P1/ ¿CI de un chileno es superior a 100?
⇝ X: CI de un chileno elegido aleatoriamente
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ desconocido, $\sigma^2 = 16$
muestra aleatoria $n = 16$ habitantes.
$H_0: \mu = 100$ hipótesis nula
$H_A: \mu \geq 100$ hipótesis alternativa.
$\alpha = 0.05$

a) x_i observaciones.
enunciar el Z-test
determinar región crítica.
} Enunciado.

Como dice el enunciado, se quiere evaluar si, en prom, el CI promedio chileno es superior a 100. Para esto, se propone las hipótesis alternativa H_A, y la hipótesis nula H_0:

$H_A: \mu \geq 100$, $H_0: \mu = 100$.

Y para comprobar nuestra Hip., se tendrá que falsear H_0.
Y para esto, supongamos que H_0 es cierta, ie, $\mu = 100$, y con esto, $X \sim (X_1, \ldots, X_n) \sim N(\mu, \sigma^2)$, con $n = 16$, $\mu = 100$, $\sigma^2 = 4^2$.

La media de los datos está dado por
$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Y a partir de éste, construimos el pivote:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

¿p-valor no es $\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$?

Hay que formalizarlo.

$\mathbb{P}(Z \leq r) = 1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}975$

No sé como seguir
:c

De aquí, determinamos el p-valor:

$\mathbb{P}(\bar{X} \geq \bar{x}) = \mathbb{P}(Z \geq \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}})$

Y a través de scipy, calculemos la región crítica, el cual es $[1.645, \infty)$. Finalmente, rechazamos si el p-valor está en la región crítica.

b) Hecho en Jupyter

c) Se asume q' el CI prom. real es 100. En nuestro caso: $\bar{x} = 100$.

...

Regla de desición:

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [1.645, \infty) \\ 1 & \sim \end{cases}$$

Región crítica:

$$R_\phi = \{x : \phi(x) = 1\} = [1.645, \infty)$$

Prob. de rechazo:

$$\alpha_\phi(\theta) = \mathbb{P}_\theta(\phi(x)=1) = \mathbb{P}_\theta(x \in R_\phi) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{R_\phi}) = \int_{R_\phi} x \, d\mathbb{P} = \ldots$$

$$\pi_\phi(\theta) = \mathbb{P}(\text{rechazar } H_0 | H_1 \text{ es cierta}) = \mathbb{P}_{\theta_1}(\phi(x)=1)$$

$i \in [1..I]$ tiendas monitoreadas.
$j \in [1..n]$ semanas.

$x_{ij} | \theta_i \sim Poiss(\theta_i)$ i.i.d.

$$Ga(x;\alpha,\beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$$

$\theta_i | \mu \sim Gamma(a, \mu a)$

a) Calcular $p(x|\vec{\theta},\mu)$

$$p(\{x_{ij}\}_{j=1}^n | \theta_i, \mu) = \prod_{j=1}^n p(x_{ij}|\theta_i)$$

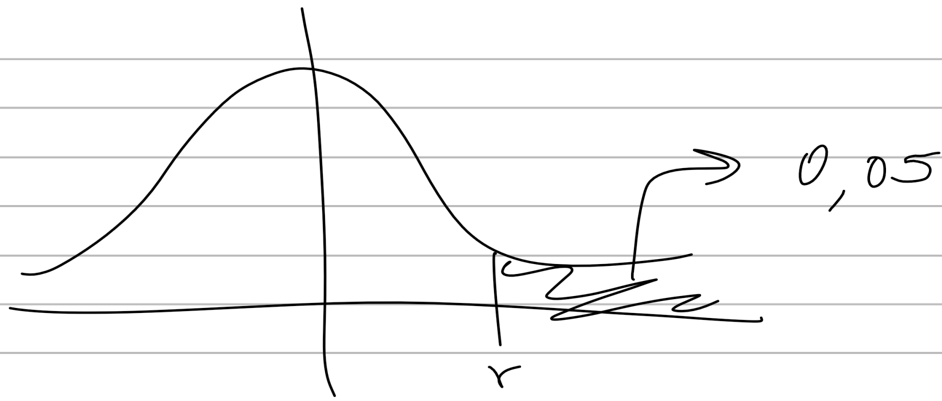
Como x_{ij} son cond. indep. de μ dado θ_i, entonces $\forall i$:

$$p(\{x_{ij}\}_{j=1}^n | \theta_i, \mu) = \prod_{j=1}^n p(x_{ij}|\theta_i)$$, luego:

$$p(x|\vec{\theta},\mu) = \prod_{i=1}^I p(\{x_{ij}\}_{j=1}^n | \theta_i, \mu) = \prod_{i=1}^I \left(\prod_{j=1}^n p(x_{ij}|\theta_i)\right)$$

$$= \prod_{i=1}^I \prod_{j=1}^n \frac{e^{-\theta_i}\theta_i^{x_{ij}}}{x_{ij}!} = \prod_{i=1}^I \frac{e^{-n\theta_i}\theta_i^{\sum_j^n x_{ij}}}{\prod_j^n x_{ij}!}$$

$$= \frac{e^{-n\sum_i^I \theta_i} \prod_i^I \theta_i^{\sum_j^n x_{ij}}}{\prod_i^I \prod_j^n x_{ij}!}$$



$\mathbb{P}(Z \leq r) = 1 - \alpha$

$\Rightarrow r = 1{,}64$ ✓

P3)

Var dep: $y \in \mathbb{R}$ var ind: $x \in \mathbb{R}^d \rightsquigarrow y = \theta^t x$, $\theta \in \mathbb{R}^d$

$(x_i, y_i)_{1:n}$ observaciones, tenemos estimadores puntuales p/ θ.

Se considera: $y|\theta, x \sim \mathcal{N}(\theta^t x, \sigma^2)$
$\theta \sim p_0(\theta)$

a) $D = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$, calcular dist. posterior predictive de y dada por: $p(y|x, D)$.

$X = [x_1 \_ x_n]$ $Y = [y_1 \_ y_n]$

$$\Rightarrow p(\theta|D) = p(\theta|X, Y) = \frac{p(X, Y|\theta)\, p(\theta)}{p(X, Y)} = \frac{p(X|\theta)\, p(Y|\theta)\, p(\theta)}{p(}$$

$$p(y) = \int_{\Theta} p(y, \theta)\, d(\theta) = \int_{\Theta} p(y|\theta)\, p(\theta)\, d(\theta)$$