MODELOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Guía para su formulación y solución

Ezilda Cabrera Gil Grados

UNIVERSIDAD DE LIMA

FONDO EDITORIAL

Modelos de programación lineal
Guía para su formulación y solución

Ezilda Cabrera Gil Grados

Ezilda Cabrera Gil Grados

MODELOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Guía para su formulación y solución

UNIVERSIDAD DE LIMA

FONDO EDITORIAL

Cabrera-Gil-Grados, Ezilda-María.
Modelos de programación lineal. Guía para su formulación y solución. / Ezilda Cabrera Gil Grados. Primera edición. Lima: Universidad de Lima. Fondo Editorial, 2017.
276 páginas: diagramas, gráficos. (Colección Textos Universitarios).

Bibliografía: página 267.

1. Investigación de operaciones - - Problemas, ejercicios.
2. Investigación de operaciones - - Solucionario.
3. Programación lineal.
4. Toma de decisiones - - Modelos matemáticos.

I. Universidad de Lima. Fondo Editorial.

658.4034
C13 ISBN 978-9972-45-398-4

Modelos de programación lineal. Guía para su formulación y solución
Colección Textos Universitarios
Primera edición: septiembre, 2017
Tiraje: 500 ejemplares

Diseño, edición y carátula: Fondo Editorial de la Universidad de Lima
Imagen de portada: ESB Professional / Shutterstock.com

Impreso en el Perú

ISBN 978-9972-45-398-4

Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú n.º 2017-09652

Índice

Introducción

La investigación de operaciones es una disciplina que se origina en la Segunda Guerra Mundial, momento en el cual se recurre a la aplicación de las matemáticas y el método científico a la solución de problemas propios de las operaciones militares. La Fuerza Aérea Británica formó el primer grupo de especialistas que desarrollaría métodos cuantitativos para resolver tales problemas. Lo mismo hizo posteriormente la fuerza armada estadounidense; cinco de los miembros de este último equipo recibieron el premio Nobel.

Al término de la guerra, se reconoció la posibilidad de aplicar estas técnicas a los complejos problemas de decisión en las empresas. De esta forma, la investigación de operaciones se orienta a la solución de problemas de toma de decisiones de diseño u operación de un sistema. Hoy en día el poder de la investigación de operaciones se potencia por las facilidades de procesamiento que ofrecen los computadores.

Las técnicas que conforman la investigación de operaciones se basan en la aplicación directa e indirecta de métodos numéricos a través de algoritmos, sobre modelos que representan matemáticamente la situación de toma de decisiones. Los algoritmos que permiten identificar y evaluar sistemáticamente todas las posibles opciones para encontrar la solución óptima forman parte del conjunto de las técnicas de esta disciplina.

La técnica más conocida de la investigación de operaciones es la programación lineal presentada por Dantzig, en 1947, en la que el modelo que representa la situación por resolver está conformado solo por expresiones matemáticas lineales. Algunas situaciones específicas de la programación lineal son la programación lineal entera y la programación multiobjetivo o de metas.

El contenido de este texto está referido enteramente a la programación lineal. El capítulo inicial desarrolla las etapas que comprende un proyecto de investigación de operaciones, el cual presenta al lector una visión completa del trabajo involucrado en el desarrollo de su aplicación real. Luego, en el capítulo 2, entrando específicamente en la programación lineal, se describen sus propiedades y los elementos del modelo respectivo. Se propone una guía de preguntas que el estudiante puede formularse a sí mismo para ayudarse a identificar dichos elementos.

En el capítulo 3, empleando modelos básicos, en solo dos variables, se desarrolla tanto el método de solución gráfica como la solución computacional con Lingo. Cabe señalar que, si bien el método gráfico se limita a modelos con dos o tres variables, es a través de este método que se logra:

- Explicar conceptos importantes que complementan la interpretación de la solución óptima que se puede obtener con el *software* Lingo.
- Caracterizar los casos especiales de la programación lineal que pueden presentarse en modelos lineales más complejos.

Además, incluye una serie de ejercicios resueltos con el método gráfico, que buscan ilustrar justamente aquellos conceptos complementarios a la interpretación de la solución óptima; y presenta tanto la solución con Lingo como la interpretación de sus resultados para dichos modelos básicos.

Para el caso de modelos con un mayor número de variables de decisión y restricciones, resulta eficiente la formulación que se llama en este texto "formulación compacta". Al respecto, el capítulo 4 desarrolla una metodología para la formulación de modelos en esa forma compacta.

El capítulo 5 contiene un conjunto de casos que corresponden a los diferentes tipos de problemas que la programación lineal puede resolver. Se caracteriza cada uno de esos tipos de problemas y se desarrolla una representación gráfica para cada uno que contribuye con la modelación.

La solución computacional de modelos formulados de la forma compacta requiere el uso del lenguaje Lingo; este es justamente el contenido del capítulo 6: la formulación, solución con Lingo de modelos compactos y la interpretación del respectivo reporte de solución. Los ejercicios incluidos en este capítulo están divididos en dos partes, y es en la parte B donde se encuentra la formulación en lenguaje Lingo, y la solución e interpretación de los resultados obtenidos con dicho *software*, para todos los casos modelados en el capítulo 5.

El capítulo 7 se dedica al algoritmo Símplex, que es el método de solución algebraico. Los capítulos 8 y 9 desarrollan la programación lineal entera y la programación multiobjetivo, respectivamente. En ambos capítulos se incluye la formulación, solución e interpretación de diversos ejercicios de aplicación.

La formulación y solución de modelos de programación lineal representa un reto para los estudiantes. Por ello, este texto reúne algunos elementos didácticos que tienen como objetivo facilitar dicha formulación y solución, estos son:

- El empleo de "preguntas" que el estudiante, al iniciarse en la modelación, debe hacerse a sí mismo para identificar los elementos del modelo de programación lineal.
- El empleo de una ilustración gráfica para representar cada situación por modelar. Este gráfico permite visualizar las variables de decisión y algunas restricciones.
- El desarrollo de un modelo matemático en la forma compacta y su solución con el lenguaje Lingo, con lo cual es posible resolver eficientemente modelos de programación lineal con múltiples variables y restricciones.

Finalmente, la autora expresa su agradecimiento al ingeniero Eduardo Romeo López Sandoval, por sus sugerencias para la elaboración de este texto.

Capítulo

1

Proyectos de investigación de operaciones

En este capítulo se tratan los siguientes temas:

- Las actividades que comprende un proyecto de investigación de operaciones
- Las características y los requisitos para el éxito de estos proyectos

Las técnicas de la investigación de operaciones tienen por finalidad la solución de un problema de toma de decisiones y se aplican como parte de un proyecto, es decir, de una serie de tareas que permitirán que realmente se encuentre el soporte para la toma de decisiones. Esta secuencia de tareas se inicia con la *identificación del problema de decisiones* que se quiere resolver y concluye con la *elaboración de una recomendación*. La actividad que distingue un proyecto de investigación de operaciones es la *formulación de un modelo* y la aplicación, sobre este modelo, de las técnicas propias de esta disciplina, las mismas que generalmente requieren de *software* especializado.

¿Qué debe lograr el estudiante?

Identificar y describir las fases para el desarrollo de un proyecto de investigación de operaciones.

Una aplicación de la investigación de operaciones da lugar a un proyecto. El desarrollo de un proyecto comprende los siguientes pasos:

a) **Identificar el problema**

Consiste en la identificación de lo que la organización que enfrenta el problema espera o puede esperar. Ello ocurre en función de sus objetivos pero también de la naturaleza del sistema que debe estudiarse, de las alternativas de solución realmente viables y de las limitaciones de este sistema.

b) **Observar el sistema**

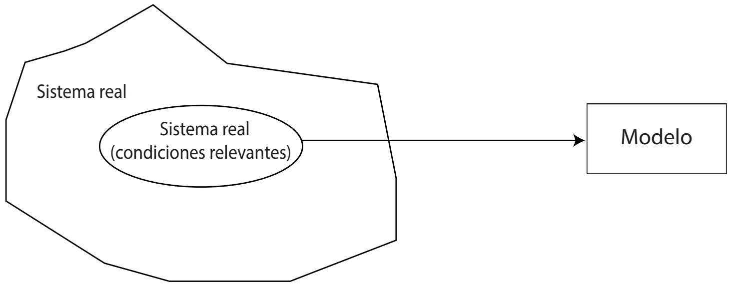
Esta fase del proceso se refiere a la recolección de datos relevantes para entender el comportamiento del sistema que se estudia. Con esta información, se construye un modelo matemático que representará la situación por resolver de la forma más cercana posible.

c) **Formular el modelo matemático**

En líneas anteriores se ha mencionado el término "modelo" para referirnos a la representación del sistema, problema o situación que se estudia. Los modelos que se desarrollan en investigación de operaciones son modelos matemáticos, ya sean analíticos o de simulación, y pueden ser determinísticos o probabilísticos.

La construcción de un modelo es más un arte o una habilidad que el analista debe desarrollar, pues no es un proceso mecánico. Implica hacer una abstracción de los elementos y condiciones relevantes de una realidad o sistema.

Gráficamente:



Las situaciones o sistemas involucrados en proyectos de investigación de operaciones contienen un gran número de elementos y condiciones; sin embargo, generalmente solo una reducida fracción de ellos explica el comportamiento del sistema y pueden considerarse, por tanto, relevantes. El modelo es una abstracción de la situación real que se obtiene al concentrarse en los elementos relevantes o dominantes.

d) Verificar y validar el modelo

Verificar consiste en revisar que el modelo contenga y se comporte tal como se espera. Validar consiste en determinar qué tan bien el modelo refleja la realidad que se estudia.

Una forma de validar el modelo es, por ejemplo, comparar los resultados que se obtienen del modelo con la información sobre el desempeño real del sistema en un periodo de tiempo pasado, cuando se alimenta al modelo con los datos de aquel periodo, con la finalidad de comprobar si los resultados reales y los calculados con el modelo son cercanos.

e) Seleccionar alternativas de solución

Al resolver el modelo utilizando la técnica más adecuada, se encuentra generalmente una solución óptima. Sin embargo, la solución óptima que se encuentra está, por lo general, sujeta a la valoración que de ella hagan los responsables del proceso de toma de decisiones, quienes, además, pueden requerir la incorporación de diversos factores o consideraciones que resultan de sus propias percepciones de la situación que se estudia.

f) Presentar resultados y evaluar recomendaciones

Consiste en la presentación de un informe administrativo que exprese, en el lenguaje propio del sistema o proceso o negocio, la solución que se recomienda como la mejor.

Los proyectos de investigación de operaciones tienen todos características comunes, entre las cuales se pueden mencionar:

- Requerir esfuerzo de modelado
- Estar relacionados a procesos de toma de decisiones
- Emplear mediciones cuantitativas
- Requerir soporte computacional

Para el éxito de un proyecto de investigación de operaciones es necesario:

- Datos adecuados, actuales, correctos y oportunos.
- Contar con el compromiso de gerencia que garantice el acceso a los datos, el contacto con los procesos y las personas y la posterior aplicación de la solución a la que se llegue.
- Adecuado soporte de *software* (evaluadores y "reporteadores").
- El empleo de un enfoque "evolucionario", es decir un enfoque que contemple la posibilidad de cambios en las condiciones del proceso de toma de decisiones. Esta es la razón que justifica el modelamiento estructurado al que nos referiremos posteriormente.

Capítulo

2

Programación lineal

En este capítulo se tratan los siguientes temas:

- Elementos de un modelo de programación lineal
- Propiedades de los modelos de programación lineal
- ¿Cómo identificar todos los elementos del modelo de programación lineal?

De todas las técnicas de la investigación de operaciones, una de las más difundidas es la programación lineal. Un modelo de programación lineal tiene varios componentes y debe cumplir con algunas condiciones o propiedades. En este capítulo se describen dichos componentes y propiedades; sin embargo, el aporte principal es una lista de preguntas sencillas que el estudiante puede hacerse a sí mismo durante el análisis de un caso para ayudarse en la identificación de los elementos del modelo de programación lineal respectivo.

¿Qué debe lograr el estudiante?

Identificar las variables de decisión, la función objetivo y las restricciones de un modelo de programación lineal, expresarlas matemáticamente y reconocer las propiedades que hacen que dichas expresiones sean lineales.

La programación lineal es una técnica de optimización para soporte a la toma de decisiones en las que debe optimizarse algún indicador o medida de resultado, cumpliendo con una serie de condiciones o restricciones. Tales restricciones obedecen a limitaciones de recursos productivos, condiciones de mercado, entre otras.

2.1 Elementos de un modelo de programación lineal

Un modelo de programación lineal tiene los siguientes elementos:

a) Variables de decisión

Representan la decisión que debe tomarse; es decir, los valores que espera el decisor en respuesta a su problema de decisión; conformarán la recomendación final del proyecto. En función de estas variables (incógnitas) se construyen las expresiones matemáticas que representarán el indicador o medida de resultado por optimizar y las restricciones respectivas.

b) Función objetivo

Expresa matemáticamente el indicador o medida de resultado que se desea optimizar. Por lo general representa utilidades, costos o desperdicios, o cualquier otra medida que se desea maximizar o minimizar, según corresponda a los objetivos de la empresa, organización o sistema. Es función de las variables de decisión.

c) Restricciones

Expresan matemáticamente la escasez de recursos o condiciones de mercado a las que debe sujetarse la solución. Limitan el valor de las variables de decisión y por tanto el valor de la función objetivo. Un modelo de programación lineal puede tener más de una restricción y todas ellas son funciones de las variables de decisión.

c) Parámetros

Son todas las características que describen la situación que se modela. Corresponden al conjunto de datos que se emplean para construir la función objetivo y las restricciones.

Estos pueden ser:

- Lados derechos de las restricciones.
- Coeficientes tecnológicos en las restricciones: son los coeficientes de las variables de decisión en las restricciones.
- Contribución a la función objetivo o "costos" en la función objetivo: son los coeficientes de las variables de decisión en la función objetivo y representan el aporte de cada variable al valor de la función objetivo.

2.2 Propiedades de los modelos de programación lineal

Tanto las funciones de restricción como la función objetivo son expresiones lineales y por tanto cumplen las siguientes propiedades:

a) Aditividad

Esta propiedad establece que la contribución de cada variable de decisión al valor de la función objetivo o al valor de las funciones de restricción es independiente de otras variables, dicha contribución se suma algebraicamente al aporte de esas otras variables.

Se explicará esta propiedad con los siguientes ejemplos:

- En el caso de que una función objetivo que represente ingresos por la venta de los productos que una empresa comercializa y las variables de decisión representen las cantidades a vender de dichos productos. Si esta propiedad se cumple, se debe verificar que el aporte a los ingresos (al valor de la función objetivo) se sume al ingreso que aportan los otros productos.

  Puede suceder que la función objetivo de un problema que representa los ingresos de una empresa que comercializa un producto dependa del número de vendedores que la empresa contrate (X), de la cantidad de productos que se le asignan a cada vendedor para vender (Y), así como de la ganancia unitaria que podría ser, por ejemplo, 3 soles por producto. Esa función objetivo sería:

  $$3 * X * Y$$

  donde X es el número de vendedores e Y es la cantidad que cada vendedor debe vender. Aquí se observa que el aporte a los ingresos de la variable X depende del valor de la variable Y. Entonces, no se cumple la propiedad de aditividad.

- En el caso de una restricción que representa el número de horas disponibles en un proceso manual, si esta propiedad se cumple, debe suceder que las horas requeridas por cada producto se van sumando para expresar el total de horas requeridas en dicho proceso manual.

b) Proporcionalidad

Establece que la contribución de cada variable de decisión al valor de la función objetivo o a las restricciones es proporcional al valor de la variable misma.

Se explicará esta propiedad con los siguientes ejemplos:

- En el caso de una función objetivo que represente ingresos por la venta de los productos que una empresa comercializa y las variables de decisión representen las cantidades por vender de dichos productos. Si esta propiedad se cumple, se debe verificar que en tanto la cantidad por vender de un producto (el valor de una variable de decisión) se reduce a la mitad, también se reduce a la mitad su contribución al valor de los ingresos (el valor de la función objetivo).
- En el caso de una restricción que representa el número de horas disponibles en un proceso manual; si esta propiedad se cumple, debe suceder que al duplicar el valor de la cantidad por procesar de dicho producto (variable de decisión), se duplica también la cantidad de horas requeridas por ese producto en dicho proceso (su uso del tiempo disponible).

  Puede suceder que, debido a economías de escala o a la curva de aprendizaje, al procesar mayor cantidad de unidades de producto el operario se vuelve más eficiente. En este caso, si procesa el triple de productos, no necesariamente utiliza el triple de horas de trabajo sino menos. De este modo, no se cumpliría esta propiedad.

c) Certidumbre

Establece que todos los parámetros del modelo deben ser determinísticos, es decir, conocidos. No debe existir incertidumbre respecto a su valor.

d) Divisibilidad

El valor que pueden tomar las variables de decisión corresponde a cualquier valor real. Cabe señalar que el caso en que las variables de decisión deban tomar únicamente valores enteros corresponde a la programación lineal entera, que es un caso particular de la programación lineal.

Únicamente el cumplimiento de las dos primeras propiedades asegura la linealidad del modelo.

2.3 ¿Cómo identificar todos los elementos del modelo de programación lineal?

Identificar todos los elementos del modelo de programación lineal para un caso es lo que se conoce como la formulación del modelo. ¿Cómo se formula un modelo de programación lineal? Se tomará un caso teórico sencillo para presentar la forma en que se recomienda hacerlo.

Ejemplo

Una empresa fabrica dos tipos de productos. El producto 1 se vende a \$ 27 y se utilizan \$ 10 en materia prima. Cada producto 1 que se fabrica aumenta los costos variables de mano de obra y los gastos generales en \$ 14. El producto 2 se vende a \$ 21 y se utilizan \$ 9 en materia prima, cada uno de estos productos fabricados aumenta los costos variables de mano de obra y los gastos generales en\$ 10. La elaboración de estos productos requiere trabajo en dos secciones de la planta de fabricación: sección A y sección B. Un producto 1 requiere de 2 horas en A y 1 hora en B; y un producto 2 requiere 1 hora en A y 1 hora en B.

Cada semana se puede conseguir toda la materia prima que se requiera, pero solo se dispone de 100 horas en A y 80 horas en B. La demanda de productos 1 es ilimitada pero se vende un máximo de 20 productos 2 semanalmente.

a) Formulación

- **Variables de decisión:** ¿qué es lo que esta empresa debe decidir? ¿Cuáles son las "incógnitas" del problema? Las variables de decisión están relacionadas con la actividad que realiza la empresa, proceso o sistema: en este caso la fabricación de dos productos.

  Debemos hacernos la pregunta: ¿qué decisión debe tomar esta empresa sobre la fabricación de sus productos? ¿Qué desconoce la empresa en relación con la fabricación de sus productos?

  Debe decidir la cantidad por producir de cada uno de sus dos productos
- **Función objetivo:** ¿qué es lo que persigue la empresa como fin último dependiente de la decisión que va a tomar? ¿Qué resultado o indicador tiene que alcanzar su mejor valor al tomar la decisión?

  También podemos preguntarnos: ¿si la empresa tuviera varias alternativas de decisión, cómo elegiría la mejor?: **Ganancias**.

  ¿Qué quiere lograr con las ganancias?: **Maximizarlas**.
- **Restricciones:** ¿qué limitaciones enfrenta? ¿Qué condiciones debe cumplir la decisión que tome la empresa?
  - Puede tener limitación en la materia prima disponible para producir.
  - Puede tener limitación en las horas de trabajo disponibles.
  - Puede tener que cumplir alguna condición respecto de la demanda del mercado para sus productos.

Toda la información que se necesita para identificar estos elementos se encuentra en el texto que describe el problema; por ello, es necesario hacer una lectura atenta y cuidadosa.

Una vez que se han identificado los elementos del modelo deben expresarse matemáticamente.

b) Expresando matemáticamente los elementos del modelo

"Operacionalizando" las variables de decisión:

Cantidad por producir de cada producto: X_1, X_2

Enunciando el objetivo:

La función que representa el objetivo expresa ganancias por el total de los productos fabricados. Es una función por maximizar:

$$\text{Maximizar } f(X_1, X_2) = 3X_1+2X_2$$

Restricciones:

Horas usadas en la sección A ≤ horas disponibles en la sección A

$2X_1+X_2 \leq 100$ **(disp. de horas en sección A)**

Horas usadas en la sección B ≤ horas disponibles en la sección B

$X_1+X_2 \leq 80$ **(disp. de horas en sección B)**

La cantidad de producto 2 por fabricar ≤ demanda del producto 2

$X_2 \leq 20$ **(demanda máxima de prod. 2)**

Las cifras que correspondan a las cantidades de producto por fabricar deben ser números positivos, los negativos no tienen sentido:

$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$ **(condiciones de signo o de no negatividad)**

Este es un modelo matemático, pues traduce la situación que la empresa enfrenta y abstrae lo más importante de esa situación. Es un modelo que da soporte a la toma de decisiones de esta empresa; es decir, sirve para determinar *qué debe hacer la empresa*.

Para la formulación del modelo lo más importante es definir correctamente las variables de decisión, ya que se emplean en la construcción de las restricciones y la función objetivo.

Para tener en cuenta:

Primero se debe identificar correctamente la decisión y con ello las variables de decisión. Se puede empezar haciendo unas preguntas:

Pregunta 1: ¿quién se encuentra en este problema, sin saber qué hacer? (quién es el decisor).

Pregunta 2: ¿qué es lo que no sabe, lo que quiere determinar, hallar, establecer, decidir? (estas últimas palabras pueden aparecer en el texto y generalmente se les menciona para tratar de orientar en la definición de las variables de decisión).

¡Pensar en algo que tenga relación con las actividades a las que esta empresa o persona se dedica y que sea desconocido para ella!

Luego, se “operacionaliza” la decisión; es decir, se definen las incógnitas.

Para estar más seguro de que se han definido correctamente las variables de decisión se debe revisar si en el texto del caso no hay ningún dato que responda a la pregunta; es decir, ¿no hay algún dato que resuelva lo que se considera que es desconocido? Si no lo hay, entonces la definición es correcta.

Debe recordarse que:

Las variables de decisión son **independientes** de los datos que se proporcionan en la descripción del problema.

Es en función de las variables de decisión que se construye la función objetivo y las restricciones, lo que hace importante tener en cuenta las unidades dimensionales (kilogramos, litros, soles, etc.) en que se expresen dichas variables.

Una vez definidas las variables de decisión se debe revisar nuevamente el texto de la descripción del problema para identificar y construir las restricciones y la función objetivo.

Capítulo

3

Solución gráfica de un modelo de programación lineal

En este capítulo se tratan los siguientes temas:

- Solución gráfica
- Casos especiales
- Ejercicios: solución gráfica
- Solución computacional utilizando Lingo

El capítulo presenta el procedimiento de solución gráfica. Si bien es cierto que este procedimiento tiene un uso limitado a pequeños modelos de dos o tres variables, es importante debido a los conceptos que permite ilustrar. Es con el método gráfico que se comprende la idea de *solución, solución factible, solución no factible, solución óptima, restricción activa, holgura y exceso*; conceptos que se explican en este capítulo y que son útiles para la interpretación de la solución que se obtiene a partir del *software* Lingo. También se ha empleado el método gráfico para caracterizar los casos especiales que pueden encontrarse al resolver un modelo de programación lineal. El capítulo incluye, además, una serie de ejercicios resueltos.

¿Qué debe lograr el estudiante?

- Aplicar el método gráfico para resolver un modelo de programación lineal en dos variables y elaborar un informe administrativo de la solución.
- Identificar y explicar gráficamente los casos especiales de la solución de un modelo de programación lineal.

3.1 Solución gráfica

En el caso de modelos de programación lineal con dos o tres variables de decisión, se puede obtener la solución gráficamente. La solución gráfica de un modelo con dos variables es sencilla y útil para ilustrar y comprender algunos conceptos importantes, así como el procedimiento en los que se basa el algoritmo de solución para la programación lineal.

La aplicación del método de solución gráfico en la realidad es sumamente limitada, pues los modelos reales suelen tener más de dos o tres variables de decisión.

Procedimiento

En términos generales, el procedimiento consiste en seleccionar entre todas las alternativas de solución posibles o factibles, aquella que maximice (o minimice) el valor de la función objetivo. Debe tenerse en cuenta que:

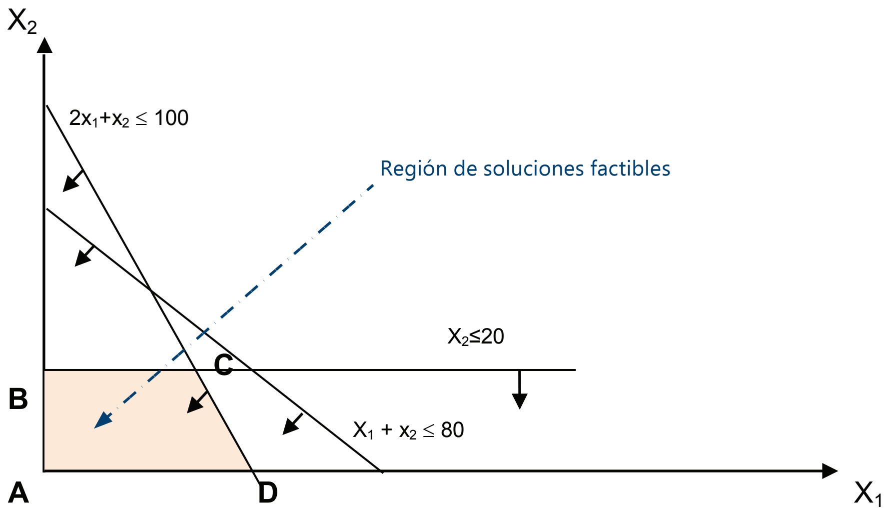
- **Una solución** es cualquier combinación de valores de las variables de decisión.
- Una **solución posible o factible** es cualquier combinación de valores para las variables de decisión, que satisface todas las condiciones del problema al mismo tiempo.
- Una **solución óptima** es entre las soluciones factibles aquella que proporciona el mejor valor (valor óptimo) para la función objetivo.

El procedimiento para hallar la solución óptima gráficamente comprende los siguientes pasos:

Paso 1. Hallar todas las soluciones factibles

Las alternativas de solución factibles son aquellas que satisfacen **todas** las restricciones o condiciones del modelo **al mismo tiempo**. Gráficamente todas ellas conforman una región definida por la intersección de todos los semiplanos que corresponden a las restricciones, un área a la que se llama **región de soluciones factibles (o conjunto de posibilidades)**.

Dadas las condiciones de signo del modelo del ejemplo, los valores factibles son positivos únicamente, es por ello que se empleará solo el segundo cuadrante del plano que representa las todas las combinaciones de valores de X_1 y X_2



Identificar el semiplano que corresponde a cada restricción depende del tipo inecuación y es necesario:

- Dibujar la recta respectiva: recordar que para dibujar una recta basta definir dos puntos. Estos dos puntos pueden ser las intersecciones con los ejes, los cuales se pueden obtener haciendo cero el valor de una variable y despejando el valor de la otra.
- Analizar un semiplano cualquiera: una vez trazada la recta, debe ubicarse un punto cualquiera y evaluar sus coordenadas en la restricción. Es posible que el resultado sea "verdad"; es decir, que el punto satisfaga la inecuación, entonces el punto seleccionado pertenece al semiplano que representa la desigualdad, por ejemplo:

  Con la restricción: $2X_1+X_2 \leq 100$

  Si se toma el **punto (0,0)**, que es el más sencillo de identificar, y se evalúa en la restricción:

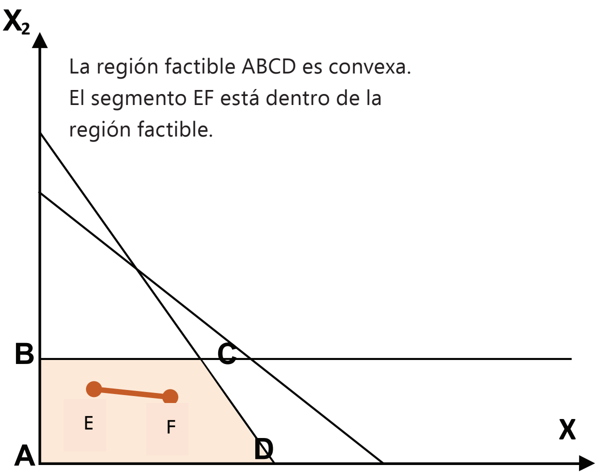
  $2(0)+(0) \leq 100$, se obtiene $0 \leq 100$ lo cual es una "verdad". Por lo tanto, el origen (0,0) pertenece al semiplano que corresponde a la restricción.

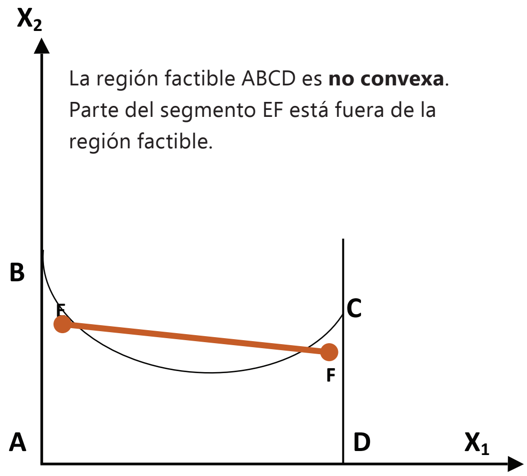
Si la restricción pasa por el origen, para dibujar la recta es necesario obtener solo un punto adicional al origen. Para ello, se le da a una de las variables cualquier valor diferente de cero y se despeja el valor de la otra variable. Luego de dibujar la recta, el procedimiento para identificar el semiplano respectivo es el mismo.

Si la restricción es una ecuación y no una inecuación, la recta debe intersectarse con la región que hayan ido delimitando otras restricciones y debe tenerse en cuenta que la intersección de una recta y un área es la recta.

En el ejemplo, la región de soluciones factibles la conforman los puntos que pertenecen al polígono ABCD (su frontera y los puntos interiores), pues todos ellos satisfacen todas las restricciones del modelo al mismo tiempo, al ubicarse en la intersección de todas ellas. En la programación lineal, esta región conforma un conjunto convexo.

¿Cómo es una región factible convexa o conjunto convexo de soluciones? Es un área en la que, al trazar un segmento de recta que une cualquier par de puntos que se ubican en el interior de dicha región, el segmento que los une queda contenido dentro de la región factible. Gráficamente:

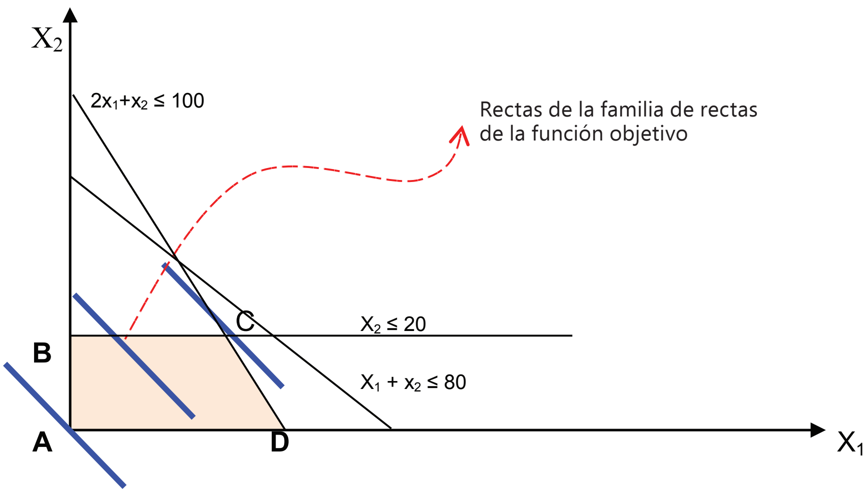




De todos estos puntos pertenecientes a la región factible son más importantes los vértices o extremos del polígono, pues la solución óptima se encontrará siempre en alguno de ellos. **Las soluciones en los vértices se llaman soluciones básicas factibles.**

Paso 2. Entre las soluciones factibles, ubicar la mejor solución

Para ello debe trazarse una recta cualquiera de la familia de rectas de la función objetivo (en el gráfico, la línea azul).



Como se busca optimizar el valor de la función objetivo, debe identificarse el sentido en el que, desplazando la recta trazada, se consigue un valor mejor para la función objetivo.

En el ejemplo, esto ocurre hacia la derecha, pues se desea que el valor de la función objetivo crezca (se maximice). La solución básica factible (vértice de la región factible) que la función objetivo encuentra más a la derecha se ubica en el punto C, esta será la solución óptima.

En otros modelos, la dirección hacia la cual el valor de la función objetivo se optimice puede ser hacia la izquierda. Eso dependerá de la inclinación (pendiente) de la función objetivo y si se desea maximizar o minimizar su valor.

Como se ha observado, la solución óptima estará siempre en un vértice; por ello, **las soluciones factibles más importantes son las que se ubican en los vértices y se llaman soluciones básicas factibles**.

Las restricciones que conforman el vértice óptimo son importantes y se les llama **restricciones activas**: restricciones que representan una limitación a la hora de buscar el óptimo. Estas restricciones podrían corresponder, por ejemplo, a recursos que se agotan totalmente e impiden que el valor de la función objetivo pueda ser aún mejor. Estas restricciones son importantes por dos razones:

- Porque representan las condiciones que explican la razón por la cual el valor alcanzado para la función objetivo ya no puede ser mejor.
- Porque si quien toma la decisión desea mejorar el valor de la función objetivo, sabe qué condiciones de su problema debe mejorar.

Gráficamente se reconocen estas restricciones fácilmente porque corresponden a las restricciones que forman el vértice óptimo, pero en general pueden identificarse por medio de los conceptos que se explican enseguida:

- *Holgura*

  En una restricción "≤" es posible que, al evaluar en ella los valores óptimos de las variables de decisión, se verifique que el valor de lado izquierdo sea **menor** que el del lado derecho de la restricción, esta diferencia se llama **holgura**. Por ejemplo, si la restricción representa la disponibilidad de un recurso, la holgura vendría a ser un sobrante de dicho recurso; es decir, la solución óptima no requiere de **toda** la disponibilidad.

  Se dice que para cada restricción "≤" existe una variable de **holgura**.

- *Exceso*

  En una restricción "≥" es posible que, al evaluar en ella los valores óptimos de las variables de decisión, se verifique que el valor de lado izquierdo sea **mayor** que el del lado derecho de la restricción; a la diferencia entre estos dos valores se le llama **exceso**. Por ejemplo, si una restricción representa la mínima cantidad de un recurso que debe ser utilizada. El exceso vendría a ser la cantidad en la que el consumo ha sobrepasado el mínimo exigido; es decir, la solución óptima emplea una cantidad de recurso por encima del mínimo exigido.

  Se dice que para cada restricción "≥" existe una variable de exceso.

Si el valor de las variables de holgura o de exceso (según corresponda) es cero, la restricción respectiva es activa.

Por ello, es importante analizar las **holguras** o **excesos,** pues puede contribuir a explicar qué restricciones son las que limitan los valores óptimos de la función objetivo y con ello establecer qué acciones podría tomar quien desea lograr una solución todavía mejor.

3.2 Casos especiales

Al resolver un PL puede encontrarse los siguientes casos especiales:

a) Soluciones múltiples

b) Solución no acotada

c) Solución no factible

d) Solución degradada

Para ilustrar gráficamente cada uno de estos casos, se utilizará un modelo con dos variables de decisión.

Para el caso de soluciones múltiples

Maximizar $f = 2X_1+4X_2$
s.a.

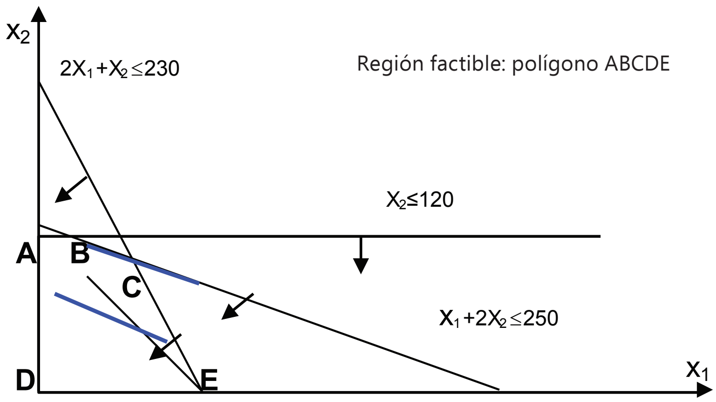
$2X_1+X_2 \leq 230$

$X_1+2X_2 \leq 250$

$X_2 \leq 120$

X_1, X_2 positivas

La recta de la familia de rectas de la función objetivo que maximiza su valor coincide con un segmento de la región factible (BC)



En este caso, existe más de una combinación de valores de las variables de decisión que proporcionan el mismo valor (el mejor) para la función objetivo. La empresa que se encuentra resolviendo el problema tiene más de una opción entre las cuales elegir la que llevará a la práctica.

Para el caso de solución no acotada

Maximizar $f = 3X_1+5X_2$
s.a.

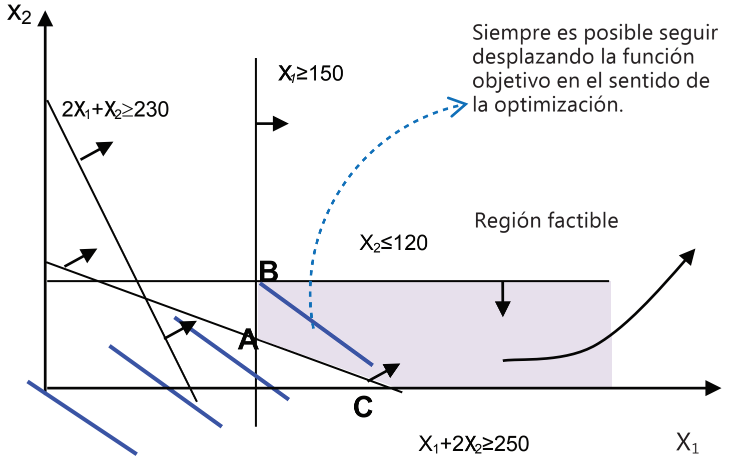
$2X_1+X_2 \leq 230$

$X_1+2X_2 \leq 250$

$X_2 \leq 120$

$X_2 \leq 150$

X_1, X_2 positivas



En este caso, es posible desplazar (mejorar) infinitamente el valor de la función objetivo, lo cual es, en la vida práctica, imposible. Puede afirmarse que falta incluir alguna restricción que no se ha tenido en cuenta.

Nótese que no siempre una región factible no totalmente acotada (delimitada) lleva a una solución no acotada, pues es necesario que en dicha región la función objetivo pueda mejorar infinitamente. En el mismo ejemplo, si se hubiera buscado minimizar la función objetivo la solución óptima se encontraría en el vértice A.

Para el caso de una solución infactible

Maximizar $f = 3X_1+5X_2$
s.a.

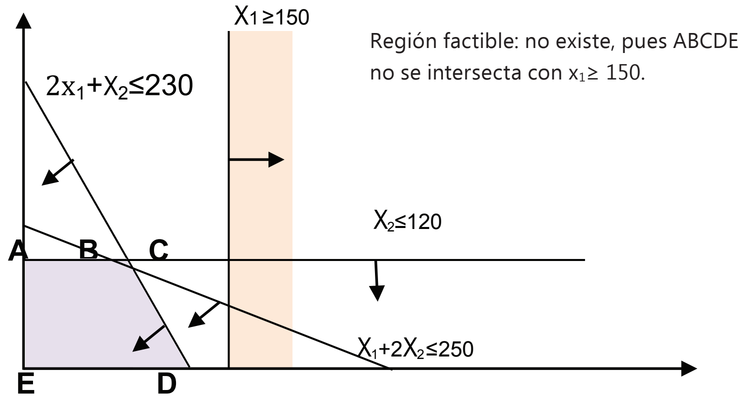
$2X_1+X_2 \leq 230$

$X_1+2X_2 \leq 250$

$X_2 \leq 120$

$X_2 \leq 150$

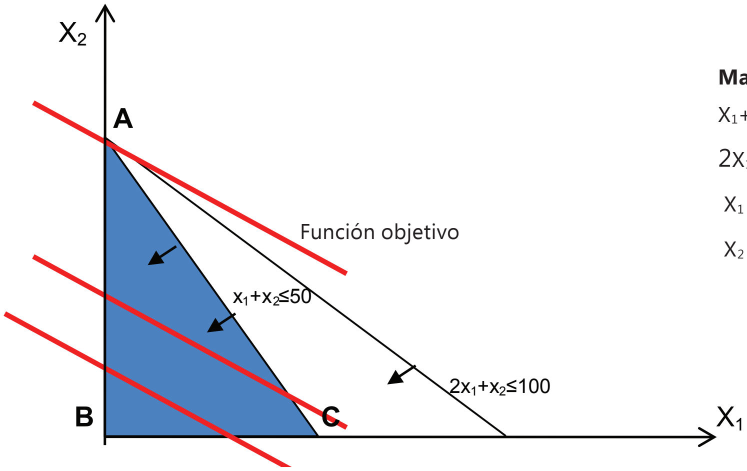
X_1, X_2 positivas



En este caso, el modelo considera condiciones incompatibles entre sí y es necesario revisar las restricciones.

Para el caso con solución degradada

Ocurre cuando el vértice óptimo está conformado por la intersección de más de dos restricciones. En el ejemplo, las dos primeras restricciones y la de no negatividad $X_2 \geq 0$ conforman el vértice óptimo que se encuentra en el punto A.



Maximizar $5X_1+3X_2$

$X_1+X_2 \leq 50$

$2X_1+X_2 \leq 50$

$X_1 \geq 0$

$X_2 \geq 0$

El vértice óptimo está **sobredeterminado**, ya que haría falta solo dos restricciones para definirlo, eso señala que en ese vértice una **restricción es redundante**: $2X_1+X_2\leq 100$. Nótese que si esta restricción se retirara del modelo, la región factible no se modificaría así como tampoco el vértice óptimo.

En realidad, este no es un caso especial, en cuanto no reporta ninguna inconsistencia o error en el modelo como ocurre en el caso de las soluciones no acotadas o no factibles; y tampoco tiene una interpretación especial como en el caso de las soluciones múltiples en el que el tomador de decisiones se encuentra ante la posibilidad de decidir entre varias opciones de solución igualmente óptimas.

3.3 Ejercicios: solución gráfica

Enseguida se presentan algunos modelos y su solución gráfica, los cuales pueden ser utilizados para practicar el procedimiento y contrastar la solución hallada con la que se muestra.

Ejemplo 1

La florería Rosamiel confecciona y distribuye arreglos florales en una clínica materna de la ciudad de Lima. Sus arreglos más pedidos se elaboran con ocasión del nacimiento de un bebé, y se denominan Girl's y Boy's. Un arreglo floral incluye principalmente gerberas, claveles, rosas blancas y un globo, según el detalle siguiente:

	Requerimiento (unidades/arreglo)				
Tipo de arreglo	**Gerberas**	**Claveles**	**Rosas blancas**	**Globo celeste**	**Globo rosado**
Girl's	5	4	6	0	1
Boy's	5	5	4	1	0

Para mantener sus estándares de calidad, Rosamiel elabora sus arreglos con flores recibidas en el día. Su proveedor principal puede suministrar diariamente 800 gerberas, 700 claveles, 900 rosas blancas, mientras que no hay limitación en el suministro de los globos.

La cantidad de arreglos Girl's que se venderán debe ser al menos la misma cantidad de arreglos Boy's. Los precios de venta de cada arreglo floral Girl's y Boy's son de S/ 60 y S/ 50, respectivamente.

a) Defina las variables de decisión del modelo y formule el modelo de programación lineal que permita optimizar las operaciones de la florería Rosamiel.

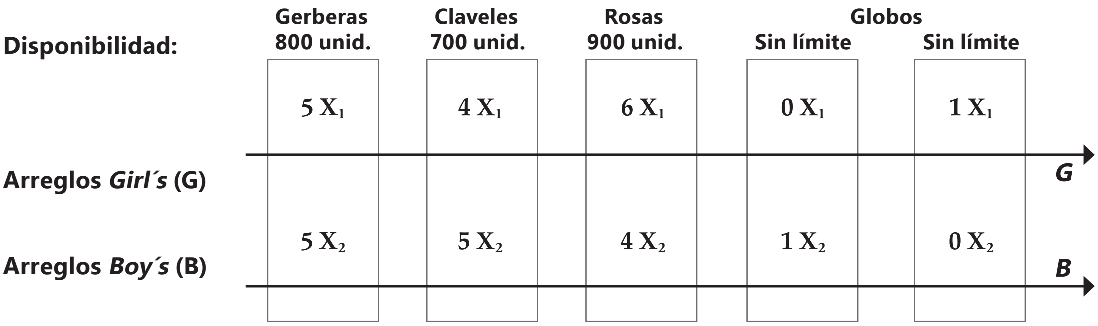
Para definir las variables de decisión es de utilidad preguntarse: ¿qué es lo que Rosamiel debe decidir? ¿Qué desconoce Rosamiel acerca de su actividad principal?

El texto dice que Rosamiel se dedica a confeccionar y distribuir arreglos florales en una clínica. Entonces, ¿qué **desconoce** acerca de la confección y distribución de arreglos florales? La respuesta es **la cantidad de arreglos de cada tipo de debe elaborar y distribuir.**

Dado que confecciona dos tipos de arreglos florales, entonces será necesario definir dos variables de decisión:

G : número de arreglos florales *Girl's* por confeccionar.

B : número de arreglos florales *Boy's* por confeccionar.



Rosamiel no puede elaborar una cantidad ilimitada de arreglos porque tiene restricciones, como se observa en el gráfico anterior.

Los arreglos se elaboran utilizando una cierta cantidad de diferentes flores. Las cantidades disponibles de estas flores limitan la cantidad de arreglos que pueden elaborarse, por lo tanto cada una de las cantidades disponibles de las diferentes flores son una restricción.

Restricción por las gerberas disponibles:

$$5G+5B \leq 800$$ Es la cantidad disponible de gerberas.

Esta expresión representa las gerberas que se emplearán para hacer los arreglos *Girl´s*, (G) y los arreglos *Boy´s* (B).

La restricción expresa matemáticamente que las gerberas que se usen para hacer todos los arreglos no pueden ser más que las que se tienen disponibles. La misma lógica tienen las restricciones siguientes por la disponibilidad de claveles y rosas blancas.

Restricción por los claveles disponibles:

$$4G+5B \leq 700$$

Restricción por las rosas blancas disponibles:

$$6G+4B \leq 900$$

Además, Rosamiel considera que debe haber una relación entre las cantidades de arreglos de cada tipo, como puede leerse en el texto del ejercicio: "La cantidad de arreglos *Girl's* que se venderán debe ser al menos la misma cantidad de arreglos *Boy's* que se venderán". Esta condición se expresa:

$$G \geq B$$

Las cantidades de arreglos por producir deben ser cantidades positivas; por ello, se agregan las condiciones de no negatividad:

$$G, B \geq 0$$

En cuanto a la función objetivo, teniendo en cuenta la información dada en el caso, se considera que para Rosamiel la mejor solución es aquella en la que los ingresos sean los mayores posibles. Por ello, la función objetivo (Z) será la función de **ingresos**:

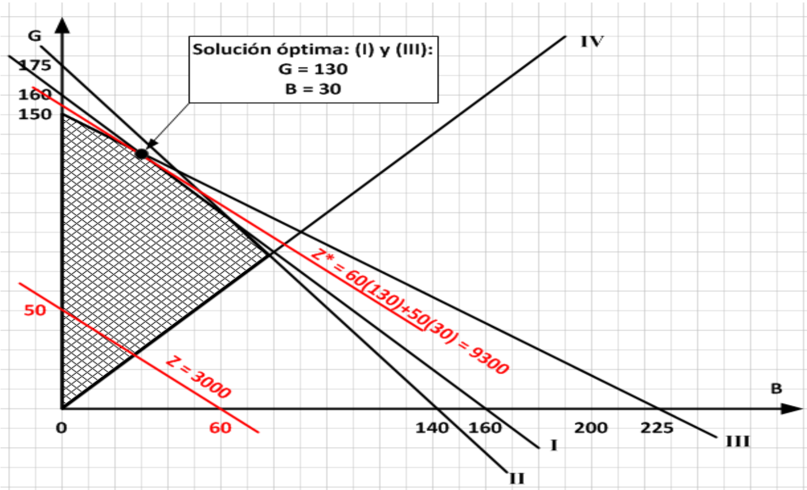
$$Z = 60G+50B$$

La mejor solución será aquella en la que esta función tome su máximo valor.

El modelo de programación lineal será:

Maximizar $Z = 60G+50B$	
Restricciones:	
$5G + 5B \leq 800$	(I): Límite de gerberas
$4G + 5B \leq 700$	(II): Límite de claveles
$6G + 4B \leq 900$	(III): Límite de rosas blancas
$G \geq B$	(IV): Relación entre la cantidad de arreglos *Girl's* y *Boy*'s
$G, B \geq 0$	(Restricciones de signo)

b) Utilizando el método gráfico, determine la región factible, el valor de la solución óptima, el valor óptimo de la función objetivo y señálelos en el gráfico (se sugiere el uso de una cuadrícula por cada 10 unidades) y presente el informe de la solución.



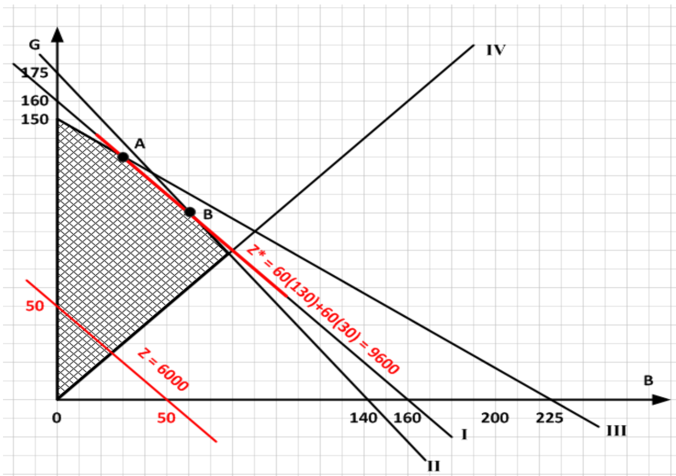
Informe de la solución

Rosamiel deberá elaborar 130 arreglos *Girl´s* y 30 arreglos Boy´s, con lo cual alcanzará un valor máximo de ingresos de $ 9300.

Tomando como base el gráfico elaborado, puede analizarse el efecto de algunos cambios en las condicones del caso.

c) A partir del modelo original, suponga que el precio de venta de cada arreglo *Boy's* sube a S/ 60, ¿cuál sería la solución óptima y el nuevo valor óptimo?, ¿la solución corresponde a un caso especial? Justifique sus respuestas.

La función objetivo sería: Z = 60G+60B. Graficando la nueva función objetivo, se observa que la solución óptima puede ser cualquier punto que pertenezca al segmento de recta AB. El valor óptimo sería: $ 9600. El modelo posee múltiples soluciones óptimas.

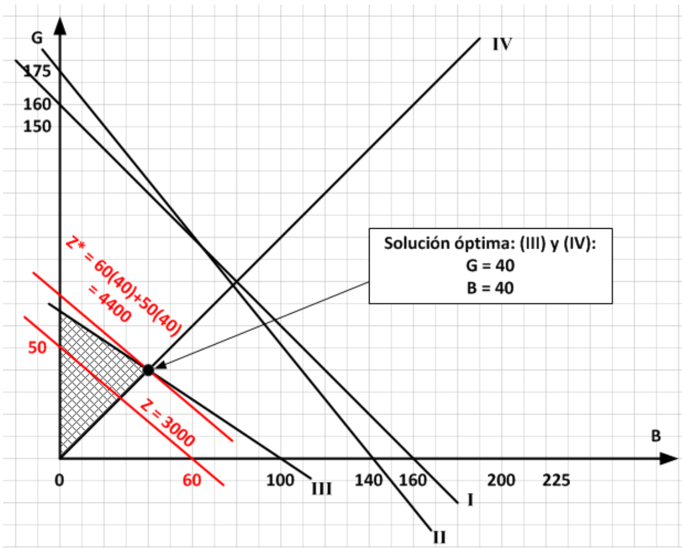


d) A partir del modelo original, indique qué sucedería con la región factible y el valor óptimo si el proveedor informa a Rosamiel que debido a una escasez de rosas blancas puede abastecer únicamente 400 rosas diarias. Justifique su respuesta.

El término independiente de la restricción (III) disminuye a 400.

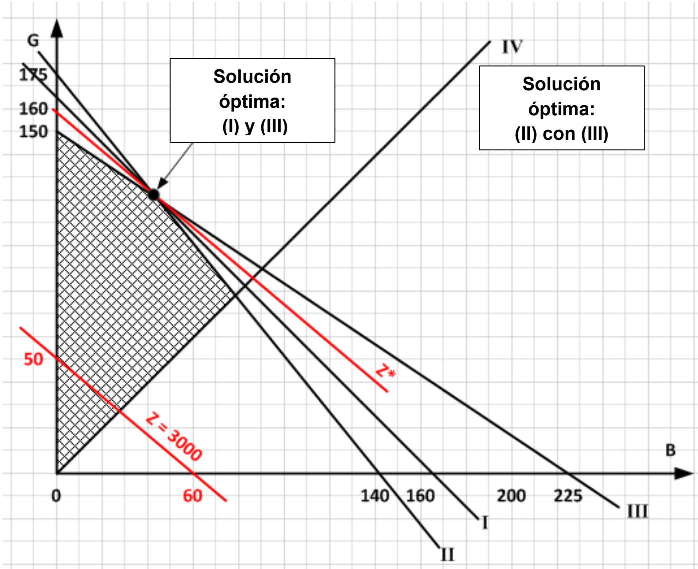
$$6G+4B \leq 400$$

La región factible se contrae, siendo la nueva solución óptima la que se muestra en el gráfico:



e) A partir del modelo original, suponga que el proveedor indica a Rosamiel que puede suministrar diariamente mayor cantidad de gerberas. ¿Le conviene a Rosamiel pedir más gerberas? Justifique su respuesta. Si la respuesta es afirmativa, señale en su gráfico cuál sería la combinación de arreglos *Girl's* y *Boy's* que maximizará el ingreso total lo más que se pueda debido al aumento de la disponibilidad de gerberas. No se pide calcular la nueva solución.

Sí le conviene, porque al ser la restricción (I) una restricción activa, un aumento en el lado derecho de dicha restricción haría que la región factible crezca hacia arriba, desplazándose también hacia arriba la gráfica de la función objetivo hasta la intersección de (II) con (III). La nueva solución óptima sería la intersección entre las rectas (II) y (III):



Ejemplo 2

Juanito está candidateando para las próximas elecciones presidenciales. Él sabe que por cada mitin que haga en Lima atrae a 2000 ciudadanos y por cada mitin que haga en provincias atrae a 3000 ciudadanos.

El jefe de campaña ha establecido que Juanito no puede hacer más de 10 mítines en total y que por lo menos debe hacer 4 mítines en Lima. Se sabe que por cada mitin en Lima se requieren 7 buses para transportar "a su comitiva" y por cada mitin en provincias se requieren 3 buses para transportar "a su comitiva"; debiendo contratar por lo menos 42 buses en total.

Finalmente, el número de mítines que Juanito haga en Lima no debe exceder al cuádruple del número de mítines que haga en provincias.

a) Defina las variables de decisión y formule en el presente espacio el modelo de programación lineal correspondiente.

Variables de decisión

L, P : Número de mítines realizados en Lima y provincias, respectivamente.

Restricciones:

$L + P \leq 10$	(total de mítines que puede hacer Juanito)
$7L + 3P \geq 42$	(cantidad mínima de buses que debe contratar)
$L \geq 4$	(cantidad mínima de mítines que debe hacer en Lima)
$L \leq 4P$	(los mítines en Lima no deben exceder al cuádruple de los mítines en provincias)
$L, P \geq 0$	(condiciones de no negatividad)

La función objetivo

Para Juanito la mejor solución es la que le permita atraer a la mayor cantidad de ciudadanos, puesto que es un candidato presidencial. La cantidad de ciudadanos que atrae se expresa mediante la siguiente función:

$$Z = 2000L + 3000P$$

Y lo que se busca es que esta función tome su máximo valor:

$$\text{Maximizar } Z = 2000L + 3000P$$

El modelo completo

$$\text{Maximizar } Z = 2000L + 3000P$$

Restricciones:

$$L + P \leq 10$$

$$7L + 3P \geq 42$$

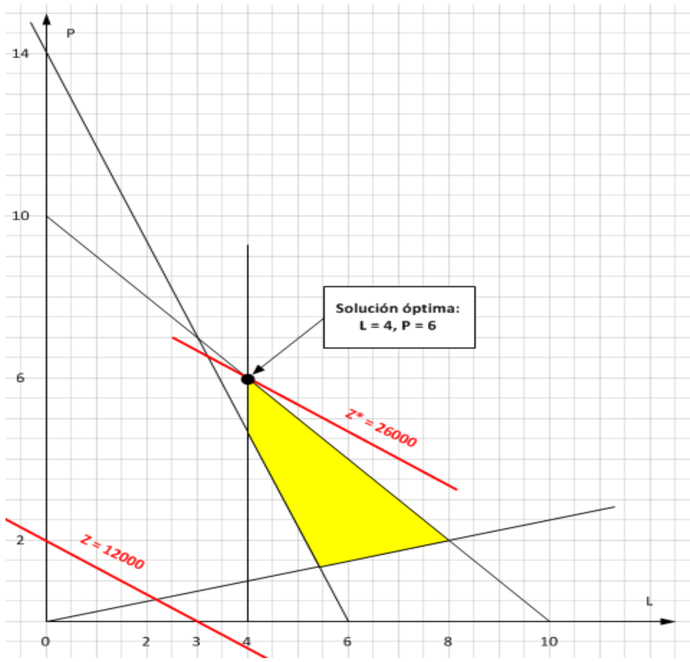
$$L \geq 4$$

$$L \leq 4P$$

$$L, P \geq 0$$

En vez de escribir la palabra restricciones, pueden emplearse las iniciales "s.a.", que significan "sujeto a", para indicar que la solución debe "sujetarse" (cumplir) con las condiciones que enseguida se presenten.

b) Utilizando únicamente el método gráfico, determine la región factible, la solución óptima y el valor óptimo de la función objetivo, indicándolos claramente en el gráfico, y presente el informe de la solución.



Informe de la solución

El candidato deberá hacer 4 mítines en Lima y 6 en provincias, con lo cual la cantidad máxima de ciudadanos que podrá atraer será de 26 000 personas.

Una pregunta de análisis a partir de la solución gráfica

c) Suponga que el jefe de campaña de Juanito ha recapacitado y decide eliminar la restricción de la cantidad de mítines a realizar en Lima. ¿Esto le conviene o no a Juanito? Sustente su respuesta empleando el gráfico que hizo en la pregunta anterior y explicando brevemente por qué le conviene o por qué no.

Sí le conviene, porque la región factible crece hacia arriba, obligando a desplazar la gráfica del Z^* hacia arriba también, mejorando así su valor. La nueva solución óptima sería el punto: $L = 3$, $P = 7$

Ejemplo 3

Una empresa fabrica a partir de una fruta dos tipos de producto: extracto para beber y extracto concentrado. Los requerimientos para elaborar un hectolitro de cada producto se muestran en la siguiente tabla:

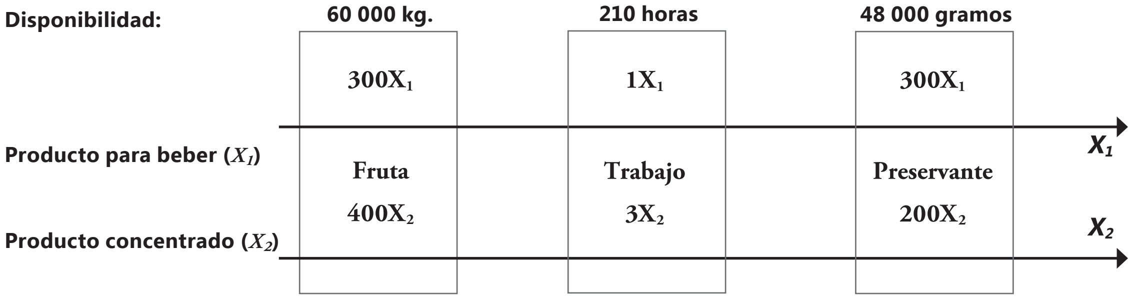
Producto	Fruta (kg/hectolitro)	Tiempo de trabajo (horas/hectolitro)	Preservante (gramos/hectolitro)	Costo de producción ($/hectolitro)
Para beber	300	1	300	100
Concentrado	400	3	200	200

A los extractos se les añade un preservante del cual se tiene 48 kg disponibles. Se cuenta solo con 60 toneladas de fruta y se debe trabajar por lo menos 210 horas.

Se sabe que la producción de extracto concentrado debe ser a lo más el doble de la producción de extracto para beber.

a) Identifique las variables de decisión

Lo que se decide es la cantidad de producto por fabricar de cada tipo, ya está determinada la cantidad de cada ingrediente que el producto requiere.



X_i : hectolitros por producir del producto i (i = 1: para beber, 2: concentrado).

En este caso se está empleando una notación "resumida", "compacta" para definir las dos variables de decisión:

X_1 : hectolitros por producir del producto para beber.

X_2 : hectolitros por producir del producto concentrado.

Son dos variables diferentes aunque se emplee la misma letra, el índice "i" es diferente.

b) Formule el modelo de programación lineal respectivo

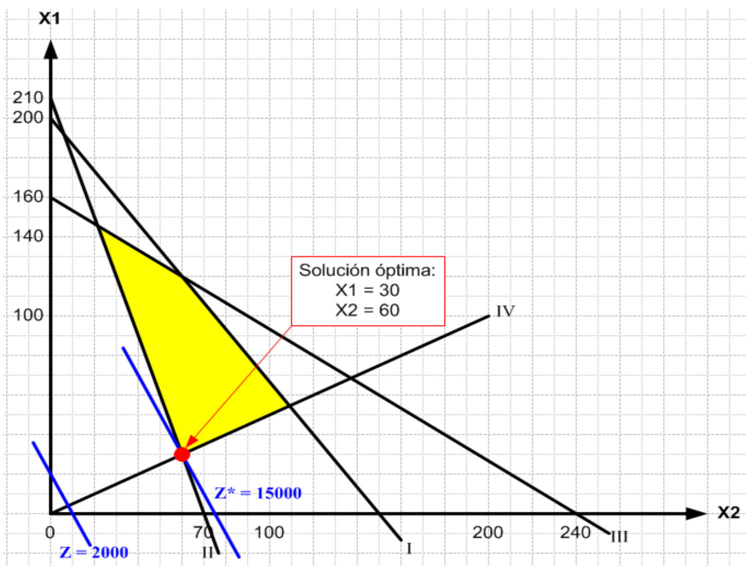
En este caso la función objetivo expresa el costo total de producción y por tanto la solución óptima en la que determina su mínimo valor.

Maximizar $Z = 100X_1+200X_2$
s.a.:

$300X_1+400X_2 \leq 60\ 000$	(I):	(toneladas de fruta disponibles)
$X_1+3X_2 \geq 210$	(II):	(cantidad mínima de horas que se debe trabajar)
$300X_1+200X_2 \leq 48\ 000$	(III):	(48 kg de preservantes disponibles)
$X_2 \leq 2X_1$	(IV):	(la producción de extracto concentrado debe ser a lo más el doble de la producción de extracto para beber).
$X_1, X_2 \geq 0$		

c) Utilizando el método gráfico

Encuentre la región factible y la solución óptima. Además, señálelas y proporcione el valor óptimo de las variables de decisión y de la función objetivo y presente el informe de la solución.



Informe de la solución

La empresa deberá fabricar 30 hectolitros del producto para beber y 60 del producto concentrado, con lo que sus mínimos costos totales serán USD 15 000.

ALGUNAS PREGUNTAS DE ANÁLISIS A PARTIR DE LA SOLUCIÓN GRÁFICA

d) Explique qué restricciones convendría revisar con la empresa a fin de mejorar el valor óptimo hallado para la función objetivo.

La restricción IV y la restricción II, porque son las restricciones activas del modelo.

e) ¿Cuánto debería ser el mínimo costo de producción del extracto para beber de tal manera que hubiese planes de producción alternativos al plan óptimo que halló en (c)?

Sea C el costo de producción del extracto para beber. Entonces la función objetivo quedaría así: $Z = CX_1 + 200X_2$

Despejando X_1 para obtener la pendiente: $X_1 = Z/C - (200/C)X_2$. La pendiente resultante es: -(200/C)

Despejando X_1 en la recta II (restricción activa): $X_1 = 210 - 3X_2$. La pendiente resultante es: -3

Para que haya múltiples soluciones, las pendientes deben ser iguales:

$$-(200/C) = -3$$

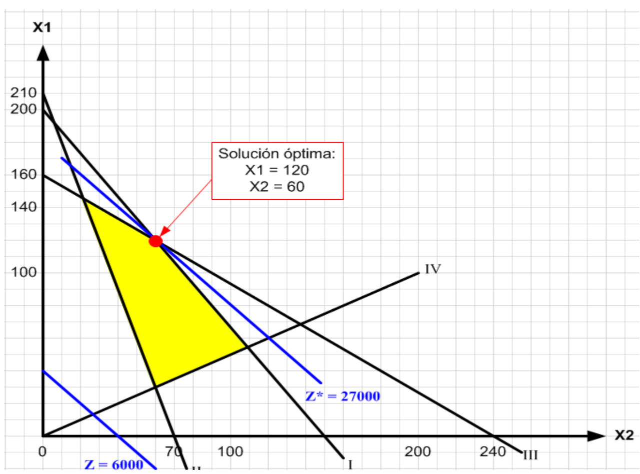
Resolviendo la ecuación, se obtiene: 66,67 $/hectolitro.

f) Respecto al modelo original, ahora suponga que los precios de venta del extracto para beber y del concentrado son 250 $/hectolitro y 350 $/hectolitro, respectivamente. El jefe de producción afirma que el plan óptimo de producción no sufrirá variación alguna, ¿es eso cierto? Justifique empleando su gráfico.

El modelo de programación lineal ahora busca maximizar la utilidad total:

$$\text{Max } Z = (250-100)X_1 + (350-200)X_2 = 150X_1 + 150X_2$$

Según se muestra en el gráfico, el plan de producción sí se ve afectado.

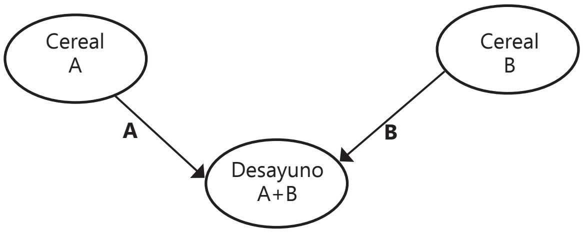


Ejemplo 4

Un alumno acude al médico y este le informa que su bajo rendimiento académico se debe a un déficit de tiamina y niacina. Por ello, le prescribe un mínimo de 1 mg y 10 mg diarios de cada una, respectivamente. También le sugiere que obtenga la dosis completa mediante un desayuno basado en cereales. El alumno, que no cuenta con muchos recursos económicos, trata de hacer mínimo el costo de las vitaminas y toma información de los dos únicos cereales que le gustan, A y B. Los contenidos y costos de los dos cereales son los siguientes:

Cereal	**Tiamina (mg/onza)**	**Niacina (mg/onza)**	**Costo ($/onza)**
A	0,10	0,50	1,00
B	0,10	2,00	2,00

El alumno quiere encontrar la mezcla que debe hacer todas las mañanas para que asegure la dosis prescrita al mínimo costo posible. Según los datos, definir las variables de decisión, formular el modelo de programación lineal. Luego, resolver el modelo y presentar el informe de la solución.



Variables de decisión

A : Cantidad de onzas de cereal A que el alumno debe ingerir.

B : Cantidad de onzas de cereal B que el alumno debe ingerir.

La función objetivo representa el costo total de los cereales que deberá consumir y las restricciones son las cantidades mínimas de tiamina y niacina que el médico le ha prescrito al alumno:

El modelo de programación lineal es el siguiente:

Minimizar $Z = A+2B$

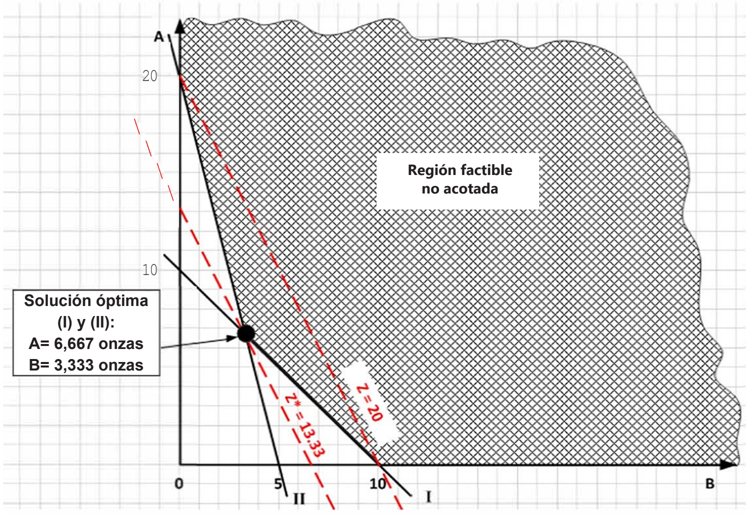
s.a.:

$0.1A+0.1B \geq 1$ (I) Requerimiento mínimo de tiamina

$0.5A+2B \geq 10$ (II) Requerimiento mínimo de niacina

$A, B \geq 0$

La solución gráfica es la siguiente y puede observarse que la región factible es una región no acotada; sin embargo, el modelo posee una solución óptima en el vértice señalado.

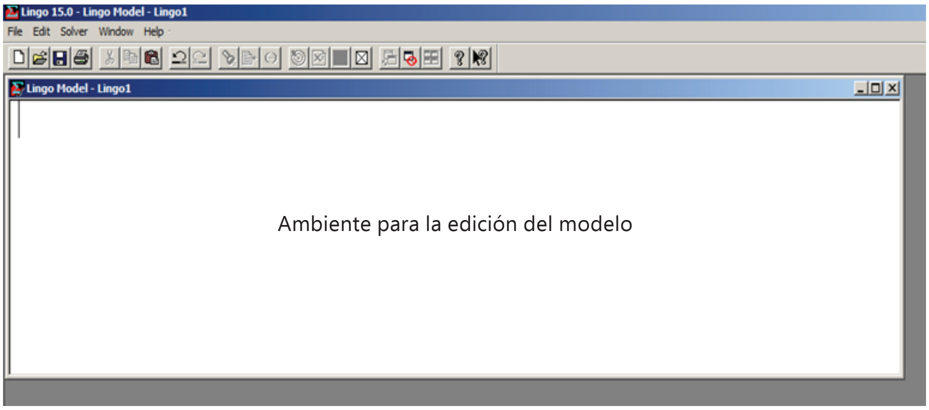


Informe de la solución

El alumno deberá mezclar 6,67 onzas del cereal A y 3,33 onzas del cereal B.

3.4 Solución computacional: utilizando LINGO

Al ingresar al programa se observa la siguiente pantalla:



En esta pantalla, se observa el menú principal y la pantalla de edición de modelos. Las opciones del menú principal son:

File, para el manejo de archivos

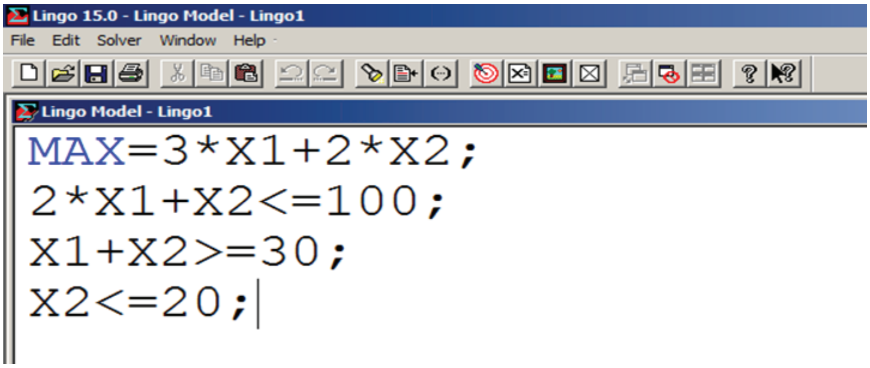
Edit, con las opciones de edición de modelos (copiar, mover, pegar, etc.)

Solver, con las opciones para la resolución de modelos

Window, para la manipulación de las diferentes ventanas

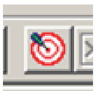
Para editar un modelo

El Lingo reconoce la función objetivo cuando esta va precedida por el comando MAX= o (MIN=). Debe notarse que siendo un comando (palabra reservada) aparece pintada en color azul. En el Lingo es necesario utilizar explícitamente los operadores matemáticos, además cada línea del modelo debe terminar en ";". Obsérvese el ejemplo:



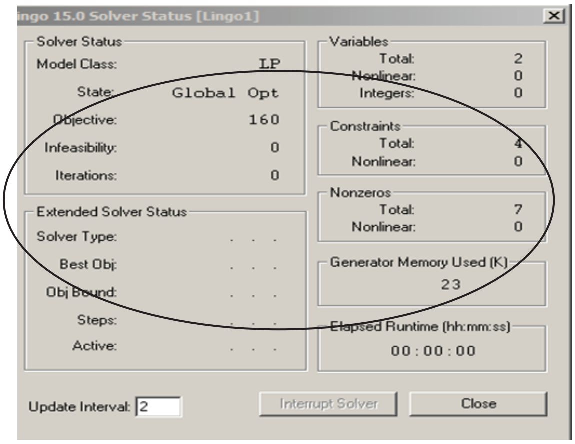
Para resolver un modelo

Puede emplearse el ícono



que se encuentra en la barra principal. También puede emplearse **Solve** que se encuentra dentro de la opción **Solver** del menú principal.

Con cualquiera de las opciones, el *software* presenta primero un cuadro de resumen como el que se muestra enseguida. Este cuadro contiene información general sobre la solución óptima alcanzada: reconoce el tipo de problema (LP, Programación Lineal, por sus siglas en inglés) si es óptimo global, número de iteraciones realizadas, y el valor de la función objetivo.



El reporte con la solución al problema es el siguiente:

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              160.0000
  Infeasibilities:                              0.000000
  Total solver iterations:                             0
  Elapsed runtime seconds:                          0.02

  Model Class:                                        LP

  Total variables:                   2
  Nonlinear variables:               0
  Integer variables:                 0

  Total constraints:                 4
  Nonlinear constraints:             0

  Total nonzeros:                    7
  Nonlinear nonzeros:                0


                              Variable           Value        Reduced Cost
                                    X1        40.00000            0.000000
                                    X2        20.00000            0.000000

                                   Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                     1        160.0000            1.000000
                                     2        0.000000            1.500000
                                     3        30.00000            0.000000
                                     4        0.000000           0.5000000
```

Para interpretar el reporte

Lo más relevante del reporte de solución es el valor de la función objetivo y el de las variables de decisión. Ambos resultados se presentan en la primera parte del reporte. Para el ejemplo:

El mejor valor (valor óptimo) para las variables X_1 es 40 y para X_2 es 20.

El mayor valor posible para la función objetivo es 160.

Supongamos que X_1 y X_2 representan las cantidades por producir de dos productos: 1 y 2, respectivamente. Entonces, las cantidades óptimas por producir de cada producto serían 40 y 20, respectivamente.

Estas son las cantidades óptimas por producir, ya que con ellas se obtiene la mayor ganancia que sería $ 160 (suponiendo que la función objetivo representa las ganancias totales).

También puede encontrarse en el reporte información adicional igualmente interesante para cada una de las líneas del modelo (*row*). La línea 1 (*row* 1) del modelo es la función objetivo cuyo valor óptimo aparece ya en el encabezado del reporte. Las siguientes líneas son las restricciones al modelo. Para cada una de ellas el reporte muestra:

Slack o Surplus: representa la diferencia entre el valor del lado derecho y el lado izquierdo de cada restricción, cuando se evalúa en la restricción el valor de la solución. Lo que se había definido ya antes como **holgura** o **exceso**.

Si la restricción es "≤" puede representar por ejemplo una disponibilidad de recurso, la **holgura** señalaría la cantidad de recurso que la solución propuesta ha dejado disponible. Si la restricción es "≥" el **exceso** es la cantidad en la que la solución sobrepasa el mínimo asociado a la restricción.

Las restricciones que no tienen **holgura** o **exceso** (valor cero) son las **restricciones activas** y, tal como ya se ha dicho, son las que explican la razón por la cual el valor de la función objetivo no puede ser mejor que el hallado.

La primera restricción: $2*X_1+X_2$ <= 100 es "≤" y el reporte señala que esta no tiene **holgura** (holgura con valor cero).

Supongamos que esta restricción representa la disponibilidad de cierto recurso. Una holgura de cero señala que el recurso se agota totalmente en la solución óptima.

Al evaluar los valores óptimos de X_1 y X_2 en dicha restricción se verifica:

$$\underbrace{2*(40)+20}_{100} \leq 100$$

$$100 = 100$$

No hay diferencia entre los valores del lado izquierdo y derecho de la restricción: la holgura es cero, por ello se dice que la restricción es activa.

La segunda restricción: X_1+X_2 >= 30 es "≥" y el reporte señala que esta tiene un exceso de 30.

Supongamos que esta restricción representa la cantidad mínima de unidades de producto que en total se debe producir. El exceso señala que en la solución óptima se producen en total 30 unidades más que el mínimo señalado en la restricción:

Al evaluar los valores óptimos de X_1 y X_2 en dicha restricción, se verifica:

$$\underbrace{40+20}_{60} \geq 30$$

$$60 > 30$$

Se observa que el valor del lado izquierdo **excede** al del lado derecho en 30.

La tercera restricción: X_2 <= 20 es "≤" y el reporte señala que esta tiene una **holgura** de 0.

Supongamos que esta restricción representa la cantidad máxima de unidades de producto 2 que se puede producir. La holgura señala que en la solución óptima se produce una cantidad igual al máximo.

Al evaluar los valores óptimos de X_1 y X_2 (en realidad solo el valor óptimo de X_2) en dicha restricción, se verifica:

$$20 = 20$$

No hay diferencia entre los valores del lado izquierdo y derecho de la restricción: la holgura es cero, por ello, la restricción es activa.

Por lo tanto, si alguien preguntara cuál es la razón por la que el valor de la función objetivo no puede ser mejor, es decir, no puede ser mayor a 160 la respuesta sería que es debido a las limitaciones que imponen la primera y la tercera restricción. Entonces, si el dueño del modelo quiere conseguir una solución mejor, ya sabe qué debe hacer: mejorar las limitaciones que corresponden a las restricciones señaladas.

Capítulo

4

Formulación matemática compacta de modelos de programación lineal

En este capítulo se tratan los siguientes temas:

- Formulación compacta
- Reglas básicas que deben tenerse en cuenta para la formulación compacta
- Discusión sobre el uso de familias de variables con uno o más índices

La formulación matemática compacta es una forma de expresar un modelo de programación lineal en la que se comprimen sus elementos, de forma que:

- Las variables de decisión son definidas en forma de familias de variables.
- Las restricciones, de ser posible, se agrupan en familias.
- Dentro de las restricciones y la función objetivo, si existe una suma de "n" términos, estos se comprimen en la forma de "sumatorias".
- Los datos o parámetros del modelo se organizan de forma que se genera una estructura de datos complementaria al modelo.

La ventaja principal de esta forma de modelar es que facilita la formulación de modelos de gran tamaño. Asimismo, si los parámetros del modelo sufrieran cambios solo sería necesario actualizar los valores de la estructura de datos.

El Lingo ofrece un lenguaje para solución de modelos formulados en la forma matemática compacta.

Si bien es cierto que esta forma de modelar exige al estudiante un mayor esfuerzo de abstracción, es también una forma eficiente de formular y resolver modelos de programación lineal.

¿Qué debe lograr el estudiante?

Formular correctamente la forma matemática compacta de un problema de programación lineal.

Como puede observarse, la solución gráfica es útil solo para modelos pequeños, y en la práctica profesional estos modelos no son muy frecuentes.

La solución eficiente y rápida de modelos más grandes, es decir, con más variables y más restricciones, es posible realizarla haciendo uso del Lingo, pero para ello será mejor si los modelos se formulan en la forma compacta y luego se traducen al lenguaje del Lingo.

4.1 Formulación compacta

La formulación compacta es la mejor forma de lograr el manejo eficiente de un modelo que puede considerarse complejo tanto por el número de variables como por el número de restricciones que comprende.

La ventaja de la formulación compacta consiste en el uso de:

- Índices para identificar los elementos de diversos conjuntos de elementos que conforman el modelo.
- Variables y datos en forma de arreglos, cuyas dimensiones se asocian con los índices respectivos.

Este recurso facilita el modelamiento de familias de variables y de restricciones. Una familia de restricciones está formada por una cantidad de expresiones matemáticas de la misma forma, que corresponden cada una a un objeto miembro de un conjunto. Por otro lado, una familia de variables describe alguna condición o característica desconocida de los elementos de un conjunto.

En un modelo compacto tanto la función objetivo como las restricciones se definen en función de los índices que identifican los conjuntos de objetos que existen en el caso que se modela.

Entonces, aclarando algunas ideas:

Conjunto: agrupamiento de objetos del mismo tipo. La identificación de los objetos del conjunto se asocia a un índice. Los conjuntos pueden ser de diversas clases:

Primitivos: conformados por objetos individuales agrupados por tener características comunes.

Derivados: resultado de la combinación de elementos de conjuntos primitivos.

Los conjuntos derivados pueden ser:

Densos: incluyen todos los posibles miembros sin condición.

Esparcidos: no todos los posibles miembros se incluyen. Pueden explicitarse los miembros o puede especificarse una condición para ser miembro.

A los miembros de cada conjunto se les identifica con el valor de un índice. Entonces, es en función de los índices que se definen los arreglos de datos, las familias de variables y de restricciones que pudieran existir asociados a los diferentes conjuntos del modelo.

Con el siguiente caso se ilustrará el proceso completo hasta llegar a la modelación compacta:

Ejemplo 1

En la máquina cortadora de prendas de un taller de confecciones pueden procesarse un máximo de 1500 prendas por semana. Esta semana, el taller de confecciones ha recibido la solicitud de 7 clientes por el servicio de corte de prendas, con las siguientes características:

Cliente	Cantidad total máxima de prendas por cortar	Dificultad del corte (valor/prenda)	Utilidad por prenda cortada ($/prenda)
1	300	8	2,0
2	250	7	2,5
3	150	6	3,0
4	200	8	2,5
5	150	5	2,0
6	230	5	2,5
7	500	3	3,0

Es posible brindarle el servicio de corte a cada cliente por una cierta cantidad de prendas, **no necesariamente** por el máximo de forma obligatoria.

El valor de dificultad de corte para cada prenda de cada pedido que se señala en la tabla indica la cantidad de esfuerzo que deben hacer los operarios al cortar cada prenda. Un valor más alto de dificultad indica mayor esfuerzo para los operarios (valor máximo: 10, valor mínimo: 0). Con la finalidad de que el trabajo no les demande un esfuerzo muy grande se desea que el trabajo total a realizar tenga un valor de dificultad promedio por prenda no mayor a 5. Identificar las variables de solución, formular el modelo de programación lineal. Resolver el modelo y presentar el informe de la solución.

Para ello, lo primero y más importante es identificar las variables de decisión; hacerse algunas preguntas nos ayudan en esta tarea.

¿Quién se encuentra en esta situación de toma de decisiones?: el taller de confecciones.

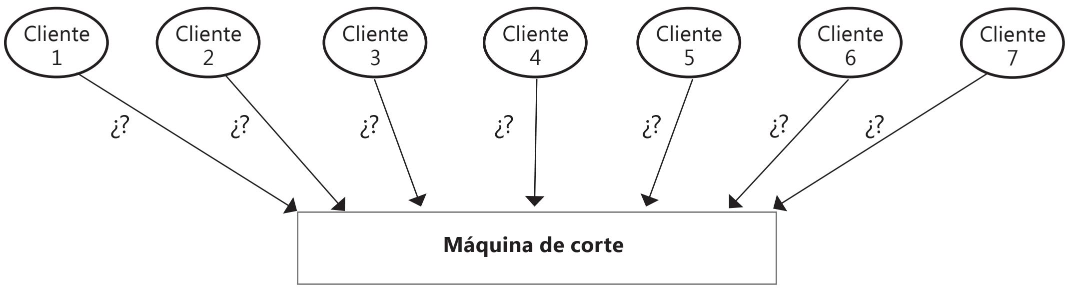
¿Sobre qué actividad debe decidir el taller?: sobre el corte de prendas.

¿Qué desconoce el taller sobre el corte de prendas?: para responder cabalmente a esta pregunta es necesario tener presente que debe ser algo totalmente desconocido e independiente de los datos recibidos, por ejemplo:

– Si se piensa que lo que desconoce el taller es la ganancia que obtendrá de cada cliente, ese valor depende del dato de utilidad por prenda, y por lo tanto el valor de la ganancia que recibirá el taller depende parcialmente de ese dato.

– Si se piensa que lo que desconoce el taller es "a qué cliente cortarle sus prendas", debe tomarse en cuenta que el caso señala que el taller no está obligado a cortar todas las prendas de cada cliente. Por ello, la decisión no es a qué cliente se atiende, porque no se sabría si se cortan todas las prendas o algunas.

Lo que desconoce el taller es el **número o cantidad de prendas que debe cortar para cada cliente**



Ahora bien, el taller desconoce siete (7) cantidades, una por cada cliente, entonces hay una incógnita que debe despejarse por cada cliente, es decir, una variable de decisión por cada cliente.

Los clientes forman un conjunto y se definirá un índice para identificar a cada uno de los clientes miembros de este conjunto; es un **conjunto denso**, pues incluye a **todos** los clientes. Así, podemos definir la familia de variables de la forma siguiente:

$$X_i$$

que representa la cantidad de prendas por cortar para cada uno de los i-ésimos miembros del conjunto de clientes (esta es la **definición de las variables de decisión**). El **índice** "i" identifica a cada cliente del conjunto y los valores de "i" van del 1 hasta el 7.

Enseguida se definen las restricciones, es decir las condiciones a las que están sujetas las **variables de decisión**.

- Al leer nuevamente el texto del problema, identificamos que el número máximo de prendas que en total se pueden cortar en el taller es 1500: esta es una limitación.

  Si sumamos **todas** las prendas que se decida cortar esta suma no puede ser mayor a 1500.

  Sumar todas las prendas a cortar es sumar el valor de las 7 variables de decisión. De forma extendida esta sería la expresión:

  $$X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6+X_7 \leq 1500$$

  Que puede compactarse, como veremos enseguida:

  $$\sum_{i=1}^{7} X_i \leq 1500$$

- El texto del ejercicio señala también que cada cliente tiene un número máximo de prendas por cortar:

  $X_1 \leq 300$ ..... número máximo de prendas por cortar para el cliente 1

  $X_2 \leq 250$ ..... número máximo de prendas por cortar para el cliente 2

  $X_3 \leq 150$ ..... número máximo de prendas por cortar para el cliente 3

  $X_4 \leq 200$ ..... número máximo de prendas por cortar para el cliente 4

  $X_5 \leq 150$ ..... número máximo de prendas por cortar para el cliente 5

  $X_6 \leq 230$ ..... número máximo de prendas por cortar para el cliente 6

  $X_7 \leq 500$ ..... número máximo de prendas por cortar para el cliente 7

  Estas 7 restricciones presentadas de forma "extendida" tienen todas la misma forma matemática y representan la misma condición para cada uno de los 7 clientes: **se trata de una familia de restricciones**.

  Esta familia puede expresarse de manera compacta, como veremos enseguida:

$$X_i \leq Máximo_i \qquad Para\ i = 1, \ldots, 7$$

También puede utilizarse la forma siguiente:

$$X_i \leq Máximo_i \qquad \forall i = 1, \ldots, 7$$

Es lo que indica que se trata de una familia

- La dificultad promedio ponderada del total de prendas por cortar no debe ser mayor a 5 es una restricción adicional, que expresada en la forma extendida es:

$$(8X_1+7X_2+6X_3+8X_4+5X_5+5X_6+3X_7)/(X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6+X_7) \leq 5$$

Debe señalarse que así como aparece escrita la expresión esta no es lineal, pues no cumple la propiedad de **aditividad**. Sin embargo, este problema se soluciona pasando al lado derecho la expresión del denominador:

$$(8X_1+7X_2+6X_3+8X_4+5X_5+5X_6+3X_7) \leq 5\ (X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6+X_7)$$

Al igual que la primera restricción, esta expresión también puede expresarse de manera compacta.

$$\sum_{i=1}^{7} Dificultad_i \times X_i \leq 5 \times \sum_{i=1}^{7} X_i$$

En esta expresión puede notarse que se ha empleado un arreglo (unidimensional) para definir el dato de dificultad por prenda dado para cada cliente:

$$Dificultad_i$$

La mayoría de datos del modelo pueden definirse por medio de arreglos (de una o varias dimensiones) y como tales pueden ser coeficientes tecnológicos o lados derechos en las restricciones o coeficientes en la función objetivo.

- Para concluir con las restricciones, se agregan las condiciones de no negatividad para que el modelo no permita soluciones negativas, que carecen de sentido en este caso:

$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0$$
$$X_3 \geq 0$$
$$X_4 \geq 0$$
$$X_5 \geq 0$$
$$X_6 \geq 0$$
$$X_7 \geq 0$$

Estas condiciones, en la forma compacta se expresan:

$X_i \geq 0$ $\quad\quad$ $\forall i = 1, \dots, 7$ $\quad\quad$ o también

$X_i \geq 0$ $\quad\quad$ $Para\ i = 1, \dots, 7$

Finalmente, para identificar **la función objetivo** se plantean las siguientes preguntas:

- ¿Qué medida de resultado o indicador utilizaría el taller para identificar la mejor solución a su problema de decisión?
- ¿Cómo sabe el taller que una determinada solución es la mejor?

La mejor solución debe ser la que genera la mayor utilidad (o ganancia) total al taller, entonces la función que expresa la utilidad total es la función objetivo:

$$2X_1+2{,}5X_2+3X_3+2{,}5X_4+2X_5+2{,}5X_6+3X_7$$

Lo que se busca es que el valor de esta función sea el máximo posible:

$$Maximizar\ \ Z = \sum_{i=1}^{7} Utilidad_i \times X_i$$

En esta expresión se ha empleado un arreglo (unidimensional) para definir el dato de utilidad por prenda de cada cliente:

$$Utilidad_i$$

Entonces el modelo completo en la forma compacta sería:

Forma 1	**Forma 2**
$Maximixar\ \ Z = \sum_{i=1}^{7} Utilidad_i \times X_i$ $Sujeto\ a$: $\sum_{i=1}^{7} X_i \leq 1500$ $X_i \leq Máximo_i \qquad \forall i = 1, \ldots, 7$ $\sum_{i=1}^{7} Dificultad_i \times X_i \leq 5 \times \sum_{i=1}^{7} X_i$ $X_i \geq 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, 7$	$Maximizar\ \ Z = \sum_{i=1}^{7} Utilidad_i \times X_i$ $Sujeto\ a$: $\sum_{i=1}^{7} X_i \leq 1500$ $X_i \leq Máximo_i \qquad Para\ i = 1, \ldots, 7$ $\sum_{i=1}^{7} Dificultad_i \times X_i \leq 5 \times \sum_{i=1}^{7} X_i$ $X_i \geq 0 \qquad Para\ i = 1, \ldots, 7$

4.2 Reglas básicas que deben tenerse en cuenta para la formulación compacta

- No encerrar los índices entre paréntesis al definir las variables de decisión o los arreglos de datos.
- No se pone la coma entre un índice y otro cuando la familia de variables de decisión o los arreglos de datos poseen más de un índice (cuando se definen como atributos de un conjunto derivado).

- En el caso de las sumatorias:
  - Indicar los límites inferior y superior del(los) índice(s).
  - Emplear paréntesis solo si es necesario.
- Para denotar familia de restricciones:
  - El cuantificador universal (∀) va a la derecha de la familia de restricciones, no al inicio.
  - Puede ser reemplazado por la palabra “Para”.

En el cuadro siguiente se presentan algunos ejemplos de aplicación de estas reglas y de algunas formas **incorrectas** que deben **evitarse**:

Correcto	***Incorrecto (se resalta en color rojo lo incorrecto)***
$X_i: Cantidad\ (en\ kg)\ por\ producir\ del\ producto\ i$ $(i = 1, \dots, 10)$	$X(i): Cantidad\ (en\ kg)\ por\ producir\ del\ producto\ i$ $(i = 1, \dots, 10)$
$X_{ij}: Cantidad\ (en\ kg)\ por\ producir\ del\ producto\ i$ $en\ el\ mes\ j\ \ (i = 1, \dots, 10; j = 1, \dots, 4)$	$X(i,j): Cantidad\ (en\ kg)\ por\ producir\ del\ producto\ i$ $en\ el\ mes\ j\ \ (i = 1, \dots, 10; j = 1, \dots, 4)$
$\sum_{i=1}^{10} Costo_i \times X_i$	$\sum Costo_i \times X_i$ $\sum_{i} Costo_i \times X_i$ $\sum_{i=1}^{10} (Costo_i \times X_i)$ $\sum_{i=1}^{10} (Costo(i) \times X(i))$
Forma 1: $\sum_{i=1}^{10} Requerim_{ij} \times X_i \leq Disponib_j \qquad \forall j = 1, \dots, 5$ Forma 2 (también aceptada): $\sum_{i=1}^{10} Requerim_{ij} \times X_i \leq Disponib_j \qquad Para\ j = 1, \dots, 5$	$\forall j: \sum_{i=1}^{10} Requerim_{ij} \times X_i \leq Disponib_j$ $\sum_{i=1}^{10} (Requerim_{ij} \times X_i) \leq Disponib_j \qquad \forall j = 1, \dots, 5$

Ejemplo 2

Juanito se dedica a la elaboración de tres tipos de cebiche en bolsa para las playas de Lima, los cuales gozan de gran aceptación por parte de sus clientes. Los ingredientes principales son: pescado, conchas negras, calamar, cebolla y camote. La siguiente tabla muestra la composición de los ingredientes que se utilizan por cada bolsa:

Tipo	Pescado (kg)	Conchas negras (kg)	Calamar (kg)	Cebolla (unid.)	Camote (unid.)
Tradicional	1	0	0	3	3
Especial	0	0,5	0	1	0
Mixto	0,5	0,1	0,3	3	3

La demanda de cebiche para este fin de semana no constituye un factor limitante. No obstante, Juanito debe vender como mínimo 500, 200 y 300 bolsas de cebiche tradicional, especial y mixto, respectivamente, para asegurar la rentabilidad de su negocio. El precio de venta de cada tipo de cebiche se muestra a continuación:

Tipo de cebiche	Precio de venta (soles/bolsa)
Tradicional	30
Especial	35
Mixto	28

Los costos de los ingredientes y su disponibilidad son:

Ingrediente	Pescado	Conchas negras	Calamar	Cebolla	Camote
Costo	24 S/kg	30 S/kg	18 S/kg	0,5 S/unid	0,1 S/unid
Disponibilidad	1000 kg	200 kg	100 kg	5000 unid	5000 unid

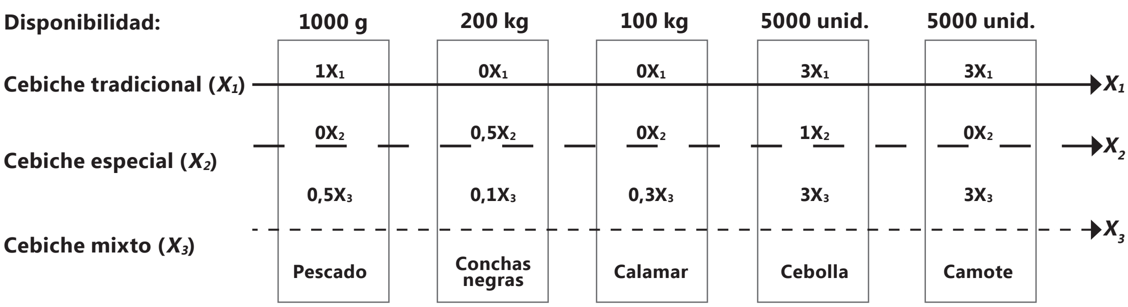
Identificar las variables de decisión y formular el modelo de programación lineal en la forma compacta.

Variables de decisión

Haciéndonos las mismas preguntas que se plantearon para el primer ejercicio, se puede concluir que lo que se desconoce es la cantidad de bolsas de cada tipo de cebiche que Juanito debe preparar.

Existe un conjunto de tipos de cebiche y, por ello, un índice "*i*" que servirá para identificarlos, entonces puede definirse la familia de variables:

$$X_i\text{: Cantidad de bolsas de cebiche de tipo } i \text{ por preparar} \qquad (i = 1,...,3)$$



Restricciones:

Para las **cantidades mínimas de cada tipo de cebiche** que Juanito debe vender:

$$X_i \geq Mínimo_i \qquad \forall i=1,\ldots,3$$

Para la disponibilidad de cada ingrediente que Juanito emplea para hacer los cebiches: en el caso de esta familia de restricciones hay una restricción para cada miembro del conjunto ingredientes, **ello ha dado lugar a la definición de este conjunto y por ello de un índice (j)**:

$$\sum_{i=1}^{3} Requerimiento_{ij} \times X_i \leq disponibilidad_j \qquad \forall j = 1, \ldots, 5$$

Finalmente, las **condiciones de no negatividad**:

$$X_i \geq 0\,, \qquad \forall i=1,\ldots,3$$

Para la construcción del modelo de este ejercicio en la forma compacta ha sido necesario definir dos conjuntos primitivos (tipos de cebiche e ingredientes) y dos índices, cada uno para la enumeración de los miembros de cada conjunto, respectivamente.

Ejemplo 3

Debido a la gran aceptación del cebiche en bolsa, ahora Juanito está planificando para el próximo verano la venta de sopa en botellón. Las sopas de mayor demanda son: especial de pollo, marítima de mariscos y tradicional de habas. Los ingredientes principales son: pollo, mariscos, habas y alverjas. La siguiente tabla muestra el requerimiento de los ingredientes que se utilizan por cada botellón de 3 litros:

Requerimiento (kg/botellón)

Tipo de sopa	Pollo	Mariscos	Habas	Alverjas
Especial de pollo	0,30	0	0,25	0,25
Marítima de mariscos	0	0,30	0,10	0,50
Tradicional de habas	0,15	0,15	1	0,25

Juanito debe vender como mínimo 250, 100 y 300 botellones de sopa especial de pollo, marítima de mariscos y tradicional de habas, respectivamente, para asegurar la rentabilidad de su negocio. El precio de venta de cada tipo de sopa se muestra a continuación:

Tipo de sopa	Precio de venta (Soles/botellón)
Especial de pollo	30
Marítima de mariscos	35
Tradicional de habas	25

El costo y la disponibilidad de cada ingrediente con que Juanito cuenta **para que él mismo prepare sus sopas son los siguientes:**

Ingrediente	Pollo	Mariscos	Habas	Alverjas
Costo (soles/kg)	20	30	5	10
Disponibilidad (kg)	80	40	200	150

Además de preparar él mismo sus sopas, Juanito puede comprar sopas en botellón ya preparadas a sus tías Julia y Bertha, con la siguiente restricción: "Para cada tipo de sopa, la cantidad de botellones que Juanito compre a sus tías en total de ese tipo, no debe ser superior a la cantidad de botellones de sopa de ese tipo que Juanito prepare". Los costos de compra por cada tipo de sopa y por cada tía se muestran a continuación:

Costo de compra (soles/botellón)

Tipo de sopa	Tía Julia	Tía Bertha
Especial de pollo	20	25
Marítima de mariscos	20	30
Tradicional de habas	30	20

Según la información brindada, debe definir las variables de decisión y formular el modelo de programación lineal en la forma compacta.

Las variables de decisión

X_i : cantidad (en botellones) de sopa i que Juanito va a preparar.

Y_{ik} : cantidad (en botellones) de sopa i que comprará a la tía k.

En esta definición de variables se han empleado **tres índices**:

i: para el conjunto de tipos de sopa (i=1,2,3).

j: para el conjunto de ingredientes (j=1,2,3,4).

k: para el conjunto de tías (k=1,2).

Aunque las familias de variables se han definido solo en uno o en dos de estos índices.

La función objetivo expresa la ganancia que puede alcanzar Juanito. Esta función es:

$$Maximizar\ \ Z = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{Precio_i} \times (\boldsymbol{X_i} + \sum_{k=1}^{2} \boldsymbol{y_{ik}}) - \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} \boldsymbol{CostoIngred_j} \times \boldsymbol{Requerim_{ij}} \times \boldsymbol{X_i}$$

$$-\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{2} \boldsymbol{CostoTía_k} * \boldsymbol{y_{ik}}$$

El **primer término** de esta función calcula los ingresos por la venta de las sopas de cada tipo, que resulta de multiplicar el precio de venta por la cantidad producida en total (las cantidades hechas por Juanito y las compradas a las tías).

El **segundo término** calcula los costos de los ingredientes que usa Juanito en hacer todas las sopas que prepara.

El **tercer término** calcula lo que paga a todas las tías por todas las sopas que les compra.

En este último ejemplo se ha definido una familia de variables que tienen tantos miembros como combinación de cada valor de i con cada valor de k. Por ello, se emplean dos índices para identificar a cada miembro de la familia.

Las restricciones:

Para la cantidad mínima de **cada tipo de sopa** que debe vender:

$$X_i + \sum_{k=1}^{2} Y_{ik} \geq Mínimo_i \qquad Para\ i = 1,\ldots,3$$

Para la disponibilidad de **cada ingrediente** que utiliza Juanito para preparar las sopas:

$$\sum^{3} Requerim_{ij} \times X_i \leq disponibilidad_j \qquad j = 1,\ldots,4$$

Para cumplir la condición que le han puesto las tías a Juanito (**para cada tipo de sopa**, Juanito no puede hacer menos que lo que les compra a las tías):

$$\sum_{k=1}^{2} Y_{ik} \leq X_i \qquad Para\ i = 1,\ldots,3$$

Las condiciones de signo o de no negatividad para todas las variables del modelo:

$$X_i \geq 0 \qquad Para\ i = 1, \ldots, 3$$
$$Y_{ik} \geq 0 \qquad Para\ i = 1, \ldots, 3;\ Para\ k = 1,2$$

¿Por qué es necesario el empleo de los dos índices?:

Porque se decide la cantidad por comprar a cada tía pero de cada tipo de sopa.

En el acápite siguiente se emplean algunos ejemplos para discutir cuándo una familia de variables se definen en uno o en más índices.

4.3 Discusión sobre el uso de familias de variables con uno o más índices

¿En qué casos es necesario el empleo de dos índices para definir las familias de variables de decisión y en qué casos solo uno?

Ejemplos

Caso 1. Uso **combinado** de materias primas

Una planta química fabrica dos tipos de productos: A1 y A2, los cuales son elaborados sobre la base de las siguientes materias primas: M1, M2 y M3. La siguiente tabla muestra el requerimiento (en kilogramos) de cada materia prima por kilogramo de producto fabricado, así como la disponibilidad de cada materia prima (kg) y costos asociados (S/ por kg) para el próximo periodo de planificación.

Materias primas	Requerimiento de materia prima (por kg de producto)		Disponibilidad (kg)	Costo (S/ por kg)
	Producto A1	Producto A2		
M1	4	10	50 000	5,6
M2	12	4	72 000	4,3
M3	6	7	46 000	7,9

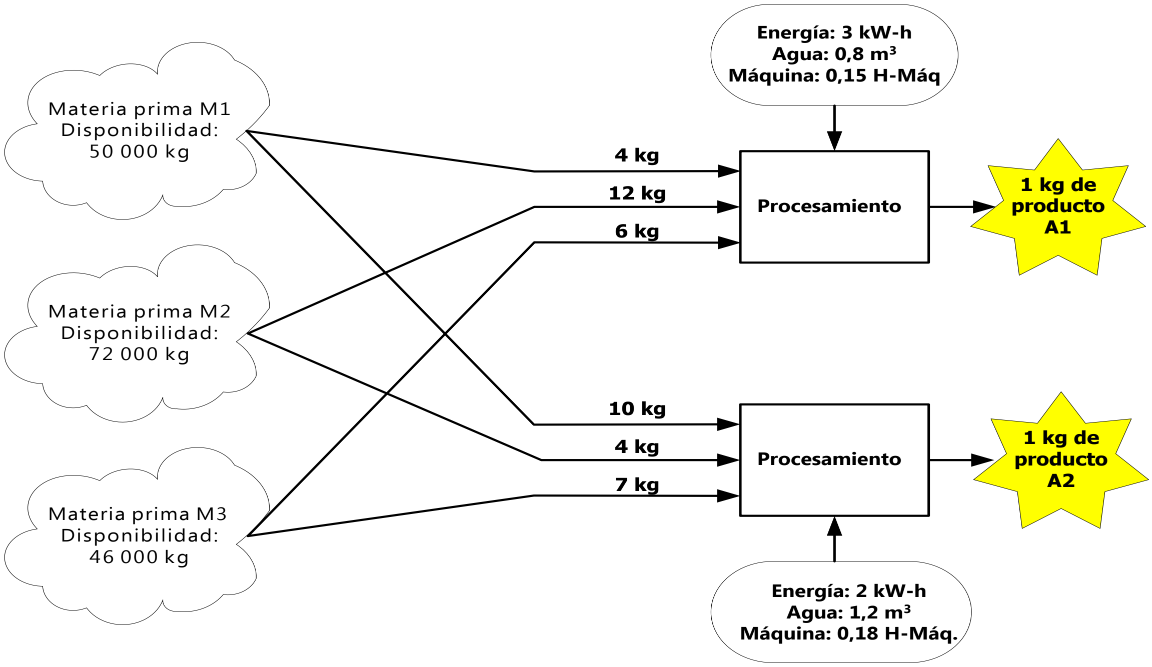
En el proceso de producción se consume también energía eléctrica, agua y tiempo de máquina; la información de los consumos de estos recursos por kilogramo de producto fabricado, así como los costos asociados, se presentan en la siguiente tabla:

Productos	Energía (kW-h/kg)	Agua (m^3/kg)	Tiempo de máquina (H-Máq./kg)	Precio de venta (S/ por unidad)
A1	3	0,8	0,15	15
A2	2	1,2	0,18	20
Costos del recurso	S/ 1,7 por Kw-h	S/ 0,4 por m^3	S/ 30 por H-Máq.	

La disponibilidad de tiempo de máquina es de 600 horas-máquina, además se sabe que el presupuesto disponible para todos los gastos es de S/. 480 000. Formule el modelo de programación lineal que permita determinar el plan de producción que maximice las ganancias. Todo lo que se produzca se podrá vender.

Un esquema para el problema

El siguiente diagrama indica cómo es que se debe interpretar el caso:



Por lo tanto, **las variables de decisión son solamente dos**:

Ai : kilogramos de producto i por fabricar (i = 1, 2).

El modelo, en notación extendida, sería el siguiente:

Maximizar (ganancias)

$$Z = 15\,A_1 + 20\,A_2 - (4(5{,}6) + 12(4{,}3) + 6(7{,}9))A_1 - (10(5{,}6) + 4(4{,}3) + 7(7{,}9))A_2$$
$$- (3(1{,}7) + 0{,}8(0{,}4) + 0{,}15(30))A_1 - (2(1{,}7) + 1{,}2(0{,}4) + 0{,}18(30))A_2$$

s.a.:

$4A_1 + 10A_2 \leq 50\,000$ (M1 disponible)

$12A_1 + 4A_2 \leq 72\,000$ (M2 disponible)

$6A_1 + 7A_2 \leq 46\,000$ (M3 disponible)

$0{,}15A_1 + 0{,}18A_2 \leq 600$ (Horas máquina disponibles)

$$(4(5{,}6) + 12(4{,}3) + 6(7{,}9))\,A_1 + (10(5{,}6) + 4(4{,}3) + 7(7{,}9))\,A_2$$
$$+ (3(1{,}7) + 0{,}8(0{,}4) + 0{,}15(30))\,A_1 + (2(1{,}7) + 1{,}2(0{,}4) + 0{,}18(30))\,A_2 \leq 480\,000 \text{ (presupuesto)}$$

$A_1, A_2 \geq 0$

Uso alternativo de materias primas

Una planta química fabrica dos tipos de productos: A1 y A2, los cuales son elaborados a base de cualquiera de las siguientes materias primas: M1, M2 o M3. La siguiente tabla muestra el requerimiento (en kilogramos) de materia prima por kilogramo de producto fabricado, así como la disponibilidad de cada materia prima (Kg) y costos asociados (S/ por Kg) para el próximo periodo de planificación.

Materias primas	Requerimiento de materia prima (por kg de producto)		Disponibilidad (kg)	Costo (S/ por kg)
	Producto A1	Producto A2		
M1	4	10	50 000	5,6
M2	12	4	72 000	4,3
M3	6	7	46 000	7,9

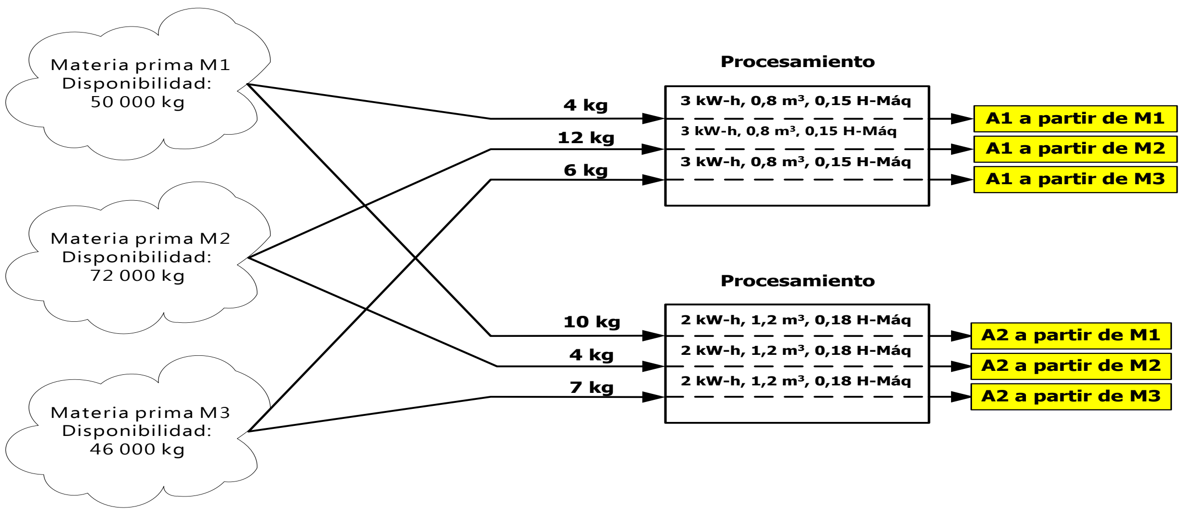
En el proceso de producción se consume también energía eléctrica, agua y tiempo de máquina; la información de los consumos de estos recursos por kilogramo de producto fabricado, así como los costos asociados, se presentan en la siguiente tabla:

Productos	Energía (kW-h/kg)	Agua (m^3/kg)	Tiempo de máquina (H-Máq./kg)	Precio de venta (S/ por unidad)
A1	3	0,8	0,15	15
A2	2	1,2	0,18	20
Costos del recurso	S/ 1,7 por Kw-h	S/ 0,4 por m^3	S/ 30 por H-Máq.	

La disponibilidad de tiempo de máquina es de 600 horas-máquina; además, se sabe que el presupuesto disponible para todos los gastos es de S/ 480 000. Formule el modelo de programación lineal para determinar el plan de producción que permita maximizar las ganancias. Tenga en cuenta que todo lo que se producirá se podrá vender.

Un esquema para el problema

El siguiente diagrama indica cómo se debe interpretar el caso:



A diferencia del caso anterior, **tanto el producto A1 como el producto A2 pueden ser fabricados a partir de cualquier tipo de materia prima.** Las variables de decisión ya no son dos sino **seis**:

A_{ij}: kilogramos de producto i por fabricar a partir de la materia prima j

(i = 1, 2; j = 1, 2, 3)

El modelo, en notación extendida, sería el siguiente:

Función objetivo: ganancias totales

Maximizar

Z = 15 (A_{11} + A_{12} + A_{13}) + 20 (A_{21} + A_{22} + A_{23}) – (4(5,6)A_{11} + 12(4,3)A_{12} + 6(7,9)A_{13}) – (10(5,6)A_{21} + 4(4,3)A_{22} + 7(7,9)A_{23}) – (3(1,7) + 0,8(0,4) + 0,15(30))*(A_{11} + A_{12} + A_{13}) – (2(1,7) + 1,2(0,4) + 0,18(30))*(A_{21} + A_{22} + A_{23})

La función objetivo en la forma compacta:

Maximizar

$$Z = \sum_{i=1}^{2}(precio_i * \sum_{j=1}^{3} A_{ij})$$

$$- \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}(costo\_mp_j \ * req\_mp_{ij} \ + 1{,}7 * energía_i + 0.4 * agua_i + 30 * horas\_maq_i \ ) \ * \ A_{ij}$$

s.a.:

4A_{11} + 10A_{21} ≤ 50 000 (M1 disponible)

12A_{12} + 4A_{22} ≤ 72 000 (M2 disponible)

6A_{13} + 7A_{23} ≤ 46 000 (M3 disponible)

Esta familia de restricciones en la forma compacta:

$$\sum_{i=1}^{2} Requerim\_mp_{ij} \times A_{ij} \leq Disponib_j \qquad \forall j = 1, \ldots, 5$$

0.15(A_{11} + A_{12} + A_{13}) + 0.18(A_{21} + A_{22} + A_{23}) ≤ 600 (Horas máquina disponibles)

Esta restricción de la forma compacta:

$$\sum_{i=1}^{2}(horas\ maquina\ _i * \sum_{j=1}^{3} A_{ij}) \leq 600$$

(4(5,6) A_{11} + 12(4,3) A_{12} + 6(7,9) A_{13}) + (10(5,6) A_{21} + 4(4,3) A_{22} + 7(7,9) A_{23}) – (3(1,7) + 0,8(0,4) + 0,15(30)) * (A_{11} + A_{12} + A_{13}) + (2(1,7) + 1,2(0,4) + 0,18(30)) *(A_{21} + A_{22} + A_{23}) ≤ 480 000 (presupuesto)

Esta restricción en la forma compacta

$$\sum_{j=1}^{3} costo\_mp_j * \sum_{i=1}^{2} A_{ij} * req_{mp_{ij}} + 1{,}7$$

$$* \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} \qquad {}_i * A_{ij} + 0.4 * \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} agua_i * A_{ij} + 30 * \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} horas\_maq_i * A_{ij} \leq 480\ 000$$

A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21} A_{22}, A_{23} ≥ 0,

Estas restricciones en la forma compacta: $A_{ij} \geq 0,\ Para\ i = 1, \ldots, 3; Para\ k = 1{,}2$

Caso 2. Estaciones en serie (paso por cada operación una después de la otra)

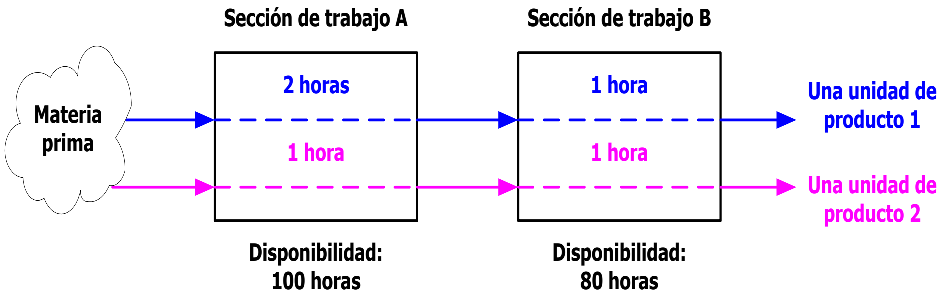
Una empresa fabrica dos tipos de productos. El producto 1 tiene una utilidad de \$ 3 por unidad y el producto 2 tiene una utilidad de \$ 2 por unidad. La elaboración de estos productos requiere trabajo en dos secciones de la planta de fabricación: A y B.

Una unidad de producto 1 requiere de 2 horas en A y 1 hora en B, y una unidad de producto 2 requiere 1 hora en A y 1 hora en B. Cada semana se puede conseguir toda la materia prima que se requiera, pero solo se dispone de 100 horas en A y 80 horas en B. La demanda del producto 1 no constituye un factor limitante para la producción; sin embargo, se vende un máximo de 20 unidades de producto 2 semanalmente.

Formule el modelo de programación lineal que permita planear las operaciones de la empresa.

Un esquema para el problema

El siguiente diagrama indica cómo se debe interpretar el caso:



Por lo tanto **las variables de decisión son solamente dos**:

P_i : Unidades por fabricar del producto i (i = 1, 2)

El modelo, en notación extendida, sería el siguiente (solo 2 variables, no se compactará):

Maximizar

$Z = 3P_1+2P_2$

s.a.:

$2P_1+P_2 \leq 100$	(Disponibilidad de tiempo en la sección de trabajo A)
$P_1+P_2 \leq 80$	(Disponibilidad de tiempo en la sección de trabajo B)
$P_2 \leq 20$	(Venta límite del producto 2)

$P_1, P_2 \geq 0$

Estaciones en paralelo (operaciones alternativas)

Una empresa fabrica dos tipos de productos. El producto 1 tiene una utilidad de \$ 3 por unidad y el producto 2 tiene una utilidad de \$ 2 por unidad. La elaboración de estos productos requiere trabajo en **cualquiera** de las dos secciones de la planta de fabricación: A o B.

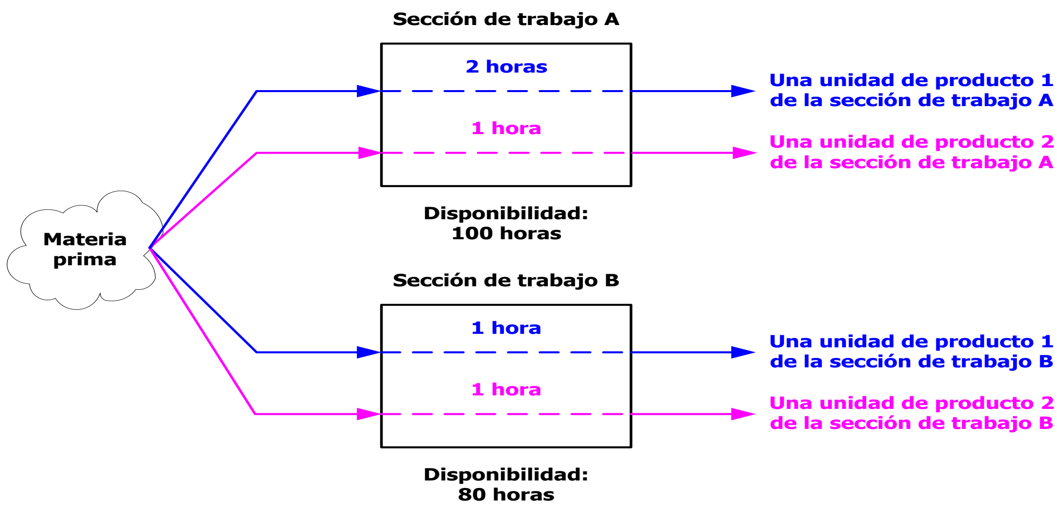
Un producto 1 requiere de 2 horas en A o 1 hora en B y un producto 2, requiere 1 hora en A o 1 hora en B.

Cada semana se puede conseguir toda la materia prima que se requiera pero solo se dispone de 100 horas en A y 80 horas en B. La demanda del producto 1 no constituye un factor limitante para la producción; sin embargo, se vende un máximo de 20 unidades de producto 2 semanalmente.

Formule el modelo de programación lineal que permita planear las operaciones de la empresa.

Un esquema para el problema

El siguiente diagrama indica cómo se debe interpretar el caso:



A diferencia del caso anterior, **tanto el producto 1 como el producto 2 pueden ser fabricados en cualquier estación de trabajo A** o **B**. Las variables de decisión ya no son dos sino **cuatro**:

P_{ij} : unidades de producto i por fabricar en la estación de trabajo j

(i = 1, 2; j = A, B)

El modelo, en notación extendida, sería el siguiente (pese a que son 4 variables, dado que es un modelo muy pequeño no se compactará):

Max $Z = 3\,(P_{1A} + P_{1B}) + 2\,(P_{2A} + P_{2B})$

s.a.:

$2P_{1A}+P_{2A} \leq 100$ (Disponibilidad de tiempo en la sección de trabajo A)

$P_{1B}+P_{2B} \leq 80$ (Disponibilidad de tiempo en la sección de trabajo B)

$P_{2A}+P_{2B} \leq 20$ (Venta límite del producto 2)

$\forall i, \forall j: P_{ij} \geq 0$

Es útil elaborar un esquema del problema, tal como se ha hecho en los dos casos anteriores para ubicar las variables de decisión como ayuda para identificar los índices de los que depende la familia de variables de decisión.

Capítulo

5

Tipos de modelos de programación lineal

En este capítulo se tratan los siguientes temas:

- Modelos de producción: un solo periodo, múltiples productos
- Modelos de transporte
- Modelos de trasbordo
- Modelos de mezclas
- Modelos de producción: múltiples periodos, uno o varios productos
- Discusión: interpretación de la información sobre "demanda"

Este capítulo es eminentemente práctico, incluye la formulación matemática compacta de al menos dos ejercicios de los diversos tipos de aplicaciones de la programación lineal. Destaca el empleo de un diagrama para esquematizar todos los casos resueltos. Asimismo, los diagramas ayudan al estudiante a visualizar e identificar los índices, las variables de decisión e incluso las restricciones del caso por modelar, y se demuestra cómo realizarlo.

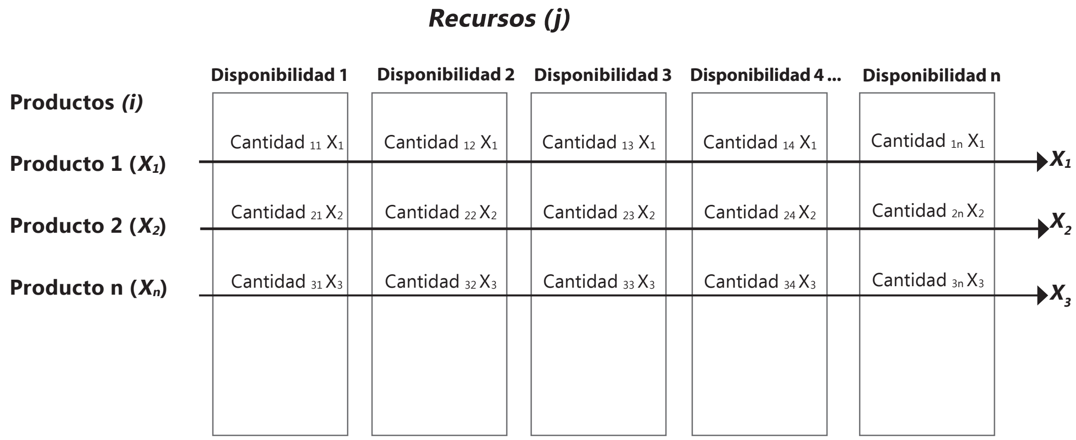
¿Qué debe lograr el estudiante?

Identificar la estructura de cada tipo de problema de programación lineal, y utilizando una representación gráfica como ayuda para el análisis del problema y formularlo correctamente de la forma matemática compacta.

Los modelos de programación lineal más comunes son los siguientes:

5.1 Modelos de producción: un solo periodo, múltiples productos

El dibujo muestra la estructura básica de un problema de este tipo:



Familia de variables de decisión típica

¿Cuántas unidades de cada producto se deben fabricar?

Familias de restricciones típicas

Estos modelos tienen como mínimo las siguientes familias de restricciones:

- Recursos productivos disponibles: estos recursos pueden ser materiales o tiempos de proceso, por ejemplo. (La cantidad de cada recurso que cada producto requiere es un dato conocido).
- Demanda

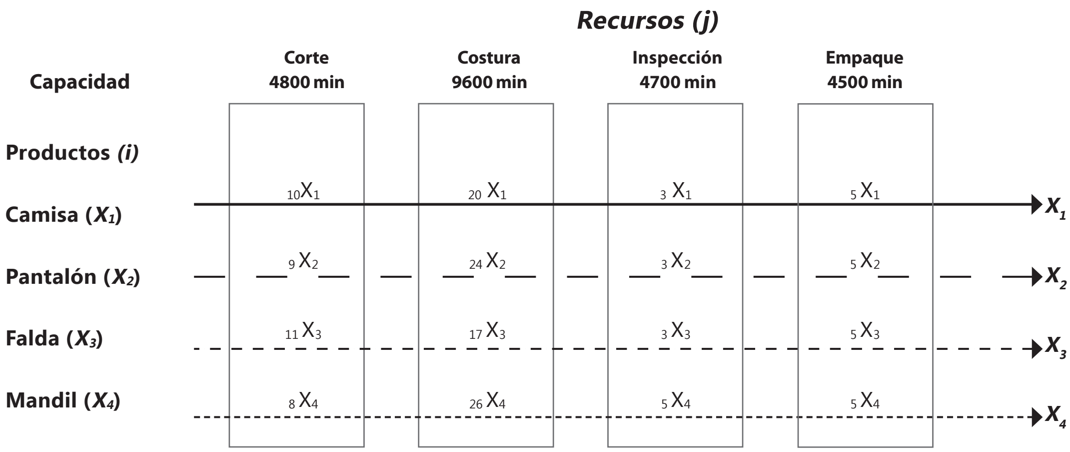
Ejemplo:

Prendas S.A. es una empresa de confecciones que produce prendas a medida para diversas instituciones. Entre las prendas más solicitadas están: camisas, pantalones, faldas y mandiles. Las prendas deben pasar por cuatro actividades consecutivas: corte, costura, inspección y empaque. La tabla siguiente muestra los datos por cada tipo de prenda:

Tiempo de procesamiento (minutos por prenda)					Precio de venta ($/prenda)
Prenda	**Corte**	**Costura**	**Inspección**	**Empaque**	
Camisa	10	20	3	5	10
Pantalón	9	24	2	5	11
Falda	11	17	3	5	12
Mandil	8	26	5	5	13
Capacidad diaria (minutos)	4800	9600	4700	4500	

Prendas S.A. tiene un convenio establecido con los trabajadores de la empresa para no producir más de 500 prendas al día, pero deben producirse por lo menos 100 pantalones para un pedido ya aceptado. La demanda es tan grande que permite que se venda todo lo que se produce. Definir las variables de decisión y formular el modelo de programación lineal que permita optimizar las operaciones de Prendas S.A.

Un esquema para el problema:



Solución:

Índices del modelo:

$i: Tipo\ de\ prenda$

$j: Tipo\ de\ actividad$

Variables de decisión:

P_i: $Cantidad\ de\ prendas\ de\ tipo\ i$ por $producir$ $(i = 1,\ldots,4)$

Función objetivo: ingreso total

Maximizar

$$f = \sum_{I=1}^{4} Precio_i * P_i$$

Restricciones

Familia por capacidad diaria disponible en cada actividad:

$$\sum_{i=1}^{4} Tiempo_{ij} * P_i \leq capacidad_i, \quad \forall j = 1, \ldots, 4$$

Familia por máxima producción de prendas en total:

$$\sum_{i=1}^{4} P_i \leq 500$$

Familia por mínima producción de pantalones:

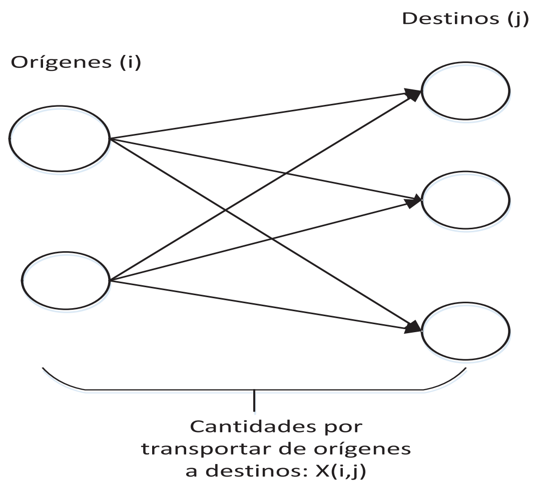
$$P_2 \geq 100$$

Restricciones de signo:

$$P_i \geq 0, \ \forall i = 1, \ldots, 4$$

5.2 Modelos de transporte

El dibujo muestra la estructura básica de un problema de este tipo:



Familia de variables decisión típica

Cantidad por transportar de orígenes a destinos

Familias de restricciones típicas

- Disponibilidad en orígenes
- Requerimiento en destinos
- Capacidad de los medios de transporte

Si el objetivo es minimizar los costos, ya sea en los orígenes o en los destinos, al menos una familia de restricciones debe ser >= o =.

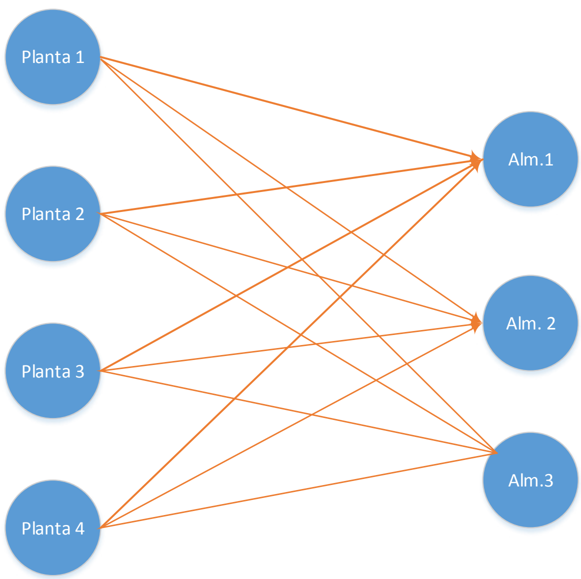
Ejemplo 1

Una empresa desea programar el transporte de su producto principal que se elabora en 4 plantas con destino a 3 almacenes. Se conoce la demanda de los almacenes, la capacidad de producción de las plantas y el costo de transporte por unidad de transporte de una planta a un almacén.

Plantas	**Costo de transporte (S/por unid.)**			**Capacidad (unidades)**
	Almacén 1	Almacén 2	Almacén 3	
1	3	2	4	950
2	2	4	3	1150
3	3	5	3	1000
4	4	3	2	900
Demanda (unidades)	1200	900	500	

Determinar cuántas unidades se deben enviar desde cada planta hacia cada almacén al mínimo costo total.

Un esquema para el problema:



Solución

Índices del modelo:

i : planta

j : almacén

Variables de decisión:

X_{ij}: unidades de producto por enviar desde la planta i al almacén j

$(i = 1,...,4; j = 1,...,3)$

Función objetivo:

Minimizar:

$$Z = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{4} Costo_{ij} * x_{ij}$$

Restricciones:

Familia por capacidad límite de cada planta:

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \leq Capacidad_i, \qquad Para\ i = 1,...,4$$

Familia por demanda de cada almacén:

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij}\ 1 \geq Demanda_j, \qquad Para\ j = 1,...,3$$

Nótese que aun cuando el caso no dice que debe atenderse esta demanda (como mínimo), se utiliza el signo ≥, pues de lo contrario la solución sería la inactividad total, ya que el mejor costo total (que es cero) se alcanzaría cuando no se transporta nada.

Restricciones de signo:

$$X_{ij} \geq 0, \qquad Para\ i = 1,...,4; \qquad Para\ j = 1,...,3$$

Ejemplo 2

Un camión cisterna tiene tres compartimentos para almacenar: delantero, central y posterior. Estos compartimentos tienen un límite de capacidad de carga tanto en peso como en volumen. Los datos se resumen en la siguiente tabla:

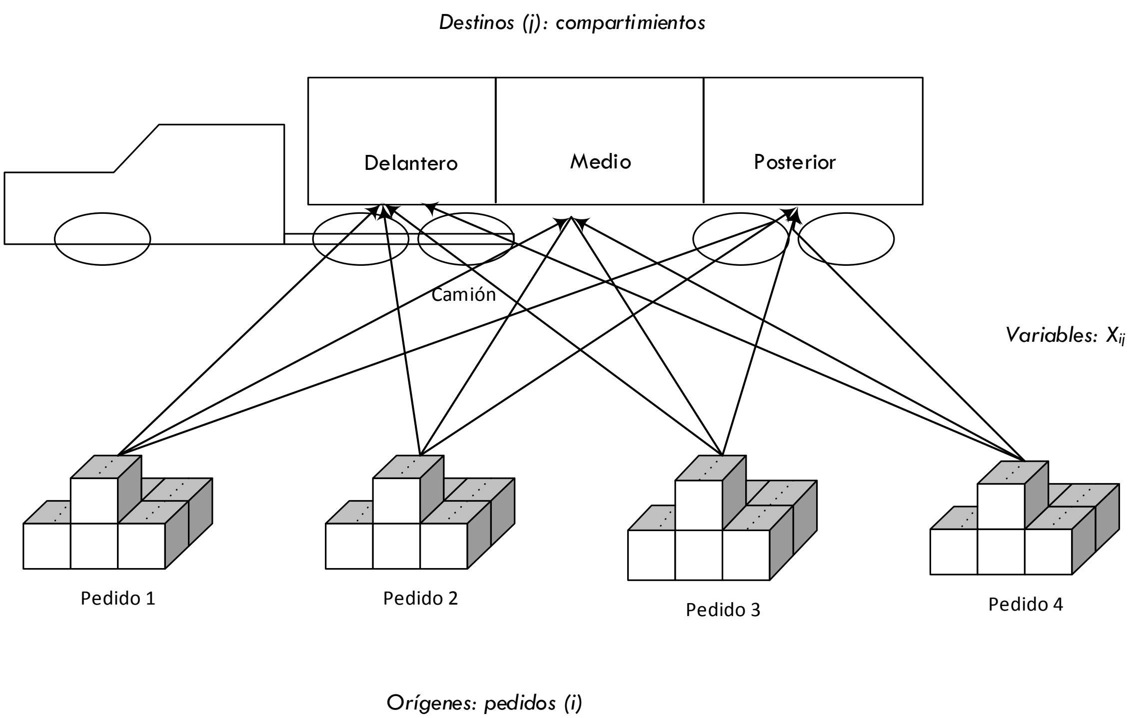
Compartimentos	Capacidad en peso (toneladas)	Capacidad en volumen (litros)
Delantero	12	7000
Central	18	9000
Posterior	10	5000

Para mantener el camión balanceado, el peso de la carga en cada compartimento debe ser proporcional a su capacidad en peso. Se tienen los siguientes pedidos para ser atendidos con el próximo viaje del camión cisterna.

Pedido	Peso (toneladas)	Volumen (litros/tonelada)	Ganancia ($/tonelada)
1	10	500	320
2	8	700	400
3	14	600	360
4	6	400	290

Se puede aceptar cualquier fracción de estos pedidos. El objetivo es determinar qué cantidad en peso de cada pedido se debe aceptar (si se acepta) y cómo distribuir la carga correspondiente entre los compartimentos para maximizar la ganancia que se logre con el viaje. Definir las variables de decisión y formular el modelo de programación lineal.

Un esquema para el problema:



Solución

Índices del modelo:

i : pedidos

j : compartimentos

Variables de decisión:

X_{ij} : fracción del pedido i por colocar en el compartimento j.

(i = 1,...,4; j = 1,...,3)

Función objetivo:

$$Z = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{4} Ganancia_i * \ x_{ij}$$

Maximizar

Restricciones:

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} * peso_i \leq \ capacidad\_peso_j, = 1,...,3 \qquad Para\ j = 1,...,3$$

Familia por capacidad límite de cada compartimento en peso:

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} * peso_i * densidad_i \leq \ capacidad_{volj}, = 1,...,3 \qquad Para\ j = 1,...,3$$

Familia por capacidad límite de cada compartimento en volumen:

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} \ \leq 1\ , \qquad Para\ i = 1, \dots ,4$$

Familia por tamaño de cada pedido:

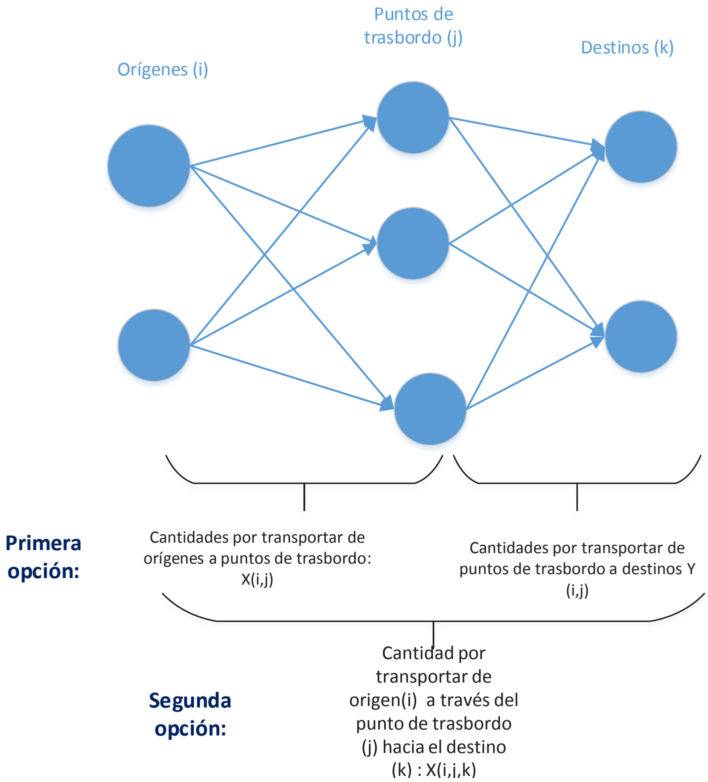
Nótese que en este caso no ha sido necesario forzar a la actividad obligando a trasladar cada pedido íntegramente, ya que ello ocurrirá "naturalmente", dado que el objetivo es obtener las máximas ganancias, de ninguna manera sería más conveniente la inactividad, a diferencia del ejemplo anterior.

Restricciones de signo:

$$X_{ij} \geq 0, \qquad Para\ i = 1,...,4; \qquad Para\ j = 1,...,3$$

5.3 Modelos de trasbordo

El dibujo muestra la estructura básica de un problema de este tipo:



Familia de variables de decisión típica:

Observando el dibujo que muestra la estructura básica del problema de trasbordo, debe determinarse: **Cuánto transportar de orígenes a puntos de trasbordo y de estos a destinos**. Llamando i a los orígenes, j a los puntos de trasbordo y k a los destinos, hay dos formas de definir las variables de decisión:

Primera forma:

Xij : unidades por trasladar desde el origen i por medio de los puntos de trasbordo j.

Yjk : unidades por trasladar desde los puntos de trasbordo j hacia los destinos k.

Segunda forma:

$Xijk$: unidades por trasladar desde el origen i por medio de los puntos de trasbordo j hacia los destinos k.

Familias de restricciones típicas:

- Disponibilidad en orígenes
- Capacidad en puntos de trasbordo
- Capacidad de los medios de transporte
- Requerimiento en destinos

- Balance en puntos de trasbordo: necesario cuando se plantean dos familias de variables de decisión, es decir, en el caso de definir las variables de la segunda forma.

Ejemplo 1

Una empresa tiene dos plantas de fabricación ubicadas en distintas localidades. Puede vender sus productos en tres mercados diferentes ubicados en lugares distintos, por medio de sus almacenes. La demanda en cada mercado es limitada, por lo cual no es posible vender una cantidad mayor.

Los datos de capacidad en cada planta, así como el costo de transporte hacia los almacenes se dan en la siguiente tabla, además se señala el dato de capacidad en cada almacén:

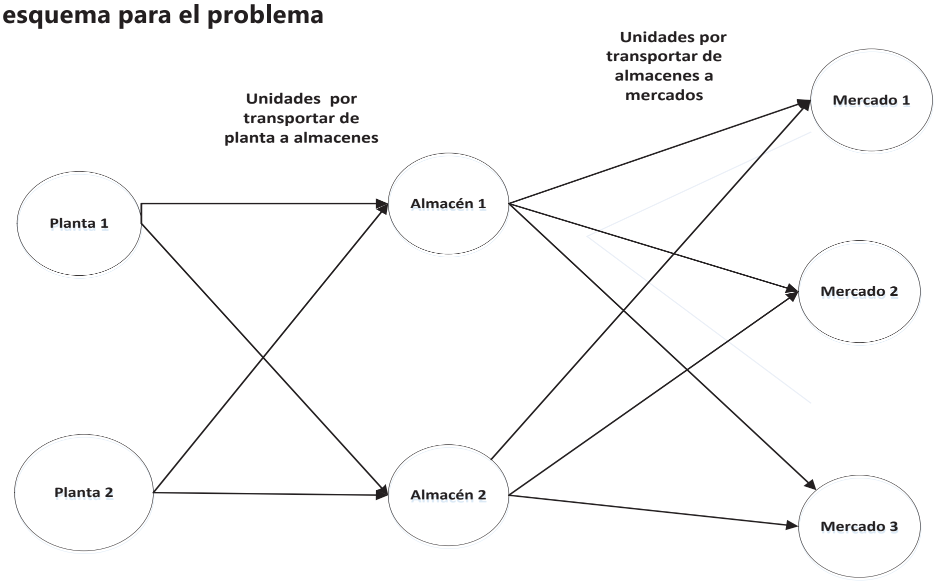
Planta	Capacidad de producción (unid.)	Costo de transporte ($/unid.)	
		Hacia almacén 1	Hacia almacén 2
1	5500	5	6
2	5500	7	5
Capacidad de cada almacén (unid)		2000	3000

Almacén	Costo de transporte ($/unid)		
	Hacia el mercado 1	Hacia el mercado 2	Hacia el mercado 3
1	3	2	3
2	4	4	3
Demanda (unid.)	3000	2500	2000

En cada planta, el costo de producción de una unidad de producto es de $ 22. El precio de venta en cada mercado es de $ 45, $ 48 y $ 50 por producto respectivamente.

Definir las variables de decisión y formular el modelo de programación lineal que permita a la empresa planear sus operaciones.

Un esquema para el problema



Solución

Índices del modelo:

i : plantas

j : almacenes

k : mercados

Variables de decisión:

Primera forma:

X_i : unidades por transportar de planta i a almacén j

Y_{jk} : unidades por transportar de almacenes j a mercado k

(i = 1,...,2; j = 1,...,2, k = 1,...,3)

Segunda forma:

X_{ijk} : unidades por transportar de planta i a almacén j para el mercado k.

Función objetivo: utilidades totales.

Para la primera forma:

$$Maximizar\ \ Z = \underbrace{\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{3} precio_k * \ y_{jk} -}_{\text{Ingresos por venta en mercados}}$$

$$\underbrace{22 * \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} x_{ij}}_{\text{Costo de producción}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} x_{ij} * costo\_transp1_{i,j} - \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{3} y_{jk} * costo\_transp2_{jk}}_{\text{Costo de transporte en ambos tramos}}$$

Para la segunda forma:

$$Maximizar\ \ Z = \underbrace{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{3} precio_k * \ x_{ijk} -}_{\text{Ingresos por venta en mercados}}$$

$$\underbrace{22 * \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{3} x_{ijk}}_{\text{Costo de producción}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} costo\_transp1_{ij} * \sum_{k=1}^{3} x_{ijk} - \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{3} costo\_transp2_{jk} * \sum_{i=1}^{2} x_{ijk}}_{\text{Costo de transporte en ambos tramos}}$$

Restricciones:

Para la primera forma

Familia por capacidad de producción en cada planta:

$$\sum_{j=1}^{2} x_{ij} \leq capacidad\_p_i, \qquad \forall\ i = 1{,}2$$

Familia por capacidad en cada almacén:

$$\sum_{i=1}^{2} x_{ij} \leq capacidad\_a_j, \qquad \forall\ j = 1{,}2$$

Familia por demanda en cada mercado:

$$\sum_{j=1}^{2} y_{jk} \leq demanda_k, \qquad \forall\ k = 1{,}\ldots{,}3$$

Familia de balances en cada almacén:

En esta forma, dado que se emplean dos familias de variables diferentes para representar lo que llega desde las plantas y lo que sale hacia los clientes, respectivamente, es necesario asegurarse que en cada almacén "**todo lo que llega desde las plantas esté en equilibrio con lo que sale hacia los clientes**" bajo el principio de que en los almacenes nada se crea ni se destruye.

$$\sum_{i=1}^{2} x_{ij} = \sum_{k=1}^{3} y_{jk}, \quad \forall\ j = 1, 2$$

Restricciones de signo:

$X_{ij} \geq 0, \qquad \forall i=1{,}2, \qquad \forall j=1{,}2$

$Y_{jk} \geq 0, \qquad \forall j=1{,}2, \qquad \forall k=1{,}\ldots{,}3$

Para la segunda forma:

Familia por capacidad de producción en cada planta:

$$\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} x_{ijk} \leq capacidad\_p_i, \qquad \forall\ i = 1{,}2$$

Familia por capacidad en cada almacén:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{3} x_{ijk} \leq capacidad\_a_j, \qquad \forall\, i = 1,2$$

Familia por demanda en cada mercado:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} x_{ijk} \leq demanda_k, \quad \forall\, k = 1,\ldots,3$$

Restricciones de signo:

$$X_{ijk} \geq 0, \qquad \forall i = 1,2, \qquad \forall j = 1,2, \quad \forall k = 1,\ldots,3$$

Ejemplo 2

Fresh Fruits importa plátanos desde Honduras y Costa Rica hacia las ciudades estadounidenses de Miami y San Diego. Ahí se recibe todo lo que se importe y la compañía vende una cantidad de la fruta y el resto es enviado desde dichas ciudades para que sea vendido a tres clientes, ubicados en Denver, Kansas City y Ft. Worth, respectivamente. Este mes se ha cosechado 200 000 libras de plátanos en Honduras y 100 000 libras de plátanos en Costa Rica.

El pronóstico de la demanda en Miami y en San Diego es de 150 000 y 100 000 libras de plátanos, respectivamente; siendo el precio de venta: 6 $/libra y 7 $/libra, respectivamente. Asimismo, el pronóstico de la demanda de los clientes en Denver, Kansas City y Ft. Worth es de 60 000, 40 000 y 65 000 libras de plátanos, respectivamente; siendo el precio de venta: 10 $/libra, 11 $/libra y 12 $/libra, respectivamente. En ambos casos, no es obligatorio vender todo lo pronosticado.

El costo de la cosecha es de 2 $/libra en Honduras y 2.5 $/libra en Costa Rica. El costo de transporte se estima en 0.001 $/libra - km. Las distancias entre las ciudades son:

Distancias (km)

Hacia / Desde	Miami	San Diego
Honduras	900	2400
Costa Rica	1200	2700

Distancias (km)

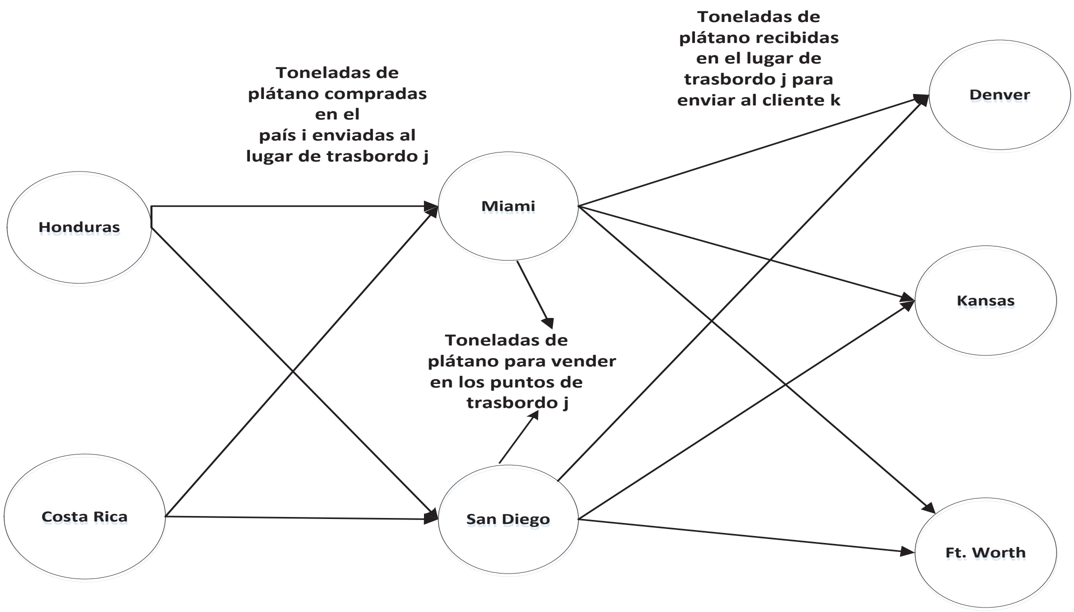
Hacia / Desde	Denver	Kansas City	Ft. Worth
Miami	2107	1226	1343
San Diego	1095	1833	1348

Definir las variables de decisión y formular el modelo de programación lineal que le permita a la empresa planear su producción.

En este ejemplo, los orígenes del transporte de plátanos son Honduras y Costa Rica; los lugares de trasbordo son Miami y San Diego; y los destinos son las ciudades de Denver, Kansas y Ft. Worth. **Una variante interesante en este problema es que**

Miami y San Diego, además de lugares de trasbordo, son también puntos de venta de cierta cantidad de plátanos.

Un esquema para el problema:



Solución

Índices del modelo:

i : países de origen

j : lugares de trasbordo

k : clientes

Variables de decisión

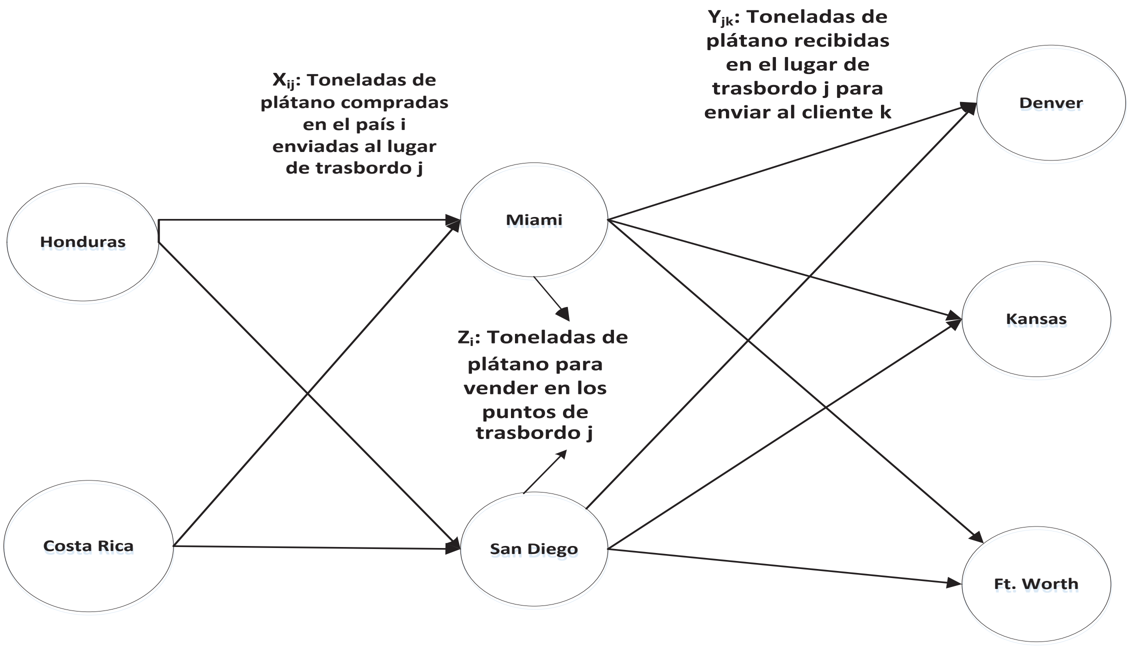
Primera forma

Se define varias familias de variables de decisión para las cantidades que van desde los orígenes hasta los destinos y una familia adicional, porque en este caso particular puede venderse también en los puntos de trasbordo:

X_{ij} : toneladas de plátano comprados al país i para enviar al lugar de trasbordo j.

Y_{jk} : toneladas de plátano del lugar de trasbordo j enviadas al cliente k.

Z_j : toneladas de plátano vendidas en el lugar de trasbordo j.



Para la primera forma

Función objetivo: utilidades totales.

Dado que la función objetivo resulta extensa, se ha empleado las variables auxiliares: **ingresos por ventas, costo de plátanos y costo de transporte.** Estas variables se llaman variables auxiliares, porque permiten hacer cálculos auxiliares utilizando las variables de decisión.

Maximizar

U = Ingresos por ventas - costo de plátanos - costo de transporte

$$Ingresos\ por\ ventas = \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} Y_{jk} \quad * precio\_c_k \ + \sum_{j=1}^{2} Z_j * precio\_t_j$$

$$Costo\ de\ plátanos \ = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} X_{ij} * \ costo\_origen_i$$

$$Costo\ de\ transporte = 0.001 * (\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} X_{ij} * distancia1_{ij} + \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{3} Y_{jk} * distancia2_{jk})$$

Restricciones:

Demanda en las ciudades de Denver, Kansas y Ft. Worth:

$$\sum_{j=1}^{2} Y_{jk} \leq demanda_k \text{ }, \forall k = 1,\ldots,3$$

Demanda en los puntos de trasbordo:

$$Z_j \leq dem_{j,} \ \forall j = 1,2$$

Oferta en los orígenes:

$$\sum_{j=1}^{2} x_{ij} \leq oferta_i, \quad \forall i = 1,2$$

En esta forma, es necesario modelar la condición de que en los puntos de trasbordo debe verificarse que todos los plátanos que llegan "cuadren" con los plátanos que salen. Esto es lo que se llama ecuaciones de balance que son necesarias solo en caso de que se planteen las familias de variables por separado:

$$\sum_{i=1}^{2} x_{ij} \ = Z_j + \sum_{k=1}^{3} y_{jk}, \quad \forall \ j = 1, 2$$

Restricciones de signo:

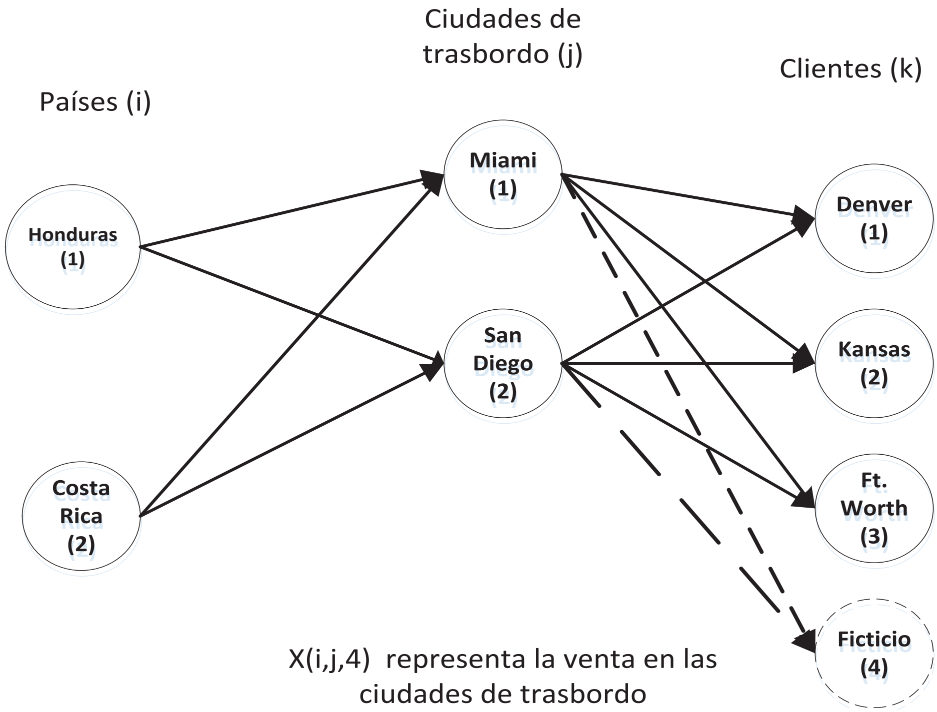
$$x_{ij} \ \geq 0, \ \forall i = 1,2 \text{ }, \forall j = 1,2, \quad y_{jk} \ \geq 0, \ \forall j = 1,2, \ \forall k = 1,\ldots,3$$

Segunda forma

Se define como una familia de variables de decisión para las cantidades que van desde los orígenes hasta los destinos, pasando por puntos de trasbordo, incluyendo un destino ficticio (k = 4) para las ventas en los puntos de trasbordo.

X_{ijk}: toneladas de plátano comprados en el país i para enviar a través del lugar de trasbordo j hacia el cliente k.

La forma como se modela la posibilidad de vender en las ciudades de trasbordo se explica mejor con el siguiente esquema:



Función objetivo: utilidades totales.

Maximizar

U = Ingresos por ventas - costos de transporte - costo de los plátanos

$$Ingresos\ por\ ventas = \underbrace{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{\mathbf{3}} precio\_c_k * x_{ijk}}_{\text{Ingresos por ventas con los clientes finales.}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} x_{ij\mathbf{4}} * precio\_t_{j\mathbf{4}}}_{\text{Ingresos por ventas en Miami y San Diego (destino ficticio 4).}}$$

En la definición de los datos el valor de $precio\_c_k$, para k=4 debe ser cero, porque k=4 es un destino ficticio y $precio\_t_{jk}$ para k = 1, 2, 3 debe ser cero, debido a que se trata del precio solo en j = 1, 2 (Miami y San Diego).

$$costo\ de\ plátanos = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{4} x_{ijk} * costo_i$$

$$costos\ de\ transporte = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{4} (distancia1_{ij} + distancia2_{jk}) * 0.001 * x_{ijk}$$

En la definición de los datos, el valor de la distancia de cualquier j a k = 4 (distancia2_{j4}) debe ser cero debido a que, en ese caso, los plátanos se quedan en j.

Restricciones:

Demanda en las ciudades de Denver, Kansas y Ft. Worth, no se incluye el destino ficticio porque esta es la demanda de los clientes finales:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} x_{ijk} \leq demanda_k, \forall k = 1,\ldots,3$$

Demanda en los puntos de trasbordo (cantidades de cada punto de trasbordo al destino ficticio que representa la venta en dichos puntos de trasbordo):

$$\sum_{i=1}^{2} x_{ij\mathbf{4}} \leq dem_{\boldsymbol{j4}}, \forall j = 1,2$$

En la definición de los datos dem_{jk}, para k = 1, 2, 3 debe ser cero porque se trata solo de la demanda en j = 1,2 (Miami y San Diego).

La oferta en los orígenes (lo que sale de ellos para todo destino):

$$\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{4} x_{ijk} \leq oferta_i, \forall i = 1,2$$

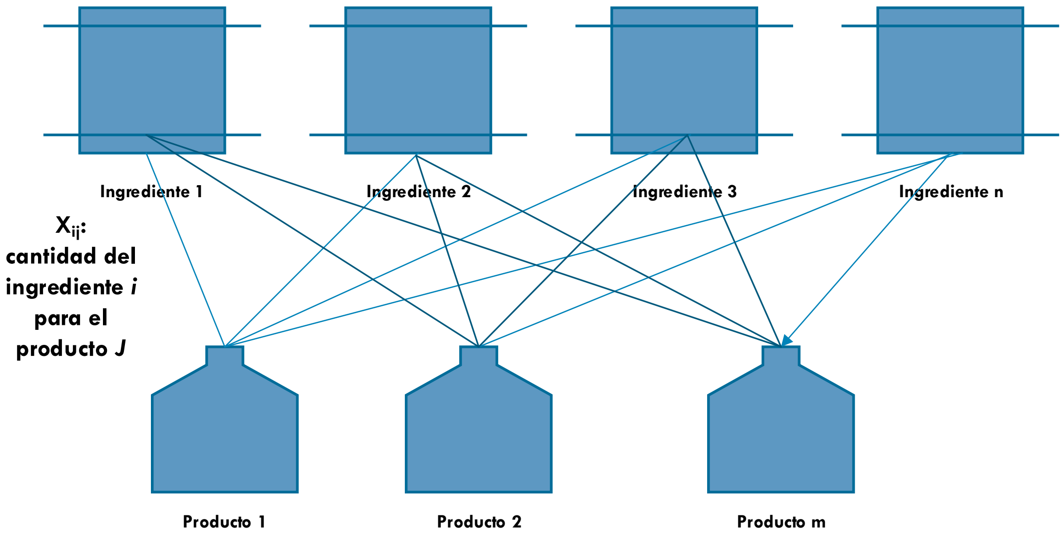
Restricciones de signo:

$$X_{ijk} \geq 0, \qquad \forall i=1,2, \qquad \forall=1,2, \qquad \forall k=1,\ldots,4$$

5.4 Modelos de mezclas

El dibujo muestra la estructura básica de un problema de este tipo:

Ingredientes (i)



Productos (j)

Familias de variables de decisión típicas

¿Cuánto de cada insumo (ingrediente) se tiene que utilizar para cada producto?

La receta para preparar cada producto es lo desconocido

X_{ij} **: cantidad del ingrediente "i" por utilizar para el producto "j".**

Es un error frecuente definir las variables de decisión de la forma siguiente:

"cantidad de producto j por elaborar con el ingrediente i"

Esta definición es equivocada porque hace referencia a la posibilidad de elaborar un producto a partir de un ingrediente y un ingrediente es solo eso, un ingrediente. Los ingredientes deben combinarse para dar lugar a un producto.

La esencia del problema de mezclas es definir la combinación óptima de ingredientes para cada producto.

Familias de restricciones típicas:

- Cantidad disponible de cada ingrediente
- Proporción de los ingredientes que debe tener cada producto resultante
- Demanda de cada producto resultante

Ejemplo 1

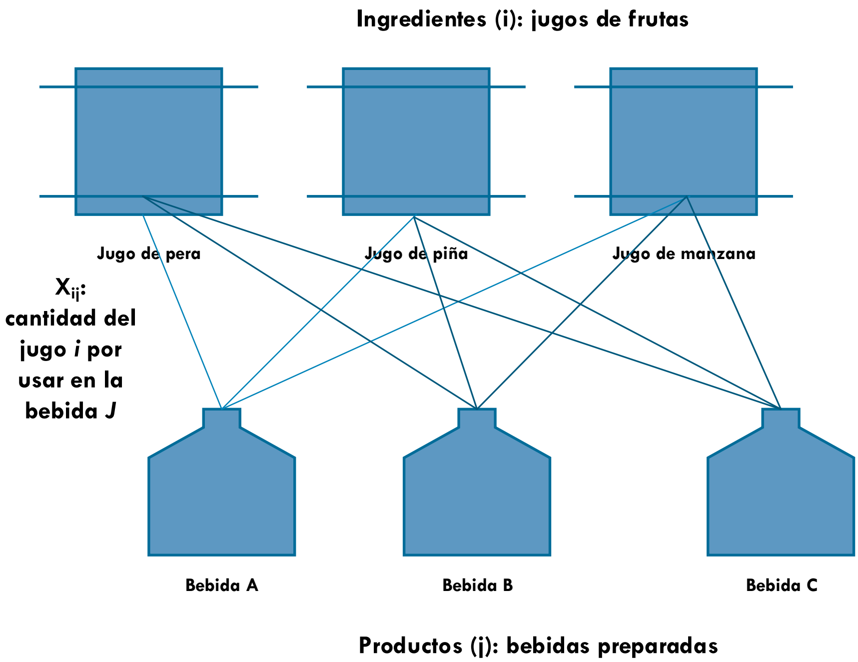
Una empresa produce tres tipos de bebidas: A, B y C, mezclando jugo de pera, piña y manzana. La disponibilidad de jugo de pera, piña y manzana es de 200 litros, 100 litros y 150 litros, respectivamente; a un costo por litro de 20, 10 y 9 soles, respectivamente. La demanda de bebida A, B y C, que debe ser satisfecha en su totalidad, es de 90, 100 y 90 litros, respectivamente. El contenido porcentual mínimo y máximo de jugo que debe tener cada bebida es el siguiente:

Contenido porcentual mínimo				**Contenido porcentual máximo**			
	Bebida A	**Bebida B**	**Bebida C**		**Bebida A**	**Bebida B**	**Bebida C**
Pera	10 %	30 %	20 %	**Pera**	40 %	40 %	40 %
Piña	30 %	20 %	30 %	**Piña**	50 %	40 %	40 %
Manzana	20 %	20 %	30 %	**Manzana**	40 %	60 %	40 %

Por ejemplo, por lo menos el 10 % de la bebida A debe contener jugo de pera, por lo menos el 30 % de la bebida A debe contener jugo de piña y por lo menos el 20 % de la bebida A debe contener jugo de manzana.

Definir las variables de decisión y formular el modelo de programación lineal.

Un esquema para el problema:



Solución

Índices del modelo:

i : jugos

j : bebidas

Variables de decisión:

X_{ij} : cantidad de litros de jugo i por usar en la bebida j.

$(i = 1,\ldots,3,\ j = 1,\ldots,3)$

Función objetivo:

$$\text{Minimizar} \quad Z = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{4} costo_i * x_{ij}$$

Restricciones:
Familia de disponibilidad de cada jugo:

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} \le disponibilidad_i, \qquad \forall\, i = 1,\ldots,3$$

Familia de demanda de cada producto que **debe** ser satisfecha:

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} \ge demanda_j, \qquad \forall\, j = 1,\ldots,3$$

Familia de especificaciones sobre el contenido mínimo de cada ingrediente en cada bebida:

$$X_{ij} \ge porcentaje\_mínimo_{ij} * \sum_{i=1}^{3} X_{ij}, \quad \forall\, i = 1,\ldots,3 \quad \forall j = 1,\ldots,3$$

En este caso, la expresión:

$$\sum_{i=1}^{3} X_{ij}$$

representa el total de la bebida por producir (que resulta de la suma de los ingredientes que se mezclan para prepararla) y podría reemplazarse por una variable auxiliar (*Totalj*) que tome el valor de dicha expresión, de modo que podría formularse esta familia de restricciones de la forma siguiente:

$$\sum_{i=1}^{3} X_{ij} = Total_j, \quad \forall j = 1,\ldots,3$$

$$X_{ij} \ge porcentaje\_mínimo_{ij} * total_j, \quad \forall\, i = 1,\ldots,3 \quad \forall j = 1,\ldots,3$$

Familia de especificaciones sobre el contenido máximo de cada ingrediente en cada bebida:

$$X_{ij} \ge porcentaje\_máximo_{ij} * total_j, \quad \forall\, i = 1,\ldots,3 \quad \forall j = 1,\ldots,3$$

Restricciones de signo:

$$X_{ij} \geq 0, \qquad \forall\, i = 1,\ldots,3 \qquad \forall j = 1,\ldots,3$$

Ejemplo 2

Una minera extrae carbón mineral de tres canteras: C1, C2 y C3; luego, mezcla el carbón para después atender el pedido de dos clientes. La información técnico-económica respecto al carbón de cada cantera se muestra a continuación:

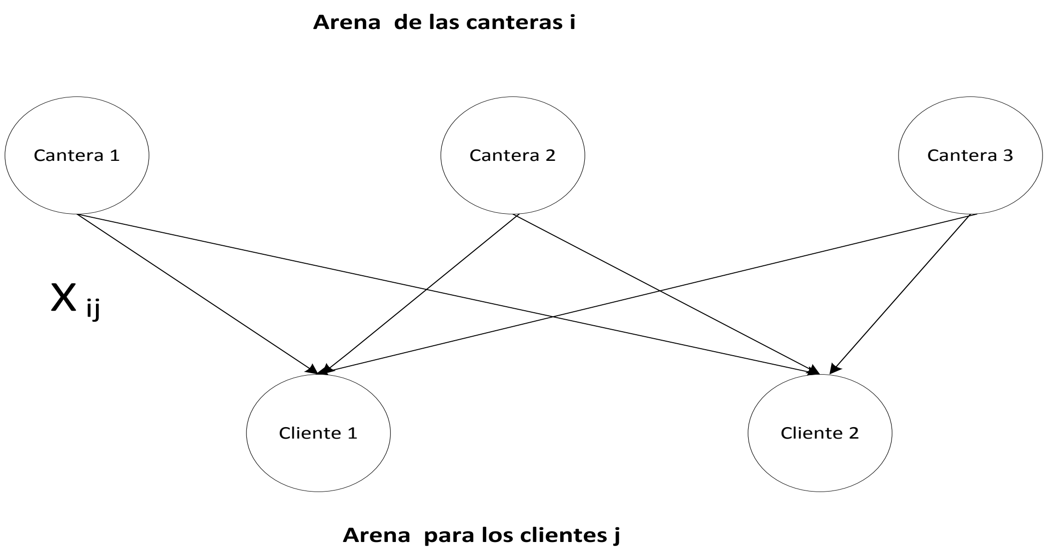
Cantera	Disponibilidad (toneladas)	Costo ($/tonelada)	Contenido de ceniza (%)	Contenido de azufre (%)
C1	120	50	8	5
C2	100	55	6	4
C3	140	62	4	3

La cantidad mínima y el contenido porcentual máximo de ceniza y azufre que debe contener el carbón que se le entrega a cada cliente es el siguiente:

Cliente	Mínimo por entregar (toneladas)	Contenido máximo de ceniza (%)	Contenido máximo de azufre (%)
1	130	7	7,5
2	120	6	4,5

Según la información, se solicita definir las variables de decisión y formular el modelo de programación lineal correspondiente.

Un esquema para el problema:



Solución

Índices del modelo:

i : canteras

j : clientes

k : componentes

Variables de decisión:

X_{ij} : Cantidad de toneladas de carbón mineral de la cantera i para la mezcla del cliente j.

(i = 1,...,3, j = 1,...,2)

Función objetivo: costos totales.

Minimizar

$$Z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} x_{ij} * costo_i$$

Restricciones:

Familia de disponibilidad de cada cantera:

$$\sum_{j=1}^{2} x_{ij} \leq disponibilidad_i \ , \ \ \forall i = 1,\ldots,3$$

Familia de entrega mínima a cada cliente:

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} \geq entrega\_min_j \ , \ \ \forall j = 1,2$$

Familia de contenido máximo de cada componente por cada cliente:

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} * composición_{ik} \leq contenido\_máximo_{jk} * \sum_{i=1}^{3} x_{ij}, \quad \forall j = 1,2, \quad \forall k = 1,2$$

En este caso, la expresión:

$$\sum_{i=1}^{3} X_{ij}$$

representa el total de lo que se entregará a cada cliente (que resulta de la suma de los ingredientes que se mezclan) y podría reemplazarse por una variable auxiliar ($Total_j$) que tome el valor de dicha expresión, de modo que podría formularse esta familia de restricciones de la forma siguiente:

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = \ total_j, \quad \forall j = 1,2$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} * \ composición_{ik} \leq contenido\_máximo_{jk} * \ total_j, \ \ \forall k = 1,2, \quad \forall j = 1,2$$

Restricciones de signo:

$$X_{ij} \geq 0, \qquad \forall\ i = \ 1,\ldots,3 \qquad \forall j \ = \ 1,\ldots,3$$

5.5 Modelos de producción: múltiples periodos, uno o varios productos

Familias de variables de decisión típicas:

- ¿Cuánto se debe producir en cada periodo?
- ¿Cuánto se debe guardar en cada periodo?

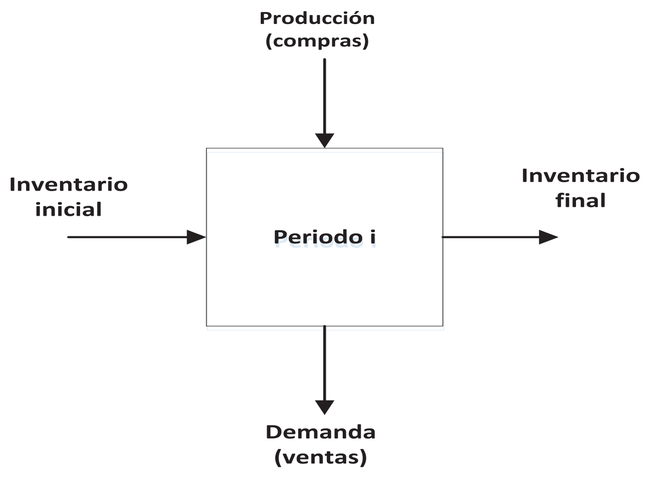
  Aunque estas variables pueden no ser consideradas de decisión, ya que dependen de la relación entre la producción y la demanda, las consideraremos en esta lista debido a que resultan ser incógnitas al momento de plantear el modelo.
- ¿Cuánto se debe vender en cada periodo?

  No siempre constituye una decisión, pues la cantidad por vender puede estar determinada y cumplir con atender dicha venta resulta ser una condición.

Familias de restricciones típicas:

Estos modelos tienen como mínimo las siguientes familias de restricciones:

- Capacidad de producción
- Capacidad de almacén
- Demanda
- Balance en cada periodo (este balance puede explicarse gráficamente):



El balance representa la condición de que **en cada periodo** las cantidades de producto con las que se cuenta (inventario inicial + producción) deben ser equivalentes a las cantidades de productos que se venden y se guardan para el periodo siguiente (inventario final), lo que se escribe en la siguiente ecuación:

inventario inicial + producción(compra) = venta (demanda) + inventario final

Cabe señalar que, en el primer periodo, el inventario inicial es un dato (un valor conocido), pero en los periodos siguientes el inventario inicial será el inventario final del periodo anterior que será una incógnita (una de las variables de decisión).

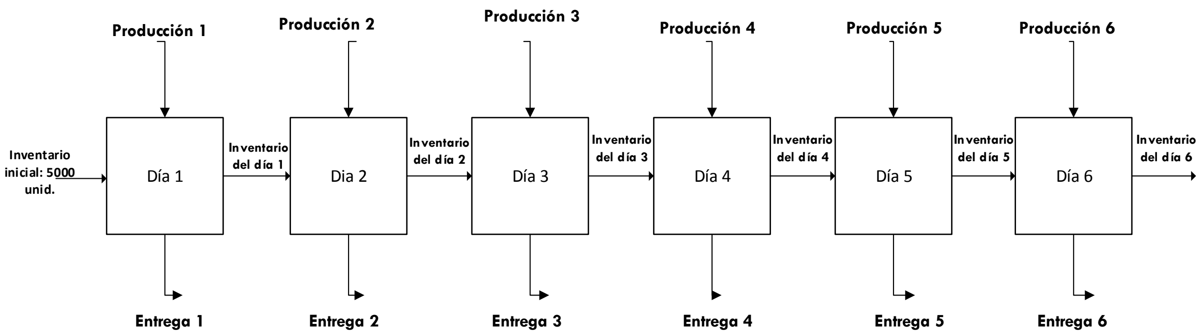
Ejemplo 1

En una cierta línea de producción se está programando la producción de un solo producto, el producto A. La demanda para la siguiente semana tiene un pronóstico de 50 000 unidades, la cual se estima se desagregará en los seis días útiles correspondientes de la siguiente forma:

Día	1	2	3	4	5	6
Producto A	5000	10 000	10 000	10 000	10 000	5000

No es necesario vender todo lo pronosticado. El inventario del producto A al inicio del día 1 es de 5000 unidades. La capacidad diaria de la línea de producción es de 16 horas y el ritmo de producción es de 800 unidades/hora. Se quiere programar la producción diaria de la línea con el objetivo de maximizar la utilidad neta de la semana considerando que cada unidad vendida contribuye con un margen de utilidad de $ 2 y mantener cada unidad de inventario al cierre del día cuesta $ 0,10. Definir las variables de decisión y formular el modelo de programación lineal.

Un esquema para el problema:



Índices del modelo:

i : días

Variables de decisión:

$Producción_i$: cantidad de unidades por producir en el día i

Inv_i: cantidad de unidades por guardar en el día i

$Entrega_i$: cantidad de unidades por vender en el día i

(i = 1,...,3)

En el texto del problema se encuentra establecido el número de unidades en que se desagrega el pronóstico de la demanda, pero luego dice que **no es necesario vender todo lo pronosticado**. Siendo así, se ha definido la variable entrega$_i$ para modelar la posibilidad de decidir cuánto vender.

Si el texto indicara que debe cumplirse con la entrega de las cantidades señaladas, no habría lugar a decidir ello, por lo que no se incluiría esa familia de variables.

Función objetivo: utilidad neta (contribución total al margen de utilidad por las unidades vendidas - costo de mantenimiento del inventario).

Maximizar

$$Z = \sum_{i=1}^{6} (entrega_i * 2 - inv_i * 0.1)$$

Restricciones:

Familia de restricciones por la capacidad diaria de producción (nótese que la capacidad de producción diaria está expresada en horas):

$$producción_i * \frac{1}{800} \leq 16 \quad , \ \forall i = 1,...,6$$

Revisando las unidades de la expresión:

$$\underbrace{producción_i}_{\text{unidades}} * \underbrace{\frac{1}{800}}_{\text{* horas/unidades}} \leq \underbrace{16}_{\text{horas}}$$

Familia de restricciones por pronóstico de entregas de cada día:

$$entrega_i \leq pronóstico\_de\_demanda_i, \quad \forall i=1,...,6$$

En este caso, pese a que el texto señala que el pronóstico para la semana es de 50 000 unidades, se formula una restricción para cada día, porque se ha establecido una desagregación de la cifra total en cantidades para cada día, a este dato se ha llamado: **pronóstico_de_demanda$_i$.**

Familia de restricciones por **balance** diario de unidades de producto:

En el gráfico que esquematiza el problema puede observarse que, en el caso del primer día, el balance debe considerar el valor del inventario inicial conocido (es un dato), a diferencia del resto de días en que el inventario inicial no es conocido y está representado por la variable de decisión ***inv$_i$***,. Por ello, la restricción de balance para el primer día se presenta separada de la familia de restricciones para los siguientes días:

$$5000 + producción_1 = inv_1 + entrega_1$$

$$inv_{i-1} + producción_i = entrega_i + inv_i, \forall \; i=2,...,6$$

No se indica explícitamente en el texto estas familias de restricciones; sin embargo, es imprescindible en este tipo de modelos.

Restricciones de signo:

$$producción_i \geq 0, \quad inv_i \geq 0, \quad entrega_i \geq 0, \quad \forall \; i=1,...,3$$

Ejemplo 2

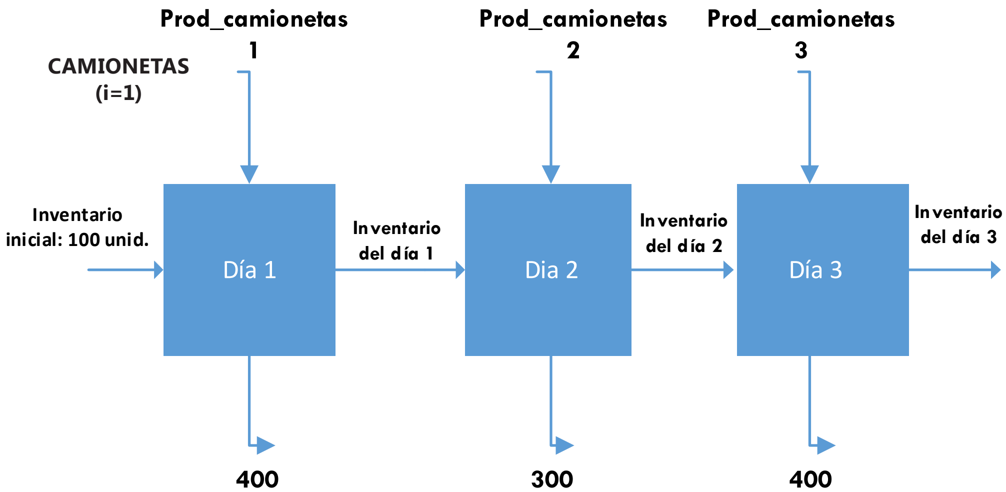
Durante los tres meses siguientes, General Cars debe cumplir sin demora con las siguientes demandas de camionetas y automóviles:

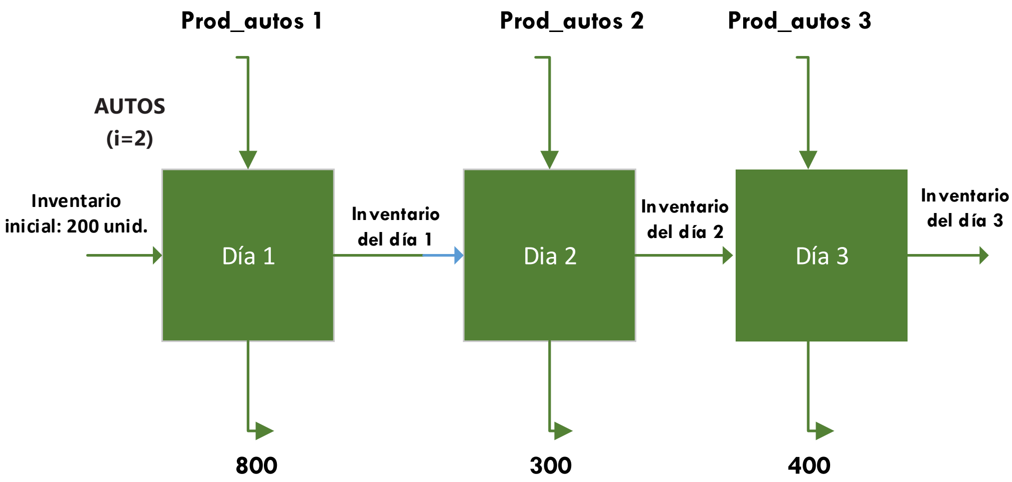
Mes	Camionetas	Automóviles
1	400	800
2	300	300
3	400	400

Durante cada mes se puede fabricar a lo más 1000 vehículos. Para cada camioneta se utilizan 2 toneladas de acero y cada automóvil requiere 1 tonelada de acero. En el mes 1, 2 y 3 la tonelada de acero cuesta \$ 400, \$ 600 y \$ 700, respectivamente. A lo más se puede comprar cada mes 1500 toneladas de acero (solo se puede utilizar el acero durante el mes en que se compró). Al principio del mes 1 hay en inventario 100 camionetas y 200 automóviles. El costo mensual de inventario final para cualquier vehículo es de 150 USD/unidad. A partir de la información, se debe definir las variables de decisión y formular el modelo de programación lineal.

Un esquema para el problema (son dos esquemas independientes porque son dos productos diferentes):

Índices del modelo:





i: producto

j: mes

Variables de decisión:

$Producción_{ij}$: cantidad de unidades del producto i por producir en el mes *j*.

Inv_{ij}: cantidad de unidades de producto i por guardar en el mes *j*.

(i = 1,2, j = 1,...,3)

No se define una variable para las ventas porque se señala claramente que **debe** cumplirse con vender las cantidades pronosticadas de modo que ya no cabe decisión alguna al respecto.

Función objetivo: costos totales (costo del material utilizado en la producción + costo de mantener en inventario):

Minimizar

$$Z = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2} producción_{ij} * req\_acero_i * \ costo\_acero_j \ + \ inv_{ij} * 150$$

req_acero_i es el dato de la cantidad de acero que se requiere para producir una unidad de cada tipo de producto.

Restricciones:

Familia de restricciones por capacidad de producción en cada mes:

$$\sum_{i=1}^{2} producción_{ij} \ \leq 1000, \quad \forall j \ = \ 1,\dots,3$$

Familia de restricciones por disponibilidad de acero en cada mes:

$$\sum_{i=1}^{2} \underbrace{producción_{ij} * req\_acero_i}_{\text{Expresa la cantidad de acero que será necesario comprar para producir vehículos}} \leq 1500, \qquad \forall j = 1,\ldots,3$$

Familia de restricciones de balance del primer mes de cada producto:

$$inventario\_inicial_i + producción_{i1} = inv_{i1} + \boldsymbol{venta}_{\boldsymbol{i1}}, \quad \forall i = 1,2$$

Se emplea el *dato* $venta_{i1}$ que representa justamente la cantidad que **debe** venderse de cada producto i en el primer mes.

Familia de restricciones de balance para el resto de meses de cada producto:

$$inv_{ij} + producción_{ij} = inv_{ij} + \boldsymbol{venta}_{\boldsymbol{ij}}, \quad \forall i = 1,2 \qquad \forall j = 2,3$$

Se emplea el dato $venta_{i1}$ que representa justamente la cantidad que **debe** venderse de cada producto i en el primer mes.

Restricciones de signo:

$$producción_{ij} \geq 0, \qquad inv_{ij} \geq 0, \qquad \forall\, i = 1,\ldots,3 \qquad \forall j = 1,\ldots,3$$

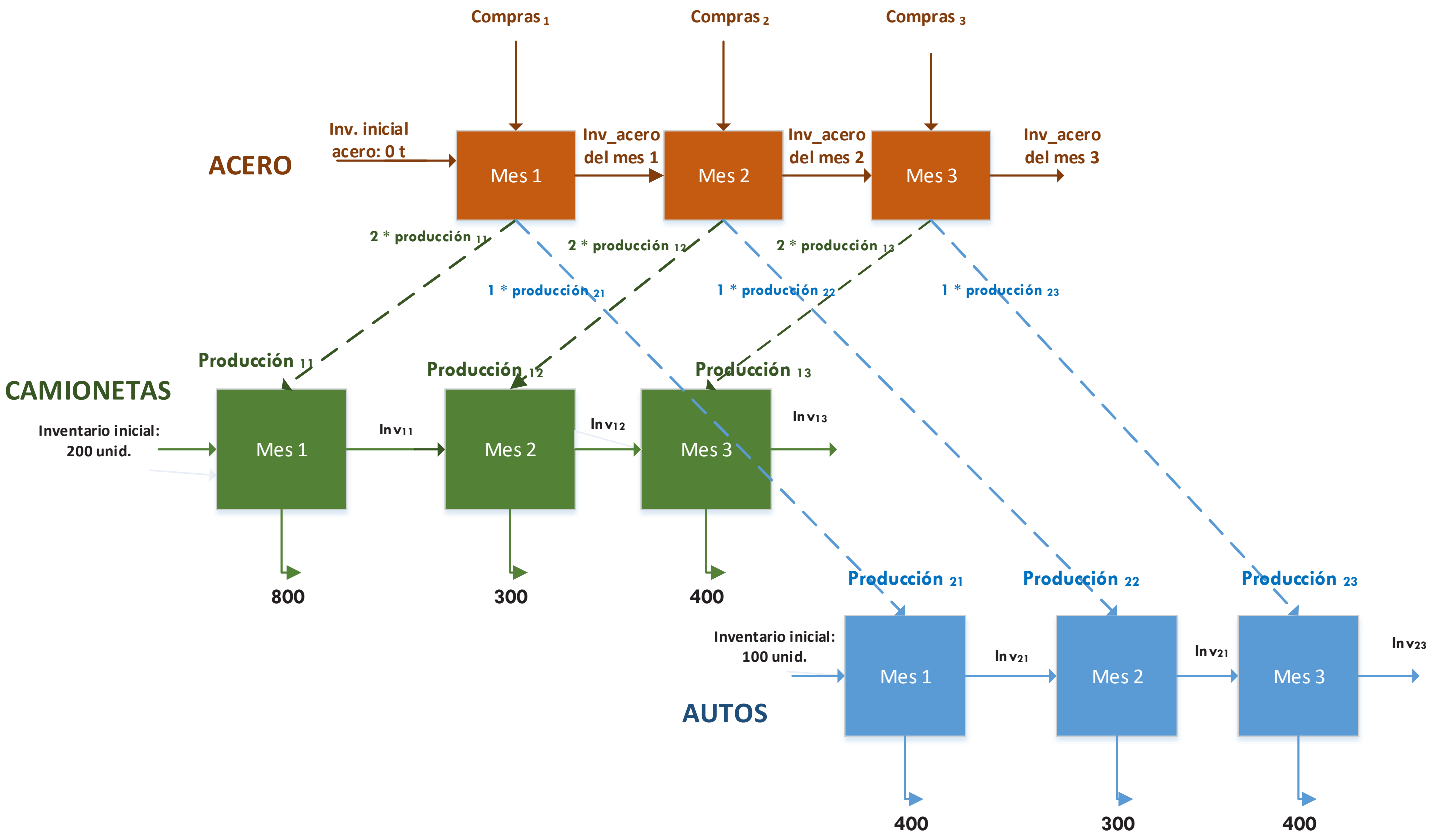
Escenario

En el caso del ejemplo 2 se indica que el acero se compra en cantidades exactamente iguales a la necesidades de producción, hasta el máximo de 1500 toneladas cada mes. Sin embargo, dadas las fluctuaciones de precio del acero de un mes al otro podría resultar conveniente comprar una cantidad mayor a la estrictamente necesaria en algún mes y guardar el excedente. Para evaluar esa posibilidad, ahora tenga en cuenta que General Cars cuenta con un almacén de insumos, en el cual puede almacenar el acero excedente luego de atender la producción, a un costo mensual de 20 $/tonelada. Presente los cambios en el modelo original.

Solución

Este cambio propone la posibilidad de decidir cuánto acero comprar, ya que teniendo la posibilidad de guardarlo es posible comprar una cantidad mayor que la requerida para la producción de los vehículos en cualquier mes y guardar los excedentes. Es también posible comprar una cantidad menor a la requerida estrictamente para la producción y utilizar los excedentes almacenados en periodos anteriores. Por esta razón se definen dos nuevas variables de decisión.

Un nuevo esquema para el problema:



Nuevas variables de decisión (en adición a las ya definidas para el problema original):

$Compra_j$: cantidad de acero por comprar en el periodo j.

Inv_acero_j : cantidad de acero por guardar en el periodo j.

Función objetivo: costos totales (costo del material utilizado en la producción + costo de mantener en inventario)

Minimizar

$$Z = \sum_{j=1}^{3} (compra_j * \; costo\_acero_{\;j} \; + \; inv\_acero_j * 20\;) + \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} inv_{ij} * 150$$

Restricciones:

Familia de restricciones por capacidad de producción en cada mes:

$$\sum_{i=1}^{2} producción_{ij} \; \leq 1000, \quad \forall j = 1,\ldots,3$$

Familia de restricciones por disponibilidad de acero en cada mes (cambia esta restricción ya que el límite se aplica a la compra):

$$compra_j \leq 1500, \qquad \forall j = 1,\ldots,3$$

Familia de restricciones de balance del primer mes de cada producto:

$$inventario\_inicial_i + producción_{i1} = inv_{i1} + \boldsymbol{venta_{i1}}, \qquad \forall i = 1,2$$

Familia de restricciones de balance para el resto de meses de cada producto:

$$inv_{ij\text{-}1} + producción_{ij} = inv_{ij} + \boldsymbol{venta_{ij}}, \qquad \forall i = 1,2, \qquad \forall j = 2,3$$

Nuevas restricciones

Restricción de balance para el acero en el primer mes:

$$0 + compra_1 = inv\_acero_1 + \sum_{i=1}^{2} producción_{i1} * req\_acero_i,$$

Familia de restricciones de balance para el acero en cada mes luego del primer mes:

$$inv\_acero_{j-1} + compra_j = inv\_acero_j + \sum_{i=1}^{2} producción_{ij} * req\_acero_i\,,$$

$$\forall j = 2,3$$

Restricciones de signo:

$$producción_{ij} \geq 0, \quad inv_{ij} \geq 0, \qquad \forall\, i = 1,\ldots,3, \qquad \forall j = 1,\ldots,3$$

$$compra_j \geq 0 \qquad \forall j = 1,\ldots,3$$

$$inv\_acero_j \geq 0 \qquad \forall j = 1,\ldots,3$$

5.6 Discusión: interpretación de la información sobre "demanda"

De lo observado en los ejemplos de aplicación del problema de producción de múltiples periodos es necesario precisar algunos aspectos sobre la demanda.

¿Qué es la demanda?

Es la cantidad de bienes o servicios que los compradores o consumidores están dispuestos a adquirir para satisfacer sus necesidades y tienen capacidad para pagar por ellos.

La demanda puede ser conocida en el futuro y no estar sujeta a fluctuaciones aleatorias, pero también puede incorporar incertidumbre y en ese caso se recurre a un pronóstico para tratar de estimar cuál será su valor en el futuro.

¿Qué es un pronóstico de demanda?

Un pronóstico es un proceso mediante el cual se proyecta el valor de una variable en el futuro. En este caso, la variable sería la demanda del producto o servicio.

La elaboración de buenos pronósticos es clave para tomar decisiones en muchos sistemas de una organización, pero todos los pronósticos están sujetos a error y entender el tamaño y la forma de este error es importante para la toma de decisiones.

Se utilizan técnicas estadísticas para obtener un pronóstico de alguna variable que luego se ajusta para incluir factores específicos a criterio de quien toma decisiones.

Cabe tener en cuenta que es posible administrar la demanda mediante estrategias de *marketing* (precios, publicidad y promoción) o mediante los inventarios (que generan costos) o los pedidos pendientes y las ventas perdidas.

Podemos llamar **demanda máxima** a la que se presenta en los periodos pico; por ejemplo, la demanda de pasajes aéreos en periodos de vacaciones, en comparación con el resto de los meses del año. Podemos llamar **demanda mínima** a la que necesitamos vender para que resulte rentable operar a la empresa. En ambos casos debe definirse una variable de decisión para la cantidad por vender y acotarla a lo mínimo o máximo según el caso.

Si ya se ha pactado con clientes una cantidad que debe entregarse, entonces no existe la posibilidad de decidir sobre la cantidad por vender, pues ya estaría definida y por lo tanto no habría que definir una variable de decisión para las ventas. También es posible que la demanda del mercado sea un factor no limitante en comparación con la capacidad de producción o la disponibilidad de algunos recursos, en ese caso no se consideraría relevante para la toma de decisiones.

Capítulo

6

Formulación compacta con el lenguaje de modelamiento Lingo

En este capítulo se tratan los siguientes temas:

- El lenguaje Lingo
- Interpretación del reporte de solución Lingo
- Ejercicios de modelación con el lenguaje Lingo

En este capítulo se formula un conjunto de ejercicios con el lenguaje Lingo, se resuelven y se elabora el informe de interpretación administrativa. Asimismo, en este conjunto de ejercicios se encuentran todos los formulados en el capítulo 5.

¿Qué debe lograr el estudiante?

- Mediante el uso del lenguaje Lingo, formular y resolver un modelo de programación lineal en su forma compacta.
- Interpretar el reporte de solución Lingo y elaborar un informe administrativo de la solución.

El **Lingo** es un lenguaje de programación que facilita la formulación y solución de modelos en la forma compacta.

Los modelos sencillos no permiten apreciar la ventaja de la formulación compacta, que se aprecia mejor cuanto más grande es el modelo (en términos de cantidad de variables o familias de variables y cantidad de familias de restricciones).

6.1 El lenguaje Lingo

Para iniciar un modelo, suele emplearse la palabra *model* y cuando este concluye, la palabra end, pero ambas palabras son prescindibles.

Todos los modelos en Lingo tienen tres secciones:

- **Definición de conjuntos**

  Se inicia con la palabra *sets*, seguida de ":". En esta sección se definen o declaran los conjuntos de objetos propios de cada caso y sus atributos. Los atributos pueden ser los datos o las variables que se asocian a cada elemento de cada conjunto.

  Esta sección del modelo debe concluir con las palabras en inglés endsets (ya sea juntas o separadas).

- **Carga de los datos**

  Se inicia con la palabra data, seguida de ":". en la que se definen los valores que tomarán los atributos del modelo declarados previamente en *sets*, así como el resto de datos. Debe concluir con *enddata*.

  Nota: Es común observar que los usuarios del Lingo omiten los dos puntos que deben colocarse luego de las palabra *sets* o *data* y generan un error que impide que el *software* resuelva el modelo.

- **El modelo mismo**

  Es decir, las expresiones para la función objetivo y las restricciones.

  Para la construcción del modelo en el lenguaje del Lingo, se utilizan las siguientes funciones:

  – **@sum**: para sumatorias.

  Ejemplo:

$$\sum_{\textit{índice = valor inicial}}^{\textit{índice = valor final}} \textit{expresión por sumar}$$

Sintaxis:

  – **@sum (conjunto(índice)**: expresión por sumar)

  Donde "conjunto" hace referencia al nombre asignado en *sets* para el conjunto de elementos asociado al índice de la sumatoria.

  Con esta expresión se despliegan los valores del índice "i" generándose varios términos que se suman entre sí.

  – **@for**: para familias de restricciones.

  Ejemplo:

$$\textit{restricción} \le \textit{ó} \ge \textit{ó} = \textit{lado\_derecho}_j \qquad \forall\, j = 1,\ldots,5$$

Sintaxis:

  – **@for (conjunto(índice)**: restricción ≥ ó ≤ ó = lado derecho)

  Donde "conjunto" hace referencia al nombre asignado en *sets* para el conjunto de elementos, asociado al índice de la familia de restricciones.

  Con esta expresión, se generarían tantas restricciones como elementos tenga el conjunto y cada una de dichas expresiones tendrá la misma forma, aunque los datos y variables que se empleen en ellas sean diferentes según el valor del índice que identifica cada elemento del conjunto.

Ejemplo

En una planta se fabrica una variedad de 6 productos. Con la finalidad de determinar la combinación adecuada por producir para este periodo, se cuenta con la siguiente información:

Requerimiento de recursos por producto
(unid. de recurso/unid. de producto)

Recursos

Producto	1	2	3	4	5
A	3	2	2	2	1
B	2	3	3	1	1
C	4	1	1	2	1
D	5	2	2	3	1
E	3	1	2	2	2
F	4	3	3	1	1

Las utilidades unitarias de cada producto en $/unidad son 30, 20, 10, 30, 40, 30, respectivamente. En este periodo la empresa enfrenta cierta restricción en la disponibilidad de cada uno de los recursos productivos, de modo que solo dispone de 500, 700, 800, 100 y 800 unidades de cada uno, respectivamente. Definir las variables de decisión y formular el modelo de programación lineal. Resolver el modelo y presentar el informe de solución.

Formulación:

Este es un problema de producción en un solo periodo, múltiples productos. Se busca determinar la cantidad óptima de cada producto que se fabricará teniendo en cuenta las limitaciones o restricciones que impone la disponibilidad de recursos, con el objetivo de obtener la mayor utilidad posible.

Índices del modelo:

i : productos

j : recursos

Las variables de decisión:

X_i : Cantidad de unidades por producir de cada producto i.

La función objetivo:

Maximizar

$$Z = \sum_{i=1}^{6} utilidad_i * x_i$$

Restricciones:

La familia de restricciones por la disponibilidad de cada insumo:

$$\sum_{i=1}^{6} requerimiento_{ij} * x_i \leq disponibilidad_j \qquad \forall j = 1,\ldots,5$$

Traduciendo el modelo al lenguaje Lingo

Conjuntos y atributos:

Sets:
Producto/1,...,6/: x, utilidad;
Recurso/1,…,5/: disponibilidad;
PR (producto, recurso): requerimiento;

Endsets

Estructura de datos del problema:

Data:
Utilidad = 30,20,10,30,40,30;
Disponibilidad = 500,700,800,1000,800;
Requerimiento = 3 2 2 2 1
2 3 3 1 1
4 1 1 2 1
5 2 2 3 1
3 1 2 2 2
4 3 3 1 1;

Los datos en forma de matriz corresponden a un conjunto derivado

Filas: productos
Columnas: recursos
Tal como se entiende del *set* PR

enddata

El modelo:

Max= @sum**(**producto(i): utilidad (i) * x(i)**);**

@for (recurso(j): ***[DISP]*** @sum(producto(i): requerimiento (i,j) * x(i)) <= disponibilidad (j));

En la familia de restricciones se ha incluido una etiqueta ***[DISP]*** con la finalidad de identificar en el reporte cada una de las restricciones de esta familia.

Nota:

Puede observarse que en el programa Lingo es necesario que los índices de las variables y de los datos se indiquen entre paréntesis y que se explicite el operador de multiplicación.

6.2 Interpretación del reporte de solución Lingo

Al resolver el modelo en el Lingo, el reporte de solución es el siguiente:

Objective value: 6666,667 (Valor óptimo de la función objetivo)

Variable	Value	Reduced Cost
X(1)	0,0000000E+00	9,999999
X(2)	0,0000000E+00	6,666666
X(3)	0,0000000E+00	43,33333
X(4)	0,0000000E+00	36,66667
X(5)	166,6667	0,0000000E+00
X(6)	0,0000000E+00	23,33333

Esta parte del reporte muestra los valores óptimos en la columna "Value" para cada variable de decisión.

Es información sobre la función objetivo, como primera línea del modelo. Sin embargo, su valor se señala al inicio del reporte.

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	6666,667	1,000000
DISP(1)	**0,0000**	**13,33333**
DISP(2)	533,3333	0,000000
DISP(3)	466,6667	0,000000
DISP(4)	666,6667	0,000000
DISP(5)	466,6667	0,000000

En esta parte del reporte, se resume qué ocurre en la solución óptima con las restricciones, cuánto de holgura (o exceso) hay en cada una y el precio dual de cada recurso. **Los precios duales son conceptos que se explicarán enseguida.**

Informe de la solución y la interpretación del reporte completo

Con los resultados mostrados en este reporte se elabora el siguiente **informe administrativo**. El informe administrativo es una interpretación de los resultados del modelo de forma entendible para quien lo lea.

Deberá producirse únicamente 166,67 unidades del producto 5 y se obtendrán $ 6 666 667 como utilidad total.

El informe administrativo debe señalar el valor óptimo de las variables de decisión y de la función objetivo. Esto es lo que necesita el tomador de decisiones para despejar las incógnitas de su problema de decisiones.

Cabe señalar que, de aquí en adelante, las variables con valor diferente de cero en la solución óptima se llamarán **variables básicas**. Las variables con valor cero en la solución óptima se llamarán **variables no básicas**.

En este caso, podemos decir que X(1), X(2), X(3) y X(4) son variables de decisión **no básicas**, pues su valor en el reporte es cero. En cambio, X(5) y X(6) son variables de solución **básicas**, pues sus valores son diferentes de cero.

En el reporte de solución del Lingo se puede encontrar más información, como por ejemplo:

Las variables de holgura o exceso (*slack or surplus*)

En la sección 3.1 de este texto, en la que se trató la solución gráfica de modelos de programación lineal (véase capítulo 3), se explicó el concepto de holgura o exceso.

En el ejemplo:

En la solución óptima se consume íntegramente el primer recurso (la variable de holgura de la restricción respectiva es cero) y quedan 533,33, 466,67, 666,67 y 466,67 unidades de cada uno de los restantes recursos respectivamente, valores que se leen en la segunda parte del reporte (*slack or surplus*).

Precios duales

Asociado a cada restricción, el reporte presenta también el valor del precio dual (*Dual price*). Solo tienen precio dual las restricciones activas e indican su impacto en la función objetivo si se varía en 1 unidad el lado derecho de la restricción activa respectiva.

Puede observarse en el reporte del ejemplo que la restricción que corresponde a la disponibilidad del recurso 1 que es activa (véase la línea que corresponde a ROW DISP (1) en la segunda parte del reporte) tiene precio dual. Eso quiere decir que es un recurso escaso, por ello **valioso. ¿Qué tan valioso? ¿Qué podría suceder con la solución óptima contando con una unidad más de este recurso valioso?** En ese caso el precio dual indica en cuánto mejoraría el valor de la función objetivo si se contara con una unidad más de ese recurso.

En el caso de las restricciones "≥" (por ejemplo la exigencia de cumplir un mínimo necesario) si la restricción es activa (variable de exceso con valor 0), tendría también un precio dual. La solución óptima cumple **únicamente** con el mínimo requerido (por ser obligatorio, por supuesto). Hacer más rigurosa la exigencia sería **perjudicial.**

¿Qué tan perjudicial? ¿Qué podría suceder con la solución óptima si la restricción exigiera una unidad más de cumplimiento mínimo? El precio dual indica en cuánto se perjudicaría el valor de la función objetivo si se hiciera más rigurosa la exigencia, en una unidad más. En este caso, el precio dual en el reporte aparecería acompañado de un signo negativo.

Los costos reducidos (*reduced cost* en el reporte)

Solo tienen costo reducido las **variables de decisión** que tienen valor cero en la solución, es decir, las variables de decisión **no básicas**. El costo reducido señala:

En cuánto se **perjudicaría** a la función objetivo si se le diera a esta variable un valor diferente de cero. Si es óptimo que esta variable tenga valor cero, entonces darle un valor diferente es "alejarse" de lo óptimo, lo que sería perjudicial para la función objetivo; el costo reducido indica en cuánto resulta perjudicial. Por ello solo tienen costo reducido las variables de decisión **no básicas**.

En el ejemplo:

X(1) tiene valor cero en la solución óptima; es decir, es óptimo no producir el producto 1. Su costo reducido es 9,999, esto quiere decir que si, pese a lo que recomienda la solución óptima, se decidiera hacer una unidad del producto 1, entonces la función objetivo se vería perjudicada en 9,99 dólares.

El lector podría hacerse esta pregunta: **"¿Cómo puede resultar perjudicial en $ 9,99 producir una unidad del producto 1, si se lee en el texto del ejercicio que el producto 1 tiene una utilidad de $ 30 por unidad?".** Lo que sucede es que para hacer una unidad del producto 1 es probable que deba dejar de producir otros productos y la utilidad que se dejaría de recibir es mayor que la que se obtiene por esa unidad del producto 1.

Entonces, el costo reducido también se puede interpretar como el valor en el que debe **mejorarse** el coeficiente de dicha variable en la función objetivo, para que no perjudique el valor óptimo al hacerla básica (para que resulte conveniente hacerla básica).

Sin embargo, es muy importante tener en cuenta que esta interpretación del costo reducido es válida solamente si el modelo de programación lineal posee una única solución óptima. Existe la posibilidad de que un modelo tenga soluciones múltiples, como se explicó en la sección 3.2, en cuyo caso el costo reducido ya no tiene la misma interpretación, pues podría cambiar de una solución óptima a otra.

¿Cómo se reconoce en el reporte del programa Lingo si existe alguno de los casos especiales señalados ya en la sección de solución gráfica?

Casos especiales

Al resolver un modelo de programación lineal pueden encontrarse los siguientes casos especiales.

- Soluciones múltiples
- Solución no acotada
- Solución no factible

a) ¿Cómo reconocer en el reporte de solución del Lingo la existencia de **soluciones múltiples?**

Si en el reporte se encuentra alguna variable ya sea de decisión o de holgura con valor cero (variables no básicas) y su respectivo costo reducido o precio dual, según corresponda, también es cero.

b) ¿Cómo reconocer en el reporte de solución del Lingo la existencia de soluciones no acotadas?

Al resolver el modelo, el Lingo muestra el mensaje: ***Unbounded solution.***

c) ¿Cómo reconocer en el reporte de solución del Lingo la existencia de solución infactible?

Al resolver el modelo, el Lingo muestra el mensaje ***Unfeasible solution.***

6.3 Ejercicios de modelación con Lingo

Parte A

Enseguida se presentan algunos ejercicios resueltos en los que, dado el modelo matemático en su forma compacta, este se traduce al lenguaje de Lingo para encontrar e interpretar la solución óptima.

Ejercicio 1

En una planta se cuenta con 3 máquinas para producir una cierta cantidad de artículos de dos tipos, al final de las próximas 2 semanas. Las 3 máquinas producen a una cierta tasa que es la misma en cada semana, mostrada en la tabla 1. Sin embargo, la producción de cada máquina no es íntegramente utilizable, pues a cada máquina se tiene asociada una fracción de producción defectuosa, que no cambia de una semana a otra, como se señala en la tabla 2.

Tabla 1

	Tasa de producción (unidades/hora)	
Máquina	**Producto 1**	**Producto 2**
1	100	120
2	85	100
3	150	120

Tabla 2

	Fracción de producción defectuosa	
Máquina	**Producto 1**	**Producto 2**
1	0,05	0,02
2	0,03	0,05
3	0,02	0,03

Se requiere una producción total sin defectuosos de 50 000 unidades del producto 1 y 60 000 unidades del producto 2 como mínimo, al final de las dos semanas. Sin embargo, durante la primera semana se dispone solo de 150 horas de trabajo, y en la segunda semana se dispone de 180 horas de trabajo.

Se ha establecido como condición que la producción total (incluyendo defectuosos) de la máquina 1, en la primera semana, no debe superar al doble de la producción total (incluyendo defectuosos) de la máquina 2 en dicha semana.

Los costos de producción en cualquier semana son los siguientes:

	Costo producción ($/unidad)	
Máquina	**Producto 1**	**Producto 2**
1	10	12
2	8	7
3	12	10

El modelo de programación lineal en su forma compacta formulado para este caso, el cual no incluye las restricciones de signo, es el siguiente:

Minimizar

$$Z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}\left(Costoproducción_{ij} \times Tasa_{ij} \times (X_{ij} + Y_{ij})\right)$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{3}\left(Tasa_{ij} \times \left(1 - Fracción_{ij}\right) \times \left(X_{ij} + Y_{ij}\right)\right) \geq \ prodMínima_{j}, \qquad \forall j = 1,2$$

$$\sum_{j=1}^{2}\left(X_{ij}\right) \leq 150, \qquad \forall i = 1, \dots, 3$$

$$\sum_{j=1}^{2}\left(Y_{ij}\right) \leq 180, \qquad \forall i = 1, \dots, 3$$

$$\sum_{j=1}^{2}\left(tasa_{1j} \times X_{1j}\right) \leq 2\sum_{j=1}^{2}\left(tasa_{2j} \times X_{2j}\right)$$

a) Identificar y definir las variables de decisión que posee el modelo y su significado.

$X_{(i,j)}$: horas empleadas en la máquina i para la producción del producto j en la semana 1.

$Y_{(i,j)}$: horas empleadas en la máquina i para la producción del producto j en la semana 2.

$(i = 1,\dots,3;\ j = 1, 2)$

b) ¿Cuántas restricciones posee el modelo (no incluya las restricciones de signo)? 9 restricciones.

c) Definir el significado administrativo de las tres primeras familias de restricciones que presenta el modelo.

1. Familia: producción mínima de cada tipo de producto en total por las dos semanas.

2. Familia: capacidad horaria disponible de cada máquina **en la semana 1**.

3. Familia: capacidad horaria disponible de cada máquina **en la semana 2**.

d) Formular el modelo Lingo de forma compacta y presentar el **informe administrativo** de la solución indicando, además, **el valor óptimo obtenido para la función objetivo**.

```
Sets:
Maq/1,...,3/;
Prod/1,...,2/   : prodmin;
mxp(maq,prod): Costoproducción, tasa, fracción, x, y;
End sets

Data:
prodmin = 50000 60000;
costoproducción = 10 12 8 7 12 10;
tasa = 100 120 85 100 150 120;
fracción = .05 .02 .03 .05 .02 .03;
Enddata
```

Puede observarse en la función objetivo que se han omitido los índices. Esto es correcto siempre y cuando **todos** los datos y variables presentes en la función tengan los mismos índices. En este caso, costoproducción, tasa, x e y tienen (i,j) como índices por ello estos se han omitido.

```
min = @sum(mxp(i,j): costoproducción*tasa*(x+y));

@for(prod(j): @sum(maq(i):tasa(i,j)*(1-fracción(i,j))*(x(i,j)+y(i,j)))>= prodmin(j));

@for(maq(i): @sum(prod(j): x(i,j)) <= 150);

@for(maq(i): @sum(prod(j): y(i,j)) <= 180);

@sum(prod(j): tasa(1,j)*X(1,j)) <= 2*@sum(prod(j): tasa(2,j)*X(2,j));

End
```

Informe administrativo de la solución:

Costo óptimo (valor óptimo de la función objetivo) : $ 1 130 904

Plan óptimo de asignación (horas)

	Semana 1	
Máquina	**Producto 1**	**Producto 2**
1	31,87	118,13
2	0	150
3	23,21	126,79

	Semana 2	
Máquina	**Producto 1**	**Producto 2**
1	180	0
2	0	180
3	180	0

Nota: El informe administrativo presenta en tablas los resultados obtenidos, pero es necesario que estas tablas lleven un título y encabezados adecuados, además de hacer referencia a las unidades en que se expresan los valores consignados, de lo contrario el decisor podría tener dificultades para entender los resultados que se informan.

e) Indique qué máquinas disponen de tiempo para ser asignadas a la producción de un producto nuevo, en la primera semana.

Ninguna, porque no hay holgura en la disponibilidad horaria de cada máquina en cada semana (puede sustentar también totalizando cada tabla por filas).

Ejercicio 2

Un asesor de inversiones debe recomendar a 5 de sus principales clientes la forma de invertir el capital que cada uno tiene disponible. El asesor ha identificado 5 alternativas de inversión que resultan atractivas, de las cuales se tiene la siguiente información:

Alternativa	Inversión máxima posible ($)	Rendimiento porcentual (%)	Puntaje de riesgo	Porcentaje de penalidad
1	100 000	5	50	0,5
2	120 000	7	60	0,3
3	60 000	4	40	0,1
4	90 000	3	50	0,4
5	80 000	8	30	0,5

La columna que señala la inversión máxima posible para cada alternativa, representa el tope de dinero que es posible invertir en total en cada una de ellas. El rendimiento porcentual se aplica sobre el monto invertido en la respectiva alternativa para así calcular las ganancias totales. Sin embargo, el asesor deberá descontar de las ganancias totales de sus clientes ciertos montos por penalidades. Los montos por penalidades se obtienen aplicando el porcentaje de penalidad, indicado en la última columna, al monto no invertido en cada alternativa.

El riesgo que genera la inversión que hace cada cliente en cada alternativa se calcula como una fracción del puntaje de riesgo que se señala en la tabla anterior. Esta fracción resulta de dividir el monto que invierte el cliente entre la inversión máxima posible.

Para cada cliente, el capital disponible, el máximo riesgo total aceptable y las alternativas en las cuales no desea invertir se muestran en la siguiente tabla:

Cliente	Capital disponible ($)	Máximo riesgo total aceptable	Alternativas en las que no desea invertir
1	120 000	30	1
2	100 000	20	2 y 3
3	100 000	25	3
4	50 000	20	3 y 4
5	80 000	10	5

El modelo que maximiza las ganancias netas totales (al cual se le ha omitido las restricciones de signo) es el siguiente:

Maximizar

$$Z = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}(X_{ij} * preferencia_{ij} * rendimiento_j)$$
$$- \sum_{j=1}^{5}(penalidad_j * \ (inv\_max_j - \sum_{i=1}^{5} X_{ij} * preferencia_{ij}))$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{5} X_{ij} * preferencia_{ij} \leq capital\_disp_i, \quad \forall i = 1,\ldots,5$$

$$\sum_{j=1}^{5} riesgo_{ij} \leq \max\_riesgo\_acep_i, \quad \forall i = 1,\ldots,5$$

$$riesgo_{ij} = puntaje\_riesgo_i * \left(X_{ij} * \frac{preferencia_{ij}}{inv\_max_j} \right) \ \forall i = 1,\ldots,5, \quad \forall j = 1,\ldots,5$$

$$\sum_{j=1}^{5} X_{ij} * preferencia_{ij} \leq inv\_max_j, \quad \forall j = 1,\ldots,5,$$

Nota: ***preferencia (i,j)*** es una matriz que tiene los siguientes datos:

Preferencia = *0 1 1 1 1*

1 0 0 1 1

1 1 0 1 1

1 1 0 0 1

1 1 1 1 0

a) Identificar y definir las variables de decisión que posee el modelo.

   $X_{i,j}$ **: Monto que debe invertir el cliente** i **en la alternativa J** ($i = 1,\ldots,5;\ j = 1,\ldots,5$).

b) ¿En qué unidades se expresa la función objetivo del modelo?: **En dólares**.

c) Explicar qué función cumple ***preferencia$_{i,j}$*** en el modelo:

   Representa el deseo de inversión de cada cliente en cada alternativa, donde 0 = El cliente i no desea invertir en la alternativa J, 1 = El cliente i desea invertir en la alternativa J.

d) Escribir el significado administrativo de las tres primeras familias de restricciones que presenta el modelo.

   1. **Familia: disponibilidad de capital por cada cliente.**
   2. **Familia: riesgo que genera el monto que invierte cada cliente en cada alternativa.**
   3. **Familia: máximo riesgo aceptable por la inversión que haga cada cliente.**

e) Formular el modelo Lingo de forma compacta y presentar el **informe administrativo** de la solución óptima, indicando además **el valor óptimo obtenido para la función objetivo.**

```
sets:
 cli/1..5/    : capital_disp, max_riesgo_acep;
 alt/1..5/    : rendimiento, penalidad, puntaje_riesgo, inv_max;
 cxa(cli,alt) : x, preferencia, riesgo;
end sets

data:
 capital_disp = 120 100 100 50 80;
 max_riesgo_acep = 30 20 25 20 10;
 rendimiento = .05 .07 .04 .03 .08;
 penalidad = .005 .003 .001 .004 .005;
 puntaje_riesgo = 50 60 40 50 30;
 inv_max = 100 120 60 90 80;
 preferencia = 0 1 1 1 1   1 0 0 1 1   1 0 1 1 1   1 1 0 0 1   1 1 1 1 0;
end data

max = @sum(cxa(i,j): x(i,j)*preferencia(i,j)*rendimiento(j))
- @sum(alt(j): penalidad(j)*(inv_max(j)-@sum(cli(i): x(i,j)*preferencia(i,j))));

 @for(cli(i): @sum(alt(j): x(i,j)*preferencia(i,j)) <= capital_disp(i));
 @for(cxa(i,j): riesgo = puntaje_riesgo(j)*x*preferencia/inv_max(j));
 @for(cli(i): @sum(alt(j): riesgo(i,j)) <= max_riesgo_acep(i));
 @for(alt(j): @sum(cli(i): x(i,j)*preferencia(i,j)) <= inv_max(j));
end
```

Informe administrativo de la solución:

Utilidad total óptima: $ 15 530

Plan óptimo de inversiones (en $)

Cliente	Alternativa 1	Alternativa 2	Alternativa 3	Alternativa 4	Alternativa 5
1		60 000			
2	30 000				13 330
3					66 607
4		40 000			
5		20 000			

Parte B

Enseguida se formularán en lenguaje Lingo y se resolverán todos los modelos de presentados en el capítulo 5 de este texto.

a) Modelo de producción: un solo periodo, múltiples productos

Prendas S.A. es una empresa de confecciones que produce prendas a medida para diversas instituciones. Entre las prendas más solicitadas están: camisas, pantalones, faldas y mandiles. Las prendas deben pasar por cuatro actividades consecutivas: corte, costura, inspección y empaque. La tabla siguiente muestra los datos por cada tipo de prenda:

Tiempo de procesamiento (minutos por prenda)					Precio de venta ($/prenda)
Prenda	**Corte**	**Costura**	**Inspección**	**Empaque**	
Camisa	10	20	3	5	10
Pantalón	9	24	2	5	11
Falda	11	17	3	5	12
Mandil	8	26	5	5	13
Capacidad diaria (minutos)	4800	9600	4700	4500	

Prendas S.A. tiene un convenio establecido con los trabajadores de la empresa para no producir más de 500 prendas al día, pero deben producirse por lo menos 100 pantalones para un pedido ya aceptado. La demanda es tan grande que permite que se venda todo lo que se produce. Defina las variables de decisión y formule el modelo de programación lineal que permita optimizar las operaciones de Prendas S.A.

Modelo matemático compacto

$$Maximizar \quad f = \sum_{i=1}^{4} Precio_i * P_i$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{4} Tiempo_{ij} * P_i \leq capacidad_i, \quad \forall j = 1, \dots, 4$$

$$\sum_{i=1}^{4} P_i \leq 500$$

$$P_2 \geq 100$$

$$P_i \geq 0, \ \forall i = 1, \dots, 4$$

Modelo Lingo

```
Sets:
prenda/1..4/:precio,p;
actividad/1..4/:capacidad;
PA(prenda,actividad): tiempo;
endsets

Data:
precio=10 11 12 13;
capacidad=4800 9600 4700 4500;
tiempo=10 20 3 5
        9 24 2 5
       11 17 3 5
          8 26 5 5;
enddata

max=@sum(prenda(i):precio(i)*p(i));

@for(actividad(j):[cap_act]@sum(prenda(i):tiempo(i,j)*p(i))<=capacidad(j));

[prod_max]@sum(prenda(i):p(i))<=500;

[min_p2]p(2)>=100;
```

Reporte de solución Lingo (solo variables de decisión y restricciones)

```
Global optimal solution found.
  Objective value:        5722.000

   Variable           Value        Reduced Cost

      P( 1)        0.000000            2.333333
      P( 2)        100.0000            0.000000
      P( 3)        292.0000            0.000000
      P( 4)        86.00000            0.000000

    Row    Slack or Surplus      Dual Price
    1          5722.000            1.000000
 CAP_ACT( 1)    0.000000           0.6066667
 CAP_ACT( 2)    0.000000           0.3133333
 CAP_ACT( 3)   3194.000            0.000000
 CAP_ACT( 4)   2110.000            0.000000
 PROD_MAX      22.00000            0.000000
 MIN_P2        0.000000           -1.980000
```

Informe administrativo

Prendas S.A. deberá producir 100 pantalones, 292 faldas y 86 mandiles.

Los ingresos totales óptimos serán $ 5722.

Análisis adicional del reporte:

Aunque el ejercicio no lo necesita, se hará interpretación del costo reducido de la variable P(1) que es una variable NO BÁSICA. Si se decidiera producir una unidad de este producto, pese a que el Lingo señala que no es óptimo hacerlo, evidentemente ello sería perjudicial, lo que significa que la función objetivo se reduciría en $ 2,33 por unidad de producto 1 que se decida producir.

Aunque el ejercicio no lo solicita, se hará interpretación del precio dual de la restricción de mínima producción requerida del producto 2, que es la última restricción del modelo y **es activa**. Es decir, solo se ha producido el mínimo de 100 unidades requeridas del producto 2. Si la exigencia fuera más rigurosa en una unidad, es decir, si fuera necesario producir 101 unidades como mínimo, el valor de la función objetivo se perjudicaría en $ 1,98, es decir, será $ 1,98 menos.

b) Modelos de transporte:

Ejemplo 1

Una empresa desea programar el transporte de su producto principal que se elabora en 4 plantas con destino a 3 almacenes. Se conoce la demanda de los almacenes, la capacidad de producción de las plantas y el costo de transporte por unidad de transporte de una planta a un almacén.

Plantas	**Costo de transporte (S/por unid.)**			**Capacidad (unidades)**
	Almacén 1	**Almacén 2**	**Almacén 3**	
1	3	2	4	950
2	2	4	3	1150
3	3	5	3	1000
4	4	3	2	900
Demanda (unidades)	1200	900	500	

Se debe determinar cuántas unidades se deben enviar desde cada planta hacia cada almacén al mínimo costo total.

Modelo matemático compacto

$$Minimizar\ Z = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{4} Costo_{ij} * x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \leq Capacidad_i, \qquad Para\ i = 1,\ldots,4$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} \geq Demanda_j, \qquad Para\ j = 1,\ldots,3$$

$$X_{ij} \geq 0, \qquad Para\ i=1,\ldots,4;\ Para\ j=1,\ldots,3$$

Modelo Lingo

```
Sets:
planta/1,…,4/:capacidad;
almacen/1,…,3/:demanda;
PA(planta, almacen): X, costo;
endsets

data:
capacidad=950 1150 1000 900;
demanda=1200 900 500;
costo=3 2 4 2 4 3 3 5 3 4 3 2;
enddata

min=@sum(PA(i,j):costo(i,j)*x(i,j));

@for(planta(i):[cap_planta]@sum(almacen(j):x(i,j))<=capacidad(i));
@for(almacen(j):[dem_alm]@sum(planta(i):x(i,j))>=demanda(j));
```

Reporte de solución Lingo (solo variables de decisión y restricciones)

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                 5250.000

        Variable           Value        Reduced Cost
        X( 1, 1)        50.00000            0.000000
        X( 1, 2)        900.0000            0.000000
        X( 1, 3)        0.000000            2.000000
        X( 2, 1)        1150.000            0.000000
        X( 2, 2)        0.000000            3.000000
        X( 2, 3)        0.000000            2.000000
  ----> X( 3, 1)        0.000000            0.000000
        X( 3, 2)        0.000000            3.000000
        X( 3, 3)        0.000000            1.000000
        X( 4, 1)        0.000000            1.000000
        X( 4, 2)        0.000000            1.000000
        X( 4, 3)        500.0000            0.000000

             Row    Slack or Surplus      Dual Price
               1         5250.000          -1.000000
   CAP_PLANTA(1)         0.000000           0.000000
   CAP_PLANTA(2)         0.000000           1.000000
   CAP_PLANTA(3)         1000.000           0.000000
   CAP_PLANTA(4)         400.0000           0.000000
      DEM_ALM(1)         0.000000          -3.000000
      DEM_ALM(2)         0.000000          -2.000000
      DEM_ALM(3)         0.000000          -2.000000
```

Informe administrativo

En este caso los valores óptimos de las variables se presentan mejor en una tabla, con los títulos y encabezados adecuados.

La empresa deberá transportar las siguientes cantidades desde sus plantas a los almacenes:

Cantidades por transportar (unidades)

	Almacén 1	Almacén 2	Almacén 3
Planta 1	50	900	0
Planta 2	1150	0	0
Planta 3	0	0	0
Planta 4	0	0	500

El mínimo costo total de transporte es S/ 5250

Puede observarse en el reporte que este caso posee **soluciones múltiples** ya que la variable X(3,1) es una variable con valor cero (no básica) y su costo reducido es también cero.

Ejemplo 2

Un camión cisterna tiene tres compartimentos para almacenar: delantero, central y posterior. Estos compartimentos tienen un límite de capacidad de carga tanto en peso como en volumen. Los datos se resumen en la siguiente tabla:

Compartimentos	Capacidad en peso (toneladas)	Capacidad en volumen (litros)
Delantero	12	7000
Central	18	9000
Posterior	10	5000

Para mantener el camión balanceado, el peso de la carga en cada compartimento debe ser proporcional a su capacidad en peso. Se tienen los siguientes pedidos para ser atendidos con el próximo viaje del camión cisterna.

Pedido	Peso (toneladas)	Volumen (litros/tonelada)	Ganancia ($/tonelada)
1	10	500	320
2	8	700	400
3	14	600	360
4	6	400	290

Se puede aceptar cualquier fracción de estos pedidos. El objetivo es determinar qué cantidad en peso de cada pedido se debe aceptar (si se acepta) y cómo distribuir la carga correspondiente entre los compartimentos para maximizar la ganancia que se logre con el viaje.

Modelo matemático compacto

$$Maximizar\ \ Z = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{4} Ganancia_i * x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} * peso_i \leq Capacidad\_peso_j, \quad Para\ j = 1, \ldots, 3$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} * peso_i * densidad_i \leq Capacidad\_vol_j, \quad Para\ j = 1, \ldots, 3$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} \leq 1, \quad Para\ i = 1, \ldots, 4$$

$X_{ij} \geq 0$, $\quad Para\ i=1,\ldots,4;\ Para\ j=1,\ldots,3$

Modelo Lingo

```
sets:
pedido/1,...,4/:densidad, ganancia, peso;
comp/1,...,3/:capacidad_peso, capacidad_vol;
PC(pedido,comp):X;
endsets
data:
capacidad_peso=12 18 10;
capacidad_vol=7000 9000 5000;
densidad=500 700 600 400;
peso=10,8,14,6;
ganancia=320 400 360 290;
enddata

max=@sum(PC(i,j):x(i,j)*ganancia(i));

@for(comp(j):[cap_peso_comp]
    @sum(pedido(i):x(i,j)*peso(i))<=capacidad_peso(j));

@for(comp(j):[cap_vol_comp]
@sum(pedido(i):x(i,j)*peso(i)*densidad(i))<=capacidad_vol(j));
@for(pedido(i):[total_pedido]@sum(comp(j):x(i,j))<=1);
```

Reporte de solución Lingo (solo variables de decisión y restricciones)

Global optimal solution found.
Objective value: 1352.857

Variable	Value	Reduced Cost
X(1, 1)	**0.000000**	**0.000000**
X(1, 2)	1.000000	0.000000
X(1, 3)	0.000000	0.000000
X(2, 1)	0.000000	0.000000
X(2, 2)	0.3333333	0.000000
X(2, 3)	0.6666667	0.000000
X(3, 1)	0.8015873	0.000000
X(3, 2)	0.000000	0.000000
X(3, 3)	0.1507937	0.000000
X(4, 1)	0.1111111	0.000000
X(4, 2)	0.8888889	0.000000
X(4, 3)	0.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	1352.857	1.000000
CAP_PESO_COMP(1)	0.1111111	0.000000
CAP_PESO_COMP(2)	0.000000	0.000000
CAP_PESO_COMP(3)	2.555556	0.000000
CAP_VOL_COMP(1)	0.000000	0.4285714E-01
CAP_VOL_COMP(2)	0.000000	0.4285714E-01
CAP_VOL_COMP(3)	0.000000	0.4285714E-01
TOTAL_PEDIDO(1)	0.000000	105.7143
TOTAL_PEDIDO(2)	0.000000	160.0000
TOTAL_PEDIDO(3)	0.4761905E-01	0.000000
TOTAL_PEDIDO(4)	0.000000	187.1429

Informe administrativo

Fracción de cada pedido a colocar en cada compartimiento

Pedido	Compartimiento delantero	Compartimiento central	Compartimiento posterior
1		1	
2		0,33	0,67
3	0,80		0,15
4	0,11	0,89	

La tabla puede también expresarse en toneladas, así, el informe señalaría que del pedido 1 debe colocarse las 10 t. en el compartimiento central, del pedido 2 se colocará 2,64 t. en el compartimiento central y 5,36 t. en el posterior. Del pedido 3 se llevará sólo 11,2 t en el compartimiento delantero y del pedido 4 de llevará 0,66 t. en el compartimiento delantero y 5,34 t. en el central.

La ganancia máxima será de $1352.857 dólares.

Observando el reporte, el caso posee **soluciones múltiples**, ya que X(1,1) es una variable no básica y su costo reducido es también cero. Cabe recordar que en este caso la interpretación de los costos reducidos y precios duales no es posible ya que éstos pueden cambiar de una solución óptima a otra.

c) Modelos de trasbordo

Ejemplo 1

Una empresa tiene dos plantas de fabricación ubicadas en distintas localidades. Puede vender sus productos en tres mercados diferentes ubicados en lugares distintos, mediante sus almacenes. La demanda en cada mercado es limitada, por lo cual no es posible vender una cantidad mayor.

Los datos de capacidad en cada planta así como el costo de transporte hacia los almacenes se dan en la siguiente tabla, además se señala el dato de capacidad en cada almacén:

Planta	Capacidad de producción (unid.)	Costo de transporte ($/unid.)	
		Hacia almacén 1	**Hacia almacén 2**
1	5500	5	6
2	5500	7	5
Capacidad de cada almacén (unid.)		**2000**	**3000**

Almacén	Costo de transporte ($/unid)		
	Hacia el mercado 1	**Hacia el mercado 2**	**Hacia el mercado 3**
1	3	2	3
2	4	4	3
Demanda (unid.)	3000	2500	2000

En cada planta, el costo de producción de una unidad de producto es de $ 22. El precio de venta en cada mercado es de $ 45, $ 48 y $ 50 por producto, respectivamente. Formule un modelo de programación lineal en la forma matemática compacta que permita a la empresa planear sus operaciones, definiendo previamente las variables de decisión.

Para la primera forma:

Modelo matemático compacto

$$Maximizar\ \ Z = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{3} precio_k * y_{jk} -$$

$$22 * \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} x_{ij} - \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} x_{ij} * costo\_transp1_{i,j}$$

$$- \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{3} y_{jk} * costo\_transp2_{jk}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{2} x_{ij} \leq Capacidad\_p_i, \qquad \forall\, i = 1,2$$

$$\sum_{i=1}^{2} x_{ij} \leq Capacidad\_a_j, \qquad \forall\, j = 1,2$$

$$\sum_{j=1}^{2} y_{jk} \leq demanda_k, \qquad \forall\, k = 1,\ldots,3$$

$$\sum_{i=1}^{2} x_{ij} = \sum_{k=1}^{3} y_{jk}, \quad \forall\, j = 1, 2$$

$$x_{ij} \geq 0,\ \forall i = 1,2,\quad \forall j = 1,2$$
$$y_{jk} \geq 0,\ \forall j = 1,2,\quad \forall k = 1,\ldots,3$$

Modelo Lingo

```
sets:
planta/pla1, pla2/:capacidad_p;
almacen/alm1, alm2/:capacidad_a;
mercado/merc1, merc2, merc3/: demanda,precio;
PA(planta, almacen):costo_transp1, x;
AM(almacen, mercado):costo_transp2, y;
endsets

data:
capacidad_p=5500 5500;
capacidad_a=2000 3000;
demanda=3000 2500 2000;
precio=45 48 50;
costo_transp1=5 6 7 5;
costo_transp2=3 2 3 4 4 3;
enddata

max=@sum(AM(j,k):precio(k)*y(j,k))-22*@sum(PA(i,j):x(i,j))-
@sum(PA(i,j):costo_transp1(i,j)*x(i,j))-
@sum(AM(j,k):costo_transp2(j,k)*y(j,k));

@for(planta(i):cap_planta]@sum(almacen(j):x(i,j))<=capacidad_p(i));

@for(almacen(j):cap_almacen]@sum(planta(i):x(i,j))<=capacidad_a(j));

@for(mercado(k): [dem_mercado]@sum(almacen(j):y(j,k))<=demanda(k));

@for(almacen(j):balance]@sum(planta(i):x(i,j))=@sum(mercado(k):y(j,k)));
```

Reporte de solución Lingo (solo variables de decisión y restricciones)

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                 93500.00

              Variable        Value       Reduced Cost

          X(PLA1, ALM1)      2000.000          0.000000
          X(PLA1, ALM2)      0.000000          1.000000
          X(PLA2, ALM1)      0.000000          2.000000
          X(PLA2, ALM2)      3000.000          0.000000
         Y(ALM1, MERC1)      0.000000          1.000000
         Y(ALM1, MERC2)      2000.000          0.000000
         Y(ALM1, MERC3)      0.000000          2.000000
         Y(ALM2, MERC1)      500.0000          0.000000
         Y(ALM2, MERC2)      500.0000          0.000000
         Y(ALM2, MERC3)      2000.000          0.000000

                    Row    Slack or Surplus    Dual Price
                      1        93500.00          1.000000
        CAP_PLANTA(PLA1)      3500.000          0.000000
        CAP_PLANTA(PLA2)      2500.000          0.000000
       CAP_ALMACEN(ALM1)      0.000000          16.00000
       CAP_ALMACEN(ALM2)      0.000000          14.00000
     DEM_MERCADO(MERC1)      2500.000          0.000000
     DEM_MERCADO(MERC2)      0.000000          3.000000
     DEM_MERCADO(MERC3)      0.000000          6.000000
          BALANCE(ALM1)      0.000000         -43.00000
          BALANCE(ALM2)      0.000000         -41.00000
```

Informe administrativo

Unidades por transportar de plantas a almacenes

Planta	Almacén 1	Almacén 2
1	2000	0
2	0	3000

Unidades por transportar de almacenes a mercados

Almacén	Mercado 1	Mercado 2	Mercado 3
1	0	2000	0
2	500	500	2000

Ganancia máxima**:** $ 93 500

Análisis adicional:
Aunque el ejercicio no lo pide, puede observarse que la restricción de capacidad de almacenamiento del almacén 1 se ha utilizado totalmente. Si fuera posible contar con una unidad adicional de capacidad en dicho almacén, el valor de la función objetivo mejoraría en $ 16.

Para la segunda forma:

Modelo matemático compacto

$$Maximizar\ \ Z = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{3} precio_k * x_{ijk} -$$

$$22 * \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{3} x_{ijk} - \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} costo\_transp\_1_{ij} * \sum_{k=1}^{3} x_{ijk}$$

$$- \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{3} costo\_transp2_{kj} * \sum_{i=1}^{2} x_{ijk}$$

$$\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} x_{ijk} \leq Capacidad\_planta_i, \qquad \forall\, i = 1,2$$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{3} x_{ijk} \leq Capacidad\_alm_j, \qquad \forall\, j = 1,2$$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} x_{ijk} \ \leq demanda_k\,, \qquad \forall\, k = 1, \ldots, 3$$

$$x_{ijk} \geq 0,\ \ \forall i = 1, 2,\ \ \ \forall j = 1,2,\ \ \forall k = 1, .., 3$$

Modelo Lingo

```
sets:
planta/pla1, pla2/:capacidad_p;
almacen/alm1, alm2/:capacidad_a;
mercado/merc1, merc2, merc3/: demanda,precio;
PA(planta, almacen):costo_transp1;
AM(almacen, mercado):costo_transp2;
PM(planta, mercado):;
PAM(planta, almacen,mercado):x;

endsets

data:
capacidad_p=5500 5500;
capacidad_a=2000 3000;
demanda=3000 2500 2000;
precio=45 48 50;
costo_transp1=5 6 7 5;
costo_transp2=3 2 3 4 4 3;
enddata

max=@sum(PAM(i,j,k):precio(k)*x(i,j,k))-22*@sum(PAM(i,j,k):x(i,j,k))-
@sum(PA(i,j):costo_transp1(i,j)*@sum(mercado(k):x(i,j,k)))-
@sum(AM(j,k):costo_transp2(j,k)*@sum(planta(i):x(i,j,k)));

@for(planta(i):[cap_planta]@sum(AM(j,k):x(i,j,k))<=capacidad_p(i));
@for(almacen(j):[cap_almacen]@sum(PM(i,k):x(i,j,k))<=capacidad_a(j));
@for(mercado(k):[dem_mercado]@sum(PA(i,j):x(i,j,k))<=demanda(k));
```

Reporte de solución Lingo (solo variables de decisión y restricciones)

Global optimal solution found.
Objective value: 93500.00

Variable	Value	Reduced Cost
X(PLA1, ALM1, MERC1)	0.000000	1.000000
X(PLA1, ALM1, MERC2)	2000.000	0.000000
X(PLA1, ALM1, MERC3)	0.000000	2.000000
X(PLA1, ALM2, MERC1)	0.000000	1.000000
X(PLA1, ALM2, MERC2)	0.000000	1.000000
X(PLA1, ALM2, MERC3)	0.000000	1.000000
X(PLA2, ALM1, MERC1)	0.000000	3.000000
X(PLA2, ALM1, MERC2)	0.000000	2.000000
X(PLA2, ALM1, MERC3)	0.000000	4.000000
X(PLA2, ALM2, MERC1)	500.0000	0.000000
X(PLA2, ALM2, MERC2)	500.0000	0.000000
X(PLA2, ALM2, MERC3)	2000.000	0.000000

Row	*Slack* or Surplus	Dual Price
1	93500.00	1.000000
CAP_PLANTA(PLA1)	3500.000	0.000000
CAP_PLANTA(PLA2)	2500.000	0.000000
CAP_ALMACEN(ALM1)	0.000000	16.00000
CAP_ALMACEN(ALM2)	0.000000	14.00000
DEM_MERCADO(MERC1)	2500.000	0.000000
DEM_MERCADO(MERC2)	0.000000	3.000000
DEM_MERCADO(MERC3)	0.000000	6.000000

Informe administrativo

Unidades por transportar desde las plantas a través de los almacenes hacia los mercados

Planta	Almacén 1			Almacén 2		
	Mercado 1	**Mercado 2**	**Mercado 3**	**Mercado 1**	**Mercado 2**	**Mercado 3**
1	0	2000	0	0	0	0
2	0	0	0	500	500	2000

La ganancia máxima es de: $ 93 500

Nota:
Como puede observarse, las soluciones de los modelos de ambas formas son las mismas.

Análisis adicional:
Aunque el ejercicio no lo pide, puede observarse que la restricción de capacidad de almacenamiento del almacén 1 se ha utilizado totalmente. Si fuera posible contar con una unidad adicional de capacidad en dicho almacén, el valor de la función objetivo mejoraría en $ 16.

Ejemplo 2

Fresh Fruits importa plátanos desde los países de Honduras y Costa Rica hacia las ciudades de Miami y San Diego. En dichas ciudades se recibe todo lo que se importe. La compañía vende plátanos en Miami y San Diego; el resto es enviado desde estas ciudades para ser vendido a tres clientes, ubicados en Denver, Kansas City y Ft. Worth respectivamente. Este mes se ha cosechado 200 000 libras de plátanos en Honduras y 100 000 libras de plátanos en Costa Rica.

El pronóstico de la demanda en Miami y en San Diego es de 150 000 y 100 000 libras de plátanos, respectivamente; siendo el precio de venta: 6 $/libra y 7 $/libra, respectivamente. Asimismo, el pronóstico de la demanda de los clientes en Denver, Kansas City y Ft. Worth es de 60 000, 40 000 y 65 000 libras de plátanos, respectivamente; siendo el precio de venta: 10 $/libra, 11 $/libra y 12 $/libra, respectivamente. En ambos casos, no es obligatorio vender todo lo pronosticado.

El costo de la cosecha es de 2 $/libra en Honduras y 2,5 $/libra en Costa Rica. El costo de transporte se estima en 0,001 $/libra – km. Las distancias entre las ciudades son:

Distancias (en km)

Hacia / Desde	Miami	San Diego
Honduras	900	2400
Costa Rica	1200	2700

Distancias (en km)

Hacia / Desde	Denver	Kansas City	Ft. Worth
Miami	2107	1226	1343
San Diego	1095	1833	1348

Definir las variables de decisión y formular el modelo de programación lineal que le permita a la empresa planear su producción. Resolver el modelo y presentar el informe de la solución.

Para la primera forma:

Modelo matemático compacto

Maximizar

Z = Ingresos por ventas - costo de plátanos - costo de transporte

$$\textbf{Ingresos por ventas} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} Y_{jk} \quad * precio\_c_k + \sum_{j=1}^{2} Z_j * precio\_t_j$$

$$\textbf{Costo plátanos} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} X_{ij} * \ costo\_origen_i$$

$$\textbf{\textit{Costo transporte}} =$$

$$0{,}001 * (\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} X_{ij} * distancia1_{ij} + \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{3} Y_{jk} * distancia2_{jk})$$

$$\sum_{j=1}^{2} Y_{jk} \le demanda_k \,, \forall k = \ 1,\ldots,3$$

$$Z_j \le dem_{j,} \ \forall j = 1{,}2$$

$$\sum_{j=1}^{2} x_{ij} \le oferta_i, \quad \forall i = 1{,}2$$

$$\sum_{i=1}^{2} x_{ij} \ = Z_j + \sum_{k=1}^{3} y_{jk}, \quad \forall \, j = 1, 2$$

$$x_{ij} \ \ge 0, \ \forall i = 1{,}2 \,, \forall j = 1{,}2 \qquad y_{jk} \ \ge 0, \ \forall j = 1{,}2, \ \ \forall k = \ 1,\ldots,3$$

Modelo Lingo

```
Sets:
pais/H,CR/:costo_origen, oferta;
ciudad/MI,SD/:dem, precio_t, Z;
cliente/1..3/:demanda,precio_c;
PC(pais,ciudad):X,distancia1;
CC(ciudad,cliente):Y,distancia2;
endsets

Data:
costo_origen=2,2.5;
oferta=200000 100000;
dem=150000 100000;
precio_t=6,7;
demanda=60000 40000 65000;
precio_c=10 11 12;
distancia1=900 2400 1200 2700;
distancia2=2107 1226 1343 1095 1833 1348;
enddata

max=ingreso_por_ventas - costo_de_platanos - costo_de_transporte;

ingreso_por_ventas=@sum(cc(j,k):Y(j,k)*precio_c(k))+
                   @sum(ciudad(j):Z(j)*precio_t(j));

costo_platanos=@sum(pc(i,j):X(i,j)*costo_origen(i));

costo_transporte=0.001*(@sum(pc(i,j):X(i,j)*distancia1(i,j))+
                       @sum(cc(j,k):Y(j,k)*distancia2(j,k)));

@for(cliente(k):@sum(ciudad(j): Y(j,k))<=demanda(k));
@for(ciudad(j):Z(j)<=dem(j));
@for(pais(i):@sum(ciudad(j):X(i,j))<=oferta(i));
@for(ciudad(j):@sum(pais(i):X(i,j))=Z(j)+@sum(cliente(k):Y(j,k)));
```

Reporte de solución Lingo (solo variables de decisión y restricciones)

```
 Global optimal solution found.
Objective value:                              1417245.

                     Variable           Value            Reduced Cost
           INGRESO_POR_VENTAS        2630000.               0.000000
            COSTO_DE_PLATANOS        650000.0               0.000000
          COSTO_DE_TRANSPORTE        562755.0               0.000000

                        Z(MI)        135000.0               0.000000
                        Z(SD)        0.000000              0.1200000E
                      X(H,MI)        200000.0               0.000000
                      X(H,SD)        0.000000              0.4880000
                     X(CR,MI)        100000.0               0.000000
                     X(CR,SD)        0.000000              0.4880000

                      Y(MI,1)        60000.00               0.000000
                      Y(MI,2)        40000.00               0.000000
                      Y(MI,3)        65000.00               0.000000
                      Y(SD,1)        0.000000               0.000000
                      Y(SD,2)        0.000000               1.619000
                      Y(SD,3)        0.000000               1.017000

                          Row    Slack or Surplus       Dual Price
                            1        1417245.               1.000000
                     INGRESOS        0.000000               1.000000
               COSTO_PLATANOS        0.000000              -1.000000
                 COSTO_TRANSP        0.000000              -1.000000
          DEMANDA_CLIENTES(1)        0.000000               1.893000
          DEMANDA_CLIENTES(2)        0.000000               3.774000
          DEMANDA_CLIENTES(3)        0.000000               4.657000
         DEMANDA_CIUDADES(MI)        15000.00               0.000000
         DEMANDA_CIUDADES(SD)        100000.0               0.000000
             OFERTA_PAISES(H)        0.000000               3.100000
            OFERTA_PAISES(CR)        0.000000               2.300000
                 BALANCES(MI)        0.000000              -6.000000
                 BALANCES(SD)        0.000000              -7.012000
```

Informe administrativo

Fresh Fruits debe realizar las siguiente operaciones:

Compras y envíos a las ciudades de trasbordo (libras)

País de origen	Ciudades		Compras
	Miami	San Diego	
Honduras	200 000	0	200 000
Costa Rica	100 000	0	100 000

Envíos a clientes (libras)

Ciudades de trasbordo	Clientes		
	Denver	Kansas	Ft. Worth
Miami	60 000	40 000	65 000
San Diego	0	0	0

Cantidades a vender (libras)

Punto de venta	Cantidad por vender
Miami	135 000
San Diego	0
Denver	60 000
Kansas	40 000
Ft. Worth	65 000

La máxima utilidad total será de $ 1 417 245,00

Para la segunda forma:

Modelo matemático compacto

Maximizar

Z = Ingresos por ventas – costos de los plátanos – costo de transporte

Ingresos por ventas =

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{3} precio\_c_k * x_{ijk} + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} x_{ij4} * precio\_t_{j4}$$

$$\textbf{costo plátanos} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{4} x_{ijk} * costo_i$$

costo transporte =

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{4} (distancia1_{ij} + distancia2_{jk}) * 0{,}001 * x_{ijk}$$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} x_{ijk} \le demanda_k, \forall k = 1,\dots,3$$

$$\sum_{i=1}^{2} x_{ij4} \le dem_{j4}, \forall j = 1,2$$

$$\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{4} x_{ijk} \le oferta_{i,}, \forall i = 1,2$$

$$x_{ijk} \ge 0, \quad \forall i = 1,2, \quad \forall j = 1,2, \quad \forall k = 1,\dots,4$$

Modelo Lingo

```
Sets:
pais/H,CR/:costo_origen, oferta;
ciudad/MI,SD/:;
cliente/1..4/:demanda,precio_c;
PC(pais,ciudad):distancia1;
CC(ciudad,cliente):distancia2,dem,precio_t;
PCC(pais,ciudad,cliente):X;
endsets

Data:
costo_origen=2,2.5;
oferta=200000 100000;
dem=0 0 0 150000
    0 0 0 100000;
precio_t=0 0 0 6
         0 0 0 7;
demanda=60000 40000 65000 0 ;
precio_c=10 11 12 0;
distancia1=900 2400
           1200 2700;
distancia2=2107 1226 1343 0
           1095 1833 1348 0;
enddata

max=ingreso_por_ventas - costo_de_platanos - costo_de_transporte;

[ingresos]ingreso_por_ventas=
@sum(pcc(i,j,k)|k#le#3:X(i,j,k)*precio_c(k))+
@sum(pc(i,j):x(i,j,4)*precio_t(j,4));

[costo_platanos]costo_de_platanos=
@sum(pcc(i,j,k):X(i,j,k)*costo_origen(i));

[costo_transp]costo_de_transporte=
0.001*(@sum(pcc(i,j,k):X(i,j,k)*(distancia1(i,j)+distancia2(j,k))));

@for(cliente(k)|k#le#3:[demanda_clientes]@sum(pc(i,j): X(i,j,k))<=demanda(k));

@for(ciudad(j):[demanda_ciudades]@sum(pais(i):x(i,j,4))<=dem(j,4));
@for(pais(i):[oferta_paises]@sum(cc(j,k):X(i,j,k))<=oferta(i));
```

En este caso se emplean "filtros" con la finalidad de que la suma incluya únicamente los términos en que el índice "k" es menor o igual que 3. Estos filtros se explican en la página 134.

Reporte de solución Lingo (solo variables de decisión y restricciones)

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              1417245.

                 Variable           Value        Reduced Cost
        INGRESO_POR_VENTAS        2630000.           0.000000
         COSTO_DE_PLATANOS        650000.0           0.000000
       COSTO_DE_TRANSPORTE        562755.0           0.000000
           COSTO_ORIGEN(H)        2.000000           0.000000
          COSTO_ORIGEN(CR)        2.500000           0.000000

                 X(H,MI,1)        60000.00           0.000000
                 X(H,MI,2)        40000.00           0.000000
                 X(H,MI,3)        0.000000           0.000000
                 X(H,MI,4)        100000.0           0.000000
                 X(H,SD,1)        0.000000          0.4880000
                 X(H,SD,2)        0.000000           2.107000
                 X(H,SD,3)        0.000000           1.505000
                 X(H,SD,4)        0.000000          0.5000000
                X(CR,MI,1)        0.000000           0.000000
                X(CR,MI,2)        0.000000           0.000000
                X(CR,MI,3)        65000.00           0.000000
                X(CR,MI,4)        35000.00           0.000000
                X(CR,SD,1)        0.000000          0.4880000
                X(CR,SD,2)        0.000000           2.107000
                X(CR,SD,3)        0.000000           1.505000
                X(CR,SD,4)        0.000000          0.5000000

                       Row    Slack or Surplus      Dual Price
                         1        1417245.           1.000000
                  INGRESOS        0.000000           1.000000
            COSTO_PLATANOS        0.000000          -1.000000
              COSTO_TRANSP        0.000000          -1.000000
       DEMANDA_CLIENTES(1)        0.000000           1.893000
       DEMANDA_CLIENTES(2)        0.000000           3.774000
       DEMANDA_CLIENTES(3)        0.000000           4.657000
      DEMANDA_CIUDADES(MI)        15000.00           0.000000
      DEMANDA_CIUDADES(SD)        100000.0           0.000000
          OFERTA_PAISES(H)        0.000000           3.100000
         OFERTA_PAISES(CR)        0.000000           2.300000
```

Informe administrativo:

Observando las variables X(i,j,k) para (k de 1 a 3):

Cantidades por vender a los clientes según país de compra y ciudad de trasbordo (libras)

País	Pasando por Miami			Pasando por San Diego		
	Denver	**Kansas**	**Ft. Worth**	**Denver**	**Kansas**	**Ft. Worth**
Honduras	60 000	40 000	0	0	0	0
Costa Rica	0	0	65 000	0	0	0

En este cuadro se establece que en total en Denver se venderán 60 000 libras, en Kansas 40 000 libras y en Ft. Worth 65 000 libras.

<u>Observando las variables X(i,j,4):</u>

Ventas en las ciudades de trasbordo (libras)

País de origen	Ciudades	
	Miami	San Diego
Honduras	100 000	0
Costa Rica	35 000	0
Venta total	135 000	0

De los dos cuadros se establece que en Honduras de comprará 200 000 libras de plátano (60 000 para Denver, 40 000 para Kansas y 10 0000 para Miami) y en Costa Rica 100 000 libras de plátano (65 000 para Ft. Worth y 35 000 para Miami).

La utilidad total máxima es de $ 1 417 245,00

Empleo de filtros en Lingo:

Toda vez que sea necesario que las funciones **@sum** o **@for** se apliquen solo para algunos valores de los índices de los conjuntos definidos deben aplicarse **filtros**. Estos son los siguientes:

#LE# : menor o igual que

#LT# : menor que

#GE#: mayor o igual que

#GT# : mayor que

#EQ#: igual que

#NE#: diferente

#AND# : y

#OR# : ó

Estos filtros se deben ubicar tal como se señala en los ejemplos siguientes:

@sum(conjunto(i,j) | i#LT#2: ....)

Esta expression quiere decir que la suma incluirá solo los términos en los que i sea menor que 2. Se requiere el empleo del símbolo "|" que es un segmento de línea vertical que se encuentra generalmente en el extremo superior derecho del teclado, de modo que se lee lo siguiente:

"Sumatoria en (i,j) tal que i sea menor que 2 de ...."

@for(conjunto(i,j) | **j#GE#3:......................)**

Esta expresión quiere decir que las restricciones que generará el @for serán solo para las combinaciones de (i,j) en las que j sea mayor o igual a tres.

"Para cada (i,j) tal que j sea mayor o igual que 3, ..."

d) Modelos de mezclas

Ejemplo 1

Una empresa produce tres tipos de bebidas: A, B y C, mezclando jugo de pera, piña y manzana. La disponibilidad de jugo de pera, piña y manzana es de 200 litros, 100 litros y 150 litros, respectivamente, a un costo por litro de 20, 10 y 9 soles respectivamente. La demanda de bebida A, B y C, que debe ser satisfecha en su totalidad, es de 90, 100 y 90 litros, respectivamente. El contenido porcentual mínimo y máximo de jugo que debe tener cada bebida es el siguiente:

Contenido porcentual mínimo				Contenido porcentual máximo			
	Bebida A	**Bebida B**	**Bebida C**		**Bebida A**	**Bebida B**	**Bebida C**
Pera	10 %	30 %	20 %	**Pera**	40 %	40 %	40 %
Piña	30 %	20 %	30 %	**Piña**	50 %	40 %	40 %
Manzana	20 %	20 %	30 %	**Manzana**	40 %	60 %	40 %

Por ejemplo, por lo menos el 10 % de la bebida A debe contener jugo de pera, por lo menos el 30 % de la bebida A debe contener jugo de piña y por lo menos el 20 % de la bebida A debe contener jugo de manzana. Definir las variables de decisión y formular el modelo de programación lineal correspondiente. Resolver el modelo y presentar el informe de la solución.

Modelo matemático compacto

$$Minimizar\ \ Z = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{4} costo_i * x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} \leq disponibilidad_i, \qquad \forall\, i 1,\ldots,3$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} \geq demanda_j, \qquad \forall\, j\, 1,\ldots,3$$

$$\sum_{i=1}^{3} X_{ij} = Total_j, \quad \forall j = 1,\ldots,3$$

$$X_{ij} \geq porcentaje\_mínimo_{ij} * total_j, 1,\ldots,3 \quad ..,3, \quad 1,\ldots,3 \quad \ldots,3$$

$$X_{ij} \leq porcentaje\_máximo_{ij} * total_j, 1,\ldots,3 \quad ..,3, \quad 1,\ldots,3 \quad ..,3$$

$$X_{ij} \geq 0, \qquad \forall\, i_{1,\ldots,3}, 3, \quad \forall\, 1,\ldots,3$$

Modelo Lingo

```
Sets:
jugo/pera,pina,manzana/:costo,disponibilidad;
bebida/a,b,c/:demanda,total;
jb(jugo,bebida):porcentaje_minimo, porcentaje_maximo,X;
endsets

Data:
costo=20 10 9;
disponibilidad=200 100 150;
porcentaje_minimo=0.1 0.3 0.2 0.3 0.2 0.3 0.2 0.2 0.3;
porcentaje_maximo=0.4 0.4 0.4 0.5 0.4 0.4 0.4 0.6 0.4;
demanda=90 100 90;
enddata

min=@sum(jb(i,j):costo(i)*x(i,j));

@for(jugo(i):[jugo_disp]@sum(bebida(j):x(i,j))<=disponibilidad(i));
@for(bebida(j):[bebida_producida]@sum(jugo(i):x(i,j))=total(j));
@for(bebida(j):[dem_min]total(j)>=demanda(j));
@for(jb(i,j):[por_min]x(i,j)>=porcentaje_minimo(i,j)*total(j));
@for(jb(i,j):[por_max]x(i,j)<=porcentaje_maximo(i,j)*total(j));
```

Reporte de solución Lingo (solo variables de decisión y restricciones)

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              3258.000

                        Variable           Value        Reduced Cost
                      X(PERA, A)        10.00000            0.000000
                      X(PERA, B)        30.00000            0.000000
                      X(PERA, C)        18.00000            0.000000
                      X(PINA, A)        44.00000            0.000000
                      X(PINA, B)        20.00000            0.000000
                      X(PINA, C)        36.00000            0.000000
                   X(MANZANA, A)        36.00000            0.000000
                   X(MANZANA, B)        50.00000            0.000000
                   X(MANZANA, C)        36.00000            0.000000

                             Row    Slack or Surplus      Dual Price
                               1        3258.000           -1.000000
                  JUGO_DISP(PERA)       142.0000            0.000000
                  JUGO_DISP(PINA)       0.000000            10.00000
               JUGO_DISP(MANZANA)       28.00000            0.000000
              BEBIDA_PRODUCIDA(A)       0.000000           -20.00000
              BEBIDA_PRODUCIDA(B)       0.000000           -9.000000
              BEBIDA_PRODUCIDA(C)       0.000000           -20.00000
                       DEM_MIN(A)       0.000000           -15.60000
                       DEM_MIN(B)       0.000000           -14.50000
                       DEM_MIN(C)       0.000000           -15.60000
                  POR_MIN(PERA,A)       1.000000            0.000000
                  POR_MIN(PERA,B)       0.000000           -11.00000
                  POR_MIN(PERA,C)       0.000000            0.000000
                  POR_MIN(PINA,A)       17.00000            0.000000
                  POR_MIN(PINA,B)       0.000000           -11.00000
                  POR_MIN(PINA,C)       9.000000            0.000000
               POR_MIN(MANZANA,A)       18.00000            0.000000
               POR_MIN(MANZANA,B)       30.00000            0.000000
               POR_MIN(MANZANA,C)       9.000000            0.000000
                  POR_MAX(PERA,A)       26.00000            0.000000
                  POR_MAX(PERA,B)       10.00000            0.000000
                  POR_MAX(PERA,C)       18.00000            0.000000
                  POR_MAX(PINA,A)       1.000000            0.000000
                  POR_MAX(PINA,B)       20.00000            0.000000
                  POR_MAX(PINA,C)       0.000000            0.000000
               POR_MAX(MANZANA,A)       0.000000            11.00000
               POR_MAX(MANZANA,B)       10.00000            0.000000
               POR_MAX(MANZANA,C)       0.000000            11.00000
```

Informe administrativo

Mezcla de jugos para elaborar cada bebida (litros)

Bebida	Jugos			Total bebida
	Pera	Piña	Manzana	
A	10	44	36	90
B	30	20	50	100
C	18	36	36	90

Se ha preparado la cantidad necesaria de cada bebida cumpliendo las especificaciones, con el mínimo costo de 3258 soles.

Ejemplo 2

Una minera extrae carbón mineral de tres canteras C1, C2 y C3, luego mezcla el carbón para luego atender el pedido de dos clientes. La información técnico-económica respecto al carbón de cada cantera se muestra a continuación:

Cantera	Disponibilidad (toneladas)	Costo ($/tonelada)	Contenido de ceniza (%)	Contenido de azufre (%)
C1	120	50	8	5
C2	100	55	6	4
C3	140	62	4	3

La cantidad mínima y el contenido porcentual máximo de ceniza y azufre que debe contener el carbón que se le entrega a cada cliente es el siguiente:

Cliente	Mínimo por entregar (toneladas)	Contenido máximo de ceniza (%)	Contenido máximo de azufre (%)
1	130	7	7.5
2	120	6	4.5

Definir las variables de decisión y formular el modelo de programación lineal correspondiente. Resolver el modelo y presentar el informe de la solución.

Modelo matemático compacto

Minimizar

$$Z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} x_{ij} * costo_i$$

$$\sum_{j=1}^{2} x_{ij} \leq disponibilidad_i\ , \ \ \forall i = 1,\ldots,3$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} \geq entrega\_min_j\ , \ \ \forall j = 1,2$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = total\ _j, \quad \forall j = 1,2$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} * composición_{ik} \leq contenido\_máximo_{jk} * \ total_j, \ \ \forall k = 1,2,$$

$$X_{ij} \geq 0, \qquad \forall\ i = 1,\ldots,3, \ \ \forall j\ 1,\ldots,3$$

Modelo Lingo

```
sets:
cantera/c1,c2,c3/:disponibilidad, costo;
cliente/1..2/:entrega_min,total;
componente/1..2/:;
cant_cli(cantera,cliente):x;
cant_comp(cantera,componente):composicion;
cli_comp(cliente,componente):contenido_maximo;
endsets

data:
disponibilidad=120 100 140;
costo=50 55 62;
entrega_min=130,120;
composicion=0.08 0.05 0.06 0.04 0.04 0.03;
contenido_maximo=0.07 0.075 0.06 0.045;
enddata

min=@sum(cant_cli(i,j):x(i,j)*costo(i));

@for(cantera(i):[dispo_cant]@sum(cliente(j):x(i,j))<=disponibilidad(i));
@for(cliente(j):[auxiliar]@sum(cantera(i):x(i,j))=total(j));
@for(cliente(j):[req_entrega]total(j)>=entrega_min(j));
@for(cli_comp(j,k):[comp_max]@sum(cantera(i):x(i,j)*composicion(i,k))
<=contenido_maximo(j,k)*total(j));
```

Reporte de solución Lingo (solo variables de decisión y restricciones)

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              13510.00
  Variable          Value         Reduced Cost

 X(C1,1)        65.00000           0.000000
 X(C1,2)        42.50000           0.000000
 X(C2,1)        65.00000           0.000000
 X(C2,2)        35.00000           0.000000
 X(C3,1)        0.000000           0.000000
 X(C3,2)        42.50000           0.000000

             Row    Slack or Surplus      Dual Price
              1        13510.00           -1.000000
DISPO_CANT(C1)         12.50000            0.000000
DISPO_CANT(C2)         0.000000            1.000000
DISPO_CANT(C3)         97.50000            0.000000
AUXILIAR(1)            0.000000          -74.00000
AUXILIAR(2)            0.000000          -74.00000
REQ_ENTREGA(1)         0.000000          -53.00000
REQ_ENTREGA(2)         0.000000          -56.00000
COMP_MAX(1,1)         0.000000            300.0000
COMP_MAX(1,2)         3.900000            0.000000
COMP_MAX(2,1)         0.000000            300.0000
COMP_MAX(2,2)        0.6000000            0.000000
```

Informe administrativo

La mezcla para el cliente 1 debe contener 65 toneladas procedentes de cada cantera 1, mientras que la mezcla para el cliente 2 debe contener 42,5 toneladas procedentes de la cantera 1; 35 toneladas de la cantera 2; y 42,5 de la cantera 3.

El costo mínimo de atender las entregas mínimas de los clientes es $ 13 510.00

Este caso posee también soluciones múltiples. La variable X(C3,1) es no básica y tiene costo reducido 0.

e) **Modelos de producción: múltiples periodos, uno o varios productos**

Ejemplo 1

En una cierta línea de producción se está programando la producción de un solo producto, el producto A. La demanda para la siguiente semana tiene un pronóstico de 50 000 unidades, el cual se estima se desagregará en los seis días útiles correspondientes de la siguiente forma:

Día	1	2	3	4	5	6
Producto A	5000	10 000	10 000	10 000	10 000	5000

No es necesario vender todo lo pronosticado. El inventario del producto A al inicio del día 1 es de 5000 unidades. La capacidad diaria de la línea de producción es de 16 horas y el ritmo de producción es de 800 unidades/hora. Se quiere programar la producción diaria de la línea con el objetivo de maximizar la utilidad neta de la semana, considerando que cada unidad vendida contribuye con un margen de utilidad de \$ 2 y mantener cada unidad de inventario al cierre del día cuesta \$ 0,10.

Definir las variables de decisión y formular el modelo de programación lineal. Resolver el modelo y presentar el informe de la solución.

Modelo matemático

Maximizar

$$Z = \sum_{i=1}^{6} (entrega_i * 2 - inv_i * 0.1)$$

$$producción_{\,i} * \frac{1}{800} \leq 16 \quad , \quad \forall i = 1,\ldots,6$$

$$entrega_i \;\leq\; pronostico\_de\_demanda_{\,i}\,, \quad \forall i = 1,\ldots,6$$

$$5000 + producción_1 = inv_1 + entrega_1$$

$$inv_{i-1} + producción_i = entrega_i + inv_i, \quad \forall\, i = \mathbf{2},\ldots,6$$

$$producción_i \geq 0, \quad inv_i \geq 0\,, entrega_i \geq 0 \quad \forall\, i = 1,\ldots,3$$

Modelo Lingo

```
sets:
dia/1..6/:entrega,produccion,inv,pronostico_de_demanda;
endsets

data:
pronostico_de_demanda=5000 10000 10000 10000 10000 5000;
enddata


max=@sum(dia(i):entrega(i)*2-0.1*inv(i));

@for(dia(i):[cap_prod]produccion(i)*(1/800)<=16);

@for(dia(i):[maximo_venta]entrega(i)<=pronostico_de_demanda(i));

[balance1]5000+produccion(1)=inv(1)+entrega(1);

@for(dia(i)|i#ge#2:[balance]inv(i-1)+produccion(i)=inv(i)+entrega(i));
```

Reporte de solución Lingo (solo variables de decisión y restricciones)

```
Global optimal solution found.

  Objective value:   100000.0

Variable           Value        Reduced Cost

ENTREGA(1)        5000.000        0.000000
ENTREGA(2)        10000.00        0.000000
ENTREGA(3)        10000.00        0.000000
ENTREGA(4)        10000.00        0.000000
ENTREGA(5)        10000.00        0.000000
ENTREGA(6)        5000.000        0.000000
PRODUCCION(1)     0.000000        0.100000
PRODUCCION(2)    10000.00         0.000000
PRODUCCION(3)    10000.00         0.000000
PRODUCCION(4)    10000.00         0.000000
PRODUCCION(5)    10000.00         0.000000
PRODUCCION(6)    5000.000         0.000000
INV(1)           0.000000         0.000000
INV(2)           0.000000         0.100000
INV(3)           0.000000         0.100000
INV(4)           0.000000         0.100000
INV(5)           0.000000         0.100000
INV(6)           0.000000         0.100000

    Row         Slack or Surplus       Dual Price

     1             100000.0             1.000000
CAP_PROD(1)        16.00000             0.000000
CAP_PROD(2)        3.500000             0.000000
CAP_PROD(3)        3.500000             0.000000
CAP_PROD(4)        3.500000             0.000000
CAP_PROD(5)        3.500000             0.000000
CAP_PROD(6)        9.750000             0.000000
MAXIMO_VENTA(1)    0.000000             2.100000
MAXIMO_VENTA(2)    0.000000             2.000000
MAXIMO_VENTA(3)    0.000000             2.000000
MAXIMO_VENTA(4)    0.000000             2.000000
MAXIMO_VENTA(5)    0.000000             2.000000
MAXIMO_VENTA(6)    0.000000             2.000000
BALANCE1           0.000000             0.100000
BALANCE(2)         0.000000             0.000000
BALANCE(3)         0.000000             0.000000
BALANCE(4)         0.000000             0.000000
BALANCE(5)         0.000000             0.000000
BALANCE(6)         0.000000             0.000000
```

Informe administrativo de la solución

Programa de producción, inventario y ventas de cada día

Día	Inv. Inicial (inv_{i-1})	Producción ($producción_i$)	Venta ($entrega_i$)	Inv. Final (inv_i)
1	5000 (*)	0	5000	0
2	0	10 000	10 000	0
3	0	10 000	10 000	0
4	0	10 000	10 000	0
5	0	10 000	10 000	0
6	0	5000	5000	0

(*) Es el dato que corresponde al inventario inicial del periodo.

La utilidad neta máxima total es $ 100 000.

Análisis adicional:
Puede observarse que la capacidad de producción no se ha utilizado al máximo en ningún día, pues existe holgura en todos los casos. Sin embargo, las restricciones de máximas cantidades a vender en cada día son todas activas, así por ejemplo si la cantidad máxima a vender en el día 1 pudiera aumentarse en una unidad, el valor de la utilidad neta total podría mejorar en $ 2,1.

Si se decidiera dejar una unidad en el almacén en el día 2 (véase que la variable INV(2) es no básica) el valor de la utilidad neta se perjudicaría, es decir, se reduciría en $ 0,1.

Esta interpretación de los precios duales y costos reducidos es posible debido a que el modelo no tiene soluciones múltiples.

Ejemplo 2

Durante los tres meses siguientes, General Cars **debe cumplir** sin demora con las siguientes demandas de camionetas y automóviles:

Mes	Camionetas	Automóviles
1	400	800
2	300	300
3	400	400

Durante cada mes se puede fabricar a lo más 1000 vehículos. Para cada camioneta se utilizan 2 toneladas de acero y cada automóvil requiere 1 tonelada de acero. En el mes 1, 2 y 3 la tonelada de acero cuesta \$ 400, \$ 600 y \$ 700, respectivamente. A lo más se puede comprar cada mes 1500 toneladas de acero (solo se puede utilizar el acero durante el mes en que se compró). Al principio del mes 1 hay en inventario 100 camionetas y 200 automóviles. El costo mensual de inventario final para cualquier vehículo es de 150 \$/unidad. Definir las variables de decisión y formular el modelo de programación lineal. Resolver el modelo y presentar el informe de solución.

Modelo matemático

Minimizar

$$Z = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2} producción_{ij} * req.\,acero_i * costo\_acero_j + inv_{ij} * 150$$

1,...,3

$$\sum_{i=1}^{2} producción_{ij} \leq 1000 \ , \quad \forall j = 1,\ldots,3$$

1,...,3

$$\sum_{i=1}^{2} producción_{ij} * req\_acero_i \leq 1500 \ , \quad \forall j = 1,\ldots,3$$

$$inventario\_inicial_i + producción_{i1} = inv_{i1} + \boldsymbol{venta}_{\boldsymbol{i1}}, \quad \forall i = 1,2$$

$$inv_{ij} + producción_{ij} = inv_{ij} + \boldsymbol{venta}_{\boldsymbol{ij}},$$
$$\forall i = 1,2, \forall j = \mathbf{2}, 3$$

1,...,3

1,...,3

$$producción_{ij} \geq 0, inv_{ij} \geq 0 \ , \quad \forall i = 1,\ldots,3,$$
$$\forall j = 1,\ldots,3$$

Modelo Lingo

```
Sets:
mes/1..3/:costo_acero;
producto/1..2/:req_acero,inventario_inicial;
PM(producto,mes):produccion,inv,venta;
endsets

Data:
costo_acero=400 600 700;
req_acero=2,1;
venta=400 300 400
      800 300 400;
inventario_inicial=100 200;
enddata

Min=@sum(PM(i,j):produccion(i,j)*req_acero(i)*costo_acero(j)+150*inv(i,j));

@for(mes(j):[capacidad]@sum(producto(i):produccion(i,j))<=1000);

@for(mes(j):[disponibilidad] @sum(producto(i):produccion(i,j)*req_acero(i))<=1500);

@for(producto(i):[balance_mes1] inventario_inicial(i)+produccion(i,1)=inv(i,1)+venta(i,1));

@for(PM(i,j)|j#ge#2:[balance]inv(i,j-1)+produccion(i,j)=inv(i,j)+venta(i,j));
```

Reporte de solución Lingo (solo variables de decisión y restricciones):

```
Global optimal solution found.
 Objective value:  1815000.


Variable                 Value        Reduced Cost

PRODUCCION(1,1)        400.0000           0.000000
PRODUCCION(1,2)        600.0000           0.000000
PRODUCCION(1,3)        0.000000           50.00000
PRODUCCION(2,1)        600.0000           0.000000
PRODUCCION(2,2)        300.0000           0.000000
PRODUCCION(2,3)        400.0000           0.000000
INV(1,1)               100.0000           0.000000
INV(1,2)               400.0000           0.000000
INV(1,3)               0.000000           1500.000
INV(2,1)               0.000000           200.0000
INV(2,2)               0.000000           50.00000
INV(2,3)               0.000000           850.0000

Row                Slack or Surplus      Dual Price
 1                    1815000.          -1.000000
CAPACIDAD(1)        0.000000             250.0000
CAPACIDAD(2)        100.0000             0.000000
CAPACIDAD(3)        600.0000             0.000000
DISPONIBILIDAD(1)   100.0000             0.000000
DISPONIBILIDAD(2)   0.000000            0.000000
DISPONIBILIDAD(3)   1100.000              0.000000
BALANCE_MES1(1)       0.000000           -1050.000
BALANCE_MES1(2)       0.000000           -650.0000
BALANCE(1,2)          0.000000           -1200.000
BALANCE(1,3)          0.000000           -1350.000
BALANCE(2,2)          0.000000           -600.0000
BALANCE(2,3)          0.000000           -700.0000
```

Informe administrativo de la solución:

Programa de producción, inventario y ventas de cada mes – camionetas

Mes	Inv. Inicial	Producción	Venta	Inv. Final
1	100 (*)	400	400	100
2	100	600	300	400
3	400	0	400	0

(*) Es el dato que corresponde al inventario inicial del primer mes.
(**) Las ventas son datos.

Programa de producción, inventario y ventas de cada mes – automóviles

Mes	Inv. Inicial	Producción	Venta	Inv. Final
1	200 (*)	600	800	0
2	0	300	300	0
3	0	400	400	0

(*) Es el dato que corresponde al inventario inicial del periodo
(**) Las ventas son datos.

El mínimo costo total es $ 1 815 000.

Análisis adicional:

Puede observarse que la capacidad de producción no se ha utilizado al máximo en el mes 2, pues hay una holgura de 100 vehículos.

En cuanto al acero disponible, este solo se utilizó íntegramente en el mes 2, ya que existe holgura en los meses 1 y 3.

La solución óptima indica no producir camionetas en el mes 3, pero si se decidiera hacerlo, entonces se incrementarían (eso sería un perjuicio) los costos totales en $ 50 por unidad. Una interpretación similar puede darse a los costos reducidos de las variables que representan el inventario de camionetas en el mes 1 y de vehículos en los tres meses.

Escenario

En el caso del ejemplo 2 se indica que el acero se compra en cantidades exactamente iguales a laS necesidades de producción, hasta el máximo de 1500 toneladas cada mes. Sin embargo, dadas las fluctuaciones de precio del acero de un mes al otro podría resultar conveniente comprar una cantidad mayor a la estrictamente necesaria en algún mes y guardar el excedente. Para evaluar esa posibilidad, ahora tenga en cuenta que General Cars cuenta con un almacén de insumos, en el cual puede almacenar el acero excedente luego de atender la producción, a un costo mensual de 20 $/tonelada. Presente los cambios en el modelo original.

Modelo matemático

Minimizar

$$Z = \sum_{j=1}^{3}(compra_j * \ costo\_acero_{\ j} \ + \ inv\_acero_j * 20\ ) + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} inv_{ij} * 150$$

$$\sum_{i=1}^{2} producción_{ij} \ \leq 1000\ , \quad \forall j = 1,\ldots,3$$

$$compra_{\ j} \leq 1500\ , \qquad \forall j = 1,\ldots,3$$

$$inventario\_inicial_i + producción_{\ i1} = inv_{i1} + \ venta_{\ i1}, \ \ \forall i = 1,2$$

$$inv_{ij-1} + \ producción_{ij} = inv_{ij} + \ venta_{\ ij}, \qquad \forall i = 1,2, \forall j = 2,3$$

$$0 + \ compra_1 = inv\_acero_1 + \sum_{i=1}^{2} producción_{i1} * \ req\_acero_i,$$

$$inv\_acero_{j-1} + \ compra_j = inv\_acero_j + \sum_{i=1}^{2} producción_{ij} * \ req\_acero_i\,, \qquad \forall j = 2,3$$

$$producción_{ij} \geq 0, \quad inv_{ij} \ \geq 0\ , \qquad \forall\ i = 1,\ldots,3, \ \ \forall j = 1,\ldots,3$$

$$compra_j \geq 0 \ \ \forall j = 1, \ldots,3 \quad inv_{acero\ j} \geq 0 \ \ \forall j = 1,\ldots,3$$

Modelo Lingo

```
Sets:
mes/1..3/:costo_acero,compra, inv_acero;
producto/1..2/:req_acero,inventario_inicial;
PM(producto,mes):produccion,inv,venta;
endsets

Data:
costo_acero=400 600 700;
req_acero=2,1;
venta=400 300 400
      800 300 400;
inventario_inicial=100 200;
enddata

Min=@sum(mes(j):compra(j)*costo_acero(j)+20*inv_acero(j))+
@sum(PM(i,j):150*inv(i,j));

@for(mes(j):[capacidad]@sum(producto(i):produccion(i,j))<=1000);

@for(mes(j):[disponibilidad] compra(j)<=1500);

@for(producto(i):[balance_mes1]
inventario_inicial(i)+produccion(i,1)=inv(i,1)+venta(i,1));

@for(PM(i,j)|j#ge#2:[balance]
inv(i,j-1)+produccion(i,j)=inv(i,j)+venta(i,j));

compra(1)=inv_acero(1)+@sum(producto(i):produccion(i,1)*req_acero(i));

@for(mes(j)|j#ge#2:
inv_acero(j-1)+compra(j)=
inv_acero(j)+@sum(producto(i):produccion(i,j)*req_acero(i)));
```

Capítulo

7

Solución algorítmica de los modelos de programación lineal. Método Símplex

En este capítulo se tratan los siguientes temas:

- Método Símplex: procedimiento
- Aplicación del método Símplex
- Interpretación de los coeficientes en la función objetivo de la solución óptima
- Aplicación del método Símplex en otros casos

El algoritmo Símplex es utilizado para la solución de modelos de programación lineal. Es un procedimiento iterativo: partiendo de una solución básica factible inicial, cada iteración consiste en evaluar si existe una solución básica factible adyacente mejor. El procedimiento concluye cuando ya no sea posible encontrar una solución mejor, ya que en ese caso se habrá encontrado la solución óptima. La explicación que se propone para el algoritmo, busca que el estudiante pueda comprenderlo de forma simple, recurriendo al procedimiento de eliminación gaussiana que ya conoce.

¿Qué debe lograr el estudiante?

Aplicar correctamente el algoritmo Símplex para la solución de un modelo de programación lineal.

El fundamento del algoritmo puede entenderse a partir de su interpretación geométrica. Cuando se explicó el método gráfico se indicó que la solución óptima se encuentra siempre en un vértice de la región factible. Todos los vértices, los de la región factible y los que se encuentren fuera de ella se llaman, en términos generales: **soluciones básicas**. Los vértices de la región factible se llaman **soluciones básicas factibles** y los que están fuera se llaman **soluciones básicas no factibles**.

De acuerdo con esto, podría afirmarse que es posible hallar la solución óptima de un modelo de programación lineal identificando todas las soluciones básicas factibles y escogiendo entre ellas a la mejor, es decir, la que determine el mejor valor de la función objetivo, tal como se hará en el ejemplo siguiente. En ese caso, es necesario identificar todas las soluciones básicas y luego, solo entre las soluciones básicas factibles, elegir la mejor.

¿Cómo identificar las soluciones básicas sin aplicar el procedimiento de solución gráfica (por ejemplo, cuando el modelo tiene más de dos variables)? Ello es lo que se muestra con el ejemplo siguiente:

Nota:
Se toma como ejemplo un modelo de dos variables para que el lector pueda comprobar gráficamente lo que se afirma.

Maximizar

$Z = 3X1+5X2$

s.a.

$X_1+X_2 \leq 200$

$X_1+2X_2 \leq 300$

X_1, X_2 positivas

Primero será necesario expresar el **modelo** en su forma estándar:

Un modelo en su **forma estánda**r tiene las siguientes características:

- Una función objetivo por **maximizar**,

  Una función objetivo de minimización puede convertirse en una de maximización si se multiplican todos sus miembros por (-1).

- Restricciones expresadas en forma de ecuaciones, para ello se agregan las variables de holgura o exceso, con lados derechos positivos.

- Variables solo positivas.

  En caso de variables negativas: se sustituyen por el negativo de la misma variable.

  En caso de variables sin restricción de signo: se sustituyen por la diferencia de dos variables positivas.

El ejemplo ya tiene una función objetivo por maximizar y variables solo positivas, pero es necesario lograr que las restricciones queden expresadas como ecuaciones. Para ello se añaden las variables S1 y S2 una a cada restricción para representar algebraicamente la holgura que podría existir, de modo que la desigualdad entre el lado derecho e izquierdo de cada restricción ya no podría existir y las restricciones quedarían expresadas como ecuaciones:

$\text{Max } 3X_1 + 5X_2$

$X_1, + X_2 + \mathbf{S1} = 200$

$X_1, + 2X_2 + \mathbf{S2} = 300$

$X_1, X_2,$ **S1, S2** positivas

Segundo, se generan todas las soluciones básicas:

En toda solución básica un cierto número de variables tienen valor cero. La cantidad de variables con valor cero que debe haber en cualquier solución básica se calcula con la siguiente expresión:

$$\mathbf{(n - m)}$$

donde ***n*** es el **número total** de variables del modelo en la forma estándar (es decir las de decisión + las variables añadidas) y ***m*** es el número de restricciones del modelo (sin incluir las de signo o no negatividad).

Para el ejemplo, el modelo en la forma estándar tiene 4 variables (n=4) y dos restricciones (m=2). Por lo tanto, toda solución básica debe tener 2 variables con valor cero. Así, haciendo cero dos variables diferentes cada vez, se obtienen las soluciones básicas siguientes:

Cuadro 1

Número de solución	X_1	X_2	S1	S2	Valor de la F. O.
1	0	0	200	300	0
2	200	0	0	100	600
3	**100**	**100**	**0**	**0**	**800**
4	0	150	50	0	750
5	300	0	-100	0	INFACTIBLE
6	0	200	0	-100	INFACTIBLE

El cuadro 1 contiene las 6 soluciones básicas de este modelo, entre las que puede observarse que las soluciones n.º 5 y n.º 6 son no factibles, pues alguna variable toma un valor negativo. Al comparar el valor que toma la función objetivo en cada solución básica factible, es posible identificar la mejor, en este ejemplo esta es la n.º 3.

Nótese que se han encontrado 6 soluciones básicas haciendo cero dos de las 4, es decir, haciendo cero (n-m) variables de las n que tiene en total el modelo estándar. Es posible establecer el número total de soluciones básicas mediante el cálculo de combinaciones:

$$\binom{n}{(n-m)} = n! / (n-m)!m!$$

Evidentemente, en problemas con gran número de restricciones y variables no resulta adecuado calcular cada una de las soluciones básicas para evaluarlas en la función objetivo y determinar cuál de ellas es la mejor. **Entonces se ha diseñado el algoritmo Símplex que se basa en la generación inteligente las soluciones básicas y su evaluación hasta encontrar la óptima**.

Una aclaración importante para no confundir los términos:

En cualquier solución básica las variables que toman valor cero se llaman **variables no básicas** y las que tienen valor diferente de cero se llaman **variables básicas**.

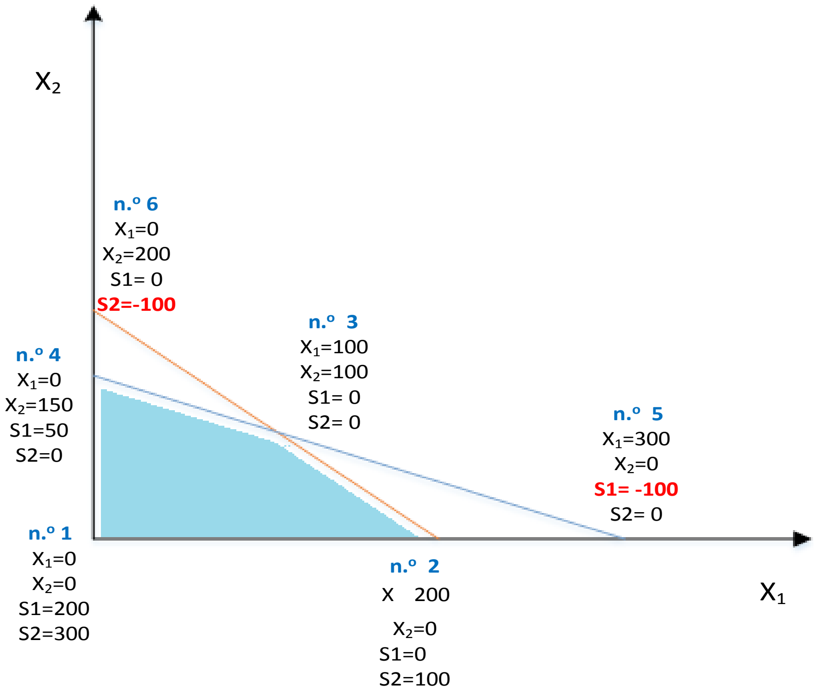
Nótese la diferencia:

Solución básica (el equivalente a un vértice) es un conjunto de valores para todas las variables del modelo.

Variable básica es aquella que toma valor diferente de cero dentro de una solución básica.

El conjunto de variables básicas de una solución básica conforman lo que se llama **la base**.

Haciendo una comparación con el método gráfico, las soluciones básicas halladas en el cuadro 1 corresponden a los vértices del 1 al 6:



También puede observarse en el gráfico que algunas soluciones son adyacentes, pues tienen un lado en común, como por ejemplo las soluciones n.º 1 y n.º 2, o las soluciones n.º 2 y n.º 3. Al revisar el cuadro 1 puede verse que las soluciones 1 y 2, que son gráficamente adyacentes, difieren en la situación de dos variables: en la solución n.º 1, el valor de X_1 es cero (es una variable no básica) y el de S1 es 200 (es variable básica), pero en la solución n.º 2, que es adyacente, X_1 es básica y S1 es no básica. Lo mismo puede observarse entre las soluciones adyacentes n.º 2 y n.º 3, la variable X_2 pasa de ser una variable no básica a variable básica y S2, que es una variable básica que pasa a ser no básica de una solución a la otra. Igualmente entre las soluciones adyacentes n.º 3 y n.º 4 se observa que X_1 pasa de ser variable básica a no básica y S1 pasa de ser variable no básica a básica de una solución a otra.

Dado que la solución óptima siempre se encuentra en un vértice, **que equivale a una solución básica factible**, sería posible encontrar la solución óptima de cualquier problema si se evalúan **inteligentemente** las soluciones básicas factibles. Esto quiere decir que empezando por una solución básica factible inicial, se podría evaluar si existe una solución básica factible adyacente **mejor**; de ser así, será necesario identificarla para volver a evaluar si existe una solución básica factible adyacente a esta última que sea mejor. Este procedimiento se podría repetir hasta que no sea posible encontrar una solución básica factible adyacente mejor, en cuyo caso se habría hallado la mejor solución. **Esta lógica es la base del procedimiento del algoritmo Símplex que se explica en la sección siguiente.**

7.1 Método Símplex: procedimiento

a) Expresar el modelo en la forma estándar y ubicar una solución **básica factible inicial.**

Modelo en la forma estándar:

Max $3X_1, + 5X_2$

$X_1, + X_2$ **+ S1** $= 200$

$X_1, + 2X_2$ **+S2** $= 300$

X_1, X_2, S1, S2 positivas

Para identificar una solución básica factible inicial. Se hará un paralelo con el gráfico de la solución en el que puede observarse que el vértice más fácil de identificar es el origen de coordenadas que en el cuadro 1 corresponde a la solución básica n.º 1. En esa solución inicial el valor de la función objetivo es, obviamente, cero.

Entonces la solución básica factible inicial es:

S1=200

S2=300

$X_1=X_2=0$

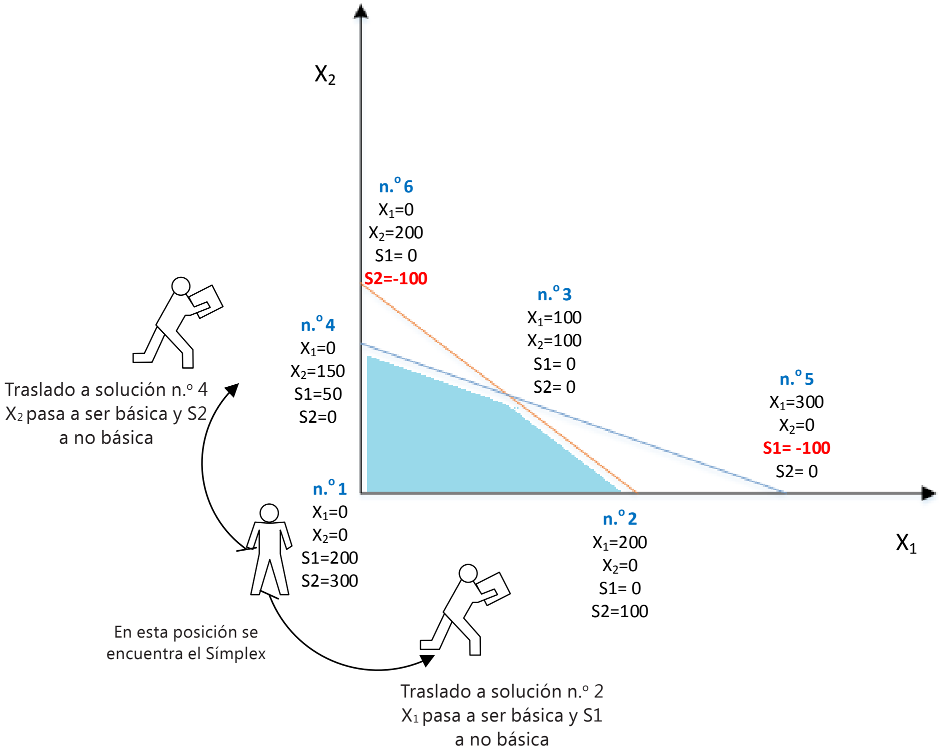
Valor de la función objetivo=0

Dado que no siempre se tiene la posibilidad de observar un gráfico para el modelo, ¿cómo se encuentra la solución básica factible inicial en cualquier otro caso?:

Como se ha dicho en párrafos anteriores, en toda solución básica hay (n-m) **variables no básicas**. En este ejemplo, entonces, debe haber 2 variables no básicas. Eligiendo como variables no básicas a X_1 y X_2, entonces S1 y S2 serían las variables básicas, nótese que las **variables básicas** tienen coeficiente 1 en las restricciones y aparecen cada una en una restricción diferente en la que se observa sus respectivos valores S1=200 y S2=300.

b) Identificar una solución adyacente en la que el valor de la función objetivo mejore. (Prueba de optimidad).

Como se explicó, las soluciones adyacentes difieren en la situación de dos variables; por lo tanto, pueden generarse haciendo que una variable no básica pase a condición de básica y consecuentemente una variable básica pase a condición de no básica. **Lo importante es elegir correctamente la variable que pasará a condición de básica.** Haciendo un paralelo con el gráfico, esto equivale a ubicarse en el vértice del origen y evaluar los vértices vecinos para determinar si el valor de la función objetivo mejora en alguno de ellos.



Teniendo como solución actual a la n.º 1, las soluciones adyacentes son la n.º 2 y la n.º 4. En el caso de la solución n.º 2, se hace básica la variable X_1 y no básica S1 y la función objetivo mejora en 3 por cada unidad de X_1. En el caso de la solución n.º 4 se hace básica la variable X_2 y no básica la S2 y la función objetivo mejora en 5 por unidad de X_2.

Por lo tanto, es mejor la solución adyacente n.º 4, ya que **la función objetivo mejora más**. En otros casos en que no se pueda observar gráficamente las soluciones adyacentes bastará con observar la función objetivo y preguntar:

¿Alguna de las variables no básicas mejoraría el valor de la función objetivo si se hiciera básica?

Si la respuesta es **No**, entonces la solución actual es la óptima, pues ya no sería posible encontrar otra mejor.

Si la respuesta es **Sí**, entonces la solución básica actual no es óptima. Por tanto, se debe optar por ubicar y "trasladarse" a dicha mejor solución adyacente. En esa solución adyacente la variable no básica que puede mejorar la función objetivo debería hacerse básica. A esa variable se le llama **variable no básica entrante** a la base. Enseguida, será necesario encontrar qué otra variable cambiaría su situación, es decir, si una variable no básica entra a la base, entonces una variable básica debe salir de ella. A esa variable se le llamaría **variable básica saliente** de la base, ¿cómo determinamos la variable básica saliente?

c) Trasladar a la solución adyacente que mejora la función objetivo si en el gráfico se diera un salto hacia el vértice adyacente respectivo, para que, una vez ubicados en esa nueva solución, se inicie nuevamente la búsqueda de la posibilidad de que exista alguna otra solución adyacente mejor, repitiendo los pasos desde (b).

(Traslado)

En palabras simples, la solución óptima se identifica trasladándose de un vértice a otro mientras se mejore el valor de la función objetivo, si no hubiera mejora, se habrá hallado el vértice óptimo. Esta es la lógica que emplea el algoritmo del método Símplex. Entonces, formalmente los pasos que el algoritmo Símplex aplica iterativamente son:

- Expresar el modelo en la forma estándar y seleccionar de una solución básica factible inicial.
- Aplicación de la prueba de optimidad
- Identificación de la solución básica factible adyacente mejor.
- Repetir desde (b) hasta que no sea posible mejorar la solución actual.

Ejemplo:

Dado el siguiente sencillo modelo lineal:

$$\text{Max } 3X_1 + 5X_2$$

$$X_1 + X_2 \quad <= 200$$

$$X_1 + 2X_2 \quad <= 300$$

X_1, X_2 positivas

Suponga que modela el problema de decidir cuánto producir de dos productos 1 y 2 representados por las variables X_1 y X_2, respectivamente, sujetos a la limitada disponibilidad de dos recursos, que corresponden cada uno a cada una de las restricciones del modelo.

En su forma estándar este modelo es como sigue:

$$\text{Max } 3X_1 + 5X_2$$

$$X_1 + X_2 + \mathbf{S1} \quad = 200$$

$$X_1 + 2X_2 \quad + \mathbf{S2} = 300$$

X_1, X_2, S1, S2 positivas

Las soluciones básicas del modelo deben tener 2 variables no básicas (ya que n = 4 y m = 2, entonces, n-m = 2).

7.2 Aplicación del método Símplex

Encontrar la solución básica factible inicial.

La solución básica factible inicial puede encontrarse fácilmente si se tiene en consideración que las variables básicas deben ser tales que aparezcan cada una en una sola restricción con coeficiente +1 y no deben aparecer en la función objetivo. Como puede observarse, las variables básicas de la solución inicial pueden ser las variables S1 y S2 que cumplen con tales características.

Entonces, la solución básica factible inicial es:

S1 = 200

S2 = 300

$X_1 = X_2 = 0$

Valor de la función objetivo = 0

Esta solución no es la mejor, así que corresponde hallar una solución básica factible adyacente mejor, si existe.

Primera iteración:

a) Identificar si existe una solución adyacente que pudiera ser mejor.

Cabe recordar que las soluciones adyacentes se obtienen a partir de un solo cambio en la base, es decir, que el conjunto de variables básicas de una solución difiere del de la solución adyacente en solo una variable. Gráficamente, se trataría de dos vértices formados por una restricción no común.

Para evaluar si existe una solución mejor, debe evaluarse los coeficientes de las variables no básicas, los cuales señalan el efecto que produciría cambiar la condición de no básicas, es decir, asignarles valor y convertirlas en básicas. Estos coeficientes se pueden observar en la función objetivo después de cada iteración para cada una de las variables no básicas.

En esta primera iteración, lo que se observa es el coeficiente de las variables en la función objetivo original:

Entonces, resultaría adecuado que la variable X_2 dejara de ser no básica, pues es la que **mejor efecto** tendría sobre la función objetivo (tiene el coeficiente mayor, en este caso de maximización).

En la nueva solución básica debe entrar la variable X_2 que se llamará **variable no básica entrante.**

La existencia de una variable que mejore el valor de la función objetivo constituye una prueba de que la solución actual no es óptima: es por ello que este paso es lo que se llama la **prueba de optimidad**.

Si la variable X_2 es la variable no básica entrante, debe haber una variable básica que abandone la base actual (variable básica saliente).

b) Determinación de la variable básica saliente

Como es lógico suponer, si el ingreso de X_2 a la base es favorable a la función objetivo, será nuestro interés que ingrese a la base con el mayor valor posible. ¿Cuál es ese mayor valor posible?

Observando las restricciones del modelo que imponen límites al valor de todas las variables del modelo incluso también a la variable X_2:

$X_1 + X_2 + S_1 \quad = 200$......... X_2 podría tomar el valor máximo de 200

$X1 + 2X_2 \quad +S_2 = 300$.........$X_2$ podría tomar el valor máximo de **150**

Estos valores se llaman "cotas"

Dado que X_1 es no básica, y que los lados derechos con constantes, puede observarse que si X_2 tomara el máximo valor posible en la primera restricción este sería 200 y, en ese caso, el valor que tomaría S1 sería cero. En la segunda restricción sin embargo, el máximo valor posible sería solo 150 y en ese caso, S2 tomaría valor cero. Si el valor que vaya a tomar X_2 debe satisfacer todas las restricciones, entonces solo podría ser 150, con lo cual el valor de S2 es el que sería cero, el de S1 sería 50 y por consiguiente, **S2 sería la variable básica saliente**.

Entonces tenemos una nueva solución, en la cual $X_2 = 150$, $S1 = 50$ (variables básicas) y $S2 = X_1 = 0$ (variables no básicas). El valor de la función objetivo será: 750.

El cambio en la base hace necesario revisar el modelo para que muestre la solución básica factible actual. **Esto implica que las variables básicas aparezcan solo una vez, cada una en una restricción diferente y con coeficiente +1 y que no aparezcan en la función objetivo, ya que no podrían aportar más a dicha función, pues ya tienen su mejor valor posible**.

c) Actualizar el modelo con la nueva solución hallada

El valor de X_2 ha quedado acotado por la siguiente restricción:

$$X_1 + 2X_2 \quad +S_2 = 300$$

Despejando X_2 de esa restricción: $X_2 = 150 - 1/2S2 - 1/2X_1$

y reemplazando en la primera restricción y en la función objetivo:

En la primera restricción:

$$X_1 + (150 - 1/2S2 - 1/2X1) + S1 = 200$$

$\frac{1}{2} X_1 - 1/2S2 + \mathbf{S1} = \mathbf{50}$ (note que X_1 y S2 son no básicas)

En la función objetivo:

Maximizar $Z = 3X_1 + 5(150 - 1/2S2 - 1/2X_1)$

Maximizar $Z = 3X1 + 750 - 5/2\ S2 - 5/2\ X_1$

Maximizar $Z = \frac{1}{2} X_1 - 5/2\ S2 + \mathbf{750}$ (X_1 y S2 son no básicas)

se tiene el modelo actualizado que muestra la nueva solución hallada:

Maximizar

$Z = \frac{1}{2} X_1 - 5/2\ S2 + \mathbf{750}$

s.a.

$\frac{1}{2} X_1 - 1/2S2 + \mathbf{S1} = \mathbf{50}$

$\frac{1}{2} X_1 + \mathbf{X_2} + \frac{1}{2} S2 = \mathbf{150}$

X_1, X_2, S1, S2 positivas

En el que se observa que:

X_2 = 150, S1= 50, X_1=0, S2=0 y que la función objetivo vale 750.

Segunda iteración

a) Aplicar nuevamente la prueba de optimidad; es decir, se evaluarán los nuevos coeficientes en la función objetivo, para determinar si existe la posibilidad de mejorar la solución actual:

$$\text{Maximizar } Z = \tfrac{1}{2} X_1 - \mathbf{5/2}\, S2 + \mathbf{750}$$

Si S2 tomara valor, es decir, si fuera esta la variable no básica entrante, el valor de la función objetivo se reducirá en 5/2 por cada unidad de valor de S2. (Nótese que el coeficiente de S2 tiene signo negativo).

Si X_1 tomara valor, es decir, si fuera esta la variable no básica entrante, el valor de la función objetivo aumentaría en ½ por cada unidad de valor de X_1, por lo tanto, dado que se busca maximizar el valor de la función objetivo, esta mejoraría si hiciéramos básica a X_1. Por lo tanto, **la solución actual no es óptima ya que puede mejorar.**

¿Qué explicación tiene el coeficiente de X_1, que es igual a ½?

Se entiende que cuando X_1 ingrese a la base, por cada unidad de valor de X_1 la función objetivo aumentaría en \$ 3 que es el aporte original de la variable, pero, observando las restricciones, se nota que si X_1 tomara valor, reduciría el valor de X_2 y de S1.

$$\tfrac{1}{2} X_1 + \mathbf{X_2} + 1/2\, S2 = 150$$

$$\tfrac{1}{2} X_1 - 1/2 S2 + \mathbf{S_1} = 50$$

Por cada unidad de X_1 se reduce en ½ el valor de X_2, con lo cual la función objetivo se reduciría en ½ * 5, es decir 2,5.

Por cada unidad de X_1 se reduce en ½ el valor de S1, pero como S1 no afecta a la función objetivo, esto no reduce su valor.

El efecto neto es: +3 – 2,5 = 0,5 que es lo que señala el respectivo coeficiente.

Este coeficiente se llama **costo reducido** y se explicará en la sección siguiente.

b) Determinación de la variable básica saliente. En esta segunda iteración, ya ha quedado establecido que **la variable no básica entrante** será X_1. La variable básica saliente debe determinarse observando la restricción que determina el máximo valor con el que podría entrar a la base la variable X_1:

½ X_1 + X_2 +1/2 S2=150.............. X_1 podría tomar el valor máximo de 300

½ X_1–1/2S2 + **S1**= 50................ X_1 podría tomar el valor máximo de **100**

Comparando ambas cotas, 100 es el valor que puede tomar X_1. Debe tenerse en cuenta que si en alguna restricción no apareciera la variable no básica entrante o su coeficiente en dicha restricción fuera negativo, tal restricción **no** deberá ser considerada al determinar las cotas.

En esta iteración, dado que la cota mínima la establece la segunda restricción, es la variable **S1 la que será la variable básica saliente.**

Por lo tanto, si el valor de X_1 ha quedado acotado por la siguiente restricción,

$\frac{1}{2} X_1 - 1/2S2 + \mathbf{S1} = 50$

c) Actualizando el modelo con la nueva solución hallada.

Despejando X_1:

$\mathbf{X_1} - S2 + 2S1 = \mathbf{100}$ (nótese que S1 y S2 son no básicas)

$\mathbf{X_1} = 100 - 2S1 + S2,$

Y reemplazando su valor en la primera restricción y en la función objetivo:

En la primera restricción:

$\frac{1}{2} (100 - 2\ S1 + S2) + \mathbf{X_2} + 1/2\ S2 = 150$

$50 - S1 + \frac{1}{2}\ S2 + X_2 + \frac{1}{2}\ S2 = 150$

$\mathbf{X_2} - S1 + S2 = \mathbf{100}$ (nótese que S1 y S2 son no básicas)

En la función objetivo:

Maximizar $Z = \frac{1}{2} (100 - 2\ S1 + S2) - 5/2\ S2 + \mathbf{750}$

Maximizar $Z\ 50 - S1 + \frac{1}{2}\ S2 - 5/2\ S2 + 750$

Max $\mathbf{800} - S1 - 2\ S2$

La nueva solución es

$X_1 = 100$

$X_2 = 100$

$S1=S2=0$

El valor de la función objetivo: 800

Si observamos la función objetivo, las variables no básicas tienen ambas coeficientes negativos, lo cual señala que no hay forma de mejorar el valor de la función objetivo, ya que si se hiciera entrar a la base a cualquiera de las variables no básicas, la función objetivo se reduciría. Por lo tanto, **esta es la solución óptima**.

7.3 Interpretación de los coeficientes en la función objetivo de la solución óptima

Los coeficientes de las variables no básicas en la función objetivo de la solución óptima tienen una interesante interpretación:

a) Cuando acompañan a variables de holgura o exceso, estos coeficientes finales en la función objetivo representan los precios sombra o precios duales.

¿Qué explicación tiene ese precio sombra o precio dual?

Si alguna de las variables S1 o S2 toman valor, eso significaría que dejaría de utilizar alguna unidad de los recursos respectivos. Ello, como es lógico, afectaría el valor de las variables básicas, con lo cual, con seguridad, cambiará el valor de la función objetivo. Esos coeficientes pueden interpretarse como el impacto de una variación en la disponibilidad de cada recurso. Por ejemplo, si S1 tomara el valor 1, eso significaría que se dejaría de utilizar una unidad del recurso 1, observando las restricciones en la solución óptima:

$$X_1 + 2S1 - S2 = 100$$

$$X_2 - S + S2 = 100$$

Se observa que X_1 tendría que tomar el valor de 98 para que siguiera siendo factible la primera restricción y X_2 el valor 101 para que siga siendo factible también la segunda restricción. Esto implica que en la función objetivo se observarían los siguientes cambios:

Por la reducción del valor de X_1 el valor de la función objetivo disminuiría en 2*3 = 6. Por el incremento del valor de X_2 la función objetivo aumentaría en 1*5 = 5.

El efecto neto de hacer S1=1 es una reducción del valor de la función objetivo en $ 1 que es justamente el valor del coeficiente de S1 en la función objetivo final.

Puede afirmarse que el coeficiente final en la función objetivo de la solución óptima señala que el valor del recurso es $ 1 porque ese es el impacto que causa sobre la función objetivo (no es el precio de mercado, sino el valor que tiene para el modelo) y a ese coeficiente se le llama **precio dual**.

b) Cuando acompañan a variables de decisión, estos coeficientes finales en la función objetivo representan costos reducidos.

¿**Qué explicación tiene ese costo reducido?**

Aunque en el ejemplo ninguna variable de decisión resulta no básica, la interpretación del costo reducido es interesante. Dicho costo reducido sería igualmente un coeficiente negativo, indicando que hacer básica esa variable es perjudicial para la función objetivo.

¿Qué explicación tiene esto?

Por un lado, al hacer básica esa variable, se afecta el valor óptimo de otras variables básicas, con lo cual se produce un efecto negativo en la función objetivo. Por otro lado, las variables de decisión generalmente aportan positivamente a la función objetivo en proporción al coeficiente que tienen en la función objetivo del modelo original. Entonces, el costo reducido señala que en términos netos el efecto de hacer básica la variable respectiva es perjudicial (efecto negativo sobre las demás variables mayor al efecto positivo por la contribución de la variable a la función objetivo).

Entonces, el costo reducido indica:

- En cuánto perjudicaría tomar una decisión que se recomienda no tomar (darle valor a una variable de decisión que es no básica en la solución óptima).
- También se puede interpretar como la cantidad en la que se debe mejorar su aporte en la función objetivo original para que hacerla básica no resulte en un perjuicio neto.

7.4 Aplicación del método Símplex en otros casos

El ejemplo que se ha presentado es un modelo de maximización con restricciones solo del tipo "≤", pero ¿qué pasaría si el modelo fuera distinto?

Véase un segundo ejemplo:

Minimizar $Z = 4X_1 + X_2$

$3X_1 + X_2 = 3$

$4X_1 + 3X_2 \geq 6$

$X_1 + 2x_2 \leq 4$

X_1 , X_2 positivas

Al pasar a la forma estándar las restricciones, la primera restricción es ya una ecuación y no habrá una variable como las de holgura que se agregan en el caso de las restricciones de desigualdad y que cumpla la condición de aparecer solo en una de las restricciones con coeficiente +1.

Algo similar ocurre con la segunda restricción que es ≥, a la que corresponde una variable de exceso que se coloca con coeficiente, -1.

En ambos casos hay que recurrir a adicionar variables **artificiales (A)**, tal como se muestra:

$$3X_1 + X_2 + \mathbf{A1} = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 - S1 + \mathbf{A2} = 6$$

$$X_1 + 2X_2 + S2 = 4$$

Con estas variables intentaremos conseguir una solución básica factible inicial que satisfaga las condiciones necesarias. Ahora el modelo estándar tiene 6 variables y 3 restricciones, por lo tanto corresponden 3 variables no básicas y 3 variables básicas. Entonces, las variables básicas inicialmente serán A1, A2 y S2, que son las que aparecen cada una en una restricción diferente con coeficiente **+1**; sus valores serán 3, 6 y 4, respectivamente.

Teniendo en cuenta que las variables A1 y A2 son artificiales, es decir, no tienen significado en el modelo y han sido introducidas solo para conseguir una solución inicial conveniente, la solución que se consigue de esta forma es en realidad no factible, no podemos considerarla válida. Debe llegarse a una solución básica **factible** inicial en la que se pueda prescindir de tales variables artificiales. Para ello se desarrollará el algoritmo Símplex en **dos fases**: la primera hasta encontrar una solución básica factible inicial en la que no existen A1 y A2, y luego a partir de los resultados de esta primera fase, intentar la búsqueda de la solución óptima.

Primera fase:

Para eliminar las variables A1 y A2, se propone una función objetivo que será siempre de minimización de las variables artificiales, ya que el objetivo en el fondo es eliminarlas del modelo. Las restricciones serán las mismas del modelo original para asegurar que la solución inicial que se encuentre sea factible.

$$\text{Minimizar } Z = \mathbf{A1 + A2}$$

$$3X_1 + X_2 + \mathbf{A1} = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 - S1 + \mathbf{A2} \geq 6$$

$$X_1 + 2X_2 + S2 \leq 4$$

X_1, X_2, S1, S2, A1, A2, son positivas

Dado que la base inicial está formada por A1, A2 y S2, estas variables no deben aparecer en la función objetivo, así que procederemos a reemplazarlas por las siguientes expresiones, que se obtienen a partir de la primera y segunda restricciones:

$$A1 = 3 - 3X_1 - X_2$$

$$A2 = 6 + S1 - 3X_2 - 4X_1$$

La función objetivo quedará expresada de la siguiente forma:

Minimizar $Z = 3 - 3X_1 - X_2 + 6 + S1 - 3X_2 - 4X_1$

Minimizar $Z = 9 - 7X_1 - 4X_2 + S1$

Entonces, el modelo que debe resolverse en la primera fase será:

Minimizar $Z = 9 - 7X_1 - 4X_2 + S1$

$$3X_1 + X_2 + \mathbf{A1} = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 - S1 + \mathbf{A2} \geq 6$$

$$X_1 + 2X_2 + S2 \leq 4$$

El valor de la función objetivo en la solución inicial es 9, ya que $X_1=X_2=S1=0$, sin embargo, observando los coeficientes de las variables no básicas, es posible mejorar este valor (reducirlo, ya que es un modelo de minimización) si X_1 se convierte en variable básica.

Primera iteración:

Variable no básica entrante: X_1

¿Cuál es la variable básica saliente?

menor cota $\quad \mathbf{3X_1} + X_2 + \mathbf{A1} = 3$ ....Cota que determina para X_1: 1

$\mathbf{4X_1} + 3X_2 - S1 + \mathbf{A2} \geq 6$......... Cota que determina para X_1: 3/2

$\longrightarrow \mathbf{X_1} + 2X_2 + \mathbf{S2} \leq 4$............Cota que determina para X_1: **4**

Entonces, la variable que dejará de ser básica es A1. La nueva base contiene a X_1, a A2 y a S2, con los siguientes valores:

De la primera restricción: $X_1 + 1/3\ X2 + 1/3\ A1 = 1$ se obtiene el valor de X_1 que se empleará para reemplazar su valor en el resto del modelo:

$\mathbf{X_1} = 1 – 1/3\ X_2 – 1/3\ A1$

Reemplazando a X_1 en la segunda restricción:

$4\ (1 – 1/3\ X_2 – 1/3\ A1) + 3X_2 – S1 + A2 = 6$

$5/3\ X_2 - 4/3\ A1 – S1 + \mathbf{A2 = 2}$

Reemplazando a X_1 en la tercera restricción:

$(1 – 1/3\ X_2 – 1/3\ A1) + 2X_2 + S2 = 4$

$5/3\ X_2 – 1/3\ A1 + \mathbf{S2 = 3}$

Reemplazando a X_1 en la función objetivo:

Minimizar $Z = 9 – 7(1 – 1/3\ X2 – 1/3\ A1) – 4X_2 + S1$

Minimizar $Z = 2 – \mathbf{5/3\ X_2} + 7/3\ A1 + S1$

Puede observarse que la función objetivo tiene un valor menor que la anterior (vale 2) y que se ha hecho cero la variable artificial A1, ya que ha pasado a ser no básica. Sin embargo, evaluando los coeficientes de las variables no básicas en la función objetivo, el coeficiente de X_2 indica que esta solución puede mejorar si esta variable entra a la base, por lo cual debe realizarse una segunda iteración. Si la función objetivo ya no pudiera mejorar y todavía es básica una variable artificial, estaríamos frente a un modelo sin solución factible. Esto no sucede en este caso.

Segunda iteración

Entra a la base X_2.

¿Cuál es la variable básica saliente?

$\mathbf{X_1 + 1/3\ X_2} + 1/3\ A1 = 1$ ... cota que determina para X_2: 3

menor cota ⟶ $\mathbf{5/3\ X_2} – 4/3\ A1 – S1 + \mathbf{A2 = 2}$ cota que determina para X_2: 6/5

$\mathbf{5/3\ X_2} – 1/3\ A1 + \mathbf{S2 = 3}$ ...... cota que determina para X_2: 9/5

Como la menor cota la establece la segunda restricción, entonces A2 es la variable básica saliente.

La nueva base contiene a X_1, X_2 y S2 con los siguientes valores:

De la segunda restricción $5/3\ X_2 – 4/3\ A1 – S1 + A2 = 2$ se obtiene el valor de X_2 que se reemplazará en el resto del modelo:

$X_2 = 3/5\ (2 + 4/3\ A1 + S1 – A2)$

$\mathbf{X2 = 6/5 + 4/5\ A1 + 3/5\ S1 – 3/5\ A2}$

Reemplazando en la primera restricción:

$X_1 + 1/3(6/5 + 4/5\ A1 + 3/5\ S1 – 3/5\ A2) + 1/3\ A1 =1$

$\mathbf{X_1} + 3/5\ A1 + 1/5\ S1 - 1/5\ A2 = \mathbf{3/5}$

Reemplazando en la tercera restricción:

$A1 + S1 - A2 + \mathbf{S2} = 1$

Reemplazando en la función objetivo:

Minimizar $Z = 2 - 5/3\ (6/5 + 4/5\ A1 + 3/5\ S1 - 3/5\ A2\ ) + 7/3\ A1 + S1$

Minimizar $Z = 2 - 2 - 4/3\ A1 - S1 + A2 + 7/3\ A1 + S1$

Minimizar $Z = A1 + A2$

Con esta solución, en la que son no básicas las variables A1 y A2, hemos conseguido una solución básica factible inicial para el modelo original.

En esta última iteración se verifica que se ha llegado a la solución óptima del modelo planteado para esta fase, toda vez que el valor óptimo de la función objetivo no puede mejorar. La solución hallada en esta primera fase es solución inicial para la segunda.

Si se hubiera verificado la prueba de optimidad y todavía permanecieran en la base variables artificiales, se podría afirmar que el modelo original carece de una solución factible.

Segunda fase:

En esta segunda fase la función objetivo que se optimiza será la del modelo original y las variables artificiales que han quedado reducidas a cero serán retiradas del modelo:

Minimizar $Z = 4X_1 + X_2$

$X_1 + 1/5\ S1 = \mathbf{3/5}$

$X_2 - 3/5\ S1 = \mathbf{6/5}$

$S1 + \mathbf{S2 = 1}$

X_1, X_2, S1, S2 positivas

En el modelo, ahora se tienen 4 variables y 3 restricciones, por lo que debemos tener una variable no básica y tres básicas. De los resultados de la fase anterior, las variables básicas son X_1, X_2 y S2, y la que quedó como no básica es la variable S1.

Siendo que X_1 y X_2 son básicas, no deberían aparecer en la función objetivo, por lo que habrá que reemplazarlas por las expresiones que las definen a partir de la primera y segunda restricciones:

$X_1 = 3/5 - 1/5\ S1$

$X_2 = 6/5 + 3/5\ S1$

Reemplazando en la función objetivo:

Minimizar $Z = 4(3/5 - 1/5S1) + (6/5 + 3/5\ S1)$

Minimizar $Z = 12/5 - 4/5\ S1 + 6/5 + 3/5\ S1$

Minimizar $Z = 18/5 - 1/5\ S1$

Aplicando la prueba de optimidad se establece que esta solución inicial puede mejorar (reducirse, ya que es de minimización) si S1 entra a la base.

Primera iteración

S1 entra a la base

¿Cuál es la variable básica saliente?

$X_1 + 1/5\ S1 = 3/5$ ... cota que se determinaría para S1: 3

$X_2 - 3/5\ S1 = 6/5$ ... cota que se determinaría para S1: 2

menor cota $\longrightarrow$ $S2 + S1 = 1$ ... cota que se determinaría para S1: 1

La menor cota la establece la tercera restricción, entonces es S2 la variable básica saliente.

La nueva base la forman las variables X_1, X_2 y S1, y será necesario reemplazar el valor del S1 en el resto del modelo. Despejando el valor de S1 de la restricción que determinó la menor cota:

$$S1 = 1 - S2$$

Reemplazando en la primera restricción:

$$\mathbf{X_1} + 1/5\ (1 - S2) = \mathbf{3/5}$$

$$\mathbf{X_1} + 1/5 - 1/5\ S2 = \mathbf{3/5}$$

$$\mathbf{X_1} - 1/5\ S2 = \mathbf{2/5}$$

Reemplazando en la segunda restricción:

$$X_2 - 3/5\ (1 - S2) = \mathbf{6/5}$$

$$X_2 + 3/5\ S2 = \mathbf{9/5}$$

Reemplazando en la función objetivo:

$$\text{Minimizar } Z = 18/5 - 1/5(1 - S2)$$

$$\text{Minimizar } Z = 18/5 - 1/5 + 1/5\ S2$$

$$\text{Minimizar } Z = 17/5 + S2$$

Observando el coeficiente de la única variable no básica se afirma que la solución no puede mejorar y por tanto esta solución es óptima:

$X_1 = 2/5$

$X_2 = 9/5$

$S1 = 1$

Valor óptimo de la función objetivo: 17/5

Con lo cual se concluye la segunda fase y se ha resuelto el modelo.

Capítulo

8

Programación lineal entera

En este capítulo se tratan los siguientes temas:

Tipos de problemas de programación entera

A) Modelos de programación lineal entera puros

B) Modelos de programación lineal entera mixtos

La programación lineal entera es una variante de la programación lineal, en la que no se cumple el principio de divisibilidad en cuanto las variables de decisión solo pueden tomar valores enteros. El capítulo presenta algunos tipos de problemas de programación entera; para cada uno de ellos se desarrolla la formulación en la forma matemática compacta y el modelo en el lenguaje Lingo, el cual se resuelve para elaborar el informe de interpretación administrativa. Al igual que en los ejercicios de otros capítulos, se emplea una representación gráfica del problema para apoyar el análisis del caso.

¿Qué debe lograr el estudiante?

- Identificar diversos tipos de modelos de programación lineal entera.
- Formular en la forma matemática compacta un modelo de programación lineal y con el lenguaje Lingo.
- Resolver el modelo formulado con el lenguaje Lingo e interpretar el reporte de solución.

Entre las propiedades de los modelos de programación lineal se encuentra la propiedad de divisibilidad. Esta propiedad establece que las variables de decisión pueden tomar valores reales; sin embargo, la solución de algunos problemas de programación lineal admiten únicamente soluciones enteras debido a la naturaleza de lo que se decide. Por ejemplo, si se decide la cantidad de prendas de vestir de diverso tipo por producir, no resultaría adecuada una solución que señalara, por ejemplo, producir 158,25 de cierto tipo, ¿cómo se interpretaría "producir 158,**25**" prendas? Tal vez podría interpretarse como un producto en proceso, aun así, en este caso y en muchos otros, puede incluirse una condición para limitar los valores de las variables de decisión solo a valores enteros.

Incluir una condición para que los valores óptimos de las variables de decisión solo sean enteros no es lo mismo que resolver el modelo sin dicha condición y luego redondear la solución "relajada" que se obtendría, ¿por qué? Obsérvese en el siguiente sencillo ejemplo de dos variables, lo que podría suceder:

El modelo:

Maximizar

$$Z = 80X_1 + 45X_2$$

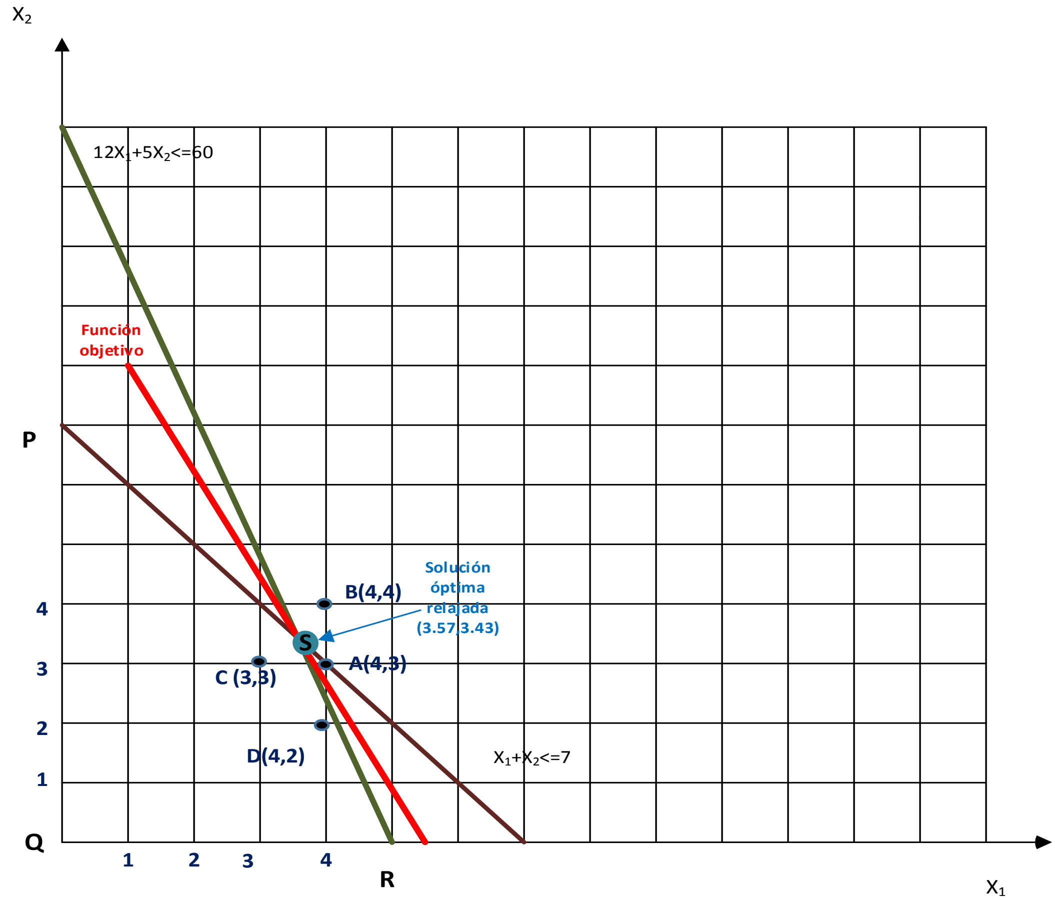
s.a.

$$X_1 + X_2 \leq 7$$

$$12X_1 + 5X_2 \leq 60$$

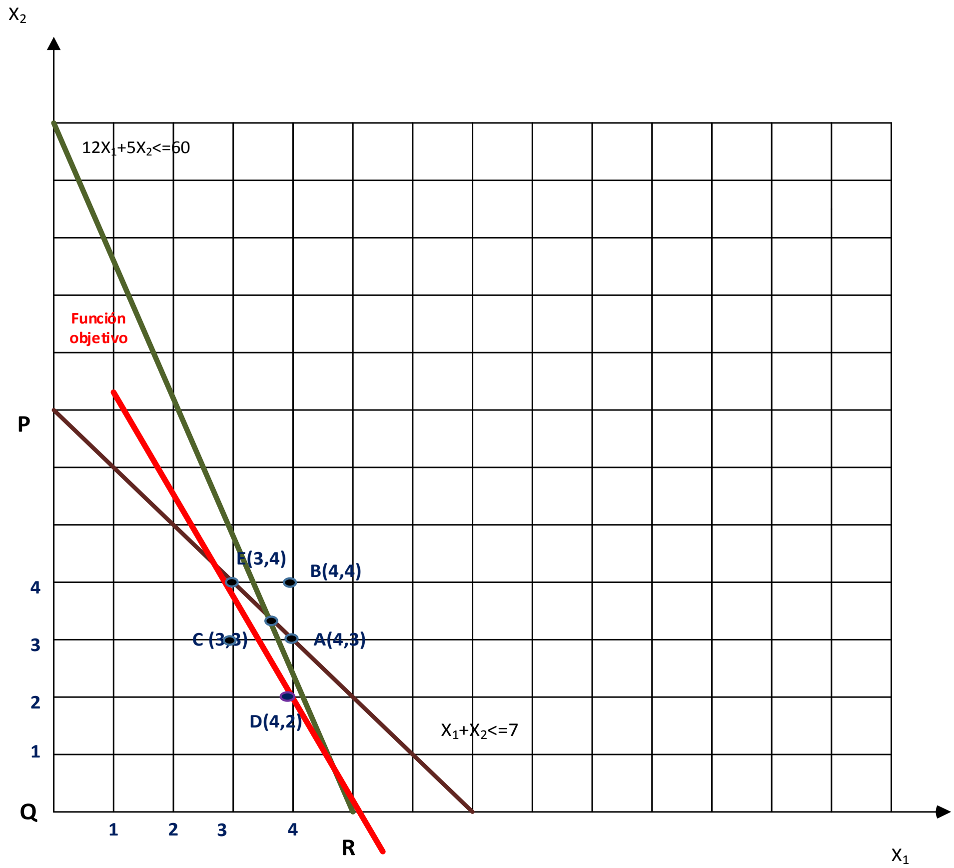
$$X_1 , X_2 \geq 0, \text{ enteras}$$

La solución gráfica del modelo:



Lo primero que se puede observar en el gráfico es que la región factible es ahora un conjunto finito de soluciones conformado solo por las combinaciones enteras de valores de X_1 y X_2 que se ubican en las intersecciones de las líneas de la grilla del grafico dentro del polígono PQRS.

También se observa en el gráfico que la solución relajada se encuentra en el vértice de coordenadas (3.57, 3.43) es una solución no entera. Si se considera la posibilidad de aplicar el redondeo matemático, la solución pasaría al vértice A(4,3) que se ubica fuera de la región factible. Si se aplica un redondeo al entero mayor la solución se encontraría en el punto B(4,4) que se encuentra fuera de la región factible. Si se aplica un redondeo al entero menor la solución se ubicaría en el vértice C(3,3) y esa solución es subóptima, ya que tomando en cuenta solo las soluciones enteras y ubicando la función objetivo en la mejor de tales soluciones, el óptimo se encuentra en el punto D de coordenadas (4,2).



Nota: Es posible que observando el gráfico pueda despertarse la duda sobre la posibilidad de que la solución óptima se encuentre en el punto E(3,4); sin embargo, esta duda se resuelve al comprobar que en el punto D (4,2), el valor de la función objetivo es mayor.

Con este ejemplo se ha comprobado que el redondeo de la solución de un modelo de programación lineal entero relajado (al que se le retiran provisionalmente la restricción de enteros) no permite hallar su solución óptima, pero también ha puesto de manifiesto que la solución óptima se puede encontrar en el interior de la región factible y ya no necesariamente en uno de sus vértices. Si la solución óptima no necesariamente se encuentra en un vértice, el método Símplex ya no resuelve necesariamente este tipo de problemas, ya que, como se recordará de la sección 7 de este texto, se explicó que el método Símplex se basa justamente en la condición de que la solución de un modelo de programación lineal es una solución básica factible (que gráficamente equivale a un vértice de la región factible). Para la solución de problemas de programación lineal entera se emplea el método de **Ramificación y Acotamiento**, que no es objeto de este texto.

8.1 TIPOS DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN ENTERA

Los modelos de programación lineal entera pueden ser:

Modelos de programación lineal entera puros: en los que todas las variables de decisión deban tomar valores enteros en la solución óptima.

Modelos de programación lineal entera mixtos: en los que algunas de las variables de decisión deban tomar valores enteros en la solución óptima.

En caso de que se modelen decisiones dicotómicas, es decir, con solo dos valores posibles, como por ejemplo la decisión de emplear o no una ruta de reparto, arrendar o no un equipo productivo, contratar o no personal, las variables de decisión serán variables binarias, es decir podrían tomar solo valores 0 o 1. Los modelos que se formulan con **variables de decisión binarias** corresponden a **modelos de programación lineal entera binaria.**

A) Modelos de programación lineal entera puros

- **Modelos con variables que pueden tomar cualquier valor solo en el conjunto de los números enteros.**

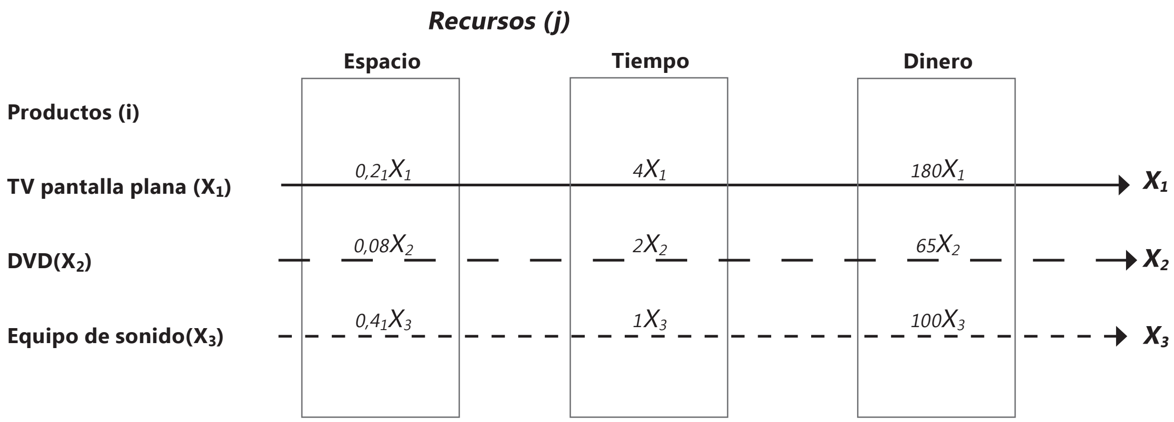
  Ejemplo 1

  Digital Import es una empresa que se dedica principalmente a la venta de los siguientes artículos: televisores de pantalla plana, equipos DVD y equipos de sonido de alta fidelidad, que importa de una reconocida marca de equipos digitales. Los precios de venta, los costos de adquisición de cada uno de los artículos, el espacio de almacenamiento requerido y las horas-hombre (HH) necesarias para su comercialización se presentan en la siguiente tabla:

Artículo	Precio de venta ($/unidad)	Costo adquisición ($/unidad)	Espacio (m^3/unidad)	Tiempo para comercialización (HH/unidad)
TV pantalla plana	250	180	0,20	4
Equipo DVD	100	65	0,08	2
Equipo de sonido	150	100	0,40	1

Digital Import desea planificar sus compras para este periodo en el cual el almacén tiene una capacidad útil de almacenamiento de 180 m^3, una fuerza de ventas disponible en el periodo de 140 trabajadores que laboran 8 horas diarias y $ 60 700 para la adquisición de mercadería. Defina las variables de decisión, formule el modelo de programación lineal. Resuelva el modelo y presente el informe de la solución.

Un esquema para el problema:



Solución

Índices del modelo:

i: productos

j: recursos

Variables de decisión:

X_i: cantidad de unidades de producto por comprar para vender

En este caso, los productos son: televisores, DVD y equipos de sonido y las cantidades por comprar deben ser enteras, puesto que no es posible comercializar 0,8 televisores o 0,25 DVD, por lo que no se admiten valores no enteros para las variables de decisión.

Función objetivo: Utilidad total.

Maximizar

$$Z = \sum_{i=1}^{3} (precio_{\,i} - costo_i) * X_i$$

Restricciones

Por recursos disponibles

$$\sum_{i=1}^{3} requerimiento_{ij} * X_i \leq disponibilidad_j, \qquad \forall j = 1{,}2$$

Por variables enteras

$$Xi \geq 0, y \text{ enteras}, \qquad \forall i = 1,\ldots,3$$

Modelo Lingo:

```
Sets:
modelo/1,...,3/ : precio,x;
Recurso/1,...,3/:disponibilidad;
MR(modelo,recurso):requerimiento;
End sets

Data:
precio=250 100 150;
requerimiento= 0.2  4 180 0.08 2 65 0.4 1 100;
disponibilidad=180 1120 60700;
Enddata

Max=@sum(modelo(i:(precio(i)-requerimiento(i,3))*x(i));
@for(recurso(j):        @sum(modelo(i):x(i)*requerimiento(i,j))<=disponibilidad(j));
@for(modelo(i):@gin(x(i)));
```

Es la función que se emplea en el Lingo para indicar las variables enteras.

Un extracto de lo más importante del reporte de solución

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              31300.00

  Model Class:                                      PILP

                                  Variable           Value        Reduced Cost

                                   X( 1)        0.000000           -70.00000
                                   X( 2)        380.0000           -35.00000
                                   X( 3)        360.0000           -50.00000

                                     Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                       1        31300.00           1.000000
                                       2        5.600000           0.000000
                                       3        0.000000           0.000000
                                       4        0.000000           0.000000
```

Informe administrativo de la solución

Digital Import deberá comprar para luego vender 380 unidades de DVD y 360 unidades de equipos de música. Con ello obtendrá una utilidad de $ 31 300.

- **Modelos con variables que pueden tomar solo los valores 0 o 1: Programación lineal entera binaria**

  Ejemplo 1

  Una empresa de transportes debe decidir qué bulto debe transportar en su primer viaje. El peso de cada bulto y la utilidad que generaría, en caso de que sea transportado, se muestran a continuación:

Tipo de bulto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Peso (t)	2	3	5	2	6	5	3	1	1	1,5
Utilidad (miles de $)	7	20	25	10	40	30	15	9	10	18

Para el transporte, se debe tener en cuenta que:

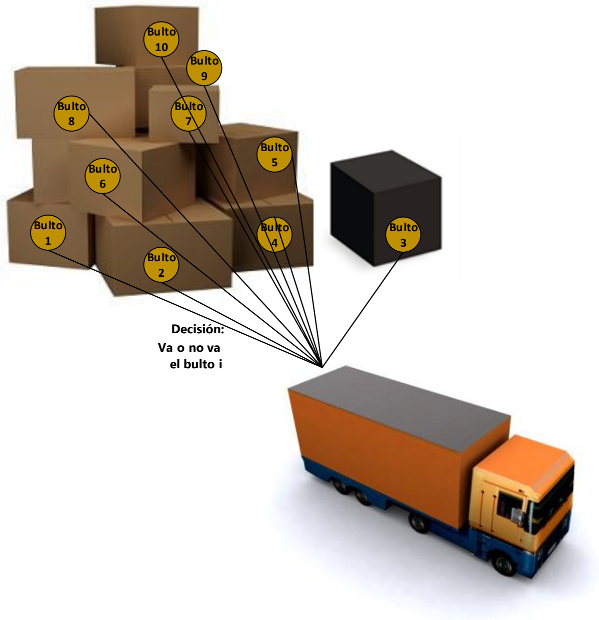
– La empresa posee un camión cuya capacidad de carga es 15 toneladas.

– Si se transporta el bulto 2, entonces se transporta el bulto 3.

- Por razones de volumen, si se transporta el bulto 7 entonces no se transporta el bulto 8.

Definir las variables de decisión, formular el modelo de programación lineal que le permita a la empresa maximizar su utilidad total, resolver el modelo y presentar el informe de la solución.

Un esquema para el problema:



El texto del caso señala claramente que **la empresa de transportes debe decidir qué bulto debe transportar**. Como cada bulto es diferente de otro por sus características de peso y utilidad, es necesario decidir **si se lleva o no cada uno de los bultos independientemente.** Se trata de una decisión dicotómica para cada bulto en cuanto tiene solo dos posibles opciones: llevarlo o no. Por conveniencia, se puede asociar la opción de llevar el bulto con el valor 1 para la variable de decisión y la opción de no llevarlo con el valor cero de la variable de decisión. Se trata de una variable binaria, es decir, que puede tomar únicamente el valor cero o el valor uno.

Solución

Índices del modelo:

i: Bulto

Variables de decisión:

$$X_i: \begin{cases} 0, \text{ no se lleva el bulto i} \\ 1, \text{ sí se lleva el bulto i} \end{cases}$$

$(i = 1,\ldots,10)$

Función objetivo: Utilidad total.

Maximizar

$$Z = \sum_{i=1}^{10} utilidad_{\ i} * X_i$$

Aun cuando en la función objetivo se suma el aporte de la utilidad de todos los bultos, al multiplicar este valor por su respectiva variable de decisión, en la solución óptima, aquellos bultos que no se lleven tendrán una variable de decisión con valor cero y su aporte a las utilidades se anulará, en cambio, se sumará el aporte de aquellos bultos que resulte óptimo llevar, para los que sus respectivas variables de decisión tomarán el valor 1.

Restricciones

Por capacidad del camión

$$\sum_{i=}^{10} peso_i * X_i \ \leq 15$$

Con la carga que se coloque dentro del camión ocurre lo mismo que con la utilidad total, solo se sumará la carga de los bultos que se decida llevar y no la de los bultos que no se lleven, cuya variable de decisión tendrá valor cero y su respectivo peso no se añadirá a la carga del camión al multiplicarse por cero.

Si se transporta el bulto 2, entonces **sí** se transporta el bulto 3.

En la tabla siguiente se analizan las condiciones que podrían darse entre los valores de las variables que representan las decisiones de llevar los bultos 2 y 3, respectivamente.

Valores posibles para X_2	Valores posibles para X_3	En la restricción la combinación debe ser:
1	1	Factible **y necesaria**
1	0	**No factible**
0	0	Factible
0	1	Factible

La expresión matemática siguiente permite que todas las combinaciones posibles sean factibles o no factibles, según se ha indicado en la tabla anterior:

$$X_2 \leq X_3$$

Por razones de volumen, si se transporta el bulto 7 entonces **no** se transporta el bulto 8.

Teniendo en cuenta el razonamiento empleado para formular la restricción anterior:

$$X_7 \leq 1 - X_8$$

Para indicar la condición de variables binarias:

$$X_i \text{ es binaria}, \quad \forall_i = 1,\ldots,10$$

Modelo Lingo:

```
Sets:
Bulto/1..10/: utilidad, peso, X;
endsets

Data:
utilidad= 7 20 25 10 40 30 15 9 10 18;
peso= 2 3 5 2 6 5 3 1 1 1.5;
enddata

Max= @sum(bulto(i): utilidad(i)*x(i));
@sum(bulto(i): peso(i)*x(i))<=15;
x(2)<=x(3);
x(7)<= 1- x(8);
@for(bulto(i):@bin(x(i)));
```

@bin es la función que se emplea en el Lingo para indicar las variables binarias.

Dado que toda la familia de variables es binaria.

Un extracto de lo más importante del reporte de solución

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              107.0000

  Model Class:                                      PILP

                                  Variable           Value        Reduced Cost

                                     X(1)        0.000000           -7.000000
                                     X(2)        0.000000           -20.00000
                                     X(3)        0.000000           -25.00000
                                     X(4)        0.000000           -10.00000
                                     X(5)        1.000000           -40.00000
                                     X(6)        1.000000           -30.00000
                                     X(7)        0.000000           -15.00000
                                     X(8)        1.000000           -9.000000
                                     X(9)        1.000000           -10.00000
                                     X(10)        1.000000           -18.00000

                                       Row    Slack or Surplus       Dual Price
                                         1         107.0000           1.000000
                                         2        0.5000000           0.000000
                                         3         0.000000           0.000000
                                         4         0.000000           0.000000
```

Informe administrativo de la solución

La empresa de transporte debe llevar los bultos 5, 6, 8, 9 y 10 para obtener una utilidad máxima de $ 107 000.

Algunos tipos de problemas de programación lineal entera binaria:

El problema de asignación

Ejemplo 1

Una empresa se dedica a empaquetar productos para venderlos. Los productos empaquetados son voluminosos y por ello **solo puede empaquetarse un producto en cada máquina**. La empresa cuenta con cuatro máquinas empaquetadoras que se diferencian en algunos pequeños detalles, no relevantes para el problema. Para el día siguiente **hay seis productos que pueden ser empaquetados**. Por lo dicho anteriormente, solamente cuatro podrán ser empaquetados en ese día. La decisión de cuáles empaquetar se toma sobre la base de aquellos que otorguen mayor beneficio respetando algunas normas establecidas. Los datos con los que se cuenta son los siguientes:

Ingreso por producto empaquetado (en $)

Producto	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Ingreso ($)	300	250	400	350	320	500

Costo por empaquetar un producto en determinada máquina (En $)

	Producto					
Máquina	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
A	80	90	100	110	120	130
B	200	190	180	170	160	150
C	120	140	160	150	140	130
D	90	120	150	130	140	110

Las normas establecidas son:

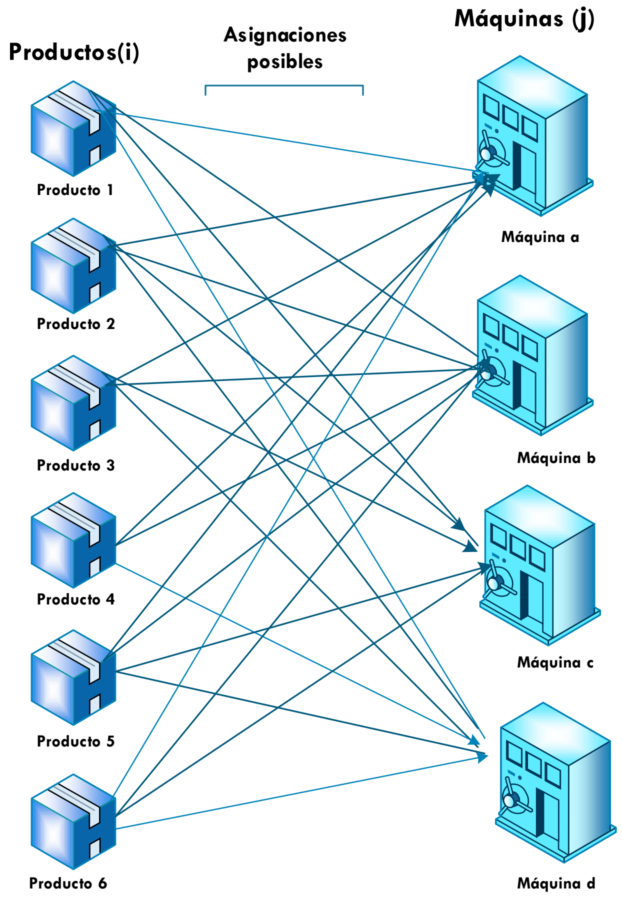
- Todas las máquinas deben trabajar.
- Si se empaqueta el producto 3, no debe empaquetarse el producto 1.
- Si se empaqueta el producto 4, debe empaquetarse el producto 2.
- Entre los productos 1, 3 y 5, al menos uno de ellos debe ser empaquetado.
- El producto 5 no puede ser empaquetado en la máquina B.

A partir de la información ofrecida, definir las variables de decisión, formular el modelo de programación lineal correspondiente en forma matemática compacta que permita determinar la máxima utilidad, resolver el modelo y presentar el informe de la solución.

¿Por qué es un problema de asignación? Debido a que se debe decidir qué productos deben ser asignados (destinados) a ser empacados por alguna de las máquinas.

Al decidir si un producto se asigna a una máquina, hay solo dos posibilidades: **sí** o **no**, por lo tanto la decisión es dicotómica y la variable que la representa es, por lo tanto, **binaria** y esa decisión debe tomarse para la posibilidad de asignar cada producto a cada máquina.

Un esquema para el problema:



Solución

Índices del modelo:

i: productos

j: máquinas

Variables de decisión:

$$X_{ij}: \begin{cases} 0, \text{ no se asigna el producto i a la máquina j} \\ 1, \text{ sí se asigna el producto i a la máquina j} \end{cases}$$

$(i = 1,\ldots,6, \quad \mathrm{j} = 1,\ldots,4)$

Función objetivo: Utilidad total.

Maximizar

$$Z = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{4} (Ingreso_i - costo_{ij}) * X_{ij}$$

Restricciones:

Solo puede empaquetarse un producto en cada máquina

$$\sum_{i=1}^{6} X_{ij} = 1, \ \forall\, i = 1,\dots,4$$

(La restricción es una ecuación porque el texto del caso dice también que todas las máquinas **deben** trabajar).

Los seis productos **pueden** ser empaquetados en una sola máquina:

$$\sum_{j=1}^{4} X_{ij} \leq 1, \ \forall\, i = 1,\dots,6$$

Si se empaqueta el producto 3, no debe empaquetarse el producto 1.

En la tabla siguiente se analizan las condiciones que podrían darse entre valores de las variables que representan las decisiones de empaquetar los productos 3 y 1, respectivamente.

Valores posibles para la **decisión de empaquetar el producto 3**	Valores posibles para la **decisión de empaquetar el producto 1**	En la restricción la combinación debe ser:
1	1	**No factible**
1	0	Factible **y necesaria**
0	0	Factible
0	1	Factible

Dado que el producto 3 se podría empaquetar en cualquiera de las cuatro máquinas (pero solo en una de ellas), la **decisión de empaquetar el producto 3** está representada por:

$$\sum_{j=1}^{4} X_{3j}$$

Dado que el producto 1 se podría empaquetar en cualquiera de las cuatro máquinas (pero solo en una de ellas), **la decisión de empaquetar el producto 1** está representada por:

$$\sum_{j=1}^{4} X_{1j}$$

La expresión matemática siguiente permite que todas las combinaciones posibles sean factibles o no factibles, según se ha indicado en la tabla anterior:

$$\sum_{\mathrm{j}=1}^{4} \mathrm{X}_{3\mathrm{j}} \leq 1 - \sum_{j=1}^{4} X_{1j}$$

Si se empaqueta el producto 4, debe empaquetarse el producto 2.

En la tabla siguiente se analizan las condiciones que podrían darse entre los valores de las variables que representan las decisiones de empaquetar los productos 3 y 1, respectivamente.

Valores posibles para la **decisión de empaquetar el producto 4**	Valores posibles para la **decisión de empaquetar el producto 2**	En la restricción la combinación debe ser:
1	1	Factible **y necesaria**
1	0	**No factible**
0	0	Factible
0	1	Factible

Dado que el producto 4 se podría empaquetar en cualquiera de las cuatro máquinas (pero solo en una de ellas), **la decisión de empaquetar el producto 3** está representada por:

$$\sum_{j=1}^{4} X_{4j}$$

Dado que el producto 2 se podría empaquetar en cualquiera de las cuatro máquinas (pero solo en una de ellas), la **decisión de empaquetar el producto 1** está representada por:

$$\sum_{j=1}^{4} X_{2j}$$

La expresión matemática siguiente permite que todas las combinaciones posibles sean factibles o no factibles, según se ha indicado en la tabla anterior:

$$\sum_{j=1}^{4} X_{4j} \leq \sum_{j=1}^{4} X_{2j}$$

Entre los productos 1, 3 y 5, al menos uno de ellos debe ser empaquetado.

Dado que cada uno de los productos 1, 3 y 5 se podrían empaquetar en cualquiera de las cuatro máquinas (pero solo en una de ellas), la decisión de empaquetar cada uno de estos productos está representada, respectivamente, por:

$$\sum_{j=1}^{4} X_{1j}\ , \qquad \sum_{j=1}^{4} X_{3j}\, , \qquad \sum_{j=1}^{4} X_{5j}$$

Entonces la restricción sería:

$$\sum_{j=1}^{4} X_{1j} + \sum_{j=1}^{4} X_{3j} + \sum_{j=1}^{4} X_{5j} \geq 1$$

El producto 5 no puede ser empaquetado en la máquina B.

$$X_{52} = 0$$

Para indicar la condición de variables binarias:

$$X_{ij} \text{ es binaria}, \quad \forall i = 1,\ldots,6, \quad \forall j = 1,\ldots,4$$

Modelo Lingo:

```
Sets:
Producto/1..6/: ingreso;
Maquina/1..4/;
PM(producto,maquina): costo, X;
endsets

Data:
ingreso= 300 250 400 350 320 500;
costo= 80 90 100 110 120 130
       200 190 180 170 160 150
       120 140 160 150 140 130
       90 120 150 130 140 110;
enddata

Max= @sum(PM(i,j): (ingreso(i)- costo(i,j))*x(i,j));

@for(producto(i):@sum(maquina(j):x(i,j))<=1);
@for(maquina(j):@sum(producto(i):x(i,j))=1);
@sum(maquina(j):x(3,j))<=1-@sum(maquina(j):x(1,j));
@sum(maquina(j):x(4,j))<=@sum(maquina(j):x(2,j));
@sum(maquina(j):x(3,j))+@sum(maquina(j):x(1,j))+@sum(maquina(j):x(5,j))>=1;
@for(PM(i,j):@bin(x(i,j)));
```

Un extracto de lo más importante del reporte de solución

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                             980.0000

  Model Class:                                     PILP
```

Variable	Value	Reduced Cost
X(1,1)	0.000000	-220.0000
X(1,2)	0.000000	-210.0000
X(1,3)	0.000000	-200.0000
X(1,4)	0.000000	-190.0000
X(2,1)	**1.000000**	**-130.0000**
X(2,2)	0.000000	-120.0000
X(2,3)	0.000000	-50.00000
X(2,4)	0.000000	-60.00000
X(3,1)	0.000000	-220.0000
X(3,2)	**1.000000**	**-230.0000**
X(3,3)	0.000000	-240.0000
X(3,4)	0.000000	-250.0000
X(4,1)	0.000000	-230.0000
X(4,2)	0.000000	-210.0000
X(4,3)	0.000000	-190.0000
X(4,4)	0.000000	-200.0000
X(5,1)	0.000000	-180.0000
X(5,2)	0.000000	-190.0000
X(5,3)	**1.000000**	**-230.0000**
X(5,4)	0.000000	-200.0000
X(6,1)	0.000000	-350.0000
X(6,2)	0.000000	-370.0000
X(6,3)	0.000000	-360.0000
X(6,4)	**1.000000**	**-390.0000**

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	980.0000	1.000000
2	1.000000	0.000000
3	0.000000	0.000000
4	0.000000	0.000000
5	1.000000	0.000000
6	0.000000	0.000000
7	0.000000	0.000000
8	0.000000	0.000000
9	0.000000	0.000000
10	0.000000	0.000000
11	0.000000	0.000000
12	0.000000	0.000000
13	1.000000	0.000000
14	1.000000	0.000000

Informe administrativo de la solución

Se empaquetará el producto 2 en la máquina 1; el producto 3 en la máquina 2; el producto 5 en la máquina 3; y el producto 6 en la máquina 4, con lo cual la utilidad bruta total óptima será de $ 980.

Ejemplo 2

El jefe de producción de una empresa textil ha realizado una evaluación a 6 postulantes a un puesto de trabajo como operador especializado de sus máquinas industriales: remalladora, costura recta, hiladora y devanadora. A cada postulante se les capacitó y evaluó en el uso de cada una de estas máquinas, luego de la evaluación se les asignó un puntaje de acuerdo a sus habilidades en el uso de cada una de las máquinas mencionadas. Las puntuaciones obtenidas por cada uno de los postulantes se presentan a continuación:

Postulante	Remalladora	Costura recta	Hiladora	Devanadora
P1	85	91	87	90
P2	92	91	86	88
P3	89	87	91	89
P4	84	90	89	91
P5	87	83	86	91
P6	92	89	90	87

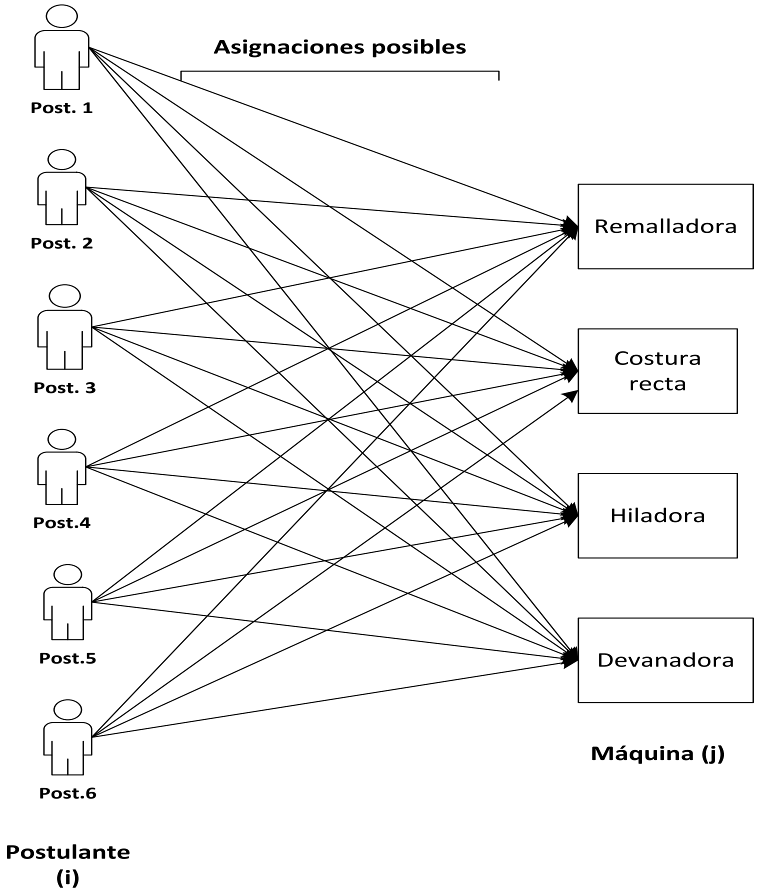
Definir las variables de decisión, formular el modelo de programación lineal entera binaria que permita determinar la selección de postulantes para que sean operadores de las máquinas industriales; resolver el modelo y presentar el informe de la solución.

¿Por qué es un problema de asignación? Del párrafo final del problema se entiende que lo que se debe determinar es: "El postulante que será **asignado** para operar cada máquina. A cada postulante se le puede **asignar** o no a la máquina". Eso es lo que debe decidirse.

Esa decisión tiene solo dos valores posibles: que se le asigne o no, por tanto es una decisión dicotómica. A la posibilidad de **SÍ** asignarlo se le representa con el valor **1** y a la posibilidad de **NO** hacerlo con el valor **0**. Las variables de decisión son binarias.

Un esquema para el problema:

Este esquema muestra las 24 variables de decisión que tiene el modelo.



Solución

Índices del modelo:

i: postulante

j: máquina

Variables de decisión:

$$X_{ij}: \begin{cases} 0, \text{no se asigna el postulante i a la máquina j.} \\ 1, \text{sí se asigna el postulante i a la máquina j.} \end{cases}$$

$$(i = 1,\ldots,6, \quad \text{j} = 1,\ldots,4)$$

Debido a que cualquier postulante puede operar cualquier máquina habrá que tener en cuenta las calificaciones recibidas por cada uno de modo que se seleccione a los mejores, Por ello, la función objetivo es el puntaje total que se quiere maximizar con la selección óptima de postulantes.

Función objetivo: puntaje total

Maximizar

$$Z = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{4} puntaje_{ij} * X_{ij}$$

Restricciones:

Al leer el texto del caso parece no haber restricciones, al menos no explícitas, pero sí las hay y están implícitas en la descripción de la situación:

Toda máquina **debe tener** un operador, para eso el taller ha capacitado y evaluado a los postulantes:

$$\sum_{i=1}^{6} X_{ij} = 1, \ \ \forall\, i = 1,\ldots,4$$

Un postulante solo podría operar una máquina; no se considera adecuado que un mismo hombre pueda operar, por ejemplo, la máquina hiladora y la de costura recta, no sería un operador especializado. Por otro lado, dado que solo hay cuatro máquinas **no será posible dar empleo a los seis postulantes**, por ello la siguiente restricción:

Todo operario debe ser asignado **como máximo** a una máquina.

$$\sum_{j=1}^{4} X_{ij} \leq 1, \ \ \forall\, i = 1,\ldots,6$$

Restricciones para indicar la condición de variables binarias:

$$X_{ij} \ \ es \ \ binaria, \qquad \forall i = 1,\ldots,6, \qquad \forall j = 1,\ldots,4$$

Modelo Lingo:

```
Sets:
Postulante/1..6/;
Maquina/1..4/;
PM(postulante,maquina): puntaje, X;
Endsets


Data:
puntaje= 85 91 87 90
         92 91 86 88
         89 87 91 89
         84 90 89 91
         87 83 86 91
         92 89 90 87;
enddata

Max= @sum(PM(i,j): puntaje(i,j)*x(i,j));

@for(postulante(i):@sum(maquina(j):x(i,j))<=1);
@for(maquina(j):@sum(postulante(i):x(i,j))=1);
@for(PM(i,j):@bin(x(i,j)));
```

Un extracto de lo más importante del reporte de solución

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              365.0000

  Model Class:                                      PILP

                                Variable           Value        Reduced Cost

                                X(1,1)        0.000000           -85.00000
                                X(1,2)        1.000000           -91.00000
                                X(1,3)        0.000000           -87.00000
                                X(1,4)        0.000000           -90.00000
                                X(2,1)        1.000000           -92.00000
                                X(2,2)        0.000000           -91.00000
                                X(2,3)        0.000000           -86.00000
                                X(2,4)        0.000000           -88.00000
                                X(3,1)        0.000000           -89.00000
                                X(3,2)        0.000000           -87.00000
                                X(3,3)        1.000000           -91.00000
                                X(3,4)        0.000000           -89.00000
                                X(4,1)        0.000000           -84.00000
                                X(4,2)        0.000000           -90.00000
                                X(4,3)        0.000000           -89.00000
                                X(4,4)        1.000000           -91.00000
                                X(5,1)        0.000000           -87.00000
                                X(5,2)        0.000000           -83.00000
                                X(5,3)        0.000000           -86.00000
                                X(5,4)        0.000000           -91.00000
                                X(6,1)        0.000000           -92.00000
                                X(6,2)        0.000000           -89.00000
                                X(6,3)        0.000000           -90.00000
                                X(6,4)        0.000000           -87.00000

                                    Row   Slack or Surplus         Dual Price
                                     1        365.0000             1.000000
                                     2        0.000000             0.000000
                                     3        0.000000             0.000000
                                     4        0.000000             0.000000
                                     5        0.000000             0.000000
                                     6        1.000000             0.000000
                                     7        1.000000             0.000000
                                     8        0.000000             0.000000
                                     9        0.000000             0.000000
                                    10        0.000000             0.000000
                                    11        0.000000             0.000000
```

Informe administrativo de la solución

Los postulantes por contratar son: el postulante 1, como operador de la máquina de costura recta (máquina 2); el postulante 2, como operador de la remalladora (máquina 1); el postulante 3, como operador de la hiladora (máquina 3); y el postulante 4, como operador de la máquina devanadora (máquina 4). No se contrata a los postulantes 5 y 6. El puntaje total máximo alcanzado es de 365 puntos.

Ejemplo 3

Parfums S. A desea planificar la distribución de su perfume principal para la próxima Navidad, desde 5 centros de distribución (C1, C2, C3, C4, C5) hacia 3 tiendas (T1, T2, T3). La disponibilidad de cada centro de distribución y la cantidad mínima de perfumes que debe recibir cada tienda es la siguiente:

Centro de distribución	C1	C2	C3	C4	C5
Disponibilidad (unidades)	8000	10 000	6000	9000	11 000

Tienda	T1	T2	T3
Mínimo a recibir (unidades)	7000	8000	6000

Cualquier centro de distribución puede despachar perfumes hacia cualquier tienda. Cada centro de distribución cuenta con 3 camiones para efectuar los despachos. La capacidad de carga de cada camión del centro de distribución C1, C2, C3, C4 y C5 es de 2500, 3500, 2000, 3000 y 4000 unidades, respectivamente. Se sabe, además, que:

- Desde cada centro de distribución hacia cada tienda puede salir como máximo un solo camión.
- En caso de que de salga un camión desde cualquier centro de distribución hacia cualquier tienda, sale con capacidad de carga completa.

Se desea trabajar como máximo con 3 centros de distribución.

Los costos de transporte por camión desde cada centro de distribución hacia cada tienda se muestran a continuación:

Costos de transporte (en $/camión)

De \ A	**T1**	**T2**	**T3**
C1	200	300	400
C2	300	400	200
C3	400	500	300
C4	500	300	400
C5	400	400	300

Definir las variables de decisión y formular el modelo de programación lineal que permita a la empresa optimizar sus operaciones. Resolver el modelo y presentar el informe de la solución.

¿Por qué es un problema de asignación?

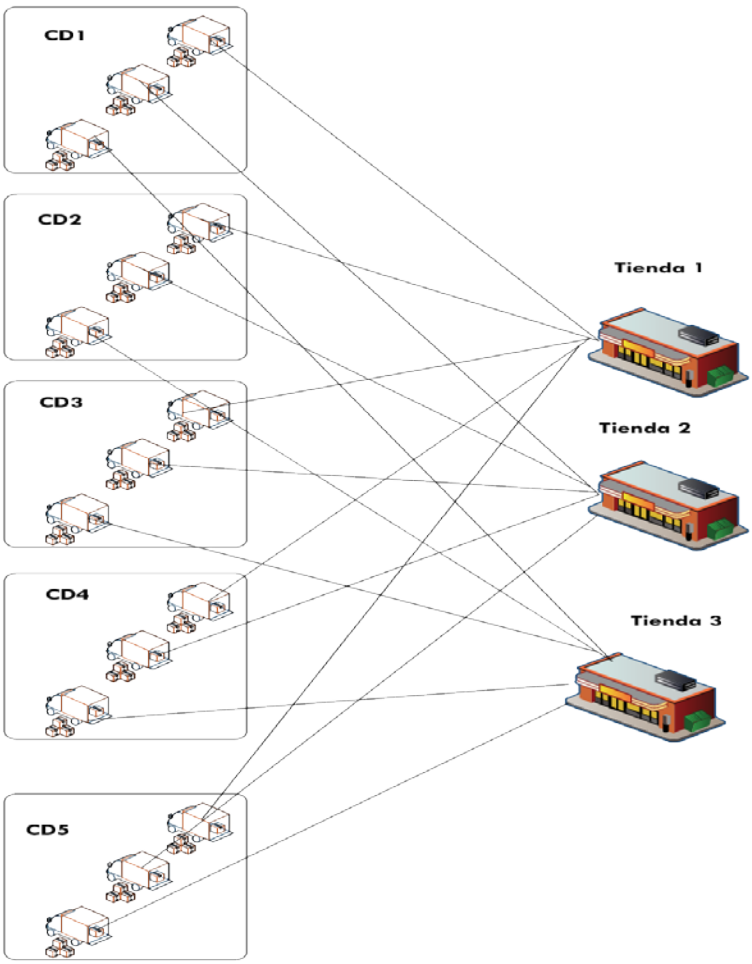
El texto del ejercicio señala que en cada centro de distribución hay tres camiones para transportar la mercadería hacia las tiendas, entonces el problema consiste en asignar los camiones desde los centros de distribución hacia las tiendas.

El caso señala que cada camión de todo centro de distribución puede ir solo hacia una tienda, entonces, por ejemplo, en el centro de distribución 1, donde hay tres camiones, uno de los tres camiones podría ir a la tienda 1 o no salir, el otro a la tienda 2 o no salir y el otro a la tienda 3 o no salir. Es imposible plantearse la posibilidad de que cualquiera de esos tres camiones pudieran ir hacia cualquier tienda porque podría asignarse más de un camión a la misma tienda, lo cual es una solución no factible para el caso. Dado que los tres camiones de cada centro son idénticos, da lo mismo qué camión sea, porque el hecho es que cada uno puede ir o no a una sola tienda. Esta condición genera que la decisión para cada uno de los tres camiones de cada centro sea dicotómica.

No se trata de determinar la cantidad de unidades por transportar, porque el caso señala que si sale el camión lo hace lleno; por lo tanto, no cabe decidir lo que el camión transportará.

Un esquema para el problema:

Posibles asignaciones: un camión de cada centro de distribución puede ir o no a una sola de las tiendas



Solución

Índices del modelo:

i: centro de distribución (1,...,5)

j: tienda (1,...,3)

Variables de decisión:

X_{ij}: $\begin{cases} \text{0, no se asigna un camión del centro de distribución i a la tienda j.} \\ \text{1, sí se asigna un camión del centro de distribución i a la tienda j.} \end{cases}$

Función objetivo: costos totales de transporte

Minimizar

$$Z = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3} costo\_transporte_{ij} * X_{ij}$$

Restricciones

La disponibilidad de productos en cada centro de distribución:

$$\sum_{j=1}^{3} capacidad_i * X_{ij} \leq disponibilidad_{\ i}, \quad \forall i = 1,...,5$$

El requerimiento mínimo en cada tienda:

$$\sum_{i=1}^{5} capacidad_i * X_{ij} \geq requerimiento_{\ j}, \quad \forall j = 1,...,3$$

Se desea trabajar como máximo con tres centros de distribución:

Para formular esta restricción es necesario representar de alguna forma si cada centro de distribución trabaja o no, con el fin de condicionar a que sean máximo tres de ellos los que trabajen. Teniendo en cuenta que en cada centro de distribución, si al menos uno de sus camiones se asigna a una tienda respectiva, quiere decir que el centro de distribución trabaja. Así, por ejemplo, para el centro de distribución 1, si:

$$\sum_{j=1}^{3} X_{1,j} \geq 0 \, ,$$

Quiere decir que el centro de distribución sí trabaja.

Por otro lado, si:

$$\sum_{j=1}^{3} X_{1,j} = 0 \, ,$$

Quiere decir que el centro de distribución no trabaja

Entonces podría definirse una nueva variable binaria para representar si el centro de distribución i funciona o no, la que depende de las respectivas variables X_{ij}:

Entonces:

$$Y_i: \begin{cases} 0, \text{ no trabaja el centro de distribución i.} \\ 1, \text{ sí trabaja el centro de distribución i.} \end{cases}$$

Serán necesarias las restricciones que relacionen estas dos familias de variables según corresponda:

$$\sum_{j=1}^{3} X_{i,j} \leq M * Y_i, \ \ \forall i = 1,\ldots,3$$

En esta expresión M representa un número cualquiera, más grande que el valor máximo que pudiera tomar el valor de la sumatoria del lado derecho de la restricción. Así, la familia de restricciones quedaría expresada de la siguiente forma:

$$\sum_{j=1}^{3} X_{i,j} \leq \mathbf{3} * Y_i, \ \ \forall i = 1,\ldots,3$$

Ahora, para formular la condición de que trabajen como máximo tres de los centros de distribución, se tiene la siguiente expresión:

$$\sum_{i=1}^{5} Y_i \leq 3$$

Restricciones para indicar la condición de **variables binarias**:

$$X_{ij} \ \ es \ \ binaria, \ \ \forall i = 1,\ldots,5, \qquad \forall j = 1,\ldots,4$$

$$Y_i \ es \ binaria, \qquad \forall i = 1,\ldots,5$$

Modelo Lingo

```
Sets:
Centros/1..5/: Y, capacidad, disponibilidad;
Tiendas/1..3/:requerimiento;
CT(centros, tiendas):X,costo_transporte;
endsets

Data:
capacidad=2500 3500 2000 3000 4000;
disponibilidad= 8000 10000 6000 9000 11000;
requerimiento=7000 8000 6000;
costo_transporte=200 300 400
              300 400 200
              400 500 300
              500 300 400
              400 400 300;
enddata

Min= @sum(CT(i,j):costo_transporte(i,j)*x(i,j));

@for(centros(i): @sum(tiendas(j):capacidad(i)*x(i,j))<=disponibilidad(i));
@for(tiendas(j):@sum(centros(i):capacidad(i)*x(i,j))>=requerimiento(j));
@for(centros(i): @sum(tiendas(j):x(i,j))<=3*Y(i));
@sum(centros(i):y(i))<=3;
@for(CT(I,j): @bin(x(i,j)));
@for(centros(i):@bin(y(i)));
```

Un extracto de lo más importante del reporte de solución

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              2600.000

  Model Class:                                      PILP
```

Variable	Value	Reduced Cost
Y(1)	0.000000	0.000000
Y(2)	1.000000	0.000000
Y(3)	0.000000	0.000000
Y(4)	1.000000	0.000000
Y(5)	1.000000	0.000000
X(1,1)	0.000000	200.0000
X(1,2)	0.000000	300.0000
X(1,3)	0.000000	400.0000
X(2,1)	0.000000	300.0000
X(2,2)	**1.000000**	**400.0000**
X(2,3)	**1.000000**	**200.0000**
X(3,1)	0.000000	400.0000
X(3,2)	0.000000	500.0000
X(3,3)	0.000000	300.0000
X(4, 1)	**1.000000**	**500.0000**
X(4, 2)	**1.000000**	**300.0000**
X(4, 3)	**1.000000**	**400.0000**
X(5, 1)	**1.000000**	**400.0000**
X(5, 2)	**1.000000**	**400.0000**
X(5,3)	0.000000	300.0000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	2600.000	-1.000000
2	8000.000	0.000000
3	3000.000	0.000000
4	6000.000	0.000000
5	0.000000	0.000000
6	3000.000	0.000000
7	0.000000	0.000000
8	2500.000	0.000000
9	500.0000	0.000000
10	0.000000	0.000000
11	1.000000	0.000000
12	0.000000	0.000000
13	0.000000	0.000000
14	1.000000	0.000000
15	0.000000	0.000000

Informe administrativo de la solución

Para cubrir los requerimientos de las diferentes tiendas, un camión del centro de distribución 2 debe ir a la tienda 1 y el otro a la tienda 2; luego, del centro de distribución 4 debe ir un camión a cada tienda; y del centro de distribución 5 uno a la tienda 1 y otro a la tienda 2. De esta forma, se tiene que solo trabajan los centros 2, 4 y 5 (nótese que las variables Y(2), Y(4) e Y(5), respectivamente, tienen el valor 1). El mínimo costo total es de $ 2600.

El problema de cobertura de conjuntos

Ejemplo 4

Un municipio está evaluando dónde instalar varias comisarías de policía para obtener una mejor aplicación de la ley en áreas de alta criminalidad. Las ubicaciones posibles son A, B, C, D, E, F y G, y las áreas de alta criminalidad son 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7. La tabla siguiente muestra las áreas que podrían ser cubiertas al colocar una comisaría en las posibles ubicaciones:

Ubicaciones posibles para las subestaciones	Áreas cubiertas
A	1, 5, 7
B	1, 2, 5, 7
C	1, 3, 5
D	2, 4, 5
E	3, 4, 6
F	4, 5, 6
G	1, 5, 6, 7

Formular un modelo de programación lineal que permita encontrar la cantidad mínima de subestaciones para proporcionar cobertura a todas las áreas; resolver el modelo y presentar la solución.

¿Por qué es un problema de cobertura de conjuntos?

Debido a que se debe decidir cómo cubrir los elementos de un conjunto con elementos de otro conjunto.

En el ejemplo, se trata de cubrir todas las zonas de alta criminalidad con las comisarías por instalar en las diferentes ubicaciones (se desea cubrir cada elemento del conjunto de zonas de alta peligrosidad, con los elementos del conjunto de las posibles comisarías en las ubicaciones señaladas).

Un esquema para el problema

En este caso, un gráfico no es lo más adecuado. Sin embargo, hay datos importantes que caracterizan este tipo de problema y se empleará una matriz para organizarlos. Esta matriz indica las zonas de alta peligrosidad que pueden ser cubiertas con las comisarías que se podrían instalar en las diferentes ubicaciones (0 no cubre, 1 sí cubre):

	Zonas de alta peligrosidad						
Ubicaciones	**Zona 1**	**Zona 2**	**Zona 3**	**Zona 4**	**Zona 5**	**Zona 6**	**Zona 7**
A	1	0	0	0	1	0	1
B	1	1	0	0	1	0	1
C	1	0	1	0	1	0	0
D	0	1	0	1	1	0	0
E	0	0	1	1	0	1	0
F	0	0	0	1	1	1	0
G	1	0	0	0	1	1	1

Los datos de esta matriz expresan el cubrimiento de las zonas por las comisarías posibles. Para el modelo, este arreglo de datos se llamará **"cobertura(i,j)".**

Solución

Índices del modelo:

i: posible ubicación de la comisaría

j: zona de alta peligrosidad

Variables de decisión:

Representan la posibilidad de instalar o no una comisaría en cada posible ubicación (es lo que el municipio necesita decidir):

$$X_i: \begin{cases} 0, \text{ no se instala una comisaría en la ubicación i.} \\ 1, \text{ sí se instala una comisaría en la ubicación i.} \end{cases}$$

(i = A,..., G, para no emplear letras i = 1,..., 7)

Función objetivo: número total de comisarías por instalar

Minimizar

$$Z = \sum_{\mathrm{i}=1}^{7} \mathrm{X_i}$$

Restricciones:

Es necesario cubrir cada zona de alta peligrosidad con al menos una comisaría para no dejar la zona desatendida.

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{7} \mathrm{X}_i * cobertura_{ij} \geq 1, \qquad \forall j = 1,\ldots,3$$

Restricciones para indicar la condición de variables binarias:

$$X_i \ \ es\ binaria, \qquad \forall \mathrm{i} = 1,\ldots,7$$

Modelo Lingo

```
Sets:
Ubicacion/1..7/: X;
Zona/1..7/;
UZ(ubicacion,zona): cobertura;
endsets

Data:
cobertura= 1 0 0 0 1 0 1
           1 1 0 0 1 0 1
           1 0 1 0 1 0 0
           0 1 0 1 1 0 0
           0 0 1 1 0 1 0
           0 0 0 1 1 1 0
           1 0 0 0 1 1 1;
enddata

Min= @sum(Ubicacion(i): x(i));

@for(zona(j):@sum(ubicacion(i):x(i)*cobertura(i,j))>=1);

@for(Ubicacion(i):@bin(x(i)));
```

Un extracto de lo más importante del reporte de solución

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              2.000000

  Model Class:                                      PILP

                               Variable         Value          Reduced Cost
                                  X(1)        0.000000             1.000000
                                  X(2)        1.000000             1.000000
                                  X(3)        0.000000             1.000000
                                  X(4)        0.000000             1.000000
                                  X(5)        1.000000             1.000000
                                  X(6)        0.000000             1.000000
                                  X(7)        0.000000             1.000000

                                    Row    Slack or Surplus       Dual Price
                                      1        2.000000            -1.000000
                                      2        0.000000             0.000000
                                      3        0.000000             0.000000
                                      4        0.000000             0.000000
                                      5        0.000000             0.000000
                                      6        0.000000             0.000000
                                      7        0.000000             0.000000
                                      8        0.000000             0.000000
```

Informe administrativo de la solución

La municipalidad deberá instalar una comisaría en la ubicación B y en la ubicación E, siendo 2 el mínimo número de comisarías con las que se cubren todas las zonas de alta peligrosidad.

Ejemplo 5

Para poder graduarse en la especialidad de Investigación de Operaciones, un estudiante debe completar por lo menos 2 cursos pertenecientes al área de Matemáticas, por lo menos 2 cursos pertenecientes al área de Investigación de Operaciones, y por lo menos 2 cursos pertenecientes al área de Informática. Los cursos y las áreas a las cuales pertenecen son los siguientes:

	Áreas		
Asignatura	**Matemáticas**	**Inv. de Operaciones**	**Informática**
Cálculo	X		
Programación Lineal	X	X	
Estructuras de Datos	X		X
Estadística para los Negocios	X	X	
Simulación de Sistemas		X	X
Fundamentos de Programación			X
Pronósticos	X	X	

Sin embargo, debe tener en cuenta que algunas asignaturas son requisito, para otros:

- Cálculo es requisito para Estadística para los Negocios, Fundamentos de Programación, Simulación de Sistemas y Estructuras de Datos.
- Estadística para los Negocios es requisito para Pronósticos.

Definir las variables de decisión y plantear un modelo de programación lineal que minimice la cantidad de asignaturas que el estudiante debe llevar para graduarse en la especialidad de Investigación de Operaciones; resolver el modelo y presentar la solución.

Es un problema de cobertura de conjuntos: con los elementos del conjunto de asignaturas cubre los requerimientos de las diferentes áreas académicas.

La **matriz de cobertura** que se necesita como dato en este problema es la siguiente:

	Áreas de formación		
Asignatura	**Matemáticas**	**Investigación de Operaciones**	**Informática**
Cálculo	1	0	0
Programación Lineal	1	1	0
Estructuras de Datos	1	0	1
Estadística para los Negocios	1	1	0
Simulación de Sistemas	0	1	1
Fundamentos de Programación	0	0	1
Pronósticos	1	1	0

Solución

Índices

i: asignatura en la que se puede matricular el estudiante.

j: áreas de formación.

Variables de decisión

El caso indica que el alumno debe decidir los cursos en los que se matricula, es decir, con cada curso tiene dos alternativas: se matricula o no se matricula, se trata de una decisión dicotómica que se representará con una variable binaria.

$$X_i: \begin{cases} 0, \text{ no se matricula en la asignatura i.} \\ 1, \text{ sí se matricula en la asignatura i.} \end{cases}$$

$(i = 1,...,7)$

Función objetivo: cantidad total de asignaturas en que se matriculará el estudiante.

Minimizar

$$Z = \sum_{i=1}^{7} X_i$$

Restricciones:

Debe completar al menos dos asignaturas por área.

$$\sum_{i=1} X_i * cobertura_{ij} \geq 2, \quad \forall\, j = 1,...,3$$

Cálculo es requisito para Estadística para los Negocios, Fundamentos de Programación, Simulación de Sistemas y Estructuras de Datos.

Se trata de tres restricciones similares, por ejemplo: si se decide llevar Estadística para los Negocios, entonces tendría que haber llevado Cálculo.

$$X_4 \leq X_1$$
$$X_6 \leq X_1$$
$$X_5 \leq X_1$$
$$X_3 \leq X_1$$

Estadística para los Negocios es requisito para Pronósticos:

$$X_7 \leq X_4$$

Restricciones para indicar la condición de variables binarias:

$$X_i \text{ es binaria,} \quad \forall \mathrm{i} = 1,...,7$$

Modelo Lingo

```
Sets:
Asignaturas/1,…,7/: X;
Areas/1,…,3/;
AA(asignaturas, areas): cobertura;
endsets

Data:
cobertura= 1 0 0
           1 1 0
           1 0 1
           1 1 0
           0 1 1
           0 0 1
           1 1 0;
enddata


Min= @sum(asignaturas(i): x(i));
@for(areas(j):@sum(asignaturas(i):x(i)*cobertura(i,j))>=2);
x(4)<=x(1);
x(6)<=x(1);
x(5)<=x(1);
x(3)<=x(1);
x(7)<=x(4);
@for(asignaturas(i):@bin(x(i)));
```

Un extracto de lo más importante del reporte de solución

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              4.000000

  Model Class:                                      PILP


                                Variable           Value        Reduced Cost
                                   X( 1)        1.000000            1.000000
                                   X( 2)        0.000000            1.000000
                                   X( 3)        1.000000            1.000000
                                   X( 4)        1.000000            1.000000
                                   X( 5)        1.000000            1.000000
                                   X( 6)        0.000000            1.000000


                                     Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                       1        4.000000           -1.000000
                                       2        1.000000            0.000000
                                       3        0.000000            0.000000
                                       4        0.000000            0.000000
                                       5        0.000000            0.000000
                                       6        1.000000            0.000000
                                       7        0.000000            0.000000
                                       8        0.000000            0.000000
                                       9        1.000000            0.000000
```

Informe administrativo de la solución

El número mínimo de asignaturas en las que el estudiante deberá matricularse es cuatro y estas son: Cálculo, Estructura de Datos, Estadística para los Negocios y Simulación de Sistemas.

B) Modelos de programación lineal entera mixtos

- **Modelos con "costo fijo"**

  En estos casos existe lo que se llama "costo fijo"; no es exactamente el concepto de costo fijo contable, ya que se incurre en él si hay actividad (sin importar el nivel de actividad), pero no se incurre en él si no hay actividad. Cabe recordar que desde el punto de vista contable el costo fijo es aquel en el que se incurre haya o no actividad.

Ejemplo 1

Un comerciante dedicado a la venta de ropa realizará compras para surtir su tienda. Puede elegir entre comprar o no las siguientes prendas:

Prendas	Costo de compra ($/unidad)	Precio de venta ($/unidad)	Cantidad máxima (unidades)
Polos	8	13	60
Camisas	10	14	20
Pantalones de vestir	18	24	16
Pantalones *jean*	15	19	20
Chompas	12	17	20
Casacas	19	23	12

Si el comerciante compra determinado tipo de prenda, entonces tendrá que elaborar folletos promocionales para el tipo de prenda adquirida. **Los costos de los folletos son: $ 4, $ 4, $ 5, $ 5, $ 6 y $ 6 para los polos, camisas, pantalones de vestir, pantalones *jean*, chompas y casacas, respectivamente**. Las compras están sujetas a las siguientes restricciones:

- Debe comprar casacas o chompas, pero no las 2 a la vez.
- Ya sea casacas o chompas, debe comprar como mínimo 6 unidades.
- Debe comprar como mínimo tres tipos de prendas.
- Dispone de $ 1000 para realizar sus compras y elaborar folletos.

Definir las variables de decisión y formular el modelo de programación lineal entera binaria que permita determinar cuántas debe adquirir el comerciante; resolver el modelo y presentar el reporte administrativo de la solución, teniendo en cuenta que todo lo que el comerciante compra se llega a vender.

¿Cuál es el costo fijo que debe modelarse? El texto del caso indica: "Si el comerciante compra determinado tipo de prenda, entonces tendrá que elaborar folletos promocionales para el tipo de prenda adquirida. Los costos de los folletos son: $ 4, $ 4, $5, $ 5, $ 6 y $ 6 para los polos, camisas, pantalones de vestir, pantalones *jean*, chompas y casacas, respectivamente".

Cuando se dice que la decisión de comercializar cierto tipo de prenda implica tener que elaborar folletos proporcionales, se entiende que basta que se decida comercializar al menos una unidad de ese tipo de prenda, será necesario hacerle promoción a través de folletos publicitarios.

Por ejemplo, si el comerciante decide comprar polos, no importa cuántos compre, tendrá que hacer promoción para promover su venta y ello signficará elaborar folletos. Si el comerciante no compra polos, no tendría que elaborar folletos, pues no tendrá que hacerle promoción a un producto que no ofrece; así, el costo de los folletos es un costo fijo, pues no depende de cuántos polos se compren y si no se compran polos no se incurre en él.

Solución

Índices

i: tipo de prenda por comercializar (1,...,6)

Variables de decisión

X_i: cantidad de prendas del tipo i por comprar.

Para modelar el costo fijo es necesario definir una variable binaria. Ya que el costo fijo se genera si se compra el tipo de prenda i, la variable binaria será:

$$Y_i : \begin{cases} 0, \text{ no se compran folletos para la prenda i (se comercializa el tipo de prenda i).} \\ 1, \text{ sí se compran folletos para la prenda i (no se comercializa el tipo de prenda i).} \end{cases}$$

Puede observarse que existe una relación lógica entre la variable que representa la cantidad de prendas por comprar y la variable binaria respectiva. Esta relación da lugar a una familia de restricciones típicas en estos problemas.

Función objetivo: utilidad bruta

Maximizar

$$Z = \sum_{i=1}^{6} (precio_i - costo\_compra_i) * X_i - costo\_folletos_i * Y_i$$

Restricciones

La relación entre ambas familias de variables:

La lógica de esta relación se muestra en la siguiente tabla:

Cantidad de prendas i (X_i)	Se compran folletos para la la prenda i (Y_i)
0	0 (no)
>0	1(sí)

La expresión matemática para esta relación que representa esta lógica es la siguiente:

$$X_i \leq M * Y_i, \qquad \forall i = 1,\ldots,6$$

En esta expresión, M es un número cualquiera, que debe ser más grande que cualquier valor que pudiera tomar el lado izquierdo de la restricción. En este caso, el lado izquierdo representa la cantidad de prendas por comprar, cuyo valor máximo en este ejercicio es un dato:

$$X_i \leq cantidad\_máxima_i * Y_i, \qquad \forall i = 1,\ldots,6$$

Con esta familia de restricciones, además, se ha restringido el valor de las variables X_i a su máximo posible.

Debe comprar casacas o chompas, pero no las 2 a la vez.

$$Y_5 + Y_6 = 1$$

Ya sea casacas o chompas, debe comprar como mínimo 6 unidades:

Puede no comprarse casacas o puede no comprarse chompas, eso se establece en la restricción anterior, pero si se compran, la cantidad debe ser mínimo 6. No sería correcto indicar:

$$\cancel{X_5 \geq 6}$$

$$\cancel{X_6 \geq 6}$$

ya que ello obligaría a comprar por lo menos 6 casacas y 6 chompas. La forma correcta sería:

$$X_5 \geq 6 * Y_5$$

$$X_6 \geq 6 * Y_6$$

Así, por ejemplo, en el caso en que no se compren casacas, X_5 será cero y, dado que X_5 e Y_5 están relacionadas por la primera familia de restricciones, el valor de Y_5 será cero también, resultando factible no comprar casacas. Sin embargo, si en el caso en que se compran casacas Y_5 tomara el valor 1 y X_5 no podría tomar un valor menor a 6, con lo que se logra modelar correctamente la condición establecida.

Debe comprar como mínimo tres tipos de prendas.

La condición señala tres tipos de prendas. Por ello, la restricción debe utilizar las variables Yi que indican también si se compra o no cada tipo de prenda:

$$\sum_{i=1}^{6} Y_i \geq 3$$

Dispone de $ 1000 para realizar sus compras y elaborar folletos.

$$\sum_{i=1}^{6} costo\_compra_i \ * X_i + \ costo\_folletos_i \ * Y_i \ \leq 1000$$

Restricciones para indicar la condición de variables enteras y binarias:

$$X_i \ \ es\ entera, \quad \forall \text{i} = 1,\dots,6$$

$$Y_i \ \ es\ binaria, \quad \forall \text{i} = 1,\dots,6$$

Modelo Lingo

```
sets:
prendas/1..6/:x,y,precio,costo_compra,costo_folletos,cantidad_maxima;
endsets

data:
precio=13 14 24 19 17 23;
costo_compra=8 10 18 15 12 19;
costo_folletos=4 4 5 5 6 6;
cantidad_maxima=60 20 16 20 20 12;
enddata

max=@sum(prendas(i):(precio(i)-costo_compra(i))*x(i)-costo_folletos(i)*y(i));

@for(prendas(i): x(i)<= cantidad_maxima(i)*y(i));
y(5)+y(6)=1;
x(5)>=6*y(5);
x(6)>=6*y(6);
@sum(prendas(i):y(i))>=3;
@sum(prendas(i):(costo_compra(i))*x(i)+costo_folletos(i)*y(i))<=1000;
@for(prendas(i):@gin(x(i)));
@for(prendas(i):@bin(y(i)));
```

Un extracto de lo más importante del reporte de solución

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              480.0000

  Model Class:                                      PILP

                               Variable           Value        Reduced Cost
                                  X( 1)        60.00000           -5.000000
                                  X( 2)        20.00000           -4.000000
                                  X( 3)        4.000000           -6.000000
                                  X( 4)        0.000000           -4.000000
                                  X( 5)        19.00000           -5.000000
                                  X( 6)        0.000000           -4.000000
                                  Y( 1)        1.000000            4.000000
                                  Y( 2)        1.000000            4.000000
                                  Y( 3)        1.000000            5.000000
                                  Y( 4)        0.000000            5.000000
                                  Y( 5)        1.000000            6.000000
                                  Y( 6)        0.000000            6.000000

                                    Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                      1        480.0000            1.000000
                                      2        0.000000            0.000000
                                      3        0.000000            0.000000
                                      4        12.00000            0.000000
                                      5        0.000000            0.000000
                                      6        1.000000            0.000000
                                      7        0.000000            0.000000
                                      8        0.000000            0.000000
                                      9        13.00000            0.000000
                                     10        0.000000            0.000000
                                     11        1.000000            0.000000
                                     12        1.000000            0.000000
```

Informe administrativo de la solución

El comerciante deberá comprar las siguientes cantidades de prendas:

Prendas	Cantidad por comprar (unidades)
Polos	60
Camisas	20
Pantalones de vestir	4
Pantalones *jean*	0
Chompas	19
Casacas	0

Con lo que obtendrá una ganancia bruta de $ 480.

Ejemplo 2

Pañales S.A. ha considerado la propuesta de una empresa multinacional para la producción y distribución de pañales para bebés en sus presentaciones, básica, natural y activa. Cada una de las dos plantas de la empresa tiene una capacidad de producción igual a 400 000 pañales/día. Los costos fijos y costos variables de producción de cada presentación en cada planta se muestran en la tabla siguiente:

	Costos fijos (en $)		Costos variables (en $/pañal)	
Presentación	**Planta 1**	**Planta 2**	**Planta 1**	**Planta 2**
Básica	25 000	20 000	0,3	0,4
Natural	15 000	10 000	0,4	0,2
Activa	20 000	15 000	0,5	0,3

De la tabla anterior puede leerse, por ejemplo, que si se decide producir, al menos una unidad del pañal de presentación básica en la planta 1, se incurre en un costo fijo de $ 25 000.

El pronóstico de la demanda diaria y los precios de venta de los pañales para cada presentación son los siguientes:

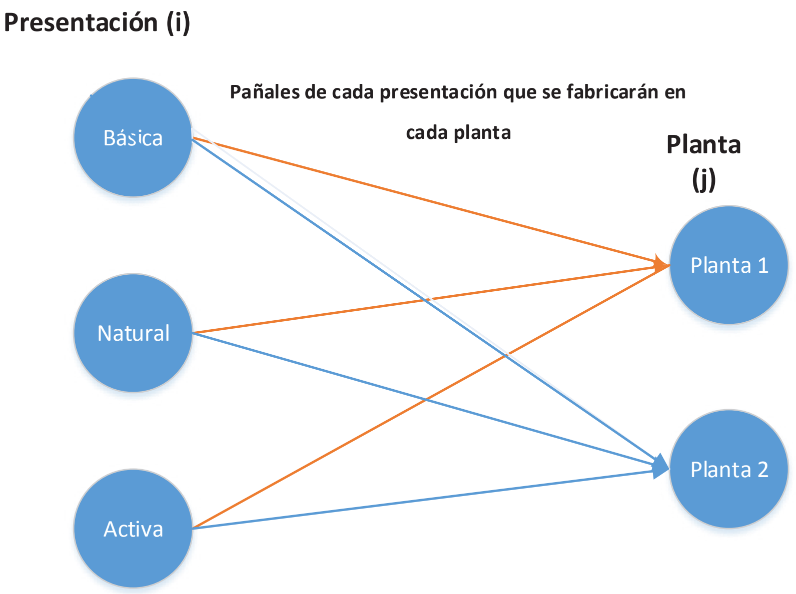
Presentación	Demanda diaria (pañales)	Precio de venta ($/pañal)
Básica	300 000	1,4
Natural	300 000	1,5
Activa	300 000	1,6

Sabiendo que la empresa puede cumplir con toda o parte de cada una de las demandas, se pide definir las variables de decisión, formular el modelo de programación lineal entera binaria correspondiente, resolverlo y presentar la solución.

¿Cuál es el costo fijo que debe modelarse?

El texto señala que si "se produce al menos una unidad de la presentación i en la planta j se incurre en un costo" (costo fijo dado en la tabla). Cuando el texto señala al menos una unidad de cada presentación en alguna de las plantas, significa que no importa cuántas unidades se produzcan, sino el hecho de producir.

Un esquema para el problema:



Solución

Índices

i : presentación por fabricar (1,...,3).

j : planta en la que se fabricarán los pañales (1,...,2).

Variables de decisión

X_{ij}: cantidad de pañales de la presentación i por fabricar en la planta j

Para modelar el costo fijo es necesario definir una variable binaria, y que el costo fijo se genera si se produce la presentación i en la planta j, la variable binaria será:

$$Y_{ij}: \begin{cases} 0, \text{ no se produce la presentación i en la planta j.} \\ 1, \text{ sí se produce la presentación i en la planta j.} \end{cases}$$

Puede observarse que existe una relación lógica entre la variable que representa la cantidad de unidades de pañales de la presentación i que se producirán en la planta j y la variable binaria respectiva. Esta relación da lugar a una familia de restricciones típicas en estos problemas.

Función objetivo: utilidad bruta

Maximizar

$$Z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}(X_{ij} * precio_i - X_{ij} * costo\_variable_{ij} - Y_{ij} * costo\_fijo_{ij})$$

Restricciones

La relación entre ambas familias de variables:

La lógica de esta relación se muestra en la siguiente tabla:

Cantidad de pañales de la presentación i por producir en la planta j (X_{ij})	**Se pagan los costos fijos por producir la presentación i en la planta j (Y_{ij})**
0	0 (no)
>0	1 (sí)

La expresión matemática para esta relación que representa esta lógica es la siguiente:

$$X_{ij} \leq M * Y_{ij}, \quad \forall i = 1,...,3, \quad \forall j = 1,2$$

En esta expresión, M es un número cualquiera, que debe ser más grande que cualquier valor que pudiera tomar el lado izquierdo de la restricción. En este caso, el lado izquierdo representa la cantidad de pañales de la presentación i que se producirán en la planta j, cuyo valor máximo en este ejercicio podría considerarse que corresponde a la capacidad de la planta respectiva:

$$X_{ij} \leq 400\,000 * Y_{ij}, \quad \forall i = 1,...,3, \qquad \forall j = 1,...,2$$

La capacidad de producción de cada planta

$$\sum_{i=1}^{3} X_{ij} \leq 400\,000, \quad \forall j = 1,...,2$$

La demanda de cada tipo de pañal

$$\sum_{j=1}^{2} X_{ij} \leq demanda_i, \quad \forall i = 1,...,3$$

Esta familia de restricciones es "≤", dado que el texto del ejercicio señala que la empresa puede cumplir con todo o parte de las demandas.

Restricciones para indicar la condición de variables enteras y binarias:

$$X_{ij} \ es\ entera\ , \quad \forall i = 1,\dots,3\ , \forall j = 1,2$$

$$Y_{ij} \ es\ binaria, \quad \forall i = 1,\dots,3, \quad \forall j = 1,2$$

Modelo Lingo

```
sets:
presentacion/1..3/: precio;
planta/1..2/:;
pp(presentacion, planta):X, Y, costo_variable,costo_fijo;
endsets

data:
!Nota: en este caso, como la demanda de cada presentación
tiene el mismo valor, no se ha definido este dato como
atributo para el set presentacion;
precio=1.4 1.5 1.6;
costo_variable= 0.3 0.4 0.4 0.2 0.5 0.3;
costo_fijo=25000 20000 15000 10000 20000 15000;
enddata
Max=@sum(pp(i,j):precio(i)*x(i,j)-costo_variable(i,j)*x(i,j)-costo_fijo(i,j)*y(i,j));

@for(pp(i,j):x(i,j)<=400000*y(i,j));
@for(planta(j):@sum(presentacion(i):x(i,j))<=400000);
@for(presentacion(i):@sum(planta(j):x(i,j))<=300000);

@for(pp(i,j):@gin(x(i,j)));
@for(pp(i,j):@bin(y(i,j)));
```

Un extracto de lo más importante del reporte de solución

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              895000.0

  Model Class:                                      PILP

                                 Variable           Value        Reduced Cost

                                X(1,1)        200000.0           -1.100000
                                X(1,2)        0.000000           -1.000000
                                X(2,1)        200000.0           -1.100000
                                X(2,2)        100000.0           -1.300000
                                X(3,1)        0.000000           -1.100000
                                X(3,2)        300000.0           -1.300000
                                Y(1,1)        1.000000            25000.00
                                Y(1,2)        0.000000            20000.00
                                Y(2,1)        1.000000            15000.00
                                Y(2,2)        1.000000            10000.00
                                Y(3,1)        0.000000            20000.00
                                Y(3,2)        1.000000            15000.00


                                     Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                       1        895000.0            1.000000
                                       2        200000.0            0.000000
                                       3        0.000000            0.000000
                                       4        200000.0            0.000000
                                       5        300000.0            0.000000
                                       6        0.000000            0.000000
                                       7        100000.0            0.000000
                                       8        0.000000            0.000000
                                       9        0.000000            0.000000
                                      10        100000.0            0.000000
                                      11        0.000000            0.000000
                                      12        0.000000            0.000000
```

Informe administrativo de la solución

El cuadro siguiente muestra la cantidad de pañales de cada presentación que deberá fabricarse en cada planta:

	Plantas	
Presentación	**Planta 1**	**Planta 2**
Natural	2 000 000	0
Básica	2 000 000	100 000
Activa	0	300 000

La utilidad bruta total máxima será de $ 895 000.

Ejemplo 3

Una compañía electrónica dedicada a la fabricación de pequeños motores para juguetes tiene pronosticada una demanda de 6100 unidades de su producto M1 para el trimestre siguiente, la **misma que deberá cubrir**. El producto M1 resulta del ensamble de 3 componentes: un eje, una base y una caja. Los componentes, además de producirse en la empresa, podrían también ser comprados a un proveedor debido a las limitaciones de capacidad para producirlos en la propia empresa.

Los costos de los componentes producidos en la empresa y de los componentes comprados a un proveedor se muestran en la tabla siguiente:

Componente	Costo de producción ($/unidad)	Costo de compra ($/unidad)
Eje	0,81	1,21
Base	2,30	1,50
Caja	1,45	1,95

El proceso de producción de los componentes en la empresa consta de tres etapas secuenciales: corte, doblado y ensamble. Los tiempos requeridos para los componentes en cada etapa de producción en la propia empresa se muestran en la siguiente tabla, junto con la disponibilidad de tiempo en cada etapa respectiva:

Datos para las actividades de producción

	Tiempo requerido (horas/unidad)		
Componente	**Corte**	**Doblado**	**Ensamble**
Eje	0,04	0,06	0,04
Base	0,08	0,02	0,05
Caja	0,07	0,09	0,06
Disponibilidad (horas)	1320	1320	1330

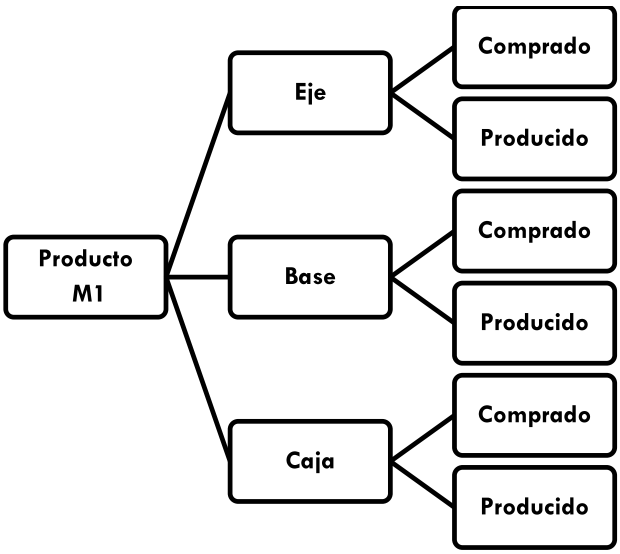
La empresa ha decidido que si fabrica ella misma algún tipo de componente, entonces no comprará ese tipo de componente al proveedor; y si compra algún tipo de componente al proveedor, entonces no lo fabricará. Asimismo, se sabe que la empresa podría alquilar un equipo de corte adicional, un equipo de doblado adicional y uno de ensamble adicional que podría utilizarse por 500, 400 y 300 horas más, respectivamente, con un costo de $ 300, $ 280 y $ 320 cada uno, respectivamente, por el periodo completo de operaciones.

Definir las variables de decisión, formular el modelo de programación lineal que ayude a la empresa a minimizar su costo total; resolverlo y presentar el informe de solución.

¿Cuál es el costo fijo que debe modelarse?

Cuando el texto del ejercicio señala: "La empresa podría alquilar un equipo de corte adicional, un equipo de doblado adicional y uno de ensamble adicional que podría utilizarse por 500, 400 y 300 horas más, respectivamente, con un costo de $ 300, $ 280 y $ 320 cada uno, respectivamente, por el periodo completo de operaciones", se entiende que el pago del alquiler es por el periodo de producción, no depende de la cantidad de unidades que se produzcan con el equipo. Si se alquila un equipo se pagará el costo del alquiler sin importar si este se emplea poco o mucho.

Un esquema para el problema:



Solución

Índices

Dado que la empresa tiene que fabricar 6100 unidades de producto, necesita 6100 unidades de cada una de las partes del producto. Estas partes pueden ser producidas o compradas, las piezas que se producen deben pasar por una secuencia de actividades.

i: pieza necesaria para producir el producto final (eje(1), base(2), caja(3)).

j: formas de obtener la pieza (producir(1), comprar (2)).

k: actividades del proceso de producción (corte(1), doblado(2), ensamble(3)).

Variables de decisión

X_{ij}: cantidad de piezas tipo i obtenidas de la forma j.

Para modelar el costo fijo es necesario definir una variable binaria. Ya que el costo fijo se genera si se alquila un equipo adicional para cada actividad del proceso de producción, la variable binaria será:

$$Y_k: \begin{cases} 0, \text{ no se alquila el equipo adicional para la actividad k} \\ 1, \text{ sí se alquila el equipo adicional para la actividad k} \end{cases}$$

El caso señala que la empresa debe elegir solo una forma de obtener las partes, ya sea produciéndolas o comprándolas. Será necesario el empleo de una variable binaria que represente la decisión de producir (sí o no) o comprar (sí o no). No es útil la variable X_{ij}, ya que esta representa las cantidades y no la decisión de producir o la decisión de comprar. Entonces será necesria una familia de variables binarias adicional:

$$Z_{ij}: \begin{cases} 0, \text{ no se obtiene la pieza tipo i de la forma j.} \\ 1, \text{ sí se obtiene la pieza tipo i de la forma j.} \end{cases}$$

Puede observarse que existe una relación lógica entre la variable que representa la cantidad de unidades de pañales de la presentación i que se producirán en la planta j y la variable binaria respectiva. Esta relación da lugar a una familia de restricciones típicas en estos problemas.

Función objetivo: costos totales de producción

Minimizar

$$F = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} costo_{ij} * x_{ij} + \sum_{k=1}^{3} alquiler_k * y_k$$

Restricciones

La relación entre cada variable de las familias de variables X_{ij} y Z_{ij}

La lógica de esta relación se muestra en la siguiente tabla:

Cantidad de pañales de piezas tipo i por obtener de la forma j (X_{ij})	**Se produce la pieza tipo i de la forma j (Y_{ij})**
0	0 (no)
>0	1(sí)

La expresión matemática para esta relación que representa esta lógica es la siguiente:

$$X_{ij} \leq 6100 * Z_{ij}, \qquad \forall i = 1,...,3, \quad \forall j = 1,2$$

En este caso, se empleó el valor 6100 que representa el máximo valor que podría tomar cualquier variable X_{ij}, ya que ese es el requerimiento para cubrir la producción necesaria del producto M1.

Cada pieza se deberá producir o comprar, pero no ambas posibilidades a la vez:

$$\sum_{j=1}^{2} Z_{ij} = 1, \quad \forall i = 1,...,3$$

Cantidad de partes necesarias de cada tipo, obtenidas bajo cualquier forma:

$$\sum_{j=1}^{2} X_{ij} = 6100, \quad \forall i = 1,...,3$$

Tiempo disponible en cada actividad del proceso de producción:

En este caso, el tiempo disponible que se muestra en la tabla de datos para cada una de las actividades de producción podría incrementarse o no, dependiendo de que se alquile o no el equipo adicional. Se ha definido la familia de variables binarias Yk para modelar esa decisión, de la que depende que la disponilidad de tiempo aumente o no en cada actividad:

$$\sum_{i=1}^{3} tiempo_{ik} * X_{i1} \leq disponiblidad_k + tiempo\_adicional_k * Y_k \qquad \forall k = 1,...,3$$

Nótese que esta restricción es solo para las unidades producidas por la empresa, por ello solo se han empleados las variables X_{i1}.

Restricciones para indicar la condición de variables enteras y binarias:

$$X_{ij} \ es\ entera, \quad \forall i = 1,...,6 \ , \forall j = 1,2$$

$$Z_{ij} \ es\ binaria, \quad \forall i = 1,...,3, \qquad \forall j = 1,2$$

$$Y_k \ es\ binaria, \quad \forall k = 1,...,3$$

Modelo Lingo

```
sets:
pieza/1,..,3/:;
forma/1,...,2/:;
actividad/1..3/:disponibilidad, alquiler, tiempo_adicional, y;
PF(pieza, forma):x,z,costo;
PA(pieza,actividad):tiempo;
endsets
Data:
disponibilidad= 1320 1320 1330;
alquiler=300 280 320;
tiempo_adicional=500 400 300;
costo=0.81 1.21 2.3 1.50 1.45 1.95;
tiempo=0.04 0.06 0.04 0.08 0.02 0.05 0.07 0.09 0.06;
enddata

Min=@sum(pf(i,j):x(i,j)*costo(i,j))-@sum(actividad(k):alquiler(k)*y(k));

@for(PF(i,j):x(i,j)<=6100*z(i,j));
@for(pieza(i): @sum(forma(j):z(i,j))=1);
@for(pieza(i):@sum(forma(j):x(i,j))=6100);

@for(actividad(k):@sum(pieza(i):tiempo(i,k)*x(i,1))<=
                                     disponibilidad(k)+tiempo_adicional(k)*y(k)
@for(PF(i,j):@gin(x(i,j)));
@for(PF(i,j):@bin(z(i,j)));
@for(actividad(k):@bin(y(k)));
```

Un extracto de lo más importante del reporte de solución

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              22036.00

  Model Class:                                      PILP


                                Y(1)        1.000000          -300.0000
                                Y(2)        1.000000          -280.0000
                                Y(3)        1.000000          -320.0000
                              X(1,1)        6100.000          0.8100000
                              X(1,2)        0.000000           1.210000
                              X(2,1)        0.000000           2.300000
                              X(2,2)        6100.000           1.500000
                              X(3,1)        6100.000           1.450000
                              X(3,2)        0.000000           1.950000
                              Z(1,1)        1.000000           0.000000
                              Z(1,2)        0.000000           0.000000
                              Z(2,1)        0.000000           0.000000
                              Z(2,2)        1.000000           0.000000
                              Z(3,1)        1.000000           0.000000
                              Z(3,2)        0.000000           0.000000

                                 Row    Slack or Surplus       Dual Price
                                   1        22036.00          -1.000000
                                   2        0.000000           0.000000
                                   3        0.000000           0.000000
                                   4        0.000000           0.000000
                                   5        0.000000           0.000000
                                   6        0.000000           0.000000
                                   7        0.000000           0.000000
                                   8        0.000000           0.000000
                                   9        0.000000           0.000000
                                  10        0.000000           0.000000
                                  11        0.000000           0.000000
                                  12        0.000000           0.000000
                                  13        0.000000           0.000000
                                  14        1149.000           0.000000
                                  15        805.0000           0.000000
                                  16        1020.000           0.000000
```

Informe administrativo de la solución

La empresa deberá producir los 6100 ejes y cajas, y deberá comprar las 6100 bases. Así mismo, será necesario que alquile los equipos adicionales para cada una de las actividades de producción. El menor costo total será $ 22 036,00.

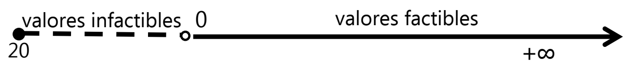
- **Modelos con "lote mínimo"**

En estos casos existe la condición de que si se realiza una actividad, esta deberá tener un nivel mínimo de ejecución. Por ejemplo, considere un caso de una empresa que debe programar la producción de i productos y suponga que debe cumplir con la siguiente condición: "Si la empresa produce alguno de sus productos, deberá producir como mínimo 20 unidades". Así, si X_i representa el número de unidades del producto i a producir, la condición señalada **no** se modelaría haciendo:

$$X_i \geq 20, \qquad \forall \mathrm{i} = 1,\ldots,\mathrm{n}$$

Esa restricción obliga a producir 20 unidades sí o sí y no existiría como opción factible no producir el producto. Esa familia de restricciones es incorrecta, teniendo en cuenta que la condición dice "Si la empresa produce", con lo que se entiende que existe la posibilidad de que la empresa no produzca el producto.

Gráficamente podría ilustrarse la condición del **lote mínimo** para el ejemplo, si se representan los **valores factibles** para las variables X_i de la forma siguiente:



Ejemplo 1

Una empresa fabrica y comercializa carcasas para celulares, las cuales se producen en cualquiera de sus tres líneas de producción: 1, 2 y 3. En la siguiente tabla se indican las horas que requiere cada línea para producir cada tipo de carcasa.

Tipo de carcasa	Tiempo de producción (horas/unidad)		
	Línea 1	Línea 2	Línea 3
C1	0,3	0,4	0,5
C2	0,2	0,25	0,3

Cada línea dispone de 96 horas a la semana. Los costos de producción de cada carcasa en cada línea de producción, así como el precio de venta de cada carcasa, se indican en la siguiente tabla:

Tipo de carcasa	Costo de producción ($/unidad)			Precio de venta ($/unidad)
	Línea 1	Línea 2	Línea 3	
C1	5	2	3	50
C2	4	5	6	45

Además de producir, la empresa puede comprar carcasas hechas a tres proveedores. Si decide hacer un pedido a un proveedor, se incurrirá en un costo de compra variable y en un costo de compra fijo. Los costos variables por la compra de un tipo de carcasa a un tipo de proveedor y los costos fijos por proveedor se específican en la siguiente tabla:

	Costo de compra variable ($/unidad)		
Tipo de carcasa	**Proveedor 1**	**Proveedor 2**	**Proveedor 3**
C1	3	4	3
C2	4	3	3
Costo de compra fijo ($)	400	400	300

Asimismo, estos proveedores han impuesto una cantidad mínima para la cual aceptan pedidos, los cuales se indican en la siguiente tabla:

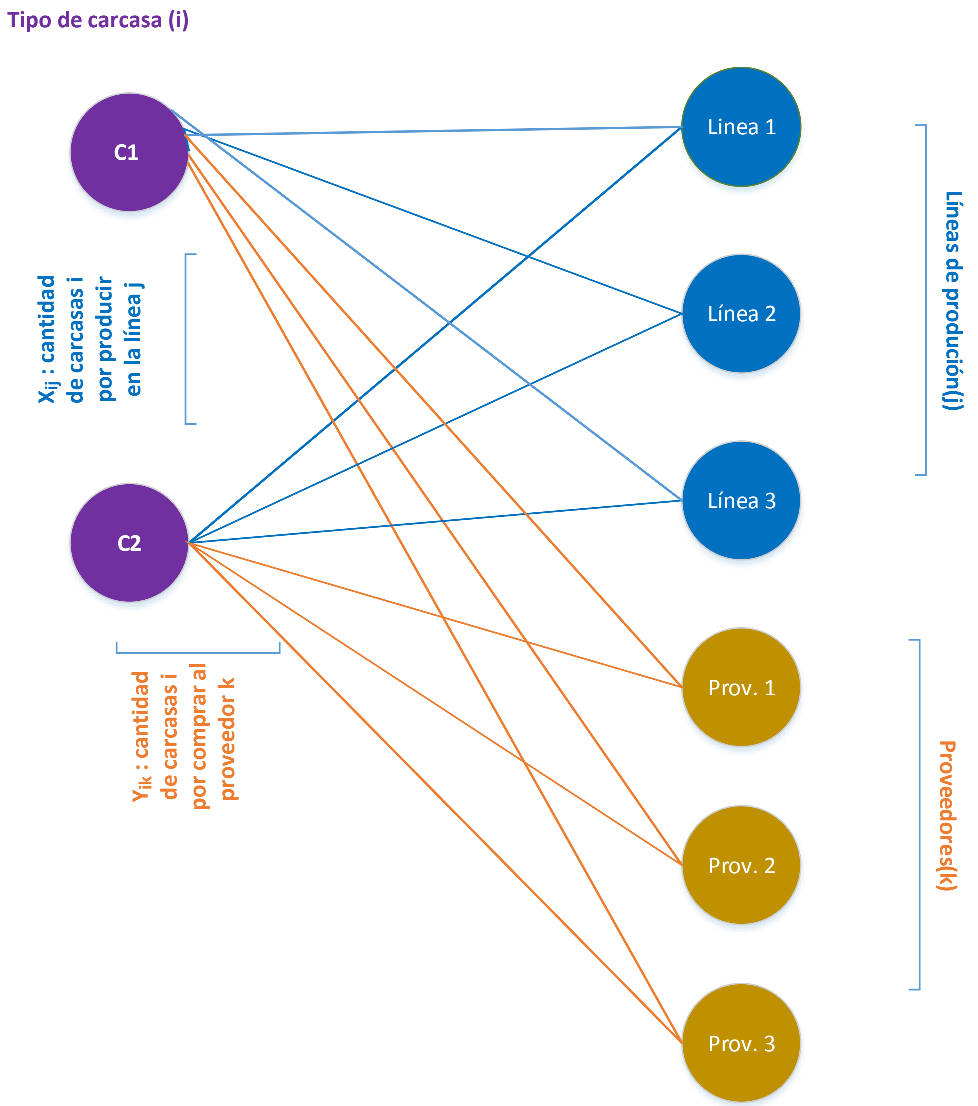
	Cantidad mínima por pedir		
Tipo de carcasa	**Proveedor 1**	**Proveedor 2**	**Proveedor 3**
C1	70	70	60
C2	80	80	50

Si se opta por comprar a algún proveedor, se le debe comprar ambos tipos de carcasa (por ejemplo, si se decide comprar al proveedor 1, entonces se le debe comprar por lo menos 70 carcasas C1 y por lo menos 80 carcasas C2).

Además, cada proveedor no puede suministrar más de 250 carcasas de cada tipo. Finalmente, la empresa no puede vender más de 1500 y 1600 carcasas para C1 y C2, respectivamente. Todo lo que se produce y compra se venderá.

Definir las variables de decisión y su significado, así como el modelo de programación lineal entera binaria correspondiente en forma matemática compacta que ayude a la empresa a maximizar su utilidad total.

Un esquema para el problema:



Solución

Índices:

i : tipo de carcasa (1,2)

j : línea de producción (1,...,3)

k : proveedor (1,...,3)

Variables de decisión

X_{ij} : cantidad de carcasas tipo i producidas en la línea j.

Y_{ij} : cantidad de carcasas tipo i compradas al proveedor k.

Para modelar el costo fijo que se paga al proveedor al que se decida comprar será necesaria la siguiente familia de variables binarias:

$$Z_k: \begin{cases} 0, \text{ no se compra al proveedor k.} \\ 1, \text{ sí se compra al proveedor k.} \end{cases}$$

Función objetivo: utilidad bruta total

Maximizar

$$\mathrm{Z} = \sum_{i=1}^{2} precio_i * (\sum_{j=1}^{3} X_{ij} + \sum_{k=1}^{3} Y_{ik}) - \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} X_{ij} * \; costo\_producción_{ij} - \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{3} Y_{ik} * costo\_variable_{ik}$$

$$-\sum_{k=1}^{3} costo\_fijo_k * Z_k$$

Restricciones

Cantidades máximas por vender de cada tipo de carcasa:

$$\sum_{j=1}^{3} X_{ij} + \sum_{k=1}^{3} Y_{ik} \leq venta\_max_i, \qquad \forall i = 1,2$$

Tiempo disponible en cada línea de producción

$$\sum_{i=1}^{2} X_{ij} * tiempo_{ij} \leq 96, \quad \forall j = 1,\ldots,3$$

Cada proveedor no puede suministrar más de 250 carcasas de cada tipo.

$$Y_{ik} \leq 250 * Z_k, \quad \forall i = 1,2, \quad \forall k = 1,\ldots,3$$

Cantidad mínima que se le compraría a cada proveedor, de cada producto, en caso de que se le compre.

$$Y_{ik} \geq cantidad\_min_{ik} * Z_k, \quad \forall i = 1,2, \quad \forall k = 1,\ldots,3$$

En esta familia, si no se compra al proveedor Zk tendrá valor cero y la restricción será equivalente a las de no negatividad, pero si es que se le compra entonces Zk tendrá valor 1 y la restricción obligará a comprar al proveedor la cantidad mínima establecida de cada producto y consecuentemente a pagar el costo fijo que corresponde a la decisión de comprar al proveedor, sin importar cuánto se le compre.

Restricciones para indicar la condición de variables enteras y binarias:

$$X_{ij} \text{ } es\ entera, \quad \forall i = 1,2 \quad \forall j = 1,\ldots,3$$

$$Z_k \text{ } es\ binaria, \quad \forall k = 1,\ldots,3$$

$$Y_{ik} \text{ } es\ entera \quad \forall i = 1,2, \quad \forall k = 1,\ldots,3$$

Modelo Lingo

```
sets:
producto/1,...,2/:venta_max, precio;
linea/1,...,3/:;
proveedor/1,...,3/:z,costo_fijo;
pl(producto,linea):x,tiempo,costo_prod;
pp(producto,proveedor):y,cant_min, costo_compra;
endsets

data:
venta_max=1500 1600;
precio=50 45;
costo_fijo=400 400 300;
costo_compra=3 4 3 4 3 3;
cant_min=70 70 60 80 80 50;
tiempo=0.3 0.4 0.5 0.2 0.25 0.3;
costo_prod=5 2 3 4 5 6;
enddata

max=ingresos-c_variables-c_fijos;
ingresos=
@sum(producto(i):precio(i)*(@sum(linea(j):x(i,j))+@sum(proveedor(k):y(i,k))));
costos_variables_totales=
@sum(pl(i,j):x(i,j)*costo_prod(i,j))+@sum(pp(i,k):y(i,k)*costo_compra(i,k));
costos_fijos_totales=@sum(proveedor(k):z(k)*costo_fijo(k));
@for(producto(i):
@sum(linea(j):x(i,j))+@sum(proveedor(k):y(i,k))<=venta_max(i));
@for(linea(j):@sum(producto(i):x(i,j)*tiempo(i,j))<=96);
@for(pp(i,k):y(i,k)<=250*z(k));
@for(pp(i,k):y(i,k)>=cant_min(i,k)*z(k));
@for(pl(i,j):@gin(x(i,j)));
@for(pp(i,k):@gin(y(i,k)));
@for(proveedor(k):@bin(z(k)));
```

Un extracto de lo más importante del reporte de solución:

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                           109324.0

  Model Class:                                   MILP

                       Variable           Value        Reduced Cost
                       INGRESOS        119950.0            0.000000
       COSTOS_VARIABLES_TOTALES        9526.000            0.000000
           COSTOS_FIJOS_TOTALES        1100.000            0.000000
                         X(1,1)        4.000000           -45.00000
                         X(1,2)        205.0000           -48.00000
                         X(1,3)        0.000000           -47.00000
                         X(2,1)        474.0000           -41.00000
                         X(2,2)        56.00000           -40.00000
                         X(2,3)        320.0000           -39.00000
                         Y(1,1)        250.0000           -47.00000
                         Y(1,2)        250.0000           -46.00000
                         Y(1,3)        250.0000           -47.00000
                         Y(2,1)        250.0000           -41.00000
                         Y(2,2)        250.0000           -42.00000
                         Y(2,3)        250.0000           -42.00000

                            Row    Slack or Surplus      Dual Price
                              1        109324.0            1.000000
                              2        0.000000            1.000000
                              3        0.000000           -1.000000
                              4        0.000000           -1.000000
                      VENTAS(1)        541.0000            0.000000
                      VENTAS(2)        0.000000            0.000000
                 DISP_TIEMPO(1)        0.000000            0.000000
                 DISP_TIEMPO(2)        0.000000            0.000000
                 DISP_TIEMPO(3)        0.000000            0.000000
             MAXIMA_COMPRA(1,1)        0.000000            0.000000
             MAXIMA_COMPRA(1,2)        0.000000            0.000000
             MAXIMA_COMPRA(1,3)        0.000000            0.000000
             MAXIMA_COMPRA(2,1)        0.000000            0.000000
             MAXIMA_COMPRA(2,2)        0.000000            0.000000
             MAXIMA_COMPRA(2,3)        0.000000            0.000000
             MINIMA_COMPRA(1,1)        180.0000            0.000000
             MINIMA_COMPRA(1,2)        180.0000            0.000000
             MINIMA_COMPRA(1,3)        190.0000            0.000000
             MINIMA_COMPRA(2,1)        170.0000            0.000000
             MINIMA_COMPRA(2,2)        170.0000            0.000000
             MINIMA_COMPRA(2,3)        200.0000            0.000000
```

Informe administrativo de la solución

	Unidades por producir			Unidades por comprar		
Carcasa	**Línea 1**	**Línea 2**	**Línea 3**	**Proveedor 1**	**Proveedor 2**	**Proveedor 3**
C1	4	205	-	250	250	250
C2	474	56	320	250	250	250

La utilidad bruta total será de $ 109 324.

Al haberse empleado variables auxiliares para calcular el total de ingresos por ventas, el total de costos variables y el total de costos fijos, puede conocerse en este modelo el desagregado de la utilidad.

Ejemplo 2

Una empresa posee tres plantas (PL1, PL2 y PL3) que producen el mismo producto. Cualquiera de estas plantas puede abastecer a cualquiera de tres centros de distribución (CD1, CD2 y CD3). El producto es enviado en parihuelas. Asimismo, desde cualquier centro de distribución se puede atender a cualquiera de cuatro clientes (C1, C2, C3 y C4) los cuales han hecho su pedido para la próxima temporada, para la cual se cuenta con la siguiente información por cada cliente:

Cliente	**C1**	**C2**	**C3**	**C4**
Precio de venta ($/parihuela)	19 000	19 200	19 600	19 500
Mínimo por entregar (parihuelas)	12	14	10	12
Máximo por entregar (parihuelas)	20	24	20	24

No es obligatorio atender a todos los clientes. Si se decide atender al cliente C1, por ejemplo, se le debe entregar entre 12 y 20 parihuelas. No es posible enviar fracciones de parihuela.

La capacidad de producción de las plantas PL1, PL2 y PL3 es de 28, 30 y 25 parihuelas, respectivamente. Los centros de distribución CD1, CD2 y CD3 pueden recibir hasta 17, 20 y 22 parihuelas, respectivamente. El costo de transporte desde las plantas hacia los centros de distribución es fijo, en caso de que se efectúe el transporte:

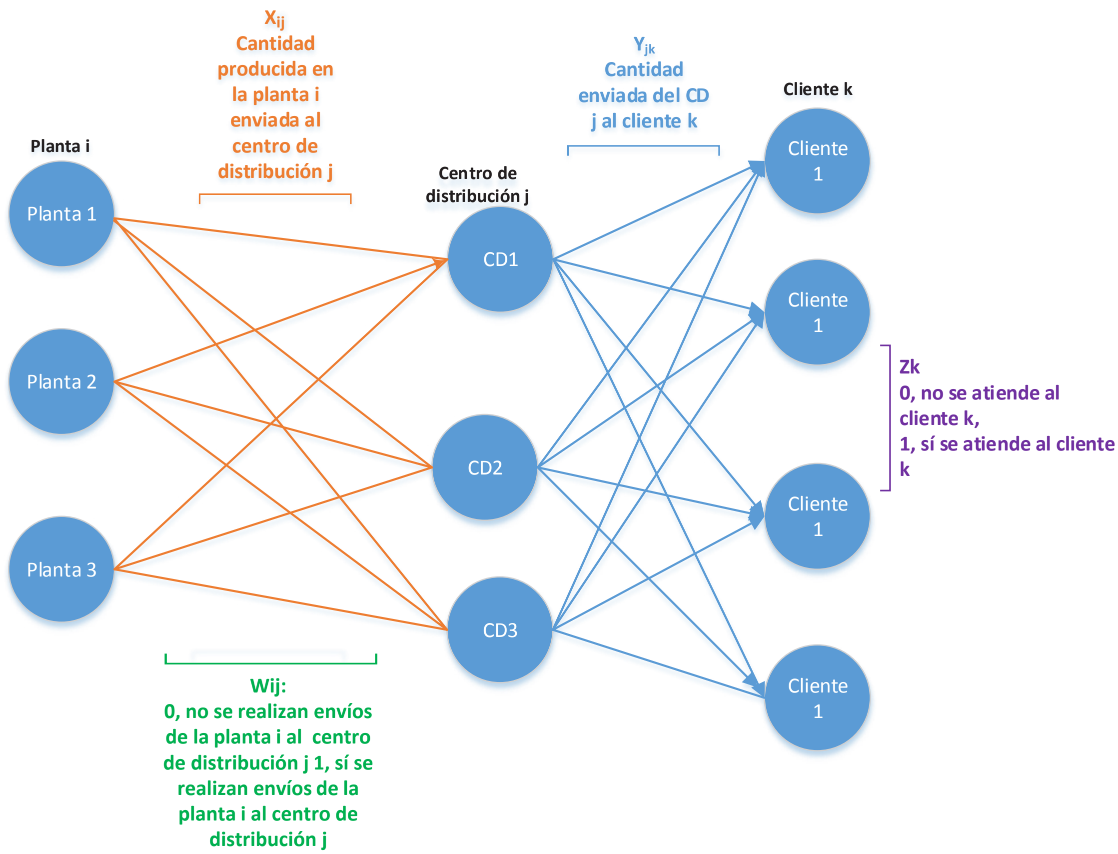
	Costo Fijo de Transporte ($)		
Planta	CD1	CD2	CD3
PL1	500	580	600
PL2	520	520	600
PL3	520	560	560

El costo de transporte desde cualquier centro de distribución hacia cualquier cliente es similar. Por ello, no se tomará en cuenta para la elaboración del modelo de programación lineal. Sin embargo, existe una capacidad límite de transporte:

Centro de distribución	Capacidad de transporte (en parihuelas)			
	C1	C2	C3	C4
CD1	8	5	8	5
CD2	9	6	8	9
CD3	5	10	8	7

Presentar las variables de decisión y su significado y formular el modelo de programación lineal; resolver el modelo y presentar el reporte de solución.

Un esquema para el problema



Solución

Índices:

i : planta (1,...,3)

j : centro de distribución (1,...,3)

k : cliente (1,...,4)

Variables de decisión

X_{ij} : cantidad de productos fabricados en la planta i enviados al centro de distribución j

Y_{jk} : cantidad de productos del centro de distribución i , enviados al cliente k

Para modelar el costo fijo que se paga por el transporte de plantas a centros de distribución es necesaria la siguiente familia de variables binarias:

$$W_{ij}: \begin{cases} 0, \text{ no se transportan productos de la planta i al centro de distribución j} \\ 1, \text{ sí se transportan productos de la planta i al centro de distribución j} \end{cases}$$

Para modelar el lote mínimo de productos por vender a cada cliente es necesaria la siguiente familia de variables binarias:

$$Z_k: \begin{cases} 0, \text{ no se atenderá al cliente k.} \\ 1, \text{ sí se atenderá al cliente k.} \end{cases}$$

Función objetivo: utilidad bruta total

Maximizar

$$\mathrm{Z} = \sum_{k=1}^{4} precio_k * \sum_{j=1}^{3} Y_{ik} - \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} costo\_transporte_{ij} * W_{ij}$$

Restricciones

Cantidades máximas por vender a cada cliente:

$$\sum_{j=1}^{3} Y_{jk} \leq venta\_máxima_k \ * Z_k, \quad \forall k = 1,\ldots,4$$

Cantidad mínima a vender a cada cliente, en caso se le venda:

$$\sum_{j=1}^{3} Y_{jk} \geq venta\_mínima_k * Z_k, \quad \forall k = 1,\ldots,4$$

La relación entre cada variable de las familias de variables X_{ij} y W_{ij} para modelar el costo fijo de transporte:

$$\mathrm{X_{ij}} \leq M * W_{ij}, \quad \forall i = 1,\ldots,3, \qquad \forall j = 1,\ldots,3$$

En este caso, el valor de M corresponde a un número suficientemente grande, puede emplearse la propia capacidad de la planta o cualquier número más grande que cualquiera de dichas capacidades:

$$\mathrm{X_{ij}} \leq 100 * W_{ij}, \quad \forall i = 1,\ldots,3, \qquad \forall j = 1,\ldots,3$$

Capacidad de producción en cada planta:

$$\sum_{j=1}^{3} X_{ij} \leq capacidad_i, \quad \forall i = 1,...,3$$

Capacidad de cada centro de distribución:

$$\sum_{i=1}^{3} X_{ij} \leq capacidad\_centro_j, \quad \forall j = 1,...,3$$

Capacidad de transporte desde cada centro de distribución hacia cada cliente:

$$Y_{jk} \leq capacidad\_transporte_{jk}, \quad \forall j = 1,...,3, \quad \forall k = 1,...,4$$

Tratándose de un problema de trasbordo, es necesaria la formulación de las ecuaciones de balance en los puntos de trasbordo, es decir, en los centros de distribución:

$$\sum_{i=1}^{3} X_{ij} = \sum_{k=1}^{4} Y_{jk}, \quad \forall j = 1,...,3$$

Restricciones para indicar la condición de variables enteras y binarias:

$$X_{ij} \text{ es entera}, \quad \forall i = 1,2 \ , \forall j = 1,...,3$$

$$Z_k \text{ es binaria}, \quad \forall k = 1,...,3$$

$$Y_{ik} \text{ es entera} \quad \forall i = 1,2, \qquad \forall k = 1,...,3$$

Modelo Lingo

```
sets:
planta/1..3/:capacidad;
cdist/1..3/:capacidad_centro;
cliente/1..4/:Z, precio, venta_maxima, venta_minima;
pc(planta,cdist):X,W,costo_transporte;
cc(cdist,cliente):Y,capacidad_transporte;
endsets

data:
capacidad=28 30 25;
capacidad_centro=17 20 22;
precio=19000 19200 19600 19500;
venta_maxima=20 24 20 24;
venta_minima=12 14 10 12;
costo_transporte=500 580 600
                    520 560 600
                 520 560 560;
capacidad_transporte=8 5 8 5
                     9 6 8 9
                     5 10 8 7;
enddata

max=@sum(cliente(k):precio(k)*@sum(cdist(j):y(j,k)))-
   @sum(pc(i,j): costo_transporte(i,j)*w(i,j));
@for(cliente(k):[entrega_max]@sum(cdist(j):Y(j,k))<=venta_maxima(k)*z(k));
@for(cliente(k):[entrega_min]@sum(cdist(j):Y(j,k))>=venta_minima(k)*z(k));
@for(pc(i,j):[relacion_X_W] x(i,j)<=100*W(i,j));
@for(planta(i):[cap_planta]@sum(cdist(j):x(i,j))<=capacidad(i));
@for(cdist(j):[cap_cdist]@sum(planta(i):x(i,j))<=capacidad_centro(j));
@for(cc(j,k):[capacidad_transp]Y(j,k)<=capacidad_transporte(j,k));
@for(cdist(j):[balance] @sum(planta(i):x(i,j))=@sum(cliente(k):y(j,k)));
@for(cliente(k):@bin(z(k)));
@for(pc(i,j):@bin(w(i,j)));
@for(pc(i,j):@gin(x(i,j)));
@for(cc(j,k):@gin(y(j,k)));
```

Un extracto de lo más importante del reporte de solución

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              1145480.
    Model Class:                                    PILP

                              Variable           Value        Reduced Cost
                                Z(1)        0.000000            0.000000
                                Z(2)        1.000000            0.000000
                                Z(3)        1.000000            0.000000
                                Z(4)        1.000000            0.000000

                              X(1,1)        17.00000            0.000000
                              X(1,2)        0.000000            0.000000
                              X(1,3)        0.000000            0.000000
                              X(2,1)        0.000000            0.000000
                              X(2,2)        20.00000            0.000000
                              X(2,3)        0.000000            0.000000
                              X(3,1)        0.000000            0.000000
                              X(3,2)        0.000000            0.000000
                              X(3,3)        22.00000            0.000000

                              W(1,1)        1.000000            500.0000
                              W(1,2)        0.000000            580.0000
                              W(1,3)        0.000000            600.0000
                              W(2,1)        0.000000            520.0000
                              W(2,2)        1.000000            560.0000
                              W(2,3)        0.000000            600.0000
                              W(3,1)        0.000000            520.0000
                              W(3,2)        0.000000            560.0000
                              W(3,3)        1.000000            560.0000

                              Y(1,1)        0.000000           -19000.00
                              Y(1,2)        4.000000           -19200.00
                              Y(1,3)        8.000000           -19600.00
                              Y(1,4)        5.000000           -19500.00
                              Y(2,1)        0.000000           -19000.00
                              Y(2,2)        4.000000           -19200.00
                              Y(2,3)        7.000000           -19600.00
                              Y(2,4)        9.000000           -19500.00
                              Y(3,1)        0.000000           -19000.00
                              Y(3,2)        10.00000           -19200.00
                              Y(3,3)        5.000000           -19600.00
                              Y(3,4)        7.000000           -19500.00

                                 Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                   1        1145480.            1.000000
                      ENTREGA_MAX( 1)        0.000000            0.000000
                      ENTREGA_MAX( 2)        6.000000            0.000000
                      ENTREGA_MAX( 3)        0.000000            0.000000
                      ENTREGA_MAX( 4)        3.000000            0.000000
                      ENTREGA_MIN( 1)        0.000000            0.000000
                      ENTREGA_MIN( 2)        4.000000            0.000000
                      ENTREGA_MIN( 3)        10.00000            0.000000
                      ENTREGA_MIN( 4)        9.000000            0.000000
                  RELACION_X_W( 1, 1)        83.00000            0.000000
                  RELACION_X_W( 1, 2)        0.000000            0.000000
                  RELACION_X_W( 1, 3)        0.000000            0.000000
                  RELACION_X_W( 2, 1)        0.000000            0.000000
                  RELACION_X_W( 2, 2)        80.00000            0.000000
                  RELACION_X_W( 2, 3)        0.000000            0.000000
                  RELACION_X_W( 3, 1)        0.000000            0.000000
                  RELACION_X_W( 3, 2)        0.000000            0.000000
                  RELACION_X_W( 3, 3)        78.00000            0.000000
                       CAP_PLANTA( 1)        11.00000            0.000000
                       CAP_PLANTA( 2)        10.00000            0.000000
                       CAP_PLANTA( 3)        3.000000            0.000000
                        CAP_CDIST( 1)        0.000000            0.000000
                        CAP_CDIST( 2)        0.000000            0.000000
                        CAP_CDIST( 3)        0.000000            0.000000
             CAPACIDAD_TRANSP( 1, 1)        8.000000            0.000000
             CAPACIDAD_TRANSP( 1, 2)        1.000000            0.000000
             CAPACIDAD_TRANSP( 1, 3)        0.000000            0.000000
             CAPACIDAD_TRANSP( 1, 4)        0.000000            0.000000
             CAPACIDAD_TRANSP( 2, 1)        9.000000            0.000000
             CAPACIDAD_TRANSP( 2, 2)        2.000000            0.000000
             CAPACIDAD_TRANSP( 2, 3)        1.000000            0.000000
```

Informe administrativo de la solución

Cantidades por enviar de plantas a centros de distribución (parihuelas)

	Centro de distribución 1	Centro de distribución 2	Centro de distribución 3
Planta 1	17	0	0
Planta 2	0	20	0
Planta 3	0	0	22

Cantidades por enviar de centros de distribución a clientes (parihuelas)

	Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3	Cliente 4
Centro de distribución 1	0	4	8	5
Centro de distribución 2	0	4	7	9
Centro de distribución 3	0	10	5	7

El valor de las variables W_{ij} está relacionado con el valor de las variables X_{ij}, así puede observarse que solo las variables W_{11}, W_{22} y W_{33} tienen valor 1, pues la solución indica el envío de parihuelas desde las planta 1 al centro de distribución 1; desde la planta 2 al centro de distribución 2; y desde la planta 3 al centro de distribución 3.

El valor de las variables Z_k está relacionado con el total de lo enviado a cada cliente. Como puede apreciarse, solo Z_1 tiene valor cero, pues el cliente 1, en total, no recibe ninguna parihuela.

- **Modelos con tiempos de *set up* (preparación)**

  El caso típico es aquel en el que se tiene la posibilidad de producir diversos productos en una máquina proceso o línea de producción. Dicha máquina, proceso o línea de producción tiene un tiempo disponible, pero la decisión de producir cada producto implica la necesidad de una preparación de la máquina, el proceso o la línea. El tiempo de preparación disminuye el tiempo disponible para la producción misma.

  Es un caso que se observa con frecuencia en líneas o procesos de producción multiproducto, en los que, por ejemplo, para empezar a producir cada uno de los productos es necesario la carga de un material nuevo, o el cambio de moldes o la recalibración de los equipos, situaciones frecuentes en los entornos de producción.

Ejemplo

Una cierta empresa tiene una sola línea de producción en la cual tiene que producir los tres productos (A, B y C) que mantiene en el mercado. Las demandas diarias que tiene que satisfacer para la siguiente semana, los ritmos de producción, los inventarios iniciales y los costos diarios de inventario por unidad de cada producto son los siguientes:

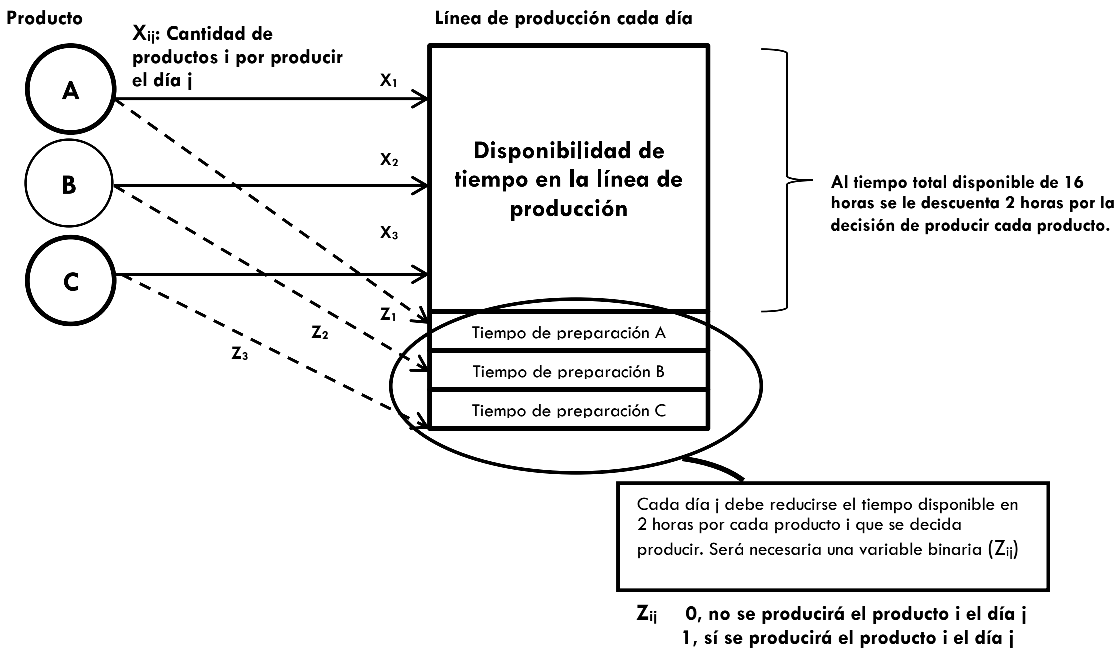
Producto	Demanda (unidades/día)						Ritmo (unid./hora)	Inventario inicial (unid.)	Costo inventario
	Día 1	Día 2	Día 3	Día 4	Día 5	Día 6			
A	45	30	35	25	30	35	10	60	3
B	15	10	15	20	15	15	15	0	2
C	20	25	30	25	25	30	20	10	2

La línea de producción tiene una capacidad diaria de 16 horas, pero por cada tipo de producto que se decida fabricar en el día se consume 2 horas, debido a la preparación correspondiente. El costo de cada preparación es $ 150.

Se quiere programar la producción de la línea para los seis días de la semana siguiente de manera que se cumpla con toda la demanda y se minimice la suma total de los costos de inventario y de preparación. Defina las variables de decisión y formule el modelo de programación lineal correspondiente en forma compacta.

Un esquema para el problema:

Cada día se observa lo siguiente:



Solución

Índices

i : producto(1,...,3)

j: día (1,...,6)

Variables de decisión

X_{ij}: cantidad de productos fabricados en la planta i enviados al centro de distribución j.

Para la condición de que por cada producto que se decida producir cada día debe emplearse 2 horas del tiempo disponible de producción para la preparación de la línea y asumir el costo "fijo" de preparación de la línea de $ 150, se necesita una familia de variables binarias:

$$Z_{ij}: \begin{cases} 0, \text{ no se produce el producto i el día j.} \\ 1, \text{ sí se produce el producto i el día j.} \end{cases}$$

Función objetivo: costos totales (costo total de preparación + costos totales de mantenimiento de existencias)

Minimizar

$$Z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{6} Z_{ij} * 150 + Inv_{ij} * \ costo\_inv_i$$

Restricciones

Relación entre X_{ij} y Z_{ij}

Cada variable de la familia Z_{ij} depende de la variable X_{ij} respectiva, pues si X_{ij} tiene valor diferente de cero es que se ha decidido producir el producto i el día j y ello implica que la línea debe prepararse y pagarse el costo fijo de preparación. La familia de restricciones que modela esta relación es la siguiente:

$$X_{ij} \leq M * Z_{ij} \quad \forall i = 1,\ldots,3, \quad \forall J = 1,\ldots,6$$

En este caso, el valor de M corresponde a un número suficientemente grande, puede emplearse cualquier número más grande que cualquier valor que pudiera tomar cada X_{ij}:

$$\mathrm{X_{ij}} \leq 1000 * Z_{ij}, \quad \forall i = 1,\ldots,3, \quad \forall j = 1,\ldots,6$$

Capacidad de producción diaria disponible para producir:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{X_{ij}}{ritmo_i} \leq 16 - 2 * \sum_{i=1}^{3} Z_{ij} \qquad \forall J = 1,\ldots,6$$

Balance del primer día para cada producto:

$$inv\_inicial_i + X_{i1} = Inv_{i1} + demanda_{i1}, \quad \forall i = 1,\ldots,3$$

Balance del resto de días para cada producto:

$$inv_{i\ j-1} + X_{ij} = inv_{ij} + demanda_{ij}, \quad \forall i = 1,\ldots,3, \quad \forall j = 2,\ldots,6$$

Restricciones para indicar la condición de variables enteras y binarias:

$$X_{ij} \ \ es\ entera, \quad \forall i = 1,\ldots,3, \quad \forall j = 1,\ldots,6$$

$$Z_{ij} \ \ es\ binaria, \quad \forall i = 1,\ldots,3, \quad \forall j = 1,\ldots,6$$

Modelo Lingo

```
sets:
prod/1..3/:inv_inicial,costo_inv, ritmo;
dia/1..6/:;
pd(prod, dia):demanda, inv,X,Z;
endsets

data:
inv_inicial=60 0 10;
costo_inv=3,2,2;
ritmo=10,15,20;
demanda=45 30 35 25 30 35
        15 10 15 20 15 15
        20 25 30 25 25 30;
enddata

min=@sum(pd(i,j):150*Z(i,j)+inv(i,j)*costo_inv(i));

@for(pd(i,j):x(i,j)<=1000*z(i,j));
@for(dia(j):@sum(prod(i):x(i,j)/ritmo(i))<=16-2*@sum(prod(i):Z(i,j)));
@for(prod(i):inv_inicial(i)+x(i,1)=demanda(i,1)+inv(i,1));
@for(pd(i,j)|j#ge#2:inv(i,j-1)+x(i,j)=demanda(i,j)+inv(i,j));
@for(pd(i,j):@gin(x(i,j)));
@for(pd(i,j):@bin(z(i,j)));
```

Un extracto de lo más importante del reporte de solución

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                             1755.000

  Model Class:                                     MILP

                                Variable           Value        Reduced Cost
                              INV(1,1)        15.00000            0.000000
                              INV(1,2)        0.000000            0.000000
                              INV(1,3)        25.00000            0.000000
                              INV(1,4)        0.000000            0.000000
                              INV(1,5)        35.00000            0.000000
                              INV(1,6)        0.000000            0.000000
                              INV(2,1)        25.00000            0.000000
                              INV(2,2)        15.00000            0.000000
                              INV(2,3)        0.000000            0.000000
                              INV(2,4)        30.00000            0.000000
                              INV(2,5)        15.00000            0.000000
                              INV(2,6)        0.000000            0.000000
                              INV(3,1)        25.00000            0.000000
                              INV(3,2)        0.000000            0.000000
                              INV(3,3)        25.00000            0.000000
                              INV(3,4)        0.000000            0.000000
                              INV(3,5)        30.00000            0.000000
                              INV(3,6)        0.000000            0.000000
                                X(1,1)        0.000000            18.00000
                                X(1,2)        15.00000            15.00000
                                X(1,3)        60.00000            12.00000
                                X(1,4)        0.000000            9.000000
                                X(1,5)        65.00000            6.000000
                                X(1,6)        0.000000            3.000000
                                X(2,1)        40.00000            12.00000
                                X(2,2)        0.000000            10.00000
                                X(2,3)        0.000000            8.000000
                                X(2,4)        50.00000            6.000000
                                X(2,5)        0.000000            4.000000
                                X(2,6)        0.000000            2.000000
                                X(3,1)        35.00000            12.00000
                                X(3,2)        0.000000            10.00000
                                X(3,3)        55.00000            8.000000
                                X(3,4)        0.000000            6.000000
                                X(3,5)        55.00000            4.000000
                                X(3,6)        0.000000            2.000000
```

```
                        Z(1,1)        0.000000           150.0000
                        Z(1,2)        1.000000           150.0000
                        Z(1,3)        1.000000           150.0000
                        Z(1,4)        0.000000           150.0000
                        Z(1,5)        1.000000           150.0000
                        Z(1,6)        0.000000           150.0000
                        Z(2,1)        1.000000           150.0000
                        Z(2,2)        0.000000           150.0000
                        Z(2,3)        0.000000           150.0000
                        Z(2,4)        1.000000           150.0000
                        Z(2,5)        0.000000           150.0000
                        Z(2,6)        0.000000           150.0000
                        Z(3,1)        1.000000           150.0000
                        Z(3,2)        0.000000           150.0000
                        Z(3,3)        1.000000           150.0000
                        Z(3,4)        0.000000           150.0000
                        Z(3,5)        1.000000           150.0000
                        Z(3,6)        0.000000           150.0000

                           Row    Slack or Surplus       Dual Price
                             1        1755.000          -1.000000
                 RELACION(1,1)        0.000000           0.000000
                 RELACION(1,2)        985.0000           0.000000
                 RELACION(1,3)        940.0000           0.000000
                 RELACION(1,4)        0.000000           0.000000
                 RELACION(1,5)        935.0000           0.000000
                 RELACION(1,6)        0.000000           0.000000
                 RELACION(2,1)        960.0000           0.000000
                 RELACION(2,2)        0.000000           0.000000
                 RELACION(2,3)        0.000000           0.000000
                 RELACION(2,4)        950.0000           0.000000
                 RELACION(2,5)        0.000000           0.000000
                 RELACION(2,6)        0.000000           0.000000
                 RELACION(3,1)        965.0000           0.000000
                 RELACION(3,2)        0.000000           0.000000
                 RELACION(3,3)        945.0000           0.000000
                 RELACION(3,4)        0.000000           0.000000
                 RELACION(3,5)        945.0000           0.000000
                 RELACION(3,6)        0.000000           0.000000
                  CAPACIDAD(1)        7.583333           0.000000
                  CAPACIDAD(2)        12.50000           0.000000
                  CAPACIDAD(3)        3.250000           0.000000
                  CAPACIDAD(4)        10.66667           0.000000
                  CAPACIDAD(5)        2.750000           0.000000
                  CAPACIDAD(6)        16.00000           0.000000
                   BALANCE1(1)        0.000000           18.00000
                   BALANCE1(2)        0.000000           12.00000
                   BALANCE1(3)        0.000000           12.00000
      BALANCE_SIGUIENTES(1,2)        0.000000           15.00000
      BALANCE_SIGUIENTES(1,3)        0.000000           12.00000
      BALANCE_SIGUIENTES(1,4)        0.000000           9.000000
      BALANCE_SIGUIENTES(1,5)        0.000000           6.000000
      BALANCE_SIGUIENTES(1,6)        0.000000           3.000000
      BALANCE_SIGUIENTES(2,2)        0.000000           10.00000
      BALANCE_SIGUIENTES(2,3)        0.000000           8.000000
      BALANCE_SIGUIENTES(2,4)        0.000000           6.000000
      BALANCE_SIGUIENTES(2,5)        0.000000           4.000000
      BALANCE_SIGUIENTES(2,6)        0.000000           2.000000
      BALANCE_SIGUIENTES(3,2)        0.000000           10.00000
      BALANCE_SIGUIENTES(3,3)        0.000000           8.000000
      BALANCE_SIGUIENTES(3,4)        0.000000           6.000000
      BALANCE_SIGUIENTES(3,5)        0.000000           4.000000
      BALANCE_SIGUIENTES(3,6)        0.000000           2.000000
```

Informe administrativo de la solución:

Plan de operaciones de la empresa

Producto	Producción (unidades/día)						Inventario (unidades/día)					
	Día 1	**Día 2**	**Día 3**	**Día 4**	**Día 5**	**Día 6**	**Día 1**	**Día 2**	**Día 3**	**Día 4**	**Día 5**	**Día 6**
A	0	15	60	0	65	0	15	0	25	0	35	0
B	40	0	0	50	0	0	25	15	0	30	15	0
C	35	0	55	0	55	0	25	0	25	0	30	0

El costo total óptimo será de $ 1755,00.

Capítulo

9

Programación de metas o multiobjetivo

En este capítulo se tratan los siguientes temas:

- Elementos del modelo de programación de metas o multiobjetivo
- Formulación del modelo de metas o multiobjetivo: ejercicios
- Metas con prioridades

La programación lineal multiobjetivo o de metas es una variante más de la programación lineal, en la que el tomador de decisiones desea que se optimice al mismo tiempo varios objetivos, que se expresan en forma de metas. Estas metas incluso podrían estar contrapuestas; sin embargo, la programación multiobjetivo las combina en una sola función objetivo y encuentra la solución que alcanza de la "mejor" manera todas ellas.

También es posible utilizar esta técnica para identificar la condición o las condiciones que causan una infactibilidad en un modelo de programación lineal.

Se propone al estudiante el uso de algunas preguntas que facilitan el análisis del caso por modelar. Se emplea una representación gráfica en cada ejercicio con la finalidad de apoyar el análisis.

¿Qué debe lograr el estudiante?

- Formular correctamente un modelo de programación de metas, resolverlo haciendo uso del lenguaje Lingo.
- Interpretar el reporte de solución del Lingo y analizar el cumplimiento de las metas.

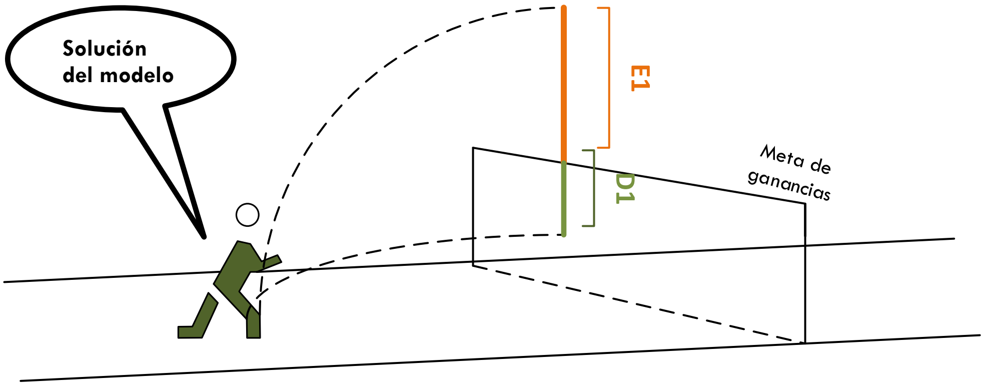
En todos los modelos de programación lineal que se han visto hasta este momento, solo se ha perseguido un único objetivo, que se ha modelado como la función objetivo. Sin embargo, es posible que un tomador de decisiones tenga en mente la necesidad de optimizar más de una medida de resultados a la vez, con lo que podría plantarse más de un objetivo por optimizar. En algunos casos, es posible que los múltiples objetivos que el decisor desee optimizar puedan ser incluso contrapuestos entre sí; por ejemplo, suponga el caso en el que un decisor deseara maximizar las ganancias que se generan por la venta de los productos que fabrica y, al mismo tiempo, minimizar las emisiones contaminantes que se generan en sus procesos de producción. Es lógico pensar que para maximizar sus ganancias debería producir al máximo, según se lo permitan los recursos disponibles y su mercado, pero si desea minimizar la emisión de contaminantes generados por su proceso de producción, sería lógico pensar que debería evitar producir o invertir en los controles ambientales máximos, con lo que sus ganancias se reducirían. Entonces, ambos objetivos resultan contrapuestos.

Según se ha observado desde el método gráfico, la función con la que se busca la solución óptima entre todas las soluciones factibles debe ser única; sin embargo, para la programación multiobjetivo o de metas es posible encontrar una solución que cumpla de la mejor manera varios objetivos a la vez.

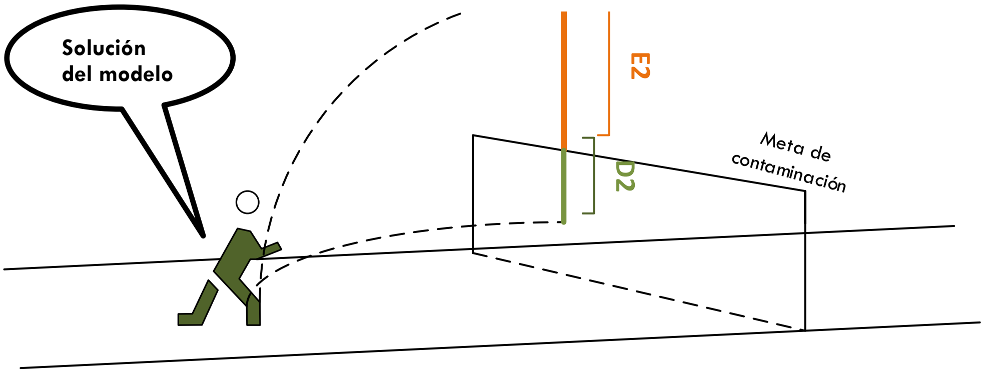
¿Cómo? Propone que el decisor establezca valores a los que aspira o desea llegar para cada uno de sus objetivos, valores con los que se consideraría satisfecho respecto de cada objetivo. Estos valores convierten a cada objetivo en valores metas que se buscan alcanzar **al mismo tiempo**, de allí el nombre de la técnica.

La programación multiobjetivo concilia la necesidad de optimizar varios objetivos y mantener solo una función para la búsqueda del valor óptimo. **¿Cómo?** Para el ejemplo:

Tal como se observa en el gráfico, la solución del modelo de programación de metas podría alcanzar la meta de ganancias establecida por el decisor o excederla (E1) o no alcanzarla y quedar por debajo **(D1). Para la meta de ganancias lo ideal es no quedar por debajo del valor meta establecido, es decir D1 es indeseable.**



Por otro lado, tal como se observa en el gráfico, la solución del modelo de programación de metas podría alcanzar la meta de contaminación establecida por el decisor o excederla **(E2)** o no alcanzarla y quedar por debajo **(D2). Para la meta de contaminación lo ideal es no quedar por encima del valor meta establecido, es decir E2 es indeseable.**



De esta forma, la única función objetivo que puede incluir los dos objetivos para optimizarlos al mismo tiempo es la siguiente:

Minimizar

$$Z = D1 + E2$$

Por supuesto, el modelo deberá incluir, **además de las restricciones propias de la situación de la empresa**, las siguientes condiciones:

Las ganancias de la empresa + D1 – E1 = meta de ganancias

La contaminación emitida por la empresa + D2 – E2 = meta de contaminación

Las que se llamarán **condiciones** o **restricciones de meta**.

Tanto las ganancias de la empresa como la contaminación emitida por ella serán funciones de las variables de decisión, como hasta ahora se ha hecho.

Como se ha podido observar, el modelo de metas tiene elementos nuevos que enseguida se definirán.

9.1 Elementos del modelo de programación de metas o multiobjetivo

Variables:

En estos modelos, además de las variables de decisión, tal como se han venido definiendo en los modelos de programación lineal formulados, será necesario incluir **variables de desviación**:

Las variables de desviación son las que en las figuras metas 1 y 2 se han denominado D1, E1, D2, E2 y que son empleadas para representar la posibilidad de que no se alcance los valores meta establecidos para cada objetivo:

D1, D2,…… DN representan la posibilidad de no alcanzar exactamente la meta establecida, obteniéndose un valor menor (defecto).

E1 , E2 ………EN representan la posibilidad de no alcanzar exactamente la meta establecida, obteniéndose un valor mayor (exceso).

Restricciones:

En estos modelos, además de las restricciones que modelan las diferentes condiciones del problema, a las que se llamará restricciones duras, se formulan "restricciones de meta", llamadas también restricciones blandas:

Son blandas justamente porque representan el deseo de alcanzar los valores meta establecidos para cada objetivo, lo que puede lograrse o no:

Objetivo 1 + D1 – E1 = valor meta para objetivo 1

Objetivo 2 + D2 – E2 = valor meta para objetivo 2

.

.

.

.

Objetivo N + DN – EN = valor meta para objetivo N

Las restricciones de meta son siempre ecuaciones, precisamente por la inclusión de las variables de desviación.

Existen restricciones de meta que incluyen solo una de las variables de desviación debido a que puede resultar imposible que la solución razonablemente alcance un valor ya sea por encima de la meta o por debajo de ella. Por ejemplo:

Suponiendo que en cuanto al objetivo relacionado con la contaminación el valor meta es cero, la restricción de meta respectiva tendría la siguiente forma:

La contaminación emitida por la empresa + ~~D2~~ - E2 = 0

Resulta obvio que la variable de desviación D2 no debería existir, ya que la solución óptima nunca podría generar valores por debajo de cero; es decir, negativos de emisiones contaminantes, no existen emisiones “negativas” (por debajo de cero).

De esta forma, esta restricción de meta debería tener solo una variable de desviación asociada y en ese caso se trata de una meta unilateral.

Función objetivo:

Será siempre de minimización, ya que solo contiene las variables desviación que resulten INDESEABLES para el decisor.

Como en el ejemplo inicial,

Minimizar

$$Z = D1 + E2$$

En esta función objetivo, el valor que pudiera tomar D1 estaría expresado en $, pues representa la ganancia que no se hubiera obtenido; y, por otro lado, E2 representa las emisiones contaminantes con las que se hubiera excedido el valor meta establecido y es posible que su valor se exprese en kilogramos.

¿No resulta incorrecto sumar dólares con kilogramos? Efectivamente, por ello se emplean factores de equivalencia para expresar la función objetivo en una única unidad equivalente. Por ejemplo, podría indicarse a cuántos dólares equivale cada kilo de contaminación o a cuántos kilos de contaminantes equivale cada dólar de ganancia.

9.2 Formulación del modelo de metas o multiobjetivo: ejercicios

Teniendo en cuenta las particularidades de la programación de metas, mediante los siguientes ejemplos se propone una metodología para formular estos modelos:

Ejemplo 1

Un país en desarrollo tiene 15 millones de hectáreas de tierra agrícola en uso activo controladas por el gobierno. Se está planeando la forma de dividir esta tierra en cinco cosechas básicas (1, 2, 3, 4 y 5) para el próximo año. Una hectárea asignada a cualquiera de estas cosechas puede ser dedicada a exportación para obtener capital extranjero (divisas) o puede comercializarse internamente para alimentar a la población del propio país. El cultivo de estas cosechas proporciona empleo a una porción de la población ya sea que se dedique a la exportación o a la comercialización interna.

Los principales factores que se deben tener en cuenta son los siguientes:

Factor	Aporte por cada millón de hectáreas de cada cosecha				
	Cosecha 1	**Cosecha 2**	**Cosecha 3**	**Cosecha 4**	**Cosecha 5**
Capital extranjero obtenido (millones de dólares)	3	5	4	2	4
Ciudadanos alimentados (personas)	150 000	75 000	100 000	100 000	200 000
Ciudadanos empleados (personas)	10 000	15 000	12 000	13 000	15 000

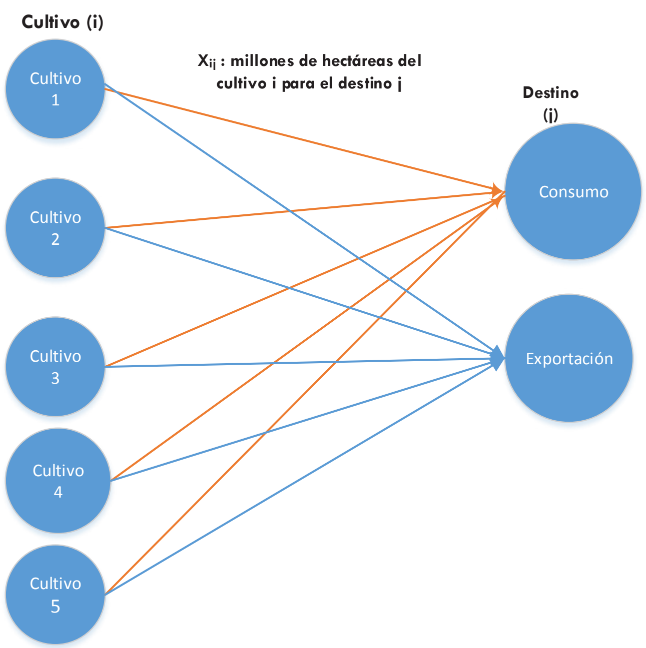
Se tiene máximos de hectáreas que pueden ser sembradas con cada una de las cinco cosechas. Estas son: 6, 4, 5, 6 y 5 millones de hectáreas, respectivamente, para cada cosecha. Por otro lado, el gobierno ha establecido las siguientes metas:

- **Meta 1:** Generar al menos 70 millones de dólares de capital extranjero con el uso de estas tierras agrícolas.
- **Meta 2:** Alimentar por lo menos a 1 750 000 ciudadanos.
- **Meta 3:** Emplear por lo menos a 200 000 ciudadanos.

Al evaluar estas metas, el gobierno ha concluido que políticamente $ 100 de capital extranjero equivalen a un ciudadano alimentado, y este, a su vez, equivale a un ciudadano empleado. Formular el modelo de programación de metas correspondiente, indicando además el significado de sus variables de decisión; resolver el modelo utilizando el lenguaje Lingo y completar el informe administrativo de la solución.

¿Por qué es un problema de programación multiobjetivo o de metas? El gobierno se propuso maximizar el capital extranjero que se puede obtener de la exportación de los cultivos, maximizar la población alimentada con los cultivos y maximizar el número de personas empleadas en los trabajos que generen las actividades relacionadas con los cultivos. Sin embargo, se da cuenta de que, al tratar de maximizar el capital extranjero, es probable que no alimente a nadie internamente; es decir, sus dos primeros objetivos son contradictorios. Por ese motivo, ha señalado un valor: 70 millones de dólares con los que se consideraría satisfecho respecto del primer objetivo, este es el valor meta para ese objetivo; y un valor de 1 750 000 ciudadanos alimentados, con lo cual quedaría satisfecho respecto del segundo objetivo, ese es el valor meta para el segundo objetivo. El tercer objetivo no es contradictorio con ninguno de los otros dos pero también se ha establecido para ese objetivo el valor meta de 200 000 ciudadanos empleados. De esta forma, el gobierno ha señalado sus tres metas.

Un esquema para el problema



Solución

Índices

i : *cultivos (1,…,5)*

j : *destinos (1,2)*

Variables de decisión

X_{ij} : millones de hectáreas del cultivo i para el destino j

En este caso se formularán primero las restricciones de meta:

Meta 1: Generar al menos 70 millones de dólares de capital extranjero con el uso de estas tierras agrícolas.

Para formular correctamente cada restricción de meta lo recomendable es hacerse la siguiente secuencia de preguntas:

¿De qué trata la meta? Del capital extranjero.

¿Cómo se expresa el capital extranjero en función de las variables de decisión?

$$\sum_{i=1}^{5} X_{i1} * capital_i$$

¿Cuál es el valor meta establecido? 70 millones de dólares.

¿Existe alguna condición en el texto que implique que sería imposible que el capital extranjero que se podría obtener pudiera ser menor o mayor al valor meta?

Si la respuesta es no, entonces la meta presenta las dos posibles desviaciones.

Si la respuesta es sí, podría tratarse de una meta unilateral.

En este caso, la respuesta es no, no hay ninguna condición en la descripción del problema que haga pensar en que no existe la posibilidad de sobrepasar (E1) o quedar por debajo del valor meta señalado (D1), por lo tanto, la restricción de meta sería:

$$\sum_{i=1}^{5} (X_{i1} * capital_i) + D1 - E1 = 70\ millones$$

Nótese que las variables de desviación no llevan índice, pues no dependen ni de los cultivos ni de los destinos que son los índices de este modelo. Se les coloca un número para asociarlos con la meta respectiva.

¿Qué variable de desviación representa lo indeseable? Leyendo nuevamente la meta: "Generar al menos 70 millones de…" se entiende que es indeseable un valor inferior por lo tanto **D1 es la deviación indeseable que deberá colocarse en la función objetivo.**

Meta 2: Alimentar por lo menos a 1 750 000 ciudadanos

¿De qué trata la meta? De la cantidad de ciudadanos alimentados.

¿Cómo se expresa la cantidad de ciudadanos alimentados en función de las variables de decisión?

$$\sum_{i=1}^{5} X_{i2} * \ ciudadanos\_alim_i$$

¿Cuál es el valor meta establecido? 1 750 000.

¿Existe alguna condición en el texto que implique que sería imposible que la cantidad de ciudadanos alimentados que se podría obtener pudiera ser menor o mayor al valor meta?

Si la respuesta es **no**, entonces la meta presenta las dos posibles desviaciones.

Si la respuesta es **sí**, podría tratarse de una meta **unilateral**.

En este caso, la respuesta es no, no hay ninguna condición en la descripción del problema que haga pensar en que no existe la posibilidad de sobrepasar (E2) o quedar por debajo del valor meta señalado (D2), por lo tanto la

$$\sum_{i=1}^{5}(X_{i2} * ciudadanos\_alim_i) + D2 - \ E2 = 1\,750\,000\, personas$$

restricción de meta sería:

¿Qué variable de desviación representa lo indeseable? Leyendo nuevamente la meta: "Alimentar por lo menos a ..." se entiende que es indeseable un valor inferior, por lo tanto **D2 es la deviación indeseable que deberá colocarse en la función objetivo.**

Meta 3: Emplear por lo menos a 200 000 ciudadanos.

¿De qué trata la meta? De la cantidad de ciudadanos empleados.

¿Cómo se expresa la cantidad de ciudadanos empleados en función de las variables de decisión?

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{2} X_{ij} * \ ciudadanos\_empleados_i$$

¿Cuál es el valor meta establecido? 200 000.

¿Existe alguna condición en el texto que implique que sería imposible que la cantidad de ciudadanos empleados que se podría obtener pudiera ser menor o mayor al valor meta?

Si la respuesta es **no**, entonces la meta presenta las dos posibles desviaciones.

Si la respuesta es **sí**, podría tratarse de una meta **unilateral**.

En este caso la respuesta es no, no hay ninguna condición en la descripción del problema que haga pensar en que no existe la posibilidad de sobrepasar

(E3) o quedar por debajo del valor meta señalado (D3), por lo tanto la restricción de meta sería:

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{2}(X_{ij} * \ ciudadanos\_empleados_i) + \mathrm{D3} - \mathrm{E3} = 200\ 000$$

¿Qué variable de desviación representa lo indeseable? Leyendo nuevamente la meta: "Emplear por lo menos a" se entiende que es indeseable un valor inferior, por lo tanto **D3 es la desviación indeseable que deberá colocarse en la función objetivo.**

Función objetivo: siempre minimiza las variables de desviación indeseables.

Minimizar

$$Z = \mathrm{D1} + \mathrm{D2} + \mathrm{D3}$$

Si se analizan las unidades en que se expresan cada una de las variables de desviación de la función objetivo, se observa que no son homogéneas, es decir, algunas están expresadas en dinero extranjero, otras en ciudadanos alimentados y otras en empleos. Por ello el caso, en párrafo final señala los factores de **equivalencia**: "Políticamente, $ 100 de capital extranjero equivalen a un ciudadano alimentado y este, a su vez, equivale a un ciudadano empleado". Utilizando estos datos, la función objetivo podría quedar expresada en unidades equivalentes de capital extranjero (en **millones de dólares**):

Minimizar

$$Z = \mathrm{D1} + 100\mathrm{D2}/1000000 + 100\mathrm{D3}/1000000$$

Los factores de equivalencia señalan justamente la relación equivalente entre las unidades de las diferentes variables que aparecen en la función objetivo.

Restricciones duras o del sistema

Total de millones de hectáreas disponibles:

$$\sum_{1=1}^{5}\sum_{j=1}^{2}X_{ij} \leq 15$$

Máxima cantidad de millones de hectáreas que se deben dedicar a cada cultivo:

$$\sum_{j=1}^{2}X_{ij} \ \leq área\_máxima_i, \quad \forall i = 1,\ldots,5$$

Condiciones de no negatividad:

$$X_{ij} \geq 0, \quad \forall i = 1,\ldots,5, \qquad \forall j = 1,2$$

Modelo Lingo

```
sets:
cultivo/1..5/:capital, ciudadanos_alim, ciudadanos_empleados,area_maxima;
destino/1..2/:;
cd(cultivo,destino): X;
endsets

data:
capital=3 5 4 2 4;
ciudadanos_alim=150000 75000 100000 100000 200000;
ciudadanos_empleados=10000 15000 12000 13000 15000;
area_maxima=6,4,5,6,5;
enddata

min=D1+100*D2/1000000+100*D3/1000000;

!restricciones de meta o blandas;
@sum(cultivo(i):capital(i)*x(i,2))+D1-E1=70;

@sum(cultivo(i):ciudadanos_alim(i)*x(i,1))+D2-E2=1750000;

@sum(cd(i,j):ciudadanos_empleados(i)*x(i,j))+D3-E3=200000;

!restricciones duras o de sistema;
@for(cultivo(i):@sum(destino(j):x(i,j))<=area_maxima(i));

@sum(cd(i,j):x(i,j))<=15;
```

Un extracto de lo más importante del reporte de solución

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              46.30000

                                Variable           Value        Reduced Cost
                                      D1        46.00000            0.000000
                                      D2        0.000000        0.7200000E-04
                                      D3        3000.000            0.000000
                                      E1        0.000000            1.000000
                                      E2        0.000000        0.2800000E-04
                                      E3        0.000000        0.1000000E-03

                                X( 1, 1)        5.000000            0.000000
                                X( 1, 2)        0.000000            1.200000
                                X( 2, 1)        0.000000            2.900000
                                X( 2, 2)        4.000000            0.000000
                                X( 3, 1)        0.000000            1.200000
                                X( 3, 2)        1.000000            0.000000
                                X( 4, 1)        0.000000            1.100000
                                X( 4, 2)        0.000000            1.900000
                                X( 5, 1)        5.000000            0.000000
                                X( 5, 2)        0.000000            1.600000

                                     Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                       1        46.30000           -1.000000
                                       2        0.000000           -1.000000
                                       3        0.000000       -0.2800000E-04
                                       4        0.000000       -0.1000000E-03
                                       5        1.000000            0.000000
                                       6        0.000000            1.300000
                                       7        4.000000            0.000000
                                       8        6.000000            0.000000
                                       9        0.000000            1.900000
                                      10        0.000000            5.200000
```

Análisis del reporte:

Este modelo tiene tanto variables de decisión como de desviación. Las variables de decisión resuelven el problema de la distribución de las tierras y las variables de desviación indican si se logró cada meta.

Dado que la función objetivo contiene únicamente variables de desviación, si el reporte indicara que en la solución óptima la función objetivo tiene valor cero, podría afirmarse de inmediato que todas las metas se alcanzaron; sin embargo, en el reporte de solución de este caso, se observa que la función objetivo tiene un valor diferente de cero. Entonces, algunas metas no se alcanzaron, o tal vez ninguna.

El informe administrativo de la solución debe tener dos partes, una sobre las metas y otra sobre las variables de decisión.

Informe administrativo de la solución

Sobre las metas:

Debe observarse el valor de las variables de desviación, en especial las que forman parte de la función objetivo, y así se completará el informe de cumplimiento de metas.

Meta	¿Se cumple? (Sí / No)	Valor de las variables de desviación	Interpretación
1	No	D1 = 46 E1 = 0	El capital extranjero por obtener solo llegará a 34 millones de dólares.
2	Sí	D2 = 0 E2 = 0	Se alimentará exactamente a 1 750 000 ciudadanos.
3	No	D3 = 3000 E3 = 0	Se dará empleo solo a 197 000 ciudadanos.

Sobre las variables de decisión:

Plan óptimo de distribución de cultivos
(millones de hectáreas de cada cultivo para cada destino)

	Destino	
Cultivo	**Consumo interno**	**Exportación**
1	5	0
2	0	4
3	0	1
4	0	0
5	5	0

Ejemplo 2

Un taller de reparación de artefactos eléctricos tiene tres técnicos y debe reparar 45 artefactos que tiene pendientes de entrega por una mala organización del trabajo. Los artefactos debe entregarlos reparados, y son los siguientes:

Artefactos	Cantidad
Lavadoras	20
Refrigeradoras	15
Cocinas	10

Cada uno de los técnicos está capacitado para reparar cualquiera de los artefactos, pero demora un tiempo diferente según sus habilidades y conocimientos:

Tiempo de reparación (horas/artefacto)

Artefactos	Técnico 1	Técnico 2	Técnico 3
Lavadoras	5	4	7
Refrigeradoras	6	7	8
Cocinas	4	4	3

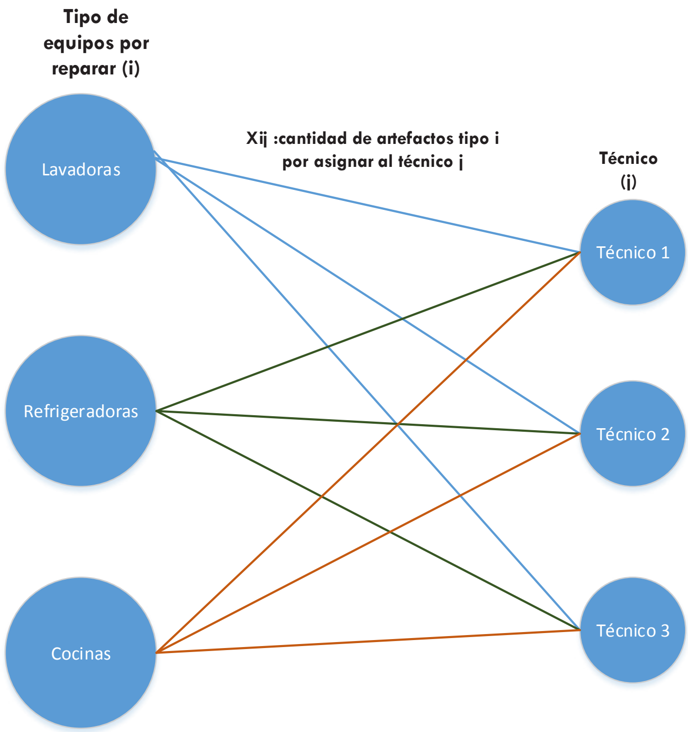
Cada unidad de cualquier artefacto es reparado por un solo técnico. El administrador del taller se ha propuesto las siguientes metas:

- **Meta 1:** Utilizar el menor número de horas posible en total.
- **Meta 2:** Lograr que el técnico 1 repare un número similar de cada tipo de artefacto.
- **Meta 3:** El número de horas trabajadas en total por el técnico 2 no exceda el total de horas trabajadas por el técnico 3 en más de 50.

Formular el modelo de programación de metas que permita al administrador del taller cumplir con el trabajo y las metas trazadas, sabiendo que reparar o no un artefacto equivale a 6 horas; resolver con Lingo y presentar el informe administrativo de la solución.

Se trata de asignar los artefactos pendientes de reparar a cada técnico. Como el caso indica que cada aparato debe ser reparado por un solo técnico, la cantidad de equipos por asignar a cada técnico debe ser entera.

Un esquema para el problema



Solución

Índices

i : tipo de artefactos (1,...,3)

j: técnicos (1,2)

Variables de decisión

X_{ij}: cantidad de artefactos de tipo i por asignar al técnico j

En este caso se formularán primero las restricciones de meta:

Meta 1: Utilizar el menor número de horas posible en total.

¿De qué trata la meta? Del número de horas por utilizar en total.

¿Cómo se expresa el número de horas por utilizar en total en función de las variables de decisión?

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} X_{ij} * tiempo_{ij}$$

¿Cuál es el valor meta establecido? En este caso no se señala un valor meta en específico, sin embargo la meta dice el menor posible, y el valor ideal que representa el menor posible es **cero**.

¿Existe alguna condición en el texto que implique que sería imposible que el número de horas por utilizar en total pudiera ser menor o mayor al valor meta?

El texto no lo señala explícitamente, pero si el valor meta es cero, utilizar un número total de horas menor que cero, carece de sentido práctico. Se trata de una meta unilateral, pues no existe D1.

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(X_{ij} * tiempo_{ij}) - \mathrm{E1} = 0$$

¿Qué variable de desviación representa lo indeseable? Léase nuevamente la meta: "utilizar el menor número de horas posible en total". Se entiende que es indeseable un valor superior a cero. Por lo tanto, **E1 es la deviación indeseable que deberá colocarse en la función objetivo.**

Meta 2: Lograr que el técnico 1 repare un número similar de cada tipo de artefacto.

¿De qué trata la meta? Del número de artefactos que reparará el técnico 1.

¿Cómo se expresa el número de artefactos de cada tipo que repara el técnico 1 en función de las variables de decisión?

$$X_{11}$$

$$X_{21}$$

$$X_{31}$$

En este caso, la meta 2 comprende **submetas**, ya que establece que estas variables sean similares entre si y por lo tanto deben relacionarse unas con otras.

¿Cuál es el valor meta establecido? Que sean cantidades similares.

¿Existe alguna condición en el texto que implique que sería imposible que estas cantidades puedan ser diferentes entre sí? El texto no señala ninguna condición que haga pensar que es imposible que el técnico 1 **pueda reparar más o menos lavadoras que refrigeradoras o que cocinas:**

$$X_{11} + \mathrm{D2} - \mathrm{E2} = \mathrm{X}_{21}$$

$$X_{12} + \mathrm{D3} - \mathrm{E3} = \mathrm{X}_{31}$$

$$X_{11} + \mathrm{D4} - \mathrm{E4} = \mathrm{X}_{31}$$

¿Qué variable de desviación representa lo indeseable? Léase nuevamente la meta: "Repare un número similar de cada tipo de artefacto". Se entiende, por ejemplo, que es indeseable que la cantidad de lavadoras reparadas por el técnico 1 sean más o sean menos que las refrigeradoras reparadas por el mismo técnico. Entonces, son **indeseables D2 y E2, pero también D3, E3, D4 y E4.**

Meta 3: El número de horas trabajadas en total por el técnico 2 no debe exceder al total de horas trabajadas por el técnico 3 en más de 50.

¿De qué trata la meta? De la diferencia entre las horas trabajadas por los técnicos 2 y 3.

¿Cómo se expresa la diferencia entre las horas trabajadas por el técnico 2 y el técnico 3, en función de las variables de decisión?

$$\sum_{i=1}^{3} X_{i2} * tiempo_{i2} - \sum_{i=1}^{3} X_{i3} * tiempo_{i3}$$

¿Cuál es el valor meta establecido? Una diferencia de 50 horas.

¿Existe alguna condición en el texto que implique que sería imposible que esta diferencia pudiera ser mayor o menor que 50? El texto no señala ninguna condición que haga pensar que es imposible que esta diferencia pudiera ser menor o mayor:

$$\left(\sum_{i=1}^{3} X_{i2} * tiempo_{i2} - \sum_{i=1}^{3} X_{i3} * tiempo_{i3}\right) + D5 - E5 = 50$$

¿Qué variable de desviación representa lo indeseable? Leyendo nuevamente la meta: "El número de horas trabajadas en total por el técnico 2 no exceda al total de horas trabajadas por el técnico 3 en más de 50", **es indeseable E5.**

Función objetivo: siempre minimiza las variables de desviación indeseables.

Minimizar

Z = E1 + (D2 + D3 + D4 + E2 + E3 + E4) + E5

E1 está expresada en horas,

D2, D3, D4, E1, E2, E3 están expresadas en artefactos,

E5 en horas.

Tomando en cuenta los coeficientes de equivalencia que el caso señala: "Reparar o no un artefacto equivale a 6 horas". La función objetivo podría quedar expresada en unidades equivalentes a horas.

Minimizar

$$Z = \text{E1} + 6(\text{D2} + \text{D3} + \text{D4} + \text{E2} + \text{E3} + \text{E4}) + \text{E5}$$

Restricciones duras o del sistema

Los artefactos de cada tipo deben repararse:

$$\sum_{j=1}^{3} X_{ij} = cantidad\_pendiente_{i}, \quad \forall i = 1, \dots, 3$$

Las cantidades de artefactos por asignar a cada técnico deben ser enteras:

$$X_{ij} \geq 0 \; entera, \quad \forall \text{i} = 1,\dots,3, \qquad \forall \text{j} = 1,\dots,3$$

Modelo Lingo

```
sets:
artefacto/1,...,3/:cantidad_pendie
nte; tecnico/1,...,3/:;
at(artefacto,tecnico):X, tiempo;
endsets

data:
cantidad_pendiente=20,15,10;
tiempo=5 4 7
       6 7 8
       4 4 3;

enddata
min=E1+6*(D2+D3+D4+E2+E3+E4)+E5;
!Restricciones de meta;
@sum(at(i,j):x(i,j)*tiempo(i,j))+D1-E1=0;

X(1,1)+D2-E2=X(2,1);
X(2,1)+D3-E3=X(3,1);
X(1,1)+D4-E4=X(3,1);

@sum(artefacto(i):x(i,2)*tiempo(1,2)) - @sum(artefacto(i):x(i,3)*tiempo(i,3)) +D5-E5=50;

!Restricciones duras o de sistema;
@for(artefacto(i):@sum(tecnico(j):x(i,j))=cantidad_pendiente(i));
@for(at(i,j):@gin(x(i,j)));
```

Un extracto de lo más importante del reporte de solución

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              220.0000

                                Variable           Value        Reduced Cost
                                      E1        220.0000            0.000000
                                      D2        0.000000            12.00000
                                      D3        0.000000            12.00000
                                      D4        0.000000            12.00000
                                      E2        0.000000            0.000000
                                      E3        0.000000            0.000000
                                      E4        0.000000            0.000000
                                      E5        0.000000            0.000000
                                      D1        0.000000            1.000000
                                      D5        0.000000            1.000000

                                  X(1,1)        0.000000            17.00000
                                  X(1,2)        20.00000            8.000000
                                  X(1,3)        0.000000            0.000000
                                  X(2,1)        0.000000            6.000000
                                  X(2,2)        10.00000            11.00000
                                  X(2,3)        5.000000            0.000000
                                  X(3,1)        0.000000           -8.000000
                                  X(3,2)        0.000000            8.000000
                                  X(3,3)        10.00000            0.000000

                                     Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                       1        220.0000           -1.000000
                                       2        0.000000            1.000000
                                       3        0.000000            6.000000
                                       4        0.000000            6.000000
                                       5        0.000000            6.000000
                                       6        0.000000            1.000000
                                       7        0.000000            0.000000
                                       8        0.000000            0.000000
                                       9        0.000000            0.000000
```

Informe administrativo de la solución

Sobre las metas:

Debe observarse el valor de las variables de desviación, en especial las que forman parte de la función objetivo y así se completará el informe de cumplimiento de metas.

Meta	¿Se cumple? (Sí / No)	Valor de las variables de desviación	Interpretación
1	Sí(*)	E1 = 220	El menor número de horas en total por emplear es de 220.
2	Sí	D2 = 0, D3 = 0, D4 = 0 E2 = 0, E3 = 0, E4 = 0	El técnico 1 ha reparado una cantidad idéntica de artefactos de cada tipo. (**)
3	Sí	E5 = 0 D5 = 0	La diferencia entre las horas trabajadas por los técnicos 2 y 3 es exactamente 50.

(*) A esta meta se le colocó como valor ideal cero. Obviamente, alcanzar ese valor no era posible, pues ello implicaría no reparar ningún artefacto; sin embargo, la solución ha minimizado el valor de la desviación E1, encontrando el menor valor posible. Por ello, se ha indicado que la meta se ha cumplido, pese a que no es cero el valor de E1.

(**) Puede observarse que al técnico 1 no se le asigna ningún artefacto.

Sobre las variables de decisión:

Plan óptimo de asignación de trabajos (cantidad de artefactos)

Tipo de artefacto	Técnico 1	Técnico 2	Técnico 3
Lavadora	0	20	0
Refrigeradora	0	10	5
Cocina	0	0	10

Ejemplo 3

QC se dedica a la fabricación de materiales de construcción. La empresa vende tres productos en bolsas de 40 kilos: concreto, tarrajeo y mortero. Los ingredientes para preparar estos productos son: arena fina, arena gruesa, piedra chancada y cemento; y la empresa prepara cada uno de sus productos mezclando los ingredientes según los porcentajes que se señalan en la siguiente tabla:

	Porcentaje en peso (%)			
Producto	**Arena fina**	**Arena gruesa**	**Cemento**	**Piedra chancada**
Concreto	0	50	25	25
Tarrajeo	60	0	40	0
Mortero	0	70	30	0

La empresa tiene una demanda diaria estimada para los productos que se señala en el cuadro siguiente:

Producto	Demanda (bolsas)
Concreto	1000
Tarrajeo	500
Mortero	800

Tanto las arenas como la piedra chancada se extraen de canteras propias. La única restricción es la capacidad del transporte, que es de 100 toneladas tanto para la arena fina, la arena gruesa y la piedra chancada, respectivamente. El cemento se compra a un proveedor a $ 4000 por tonelada.

Todos los productos son embolsados y la capacidad del proceso de embolsado es de 2000 bolsas diarias en total en turno regular, siendo posible que se trabaje horas extras.

La empresa se ha propuesto las siguientes metas:

Meta 1: Producir para atender exactamente la demanda diaria de cada producto por separado.

Meta 2: No exceder el presupuesto diario para compras de cemento que es de $ 100 000.

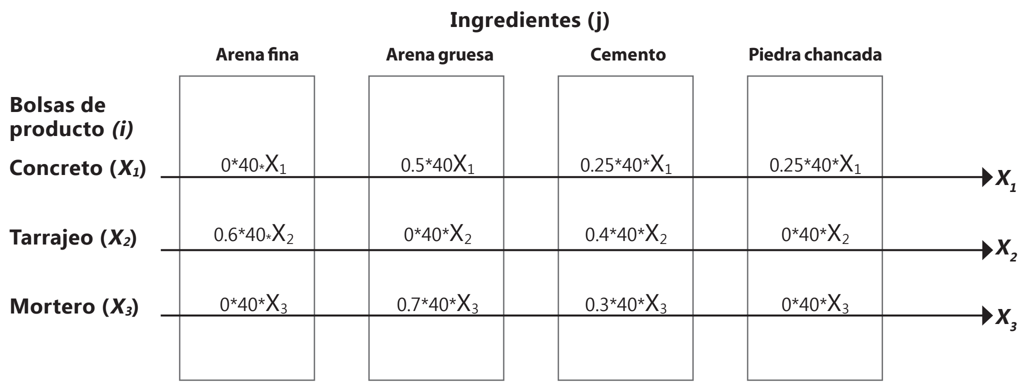
Meta 3: Utilizar exactamente la capacidad en turno regular del proceso de embolsado.

Tenga en cuenta que el incumplimiento de la demanda de cualquier producto equivale a $ 2 por bolsa y que la capacidad ociosa del turno regular o la producción en turno extra en embolsado equivale a $ 10 por bolsa.

Formular el modelo de programación de metas correspondiente, indicando además el significado de sus variables de decisión; se logró resolver el modelo utilizando el lenguaje Lingo y completar el informe administrativo de la solución.

En el caso se señalan los porcentajes exactos en que deben mezclarse los ingredientes para cada producto. Entonces, no se trata de un problema de mezclas sino de producción.

Un esquema para el problema



Solución

Índices

i : productos (1,...,3)

j: ingredientes (1,...,4)

Variables de decisión

X_i : cantidad de bolsas de producto i por fabricar.

Primero las restricciones de meta:

Meta 1: Producir para atender exactamente la demanda diaria de cada producto por separado.

¿De qué trata la meta?: de la producción de **cada producto, por separado.** Por eso se dice que esta meta tiene submetas, una para cada producto.

¿Cómo se expresa la producción de cada producto en función de las variables de decisión?

$$X_1$$

$$X_2$$

$$X_3$$

¿Cuál es el valor meta establecido? Una cantidad igual a la demanda de cada producto, respectivamente.

¿Existe alguna condición en el texto que implique que sería imposible que la producción de cada producto pudiera ser menor o mayor al valor meta? En el texto no hay ninguna condición en ese sentido, entonces existen ambas variables de desviación:

$$X_1 + \mathrm{D1} - \mathrm{E1} = 1000$$

$$X_2 + \mathrm{D2} - \mathrm{E2} = 500$$

$$X_3 + \mathrm{D3} - \mathrm{E3} = 800$$

¿Qué variable de desviación representa lo indeseable? Léase nuevamente la meta: "Producir para atender **exactamente** la demanda". Se entiende que son indeseables tanto E1, E2, E3 como D1, D2 y D3; por lo tanto, las seis variables deben colocarse en la función objetivo.

Meta 2: No exceder el presupuesto diario para compras de cemento de $ 100 000.

¿De qué trata la meta? Del valor de las compras de cemento.

¿Cómo se expresa el valor de las compras de cemento en función de las variables de decisión?

$$\sum_{i=1}^{3}(X_i * \; porcentaje_{i3} * 40 * 4000/1000)$$

En esta restricción cabe un análisis de las unidades:

X_i está expresada en bolsas,al multiplicar por 40 se calcula el número de kilos de producto en total por producir, pero el cemento es un porcentaje de la composición total de los productos, por ello se multiplica: X_i *40*porcentaje$_{i3}$, así se calcula el total de kilos de cemento necesarios para la producción.

Dado que el costo es de $ 4000 por tonelada, se multiplica X_i*40*porcentaje$_{i3}$ *4000/1000 para expresar el valor de las compras totales de cemento en $.

¿Cuál es el valor meta establecido? El presupuesto de $ 100 000.

¿Existe alguna condición en el texto que implique que sería imposible que el valor de las compras pudiera ser menor o mayor que el presupuesto? Si se tiene en cuenta que el valor meta es un **presupuesto**, entonces sí es posible que se gaste menos o más:

$$\sum_{i=1}^{3}(X_i * \; porcentaje_{i3} * 40 * 4000/1000) + D4 - E4 = 100\,000$$

¿Qué variable de desviación representa lo indeseable? Léase nuevamente la meta: "No exceder el presupuesto". **Es indeseable E4**. Por lo tanto, esa variable va a la función objetivo.

Meta 3: Utilizar exactamente la capacidad en turno regular del proceso de embolsado.

¿De qué trata la meta? Del uso de la capacidad de embolsado en turno normal. Dado que todos los productos se venden embolsados, toda la producción debe pasar por el embolsado, utilizando la capacidad de dicho proceso.

¿Cómo se expresa la utilización de la capacidad de embolsado en función de las variables de decisión? (es toda la producción):

$$\sum_{i=1}^{3} X_i$$

¿Cuál es el valor meta establecido? El valor de la capacidad del proceso en turno normal: 2000 bolsas.

¿Existe alguna condición en el texto que implique que sería imposible que se embolse menos de 2000 bolsas o más de 2000 bolsas? Siendo la capacidad del turno normal del proceso 2000 bolsas, se podría interpretar que el proceso no es capaz de embolsar más; sin embargo, el texto del caso señala que es posible embolsar más haciendo uso de capacidad extra; por lo tanto, sí se podría embolsar más de 2000 unidades.

$$\sum_{i=1}^{3}(X_i) + D5 - E5 \ = 2000$$

¿Qué variable de desviación representa lo indeseable? Léase nuevamente la meta: "Utilizar **exactamente** la capacidad en turno regular". Son indeseables tanto D5 como E5, y ambas van a la función objetivo.

Función objetivo: siempre minimiza las variables de desviación indeseables

Minimizar

$$Z = (\mathrm{D1} + \mathrm{D2} + \mathrm{D3} + \mathrm{E1} + \mathrm{E2} + \mathrm{E3}) + \mathrm{E4} + (\mathrm{D5} + \mathrm{E5})$$

E1, E2, E3, D1, D2 y D3 están expresadas en bolsas.
E4 se expresa en dólares.
E5 y D5 en bolsas.

Tomando en cuenta los coeficientes de equivalencia que el caso señala: "El incumplimiento de la demanda de cualquier producto equivale a $ 2 por bolsa y que la capacidad ociosa del turno regular o la producción en turno extra en embolsado equivale a $ 10 por bolsa". La función objetivo podría quedar expresada en unidades equivalentes a dólares:

Minimizar

$$Z = 2 * (\mathrm{D1} + \mathrm{D2} + \mathrm{D3} + \mathrm{E1} + \mathrm{E2} + \mathrm{E3}) + \mathrm{E4} + 10 *(\mathrm{D5} + \mathrm{E5})$$

Restricciones duras o del sistema

La capacidad del transporte para arena fina, gruesa y piedra chancada (se expresará en kilogramos)

$$\sum_{i=1}^{3} X_i * porcentaje_{ij} \leq 100 * 1000, \quad \forall j = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{4}$$

En esta familia no se incluye al cemento, por eso es solo para los ingredientes 1, 2 y 4.

Las cantidades bolsas de cada producto deben ser cantidades enteras:

$$X_i \geq 0 \text{ entera}, \qquad \forall \mathrm{i} = 1,\ldots,3$$

La restricción de presupuesto para compras de cemento es meta, por lo tanto ya no es restricción dura, al igual que la restricción de la capacidad de embolsado.

Modelo Lingo

```
sets:
producto/c,t,m/:demanda, X;
ingrediente/af, ag, c,pch/:;
pi(producto,ingrediente):porcentaje;
endsets

data:
demanda=1000 500 800;

!los datos de porcentaje se han ingresado en tanto por uno para evitar
tener que dividirlos entre 100 cuando se emplee el dato en el modelo;
porcentaje=0 0.5 0.25 0.25
           0.6 0 0.4 0
           0 0.7 0.3 0;
enddata
min=2*(E1+E2+E3+D1+D2+D3)+E4+10*(D5+E5);

!restricciones de meta;
X(1)+D1-E1=1000;
X(2)+D2-E2=500;
X(3)+D3-E3=800;
@sum(producto(i):x(i)*40*porcentaje(i,3)*4000/1000)+D4-E4=100000;
@sum(producto(i):x(i))+D5-E5=2000;

!restricciones duras;

!Esta familia no incluye al cemento por lo que se emplea un filtro
para excluir j=3 de esta familia;
@for(ingrediente(j)|j#ne#3:@sum(producto(i):x(i)*40*porcentaje(i,j))<=100*1000);
@for(producto(i):@gin(x(i)));
```

Un extracto de lo más importante del reporte de solución

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              600.0000

  Model Class:                                      MILP

                              Variable           Value        Reduced Cost
                                    E1        0.000000            4.000000
                                    E2        0.000000            0.000000
                                    E3        0.000000            0.000000
                                    D1        300.0000            0.000000
                                    D2        0.000000            4.000000
                                    D3        0.000000            4.000000
                                    E4        0.000000            1.000000
                                    D5        0.000000            20.00000
                                    E5        0.000000            0.000000
                                    D4        1600.000            0.000000

                                  X(C)        700.0000            8.000000
                                  X(T)        500.0000            12.00000
                                  X(M)        800.0000            12.00000

                                   Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                     1        600.0000           -1.000000
                                     2        0.000000           -2.000000
                                     3        0.000000            2.000000
                                     4        0.000000            2.000000
                                     5        0.000000            0.000000
                                     6        0.000000            10.00000
                                     7        88000.00            0.000000
                                     8        63600.00            0.000000
                                     9        93000.00            0.000000
```

Informe administrativo de la solución

Sobre las metas:

Debe observarse el valor de las variables de desviación y, en especial, las que forman parte de la función objetivo, y así se completará el **informe de cumplimiento de metas.**

Meta	¿Se cumple? (Sí / No)	Valor de las variables de desviación	Interpretación
1	No	D1 = 300, E1 = 0, D2 = 0, E2 = 0, D3 = 0, E3 = 0	La producción del producto "concreto" es inferior a la demanda (solo se producen 700 bolsas). Para los otros dos productos la demanda se atiende exactamente.
2	Sí	E4 = 0 D4 = 1600	El presupuesto no se excede, se hacen compras solo por $ 8400.
3	Sí	E5 = 0 D5 = 0	Se emplea exactamente la capacidad de embolsado.

Sobre las variables de decisión:

Plan óptimo de producción (cantidad de bolsas)

Tipo de producto	Cantidad por producir
Concreto	700
Tarrajeo	500
Mortero	800

Ejemplo 4

Para un proceso se dispone de tres equipos que realizan el mismo trabajo pero con rendimientos y costos distintos, los que si se decide utilizar se deberá proceder a instalar recién, lo que implica un costo fijo de instalación. La información relevante sobre estos tres equipos es la siguiente:

Equipo	Rendimiento (piezas/hora)	Costo de operación ($/hora)	Costo fijo de instalación ($)
1	30	50	120
2	25	65	100
3	32	55	180

La empresa se ha comprometido a entregar esta semana un total de 1200 piezas a un cliente que ha pagado por adelantado. Considere que en la semana se trabaja 40 horas.

La empresa se ha propuesto las siguientes metas:

Meta 1: Se tiene un presupuesto para el costo total de $ 2500. No se desea exceder este presupuesto.

Meta 2: Es deseable que las horas que vaya a trabajar un equipo, cualquiera de ellos, no fueran más de 30.

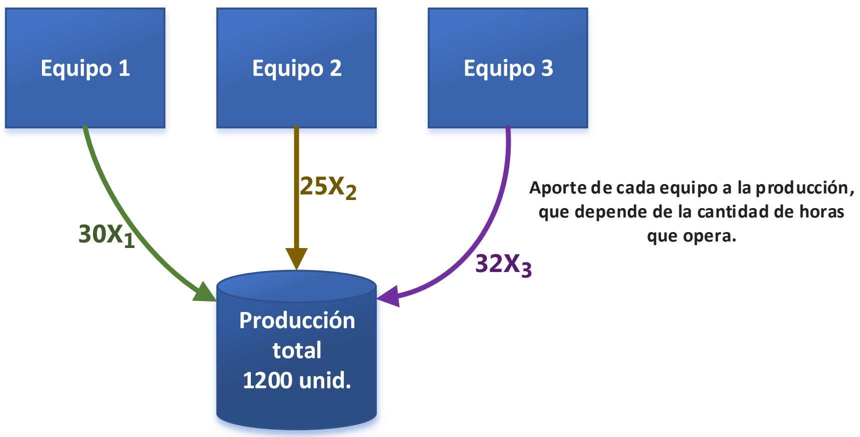
Meta 3: Es deseable que como máximo funcionen solo dos de los tres equipos.

Considere que cada equipo representa un equivalente a 40 horas de trabajo y que una hora de trabajo de cualquier equipo equivale a $ 56,67.

Formular el modelo de programación de metas correspondiente, indicando además el significado de sus variables de decisión. Resolver el modelo utilizando el lenguaje Lingo. Completar el informe administrativo de la solución.

El caso indica que se debe producir una cantidad de productos y ello implica decidir la cantidad de tiempo que cada equipo operará produciendo a razón de lo que se señala en el "rendimiento" de cada uno. Asimismo, se incurre en un costo "fijo" de instalación del equipo que se decida emplear, para modelar este costo fijo se necesita una variable binaria.

Un esquema para el problema:



Solución

Índices

i : equipos (1,...,3)

Variables de decisión

X_i : cantidad de horas que operará el equipo i.

$$Y_i : \begin{cases} 0, \text{ no operará el equipo i} \\ 1, \text{ sí operará el equipo i} \end{cases}$$

La variable binaria que representa la decisión de que el equipo i funcione o no está relacionada con la variable que representa la cantidad de horas que el equipo i funcionará: si las horas son **cero**, Y_i será cero y si las horas **no** son cero Y_i será 1. En el momento de formular las restricciones del sistema deberá incluirse la familia de restricciones que relaciona ambas familias.

Primero, las restricciones de meta:

Meta 1: Se tiene un presupuesto para el costo total de $ 2500. No se desea exceder este presupuesto.

¿De qué trata la meta? El costo total.

¿Cómo se expresa el costo total en función de las variables de decisión?

$$\sum_{1=1}^{3}(costo\_operacion_i * X_i + costo\_instal_i * Y_i)$$

¿Cuál es el valor meta establecido? El monto del presupuesto: $ 2500.

¿Existe alguna condición en el texto que implique que sería imposible el costo total pudiera ser menor o mayor al valor meta? Se trata solo de un presupuesto, no hay ninguna información en el texto que señale, a priori, que no pudiera incurrirse en un costo total mayor o menor al monto del presupuesto; por lo tanto, existen las dos variables de desviación.

$$\sum_{1=1}^{3}(costo\_operación_i * X_i + costo\_instal_i * Y_i) + D1 - E1 = 2500$$

¿Qué variable de desviación representa lo indeseable? Leyendo nuevamente la meta: "No se desea exceder este presupuesto". Se entiende que es indeseable E1, por eso debe colocarse en la función objetivo.

Meta 2: Es deseable que las horas que vaya a trabajar un equipo, cualquiera de ellos no fueran más de 30.

¿De qué trata la meta? De las horas que vaya a trabajar un equipo y son tres equipos, entonces esta meta tiene sub metas. Una para cada equipo.

¿Cómo se expresa el valor de las horas que vaya a trabajar cada equipo en función de las variables de decisión?

$$X_1$$

$$X_2$$

$$X_3$$

¿Cuál es el valor meta establecido? 30 horas cada equipo.

¿Existe alguna condición en el texto que implique que sería imposible que las horas trabajadas por cada equipo pudiera ser menor o mayor que 30? Si se tiene en cuenta que el caso señala que cada día se pueden trabajar hasta 40 horas, entonces sería posible exceder de 30 horas y, por supuesto, también es posible que un equipo trabaje menos, incluso podría no trabajar (cero horas de operación).

$$X_1 + \mathrm{D2} - \mathrm{E2} = 30$$

$$X_2 + \mathrm{D3} - \mathrm{E3} = 30$$

$$X_3 + \mathrm{D4} - \mathrm{E4} = 30$$

¿Al observar que las tres submetas son una familia, podría plantearse esta familia de una forma compacta? Solo debido a que las tres submetas tienen exactamente la misma forma, es posible compactarlas, tal como se muestra:

$$X_i + \mathrm{D2}_i - \mathrm{E2}_i = 30, \quad \forall \mathrm{i} = 1,\ldots,3$$

En esta formulación las variables de desviación D2 y E2 se han "instanciado" de forma que en realidad se han definido seis variables de desviación: $D2_1$, $D2_2$, $D2_3$, $E2_1$, $E2_2$, $E2_3$ una para para cada i (equipo).

¿Qué variable de desviación representa lo indeseable? Léase nuevamente la meta: "Que las horas que vaya a trabajar un equipo, cualquiera de ellos, no fueran más de 30… **son indeseables E2, E3, E4**". Por tanto, esas variables van a la función objetivo. Si se formula esta meta en la forma compacta, entonces las variables de desviación indeseables serían: $E2_1$, $E2_2$ y $E2_3$.

Meta 3: Es deseable que como máximo funcionen solo dos de los tres equipos.

¿De qué trata la meta? Del número de equipos que funcionen.

¿Cómo se expresa el número de equipos que funcionen en función de las variables de decisión?

$$\sum_{i=1}^{3} Y_i$$

¿Cuál es el valor meta establecido? Dos.

¿Existe alguna condición en el texto que implique que sería imposible funcionen más de dos o menos de dos equipos? *A priori*, podrían funcionar hasta los tres y tal vez solo uno; por lo tanto, existen las dos variables de desviación:

$$\sum_{i=1}^{3} (Y_i) + \mathrm{D5} - \mathrm{E5} \;= 2$$

Si la meta 2 se formula en la forma compacta, entonces esta tercera meta se formularía de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^{3} (Y_i) + D3 - E3 \;= 2$$

Ya que D3 y E3 serían las variables de desviación que correspondería emplear, ¿qué variable de desviación representa lo indeseable? Leyendo nuevamente la meta: "Que como máximo funcionen solo dos de los tres equipos". La opción E3 resulta indeseable y va a la función objetivo.

Función objetivo: siempre minimiza las variables de desviación indeseables.

Minimizar

$$Z = \text{E1} + (\text{E2} + \text{E3} + \text{E4}) + \text{E5}$$

E1 está expresada dólares

E2, E3, E4 están expresadas en horas

E5 en equipos

Tomando en cuenta los coeficientes de equivalencia que el caso señala: "Cada equipo representa un equivalente a 40 horas de trabajo y que una hora de trabajo de cualquier equipo equivale a $ 56,67", la función objetivo podría quedar expresada en unidades equivalentes a dólares.

Minimizar

$$Z = \text{E1} + 56{,}67 * (\text{E2} + \text{E3} + \text{E4}) + * \ 40 * 56{,}67 * \text{E5}$$

Restricciones duras o del sistema

La relación entre las dos familias de variables:

$$X_i \leq \text{M} * Y_i, \qquad \forall \text{i} = 1,\ldots,3$$

"M" debe ser un valor suficientemente grande. Como el número máximo de horas que puede operar un equipo es 40, entonces 40 es suficientemente grande. De esta forma, esta familia de restricciones además, de modelar que Y_i depende de X_i, también determina el valor máximo del tiempo que cada equipo puede operar.

$$X_i \leq 40 * Y_i, \qquad \forall \text{i} = 1,\ldots,3$$

La producción total requerida:

$$\sum_{i=1}^{3} X_i * rendimiento_i = 1200$$

Condiciones de no negatividad:

$$X_i \geq 0, \qquad \forall \text{i} = 1,\ldots,3$$

Restricción para indicar la condición de variables binarias:

$$Y_i \geq 0, \text{ entera}, \qquad \forall \text{i} = 1,\ldots,3$$

Modelo Lingo alternativo

```
sets:
equipo/1..3/:X,Y,rendimiento,costo_operacion, costo_instal,D2,E2;
endsets


data:
rendimiento=30,25,32;
costo_operacion=50 65 55;
costo_instal=120 100 180;
enddata

min=E1+56.67*@sum(equipo(i):E2(i))+40*56.67*E3;

!Restricciones de meta;
@sum(equipo(i):x(i)*costo_operacion(i)+y(i)*costo_instal(i))+D1-E1=2500;

@for(equipo(i): x(i)+D2(i)-E2(i)=30);

@SUM(equipo(i):y(i))+D3-E3=2;

!Restricciones duras o de sistema;
@for(equipo(i):x(i)<=40*y(i));

@sum(equipo(i):x(i)*rendimiento(i))=1200;

@for(equipo(i):@bin(Y(i)));
```

Un extracto de lo más importante del reporte de solución

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              0.000000

                              Variable           Value        Reduced Cost
                                    E1        0.000000            1.000000
                                    E3        0.000000            0.000000
                                    D1        0.000000            0.000000
                                    D3        0.000000            2266.800
                                  X(1)        30.00000            0.000000
                                  X(2)        12.00000            0.000000
                                  X(3)        0.000000            0.000000
                                  Y(1)        1.000000            2266.800
                                  Y(2)        1.000000            2266.800
                                  Y(3)        0.000000            2266.800

                                 D2(1)        0.000000            0.000000
                                 D2(2)        18.00000            0.000000
                                 D2(3)        30.00000            0.000000
                                 E2(1)        0.000000            56.67000
                                 E2(2)        0.000000            56.67000
                                 E2(3)        0.000000            56.67000

                                   Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                     1        0.000000           -1.000000
                                     2        0.000000            0.000000
                                     3        0.000000            0.000000
                                     4        0.000000            0.000000
                                     5        0.000000            0.000000
                                     6        0.000000            2266.800
                                     7        10.00000            0.000000
                                     8        28.00000            0.000000
                                     9        0.000000            0.000000
                                    10        0.000000            0.000000
```

Informe administrativo de la solución

Sobre las metas:

El valor de la función objetivo es cero, entonces, se afirma que se lograron todas las metas.

Al observar todas las variables de desviación se completará el informe de cumplimiento de metas:

Meta	¿Se cumple? Sí/No)	Valor de las variables de desviación	Interpretación
1	Sí	E1 = 0 D1 = 150	Se gasta $ 2350.
2	Sí	E2 = 0, E3 = 0, E4 = 0 D2 = 22, D3 = 30, D4 = 0	El equipo 1 solo operará 8 horas, el equipo 2 no operará y el equipo 3 operará 30 horas.
3	Sí	E5 = 0 D5 = 0	Se emplean exactamente 2 equipos.

Sobre las variables de decisión:

Plan óptimo de operaciones (horas)

Equipo	Cantidad de horas que cada equipo operará
Equipo 1	8
Equipo 2	0
Equipo 3	30

Como alternativa, para este ejemplo, la meta 2 también se modeló de forma compacta. Enseguida se presenta el modelo Lingo:

Modelo Lingo alternativo

```
sets:
equipo/1..3/:X,Y,rendimiento,costo_operacion, costo_instal,D2,E2;
endsets


data:
rendimiento=30,25,32;
costo_operacion=50 65 55;
costo_instal=120 100 180;
enddata

min=E1+56.67*@sum(equipo(i):E2(i))+40*56.67*E3;

!Restricciones de meta;
@sum(equipo(i):x(i)*costo_operacion(i)+y(i)*costo_instal(i))+D1-E1=2500;

@for(equipo(i): x(i)+D2(i)-E2(i)=30);

@SUM(equipo(i):y(i))+D3-E3=2;

!Restricciones duras o de sistema;
@for(equipo(i):x(i)<=40*y(i));

@sum(equipo(i):x(i)*rendimiento(i))=1200;

@for(equipo(i):@bin(Y(i)));
```

Un extracto de lo más importante del reporte de solución

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              0.000000

                               Variable           Value        Reduced Cost
                                     E1        0.000000            1.000000
                                     E3        0.000000            0.000000
                                     D1        0.000000            0.000000
                                     D3        0.000000            2266.800
                                   X(1)        30.00000            0.000000
                                   X(2)        12.00000            0.000000
                                   X(3)        0.000000            0.000000
                                   Y(1)        1.000000            2266.800
                                   Y(2)        1.000000            2266.800
                                   Y(3)        0.000000            2266.800

                                  D2(1)        0.000000            0.000000
                                  D2(2)        18.00000            0.000000
                                  D2(3)        30.00000            0.000000
                                  E2(1)        0.000000            56.67000
                                  E2(2)        0.000000            56.67000
                                  E2(3)        0.000000            56.67000

                                    Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                      1        0.000000           -1.000000
                                      2        0.000000            0.000000
                                      3        0.000000            0.000000
                                      4        0.000000            0.000000
                                      5        0.000000            0.000000
                                      6        0.000000            2266.800
                                      7        10.00000            0.000000
                                      8        28.00000            0.000000
                                      9        0.000000            0.000000
                                     10        0.000000            0.000000
```

Informe administrativo de la solución

Sobre las metas:

El valor de la función objetivo es cero, entonces, se afirma que se lograron todas las metas, igual que la solución de la formulación en la que la meta 2 se modela de la forma extendida.

Sin embargo, las metas presentan un cumplimiento diferente:

Meta	¿Se cumple? (Sí/No)	Valor de las variables de desviación	Interpretación
1	Sí	E1 = 0 D1 = 0	Se gasta exactamente $ 2500.
2	Sí	E2(1) = 0, E2(2) = 0, E2(3) = 0 D2(1) = 0, D2(2) = 18, D2(3) = 30	El equipo 1 opera exactamente 30 horas, el equipo 2 operará 12 horas y el equipo 3 no operará.
3	Sí	E3 = 0 D3 = 0	Se emplean exactamente 2 equipos.

Sobre las variables de decisión:

Plan óptimo de operaciones (horas)

Equipo	Cantidad de horas que cada equipo operará
Equipo 1	30
Equipo 2	12
Equipo 3	0

Esta solución, que es diferente a la anterior en cuanto a los tiempos que cada equipo operará, permite cumplir igualmente todas las metas y satisface todas las restricciones del sistema; es decir, este modelo tiene soluciones múltiples. Una de ellas se ha puesto de manifiesto al modelar de otra forma la meta 2.

9.3 Metas con prioridades

En todos los casos que se han modelado en el acápite anterior, el decisor considera todas las metas igualmente importantes, no les asigna preferencias; sin embargo, es posible que las tenga, y en ese caso las metas tendrían una prioridad diferente.

¿Cómo se interpretan las prioridades? Indican qué metas deberían cumplirse primero, en cierto orden determinado por las preferencias del decisor.

Existen dos formas de incorporar las prioridades de las metas, que dan lugar a dos formas de solución para el modelo de metas:

a) El método directo

b) El método secuencial

El método secuencial[1] no es parte del alcance de este texto, por ende se explicará únicamente el método directo.

Método directo

Por este método, las prioridades se hacen explícitas al colocar un coeficiente a cada variable de desviación indeseable de la función objetivo. Cuanto más grande el coeficiente, más importante la meta.

¿Por qué emplear un coeficiente más grande significa que la meta es más importante para el decisor? Ese coeficiente es el peso que tiene la meta, por eso se llama coeficiente de ponderación. Un coeficiente grande implicaría que un incumplimiento en la meta más importante, por más pequeño que sea ese incumplimiento, tendrá un gran impacto en una función objetivo que se desea minimizar.

Entonces, en la lógica de la optimización, sería preferible cumplir con la meta más importante antes que con otras que tienen un impacto menor; así también con la segunda meta, cuyo incumplimiento tendrá un impacto mayor que el de la tercera, y así sucesivamente.

¿Cómo se determina el coeficiente de ponderación que se coloca a cada meta en la función objetivo? Existe la posibilidad de calcular un coeficiente para cada meta utilizando en parte el procedimiento del Proceso Jerárquico Analítico (AHP, por sus siglas en inglés), sobre el cual se proporciona información en el anexo. Pero también es posible utilizar potencias de 10 como coeficientes.

En términos prácticos, por ejemplo si el modelo tiene tres metas podría emplearse un coeficiente de 10^4 para la meta de primera prioridad, 10^2 para la meta de segunda prioridad y 10^0 para la meta de tercera prioridad.

Retomando el ejercicio 1, supóngase que la meta de capital extranjero fuera la meta de primera prioridad para el gobierno, que la meta de ciudadanos alimentados fuera la de segunda prioridad y la de tercera prioridad la de empleos, el modelo tendría la siguiente función objetivo:

Minimizar

$$Z = \mathbf{10^4} * D1 + \mathbf{10^2} * 10D2/1000000 + \mathbf{10^0} * 100D3/1000000$$

y la solución del nuevo modelo con esa función objetivo:

1 Puede encontrarse información al respecto en Hillier y Lieberman (2010).

Modelo Lingo

```
sets:
cultivo/1..5/:capital, ciudadanos_alim, ciudadanos_empleados,area_maxima;
destino/1..2/:;
cd(cultivo,destino): X;
endsets

data:
capital=3 5 4 2 4;
ciudadanos_alim=150000 75000 100000 100000 200000;
ciudadanos_empleados=10000 15000 12000 13000 15000;
area_maxima=6,4,5,6,5;
enddata

min=10000*D1+100*10*D2/1000000+100*D3/1000000;

!restricciones de meta o blandas;
@sum(cultivo(i):capital(i)*x(i,2))+D1-E1=70;

@sum(cultivo(i):ciudadanos_alim(i)*x(i,1))+D2-E2=1750000;

@sum(cd(i,j):ciudadanos_empleados(i)*x(i,j))+D3-E3=200000;
!restricciones duras o de sistema;
@for(cultivo(i):@sum(destino(j):x(i,j))<=area_maxima(i));

@sum(cd(i,j):x(i,j))<=15;
```

Incluye los coeficientes de ponderación

Un extracto de lo más importante del reporte de solución

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              87500.00


                              Variable           Value        Reduced Cost
                                    D1        7.000000            0.000000
                                    D2        1750000.            0.000000
                                    D3        0.000000           0.1000000E-03
                                    E1        0.000000            10000.00
                                    E2        0.000000           0.1000000E-01
                                    E3        5000.000            0.000000

                                X(1,1)        0.000000            28500.00
                                X(1,2)        1.000000            0.000000
                                X(2,1)        0.000000            49250.00
                                X(2,2)        4.000000            0.000000
                                X(3,1)        0.000000            39000.00
                                X(3,2)        5.000000            0.000000
                                X(4,1)        0.000000            29000.00
                                X(4,2)        0.000000            10000.00
                                X(5,1)        0.000000            38000.00
                                X(5,2)        5.000000            0.000000

                                   Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                     1        87500.00           -1.000000
                                     2        0.000000           -10000.00
                                     3        0.000000          -0.1000000E-01
                                     4        0.000000            0.000000
                                     5        5.000000            0.000000
                                     6        0.000000            20000.00
                                     7        0.000000            10000.00
                                     8        6.000000            0.000000
                                     9        0.000000            10000.00
                                    10        0.000000            30000.00
```

Informe administrativo de la solución

Sobre las metas:

Debe observarse el valor de las variables de desviación, en especial las que forman parte de la función objetivo y así se completará el **informe de cumplimiento de metas**.

Meta	¿Se cumple? (Sí/No)	Valor de las variables de desviación	Interpretación
1	No	D1 = 7 E1 = 0	El capital extranjero por obtener solo llegará a 63 millones de dólares.
2	Sí	D2 = 1 750 000 E2 = 0	No se alimenta a ningún ciudadano.
3	No	D3 = 0 E3 = 5000	Se dará empleo a 205 000 ciudadanos.

Sobre las variables de decisión:

Plan óptimo de distribución de cultivos
(millones de hectáreas de cada cultivo para cada destino)

	Destino	
Cultivo	**Consumo interno**	**Exportación**
1	0	1
2	0	4
3	0	5
4	0	0
5	0	5

Análisis de lo sucedido con las metas

En esta solución, el "esfuerzo" por cumplir la meta de mayor prioridad se observa en el valor de la variable D1 que es solo de 7 millones. En el modelo sin prioridades esa desviación fue de 46 millones.

No obstante, también se observa que el valor de la variable D2 es mucho mayor que en la solución sin prioridades; es decir, el incumplimiento de esta meta de segunda prioridad es mucho mayor.

Al ser esta la solución óptima, el valor total de la función objetivo **es el mejor**, lo que significa que una solución en la que se alimentara a más ciudadanos implicaría un valor mayor de D1 y con ello un perjuicio mucho mayor a la función objetivo.

Esta solución es la mejor para la combinación de las metas, teniendo en cuenta el peso (prioridad) de cada una.

Cabe señalar que en la solución óptima, la meta de ciudadanos alimentados no se cumplió, mientras sí fue posible lograr el cumplimiento de la tercera prioridad. Esta evidencia señala que la inclusión de coeficientes de ponderación no garantiza que las metas se puedan cumplir estrictamente según su prioridad. Lo que se obtiene es la mejor solución para el **conjunto** de metas, teniendo en cuenta la combinación de pesos de todas ellas.

Bibliografía

Eppen, G. D. (2000). *Investigación de operaciones en la ciencia administrativa: construcción de modelos para la toma de decisiones con hojas de cálculo electrónicas*. México, D. F.: Prentice-Hall Hispanoamericana.

Hillier, F. S., y Lieberman, G. J. (2010). *Introducción a la investigación de operaciones.* México, D. F: McGraw-Hill.

Render, B., Stair, R. M., y Hanna, M. E. (2012). *Métodos cuantitativos para los negocios.* México, D. F.: Pearson Education.

Schrage, L. E. (2002). *Optimization modeling with Lingo*. Chicago: Lindo Systems.

Taha, H. A. (2012). *Investigación de operaciones (9.ª ed.)*. México D. F.: Pearson Educación.

López, E. (2016). *Guía de problemas resueltos de la asignatura de Investigación de Operaciones I*. Lima: Universidad de Lima. Carrera de Ingeniería industrial .

Winston, W. L., y Goldberg, J. B. (2004). *Investigación de operaciones: Aplicaciones y algoritmos.* Australia: Thomson.

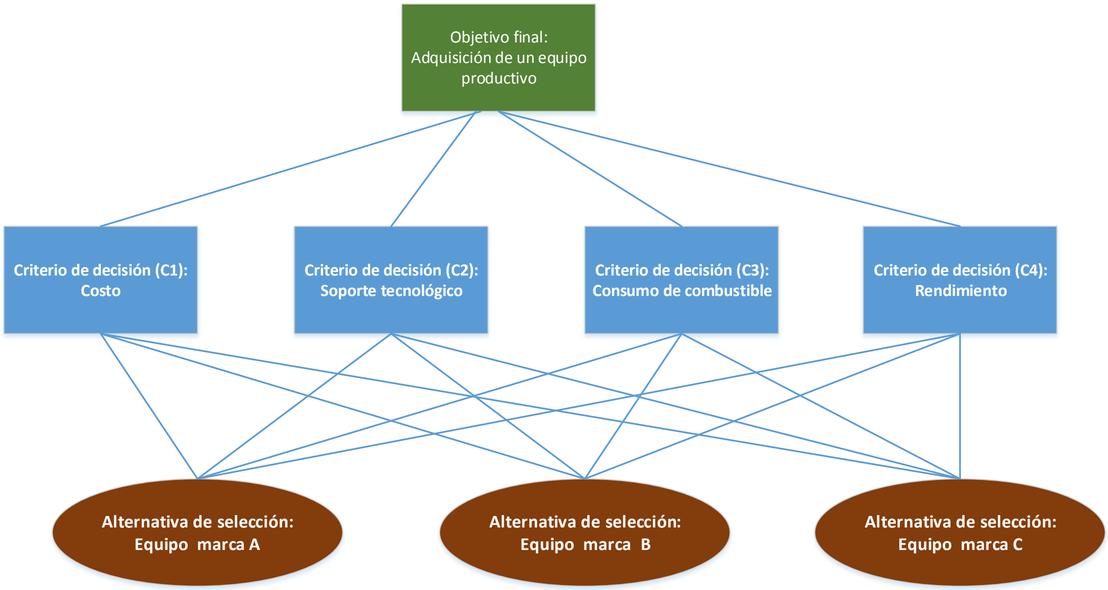
Anexo

Proceso de jerarquía analítica

Es un método desarrollado por Thomas Saat. Se le emplea para la toma de decisiones bajo criterios múltiples; entonces, es un método multicriterio.

Este método aprovecha la capacidad natural del ser humano de realizar comparaciones por pares para elegir entre un conjunto finito de alternativas, basándose en la posibilidad de descomponer la complejidad de una decisión que involucra una jerarquía entre niveles: el primer nivel corresponde al objetivo final, los niveles siguientes corresponden a los criterios de elección y las alternativas entre las que debe hacerse la elección corresponden al nivel inferior.

Por ejemplo, para el objetivo de decidir la compra de un equipo productivo entre las alternativas A, B y C en función de cuatro criterios: Costo (C1), Soporte tecnológico (C2), Consumo de combustible (C3) y rendimiento (C4). El esquema representa el enfoque jerárquico de este método:



El procedimiento:

Este procedimiento es el que se emplearía para establecer los coeficientes de ponderación en el modelo de metas con prioridades.

Primer paso: establecer las ponderaciones o pesos de los criterios según la preferencia o importancia que les da el decisor.

Establecida la jerarquía, los criterios se comparan por pares, usando una matriz de comparación y una escala numérica (de valores cardinales). Esta escala numérica enuncia cuantitativamente expresiones verbales comúnmente usadas cuando se efectúa una comparación.

Una posible escala numérica es la siguiente, pero en realidad cada decisor puede establecer su propia escala:

Importancia o preferencia	Valor cardinal
Igual	1
Moderada	3
Fuerte	5
Muy fuerte	7
Extremadamente fuerte	9

Para el ejemplo:

El decisor debe hacer las comparaciones por pares entre los diferentes criterios, utilizando la escala establecida y completar la tabla siguiente:

	C1	C2	C3	C4
C1	1	3	5	5
C2		1	7	9
C3			1	3
C4				1

En la diagonal, cuando se compara la importancia o preferencia de un criterio frente a sí mismo, es lógico colocar el valor 1 (Igual). En realidad es sufuciente completar un solo lado de la diagonal, pues el otro debe ser completado con el valor inverso.

	C1	C2	C3	C4
C1	1	3	5	5
C2	1/3	1	7	9
C3	1/5	1/7	1	3
C4	1/5	1/9	1/3	1

Luego, esta matriz se normaliza de la siguiente forma:

	C1	C2	C3	C4
C1	1	3	5	5
C2	1/3	1	7	9
C3	1/5	1/7	1	3
C4	1/5	1/9	1/3	1
Suma	1,733	4,254	13,333	18

Para normalizar, debe dividirse cada celda entre la suma de la columna respectiva:

	C1	C2	C3	C4
C1	0,577	0,705	0,375	0,278
C2	0,192	0,235	0,525	0,5
C3	0,115	0,034	0,075	0,167
C4	0,115	0,026	0,025	0,056

Y luego obtener el promedio de los valores calculados en cada fila:

	C1	C2	C3	C4	Peso (promedio de valores en la fila)
C1	0,577	0,705	0,375	0,278	0,484
C2	0,192	0,235	0,525	0,5	0,363
C3	0,115	0,034	0,075	0,167	0,098
C4	0,115	0,026	0,025	0,056	0,055

Estos podrían ser los coeficientes de ponderación en el modelo de metas con prioridades.

Se completará la presentación del método para no dejarlo inconcluso.

Segundo paso: establecer la calificación que obtendría cada alternativa de elección, es decir, cada posible marca del equipo productivo que se necesita elegir.

Todas las alternativas se evalúan siguiendo el mismo procedimiento de comparación por pares, en cuanto a cada uno de los criterios. Esta comparación utiliza la misma escala cardinal y está a cargo de quien toma la decisión.

Se muestra el procedimiento con uno de los criterios:

En cuanto al criterio Costo (C1), se comparan las marcas por pares.

	Marca A	Marca B	Marca C
Marca A	1	3	7
Marca B	1/3	1	5
Marca C	1/7	1/5	1

Con el mismo procedimiento de normalización se obtienen **las calificaciones** de cada marca en cuanto al criterio Costo:

Alternativa	Calificación
Marca A	0,65
Marca B	0,28
Marca C	0,07

El procedimiento se completa obteniendo la calificación de las tres marcas para los otros tres criterios, de la misma forma, para simplificar se mostrarán ya calculadas las calificaciones en cuanto a los otros tres criterios:

En cuanto al criterio Soporte tecnológico (C2)

Alternativa	Calificación
Marca A	0,27
Marca B	0,61
Marca C	0,12

En cuanto al criterio Consumo de combustible (C3)

Alternativa	Calificación
Marca A	0,10
Marca B	0,37
Marca C	0,53

En cuanto al criterio Rendimiento (C4)

Alternativa	Calificación
Marca A	0,23
Marca B	0,27
Marca C	0,50

Tercer paso: consiste en obtener la calificación ponderada de cada alternativa y elegir la mejor opción.

La calificación ponderada se obtiene multiplicando la calificación obtenida por la alternativa de elección en cada criterio por el peso que este tiene:

	Calificación ponderada en los criterios de decisión (calificación por peso del criterio)				Suma de calificaciones ponderadas
Alternativas de elección	C1 (peso: 0,484)	C2 (peso: 0,363)	C3 (peso: 0,098)	C4 (peso: 0,055)	
Marca A	0,65* 0,484=0,3146	0,27*0,363=0,09801	0,1*0,098= 0,0098	0,23*0,055= 0,01265	0,43506
Marca B	0,28*0,484=0,13552	0,6*0,363=0,22143	0,37*0,098=0,03626	0,27*0,055=0,01485	0,40806
Marca C	0,07*0,484=0,03388	0,12*0,363=0,04356	0,53*0,098=0,05194	0,5*0,055=0,0275	0,15688

La alternativa de elección que tiene la mejor calificación ponderada es la Marca A, por lo tanto sería recomendable su elección.

Este libro se terminó de imprimir en septiembre del 2017,
en Litho & Arte S. A. C.
Jr. Iquique n.° 026 - Breña
Lima, Perú
Teléfono: 332-1989

UNIVERSIDAD
DE LIMA

MODELOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Guía para su formulación y solución

Todas las carreras de ingeniería que contemplan en sus mallas curriculares asignaturas de programación matemática enfrentan la necesidad de desarrollar en los estudiantes la habilidad para el modelado, que comprende la capacidad para abstraer lo esencial de una situación de toma de decisiones y representarlo matemáticamente.

Este libro reúne y propone elementos didácticos para facilitar la formulación y solución de modelos de programación lineal. La puesta en práctica de estas técnicas, identificadas por la autora en su experiencia como profesora universitaria en asignaturas de programación matemática y simulación de sistemas, permite lograr la mejora de las capacidades del estudiante para el modelado.

La presente obra constituye una guía tanto para estudiantes como para docentes; además, los elementos didácticos para la formulación de modelos de programación lineal aquí incluidos —como el empleo de preguntas, la ilustración gráfica, el modelo matemático y el empleo de Lingo— pueden ser útiles también para cualquier otro tipo de modelo de programación matemática.

Ezilda Cabrera Gil Grados

Ingeniera industrial por la Universidad de Lima, magíster en Administración de Negocios por la ESAN. Cuenta con veinticinco años de trayectoria como profesora en el área de métodos cuantitativos para la toma de decisiones. En este tiempo, ha tenido a su cargo el desarrollo de acciones de mejora enfocadas en los resultados académicos de las asignaturas de esta área. Durante su experiencia docente ha observado las dificultades de los estudiantes en el proceso de formulación de un modelo de programación matemática y ha identificado algunos elementos que facilitan dicho proceso, que hoy pone a disposición de la comunidad académica.

ISBN: 978-9972-45-398-4