통계 개요

- 통계란 분석하고자 하는 집단에 대해서 조사하거나 실험을 통해서 얻는 자료 또는 이의 요약된 형태를 말함
- 통계학이란 불확실한 상황에서 효과적인 의사결정을 할 수 있도록 수치자료를 수집, 정리, 표현하고 분석하는 이런과 방법을 연구하는 학문
- 통계분석이란 특정집단을 대상으로 자료를 수집하여 대상집단에 대한 정보를 구하고, 적절한 통계분석 방법을 이용하여 의사결정(통계적 추론)을 하는 과정을 말함

표본

단순 랜덤 추출법

계통 추출법

군집 추출법

층화 추출법

확률과 확률분포

- 확률

> 발생 가능한 모든 사건들의 집합 표본공간에서 표본공간의 부분집합인 특정 사건 A가 발생할 수 있는 비율을 나타내는 값으로, 0과 1 사이의 값이며, 가능한 모든 사건의 확률의 합은 항상 1이다.

$$P(A) = \frac{\text{특정 사건 A의 경우}}{\text{전체 사건의 경우 (표본공간)}}$$

- 조건부확률

> 특정 사건 A가 발생했다는 것이 사실이라는 전제하에 또 다른 사건 B가 발생할 확률을 나타낸 값으로, 0과 1 사이의 값을 갖는다.

$$P(B|A) = \frac{P(BnA)}{P(A)}$$

- 독립사건과 배반사건
  - 독립사건
  - 주사위를 2번 던지는 시행에서 첫 번째로 나오는 눈의 수가 두 번째 주사위에 영향을 주지 않는 것처럼 서로에게 영향을 주지 않는 두 개의 사건을 독립이라고 함
  - 조건부 확률에서 두 사건 A와 B가 독립인 경우에는 A가 발생했을 때를 가정하더라도 B의 확률은 변하지 않기 때문에 다음의 식이 성립

$$P(B|A) = P(A)$$

따라서 두 사건 A와 B가 독립이면 아래 식이 성립

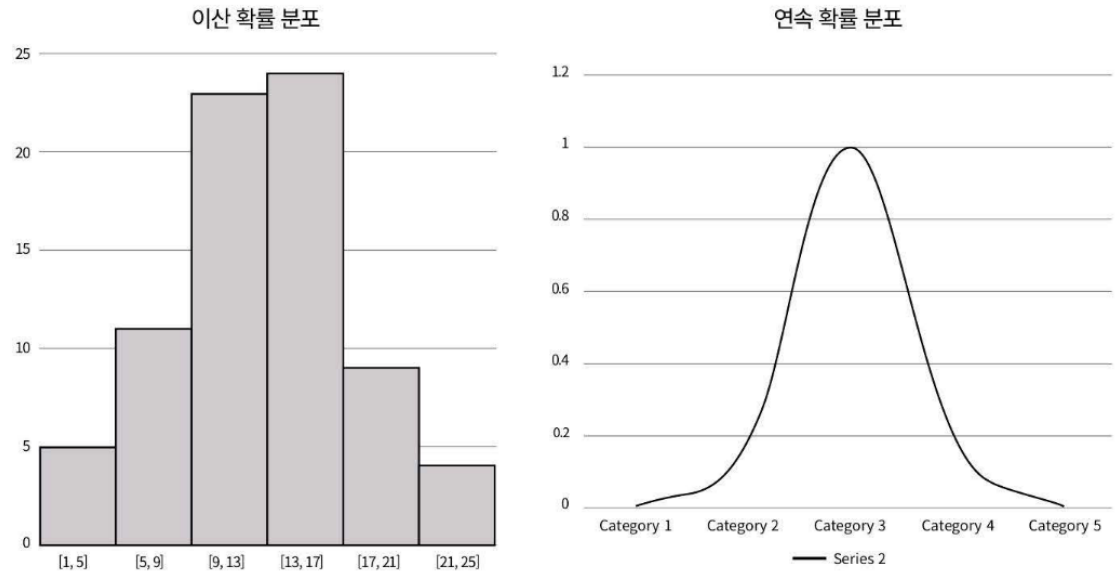
$$P(AnB) = P(A)P(B)$$

- 배반사건
- 두 사건 A와 B에 대하여 교집합, 즉 공통된 부분이 없는 경우를 배반사건이라고 한다.
- 동시에 일어날 수 없는 사건

$$AnB = \emptyset$$

- 확률변수
  - 무작위 실험을 했을 때 특정 확률로 발생하는 각각의 결과를 수치적 값으로 표현하는 변수를 확률변수라 한다
  - 두 번 연속으로 동전 던지기 실험에서 동전의 앞면 혹은 뒷면이 나올 확률을 가지고 발생하는 결과에 앞면닝 경우 '1', 뒷면일 경우 '0'이라는 실수값을 부여할 때, 바로 그 실수값에 부여하는 변수를 확률변수라 한다.
  - 확률변수는 다시 변수의 특성에 따라 이산확률변수와 연속확률변수로 구분된다.
- 확률분포
  - 확률변수의 모든 값과 그에 대응하는 확률이 어떻게 분포하고 있는지가 바로 확률분포이다.
  - 이때 확률변수에 의해 정의된 실수를 확률에 대응시키는 함수를 확률함수라 한다.

【 이산확률분포와 연속확률분포 】



이산확률분포

베르누이 분포

- 확률변수 X가 취할 수 있는 값이 두 개인 경우로 일반적으로 한 번의 시행을 할 때 성공과 실패로 나눌 수 있는 성공할 확률이 p인 분포를 의미
- 하나의 동전을 던져서 앞면이 나올 확률, 제비뽑기에서 당첨될 확률, 시험에 합격하거나 혹은 불합격할 확률 등을 예를 들 수 있음

$$P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x} \text{ (단, } x = 0, 1)$$

$$E(X) = p$$

$$Var(X) = p(1-p)$$

이항 분포

- 이항 분포는 n번의 베르누이 시행(성공 또는 실패)에서 k번 성공할 확률의 분포를 의미
- 하나의 동전을 3번 던져서 앞면이 2번 나올 확률, 하나의 주사위를 5번 던져서 1이 한 번 나올 확률, 3번의 제비뽑기에서 1번 당첨될 확률 등을 예로 들 수 있음

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} \text{ (단, } x = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

$$E(X) = np$$

$$Var(X) = np(1-p)$$

기하 분포

- 성공 확률이 p인 베르누이 시행에서 처음으로 성공이 나올 때까지 k번 실패할 확률의 분포를 의미
- 동전을 던져서 3번째에 앞면이 나올 확률, 주사위를 던져서 4번째에 1이 나올 확률, 제비뽑기를 복원 추출로 시행할 때 5번째에 당첨될 확률 등을 예를 들 수 있음

$$P(X = k) = p(1-p)^k \text{ (단, } k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

다항 분포

- 이항 분포를 확장한 개념으로, n번의 시행에서 각 시행이 3개 이상의 결과를 가질 수 있는 확률의 분포를 의미

- 주사위를 n번 던졌을 때 1의 눈이 p_1의 확률로 x번, 2의 눈이 p_2의 확률로 y번, 3 이상의 눈이 p_3의 확률로 z번 나올 확률 등을 예로 들 수 있음

$$\mathrm{P}(X=x,\ Y=y,\ Z=z)=\frac{n!}{x!y!z!}p_1^x p_2^y p_3^z \text{(단, } x+y+z=n)$$

포아송 분포

- 단위 시간 또는 단위 공간 내에서 발생할 수 있는 사건의 발생 횟수에 대한 확률분포를 의미
- 8시간 동안 3번의 장난전화가 왔을 때 1시간 동안 장난전화가 2번 올 확률, 5페이지 안에 3개의 오타가 있다면 1페이지 안에 2개의 오타가 있을 확률 등을 예로 들 수 있음

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^x}{x!}$$

(단, λ는 단위 시간 또는 단위 공간당 사건 발생 비율)

$$\mathrm{E}(\mathrm{X})=\lambda$$

$$\mathrm{Var}(X)=\lambda$$

이산확률변수

- 확률변수가 취할 수 있는 실수 값의 수를 셀 수 있는 변수를 이산확률변수라 한다.
- 이산확률변수는 셀 수 있는 실수값을 취함
- 서로 배반인 사건들의 합집합의 확률은 각 사건의 확률의 합이다.

$$0\le p(X)\le 1$$

$$\sum p(X)=1$$

연속확률분포

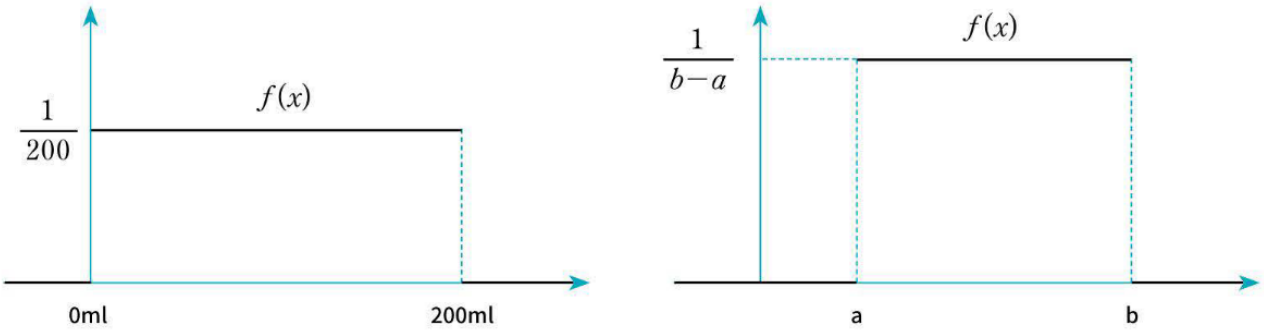
균일 분포

- 균일 분포는 연속형 확률변수인 X가 취할 수 있는 모든 값에 대하여 같은 확률을 갖고 있는 분포를 의미
- 얼마나 들어 있는지 모르는 200ml 우유팩 속에 들어 있는 우유의 양 등과 같은 것을 예로 들 수 있음

- 다음 두 개의 균일 분포 모두 그래프 아래 면적의 넓이는 확률의 총합인 1이다.

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

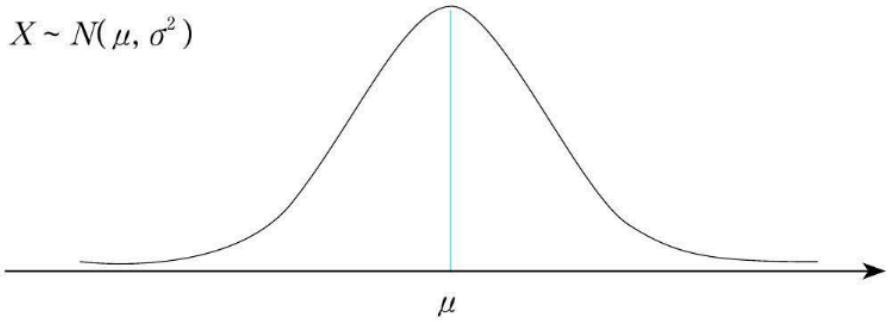


정규분포

- 가장 대표적인 연속형 확률분포 중 하나로 평균이 μ이고, 표준편차가 σ인 분포를 의미
- 한 학교의 1학년 수학 점수의 분포, 전국 남성의 키 등과 같은 것을 예로 들 수 있음
- 분포의 모양은 평균값에 가장 많이 집중되어 있고 평균에서 멀어질수록 빈도수가 낮은 종 모양의 그래프를 가짐

【 정규분포 】

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$



확률밀도함수

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

표준정규분포

- 정규분포는 평균μ와 표준편차 σ에 의하여 다양한 모양을 가질 수 있기 때문에 확률변수가 일정 범위 내에 포함될 확률을 매번 계산해야 하는 번거로움이 생김
- 문제를 해결하기 위해서 등장한 것이 표준정규분포
- 표준정규분포는 평균이 0, 표준편차가 1인 정규분포를 의미
- 아래의 공식을 사용하여 정규분포를 따르는 확률변수 X를 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z로 변환할 수 있음
- 이 작업을 **표준화**라고 함
  - 표준화는 머신러닝과 딥러닝에서 중요한 도구로 사용됨
- 표준화된 확률분포는 표준정규분포 표를 활용하여 쉽게 확률 값을 구할 수 있음
- 표준정규분포의 확률밀도함수(PDF)

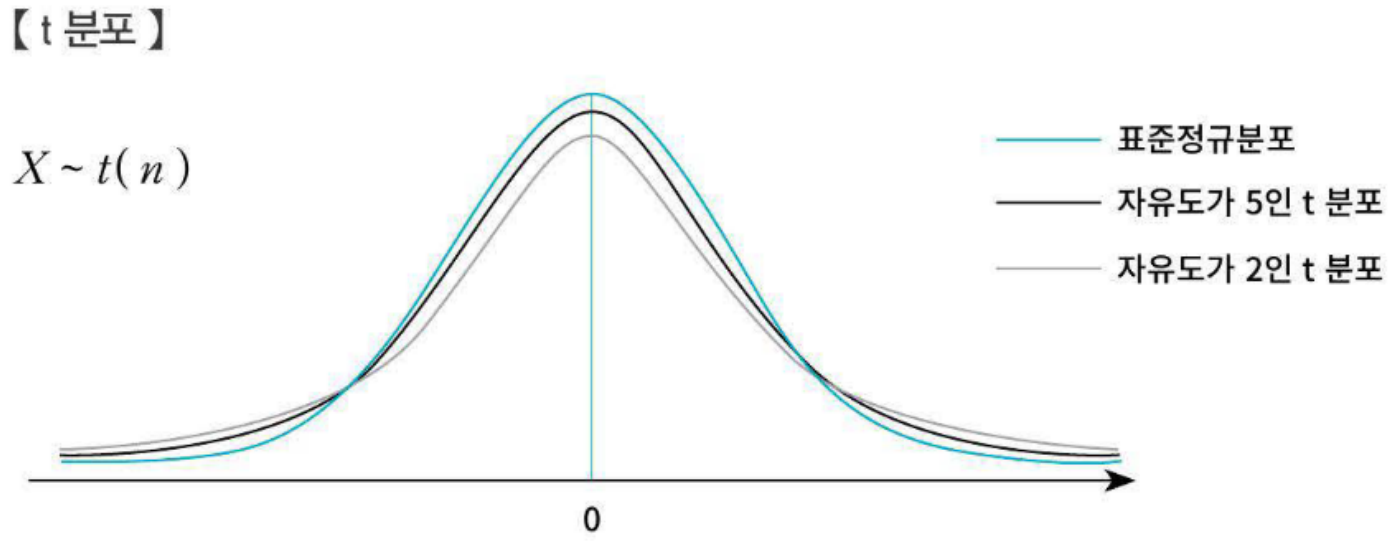
$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

- 표준화 공식

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

t-분포

- 자유도가 n인 t분포는 표준정규분포와 마찬가지로 평균이 0이고 좌우가 대칭인 종 모양의 그래프지만 정규분포보다 두꺼운 꼬리를 가짐
- 표준정규분포를 활용하여 모평균(모수)을 추정하기 위해서는 모표준편차를 사전에 알고 있어야 한다
- 그러나 현실적으로 모표준편차를 모르기 때문에 t 분포를 이용하여 모평균 검정 또는 두 집단의 평균이 동일한지 계산하기 위한 검정통계량으로 활용
- 자유도가 커질수록 t 분포는 표준정규분포에 가까워 진다.

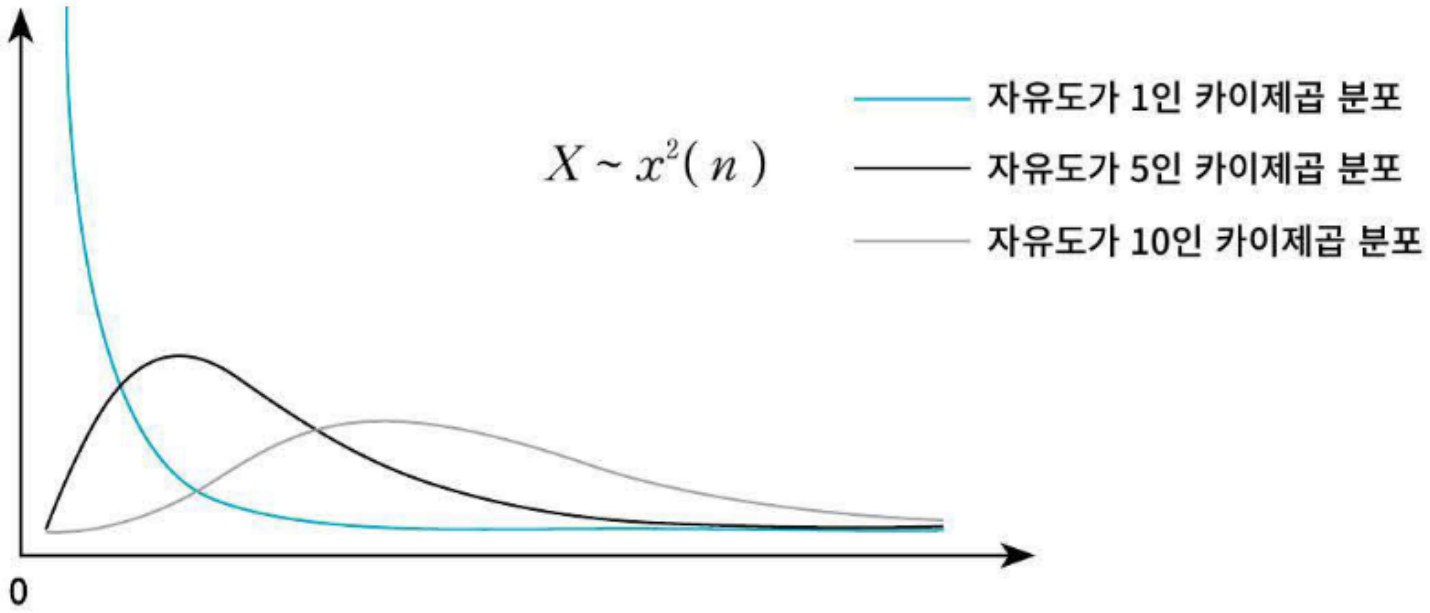


- 자유도는 표본자료들이 모집단에 대한 정보를 주는 독립적인 자료의 개수를 의미

카이제곱 분포

- 표준정규분포를 따르는 확률변수 $Z_1, Z_2, Z_3 \ldots, Z_n$의 제곱의 합 X는 자유도가 n인 카이제곱 분포를 따름
- 카이제곱 분포는 모평균과 모분산을 모르는 두 개 이상의 집단 간 동질성 검정 또는 모분산 검정을 위해 활용

【 카이제곱 분포 】



기댓값, 분산, 표준편차

기댓값

분산

표준편차

그외 개념

첨도와 왜도

공분산

상관계수

추정과 가설검정