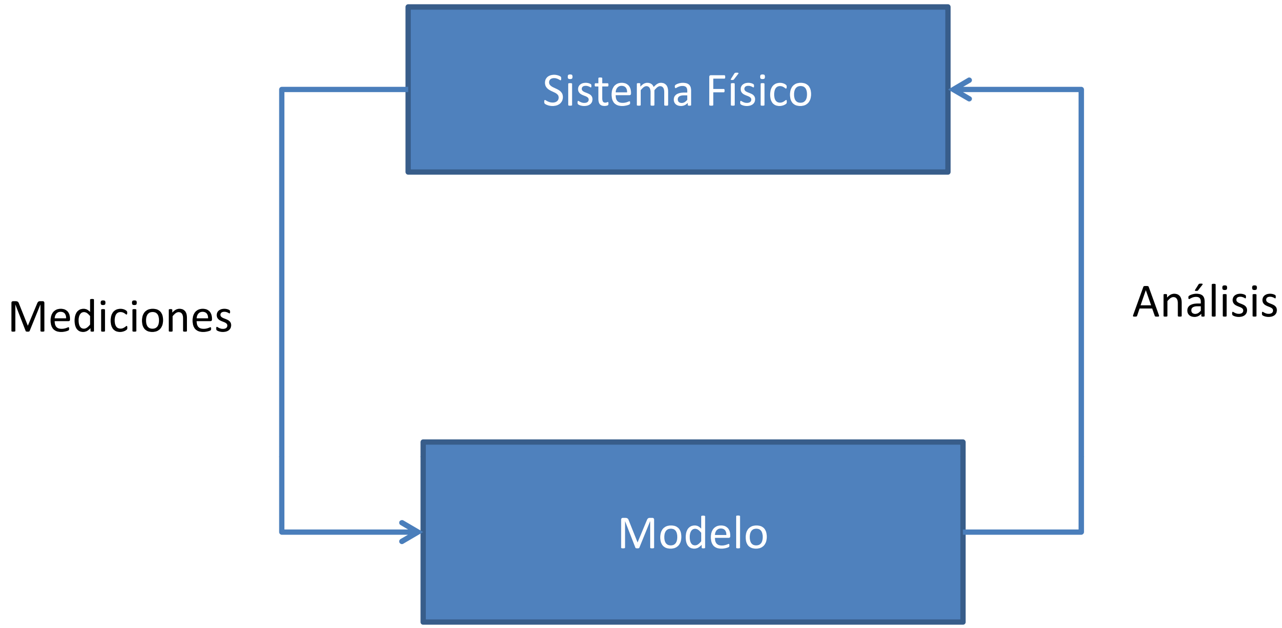
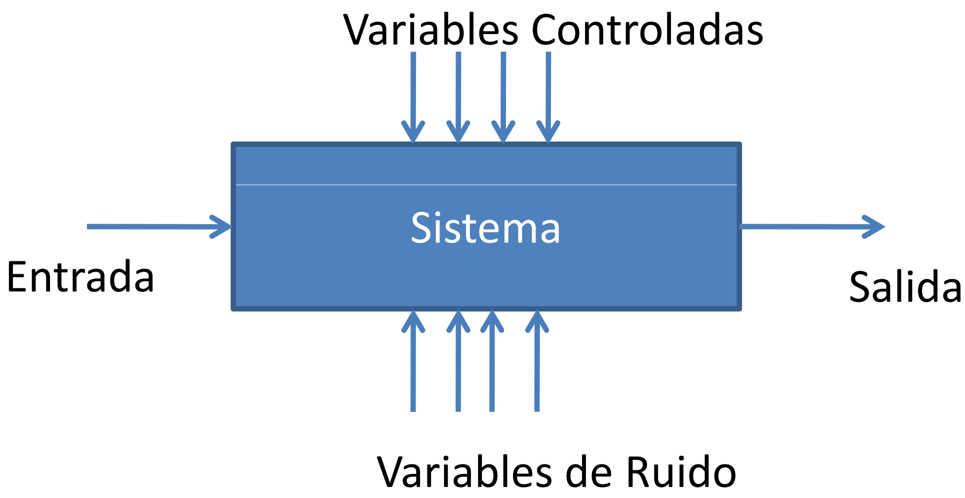
# Conceptos de Probabilidad (I)

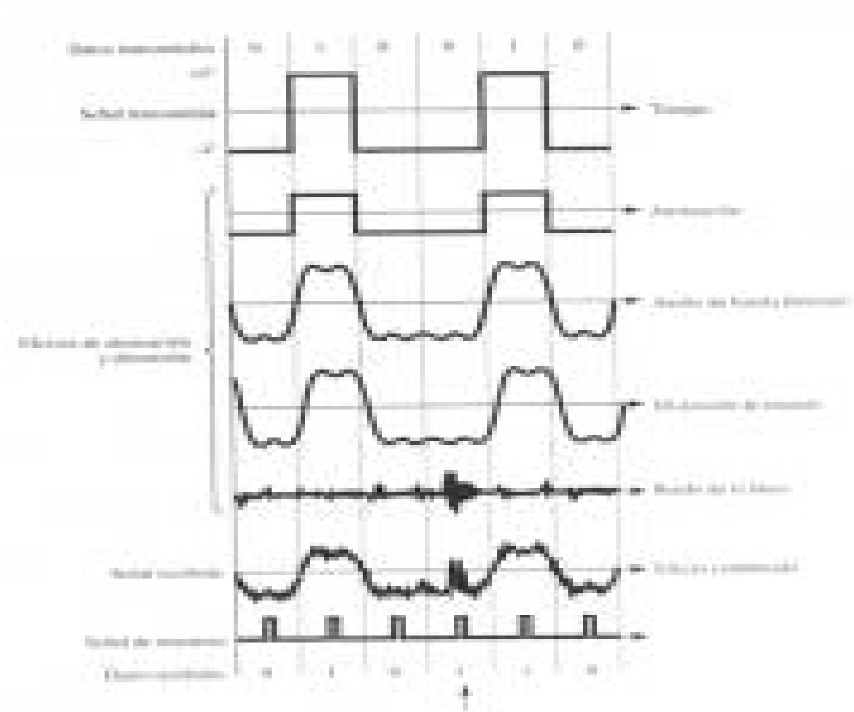
Jhon Jairo Padilla A., PhD.

# Importancia del modelado



# Experimento Aleatorio



**Objetivo:** Comprender, cuantificar y hacer un modelo del tipo de variaciones que se encuentran con frecuencia en el sistema

# Probabilidad como herramienta de diseño

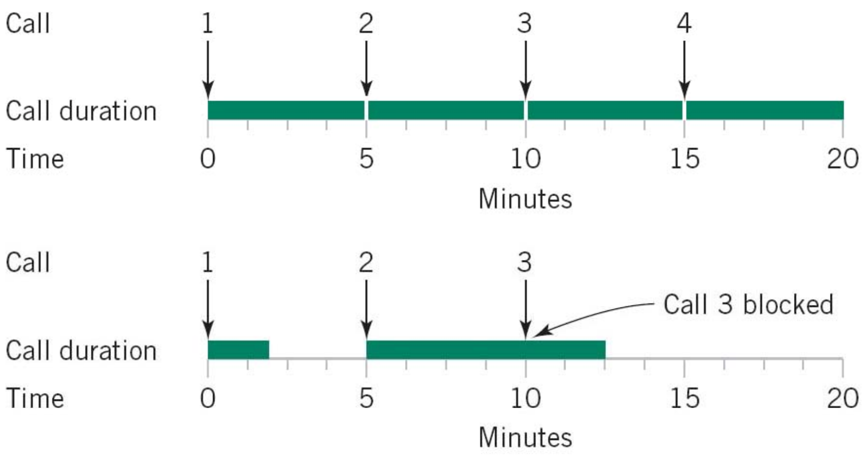
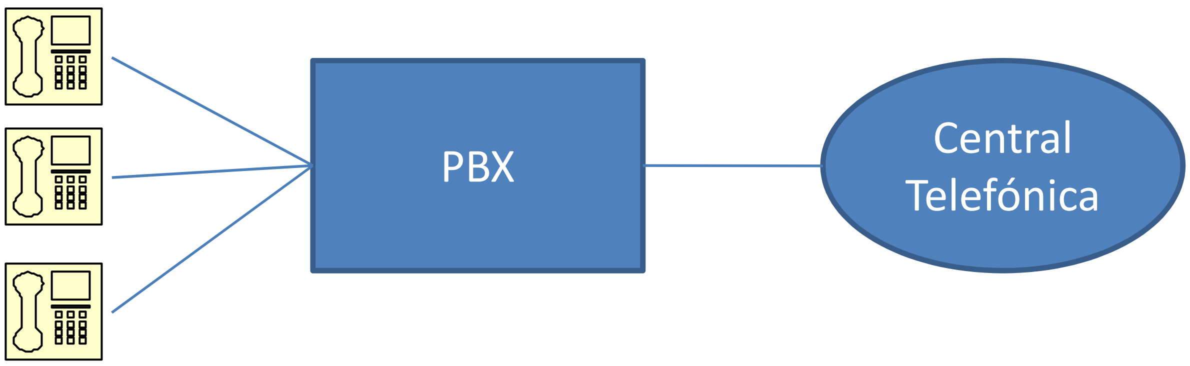



**Figure 2-4** Variation causes disruptions in the system.

-Cual es la probabilidad de que una llamada entrante no pueda ser atendida si se tiene 1 línea de entrada?

-Dado un número de líneas de entrada, cuántos usuarios se pueden atender en una hora?



# Espacio Muestral

- El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio se llama **espacio muestral** del experimento y se representa por el símbolo $S$.
- Representación como conjunto:
  - Si el espacio muestral tiene un número finito de elementos, se pueden listar los miembros separados por comas y encerrarlos entre llaves:
  - **Ejemplo:** El experimento de lanzar una moneda al aire tiene dos posibles resultados: Cara (C) ó Sello (S). Luego, el espacio muestral será:

    S={C,S}

# Ejemplo: Lanzamiento de un dado

- **Experimento:** Lanzamiento de un dado
- Si el interés está en observar la cara de arriba, entonces: $S_1=\{1,2,3,4,5,6\}$
- Si el interés es sólo observar si el número es par o impar, entonces: $S_2=\{par, impar\}$
- CONCLUSION: ***Se puede usar más de un espacio muestral para describir los resultados de un experimento***.
- Si ocurre un elemento de $S_1$ podemos deducir qué elemento se tiene en $S_2$. Lo contrario no puede hacerse.
- ***Por lo general se desea utilizar el espacio muestral que da más información sobre los resultados del experimento.***

# Ejemplo: Lanzamiento de moneda

- **Experimento:** Se lanza una moneda dos veces y se toma nota del resultado.
- **Espacio muestral:**

  S={CC, CS, SC, SS}

# Ejemplo

- **Experimento:** Se toman artículos resultados de una cadena de producción hasta que uno de los artículos sale defectuoso.
- **Espacio muestral:**

  P: Perfecto; D: Defectuoso

  S={D, PD, PPD, PPPD, PPPPD, …}

# Diagrama de Árbol

- En ciertas ocasiones, es complicado obtener el espacio muestral.
- El diagrama de árbol es una herramienta para obtener sistemáticamente el espacio muestral de un experimento cuyos resultados se obtienen en varios pasos.

## Ejemplo

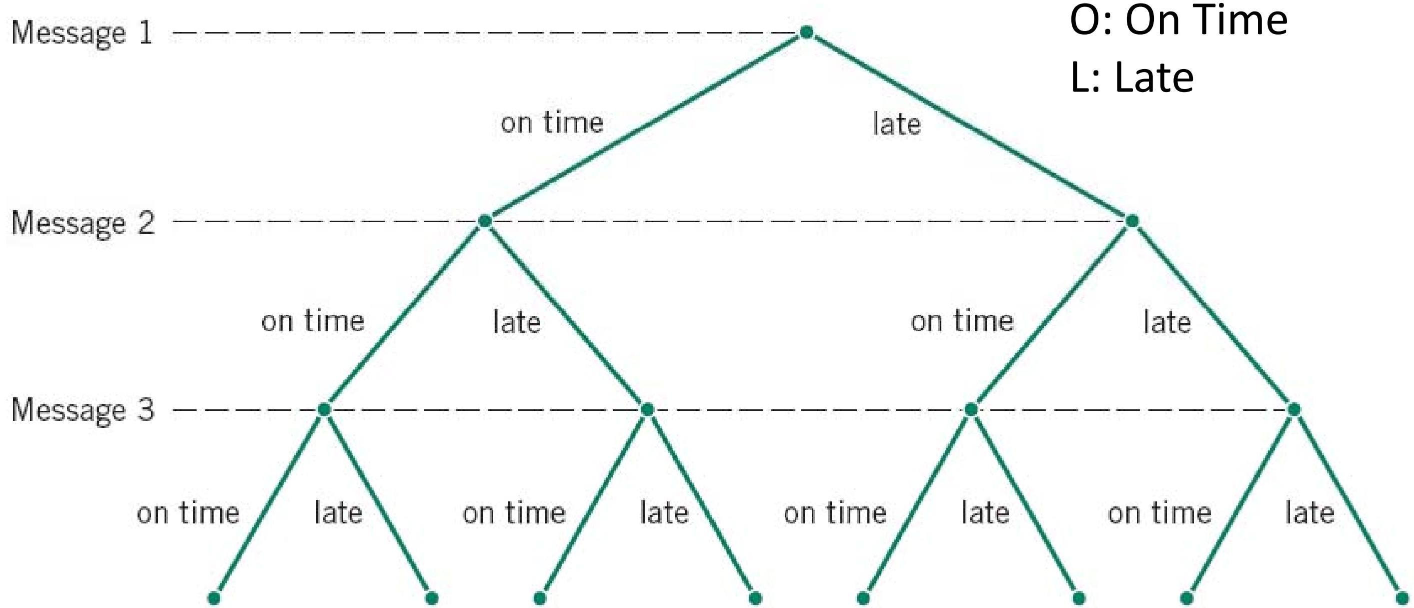
Se envían tres mensajes desde un orígen a un destino en un sistema de comunicaciones digitales. El resultado del experimento para cada mensaje se clasifica en: “a tiempo” ó “retrasado”. Obtener el diagrama de árbol para obtener el espacio muestral de los resultados posibles

O: On Time
L: Late

Primer resultado

Segundo resultado

Tercer resultado




Espacio muestral OOO OOL OLO OLL LOO LOL LLO LLL

# Ejemplo

Un fabricante de automóviles ofrece vehículos equipados con accesorios opcionales.  El pedido de cada vehículo se hace:

-Con o sin transmisión automática

-Con o sin aire acondicionado

-Con una de tres opciones de sistema estéreo

-Con uno de cuatro colores exteriores (Azul, Rojo, Blanco, Negro)

Cuál es el espacio muestral?

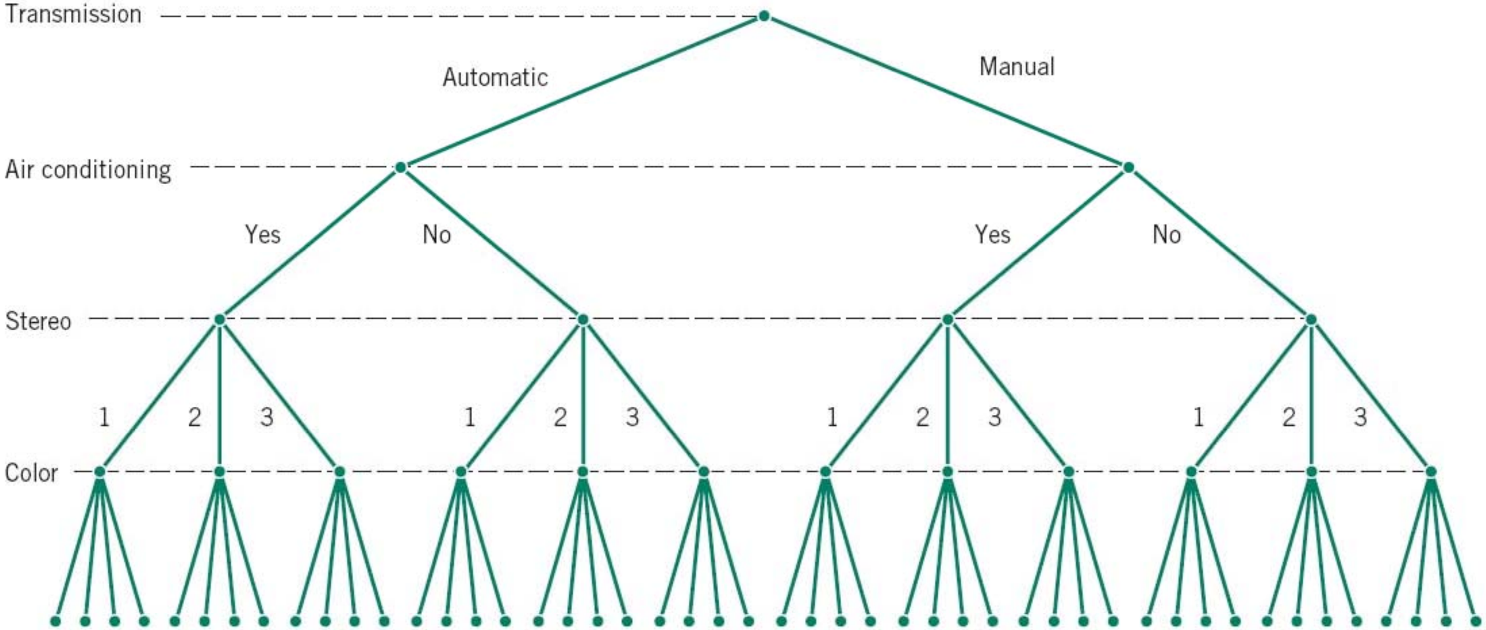
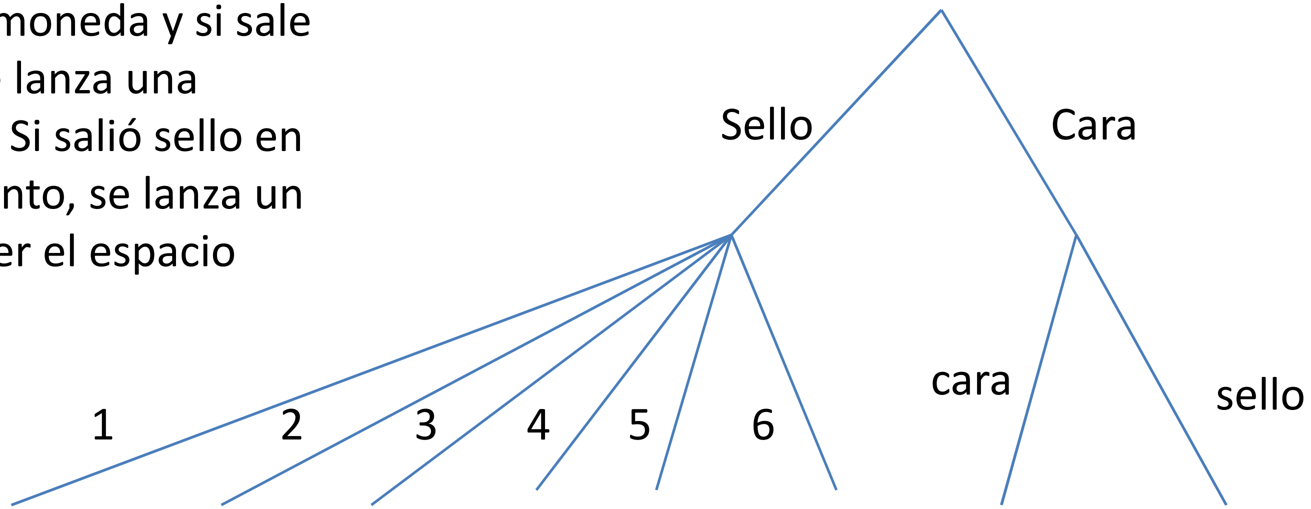



Figure 2-6  Tree diagram for different types of vehicles with 48 outcomes in the sample space.

## Ejemplo

Se lanza una moneda y si sale cara, luego se lanza una segunda vez.  Si salió sello en el primer intento, se lanza un dado.  Obtener el espacio muestral




Espacio muestral: S1 S2 S3 S4 S5 S6 CC CS

# Descripción de $S$ mediante enunciados

- Algunas veces el número de elementos de un espacio muestral es muy grande o infinito.
- Es necesario utilizar otra forma de expresar dicho espacio muestral. Una forma es usar un **enunciado** o **regla**.

# Ejemplos de Enunciados

- Ejemplo 1:
  - **Resultados posibles:** El conjunto de ciudades del mundo con una población de más de un millón de habitantes.
  - **Enunciado:**

    *S={x | x es una ciudad con una población de más de un millón de habitantes}*

    "S es el conjunto de todas las x tales que x es una ciudad con una población de más de un millón de habitantes"
- Ejemplo 2:
  - **Resultados:** Todos los puntos (x,y) sobre la frontera o el interior de un círculo de radio 2 con centro en el orígen.
  - **Enunciado:**

    $S=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 4\}$

# Evento

- Definición:
  - Un evento es un subconjunto del espacio muestral de un experimento aleatorio
- Necesidad:
  - En muchas ocasiones estamos interesados en un grupo de resultados con una característica común, más que en un resultado en particular.
- Ejemplo:
  - Supongamos que nos interesa el evento **A** en el cual, al lanzarse un dado, el resultado es divisible por 3.
  - Por tanto: A={3,6}
  - Mientras que S={1,2,3,4,5,6}, es decir, todos los posibles resultados de lanzar el dado.

# Evento

- Para cada evento se asigna una colección de resultados que constituye un subconjunto del espacio muestral. Ese subconjunto representa la totalidad de los elementos para los que el evento es cierto.
- Ejemplo:
  - Supongamos $S=\{t \mid t \geq 0\}$, donde t es la vida de un componente electrónico dada en años.
  - Entonces, el evento A de que el componente falle antes de que finalice el quinto año es
    $A=\{t \mid 0 \leq t \leq 5\}$

# CARACTERÍSTICAS DE LOS EVENTOS

# Eventos extremos

- Un evento A puede ser un subconjunto que incluya todos los elementos de S:

$$A = S$$

- Un evento A puede ser un subconjunto vacío de S:

$$A = \varnothing$$

# Complemento de un evento

- Definición:
  - El complemento de un evento A respecto de S es el subconjunto de todos los elementos de S que no están en A. Denotamos el complemento de A como A’
  - Ejemplo:
    - Supongamos S el conjunto de empleados de una compañía.
    - Sea el subconjunto de fumadores un evento A.
    - El subconjunto de los empleados no fumadores será entonces A’

# Intersección de dos eventos

- Definición:
  - La intersección de dos eventos A y B, que se denota con el símbolo $A \cap B$ , es el evento que contiene todos los elementos que son comunes a A y B.
- Ejemplo:
  - Sea S el conjunto de personas que se encuentran en un café internet.
  - Sea C el evento de que una persona seleccionada al azar en un café internet sea un estudiante universitario.
  - Sea M el evento de que la persona sea hombre.
  - Entonces $C \cap M$ será el evento de todos los estudiantes universitarios hombres en el café internet.

# Eventos mutuamente excluyentes

- Definición:
  - Dos eventos A y B son mutuamente excluyentes o disjuntos si $A \cap B = \varnothing$, es decir, si A y B no tienen elementos en común.
- Necesidad:
  - En muchos experimentos es posible definir dos eventos A y B que no pueden ocurrir de forma simultánea. Entonces se dice que los eventos son mutuamente excluyentes.
- Ejemplo:
  - Suponga el conjunto de programas de dos canales de TV diferentes que son competencia.
  - Sea A el conjunto de programas del canal Caracol
  - Sea B el conjunto de programas del canal RCN
  - La intersección de estos dos conjuntos es vacía (no hay programas transmitidos por ambos canales), por tanto, A y B son mutuamente excluyentes

# Unión de Eventos

- Definición:
  - La unión de dos eventos A y B, que se denota por el símbolo $A \cup B$, es el evento que contiene todos los elementos que pertenecen a A ó a B ó a ambos.
- Ejemplo:
  - Sea P el evento de que un empleado seleccionado al azar de una compañía petrolera fume cigarrillos. Sea Q el evento de que el empleado seleccionado ingiera bebidas alcohólicas. Entonces el evento $P \cup Q$ es el conjunto de todos los empleados que beben o fuman.

## Diagramas de Venn

Son una herramienta para representar de forma gráfica la relación entre eventos y el correspondiente espacio muestral.

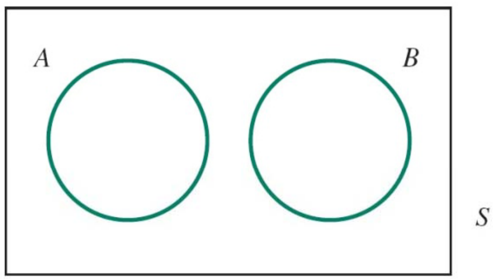



Figure 2-9 Mutually exclusive events.

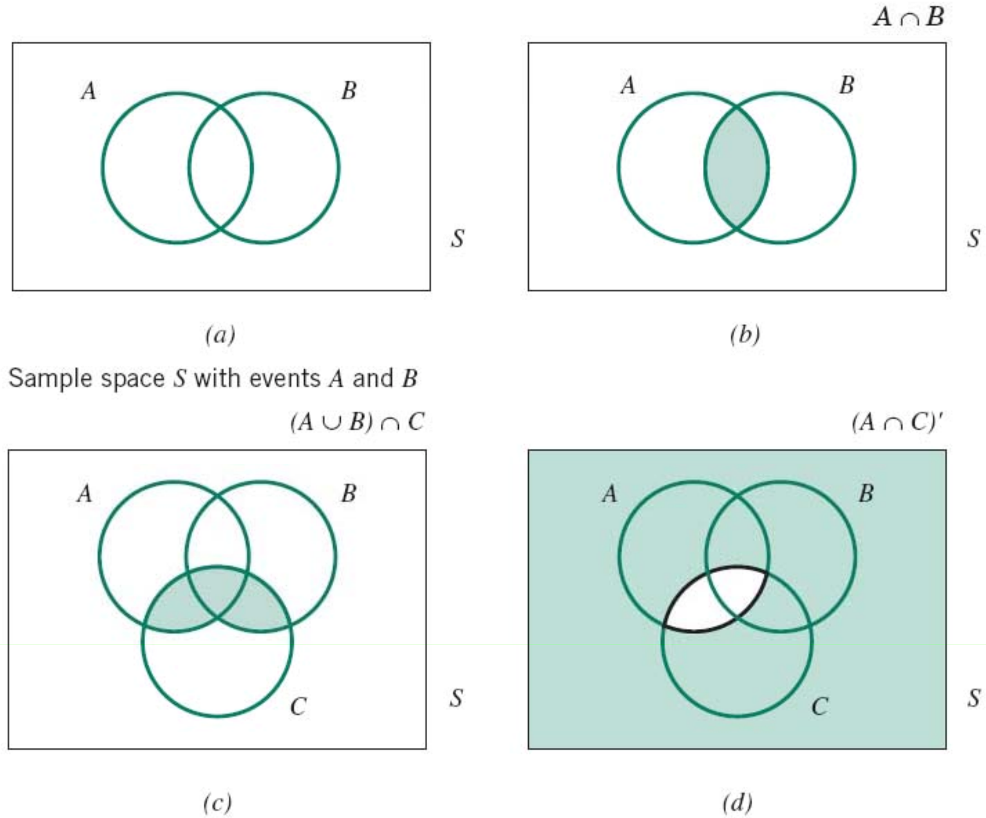



Figure 2-8 Venn diagrams.

# Conteo de Puntos muestrales

Permutaciones, Combinaciones

# Conteo de puntos muestrales

- En estadística suele ser importante calcular la probabilidad de ocurrencia de un evento
- Cuando se desea calcular una probabilidad de ocurrencia de un evento, suele ser necesario determinar el número de elementos del espacio muestral
- Pero si hay una gran cantidad de elementos, cómo contarlos?

# Principio fundamental del conteo

- Regla de Multiplicación:
  - Si una operación se puede llevar a cabo en $n_1$ formas, y si para cada una de éstas se puede realizar una segunda operación en $n_2$ formas, entonces las dos operaciones se pueden ejecutar juntas en $(n_1 * n_2)$ formas.

## Ejemplo

Se envían tres mensajes desde un orígen a un destino en un sistema de comunicaciones digitales. El resultado del experimento para cada mensaje se clasifica en: “a tiempo” ó “retrasado”. **Cuántos elementos tendrá el espacio muestral para los tres mensajes enviados? *Rta/ $n_1 \times n_2 \times n_3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$***

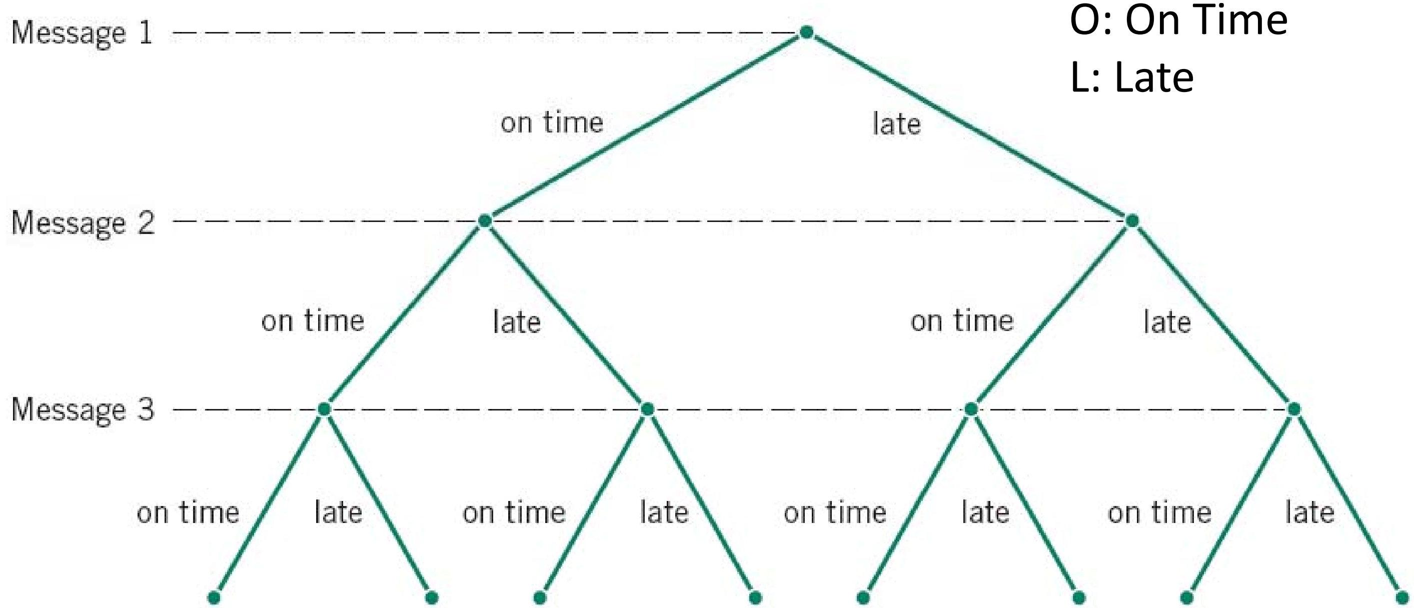
O: On Time

L: Late

Primer resultado

Segundo resultado

Tercer resultado




Espacio muestral OOO OOL OLO OLL LOO LOL LLO LLL

# Ejemplo

Un fabricante de automóviles ofrece vehículos equipados con accesorios opcionales. El pedido de cada vehículo se hace:

-Con o sin transmisión automática

-Con o sin aire acondicionado

-Con una de tres opciones de sistema estéreo

-Con uno de cuatro colores exteriores (Azul, Rojo, Blanco, Negro)

**Cuántos elementos tiene el espacio muestral?** ***Rta/ $n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4 = 2 \times 2 \times 3 \times 4 = 48$***

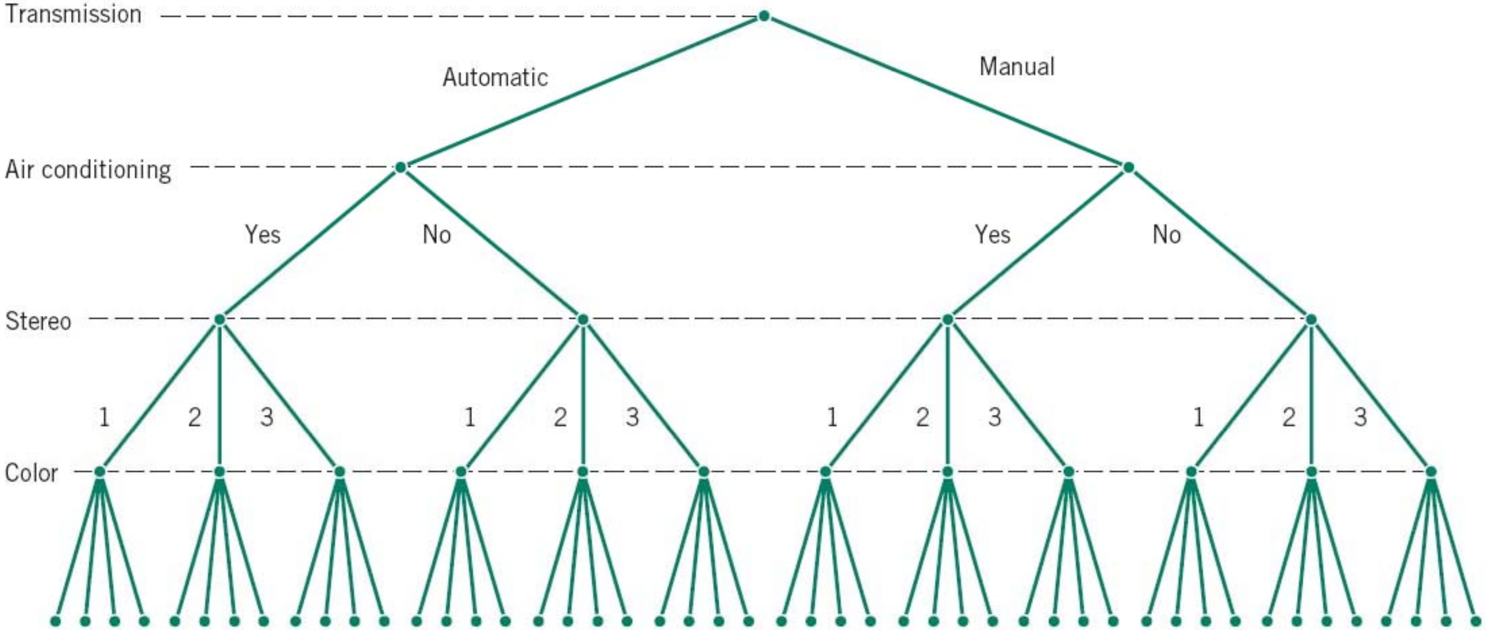



Figure 2-6 Tree diagram for different types of vehicles with 48 outcomes in the sample space.

# Ejemplo

- Se tienen un computador con una memoria cuyas celdas se identifican con 16 dígitos binarios (cada dígito puede tomar los valores 0 ó 1). Cuántas celdas diferentes pueden identificarse con estos 16 dígitos?
- Rta/ 2x2x2x2…x2= $2^{16}$= 65,536 celdas

# Regla de multiplicación generalizada

- Si una operación se puede ejecutar de $n_1$ formas, y si para cada una de éstas se puede llevar a cabo una segunda operación de $n_2$ formas, y para cada una de las formas obtenidas se puede realizar una tercera operación de $n_3$ formas, y así sucesivamente, entonces la serie de k operaciones se puede realizar en $n_1 \, x \, n_2 \ldots n_{k-1} \, x \, n_k$ formas

# Permutaciones

- Suele ser común tener espacios muestrales donde se tienen como elementos todas las posibles ordenaciones o arreglos de un grupo de objetos.

- Ejemplo:
  - Se tienen tres fichas, cada una con una letra distinta: a, b, c.
  - Las permutaciones posibles son: abc, acb, bac, bca, cab, cba
  - Hay 6 arreglos distintos de estos objetos.

- Nótese que en la **permutación** los objetos utilizados en una posición del arreglo no pueden re-utilizarse en otra posición del arreglo (no existen las combinaciones aba, bbc, etc)

# Permutaciones

- Es posible el cálculo sin listar los ordenamientos
- Ejemplo (continuación):
  - Primer elemento del arreglo: 3 posibilidades (a,b,c)
  - Segundo elemento del arreglo: 2 posibilidades (las 2 letras restantes)
  - Tercer elemento del arreglo: 1posibilidad (la letra que queda)
  - Número total ordenamientos: $3 \times 2 \times 1 = 6 = 3!$
- Teorema:
  - El número de permutaciones de n objetos es $n!$

# Permutaciones

- Ejemplo:
  - Suponga que se tienen cuatro fichas, cada una con una letra diferente: a, b, c, d
  - Considere ahora el número de permutaciones que son posibles al tomar de las cuatro letras, dos a la vez.
  - Las permutaciones serían: ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, dc, db
  - Cálculo:
    - Primera ficha: 4 posibilidades
    - Segunda ficha: 3 posibilidades
    - Total permutaciones: 4 x 3 = 12

# Permutaciones

- Teorema:
  - El número de permutaciones de n objetos distintos tomados de r a la vez es

$$ {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} $$

# Ejemplo

- En un año se otorgan tres premios (a la investigación, a la enseñanza y a el servicio) en un grupo de 25 estudiantes de posgrado del departamento de estadística.  Si cada estudiante puede recibir un premio como máximo, ¿Cuántas selecciones posibles habría?
- Rta/ $${}_{25}P_3 = \frac{25!}{(25-3)!} = \frac{25!}{22!} = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13{,}800$$

# Permutaciones circulares

- Supóngase 4 personas jugando cartas.
- No tenemos una permutación nueva si se mueven todas una posición en sentido de las manecillas del reloj
- Una nueva permutación se obtiene por ejemplo al dejar una persona en una posición fija y rotar las otras
- En este caso se podrían organizar las 3 personas que rotan de 3! Formas.  Entonces hay 6 arreglos posibles del juego de cartas.

# Permutaciones circulares

- Dos permutaciones circulares no se consideran diferentes a menos que los objetos correspondientes en los dos arreglos estén precedidos o seguidos por un objeto diferente, conforme avancemos en la dirección de las manecillas del reloj.
- Teorema:
  - El número de permutaciones de n objetos arreglados en un círculo es (n-1)!

# Arreglos con objetos iguales

- Hasta ahora, todos los objetos eran diferentes.
- Ahora consideramos la posibilidad de que haya objetos iguales dentro del arreglo.
- Ejemplo:
  - Tenemos las letras a,b,c
  - Si hacemos b=c=x entonces tendremos que las permutaciones originales son:

    axx, axx, xax, xax, xxa, xxa
  - Por tanto, sólo tendremos 3 permutaciones distintas

# Arreglos con objetos iguales

- Ejemplo:
  - Se tienen las letras a,b,c,d
  - Hacemos b=c=x , c=d=y
  - Se tienen las permutaciones distintas:

    xxyy, xyxy, yxxy, yyxx, xyyx, yxyx
  - En total son 6 permutaciones distintas
- Teorema:
  - El número de permutaciones distintas de n objetos de los que $n_1$ son de una clase, $n_2$ son de una segunda clase, …, $n_k$ de una k-ésima clase es

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

# Ejemplo

- Durante un entrenamiento del equipo de fútbol de la universidad, el entrenador necesita tener a 10 jugadores diferentes del arquero parados en el campo de fútbol. Entre estos 10 jugadores hay 1 de primer año, 2 de segundo año, 4 de tercer año y 3 de cuarto año. De cuantas formas se pueden arreglar en una fila si sólo se distingue su nivel de clase?

$$\frac{10!}{1!2!4!3!} = 12,600$$

# Partición

- Interesa dividir un conjunto de n objetos en r subconjuntos denominados **celdas**
- Se consigue una **partición** si la intersección de todo par posible de los r subconjuntos es el conjunto vacío, y si la unión de todos los subconjuntos da el conjunto original
- Además, el orden de los elementos dentro de una celda no tiene importancia

# Partición

- Ejemplo:
  - Considere el conjunto {a,e,i,o,u}
  - Las particiones posibles en dos celdas en las que la primera celda contenga 4 elementos y la segunda 1 elemento son:

    {(a,e,i,o), (u)}, {(a,i,o,u),(e)}, {(e,i,o,u), (a)}, {(a,e,o,u),(i)}, {(a,e,i,u), (o)}
  - Hay 5 formas de partir un conjunto de 5 elementos en dos subconjuntos o celdas que contengan 4 elementos en la primera celda y 1 en la segunda.
  - El número de particiones para este caso se denota como:

$$\binom{5}{4,1} = \frac{5!}{4!1!} = 5$$

  - El número superior representa el total de elementos y los números inferiores representan el total que va en cada celda

# Partición

- Teorema
  - El número de formas de partir un conjunto de *n* objetos en *r* celdas con $n_1$ elementos en la primera celda, $n_2$ elementos en la segunda, y así sucesivamente, es

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}$$

  - Donde $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$

# Ejemplo

- En cuántas formas se pueden asignar siete estudiantes de posgrado a una habitación de hotel triple y a dos dobles, durante su asistencia a una conferencia?
- Rta/

$$\binom{7}{3,2,2} = \frac{7!}{3!2!2!} = 210$$

# Combinaciones

- En muchos problemas estamos interesados en el número de formas de seleccionar *r* objetos de *n* posibles sin importar el orden. Tales selecciones se llaman **combinaciones**.
- Otra forma de ver una combinación:
  - Es una partición con dos celdas, donde una celda contiene los *r* objetos seleccionados y la otra celda contiene los *(n-r)* objetos restantes.

# Combinaciones

- El cálculo del número de combinaciones se hace como:

$$\binom{n}{r, n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- Pero se puede escribir como:

$$\binom{n}{r}$$

- Teorema:
  - El número de combinaciones de *n* objetos distintos tomados de *r* a la vez es:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

# Ejemplo

- Un niño le pide a su mamá que le lleve 5 cartuchos de Game-Boy de su colección de 10 juegos de arcada y 5 de deportes. ¿Cuántas maneras hay en que su mamá le llevara 3 juegos de arcada y 2 de deportes, respectivamente?
- Rta/ Pasos:
  1. Cálculo posibles formas de tomar 3 juegos de 10 posibles juegos de arcada: $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$
  1. Cálculo posibles formas de tomar 2 juegos de 5 posibles juegos de deportes: $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$
  2. Cálculo del total de posibilidades con base en la regla de multiplicación: *120x10=1200*

# Mapa Conceptual Conteos