

Sistemas de Pérdidas y la Fórmula de Erlang-B

Jhon Jairo Padilla A., PhD.

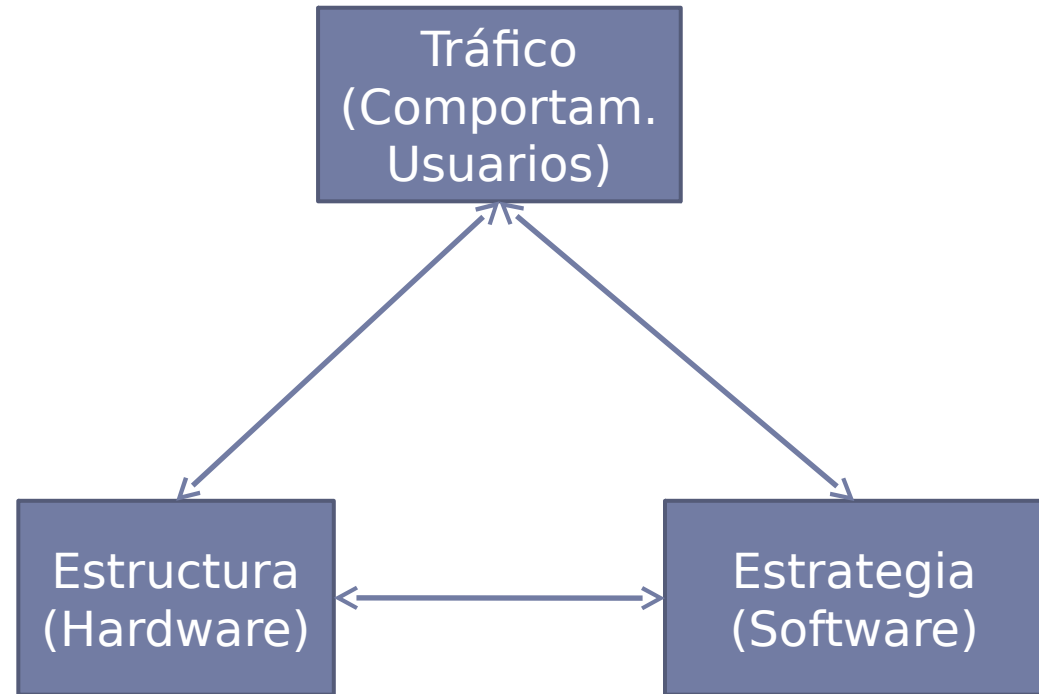
Introducción

- ▶ Ahora se considerará la teoría de teletráfico clásica desarrollada por Erlang (Dinamarca), Engset (Noruega) y Fry & Molina (USA).
- ▶ Esta teoría ha sido aplicada satisfactoriamente durante más de 80 años a sistemas de pérdidas.
- ▶ La base de toda esta teoría es la fórmula Erlang-B.



La Fórmula Erlang-B

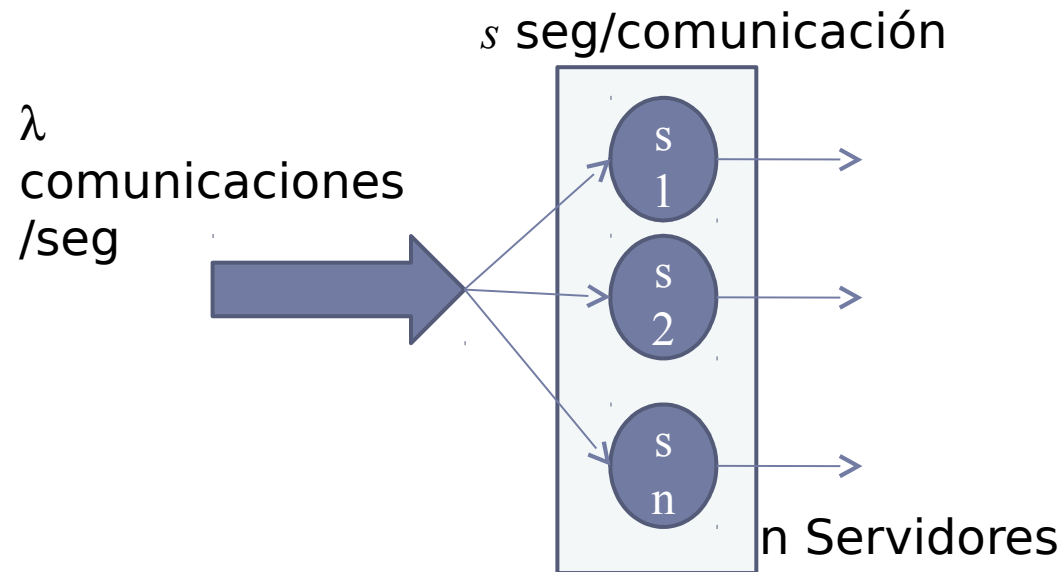
- ▶ La fórmula Erlang-B está basada en el siguiente modelo:



La Fórmula de Erlang B

- ▶ **Estructura:** Se considera un sistema de n canales idénticos (servidores, troncales, ranuras) trabajando en paralelo. A esto se le llama un grupo Homogéneo.
- ▶ **Estrategia:** Cuando llega una llamada al sistema, esta es aceptada para darle servicio si al menos hay un canal ocioso. Si todos los canales están ocupados, el sistema estará congestionado y el intento de llamada será bloqueado. El intento de llamada bloqueada desaparece sin dejar efecto.

A esta situación se le llama *Modelo de Pérdidas* de Erlang o Modelo BCC (Blocked Calls Cleared)



Búsqueda de canales

- ▶ La búsqueda de un canal ocioso dentro del conjunto de canales puede hacerse de varias formas:
 - ▶ **Búsqueda aleatoria:** Se escoge aleatoriamente entre los canales ociosos. En media, cada canal tendrá el mismo tráfico.
 - ▶ **Búsqueda ordenada:** Los canales son numerados $1, 2, \dots, n$ y se busca un canal ocioso en este orden, iniciando por el canal uno (búsqueda ordenada con punto inicial). También se conoce como búsqueda secuencial. Por tanto, los primeros canales tendrán en media más tráfico que los últimos canales.
 - ▶ **Búsqueda cíclica:** Es similar a la búsqueda ordenada pero sin punto inicial. Se continúa la siguiente búsqueda partiendo del punto donde quedó la anterior. En media, cada canal tendrá el mismo tráfico.
- ▶ Se asume que las búsquedas toman un instante de tiempo y si no hay canales se bloquea la llamada, por lo que no afectan la probabilidad de bloqueo.



La fórmula de Erlang B

► Tráfico:

- Se asume que los tiempos de servicio son exponencialmente distribuidos, con tasa de servicio μ (tiempo de servicio $1/\mu$).
- El proceso de llegadas es un Proceso de Poisson con tasa de llegadas λ .
- A este tipo de tráfico se lo conoce como PCT-I (Pure Chance Traffic type One)



Definición del tráfico ofrecido

- ▶ Es el tráfico transportado cuando el número de canales es infinito (se puede transportar todo el tráfico de los usuarios).
- ▶ El tráfico ofrecido será entonces el número medio de llamadas por el tiempo de servicio medio: $A = \lambda \cdot \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu}$.
- ▶ Si el número de canales es infinito, la distribución de salidas será de Poisson.
- ▶ Si el número de canales es finito, la distribución de salidas será una *Distribución de Poisson Truncada*.
- ▶ Este modelo es insensible a la distribución del tiempo de servicio. Sólo afecta el valor medio del tiempo de servicio.



Medidas del rendimiento

- ▶ Para sistemas de pérdidas, las medidas de rendimiento más importantes son:
 - ▶ E: Congestión de Tiempo
 - ▶ B: Congestión de llamadas
 - ▶ C: Congestión de tráfico (carga)
- ▶ Estos parámetros son iguales para el modelo de pérdidas de Erlang debido a la propiedad PASTA del proceso de llegadas de Poisson.



Proceso de llegadas

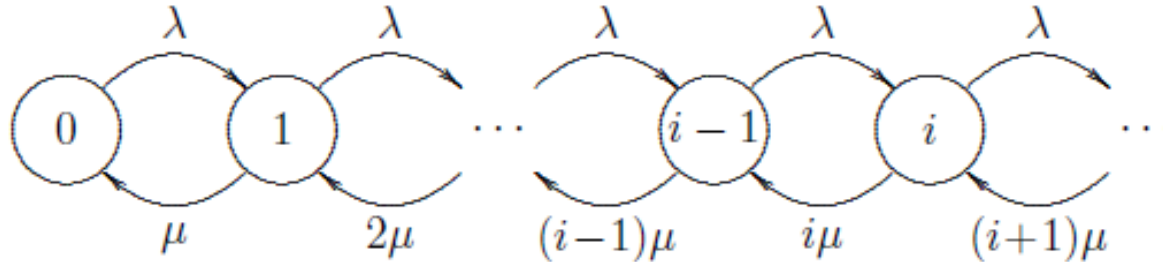
- ▶ Se asume un proceso de llegadas de Poisson y que los tiempos de servicio están distribuidos exponencialmente.
- ▶ Se asume que el número de canales es infinito (por tanto, nunca habrá congestión).



Proceso de Poisson

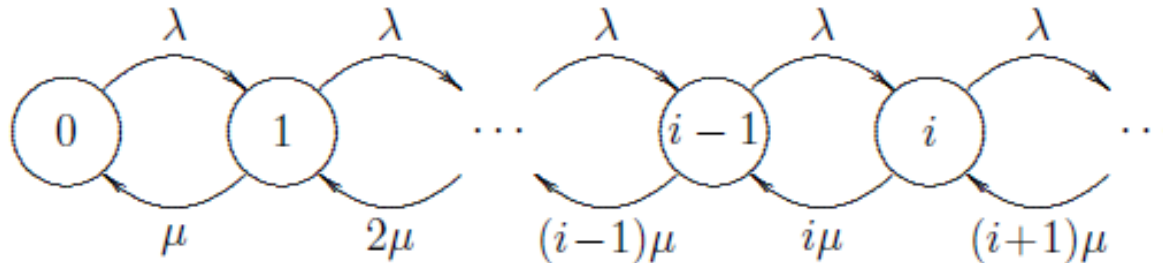
Proceso de Poisson

- ▶ Diagrama de transición de estados:



- ▶ Se define el estado del sistema como el número de canales ocupados (i).
- ▶ *Estado*: Se representa como un círculo en el diagrama de transición de estados.
- ▶ *Transición*: Se representa como una flecha etiquetada con el valor de la tasa media de llegadas/salidas:
 - ▶ Una llegada hace que el sistema pase de un estado al siguiente.
 - ▶ Una salida hace que el sistema pase al estado anterior.

Proceso de Poisson



- ▶ Es un *proceso simple*: Las transiciones sólo ocurren entre estados vecinos.
- ▶ Se asume que el sistema está en *equilibrio estadístico*: El sistema estará en el estado $[i]$ una proporción de tiempo $p(i)$.
- ▶ $p(i)$ es la probabilidad de observar el sistema en el estado $[i]$ en un instante de tiempo aleatorio, es decir, es un tiempo medio.
- ▶ Cuando el sistema está en el estado $[i]$, saltará λ veces por unidad de tiempo al estado $[i+1]$ y $i\mu$ veces por unidad de tiempo al estado $[i-1]$.
- ▶ El estado siguiente del sistema sólo depende del estado actual y no de otros estados anteriores: Propiedad de Markov (falta de memoria).

Obtención de Ecuaciones

- ▶ Las notas que describen los estados del sistema bajo el supuesto de equilibrio estadístico pueden describirse de dos maneras:
 - ▶ Ecuaciones de Nodo
 - ▶ Ecuaciones de Corte



Ecuaciones de equilibrio estadístico

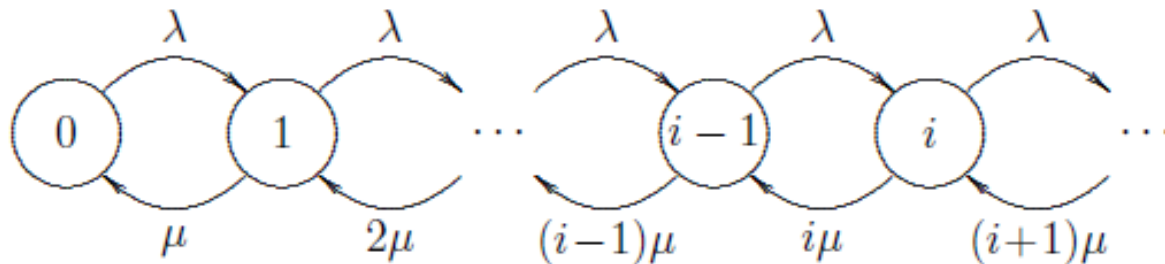
► Ecuaciones de Nodo:

- En equilibrio, el número de transiciones de llegada por unidad de tiempo hacia el estado $[i]$ es igual al número de transiciones de salida desde el estado $[i]$.
- $p(i)$ denota la proporción de tiempo que el proceso pasa en el estado $[i]$.
- El número medio de saltos desde el estado $[0]$ al estado $[1]$ es $\lambda * p(0)$.
- El número medio de saltos desde el estado $[1]$ al $[0]$ es $\mu * p(1)$.
- Por tanto, para el estado cero:

$$\lambda \cdot p(0) = \mu \cdot p(1), \quad i = 0.$$



Ecuación de equilibrio para nodos



- En general, para el estado i tendremos la ecuación de equilibrio:

$$\lambda \cdot p(i-1) + (i+1)\mu \cdot p(i+1) = (\lambda + i\mu) \cdot p(i), \quad i > 0.$$

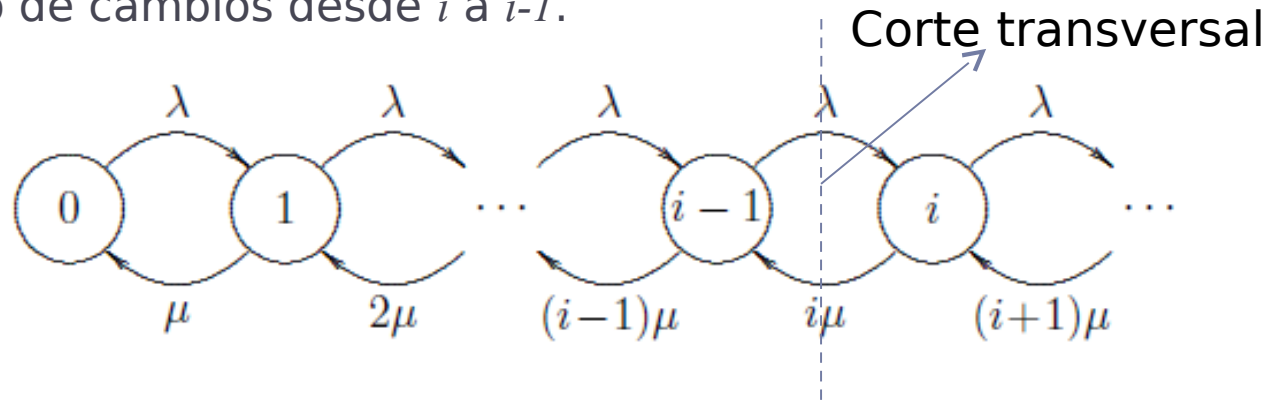
\longleftrightarrow Transiciones de entrada \longleftrightarrow Transiciones de salida

Las ecuaciones de nodo son aplicables siempre, incluso para diagramas de transición de estados en varias dimensiones.

Ecuaciones de equilibrio para cortes

► Ecuaciones de Corte:

- Algunos diagramas de transición de estados son bastante simples, lo que simplifica las expresiones que lo describen.
- Si se hiciera un corte transversal entre los estados $i-1$ e i ; por ejemplo, entre el estado 0 y el 1, ó entre el 1 y el 2, etc, se obtendría una expresión para el estado de equilibrio.
- En estado de equilibrio, el número de cambios desde $i-1$ a i es igual al número de cambios desde i a $i-1$.



- La expresión de corte para el estado de equilibrio será:

$$\lambda \cdot p(i-1) = i\mu \cdot p(i), \quad i = 1, 2, \dots$$

Comparación nodos vs. cortes

- ▶ Las ecuaciones de nodo son aplicables a cualquier diagrama de transición de estados.
- ▶ Las ecuaciones de corte, son aplicables sólo a diagramas de transición de estados unidimensionales
- ▶ Las ecuaciones de nodos involucran tres estados, mientras que las ecuaciones de corte involucran sólo dos estados. Las ecuaciones de corte son más simples de aplicar.



Restricción de normalización

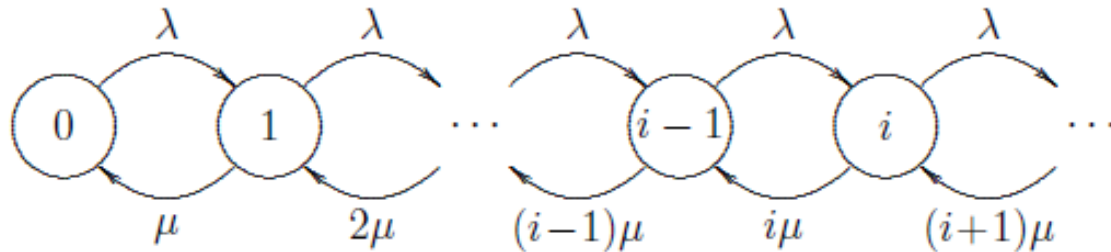
- ▶ Como el sistema siempre estará en alguno de los estados, se tiene que:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = 1, \quad p(i) \geq 0.$$

- ▶ Expresión que puede usarse para completar el conjunto de ecuaciones de equilibrio.



Obtención de las probabilidades de estado



- Aplicando las ecuaciones de corte, se obtienen las siguientes ecuaciones de balance:

$$\lambda \cdot p(0) = \mu \cdot p(1),$$

$$\lambda \cdot p(1) = 2\mu \cdot p(2),$$

$$\dots \quad \dots$$

$$\lambda \cdot p(i-2) = (i-1)\mu \cdot p(i-1),$$

$$\lambda \cdot p(i-1) = i\mu \cdot p(i),$$

$$\lambda \cdot p(i) = (i+1)\mu \cdot p(i+1),$$



Obtención de las probabilidades de estado

- De las ecuaciones de balance, podemos expresar la probabilidad de cada estado en función de $p(0)$. Además se reemplaza $A = \lambda/\mu$:

$$p(0) = p(0),$$

$$p(1) = A \cdot p(0),$$

$$p(2) = \frac{A}{2} \cdot p(1) = \frac{A^2}{2} \cdot p(0),$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$p(i-1) = \frac{A}{i-1} \cdot p(i-2) = \frac{A^{i-1}}{(i-1)!} \cdot p(0),$$

$$p(i) = \frac{A}{i} \cdot p(i-1) = \frac{A^i}{i!} \cdot p(0),$$

$$p(i+1) = \frac{A}{i+1} \cdot p(i) = \frac{A^{i+1}}{(i+1)!} \cdot p(0),$$



Expresión para la probabilidad en una distribución de Poisson

- Reemplazando cada $p(i)$ en la ecuación de restricción de normalización, obtendremos $p(0)$:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{j=0}^{\infty} p(j) \\ &= p(0) \cdot \left\{ 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^i}{i!} + \cdots \right\} \\ &= p(0) \cdot e^A, \\ p(0) &= e^{-A}. \end{aligned}$$

- Así, obtenemos la expresión de la probabilidad para la distribución $p(i) = \frac{A^i}{i!} \cdot e^{-A}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$
-



Número de Canales ocupados en un sistema con infinitos servidores:

$$p(i) = \frac{A^i}{i!} \cdot e^{-A}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

- Por tanto, el número de canales ocupados en un instante de tiempo aleatorio tiene una distribución de Poisson.



Características de tráfico de la distribución de Poisson

- ▶ Desde un punto de vista de dimensionamiento, el sistema con capacidad ilimitada no es muy interesante.
- ▶ Sin embargo, podemos resumir las características de tráfico más importantes de un sistema de pérdidas:
 - ▶ Tiempo de congestión $E = 0$,
 - ▶ Congestión de llamadas $B = 0$,
 - ▶ Tráfico transportado $Y = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot p(i) = A$,
 - ▶ Tráfico perdido $A_{\ell} = A - Y = 0$,
 - ▶ Congestión de tráfico $C = 0$.



Otras características de la distribución de Poisson

- ▶ Intensidad de picos:

- ▶ Se define como la razón entre la varianza y la media. También llamada índice de dispersión de conteos.

$$Z = \frac{\sigma^2}{m_1} = 1.$$

- ▶ La intensidad de picos tiene dimensiones (número de canales) y es diferente del coeficiente de variación (que no tiene dimensiones).

- ▶ Duración del estado [i]:

- ▶ Como se mencionó antes, un proceso de llegadas de Poisson tiene una distribución de tiempo exponencial entre llegadas. Por tanto, este tiempo tendrá una distribución de la forma:

$$f_i(t) = (\lambda + i\mu)e^{-(\lambda + i\mu)t}, \quad t \geq 0.$$



Ejemplo: Aloha Puro

- ▶ El protocolo acceso al medio Aloha Puro es un ejemplo de un proceso de Poisson Puro.
- ▶ En un sistema Aloha puro los usuarios transmiten paquetes que supondremos de longitud fija h . La tasa de servicio sería entonces $1/h$.
- ▶ La tasa media a la que llegan paquetes al medio de transmisión es λ .
- ▶ Por tanto, la intensidad de tráfico ofrecido será $A = \lambda/\mu = \lambda h$
- ▶ Un paquete se transmitirá completamente si:
 - ▶ El medio no tiene paquetes por transmitir (estado 0)
 - ▶ No llegan otros paquetes en ese mismo instante de tiempo (proceso de Poisson)
- ▶ Luego:

$$p_{correct} = p(0) \cdot e^{-\lambda h} = e^{-2A}$$

$$A_{correct} = A \cdot p_{correct} = A \cdot e^{-2A}$$



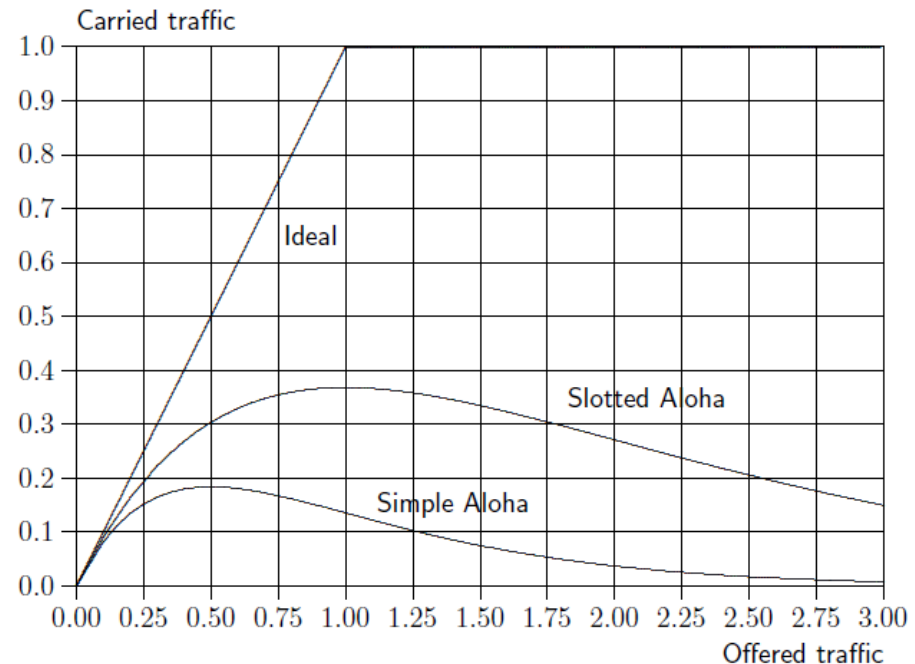
Ejemplo: Aloha Puro

- ▶ Para hallar la máxima cantidad de tráfico que se puede transportar, derivamos e igualamos a cero:

$$\frac{\partial A_{correct}}{\partial A} = e^{-2A} \cdot (1 - 2A),$$

$$\max\{A_{correct}\} = \frac{1}{2e} = 0.1839.$$

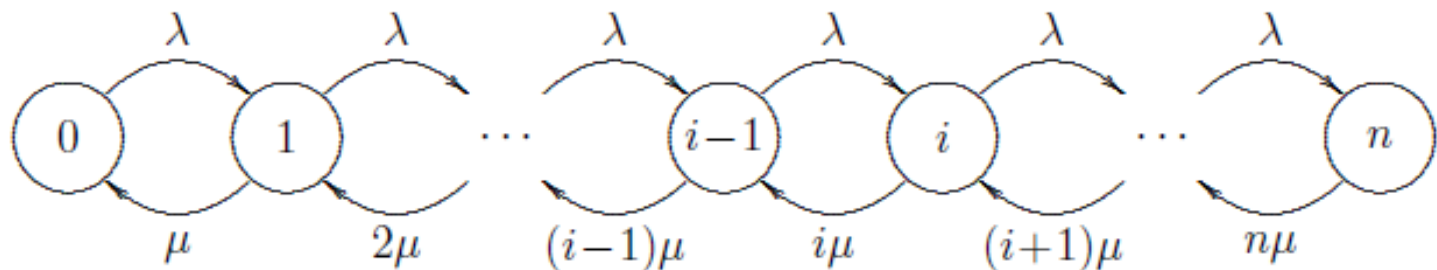
- ▶ Es decir, se obtiene un máximo del 18% de tráfico transportado. Comparando con la solución Aloha ranurada estudiada previamente, esta última ofrece un 36% de tráfico transportado y es más eficiente.



Distribución de Poisson Truncada

Punto de partida

- ▶ Cuando se considera un número de canales infinito, se tiene la distribución de Poisson.
- ▶ Ahora, limitaremos el número de canales a un valor finito, n .
- ▶ Por tanto, el número de estados será $n+1$ y el diagrama de transición de estados será,



Probabilidades de estado

- ▶ De forma similar al caso de la distribución Poisson, se obtiene la probabilidad de cada estado en función de la probabilidad $p(0)$.
- ▶ Luego, de la ecuación de restricción de normalización (La suma total de probabilidades es 1), se obtiene:

$$p(0) = \left\{ \sum_{j=0}^n \frac{A^j}{j!} \right\}^{-1}$$

- ▶ Finalmente, se reemplaza esta expresión en la expresión de probabilidad para el estado i :

$$p(i) = \frac{\frac{A^i}{i!}}{\sum_{j=0}^n \frac{A^j}{j!}}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Distribución de Poisson Truncada
ó Primera
Fórmula de Erlang

Fórmula de Erlang B

Características de tráfico

Congestión en el Tiempo

- ▶ La probabilidad de que todos los n canales estén ocupados en un instante de tiempo dado es igual a la proporción del tiempo que todos los canales están ocupados (tiempo medio).
- ▶ Esto se obtiene de la primera expresión de Erlang haciendo $i=n$:

$$E_n(A) = p(n) = \frac{\frac{A^n}{n!}}{1 + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n}{n!}}.$$

- ▶ Esta es la famosa fórmula B de Erlang (1917). Esta se denota como $E_n(A) = E_{1,n}(A)$. La segunda forma se refiere al nombre alternativo de primera fórmula de Erlang.
-

► Congestión de Llamadas

- La probabilidad de que una llamada aleatoria se pierda es igual a la proporción de intentos de llamada bloqueados

$$B_n(A) = \frac{\lambda \cdot p(n)}{\sum_{\nu=0}^n \lambda \cdot p(\nu)} = p(n) = E_n(A)$$

► Tráfico Transportado:

- Usando la ecuación de corte entre los estados $[i-1]$ e $[i]$, obtenemos:

$$Y_n(A) = \sum_{i=1}^n i \cdot p(i) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda}{\mu} \cdot p(i-1) = A \cdot \{1 - p(n)\},$$

$$Y_n(A) = A \cdot \{1 - E_n(A)\},$$

- Donde A es el tráfico ofrecido.
-



-
- ▶ Tráfico perdido:

$$A_\ell = A - Y_n(A) = A \cdot E_n(A), \quad 0 \leq A < \infty.$$

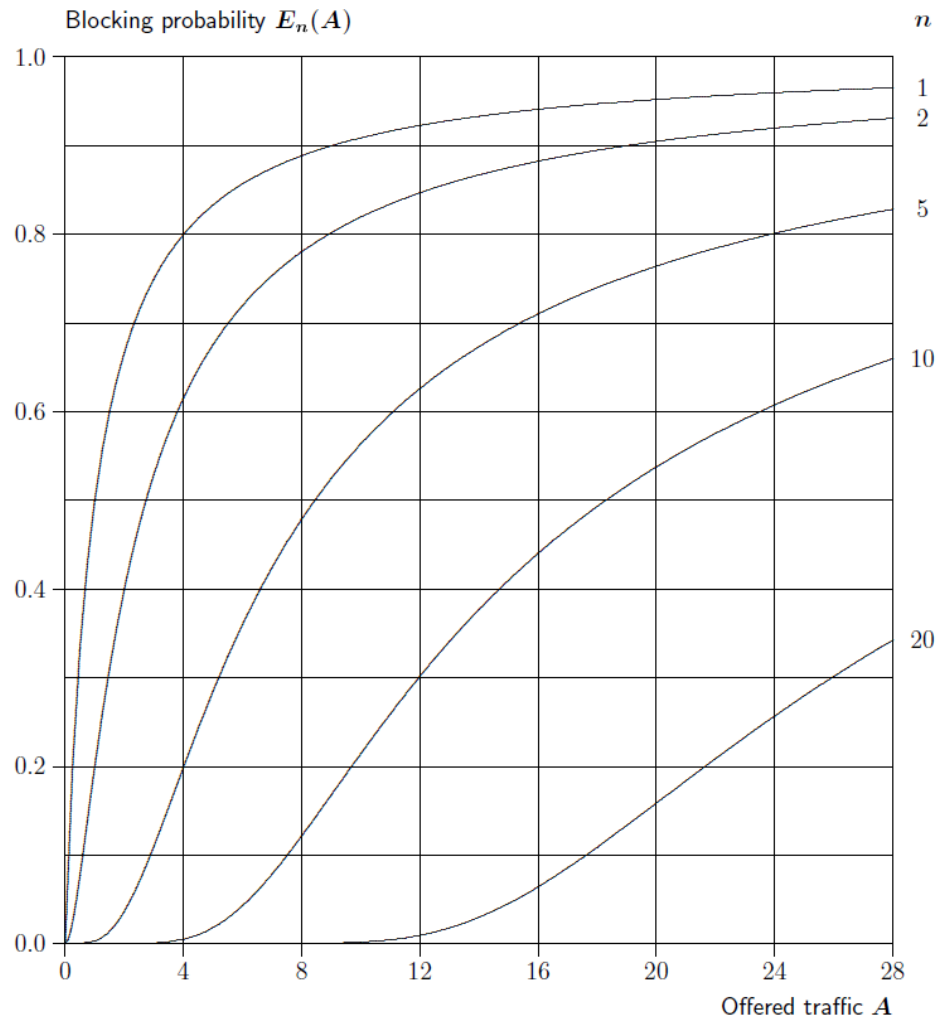
- ▶ Congestión de tráfico:

$$C_n(A) = \frac{A - Y}{A} = E_n(A), \quad 0 \leq Y < n.$$

- ▶ Por tanto, $E=B=C$. Esto se debe a que la intensidad de llegadas (λ) es independiente del estado.
- ▶ Esto es la propiedad PASTA, que es válida para todos los procesos de Poisson: Poisson Arrivals See Time Averages.



Variación de la probabilidad de bloqueo con el tráfico ofrecido. Curvas para diferente número de canales.



Utilización (a_i) del i -ésimo canal

- ▶ Es el tráfico transportado por el i -ésimo canal. Depende de la técnica de búsqueda de canales:
 - ▶ Búsqueda aleatoria y búsqueda cíclica:
 - ▶ Todos los canales transportan en media el mismo tráfico
 - ▶ El tráfico transportado total es independiente de la estrategia de búsqueda de canales.
 - ▶ La utilización será:

$$a_i = a = \frac{Y}{n} = \frac{A \{1 - E_n(A)\}}{n} .$$

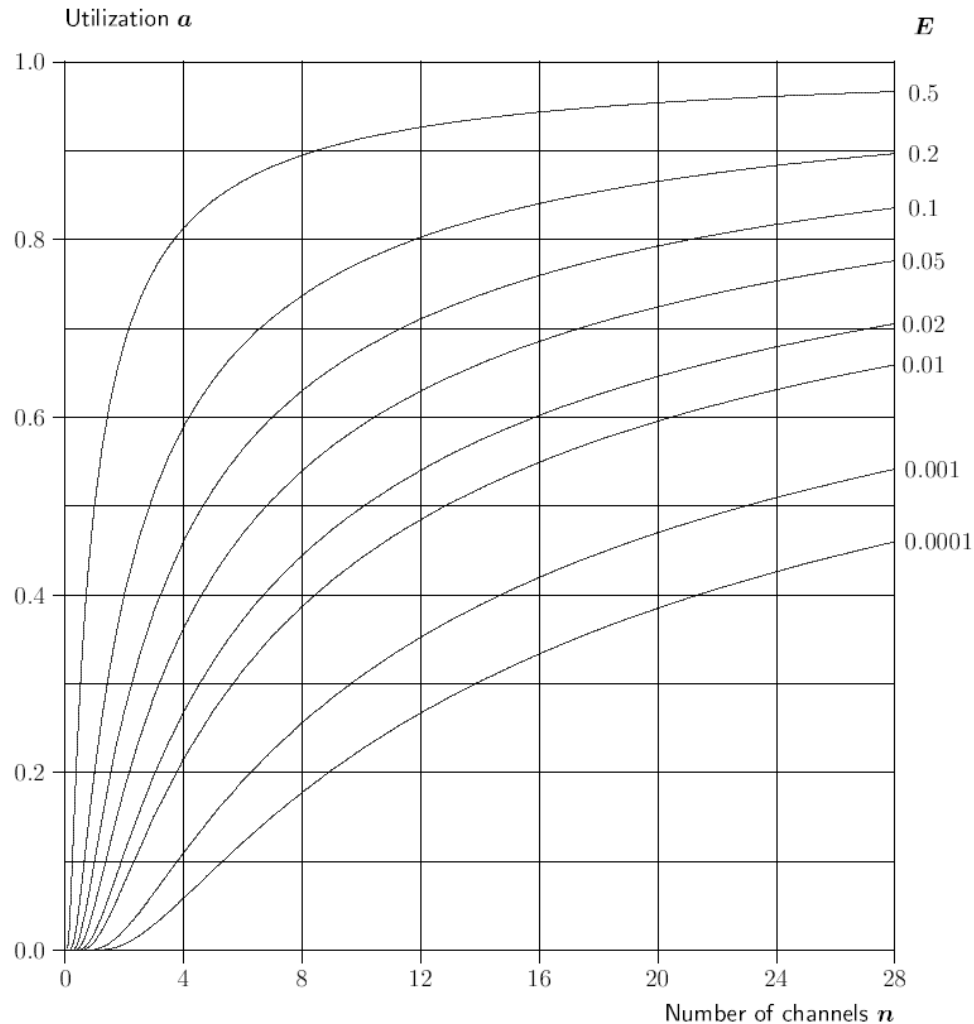
- ▶ Búsqueda Secuencial:

$$a_i = A \cdot \{E_{i-1}(A) - E_i(A)\}$$

- ▶ El tráfico transportado por el canal i es independiente del número de canales después de i en la búsqueda.



Utilización de los canales



- Se observa que para un valor de congestión E dado, se obtiene una alta utilización para grupos de canales grandes.

Función de mejoramiento

- Describe el incremento en el tráfico cuando el número de canales se incrementa en uno desde n hasta $n+1$:
$$F_n(A) = Y_{n+1} - Y_n,$$

$$= A\{1 - E_{n+1}\} - A\{1 - E_n\},$$

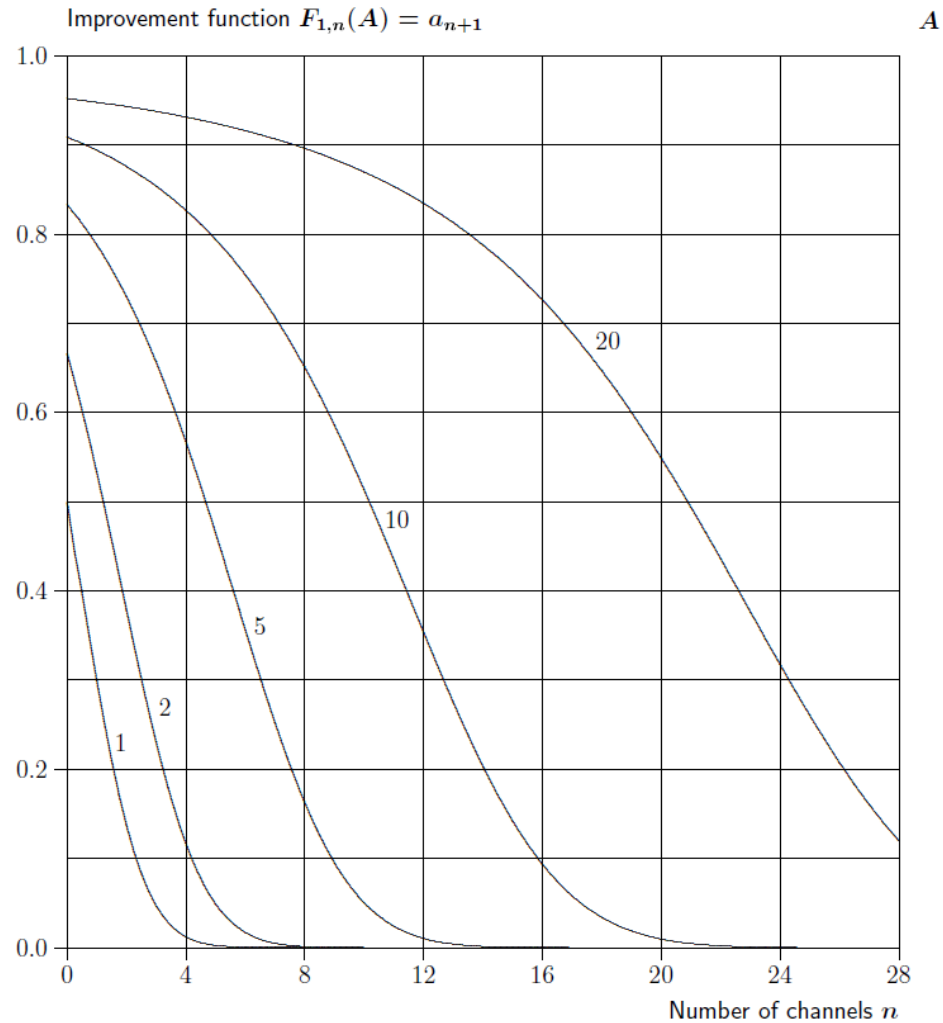
$$F_n(A) = A\{E_n(A) - E_{n+1}(A)\}$$

$$= a_{n+1}.$$

- Por tanto, tenemos que: $0 \leq F_n(A) < 1$
- La función de mejoramiento se emplea en el principio de Moe, cuya utilidad se ve en el dimensionamiento económico.



Función de mejoramiento



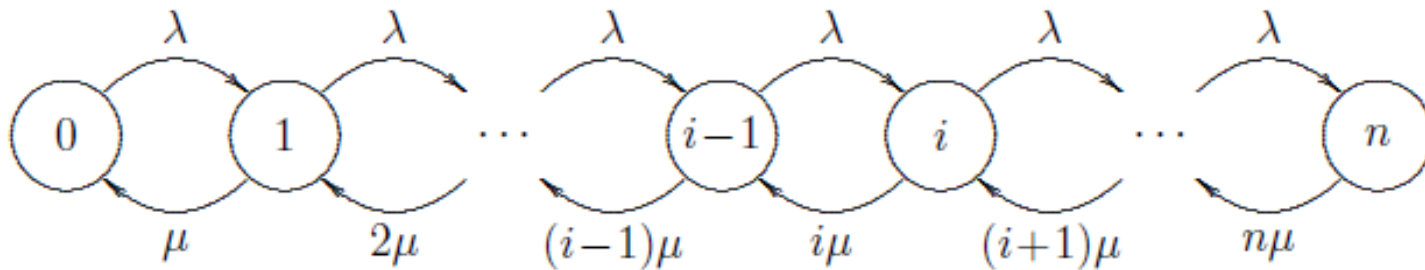
Intensidad de Picos

- ▶ Recordemos que es la varianza sobre la media
- ▶ Las unidades son “número de canales”
- ▶ Para la Distribución truncada de Poisson, Z es:

$$Z = \frac{\sigma^2}{m} = 1 - A \{E_{n-1}(A) - E_n(A)\} = 1 - a_n ,$$



Duración del estado i



- ▶ De igual manera que para la Distribución de Poisson, el tiempo en un estado tiene una distribución exponencial.
- ▶ De la ecuación de nodos, la tasa de salida es $(\lambda + i\mu)$. Por tanto, la f.d.p. del tiempo pasado en el estado i será:
$$f_i(t) = (\lambda + i\mu) \cdot e^{-(\lambda + i\mu)t}, \quad 0 \leq i < n,$$
$$f_n(t) = (n\mu) \cdot e^{-(n\mu)t}, \quad i = n.$$

Generalizaciones de la fórmula de Erlang B

► Insensibilidad:

- Un sistema es insensible a la distribución del tiempo de servicio si las probabilidades de estado del sistema sólo dependen del valor medio del tiempo de servicio.
- La distribución de Poisson y la distribución de Poisson truncada son insensibles.
- La fórmula de Erlang B es válida para distribuciones de tiempo de servicio arbitrarias, no solo para distribuciones exponenciales.
- Se puede demostrar que todo sistema de pérdidas es insensible a la distribución del tiempo de servicio.



Generalizaciones de la fórmula de Erlang B

- ▶ El supuesto fundamental para la validez de la fórmula de Erlang B es que el proceso de llegadas es un proceso de Poisson.
- ▶ Esto se cumple cuando el tráfico es originado por muchas fuentes independientes (Teorema de Palm).
- ▶ Esto se cumple en sistemas telefónicos ordinarios bajo condiciones de tráfico normal.
- ▶ La fórmula es muy robusta. Los procesos de llegadas y de tiempo de servicio se describen por medio de un único parámetro (A). Esto explica la amplia aplicación de la fórmula B en el pasado y ahora.



Generalizaciones de la fórmula de Erlang B

- ▶ **Número contínuo de Canales:**
 - ▶ La fórmula de Erlang B funciona incluso para números de canales no enteros y para números de canales negativos.
 - ▶ La fórmula de Erlang B es útil cuando se quiere encontrar el número de canales necesarios para soportar un tráfico ofrecido A con una probabilidad de bloqueo E .



Procedimiento General para los diagramas de transición de estados

Introducción

- ▶ La herramienta más importante en la teoría de teletráfico es la formulación y solución de modelos por medio de diagramas de transición de estados.
- ▶ Como se ha logrado identificar hasta ahora, existe un procedimiento estándar para obtener las fórmulas a partir de los diagramas de transición de estados.
- ▶ Este procedimiento también se aplica a diagramas de estados multi-dimensionales.



Procedimiento general

- ▶ Construcción del diagrama de transición de estados:
 - ▶ Definir los estados del sistema en una forma única
 - ▶ Dibujar los estados como círculos
 - ▶ Considere los estados uno a la vez y dibuje todas las posibles flechas para las transiciones que salen de dicho estado. Las transiciones son debidas a:
 - ▶ El proceso de llegadas (nueva llegada)
 - ▶ El proceso de salida (finalización del tiempo de servicio)
- ▶ Definir las ecuaciones que describen el sistema:
 - ▶ Si se satisface la condición de equilibrio estadístico, las ecuaciones pueden obtenerse como:
 - ▶ Ecuaciones de nodo (método general)
 - ▶ Ecuaciones de corte



Procedimiento general

- ▶ Resolver las ecuaciones de balance asumiendo equilibrio estadístico:
 - ▶ Expresar todas las probabilidades de estado en función de la probabilidad del estado 0: $p(0)$.
 - ▶ Encontrar $p(0)$ de la ecuación de restricción de normalización (sumatoria de probabilidades es 1).
- ▶ Calcular las medidas de rendimiento expresadas con base en las probabilidades de estado.



Fórmula recursiva para el cálculo de la congestión en el tiempo

- ▶ Fórmula general:

- ▶ Es aplicable a cualquier proceso con las siguientes condiciones:

- ▶ Tasas de llegadas dependientes del estado
- ▶ Servidores homogéneos

$$I_x = 1 + \frac{x \mu}{\lambda_{x-1}} \cdot I_{x-1}, \quad I_0 = 1 \quad I_x = E_x^{-1}$$

- ▶ Fórmula recursiva para la expresión Erlang B:

$$E_x(A) = \frac{A \cdot E_{x-1}(A)}{x + A \cdot E_{x-1}(A)}, \quad E_0(A) = 1.$$

- ▶ Ó también, una fórmula más estable:

$$I_x(A) = 1 + \frac{x}{A} \cdot I_{x-1}(A), \quad I_0(A) = 1,$$

- ▶ Donde $I_n(A) = 1/E_n(A)$



Principios de dimensionamiento

Objetivos

- ▶ Cuando se dimensionan sistemas de servicio se deben balancear los requerimientos del grado de servicio y las restricciones económicas.
- ▶ En sistemas de telecomunicaciones hay diferentes medidas para caracterizar el servicio provisto:
 - ▶ Calidad de servicio: Calidad de la voz, retardos, pérdidas, confiabilidad, etc
 - ▶ Grado de Servicio: Parámetros de rendimiento de la red, representados por parámetros de la capacidad de la red.



Dimensionamiento con probabilidad de bloqueo fija

- ▶ Para una operación apropiada, un sistema de pérdidas debería tener una probabilidad de bloqueo baja.
- ▶ En la práctica, se elige el número de canales para que la probabilidad de bloqueo esté alrededor del 1%.



Dimensionamiento en sistemas de pérdidas

- ▶ Si se deja fija la probabilidad de bloqueo en el 1%, se obtendrán valores de tráfico transportado para n canales, como los que se muestran en la parte superior de la tabla.
- ▶ La tabla muestra también la utilización media de los canales.
- ▶ La parte inferior de la tabla muestra la probabilidad de bloqueo para cuando se incrementa el tráfico en un 20%.

n	1	2	5	10	20	50	100
$A (E = 1\%)$	0.010	0.153	1.361	4.461	12.031	37.901	84.064
a	0.010	0.076	0.269	0.442	0.596	0.750	0.832
$F_{1,n}(A)$	0.000	0.001	0.011	0.027	0.052	0.099	0.147
$A_1 = 1.2 \cdot A$	0.012	0.183	1.633	5.353	14.437	45.482	100.877
$E [\%]$	1.198	1.396	1.903	2.575	3.640	5.848	8.077
a	0.012	0.090	0.320	0.522	0.696	0.856	0.927
$F_{1,n}(A_1)$	0.000	0.002	0.023	0.072	0.173	0.405	0.617

Dimensionamiento en sistemas de pérdidas

- ▶ Con respecto a la utilización (a_i), se puede observar:
 - ▶ Para una $E=P_b$ dada, la utilización aumenta con el número de canales. Con una $P_b=1\%$, se puede usar un canal al menos 36 segundos por hora (en media).
 - ▶ Los grupos de canales grandes son más sensibles a un porcentaje de sobrecarga que los grupos de canales pequeños. Esto se explica por la baja utilización de los grupos pequeños.
 - ▶ Por tanto:
 - ▶ El uso de grupos de canales pequeños brinda una capacidad sobrante con respecto al uso de un grupo de canales grande.
 - ▶ Hay un dilema cuando se dimensiona un grupo de canales: Podríamos elegir entre una alta sensibilidad a la sobrecarga o una baja utilización de los canales.

n	1	2	5	10	20	50	100
$A (E = 1\%)$	0.010	0.153	1.361	4.461	12.031	37.901	84.064
a	0.010	0.076	0.269	0.442	0.596	0.750	0.832
$F_{1,n}(A)$	0.000	0.001	0.011	0.027	0.052	0.099	0.147
$A_1 = 1.2 \cdot A$	0.012	0.183	1.633	5.353	14.437	45.482	100.877
$E [\%]$	1.198	1.396	1.903	2.575	3.640	5.848	8.077
a	0.012	0.090	0.320	0.522	0.696	0.856	0.927
$F_{1,n}(A_1)$	0.000	0.002	0.023	0.072	0.173	0.405	0.617



Ejemplo de dimensionamiento: Sistemas celulares

- ▶ Un usuario es un móvil
- ▶ Un recurso puede ser:
 - ▶ Ranura de tiempo
 - ▶ Un radiocanal (frecuencia)
 - ▶ Un código
- ▶ Hay N recursos
- ▶ Hay M usuarios

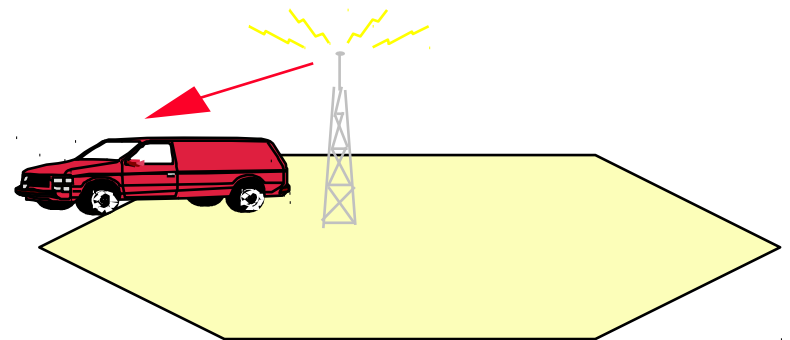
La duración media de una llamada es,

$$H=1/\mu$$

Si cada móvil efectúa en promedio L llamadas en la BH, la tasa de oferta de llamadas es,

$$\lambda=ML/3600$$

$$A= \lambda/\mu=MLH/3600 \text{ (Erlangs)}$$



Ejemplo: Dimensionamiento de sistemas celulares

Como los sistemas PMT son sistemas troncales de pérdidas, se aplica la expresión de Erlang B para obtener el GoS,

$$\text{GoS} = 100p = 100 B(N,A)$$

En los sistemas PMT el GoS suele ser del 1% al 2% y el tráfico por terminal (a) es de 17 a 25 mErlang



Ejemplo: Dimensionamiento de sistemas celulares

El problema Directo:

Cálculo del número de radiocanales (N) para un GoS dado y un tráfico ofrecido conocido (se conoce M, L, H)

Solución:

1. Se calcula el tráfico ofrecido como $A = MLH/3600 = Ma$
2. Se obtiene N a prueba y error de la expresión

$$\text{GoS} = 100p = 100 B(N, A)$$

o de la tabla de Erlang B.



Ejemplo:

- ▶ Calcular el número de canales necesario para dar servicio a un conjunto de 500 terminales con una intensidad de tráfico por terminal de 20mErlang y un GoS del 1%.



Ejemplo: Dimensionamiento de sistemas celulares

El problema Inverso:

Cálculo del número de terminales para un GoS determinado y un número de canales conocido

Solución:

1. Se calcula A a prueba y error de la expresión,

$$\text{GoS} = 100p = 100 B(N, A)$$

o de la tabla de Erlang B.

2. Se calcula M como $M = \text{Int}(A/a)$



Ejemplo:

- ▶ Una portadora GSM ofrece 7 canales de tráfico. Calcular el número de terminales a los que puede dar servicio con un GoS del 1%, si el tráfico por terminal es 25mErlang.



Principio de mejora (Principio de Moe)

- ▶ Está basado en la función de mejoramiento $F_n(A)$.
- ▶ $F_n(A)$ describe el incremento en el tráfico cuando el número de canales se incrementa en uno desde n hasta $n+1$:

$$\begin{aligned} F_n(A) &= Y_{n+1} - Y_n, \\ &= A\{1 - E_{n+1}\} - A\{1 - E_n\}, \\ F_n(A) &= A\{E_n(A) - E_{n+1}(A)\} \\ &= a_{n+1}. \end{aligned}$$

- ▶ Por tanto, tenemos que: $0 \leq F_n(A) < 1$



- ▶ Si se deja constante el mejoramiento y se varía n , se puede observar que:
 - ▶ El tráfico transportado aumenta con el número de canales.
 - ▶ La probabilidad de bloqueo disminuye drásticamente con el número de canales

n	1	2	5	10	20	50	100
$A (F_B = 0.05)$	0.271	0.607	2.009	4.991	11.98	35.80	78.73
a	0.213	0.272	0.387	0.490	0.593	0.713	0.785
$E_{1,n}(A) [\%]$	21.29	10.28	3.72	1.82	0.97	0.47	0.29
$A_1 = 1.2 \cdot A$	0.325	0.728	2.411	5.989	14.38	42.96	94.476
$E \{ \% \}$	24.51	13.30	6.32	4.28	3.55	3.73	4.62
a	0.245	0.316	0.452	0.573	0.693	0.827	0.901
$F_{1,n}(A_1)$	0.067	0.074	0.093	0.120	0.169	0.294	0.452

Modelo económico

- ▶ Considérese un intervalo de tiempo (p.ej. Una unidad de tiempo)
- ▶ Denótense las entradas por erlang transportado por unidad de tiempo, como g .
- ▶ El costo de un cable con n canales se asume como una función lineal:

$$c_n = c_0 + c \cdot n$$

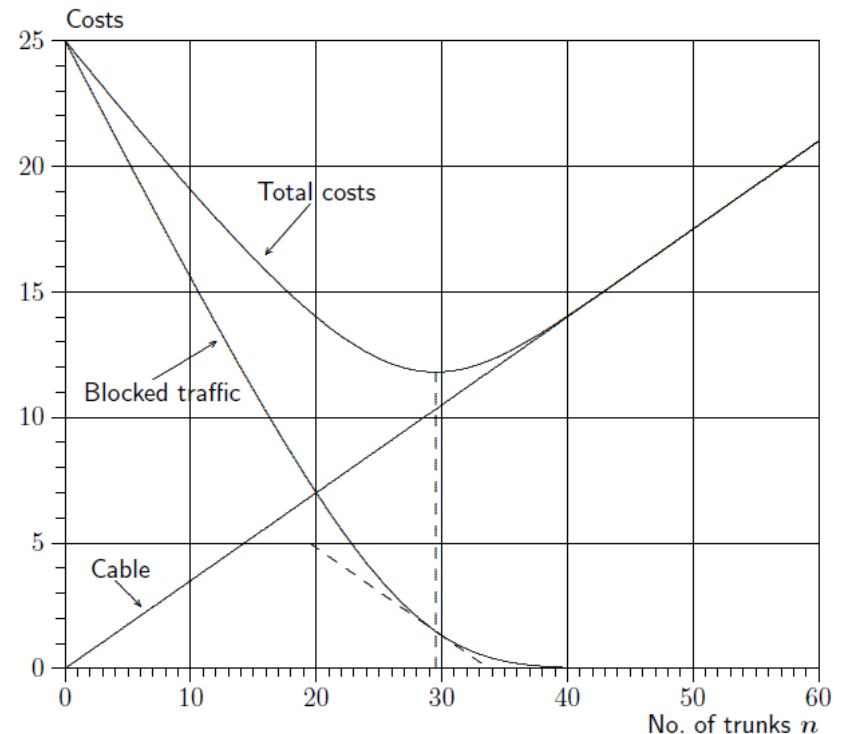


Modelo económico

- ▶ Los costos totales para un número de canales determinado es entonces el costo del cable más el costo debido a el tráfico perdido:

$$C_n = g \cdot A E_{1,n}(A) + c_0 + c \cdot n$$

- ▶ Se puede observar que:
 - ▶ Los costos totales tienen un mínimo para cierto valor de n (debe aproximarse a un valor entero)



Valor de mejoramiento

- ▶ Se denota por F_B y se define como:

$$F_B = \frac{c}{g} = \frac{\text{cost per extra channel}}{\text{income per extra channel}}$$

- ▶ Mide los beneficios al incluir un nuevo canal.
- ▶ Restricción:

$$F_{1,n-1}(A) > F_B \geq F_{1,n}(A)$$

- ▶ La gráfica muestra la variación de la probabilidad de bloqueo cuando el tráfico aumenta y se varía F_B .

