0]');
```

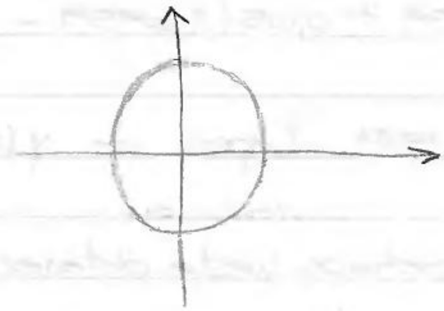
```
plot(T,Y(:,1))
```



```
plot(T,Y(:,2))
```



```
plot(Y(:,1),Y(:,2))
```



Región de estabilidad: método del trapecio

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right)$$

Problema test:

$y' = qy$

$y(0) = 1$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(q y_n + q y_{n+1}\right)$$

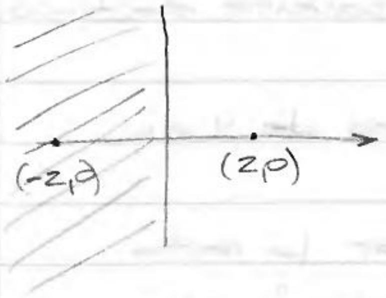
$$\left(1 - \frac{hq}{2}\right) y_{n+1} = \left(1 + \frac{hq}{2}\right) y_n \longrightarrow y_{n+1} = \left[\frac{1 + \frac{hq}{2}}{1 - \frac{hq}{2}}\right] y_n$$

$$y_n = \left(\frac{1 + \frac{hq}{2}}{1 - \frac{hq}{2}}\right)^n$$

y_n acotado si $\left| \dfrac{1+\frac{hq}{2}}{1-\frac{hq}{2}} \right| < 1$ $\qquad z = hq.$

$\rightarrow \dfrac{|z+2|}{|z-2|} < 1 \rightarrow \underbrace{|z-(-2)|}_{\text{dist a } (-2,0)} < \underbrace{|z-2|}_{\text{dist a } (2,0)}$

$\leftrightarrow Re(z) < 0$



Región de estabilidad: Método de HEUN.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\Big(f(x_n,y_n) + f(x_{n+1}, \underbrace{y_n + h f(x_n,y_n)}_{y_n + hq y_n}) \Big)$$

Problema test:

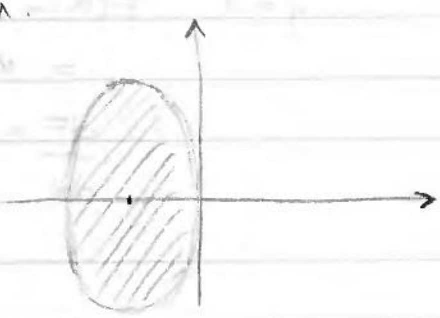
$y' = qy$
$y(0) = 1$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\big(q y_n + q(y_n + hq y_n) \big)$$

$$y_{n+1} = y_n + hq y_n + \frac{h^2}{2} q^2 y_n$$

$$y_{n+1} = \left(1 + hq + \frac{(hq)^2}{2} \right) y_n.$$

$$y_n = \left[1 + hq + \frac{(hq)^2}{2} \right]^n$$



Región de estabilidad:

$$\left|1 + z + \frac{z^2}{2}\right| < 1 \rightarrow \left|\frac{2+2z+z^2}{2}\right| < 1 - \left|1+2z+z^2\right| < 2$$

La región de estabilidad de euler está contenida en esta

R. Euler: $|z+1|<1$

Si $|z+1|<1 \rightarrow |(z+1)^2+1| \leq |(z+1)^2|+|1| = |z+1|^2+1 < 1^2+1 = 2$

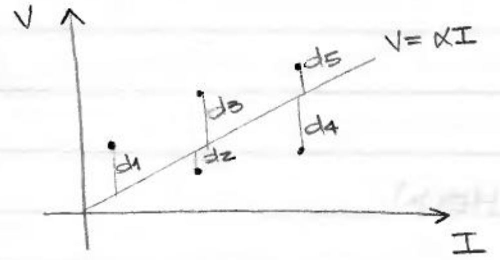
MINIMOS CUADRADOS:

Ejemplo: Ley de OHM: $V = RI$

Quiero determinar la resistencia de un componente eléctrico.

Puedo obtener varias mediciones

Cada medida me da una lectura simultánea de V e i.

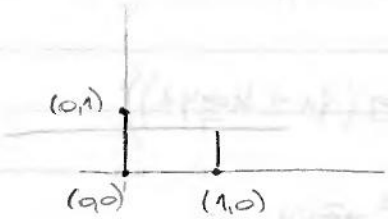


Queremos determinar la recta por el origen que mejor "ajusta" a ese conjunto de puntos.

Dada una recta por el origen calculamos: $d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2 = F(\alpha)$

La solución de mínimos cuadrados es la que minimiza $F(\alpha)$

Ejemplo:



Quiero hallar la recta horizontal que mejor "ajusta" a esos 3 puntos.

1) Criterio de mínimos cuadrados.

$y = \alpha \qquad F(\alpha) = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = \alpha^2 + (1-\alpha)^2 + \alpha^2$

$= \alpha^2 + 1 - 2\alpha + \alpha^2 + \alpha^2 = 1 - 2\alpha + 3\alpha^2$

$\frac{dF}{d\alpha} = 2 + 6\alpha = 0 \rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$

2) Norma infinito.

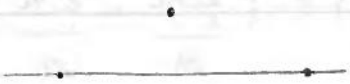
$F(\alpha) = \max\{d_1, d_2, d_3\}$

$\min F(x) = \min\{\max\{d_i\}\}$

$\alpha = 1/2$

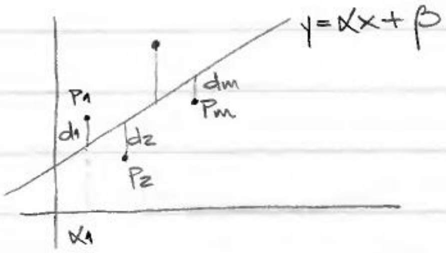
3) Norma 1. $\|X\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$

$F(\alpha) = d_1 + d_2 + d_3$



Recta que mejor ajusta a un conjunto de puntos. 21/10

Regresión lineal



Tengo m puntos $P_1, P_2, \dots, P_m$

$P_i = (x_i, y_i) \quad i = 1, 2, \dots, m$

$$\min_{\alpha,\beta} \left\{ \sum_{i=1}^{i=m} d_i^2 \right\}$$

$$F(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{m} d_i^2 = \sum_{i=1}^{m} (y_i - (\alpha x_i + \beta))^2$$

$$= \sum_{i=1}^{i=m} \left[\alpha^2 x_i^2 + 2\alpha\beta x_i + \beta^2 + y_i^2 - 2y_i(\alpha x_i + \beta)\right]$$

$$= \sum_i (\alpha^2 x_i^2 + 2\alpha\beta x_i + \beta^2 - 2\alpha x_i y_i - 2\beta y_i + y_i^2)$$

$$= \alpha^2 \left(\sum_i x_i^2 + 2\alpha\beta\left(\sum_i x_i\right) + m\beta^2 - 2\alpha \sum_i x_i y_i - 2\beta \sum_i y_i + \sum_i y_i^2\right.$$

$$\min_{\alpha,\beta} F(\alpha,\beta)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0 = \cancel{2}\alpha\left(\sum_i x_i^2\right) + \cancel{2}\beta\left(\sum_i x_i\right) - \cancel{2}\sum_i x_i y_i$$

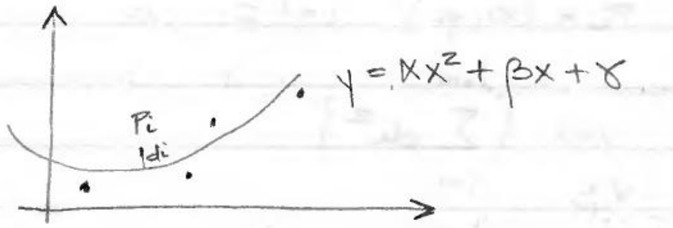
$$\frac{\partial F}{\partial \beta} = 0 = \cancel{2}\alpha\left(\sum_i x_i\right) + \cancel{2}m\beta - \cancel{2}\sum_i y_i$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i & m \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i x_i y_i \\ \sum_i y_i \end{pmatrix} \rightarrow \alpha \text{ y } \beta \text{ óptimos.}$$

Se puede probar que esta recta pasa por el centro de gravedad de los puntos $(\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{\sum_i x_i}{m} , \frac{\sum_i y_i}{m} \right)$ con pendiente $\alpha = \frac{\sum_i x_i' y_i'}{\sum_i x_i'}$

$$\begin{cases} x_i' = x_i - \bar{x} \\ y_i' = y_i - \bar{y} \end{cases}$$

Ajuste con una parábola.



$$F(\alpha,\beta,\gamma) = \sum_{i=1}^{i=m} d_i^2 \qquad d_i = \left| y_i - (\alpha x_i^2 + \beta x_i + \gamma) \right|$$

$$F(\alpha,\beta,\gamma) = \sum_i \left(y_i - (\alpha x_i^2 + \beta x_i + \gamma) \right)^2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \beta} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \gamma} = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{sistema lineal}]{} (\alpha,\beta,\gamma) \text{ óptimos.}$$

Tenemos:

- Un conjunto de m puntos (o mediciones) $P_i = (x_i, y_i)$ $i = 1, 2, \dots, m$
- Una familia de funciones:

En el modelo lineal esta familia es un espacio vectorial de funciones de dimensión finita.

Sea $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)\}$ una base de un espacio vectorial, una función genérica de ese espacio será $\varphi(x) = \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \dots + \alpha_n\varphi_n(x)$

- Consideramos la función $F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_i (y_i - \varphi(x_i))^2$ (suma de distancias verticales al cuadrado entre los P_i y el correspondiente punto en la φ)

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \left\| \begin{matrix} y_1 - (\alpha_1\varphi_1(x_1) + \alpha_2\varphi_2(x_1) + \dots + \alpha_n\varphi_n(x_1)) \\ y_2 - (\alpha_1\varphi_1(x_2) + \alpha_2\varphi_2(x_2) + \dots + \alpha_n\varphi_n(x_2)) \\ \vdots \\ y_n - (\alpha_1\varphi_1(x_m) + \alpha_2\varphi_2(x_m) + \dots + \alpha_n\varphi_n(x_m)) \end{matrix} \right\|_2$$

Sea $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \dots & \varphi_n(x_2) \\ \vdots & & & \\ \varphi_1(x_m) & \varphi_2(x_m) & \dots & \varphi_n(x_m) \end{bmatrix}$; $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

$$F(\alpha) = \|y - A\alpha\|_2^2$$

cambio de notación $y \longrightarrow b$, $\alpha \longrightarrow x$ $\qquad F(x) = \|Ax - b\|_2^2$

El problema de mínimos cuadrados lineal es $\min_x F(x)$

$$= \min_x \|Ax - b\|_2^2$$

ECUACIONES NORMALES:

Teorema: x minimiza $\|b-Ax\|_2 \leftrightarrow b-Ax \in (\mathrm{Im}(A))^\perp$
$\leftrightarrow A^t(b-Ax)=0.$

Dem: $(\leftarrow)$ sea $x \,/\, A^t(b-Ax)=0.$

$$b-Ay = b-Ax + A(x-y)$$

$$\|b-Ay\|_2^2 = \|(b-Ax)+A(x-y)\|_2^2 = \|b-Ax\|_2^2 + \|A(x-y)\|_2^2 + 2\left[A(x-y)\right]^t(b-Ax) \quad (*)$$

$$\left[A(x-y)\right]^t(b-Ax) = \left((x-y)^tA^t\right)(b-Ax) = (x-y)^t\underbrace{\left(A^t(b-Ax)\right)}_{=0} = 0$$

$$\to \|b-Ay\|_2^2 = \|b-Ax\|_2^2 + \|A(x-y)\|_2^2.$$

$\to \|b-Ay\| \geq \|b-Ax\|_2 \to x$ minimiza $\|b-Ay\|_2^2$

obs: igualdad si $A(x-y)=\vec{0}$

Supongamos que: $A^t(b-Ax) = z \neq \vec{0}$

si $x-y=-\varepsilon z$ para $\varepsilon>0$ suficientemente pequeño.

$(y = x+\varepsilon z)$

$(*)$ queda:

$$\|b-Ay\|_2^2 = \|b-Ax\|_2^2 + \varepsilon^2\|Az\|_2^2 - 2\varepsilon\underbrace{(Az)^t(b-Ax)}_{z^t\underbrace{A^t(b-Ax)}_{z}}$$

$$= \|b-Ax\|_2^2 + \varepsilon^2\|Az\|_2^2 - 2\varepsilon\|z\|_2^2$$

$$< \|b-Ax\|_2^2$$

$\uparrow$ si $\varepsilon < \varepsilon_0$

$\to F(y) = F(x)$

$\to x$ no minimiza

$$\left(\frac{2\|z\|_2^2}{\|Az\|_2^2}\right) = \varepsilon_0.$$

Ecuaciones normales: $A^tb - A^tAx = 0$

$\boxed{A^tAx = A^tb}$ A es $m\times n$ (en gral $m>n$)

$x \in \mathbb{R}^n$ $\qquad$ $A^t b$ es $n \times 1$.

$b \in \mathbb{R}^m$ $\qquad$ $A^t A$ es $n \times n$.

A^t es $n \times m$.

Si $A^t A$ es invertible, resolviendo el sistema anterior de ecuaciones (ecuaciones normales) obtengo la solución del problema de mínimos cuadrados.

En Matlab: $\min_x \|Ax-b\|_2$ lo resuelve con "\" retrobarra

$x = A \backslash b$.

28/10.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \varepsilon << 1. \\ Ax \approx b. \end{array}$$

Ecuaciones Normales:

$$A^t . A = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\varepsilon^2 \end{bmatrix} \qquad A^t b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$A^t A x = A^t b$ $\quad$ La solución exacta es $x = \dfrac{1}{3+\varepsilon^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Si $\varepsilon > \varepsilon_M$ pero $\varepsilon^2 < \varepsilon_M$ entonces en la diagonal de $A^t A$ quedan 1 $\quad$ ($fl(1+\varepsilon^2) = 1$).

Al calcular $A^t A$ y almacenarla me queda la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ que no es invertible.

Me queda que el sistema que se resuelve tiene infinitas soluciones (en vez de una solución única)

Las ecuaciones normales pueden ser un método numéricamente malo porque $\text{cond}_2(A^tA)$ sea demasiado grande.

Vamos a ver otros métodos para resolver el problema de mínimos cuadrados: $\min_x \|Ax-b\|_2$.

Veremos – descomposición QR.
– " SVD.

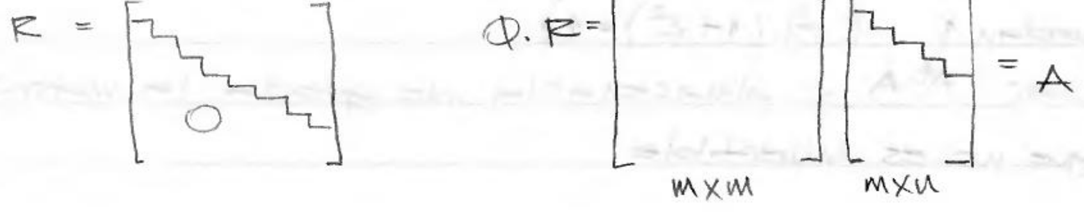
DESCOMPOSICIÓN QR:

a) ¿Qué es?
b) ¿Cómo se usa en mínimos cuadrados?
c) Métodos para hallar la descomposición QR.

Teorema: a) Sea A matriz real $m \times n$ $m \geq n$
$\rightarrow \exists Q$ matriz ortogonal $m\times m$ y R matriz $m\times n$ triangular superior tales que $A = Q.R$ (forma completa)

b) $\exists \bar{Q}$ matriz $m\times n$ tal que $Q^tQ = I_{n,n}$ y $\bar{R}$ es una matriz $n\times n$ triangular superior tales que $A = \bar{Q}\bar{R}$ (forma compacta o económica)

$Q^tQ = I_{n,n}$



MNT.

$\bar{Q} = \begin{bmatrix} & \\ & \\ & \end{bmatrix}$ Matriz $m \times n$. $\{\bar{Q}^{(1)}, \bar{Q}^{(2)}, \dots, \bar{Q}^{(n)}\}$

Conjunto ortonormal de $\mathbb{R}^m$

$$\bar{Q}^t . \bar{Q} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & \\ & \\ & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = I_{n \times n}.$$

$\bar{R} = \begin{bmatrix} * & \dots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{bmatrix}$ Matriz $n \times n$.

$\bar{Q} . \bar{R} = A$ $\quad m \times n * n \times n = n \times n$.

Supongamos tenemos la descomposición QR de A.

$\min_x \|Ax - b\|_2$ $\qquad$ Q ortogonal: $\|Qy\|_2 = \|y\|_2$

además Q^t es también ortogonal.

$$\|Ax - b\|_2 = \|Q^t(Ax - b)\|_2 = \|Q^t . Q . R x - b\|_2 = \|Rx - Q^t b\|_2$$

$$\min_x \|Ax - b\|_2 = \min_x \|Rx - \underbrace{Q^t b}_{b'}\|_2$$

$$\|Rx - b'\|_2^2 = (R_{11}x_1 + R_{12}x_2 + \dots + R_{1n}x_n - b_1) + (R_{22}x_2 + R_{23}x_3 + \dots + R_{2n}x_n - b_2^2 + \dots + (R_{nn}x_n - b'_n)^2 + b'^2_{n+1} + b'^2_{n+2} + \dots + b'^2_m$$

El x que minimiza lo anterior cumple:

$$R_{11}x_1 + R_{12}x_2 + \dots + R_{1n}x_n = b'_1$$

$$\vdots$$

$$R_{nn}x_n$$

El valor mínimo es $\sqrt{b'^2_{n+1} + \dots + b'^2_m}$

x cumple: $\bar{R}x = \bar{b}'$ $\qquad$ $\bar{b}'$ son las n primeras posiciones de $Q^t b$

$$Q^t b = \begin{bmatrix} Q^{(1)t} \\ Q^{(2)t} \\ \vdots \\ Q^{(n)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = b' = \begin{pmatrix} Q^{(1)t} \cdot b \\ Q^{(2)t} \cdot b \\ \vdots \\ Q^{(n)t} \cdot b \end{pmatrix}$$

$\bar{b}' = \bar{Q}^t \cdot b$

1) $\min\limits_{x} \|Ax - b\|_2$

2) Hallo la descomposición económica $\bar{Q}\bar{R}$ de A.

3) x es solución de $\bar{R}x = \bar{Q}^t b$.
(sistema $n \times n$, indeterminado si algún $r_{jj} = 0$)

4) Si quiero calcular el valor del mínimo con x_0 solución de 3. Calculo $\|Ax_0 - b\|_2$.

Métodos para hallar la descomposición QR.

1) Gram-Schmidt
2) Simetría de Householder.
3) Rotaciones de Givens.

Supondremos que A es de rango n

Veamos como hallar las primeras n columnas de Q.

Paso 1 $\qquad$ Definimos $= \dfrac{1}{\|A^{(1)}\|_2} \cdot A^{(1)}$ $\qquad$ $R_{11} = \|A^{(1)}\|_2$.

$(A^{(1)} = R_{11}\, Q^{(1)})$

Paso k: Disponiendo del conjunto ortonormal

$\{\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \dots, \phi^{(k-1)}\}$

que cumple: $[\phi^{(1)}, \dots, \phi^{(j)}] = [A^{(1)}, \dots, A^{(j)}]$ $j = 1, 2, \dots, k-1$

1° buscamos $\tilde{\phi}^{(k)} = A^{(k)} - \sum_{i=1}^{i=k-1} c_i \phi^{(i)}$ que verifique:

$\tilde{\phi}^{(k)} \perp \phi^{(1)}$

$\tilde{\phi}^{(k)} \perp \phi^{(2)} \longrightarrow (A^{(k)} - \sum c_i \phi^{(i)}) \times \phi^{(1)} = 0$

$\vdots \qquad \tilde{\phi}^{(k)} \times \phi^{(2)} = 0$

$\tilde{\phi}^{(k)} \perp \phi^{(k-1)} \qquad \vdots$

$\tilde{\phi}^{(k)} \times \phi^{(k-1)} = 0$

$$\Rightarrow A^{(k)t} \phi^{(1)} - c_1 \underbrace{\phi^{(1)t} \phi^{(1)}}_{=1} = 0 \longrightarrow c_1 = A^{(k)t} \phi^{(1)}$$

$c_i = A^{(k)t} \phi^{(i)} \qquad i = 1, 2, \dots, k-1$

$$\longrightarrow \tilde{\phi}^{(k)} = A^{(k)} - \sum_{i}^{k-1} (A^{(k)t} \phi^{(i)}) \phi^{(i)}$$

$$\phi^{(k)} = \frac{\tilde{\phi}^{(k)}}{\|\tilde{\phi}^{(k)}\|_2}$$

$$(\|\tilde{\phi}^{(k)}\|_2 \phi^{(k)} = \tilde{\phi}^{(k)} = A^{(k)} - \sum_{i=1}^{i=k-1} (A^{(k)t} \phi^{(i)}) \phi^{(i)}$$

$$\longrightarrow A^{(k)} = \sum_{i=1}^{i=k} (A^{(k)t} \phi^{(i)}) \phi^{(i)} + \|\tilde{\phi}^{(k)}\|_2 \phi^{(k)}$$

$\longrightarrow R_{1k} = A^{(k)t} \phi^{(1)}, \quad R_{2k} = A^{(k)t} \phi^{(2)}, \dots, \quad R_{k-1k} = A^{(k)t} \phi^{(k-1)}$

$R_{kk} = \|\tilde{\phi}^{(k)}\|_2$

SVD (Descomposición en valores singulares)

Teorema: Sea A matriz $m \times n$ de rango r

$\rightarrow \exists$ una matriz $\Sigma_{m\times n}$, $U_{m\times m}$, $V_{n\times n}$

tales que: $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \sigma_2 & & 0 & \\ & & \ddots & & 0 \\ 0 & & & \sigma_r & \\ & 0 & & & 0 \end{bmatrix}$ $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$ (σ_i son los valores singulares de A)

U es ortogonal, V es ortogonal

tales que: $A = U\Sigma V^t$ (Forma Completa)

$(m\times n) = (m\times m)\times(m\times n)\times(n\times n)$

Forma compacta (o económica):

$U = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix}$ U_1 es matriz $m\times r$

$V = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix}$ V_1 es matriz $n\times r$

$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_r \end{bmatrix}$ matriz $r\times r$. entonces $A = U_1\Sigma_1 V_1^t$

$(m,n) = (m\times r)\times(r\times r)\times(r\times n)$

Aplicación al problema de mínimos cuadrados

$\min_x \|b - Ax\|_2$

$A = U\Sigma V^t$

Definimos $y = V^t x = \begin{bmatrix} V_1^t x \\ V_2^t x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

$\|b - Ax\|_2^2 = \|UU^t b - U\Sigma V^t x\|_2^2 = \|U(U^t b - \Sigma y)\|_2^2 =$

$\|U^t b - \Sigma y\|_2^2 = \left\| \begin{bmatrix} U_1^t b \\ U_2^t b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\|_2^2 =$

$$= \left\| \begin{bmatrix} U_1^t b - \Sigma_1 y_1 \\ \hdashline U_2^t b \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \| U_1^t b - \Sigma_1 y_1 \|_2^2 + \| U_2^t b \|_2^2$$

La expresión anterior se minimiza si $\Sigma_1 y_1 = U_1^t b$, o sea $y_1 = \Sigma_1^{-1} U_1^t b$ con $\Sigma_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & & & \\ & 1/\sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/\sigma_r \end{bmatrix}$

Solución en y es $y = \begin{bmatrix} \Sigma_1^{-1} U_1^t b \\ \hdashline y_2 \end{bmatrix}$ y_2 cualquiera, $y = V^t x$

$\rightarrow x = Vy$

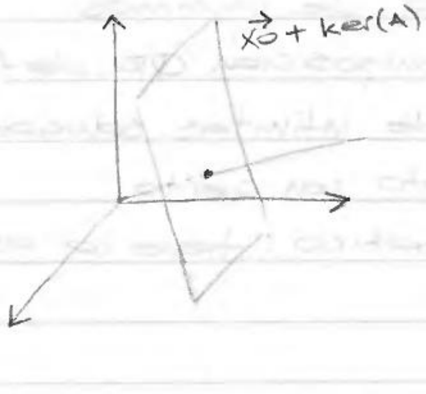
$$\Rightarrow x = Vy = \begin{bmatrix} V_1 & \vdots & V_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1^{-1} U_1^t b \\ \hdashline y_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} V_1 & \vdots & V_2 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} \Sigma_1^{-1} U_1^t b \\ \hdashline 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \hdashline y_2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= V_1 \Sigma_1^{-1} U_1^t b + V_2 y_2 \quad , y_2 \in \mathbb{R}^{n-r} \text{ arbitrario.}$$

La sol es de la forma $x_0 + \ker(A)$

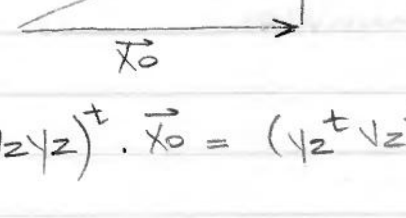
Solución de norma mínima



Prop: De todos los vectores del conjunto $\vec{x_0} + \ker(A)$

$\vec{x_0}$ es el que tiene norma 2 mas chica (el mas cercano al origen)

$$\|\vec{x_0}\|_2 \leq \|\vec{x_0} + V_2 y_2\|_2 \quad \forall y_2 \in \mathbb{R}^{n-r}$$



Hay que probar que $\vec{x_0} \perp V_2 y_2$.

$$(V_2 y_2)^t \cdot \vec{x_0} = (y_2^t V_2^t)(V_1 \Sigma_1^{-1} U_1^t b) = y_2^t \underbrace{(V_2^t V_1)}_{=0} (\Sigma_1^{-1} U_1^t b) = 0$$

PSEUDOINVERSA:

Def: Se llama matriz pseudoinversa de A a la matriz $A^+ = V_1 \Sigma_1^{-1} U_1^t = V \Sigma^+ U^t$ donde Σ^+ se obtiene trasponiendo Σ y poniendo $1/\sigma_i$ en las posiciones de los σ_i

$$\Sigma^+ = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & & & \vdots & 0 \\ & \ddots & & & \\ \cdots & \cdots & 1/\sigma_r & \vdots & \\ & & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Obs: 1) Si A es nxn invertible $\longrightarrow A^+ = A^{-1}$

2) A es mxn $m \geq n$ rango $(A) = n$.

E.N. $A^t A x = A^t b \longrightarrow x = (A^t A)^{-1} A^t b$.

En este caso se tiene que $A^+ = (A^t A)^{-1} A^t$

Es una inversa de A a la izquierda: $\left[(A^t A)^{-1} A^t\right] A = (A^t A)^{-1} (A^t A) = I_{n \times n}$

MATLAB: $Ax \approx b$.

x= A\b da la solución del problema de mínimos cuadrados usando descomposición QR. de A

Si estamos en el caso de infinitas soluciones elige una de ese conjunto con cierto criterio (es solución tipo básico: tiene varias posiciones en 0)

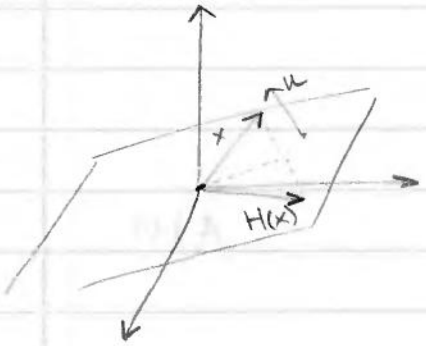
Otra forma: pinv(A) me da la pseudoinversa de A

x= pinv(A) b

Esta solución es la de norma mínima.

Método de Householder para hallar la descomp QR de A:

Simetría respecto a un hiperplano por el origen:
(subespacio vectorial con 1 dimensión menos que el espacio)



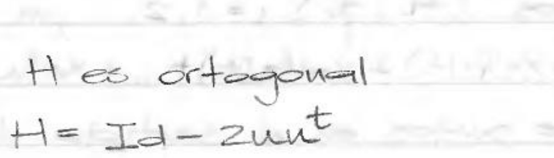
$$H(x) = x - (2uu^t)x \qquad \|u\|_2 = 1$$

Si $y \in$ Hiperplano: $y \perp u$

$$H(y) = y - (2uu^t)y = y - 2u\underbrace{(u^t y)}_{=0} = y$$

$$H(u) = u - (2uu^t)u = u - 2u\underbrace{(u^t u)}_{=\|u\|^2 = 1} = u - 2u = -u$$

H es ortogonal
$H = Id - 2uu^t$



H que convierte a x en $(\|x\|_2, 0)$ es tal que su vector u cumple:

$$u = \frac{x - x'}{\|x - x'\|_2}$$

$$A = \begin{bmatrix} A^{(1)} & A^{(2)} & \dots & A^{(n)} \end{bmatrix}$$

Hallo H_1 / $H_1 A^{(1)} = \begin{pmatrix} \|A^{(1)}\|_2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad H_1 . A = \begin{bmatrix} \|A^{(1)}\| & \\ 0 & \\ 0 & A^{(2)} \ \dots \ A^{(n)} \\ \vdots & \\ 0 & \end{bmatrix}$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{A'}$$

Construyo H_2 / $H_2 . A'^{(2)} = \begin{pmatrix} \|A'^{(2)}\|_2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$H_2 . H_1 . A = \begin{bmatrix} \|A^{(1)}\| & \alpha & \\ & \|A'^{(2)}\| & \\ 0 & 0 & \boxed{} \\ 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

4/11

MÍNIMOS CUADRADOS NO LINEAL.

Hasta ahora nuestro modelo era lineal (en los parámetros)
Tenemos un conjunto de m puntos (t_i, y_i) $i = 1, 2, \dots, m$
y hallabamos una función $\varphi(t) = x_1\varphi_1(t) + x_2\varphi_2(t) + \dots + x_n\varphi_n(t)$
que mejor ajusta al conjunto de puntos en el sentido de mínimos cuadrados.
o sea resolveríamos: $\min\limits_{x} \| \underbrace{Y - AX}_{\text{residuo}} \|_2^2$ $\quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

$r(x) = Y - AX.$

$$A = \begin{bmatrix} \varphi_1(t_1) & \varphi_2(t_1) & \dots & \varphi_n(t_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1(t_m) & \varphi_2(t_m) & \dots & \varphi_n(t_m) \end{bmatrix}$$

Simbolicamente $AX \approx Y$
(sistema sobredeterminado)

Caso no lineal: La función de ajuste no es lineal en los parámetros (las x_i)
$f(x,t)$ es la función de ajuste (es una familia de funciones que depende de n parámetros)
Ejemplo: $f(x,t) = \dfrac{x_1 \operatorname{sen}(t + x_2)}{1 + x_3 t^2}$

El problema que queremos resolver es:
$$\min_{x} \| r(x) \|_2^2$$

MNT.

$$r(x) = \begin{pmatrix} y_1 - f(x, t_1) \\ y_2 - f(x, t_2) \\ \vdots \\ y_m - f(x, t_m) \end{pmatrix}$$

lo puedo ver como un sistema no lineal sobredeterminado

$r(x) \approx 0$

Newton-Raphson: $r(x) = 0 \quad r: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

en la instancia k:

$$Jr(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -r(x^{(k)})$$

$$\to x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left[Jn(x^{(k)})\right]^{-1} r(x^{(k)})$$

Método de Gauss-Newton:

$r(x) \approx \vec{0} \qquad r: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

En la instancia k: 1) linealizamos el sistema (sobredet) alrededor de $x^{(k)}$

$r(x) = r(x^{(k)}) + Jr(x^{(k)})(x - x^{(k)}) +$ términos de 2º orden

Jr es una matriz $m \times n$

$$(Jr)_{i,j} = \frac{\partial r_i(x)}{\partial x_j}$$

En vez de minimizar $r(x)$ vamos a minimizar la expresión linealizada alrededor de $x^{(k)}$:

$$\tilde{r}^{(k)}(x) = r(x^{(k)}) + Jr(x^{(k)})(x - x^{(k)})$$

Resolvemos: $\min_x \|\tilde{r}^{(k)}(x)\|_2^2 = \min_x \| Jr(x^{(k)})(x - x^{(k)}) + r(x^{(k)})\|_2^2$

Es un problema de MC lineal: aplicamos ecuaciones normales, QR o SVD.

$$Jr(x^{(k)})(x - x^{(k)}) + r^{(k)} \approx 0$$

$$\to Jr(x^{(k)})\underbrace{(x - x^{(k)})}_{s^{(k)}} \approx -r^{(k)}$$

Algoritmo Gauss-Newton

1) Resuelvo el problema de MC lineal $J_r(x^{(k)})\, s^{(k)} \approx -r^{(k)}$
2) $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$

Criterios de parada: $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < tol$ o bien $\|r(x^{(k)})\|$ ya no cambia mucho.

Ejemplo:

$f(t,x) = x_1 e^{t x_2}$

t	0,0	0,1	0,2	0,3
y	2,0	0,7	0,3	0,1

$$r(x) = \begin{pmatrix} 2 - x_1 e^{0} \\ 0{,}7 - x_1 e^{x_2} \\ 0{,}3 - x_1 \cdot e^{2x_2} \\ 0{,}1 - x_1 e^{3x_2} \end{pmatrix} \qquad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0{,}7-1 \\ 0{,}3-1 \\ 0{,}1-1 \end{pmatrix}$$

$$-r(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}3 \\ 0{,}7 \\ 0{,}9 \end{pmatrix}$$

$J_r(x)$ La construyo por columnas

1° columna: Derivada parcial de r respecto a x_1 =

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -e^{x_2} \\ -e^{2x_2} \\ -e^{3x_2} \end{pmatrix}$$

2° columna: Derivada parcial de r con respecto a x_2

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -x_1 e^{x_2} \\ -2x_1 e^{2x_2} \\ -3x_1 e^{3x_2} \end{pmatrix}$$

$$Jr(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \\ -1 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$Jr(x^{(0)})s^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0,3 \\ 0,7 \\ 0,9 \end{pmatrix} \longrightarrow s^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,69 \\ -0,61 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow x^{(1)} = x^{(0)} = s^{(0)} = \begin{pmatrix} 1,69 \\ -0,61 \end{pmatrix}$$

$x^{(k)}$		$\|r^{(k)}\|_2^2$	
1	0	2,39	$k=0$
1,69	-0,61	0,212	$k=1$
1,975	-0,93	0,007	$k=2$
1,994	-1,004	0,002	$k=3$
1,995	-1,009	0,002	$k=4$
1,995	-1,010	0,002	$k=5$

INTERPOLACIÓN

I) interpolación polinómica

Tenemos $n+1$ puntos : $(x_0, y_0), (x_1, x_1), (x_n, y_n)$ y queremos hallar el polinomio de grado n que pasa por todos esos puntos. Se llama polinomio interpolador de grado n.

<u>Teorema</u>: Si las x_i son todas distintas entonces el polinomio interpolador de grado n existe y es único

Veremos 3 métodos para hallarlo:

1) Expresión con monomios
2) " de Lagrange
3) " " Newton

Expresión con monomios:

$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

tenemos $n+1$ incógnitas: $a_0, a_1, \dots, a_n$.

Impondremos que el polinomio pase por los puntos (x_i, y_i) $i=0,\dots,n$.

$P_n(x_0) = y_0 \quad P_n(x_1) = y_1 \quad \dots \quad P_n(x_k) = y_k \quad \dots \quad P_n(x_n) = y_n$

queda:

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_{n-1} x_0^{n-1} + a_n x_0^n = y_0.$$
$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_{n-1} x_1^{n-1} + a_n x_1^n = y_1.$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$a_0 + a_1 x_k + a_2 x_k^2 + \dots + a_{n-1} x_k^{n-1} + a_n x_k^n = y_k.$$
$$\vdots$$
$$a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_{n-1} x_n^{n-1} + a_n x_n^n = y_n$$

$$\rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \\ \vdots & & & \\ 1 & x_k & x_k^2 & \dots \\ \vdots & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots \end{bmatrix}}_{\text{matriz de Vandermonde.}} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \\ y_k \\ \\ y_n \end{pmatrix}$$

Resolviendo este sistema cuadrado invertible tengo los coeficientes del polinomio.

prop: $\det(\text{Vander}) = \prod_{i<j} (x_j - x_i)$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = (x_1-x_0)(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$

6/11.

Interpolación de Lagrange.

En vez de usar las funciones $\{1, x, x^2, \dots, x^m\}$.
Si tenemos los puntos $(x_0,y_0), \dots, (x_m, y_m)$ vamos a considerar la fila$^{m\times 1}$ de polinomios (de grado m)
$\{L_0, L_1, \dots, L_m\}$

L_k cumple: $L_k(x_0) = 0$.

$$\vdots$$

$L_k(x_{k-1}) = 0$

$L_k(x_k) = 1$

$L_k(x_{k+1}) = 0$

$$\vdots$$

$L_k(x_m) = 0$.

$$L_k(x) = \alpha (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_m)$$

$$1 = L_k(x_k) = \alpha(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_m)$$

$$\Rightarrow L_k(x) = \frac{\prod_{i\neq k}^{i=m}(x-x_i)}{\prod_{i\neq k}^{i=m}(x_k-x_i)}$$

$\{L_0, \dots, L_m\}$ son LI, son una base de P_m (polinomio de grado $\leq m$.

Si P_m es el polinomio interpolador de grado m de los datos (x_i, y_i) $i = 0, \dots, m$

$$P_m(x) = \beta_0 L_0(x) + \beta_1 L_1(x) + \dots + \beta_m L_m(x)$$

$$y_m = P_m(x_k) = \beta_0 \underbrace{L_0(x_k)}_{0} + \beta_1 \underbrace{L_1(x_k)}_{0} + \dots + \beta_k \underbrace{L_k x_k}_{=1} + \dots + \beta_m \underbrace{L_m x_k}_{0}$$

$\rightarrow \beta_k = y^k$

$\rightarrow P_m(x) = \sum_{i=0}^{i=m} y_i L_i(x)$

Ejemplo:

x	1,1	1,2	1,4
y	0,3	0,2	0,15

Determinemos el valor aproximado de $y(1,3)$.

$$L_0(x) = \frac{(x-1,2)(x-1,4)}{(1,1-1,2)(1,1-1,4)} = \frac{(x-1,2)(x-1,4)}{(-0,1)(-0,3)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1,1)(x-1,4)}{(1,2-1,1)(1,2-1,4)} = \frac{(x-1,1)(x-1,4)}{(0,1)(-0,2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1,1)(x-1,2)}{(1,4-1,1)(1,4-1,2)} = \frac{(x-1,1)(x-1,2)}{(0,3)(-0,2)}$$

$$P_2(x) = 0,3\, L_0(x) + 0,2\, L_1(x) + 0,15\, L_2(x)$$

$$y(1,3) - P_2(1,3) = 0,3 \underbrace{L_0(1,3)}_{\frac{0,1(-0,1)}{0,03}} + 0,2 \underbrace{L_1(1,3)}_{\frac{0,2(-0,1)}{0,03}} + 0,15 \underbrace{L_2(1,3)}_{\frac{(0,2)(0,1)}{0,06}}$$

Forma de Newton

Usamos la base $\{1, x-x_0, (x-x_0)(x-x_1), (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2), \dots, \prod_{i=0}^{i=k}(x-x_i), \dots, \prod_{i=0}^{i=n-1}(x-x_i)\}$.

(son LI)

$$P_m(x) = \alpha_0 . 1 + \alpha_1(x-x_0) + \alpha_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + \alpha_m(x-x_0)$$
$$(x-x_1)\dots x(x-x^{m-1})$$

MNT.

$y_0 = P_n(x_0) = \alpha_0$

$y_1 = P_n(x_1) = \alpha_0 + \alpha_1 (x_1 - x_0)$

$y_2 = P_n(x_2) = \alpha_0 + \alpha_1 (x_2 - x_0) + \alpha_2 (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$

$\vdots$

$y_k = P_n(x_k) = \alpha_0 + \alpha_1 (x_k - x_0) + \dots + \alpha_k (x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})$

$\vdots$

$y_m = P_n(x_m) = \alpha_0 + \alpha_1 (x_m - x_0) + \dots + \alpha_m (x_m - x_0)(x_m - x_1) \dots (x_m - x_{m-1})$

Queda:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & (x_1 - x_0) & & \text{O} \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Resuelvo el sistema Δ en los α y luego:

$$P_m(x) = \sum_{i=0}^{i=m} \alpha_i \left(\prod_{0<k<i} (x - x_k) \right)$$

Esquema de diferencias divididas:

$$\begin{array}{lll} x_0 & y_0 & \\ & & \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ x_1 & y_1 & \\ & & \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ x_2 & y_2 & \\ & & \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \\ x_3 & y_3 & \\ & & \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} \\ x_4 & y_4 & \end{array}$$

son los α.

de 4° órden

de 2° órden

de 3° órden

diferencias de primer órden

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

$$f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

diferencias de segundo órden

diferencias de tercer orden.

$$f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_{i-1}}$$

diferencias de cuarto orden.

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_1, x_2, x_3, x_4] - f[x_0, x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_0}.$$

En gral: $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \dfrac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}.$

Ejemplo:

x	y	dif 1° ord.	dif 2° ord.	dif 3° ord.
2,0	1,3863			
2,3	1,9157	1,76467		
2,5	2,2907	1,87500	0,22067	
2,6	2,4843	1,93600	0,20333	-0,02889

$$P_3(x) = 1{,}3863 + 1{,}76467\,(x-2{,}0) + 0{,}22067\,(x-2{,}0)(x-2{,}3)$$
$$-0{,}02889\,(x-2{,}0)(x-2{,}3)(x-2{,}5)$$

Estimar el valor de la función en $x = 2{,}4$.

opción 1) $f(2{,}4) \approx P_3(2{,}4) = 2{,}1011$

opción 2) $P_2(x) = 1{,}9157 + 1{,}875\,(x-2{,}3) + 0{,}20333\,(x-2{,}3)(x-2{,}5)$

$f(2{,}4) \approx P_2(2{,}4) = 2{,}1012$.

Error en la interpolación polinómica.

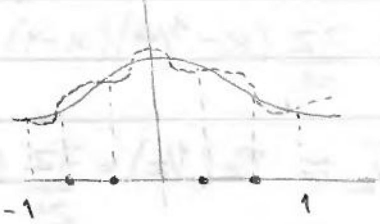
Supongamos que los puntos (x_i, y_i) $i=0,\dots,n$ están en el gráfico de una función $y=f(x)$

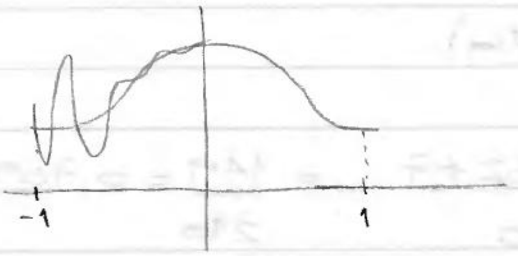
Teorema: Error de interpolación:

$$= f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \quad \text{donde} \quad c \in [x_0, x_n]$$

Fenómeno de Runge

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2} \qquad -1 \leq x \leq 1$$





si tomamos n puntos equiespaciados y hacemos que n crezca se tiene que:

$$\max_{-1\leq x\leq 1} |f(x) - P_n(x)| \xrightarrow[n]{} +\infty$$

11 | 11

Ejemplo:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

x	1/4	4/9	1
y	1/2	2/3	1

Estimar $\frac{1}{\sqrt{2}}$ y dar una cota del error.

Teorema: (error del polinomio interpolador)

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

P_n es el polinomio interpolador por $(x_i, f(x_i))$ $i = 0,\dots,n$.

$$P_2(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lagrange}}}{=} \frac{1}{2}L_0(x) + \frac{2}{3}L_1(x) + 1\,L_2(x) = \frac{1}{2}\frac{(x-4/9)(x-1)}{(1/4-4/9)(1/4-1)}$$

$$+ \frac{2}{3}\frac{(x-1/4)(x-1)}{(4/9-1/4)(4/9-1)} + 1\,\frac{(x-1/4)(x-4/9)}{(1-1/4)(1-4/9)}$$

$$P_2(x) = \frac{72}{21}(x-4/9)(x-1) - \frac{216}{35}(x-1/4)(x-1) + \frac{36}{15}(x-1/4)(x-4/9)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{1/2} \approx P_2(1/2) = \frac{72}{21}(1/2-4/9)(-1/2) - \frac{216}{35}(1/4)(-1/2) +$$

$$\frac{36}{15}(1/4)(1/2-4/9)$$

$$= -\frac{2}{21} + \frac{27}{35} + \frac{1}{30} = \frac{-20+162+7}{210} = \frac{149}{210} = 0,7095238$$

Error cometido: $\sqrt{1/2} - \frac{149}{210} = -2,417 \cdot 10^{-3}$

$$\text{Error} = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-1/4)(x-4/9)(x-1) \qquad x = 1/2$$

$$= \frac{f^{(3)}(c)}{6}\underbrace{(1/2-1/4)}_{1/4}\underbrace{(1/2-4/9)}_{1/18}\underbrace{(1/2-1)}_{-1/2} = -\frac{f^{(3)}(c)}{864} \quad c \in [1/4, 1]$$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-5/2} = \frac{3}{8}x^{-5/2}$$

$$\text{Error} = \frac{-3/8\, c^{-5/2}}{864} = \frac{1}{2304} \cdot c^{-5/2}$$ peor caso en $c = 1/4$

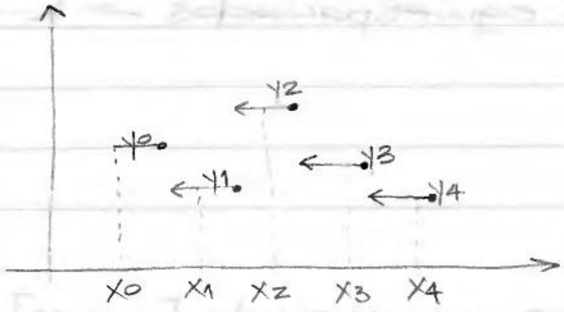
$$\frac{1}{4}^{-5/2} = 4^{5/2} = 2^5 = 32$$

$$\text{Error} = \frac{-32}{2304} = -0{,}1006.$$

El signo coincide con la predicción y en valor absoluto es menor.

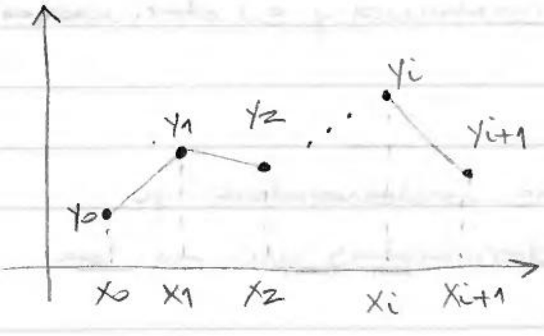
Interpolación con funciones a trozos.

1) Vecino mas cercano.



Si x_k es la abscisa mas cercana a x entonces $s(x) = y_k$.

2) Interpolación lineal



$s(x)$ es tal que en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ coincide con la recta que pasa por los puntos (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})

$$s(x) = y_i \frac{(x - x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}} + y_{i+1} \frac{(x - x_i)}{x_{i+1} - x_i} \quad \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}]$$

a) $S(x)$ es continua $\forall x$

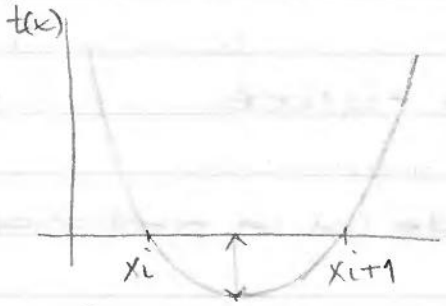
b) En los x_i la derivada es discontinua.

c) Error en la interpolación lineal:

$$f(x) - S(x) = \frac{f''(c)}{2} \underbrace{(x-x_i)(x-x_{i+1})}_{t(x)} \quad \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$\exists\, c \in [x_i, x_{i+1}]$$

si $x_{i+1} - x_i = k_i$



$$|t(x)| \leq \frac{k_i}{2} \cdot \frac{k_i}{2}$$

$$|f(x) - S(x)| \leq \frac{f''(c)}{2} \frac{k_i^2}{4}$$

$$|f(x) - S(x)| \leq \frac{\|f''\|_\infty^2}{8} \max k_i^2$$

$$|f(x) - S(x)| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{8} k$$

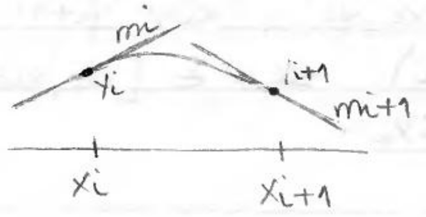
si tomo cada vez mas puntos equiespaciados $\to k \to 0$ entonces Error $\to 0 \ \forall x$

3) $\begin{cases} \text{Hermite Cúbico.} \\ \text{Spline Cúbico.} \end{cases}$

Tienen en común: 1) En cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ la $S(x)$ coincide con un polinomio de 3° grado.

2) $S(x)$ es continua y su derivada primera $(S'(x))$ es continua $\forall x$.

Supongamos que además de las ordenadas y_i conociéramos el valor de las derivadas m_i en las abscisas x_i



Con estos 4 valores construyo en $[x_i, x_{i+1}]$ un polinomio cúbico $s_i(x)$ tal que
$$s_i(x_i) = y_i$$
$$s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$$
$$s'(x_i) = m_i$$
$$s'(x_{i+1}) = m_{i+1}$$

Queda: $s_i(x) = y_i + t\Delta y_i + t(t-1)(\Delta y_i - h_i m_i) + t^2(t-1)(h_i(m_i + m_{i+1}) - 2\Delta y_i)$

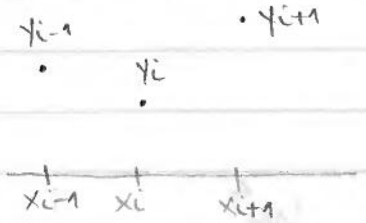
$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$; $h_i = x_{i+1} - x_i$

$t = \dfrac{x - x_i}{h_i}$ (si $x \in [x_i, x_{i+1}] \to t \in [0,1]$)

HERMITE CÚBICO:

- si conozco efectivamente las derivadas m_i aplicando lo anterior consigo una interpolante $s(x)$ continua con derivada primera continua.

- si no conozco las derivadas se puede hacer previamente una estimación de las mismas.



estimo la derivada en x_i $(i=1,\dots,n-1)$ con $m_i = \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$ o bien

$$m_i = \frac{1}{2}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)$$

$$m_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad ; \quad m_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$$

Error de interpolación.

a) Interpolación polinómica.

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

$c \in$ al menor intervalo que contiene a $x, x_0, \dots, x_n$.

b) Hermite cúbico

Si $x \in [x_i, x_{i+1}]$ $f(x)$ se aproxima por un polinomio cúbico tal que coinciden ordenadas en x_i, x_{i+1} y de las derivadas primeras ($m_i = f'(x_i)$)

Por "analogía" (lo miramos como 2 puntos en x_i y 2 puntos en x_{i+1})

$$f(x) - S_i(x) = \frac{f^{(IV)}(c)}{4!} \underbrace{(x-x_i)^2 (x-x_{i+1})^2}_{\text{se acota por } \left(\frac{h_i}{2}\right)^2 \left(\frac{h_i}{2}\right)^2} \quad c \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$|\text{Error}| \leq \frac{f^{(IV)}(c)}{4!} \frac{h_i^4}{16}$$

$$|\text{Error Hermite Cúbico}| \leq \frac{\|f^{(IV)}\|_{\infty\,[x_i, x_{i+1}]}\ h_i^4}{384}$$

interp. lineal: $|E| \leq \dfrac{\|f''\|_\infty h_i^2}{8}$

c) Spline cúbico:

Para el caso not a knot:

$|\text{Error spline}| \lesssim \frac{5}{384} \|f^{(IV)}\|_\infty h^4$ en $[x_0, x_n]$

- fórmula aproximada
- x_i equiespaciados

Interpolación de Hermite.

Es un método de interpolación polinómica, cuando tenemos para ciertas abscisas x_i, información del valor funcional y de sus derivadas.
Hermite mostró una forma de construir este polinomio interpolador generalizando el esquema de diferencias divididas de Newton.

Ejemplo: $f(x) = x^8 + 1$
supongamos las abscisas $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$
en las cuales tenemos los valores: f, f', f''

	-1	0	1
f	2	1	2
f'	-8	0	8
f''	56	0	56.

Hermite: $f[\underbrace{x_i\, x_i \dots x_i}_{k \text{ veces}}] = \frac{f^{(k-1)}(x_i)}{(k-1)!}$

$f[x_i x_i] = f'(x_i)$; $f[x_i x_i x_i] = \frac{f''(x_i)}{2}$

x_i	f_i	Dif de 1º orden	Dif de 2º orden						
-1	2	-8							
-1	2	-8	28	-21					
-1	2	-1	7	-6	15	-10			
0	1	0	1	-1	5	-2	4	-1	
0	1	0	0	1	1	-2	2	1	1
0	1	1	1	6	5	10	4		
1	2	8	7	21	15				
1	2	8	28						
1	2								

Polinomio interpolador:

$$P_8(x) = 2 + (-8)(x+1) + 28(x+1)^2 - 2(x+1)^3 + 15(x+1)^3 x - 10(x+1)^3 x^2 + 4(x+1)^3 x^3 + (-1)(x+1)^3 x^3 (x-1) + ((x+1)^3 x^3 (x-1)^2$$
$$= x^8 + 1$$

CURVAS DE BEZIER.

1) Polinomios de Bernstein.
de grado n son una base de P_n (E.V. de los polinomios de grado $\leq n$.

$$1 = 1^n = (t+1-t)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \underbrace{C_k^n t^k (1-t)^{n-k}}_{B_{k,n}(t)}$$

El conjunto $\{B_{k,n},\ 0 \leq k \leq n\}$.
es un conjunto de $n+1$ polinomios de grado n
Se puede probar que son LI $\rightarrow$ son una base de P_n.

$n=1$ $\{1-t, t\}$.
$n=2$ $\{(1-t)^2, 2t(1-t), t^2\}$
$n=3$ $\{(1-t)^3, 3(1-t)^2 t, 3(1-t)t^2, t^3\}$

Prop: a) $B_{k,n}(t) \geq 0$ si $t \in [0,1]$

$B_{k,n}(t) \leq 1$

b) La suma de los polinomios vale 1.

21/11

Polinomios de Bernstein.

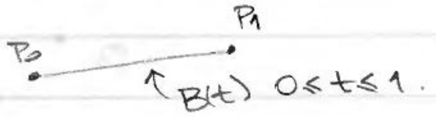
$$B_{k,n}(t) = C^n_k t^k (1-t)^{n-k} \qquad k=0,1,2,\dots,n.$$

Curvas de Bezier.

1) lineal : si P_0 y P_1 son dos puntos (en principio del plano).

$$B(t) = (1-t) P_0 + t P_1 \qquad t \in [0,1].$$

Es el segmento de P_0 a P_1



2) Cuadratico : P_0, P_1, P_2

$$B(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t) P_1 + (1-t)^2 P_2$$

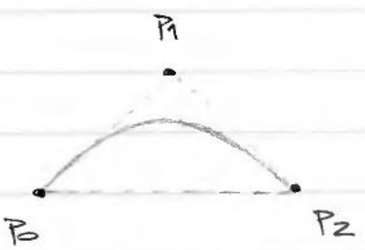
$t=0 \longrightarrow P_0$

$t=1 \longrightarrow P_2$

$$\left.\frac{dB}{dt}\right|_{t=0} = 2(1-t)(-1)P_0 + 2(1-2t)P_1 + 2tP_2 \Big|_{t=0}$$
$$= 2P_1 - 2P_0 = 2(P_1 - P_0)$$

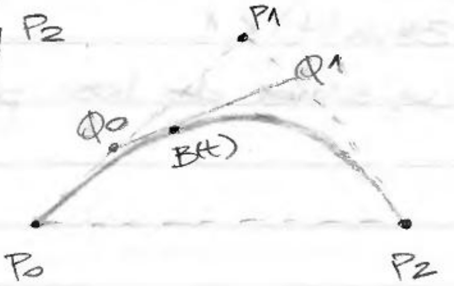
$$\left.\frac{dB}{dt}\right|_{t=1} = 2P_2 - 2P_1 = 2(P_2 - P_1)$$

$B(t) \in$ al Δ P_0, P_1, P_2



$$B(t) = (1-t)\underbrace{\Big[(1-t)P_0 + tP_1\Big]}_{\phi_0} + \underbrace{t\Big[(1-t)P_1 + tP_2\Big]}_{\phi_1}$$

Φ_0 : Bezier lineal entre P_0 y P_1
Φ_1 : " " " P_1 y P_2
$B(t)$



Orden n:
Tenemos $n+1$ puntos $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$

$$B(t) = B_{0,n}(t)P_0 + B_{1,n}(t)P_1 + \ldots + B_{n,n}(t)P_n.$$

$$B_{k,n} = C_k^n t^k (1-t)^{n-k} \qquad t \in [0,1]$$

$B(0) = P_0$ $\quad B'(0)$ colineal $P_1 - P_0$

$B(1) = P_n$ $\quad B'(1)$ " $P_n - P_{n-1}$

$B(t) \in$ a la envolvente convexa de los puntos $P_0, \ldots, P_n$.

$$B(t) = B_{P_0 P_1 \ldots P_n}(t) = (1-t) B_{P_0 P_1 \ldots P_{n-1}}(t) + t B_{P_1 P_2, \ldots, P_n}(t)$$

La curva de Bezier de órden n es una interpolación lineal. Bezier de grado 1) de 2 curvas de Bezier de órden $n-1$.

Examen dic. 2007.

1) Dado el sistema
$$\begin{aligned} x+2y-2z&=0 \\ x+y+z&=0 \\ 2x+2y+z&=1 \end{aligned}$$

i) Plantee el método de Jacobi para resolver el sistema en forma iterativa. Haga 3 iteraciones partiendo del punto (3,2,1)

$$\begin{aligned} x&=-2y+2z+2 & \qquad x^{(k+1)}&=-2y^{(k)}+2z^{(k)}+2 \\ y&=-x-z & y^{(k+1)}&=-x^{(k)}-z^{(k)} \\ z&=-2x-2y+1 & z^{(k+1)}&=-2x^{(k)}-2y^{(k)}+1 \end{aligned}$$

$$\hat{x}^{(0)}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \longrightarrow \hat{x}^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\-4\\-9\end{pmatrix} \longrightarrow \hat{x}^{(2)}=\begin{pmatrix}-8\\9\\9\end{pmatrix} \longrightarrow \hat{x}^{(3)}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

exacta.

ii) Hallar la matriz de iteración J. del método de Jacobi. Calcular radio espectral y probar convergencia

$Ax=b \qquad A=M+N$

$Mx+Nx=b$

$Mx=-Nx+b \longrightarrow Mx^{(k+1)}=-Nx^{(k)}+b$

$x=\underbrace{-M^{-1}N}_{B}x+\underbrace{M^{-1}b}_{f} \longrightarrow x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$

$$J=\begin{bmatrix}0&-2&2\\-1&0&-1\\-2&-2&0\end{bmatrix} \qquad \chi_J(\lambda)=\det(J-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda&-2&-2\\-1&-\lambda&-1\\-2&-2&-\lambda\end{vmatrix}$$

$$-\lambda^3+4-4-(4\lambda-2\lambda-2\lambda)=-\lambda^3.$$

$\lambda=0$ triple, radio espectral $=0. <1 \longrightarrow$ el método converge

iii) Idem con Gauss-Seidel.

$$x = -2y + 2z + 2 \qquad x^{(k+1)} = -2y^{(k)} + 2z^{(k)} + 2$$
$$x + y = -z \qquad x^{(k+1)} + y^{(k+1)} = -z^{(k)}$$
$$2x + 2y + z = 1. \qquad 2x^{(k+1)} + 2y^{(k+1)} + z^{(k+1)} = 1.$$

$$x^{(k+1)} = -2y^{(k)} + 2z^{(k)} + 2 \qquad x' = -2y + 2z + 2$$
$$y^{(k+1)} = -x^{(k+1)} - z^{(k)} \qquad y' = -x' - z$$
$$z^{(k+1)} = -2x^{(k+1)} - 2y^{(k+1)} + 1 \qquad z' = -2x' - 2y' + 1$$

Vamos a hallar los x', y', z' en función de x, y, z

$$y' = -x' - z = 2y - 2z - 2 - z = 2y - 3z - 2$$
$$z' = -2x' - 2y' + 1 = -2(-2y + 2z + 2) - 2(2y - 3z - 2) + 1 = 2z + 1$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_G(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)(2-\lambda)$$

valores propios
0 simple
2 doble.

$\rho(G) = 2 \geq 1$ no converge.

iv) Escriba el método de sobrerrelajación (SOR) para $w = 3/2$ está la convergencia garantizada

$$Ax = b$$
$$wAx = wb \qquad wA = \begin{bmatrix} wa_{11} & wa_{12} & wa_{13} \\ wa_{21} & wa_{22} & wa_{23} \\ wa_{31} & wa_{32} & wa_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\overset{M(\omega)}{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ \omega a_{21} & a_{22} & 0 \\ \omega a_{31} & \omega a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}} + \overset{N(\omega)}{\begin{bmatrix} (\omega-1)a_{11} & \omega a_{12} & \omega a_{13} \\ 0 & (\omega-1)a_{22} & \omega a_{23} \\ 0 & 0 & (\omega-1)a_{33} \end{bmatrix}}$$

si $\omega = 3/2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \\ z^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -3 & 3 \\ 0 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \\ z^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

$x' = -1/2x - 3y + 3z + 3$

$y' = -3/2x' - 1/2y - 3/2z$

$z' = -3x' - 3y' - 1/2z + 3/2$

Resuelta:

$x' = -1/2x - 3y + 3z + 3$

$y' = 3/4x + 4y - 6z - 9/2$

$z' = -3/4x - 3y + 17/2z + 6$

$$B_{SOR} = \begin{pmatrix} -1/2 & -3 & 3 \\ 3/4 & 4 & -6 \\ -3/4 & -3 & 17/2 \end{pmatrix}$$

sugerencia: traza = suma valores propios.

traza $= 12$ $\quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 12$

$\rho(B_{SOR}) > 1 \rightarrow$ no converge.