P1/ ¿CI de un chileno es superior a 100?

⇝ X: CI de un chileno elegido aleatoriamente

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ desconocido, $\sigma^2 = 16$

muestra aleatoria $n = 16$ habitantes.

$H_0: \mu = 100$ hipótesis nula

$H_A: \mu \geq 100$ hipótesis alternativa.

$\alpha = 0.05$

a) x_i observaciones.
enunciar el Z-test
determinar región crítica. } Enunciado.

Como dice el enunciado, se quiere evaluar si, en prom, el CI promedio chileno es superior a 100. Para esto, se propone las hipótesis alternativa H_A, y la hipótesis nula H_0:

$$H_A: \mu \geq 100, \quad H_0: \mu = 100.$$

Y para comprobar nuestra Hip., se tendrá que falsear H_0.
Y para esto, supongamos que H_0 es cierta, ie, $\mu = 100$, y con esto, $X \sim (X_1, \ldots, X_n) \sim N(\mu, \sigma^2)$, con $n = 16$, $\mu = 100$, $\sigma^2 = 4^2$.

La media de los datos está dado por

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Y a partir de éste, construimos el pivote:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

¿p-valor no es $\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$?

Hay que formalizarlo.

$\mathbb{P}(Z \leq r) = 1-\frac{\alpha}{2} = 0,975$

No sé como seguir
:c

De aquí, determinamos el p-valor:

$\mathbb{P}(\bar{X} \geq \bar{x}) = \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$

Y a través de scipy, calculemos la región crítica, el cual es $[1.645, \infty)$. Finalmente, rechazamos si el p-valor está en la región crítica.

b) Hecho en Jupyter

c) Se asume q' el CI prom. real es 100. En nuestro caso: $\bar{x} = 100$.

...

Regla de desición:

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [1.645, \infty) \\ 1 & \sim \end{cases}$$

Región crítica:

$$R_\phi = \{x : \phi(x) = 1\} = [1.645, \infty)$$

Prob. de rechazo:

$$\alpha_\phi(\theta) = \mathbb{P}_\theta(\phi(x)=1) = \mathbb{P}_\theta(x \in R_\phi) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{R_\phi}) = \int_{R_\phi} x \, d\mathbb{P} = \dots$$

$$\pi_\phi(\theta) = \mathbb{P}(\text{rechazar } H_0 | H_1 \text{ es cierta}) = \mathbb{P}_{\theta_1}(\phi(x) = 1)$$

$i \in [1..I]$ tiendas monitoreadas.
$j \in [1..n]$ semanas.

$x_{ij} | \theta_i \sim Poiss(\theta_i)$ i.i.d.

$\theta_i | \mu \sim Gamma(a, \mu a)$

a) Calcular $p(x|\vec{\theta}, \mu)$

Como x_{ij} son cond. indep. de μ dado θ_i, entonces $\forall i$:

$$p(\{x_{ij}\}_{j=1}^{n} | \theta_i, \mu) = \prod_{j=1}^{n} p(x_{ij}|\theta_i)$$, luego:

$$p(x|\vec{\theta}, \mu) = \prod_{i=1}^{I} p(\{x_{i,j}\}_{j=1}^{n} | \theta_i, \mu) = \prod_{i=1}^{I} \left(\prod_{j=1}^{n} p(x_{ij}|\theta_i) \right)$$

$$\mathbb{P}(x_{ij}, \mu | \theta_i) = \mathbb{P}(x_{ij}|\theta_i) \mathbb{P}(\mu|\theta_i)$$

$$Ga(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$$

$$p(\{x_{ij}\}_{j=1}^{n} | \theta_i, \mu) = \prod_{j=1}^{n} p(x_{ij}|\theta_i)$$