

# Mathematische Bildverarbeitung

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Überblick</b>	<b>3</b>
1.1 Techniken der Bildverarbeitung . . . . .	3
1.2 Unser Fokus . . . . .	3
1.3 Verwandte Vorlesungen . . . . .	3
1.4 Literatur . . . . .	3
<b>2 Was ist ein Bild?</b>	<b>4</b>
2.1 Definition . . . . .	4
2.2 Umwandlung . . . . .	4
2.3 Beispiel Rotation . . . . .	5
<b>3 Histogramme und deren Anwendungen</b>	<b>6</b>
3.1 Histogramme . . . . .	6
3.2 Anwendung: Kontrastverbesserung . . . . .	7
3.3 Anwendung: SW-Konvertierung . . . . .	9
<b>4 Einfache Morphographische Operationen</b>	<b>11</b>
4.1 Verknüpfungen von A und B . . . . .	12
<b>5 Entrauschen: Filter &amp; Co.</b>	<b>15</b>
5.1 Rauschen . . . . .	15
5.2 Glättungsfilter . . . . .	16
5.3 Frequenzraum-filter . . . . .	21
5.4 Filterbreite und Glättung . . . . .	27

5.5	Differenzenfilter . . . . .	28
5.6	Glättungsfilter und partielle Differentialgleichungen . . . . .	29
5.7	Isotrope und anisotrope Diffusion . . . . .	31
5.8	Bilaterale Filter . . . . .	32
5.9	Entauschen mittels Variationsrechnung . . . . .	33
<b>6</b>	<b>Kantenerkennung</b>	<b>34</b>
6.1	<u>Gradientenfilter</u> . . . . .	34
6.2	Die zweite Ableitung . . . . .	36

# 1 Überblick

## 1.1 Techniken der Bildverarbeitung

- Kontrastverbesserung
- Entrauschen
- Kantendetektion
- Schärfen
- Inpainting
- Segmentierung (Einzlene Objekte detektieren)
- Registrierung (Bilder des selben Objektes in Einklang bringen)

## 1.2 Unser Fokus

- Mathematische Beschreibung

## 1.3 Verwandte Vorlesungen

- 3D computervision
- Digitale Bildanalyse
- Mustererkennung und Datenkompression
- Medical imaging

## 1.4 Literatur

- Bredies, Lorenz : Mathematische Bildverarbeitung
- Aubert, Kornprobst : Mathematical Problems in Image Processing
- Modersitzki : Numerical Methods for Image Registration
- Alt : Lineare Funktionalanalysis

## 2 Was ist ein Bild?

### 2.1 Definition

#### Digitale/diskrete Sicht

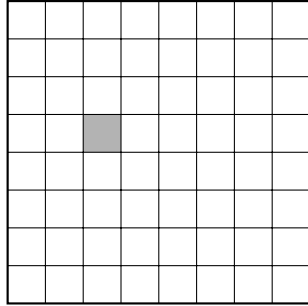


Abbildung 1: Diskretes Bild  
Darstellung als Matrix.

**Werkzeuge:** Lineare Algebra

**Vorteile:** Endlicher Speicher

**Nachteile:** Probleme bei zoomen und drehen

#### Kontinuierlich/analoge Sicht

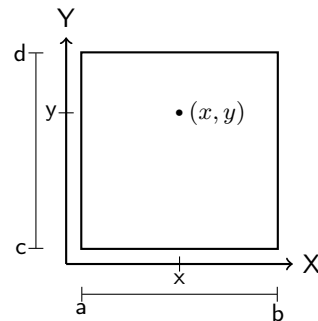


Abbildung 2: Kontinuierliches Bild  
Darstellung als Funktion in zwei  
Veränderlichen

**Werkzeuge:** Analysis

**Vorteile:** Mehr Freiheit (z.b. Kante=Linie entlang einer Unstetigkeit)

**Nachteile:** Unendlicher Speicher

**Definition.** Ein **Bild** ist eine Funktion  $u : \Omega \rightarrow F$ , wobei  $\Omega \subset \mathbb{Z}^d$  (im diskreten Fall) oder  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  (im kontinuierlichen Fall).

$d = 2$ : Typisches 2D Bild

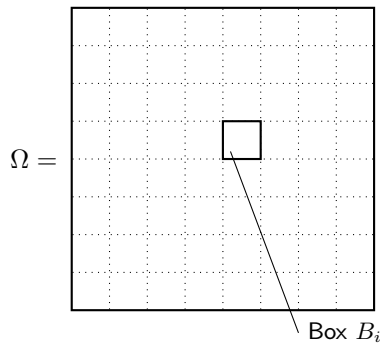
$d = 3$ : 3D-Bild bzw. "Körper" oder Video: 2D Ort + Zeit

$F$  ist der **Farbraum**, Beispiele:

- $F = [0, 1]$  oder  $F = \{0, 1, \dots, 255\}$ , Graustufen
- $F = \{0, 1\}$  schwarz/weiß
- $F = [0, 1]^3$  oder  $F = \{0, 1, \dots, 255\}^3$  Farbbilder

### 2.2 Umwandlung

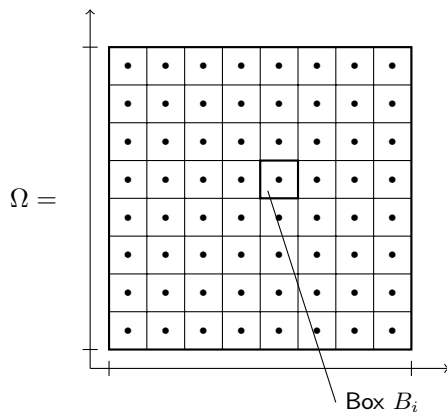
Kontinuierlich  $\rightarrow$  Diskret:



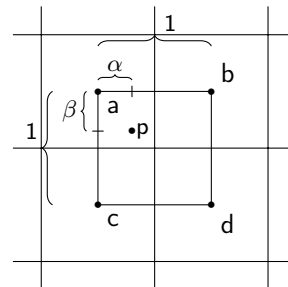
- $\Omega$  in Gitter zerlegen
- Jede Box durch nur einen Farbwert approximieren
- Etwa durch den Funktionswert im Mittelpunkt der Box
- oder durch den Mittelwert in der Box:  

$$\frac{1}{|B_i|} \cdot \int_{B_i} u(x) dx$$

Diskret  $\rightarrow$  Kontinuierlich:



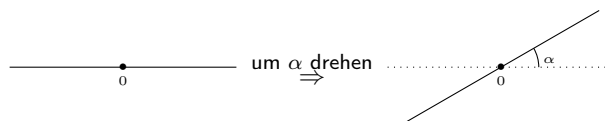
1. Idee: Jeder Punkt der Box  $B_i$  erhält den Funktionswert von  $B_i$  aus als diskretem Pixel  $\Rightarrow$  **Nearest neighbour interpolation**.
2. Idee: Mittelpunkt von Box  $B_i$  erhält den Wert von Pixel  $B_i$  sonst wird interpoliert. Grauwert  $g :=$  Gewichtetes Mittel aus Grauwerten  $a, b, c, d$ .



$$g = (1-\alpha) \cdot (1-\beta) \cdot a + \alpha \cdot (1-\beta) \cdot b + (1-\alpha) \cdot \beta \cdot c + \alpha \cdot \beta \cdot d$$

Dieses wird **Bilinear interpolation** genannt.

## 2.3 Beispiel Rotation



### 1. Fall, kontinuierliches Bild

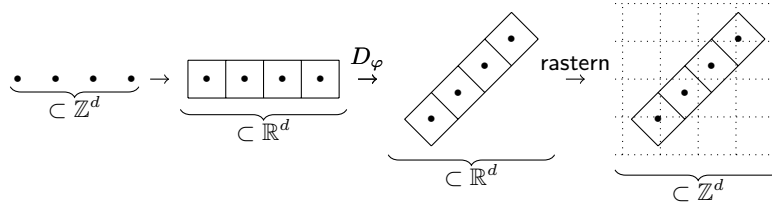
Sei  $u$  das alte Bild und  $v$  das neue Bild, dann ist die Drehung gegeben durch eine **Drehmatrix** :

$$D_\varphi \in \mathbb{R}^{d \times d}, D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

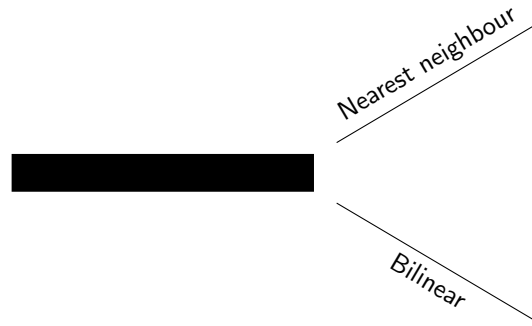
Damit folgt, dass  $D(u) = D_\varphi \Omega$  und  $v(x) = u(\underbrace{D_\varphi^{-1}x}_{\in \Omega}) = u(D_{-\varphi}x)$ . ( $D(u)$  ist die **Domain** von  $u$ )

## 2. Fall, diskretes Bild

Dieses ist problematisch, denn i.A.  $x \in \mathbb{Z}^d$ , aber  $D_\varphi x \notin \mathbb{Z}^d$ .



Weiterhin ist  $v(x) = u(D_\varphi^{-1}x)$ , wobei der konkrete Wert durch Interpolation bestimmt wird.



## 3 Histogramme und deren Anwendungen

### 3.1 Histogramme

Sei  $u : \Omega \rightarrow F$  ein diskretes Bild, dann heißt die Abbildung

$$H_u : F \rightarrow \mathbb{N}_0$$

$$F \ni k \mapsto \#\{x \in \Omega | u(x) = k\}$$

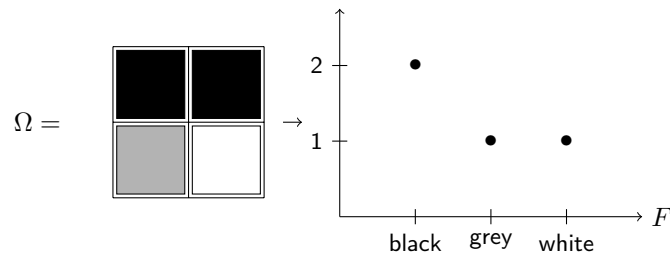
**Histogramm** des Bildes  $u$ . Dieses gibt an, wie oft die Farbe  $k$  im Bild vorhanden ist.

Damit gilt auch:

$$\sum_{k \in F} H_u(k) = |\Omega|, \text{ also die Anzahl der Pixel}$$

**Bemerkung.** Manchmal betrachtet man die relative Häufigkeit  $\tilde{H}_u(k) = \frac{H_u(k)}{|\Omega|}$ .

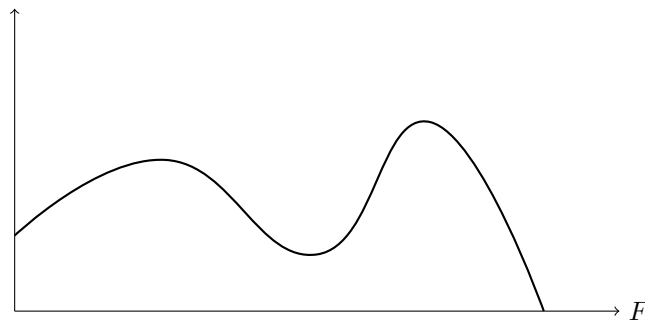
**Beispiel:**



Für kontinuierliche Bilder wird das allgemeinere Konzept von einem **Maß** benötigt:

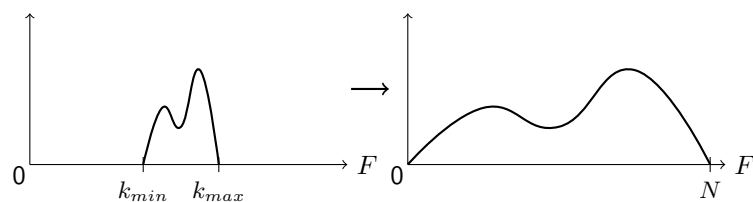
$$A \subset F, \mathcal{H}_u := |u^{-1}(A)| \begin{cases} \text{Diskretes Bild:} \\ \text{Anzahl der Elemente in } u^{-1}(A) \\ \text{Kontinuierliches Bild:} \\ \text{Volumen von } u^{-1}(A) \end{cases}$$

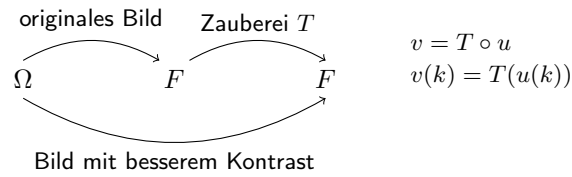
Zusammenhang zum vorherigen:  $\mathcal{H}_u(A) = \sum_{k \in A} H_u(k)$ . Man sagt dann, dass  $U_u$  eine **Dichte** zum Maß  $\mathcal{H}_u$  sei. Diese kann auch im kontinuierlichen existieren:



### 3.2 Anwendung: Kontrastverbesserung

**Problem & Idee:** Falls das Bild nur einen kleinen Teil von  $F$  nutzt, kann der Kontrast verbessert werden, indem man das Bild auf ganz  $F$  verteilt.





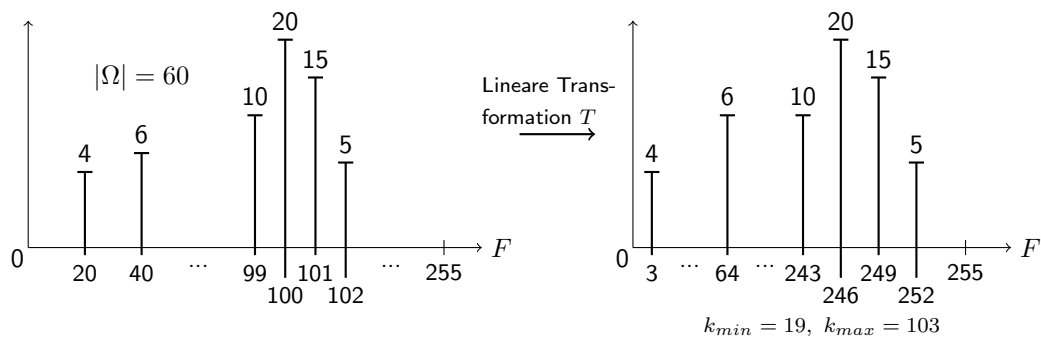
### 1. Idee, Kontrastdehnung:

$T$  "lineare" Abbildung, so dass  $T(k_{min}) = 0$  und  $T(k_{max}) = N$ :

$$T(k) = \frac{k - k_{min}}{k_{max} - k_{min}} N, \text{ Kontinuierlicher Farbraum}$$

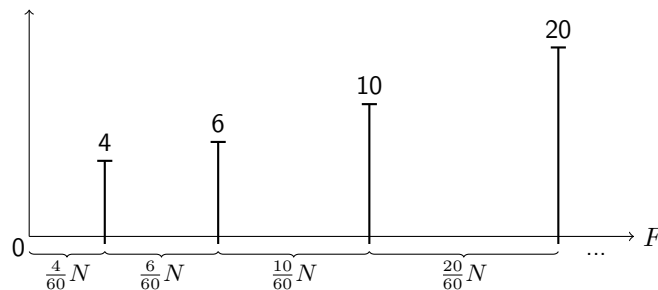
$$T(k) = \left\lceil \frac{k - k_{min}}{k_{max} - k_{min}} N \right\rceil, \text{ Diskreter Farbraum}$$

Beispiel:



### 2. Idee nicht-lineare Kontrastdehnung

Diesesmal setzen wir  $T(k) = \left\lceil \frac{N}{|\Omega|} \sum_{l=0}^k H_u(l) \right\rceil$  für einen diskreten Farbraum und erhalten:



$T$  lässt sich auch alternativ ausdrücken durch:

$$T(k) = \lceil \mathcal{H}_u(\{0, \dots, k\}) \rceil$$

Und somit folgt dass für den kontinuierlichen Fall  $T$  durch

$$T(k) = \frac{N}{|\Omega|} \mathcal{H}_u((0, k))$$

definiert werden kann. Allgemein heißt der Prozess Histogramm - equalization.

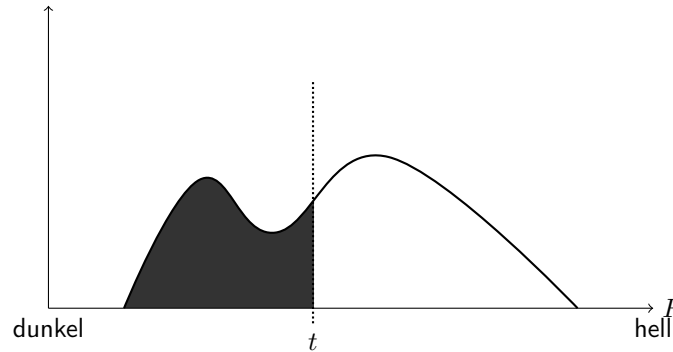


### 3.3 Anwendung: SW-Konvertierung

Aufgabe: Graustufenbild  $\rightarrow$  SW-Bild.

Nützlich etwa bei Objekterkennung/Segmentierung.

Idee: Das Histogramm an einem gewissen **Schwellenwert**  $t$  spalten:



Also setze nun für  $t \in F$ :

$$\text{schwarz} = \{k \in F | k \leq t\}$$

$$\text{weiß} = \{k \in F | k > t\}$$

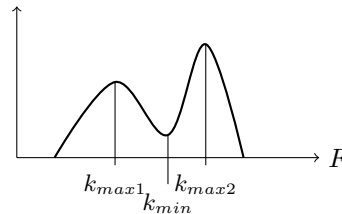
Graustufenbild  $u \rightarrow$  schwarz/weiß Bild  $\tilde{u}$ :

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} 0, & u(x) \in \text{schwarz} \\ 1, & u(x) \in \text{weiß} \end{cases} \Rightarrow \tilde{F} = \{0, 1\}$$

Methoden um diesen Schwellenwert zu wählen:

#### 1. Shape based Methods :

Falls das Histogramm von  $u$  **bimodal** ist, also die Form:



hat, dann wähle:

$$t := k_{\min}$$

$$\text{oder } t := \frac{k_{\max 1} + k_{\max 2}}{2}$$

#### 2. Otsu's Verfahren (1979):

Vorher einige Definitionen.

Die **Masse** :

$$m_{\text{schwarz}} := \sum_{k \in \text{schwarz}} H_u(k)$$

$$m_{\text{weiß}} := \sum_{k \in \text{weiß}} H_u(k)$$

Der **Mittlewert** :

$$\mu_{\text{schwarz}} := \frac{\sum_{k \in \text{schwarz}} k \cdot H_u(k)}{\sum_{k \in \text{schwarz}} H_u(k)} = \frac{\sum_{k \in \text{schwarz}} k \cdot H_u(k)}{m_{\text{schwarz}}}$$

$$\mu_{\text{weiß}} := \frac{\sum_{k \in \text{weiß}} k \cdot H_u(k)}{\sum_{k \in \text{weiß}} H_u(k)} = \frac{\sum_{k \in \text{weiß}} k \cdot H_u(k)}{m_{\text{weiß}}}$$

Die **Varianz** :

$$\sigma_{\text{schwarz}}^2 = \sum_{k \in \text{schwarz}} (k - \mu_{\text{schwarz}})^2 \cdot H_u(k)$$

$$\sigma_{\text{weiß}}^2 = \sum_{k \in \text{weiß}} (k - \mu_{\text{weiß}})^2 \cdot H_u(k)$$

Nun lautet Otsu's Methode:  $\sigma_{\text{schwarz}}^2 + \sigma_{\text{weiß}}^2 \xrightarrow{t} \min$ .

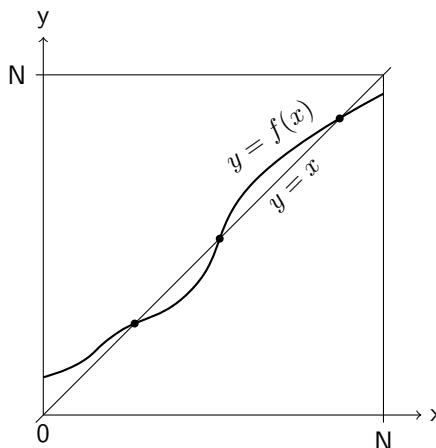
### 3. **Median** :

Wähle  $t$  so dass  $m_{\text{schwarz}} = m_{\text{weiß}}$ .

### 4. **Isodata Algorithmus** (1970s):

Wähle  $t$  so, dass  $t = \frac{\mu_{\text{schwarz}} - \mu_{\text{weiß}}}{2} =: f(t)$ .

Diese Gleichung ist bereits eine **Fixpunktgleichung** und eine Lösung kann, etwa mit einer **Fixpunktiteration** approximiert werden, das heißt  $t_{n+1} := f(t_n)$ .



**Matlab code** :

---

```

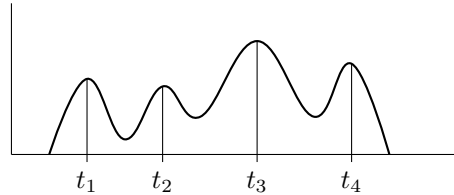
1 u=imread('liftingbody.png');
2 t=greythresh(u);%uses Otsu's method
3 v=im2bn(u,t);
4 imshow(v);

```

---

Einige dieser Verfahren können auch erweitert werden, so dass ein Graustufenbild nicht nur in zwei, sondern in  $M$  Farben zerlegt werden kann. Im allgemeinen werden dann  $M - 1$  thresholds benötigt.

1. **Shape based :**



2. **Otsu's Verfahren :**

Farbklassen:

$$F_1 = \{k : k \leq t_1\}$$

$$F_2 = \{k : t_1 < k \leq t_2\}$$

$\vdots$

$$F_M = \{k : t_{M-1} < k\}$$

Und wie zuvor:  $\sigma_1^2 + \dots + \sigma_M^2 \rightarrow \min$

3. **Median :**

Zerteile  $F$  in  $M$  Quantile gleicher Masse.

4. **Isodata :**

Hierzu existiert keine Bekannte Verallgemeinerung auf  $M$  Farbklassen.

**Matlab code :**

---

```

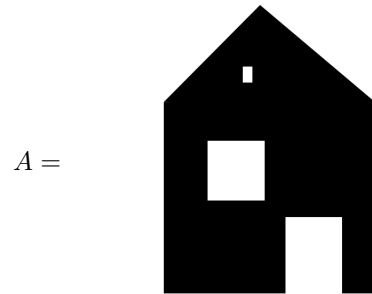
1 u=imread('Circles Bright Dark.png');
2 t=multithresh(u,M-1);
3 v=imquantize(u,t);
4 w=label2rgb(u,t);
5 imshow(w);

```

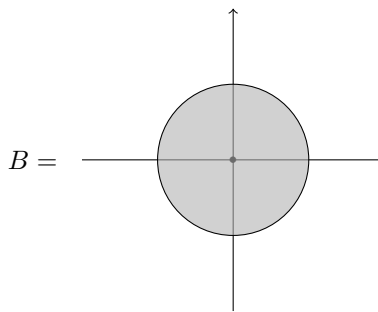
---

## 4 Einfache Morphographische Operationen

S/W Bild:



Strukturelement :



#### 4.1 Verknüpfungen von A und B

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

Diese wird **dilation** genannt.

Anschaulich wird an jeden schwarzen Punkt des Bildes  $A$  das Struktur element  $B$  gelegt.

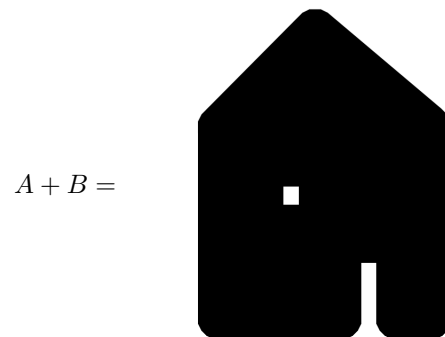


Bild erzeugt in Matlab durch:

---

```

1 I=imread('Bild1.png');
2 se=strel('disk',40,8);
3 I2=imcomplement(imdilate(imcomplement(I),se));%Es wird das Komplement des Bildes
   gebildet, damit das Strukturelement auf den schwarzen Bereich angewendet wird
4 imshow(I2);

```

---

$$A - B := \{a : a + B \subset A\}$$

Diese wird **erosion** genannt.

Anschaulich werden die schwarzen Bereiche des Bildes gesucht, in die das Strukturelement hinein passt.

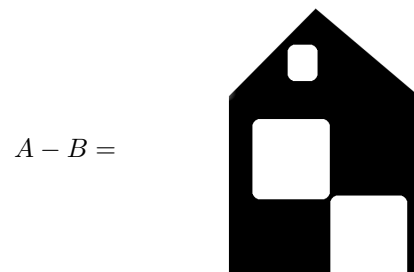


Bild erzeugt in Matlab durch:

---

```

1 I=imread('Bild1.png');
2 se=strel('disk',20,8);
3 I2=imcomplement(imerode(imcomplement(I),se));
4 imshow(I2);

```

---

Es ist schnell zu erkennen das  $A \neq (A + B) - B$ , deshalb wird eine neue Operation eingeführt:

$$A \bullet B := (A + B) - B$$

Dieses wird **schließen** genannt und wird etwa genutzt um Löcher, z.b. Rauschen, in einem Bild zu entfernen. Im Beispiel Bild ist zu sehen, dass das obere Fenster nicht mehr vorhanden ist.

$$A \bullet B =$$

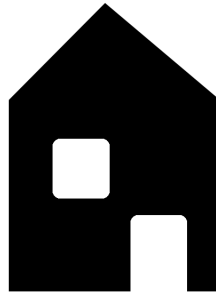


Bild erzeugt in Matlab durch:

---

```

1 I=imread('Bild1.png');
2 se=strel('disk',20,8);
3 I2=imcomplement(imdilate(imcomplement(I),se));
4 I3=imcomplement(imerode(imcomplement(I2),se));
5 imshow(I3);

```

---

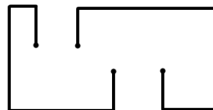
Es existiert auch die Umgekehrte Operation:

$$A \circ B := (A - B) + B$$

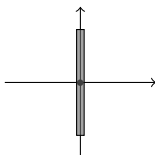
Diese wird **öffnen** genannt.

Diesmal mit einem neuen Beispiel:

$$A =$$



$$B =$$



[illegible]

Bild erzeugt in Matlab durch:

```
1 I=imread('Bild2.png');
2 se=strel('line',10,90);
3 I2=imcomplement(imerode(imcomplement(I),se));
4 I3=imcomplement(imerode(imcomplement(I2),se));
5 imshow(I3);
```

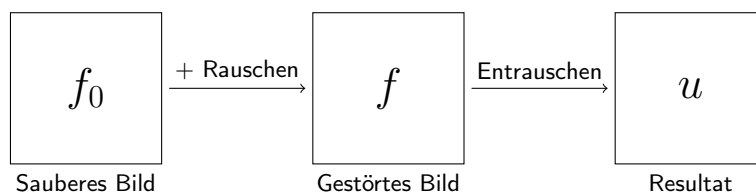
## 5 Entauschen: Filter & Co.

## 5.1 Rauschen

**Rauschen** : Ungewollte Störungen in einem Bild

- punktwise
- zufällig
- unabhängig
- additiv (bei multiplikativem Rauschen *log* anwenden)

Notation:



Wie gut das entrauschte Bild  $u$  das saubere Bild  $f_0$  beschreibt wird durch Normen gemessen.

$$\begin{aligned} & \|f - f_0\|, \text{Rauschen} \\ & \|u - f_0\|, \textbf{Absoluter Fehler} \\ & \frac{\|u - f_o\|}{\|f - f_0\|}, \textbf{Relativer Fehler} \text{ im Vergleich zum Rauschen} \\ & \frac{\|u - f_o\|}{\|f_0\|}, \text{Relativer Fehler im Vergleich zum Signal} \end{aligned}$$

Typischerweise ist die gewählte Norm:

$$\|f\| = \|f\|_2 = \sqrt{\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx}$$

oder im diskreten:

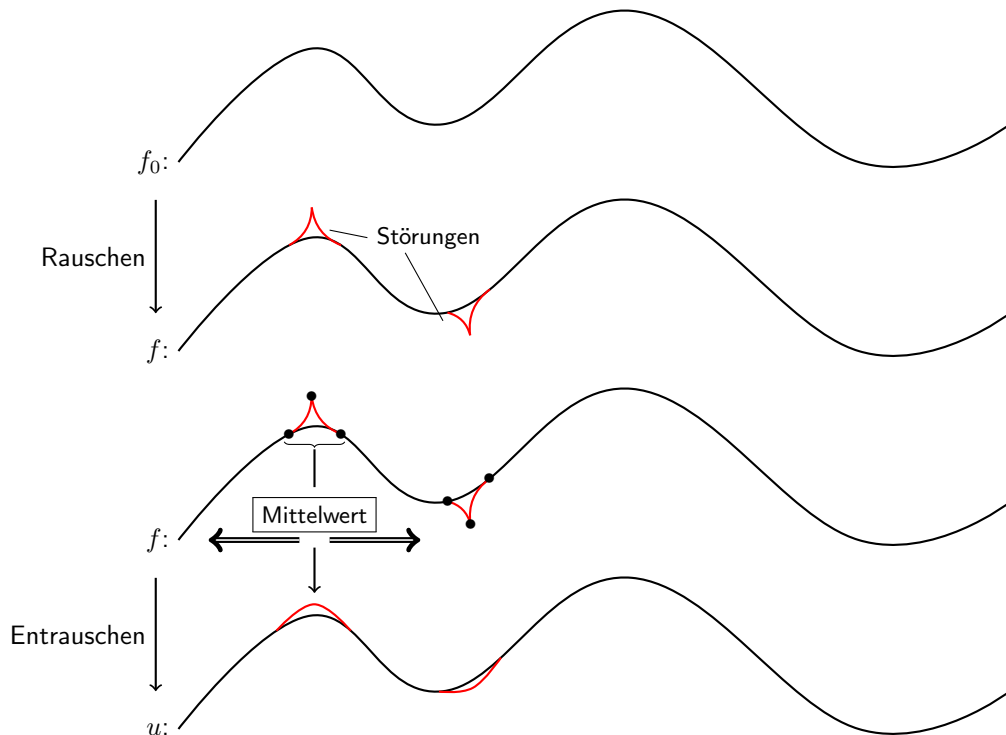
$$\|f\|_2 = \sqrt{\sum_{x \in \Omega} |f(x)|^2}$$

Eng verwandt ist die **Signal to noise ratio** (SNR):

$$\log\left(\frac{\|f_0\|_2}{\underbrace{\|u - f_0\|_2}_{\in [1, \infty)}}\right) \in [0, +\infty), \text{ wobei } 0 \text{ schlecht und } +\infty \text{ gut ist.}$$

## 5.2 Glättungsfilter

Grundidee: (zur Vereinfachung in 1D)



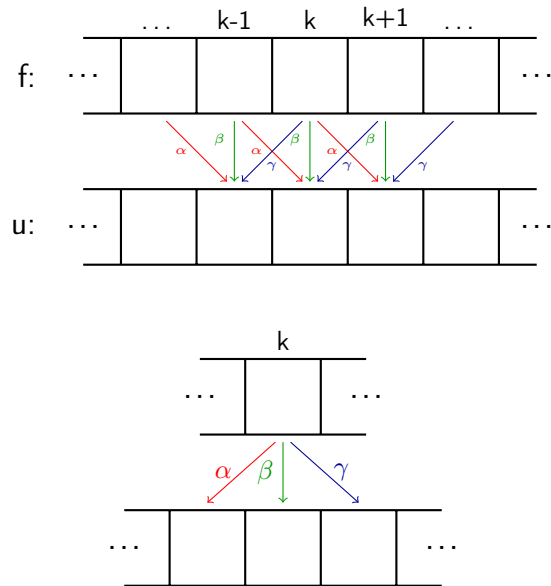
$$u(k) := \alpha \cdot f(k-1) + \beta \cdot f(k) + \gamma \cdot f(k+1) \quad (5.1)$$

wobei:

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \quad (5.2)$$

Schematisch bedeutet (5.1):





Durch (5.1) ist eine Abbildung  $f \mapsto u$  gegeben, wir schreiben kurz:

$u = m \boxtimes f$ , dieses wird **Korrelation** genannt.

mit:

$$(m \boxtimes f)(k) = \sum_{i \in \text{supp}(m)} m(i) f(k+i) \quad (5.3)$$

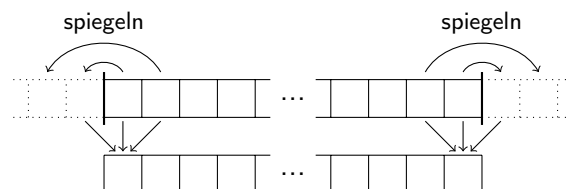
und:

$$m = \begin{array}{ccccc} & \dots & -1 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \alpha & \beta & \gamma & \dots \end{array} \quad \text{gennant } \underline{\text{Maske}} .$$

Setzt man nun  $j := k + i$  in (5.1), so ist  $i = j - k$ , d.h.

$$(m \boxtimes f)(k) = \sum_{i \in \text{supp}(m)} m(j-k) f(j) \quad (5.4)$$

Um die Abbildung auf den Rand anzuwenden wird das Bild gespiegelt, in 1D:



in 2D:

d	b	d
q	p	q
d	b	d

Formel (5.4) erinnert an die Formel der **Faltung** :

$$(g * f)(k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} g(\underbrace{k-j}_{\text{Anders als (5.4)}}) \cdot f(j) \quad (5.5)$$

Setzt man also  $g(i) := m(-i) =: \tilde{m}(i)$ , was einer Spiegelung der Maske entspricht, dann ist

$$m \boxtimes f = g * f = \tilde{m} * f$$

Eigenschaften der Faltung:

- 1  $(f * g) * h = f * (g * h)$ , Assoziativität
- 2  $f * g = g * f$ , Kommutativität
- 3  $\tilde{f} * \tilde{g} = \widetilde{f * g}$ , Kompatibilität mit Spiegelung

Eigenschaften der Korrelation:

- 1'  $f \boxtimes (g \boxtimes h) = \tilde{f} * (\tilde{g} * h) \stackrel{1}{=} (\tilde{f} * \tilde{g}) * h \stackrel{3}{=} (\widetilde{f * g}) * h = (f * g) \boxtimes h \neq (f \boxtimes g) \boxtimes h$ , nicht assoziativ!
- 2'  $f \boxtimes g = \tilde{f} * g \stackrel{2}{=} g * \tilde{f} = \tilde{\tilde{g}} * \tilde{\tilde{f}} \stackrel{3}{=} (\widetilde{\tilde{g} * \tilde{f}}) = \widetilde{g \boxtimes f} \neq g \boxtimes f$ , nicht kommutativ!
- 3'  $\tilde{f} \boxtimes \tilde{g} = \tilde{\tilde{f}} * \tilde{\tilde{g}} \stackrel{3}{=} (\widetilde{\tilde{f} * \tilde{g}}) = \widetilde{f \boxtimes g}$ , Kompatibilität mit Spiegelung

$\boxtimes$  und  $*$  definiert man auf:  $\ell^1(\mathbb{Z}^d) := \{f = (f_i)_{i \in \mathbb{Z}^d} : \underbrace{\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} |f_i|}_{:= \|f\|_1} < \infty\}$

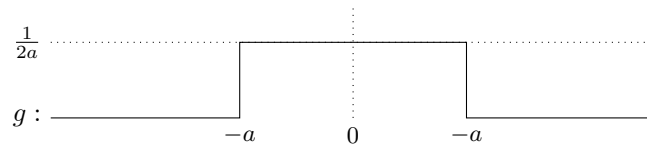
Man kann zeigen (Übung):  $f, g \in \ell^1 \Rightarrow f * g \in \ell^1$  und  $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$ . Wobei oft die Gleichheit gilt.

Alles gilt auch in der kontinuierlichen Version:

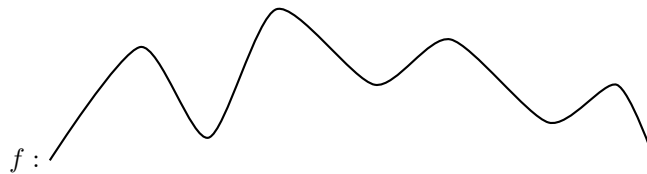
$$L^1(\mathbb{R}^d) := \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \mid \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} |f| dx}_{:= \|f\|_1} < \infty\}$$

$$f, g \in L^1(\mathbb{R}^d) : (g * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)f(y)dy, \quad y, x \in \mathbb{R}^d$$

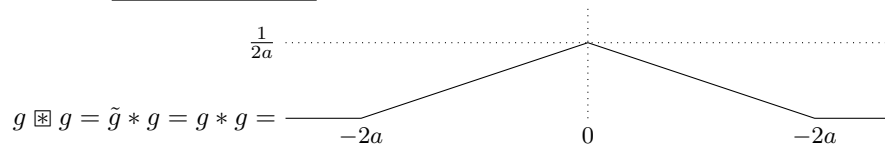
Beispiel für den kontinuierlichen Fall:



Hierbei gilt  $\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = 1$



$g \boxtimes f = \underline{\text{gleitendes Mittel}}$  .



Weitere Eigenschaften der Faltung:

Für alle  $f, g \in L^1$  or  $\ell^1$

$$\left. \begin{aligned} (g_1 + g_2) * f &= (g_1 * f) + (g_2 * f) \\ (\alpha g) * f &= \alpha(g * f) \end{aligned} \right\} = \text{Linearität}$$

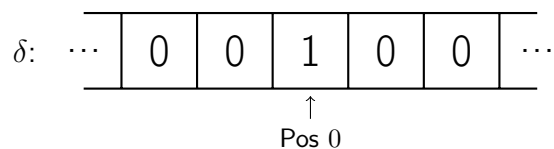
Somit ist:

$$g \mapsto f * g$$

ein linearer Operator.

Formt  $\ell^1$  bzw.  $L^1$  eine Algebra mit neutralem Element  $\delta$ ?

$\ell^1$ ?:



Ja!

$L^1$ ? Für ein solches Element muss gelten:

$$\forall f \in L^1 : d * f = f$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\delta(x-y)}_{=0 \forall x \neq y} f(y) dy = f(x)$$

Diese Funktion wird Dirac-Impuls genannt ist aber kein Element von  $L^1$ .

**Nun zu Masken in 2D:**

$$u = m \boxtimes f \text{ mit } m = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \alpha & \\ \hline \beta & \gamma & \delta \\ \hline & \epsilon & \\ \hline \end{array}$$

wobei  $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 1$

Kurzschreibweise:  $u_{ij} := u(x)$  wobei  $x = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$ , analog für  $f_{ij}$ .

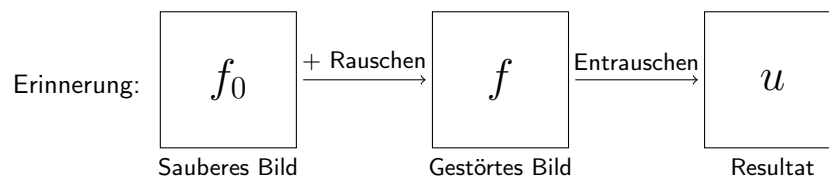
$$\Rightarrow u_{ij} = \alpha f_{i-1,j} + \beta f_{i,j-1} + \gamma f_{ij} + \delta f_{i,j+1} + \epsilon f_{i+1,j}$$

$$u = m \boxtimes f = \tilde{m} * f \text{ mit } \tilde{m} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \epsilon & \\ \hline \delta & \gamma & \beta \\ \hline & \alpha & \\ \hline \end{array}$$

**Symmetrischer Fall:**

$$\tilde{m} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \alpha & \\ \hline \alpha & \gamma & \alpha \\ \hline & \alpha & \\ \hline \end{array} \text{ mit } \gamma = 1 - 4\alpha$$

$$u_{ij} = (1 - 4\alpha) f_{ij} + \alpha (f_{i-1,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1} + f_{i+1,j}) \quad (5.6)$$



Annahme:  $f_{ij} = f_{ij} + r_{ij}$  mit  $r_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$  iid.

z.z.:  $\text{Var}(u_{ij}) \leq \text{Var}(f_{ij})$

$$\text{Var}(f_{ij}) = E(\underbrace{f_{ij} - \overbrace{E f_{ij}}^{f_{ij}^0}}_{r_{ij}})^2 = \sigma^2$$

$$\begin{aligned}
Var(u_{ij}) &= E(u_{ij} - Eu_{ij})^2 = E((1 - 4\alpha)(\underbrace{f_{ij} - f_{ij}^0}_{r_{ij}}) + \alpha(\underbrace{(f_{i-1,j} - f_{i-1,j}^0)}_{r_{i-1,j}}) + \dots + \underbrace{(f_{i+1,j} - f_{i+1,j}^0)}_{r_{i+1,j}}))^2 \\
&= E((1 - 4\alpha)^2 r_{ij}^2 + \alpha^2(r_{i-1,j}^2 + r_{i,j-1}^2 + r_{i,j+1}^2 + r_{i+1,j}^2) + 2(1 - 4\alpha)\alpha r_{ij}r_{i-1,j} \dots) \\
&= (1 - 4\alpha)^2 \underbrace{Er_{ij}^2}_{\sigma^2} + \alpha^2(Er_{i-1,j}^2 + \dots + Er_{i+1,j}^2) + 2(1 - 4\alpha)\alpha \underbrace{E(r_{ij}r_{i-1,j})}_{\underbrace{Er_{ij}Er_{i-1,j}}_0} + \underbrace{\dots}_0 \\
&= (1 - 4\alpha)^2 \sigma^2 + \alpha^2 4\sigma^2 = (1 - 8\alpha + 16\alpha^2 + 4\alpha^2) \sigma^2
\end{aligned}$$

Da  $0 \leq \alpha$  und  $0 \leq 1 - 4\alpha \Rightarrow 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{4}$ :

$$(1 - 8\alpha + 16\alpha^2 + 4\alpha^2) \sigma^2 = 1 + \underbrace{20\alpha}_{\geq 0} \underbrace{(\alpha - \frac{2}{5})}_{< 0} \underbrace{\leq 1}$$

$\Rightarrow Var(u_{ij}) \leq Var(f_{ij})$  für  $\alpha \in [0, \frac{1}{4}]$

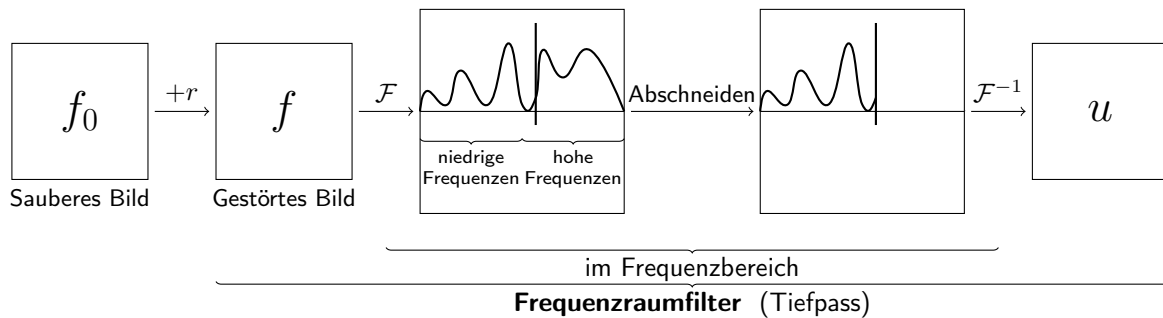
Dabei gilt:  $Var(u_{ij}) \xrightarrow{\alpha} \min \iff 1 - 8\alpha + 20\alpha^2 \xrightarrow{\alpha} \min \iff -8 + 40\alpha = 0 \iff \alpha = \frac{1}{5}$

$$\Rightarrow \text{bester Filter : } \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \frac{1}{5} & \\ \hline \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \hline & \frac{1}{5} & \\ \hline \end{array}$$

### 5.3 Frequenzraum-filter

Ansatz: Rauschen = hochfrequente Anteile des Signals.

Diese können mittels der **Fouriertransformation**  $\mathcal{F}$  gezielt entfernt werden.



Ein wichtiges Instrument ist hierbei die Fouriertransformation:

$$\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$$

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle z, x \rangle} dx \quad (5.7)$$

Wobei  $z \in \mathbb{R}^d, f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ .

Falls auch  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$  ist, dann lässt sich  $f$  wie folgt mittels der inversen Fouriertransformation aus  $\hat{f}$  rekonstruieren:

$$\mathcal{F}^{-1} : \hat{f} \mapsto f$$

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{i\langle z, x \rangle} dx \quad (5.8)$$

Wobei  $x \in \mathbb{R}^d$ .

Man hat also  $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f$ , d.h.

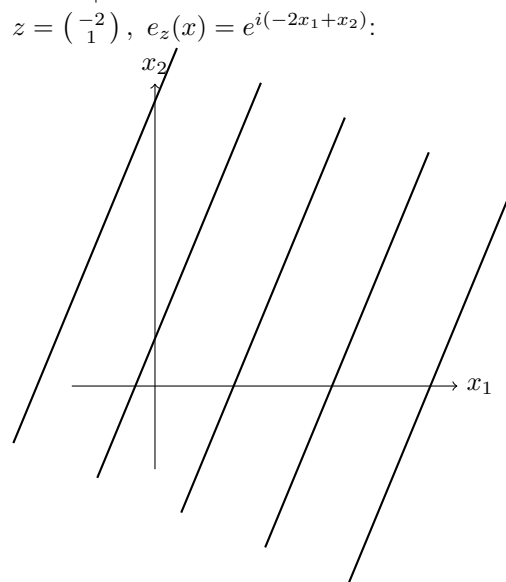
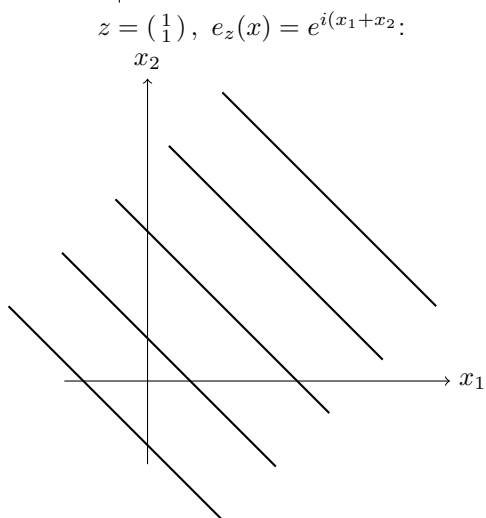
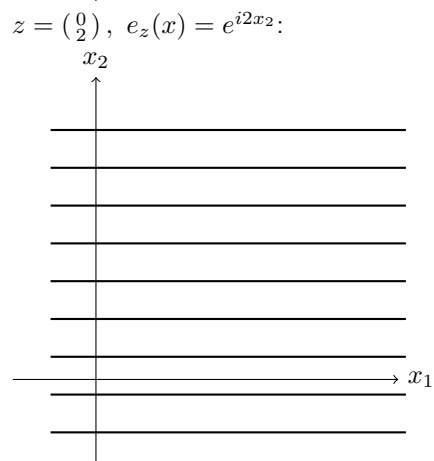
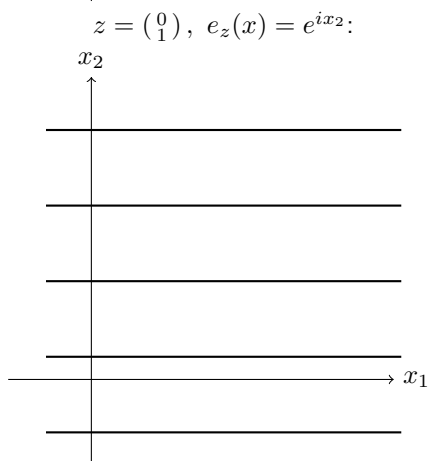
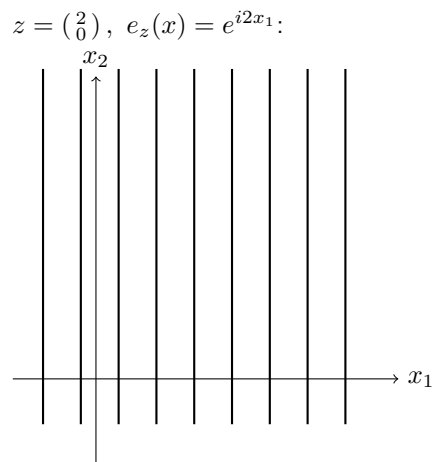
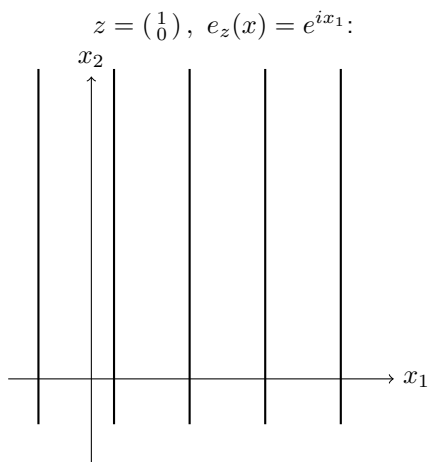
$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \left( \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-i\langle z, y \rangle} dy \right) e^{i\langle z, x \rangle} dz$$

Sei nun  $e_z(x) := e^{i\langle z, x \rangle}$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$  mit Parameter  $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_d \end{pmatrix}$ .

Also  $e_z(x) = e^{i\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rangle} = e^{i(z_1 x_1 + z_2 x_2)}$

Beispiele in  $2D$ :

(Hier stellen die Linien, Punkte mit konstantem wert dar)



$f \in L^2(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\mathbb{R}^d} |f|^2 dx < \infty\}$  ist

- ein normierter Raum mit  $+$ ,  $\alpha \cdot$  und  $\|\cdot\|_2 := \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx}$

- ein Skalarproduktraum mit  $\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^d} f \bar{g} dx$ , wobei  $\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle$
- ein vollständiger Raum, also **Banachraum**

Ein vollständiger normierter Banachraum mit Skalarprodukt heißt **Hilbertraum**.

$\mathcal{F}$  kann auch als Abbildung auf  $L^2(\mathbb{R}^d)$  betrachtet werden. Dann gilt:

$$\hat{f} = \mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

und

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2 \quad (5.9)$$

und sogar

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_2 = \langle f, g \rangle_2 \quad (5.10)$$

für alle  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ .

Weitere Eigenschaften der Fouriertransformation:

- i)  $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \hat{f}$  stetig und  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \hat{f}(z) = 0$
- ii)  $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow C(\mathbb{R}^d)$  ist eine lineare Abbildung
- iii)  $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow C(\mathbb{R}^d)$  ist eine beschränkte/stetige Abbildung
- iv) Verschiebung  $\xrightarrow{\mathcal{F}}$  Modulation, d.h.

$$g(x) = f(x + a) \Rightarrow \hat{g}(z) = e^{i\langle a, z \rangle} \hat{f}(z)$$

- v) Modulation  $\xrightarrow{\mathcal{F}}$  Verschiebung, d.h.

$$g(x) = e^{i\langle x, a \rangle} f(x) \Rightarrow \hat{g}(z) = \hat{f}(z - a)$$

- vi) Skalierung  $\xrightarrow{\mathcal{F}}$  inverse Skalierung, d.h.

$$g(x) = f(cx) \Rightarrow \hat{g}(z) = \frac{1}{|c|} \hat{f}\left(\frac{z}{|c|}\right)$$

- vii) Konjugation:  $g(x) = \overline{f(x)} \Rightarrow \hat{g}(z) = \overline{\hat{f}(-z)}$   
Folglich:  $f$  reelwertig  $\Rightarrow \hat{f}(z) = \overline{\hat{f}(-z)}$

viii)

$$\text{Grundmode: } \hat{f}(0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$$

$$\text{Analog: } f(0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x) dx$$

- ix) Differentiation  $\xrightarrow{\mathcal{F}}$  Multiplikation mit Potenzen von  $z$ , d.h.

$$g(x) = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} f(x) \Rightarrow \hat{g}(z) = i^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d} z_1^{\alpha_1} \dots z_d^{\alpha_d} \hat{f}(z)$$



x) Umkehrung des letzten Punktes:

$$g(x) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d} f(x) \Rightarrow \hat{g}(z) = i^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_d} \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \hat{f}(z)$$

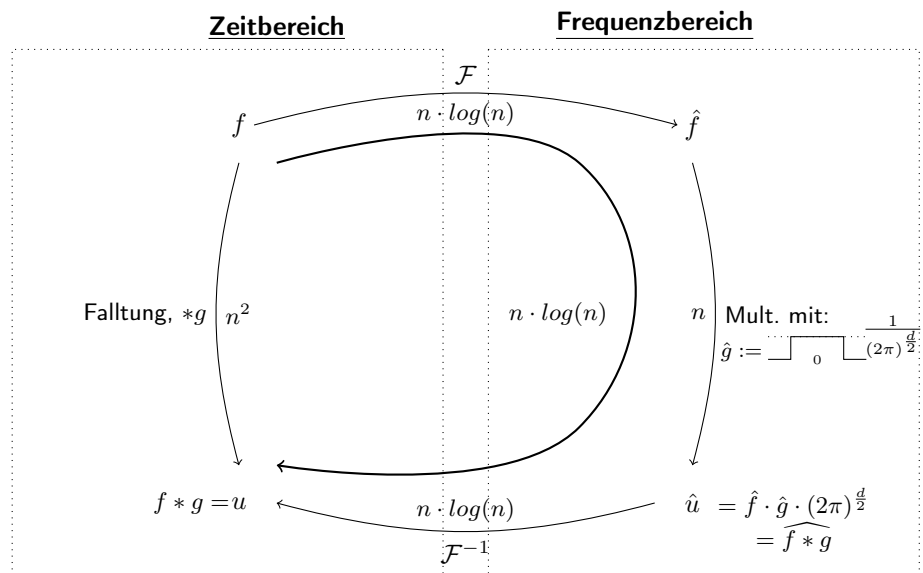
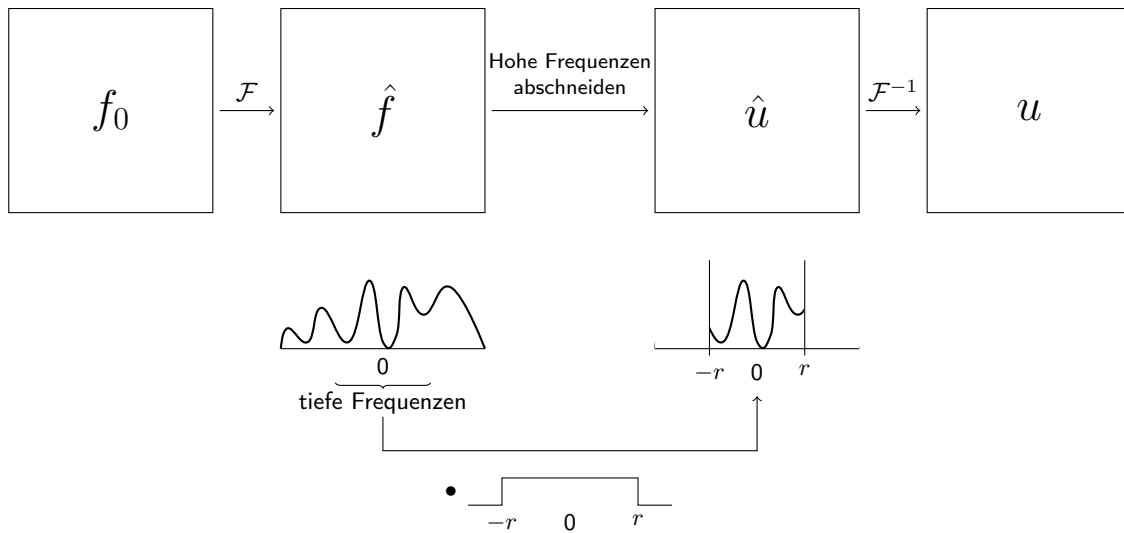
xi)

$$\text{Faltungssatz: } \mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g), \quad \widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \hat{f} \cdot \hat{g}$$

$$\text{Analog: } \mathcal{F}(f \cdot g) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g), \quad \widehat{f \cdot g} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \hat{f} * \hat{g}$$

d.h.: Faltung  $\xrightarrow{\mathcal{F}}$  Multiplikation und umgekehrt

**Zur Erinnerung:**



Wie sieht  $g$  aus?

$$g = \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \chi_{[-r,r]} \right)$$

$$\left( \chi_M(z) = \begin{cases} 0, & z \notin M \\ 1, & z \in M \end{cases} \right)$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} (\mathcal{F}^{-1} \chi_{[-r,r]^d})(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{[-r,r]^d}(z) e^{i\langle z, x \rangle} dz \\ (d=1) \rightarrow &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-r,r]}(z) e^{izx} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_r^{-r} e^{izx} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{izx}}{ix} \Big|_{z=-r}^r \\ &= \frac{1}{2\pi ix} (e^{irx} - e^{-irx}) \\ &= \frac{1}{\pi x} \sin(rx) \\ &= \text{sinc} \left( \frac{rx}{\pi} \right) \cdot \frac{r}{\pi} \end{aligned}$$

$$\text{Wobei: } \text{sinc}(\varphi) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi\varphi)}{\pi\varphi} & , \varphi \neq 0 \\ 1 & , \varphi = 0 \end{cases}$$

$g$  hat auch Masse 1, denn mit den Eigenschaften der Fouriertransformation folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} = \hat{g}(0) &= (\mathcal{F}g)(0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \underbrace{e^{\underbrace{-\langle x, 0 \rangle}_0}}_1 dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx \\ &\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx = 1 \end{aligned}$$

Für  $d = 2$  gilt:

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{(2\pi)^1} (\mathcal{F}^{-1} \chi_{[-r,r]^2})(x) \\
&= \dots \text{ (Analog zu oben)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-r,r]^2} \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) e^{i(z_1 x_1 + z_2 x_2)} dz_1 dz_2 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-r}^r \left( \int_{-r}^r e^{iz_1 x_1} e^{iz_2 x_2} dz_1 \right) dz_2 \\
&= \underbrace{\left( \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r e^{iz_1 x_1} dz_1 \right)}_{\frac{1}{\pi x_1} \sin(\pi x_1)} \underbrace{\left( \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r e^{iz_2 x_2} dz_2 \right)}_{\frac{1}{\pi x_2} \sin(\pi x_2)}
\end{aligned}$$

Es ist zu bemerken, dass  $g$  eine Art Tensor Struktur besitzt, was in etwa bedeutet das sich die Funktion in beliebigen Dimensionen als Produkt der Funktion in einer Dimensionen darstellen lässt.

**Gauß-Kern :**

$$\begin{aligned}
G(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2}} \Rightarrow G\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2}{2}} \\
&= \left( \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x_1^2}{2}} \right) \cdot \dots \cdot \left( \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x_d^2}{2}} \right) = G(x_1) \cdot \dots \cdot G(x_d)
\end{aligned}$$

## 5.4 Filterbreite und Glättung

klar ist:  $\frac{1}{25}$

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

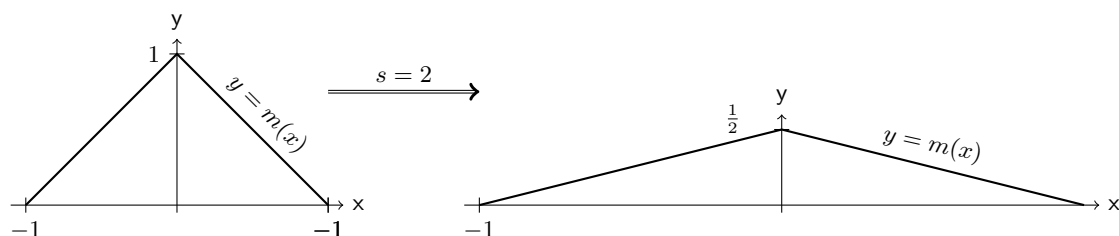
'glättet mehr als':  $\frac{1}{9}$

1	1	1
1	1	1
1	1	1

Im Kontinuierlichen: Sei  $m \in L^1(\mathbb{R}^d)$  und  $s > 0$ . Setze

$$m_s(x) := \frac{1}{s^d} m\left(\frac{x}{s}\right), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

Bsp (in  $d = 1$ ):

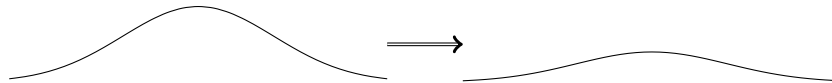


Bsp: Gauß-Kern  $G(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$

Skalierung mit Faktor  $s > 0$

$$\Rightarrow G_s(x) = \frac{1}{s^d} G\left(\frac{x}{s}\right) = \frac{1}{s^d} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2s^2}} = \frac{1}{(2\pi s^2)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2s^2}}$$

Skalierung  $s \hat{=} \text{Standardabweichung } \sigma$ :

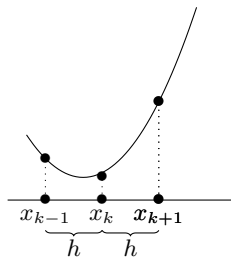


## 5.5 Differenzenfilter

Bisher: Glättung  $\hat{=}$  Mittelwert bilden  $\hat{=}$  Summe/Integrale

Jetzt: Schärfen  $\hat{=}$  Differenzen/Kontraste hervorheben  $\hat{=}$  Differenzen/Ableitungen

### Diskretisierung von Ableitungen durch Differenzenquotienten



(hier bedeutet  $f(k) = f(x_k)$ )

Vorwärts:  $u(h) = \frac{f(k+1) - f(k)}{h}$

Rückwärts:  $u(h) = \frac{f(k) - f(k-1)}{h}$

Zentral:  $u(h) = \frac{f(k+1) - f(k-1)}{2h}$

$$u = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \otimes f$$

$$u = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \otimes f$$

$$u = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \otimes f$$

## 2. Ableitung:

$$\begin{aligned} u(h) &\approx \frac{f'(k+1) - f'(k)}{h} \text{ (vorwärts)} \\ &\approx \frac{\frac{f(k+1) - f(k)}{h} - \frac{f(k) - f(k-1)}{h}}{h} \text{ (rückwärts)} \\ &= \frac{f(k+1) - 2f(k) + f(k-1))}{h^2} \end{aligned}$$

Also folgt  $u := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \otimes f$  und  $\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} * \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Denn:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} * \left( \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} * f \right) \\
&= \left( \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} * \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) * f \\
&= \left( \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boxtimes \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) * f \\
&= \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} * f \\
&= \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \boxtimes f
\end{aligned}$$

In 2D:  $\frac{\partial}{\partial x} \hat{=} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y} \hat{=} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{=} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{=} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Diskreter Laplace Operator :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{=} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

## 5.6 Glättungsfilter und partielle Differentialgleichungen

Wir haben gesehen:  $m = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  ist unter allen 5-Punkt Filtern der am besten glättende.

Idee: Rauschen weiter verringern indem man  $m \boxtimes$  wiederholt anwendet  $\Rightarrow$  Folge von Bildern:

$$\begin{array}{|c|} \hline f \\ \hline \text{:= } u^{(0)} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{m \boxtimes} \begin{array}{|c|} \hline u^{(1)} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{m \boxtimes} \begin{array}{|c|} \hline u^{(2)} \\ \hline \end{array} \dots$$

$$\Rightarrow u^{(n+1)} - u^{(n)} = (\text{Unterschied zwischen 'Zeit' Punkt } n \text{ und } n+1)$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{m \boxtimes u^{(n)}}_{u^{n+1}} - \underbrace{\delta \boxtimes u^{(n)}}_{u^{(n)}} \text{ mit } \delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= (m - \delta) \boxtimes u^{(n)} \\
&= \left( \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \boxtimes u^{(n)} \\
&= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} u^{(n)}
\end{aligned}$$

Somit gilt insgesamt:

$$\underbrace{u^{(n+1)} - u^{(n)}}_{\cong \frac{\partial u}{\partial t}} = \frac{1}{5} \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -4 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}}_{\cong \Delta u} \quad (5.11)$$

Kontinuierlich: Funktion  $u$

$$u(x, t) \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \text{ Zeit}$$

(5.11) ist eine Diskretisierung (1 Zeitschritt im Eulerverfahren) der partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad (5.12)$$

Bekannt als **Wärmegleichung** oder **Diffusionsgleichung**.

Zum Zeitpunkt  $t = 0$  möge die Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = u^{(0)} = f(x) \quad (5.13)$$

gelten. Vorranschreiten der Zeit  $t$  repräsentiert Diffusion.

Für einen stationären Zustand, also keine Änderung  $\frac{\partial u}{\partial t}$  dann muss auch  $\Delta u = 0$  gelten.

Diese wird unter anderem von konstanten Funktionen oder linearen Funktionen  $u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$  erfüllt.

Es existiert auch eine explizite Formel für die Lösung der Diffusionsgleichung (5.12) mit Anfangsbedingung (5.13):

$$u(x, t) = \left( G_{\sqrt{2t}} * u^{(0)} \right) (x)$$

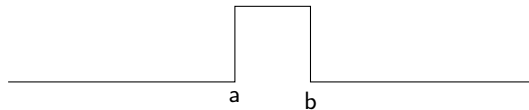
Wobei  $\sqrt{2t}$  für eine Skalierung um diesen Wert steht.

Zu zeigen ist:  $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$

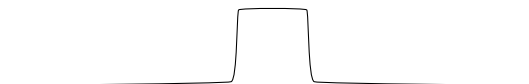
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( G_{\sqrt{2t}} * u^{(0)} \right) &= \Delta \left( G_{\sqrt{2t}} * u^{(0)} \right) \\ \xrightarrow{\text{mit Satz}} \left( \frac{\partial}{\partial t} G_{\sqrt{2t}} \right) * u^{(0)} &= (\Delta G_{\sqrt{2t}}) * u^{(0)} \end{aligned}$$

Es bleibt somit z.z.:  $\frac{\partial}{\partial t} G_{\sqrt{2t}} = \Delta G_{\sqrt{2t}}$ .

$t = 0$ :

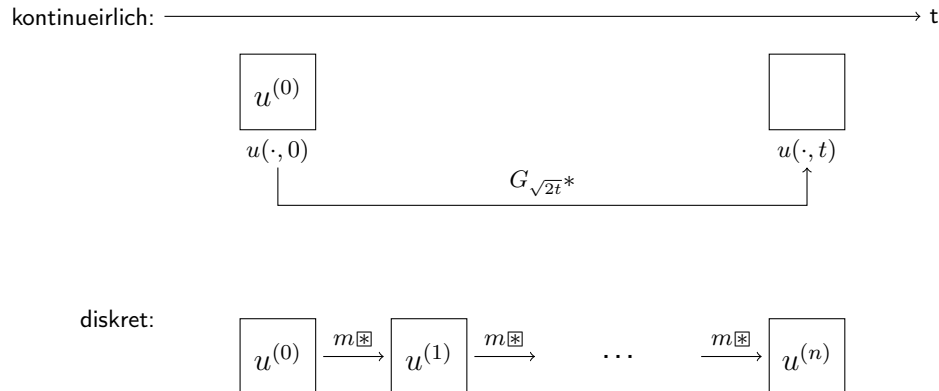


$t > 0$ :



Bemerkenswert ist das, für  $t = 0$  die Funktion nicht stetig ist, aber für alle  $t > 0$  die Funktion beliebig oft differenzierbar ist.

Insgesamt lässt sich die Idee darstellen als:



## 5.7 Isotrope und anisotrope Diffusion

Wir haben gesehen: Glättung/Diffusion verringert Rauschen.

Aber: Auch Kanten/Details werden verwischt.

Ausweg: Diffusion steuern, so dass sie an Kanten (also Stellen mit großer Änderungsrate) weniger stark glättet.

Der Plan lautet also:

$$\nabla u = \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \right\|^2 = \begin{cases} \text{groß} & \Rightarrow \text{wenig Diffusion} \\ \text{klein} & \Rightarrow \text{Diffusion normal} \end{cases}$$

Diffusionsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} u = \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right)}_{div} \left( \frac{\partial}{\partial x} u \right) = div(\nabla u) \quad (5.14)$$

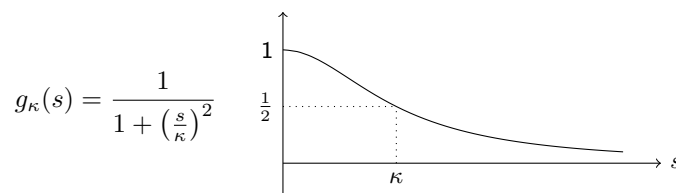
Um diese Gleichung zu regulieren setzen wir einen **Diffusionstensor**  $M$  in die Gleichung in.

$$\Delta u = div(M \nabla u) = div \left( \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} \nabla u \right)$$

Ansätze für  $M$ :

a)  $M = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$  übliche Diffusion

b)  $M = g(\|\nabla u(x, y)\|) * I$



Diese Methode geht zurück auf Perona & Malik.

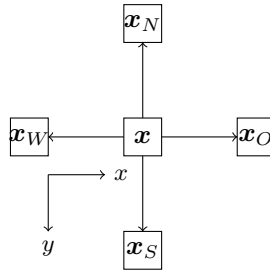
- Kanten mit  $\|\nabla u\| < \kappa$  werden mehr geglättet
- Kanten mit  $\|\nabla u\| \geq \kappa$  werden weniger geglättet

Diese Art der Glättung ist **Isotrop**  $\hat{=}$  in alle Richtungen gleich starker Fluss.

$$c) \quad M = \begin{pmatrix} g(|\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)|) & 0 \\ 0 & g(|\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)|) \end{pmatrix}$$

Diese art der Diffusionstensoren ist **anisotrop** also richtungsabhängig.

Für  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2$  und  $\mathbf{x}_W = \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  usw.



Für  $M = \begin{pmatrix} c_1(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & c_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$  gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(M \cdot \nabla u(\mathbf{x})) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} c_1(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & c_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}) \\ c_2(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(\mathbf{x})(u(\mathbf{x}_O) - u(\mathbf{x})) \\ c_2(\mathbf{x})(u(\mathbf{x}_S) - u(\mathbf{x})) \end{pmatrix} \\ &\approx c_1(\mathbf{x})(u(\mathbf{x}_O) - u(\mathbf{x})) - c_1(\mathbf{x}_W)(u(\mathbf{x}_N) - u(\mathbf{x}_W)) \\ &\quad + c_2(\mathbf{x})(u(\mathbf{x}_S) - u(\mathbf{x})) - c_2(\mathbf{x}_N)(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}_N)) \end{aligned}$$

## 5.8 Bilaterale Filter

Es existiert auch ein anderer Ansatz für das selbe Problem.

$u(\mathbf{x}) =$  gewichtetes Mittel aus allen  $f(\mathbf{y})$  mit

- $\mathbf{y}$  ist nahe bei  $\mathbf{x}$  und
- $f(\mathbf{y})$  ist nahe bei  $f(\mathbf{x})$

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{w(\mathbf{x})} \int_{\Omega} \underbrace{g(\mathbf{x} - \mathbf{y})}_{a)} \underbrace{h(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}))}_{\text{neu } b)} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

Heißt **Bilateraler Filter**, wobei



$$w(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) h(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})) d\mathbf{y}$$

Oft:  $g, h$  Gauß-Kerne ( $\Rightarrow$  nichtlineare Gaußfilter)

Manchmal:  $g, h$  charakteristische Funktionen ( $\Rightarrow$  SUSAN-Filter)

Effekt Falls Höhe der Kante  $>$  Filterradius  $\Rightarrow$  Kante bleibt

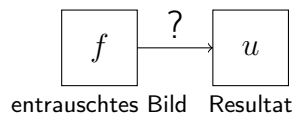
Manchmal:  $f \xrightarrow{\log} \log f \xrightarrow{\text{Bil. Filter}} \log u \xrightarrow{\exp} u$

Diese Verfahren ist jedoch sehr aufwendig, denn

- keine Reine Filterung ( $\Rightarrow$  keine FFT-Implementierung möglich)
- Normalisierung  $w(\mathbf{x})$  in jedem Punkt berechnen

## 5.9 Entrauschen mittels Variationsrechnung

Erinnerung:



Wünsche an  $u$ :

1.  $u \approx f$  (Datenkonsistenz)
2.  $u$  ist 'glatt'. (Regularitätsbedingung)

Mathematische Umsetzung der Wünsche:

1.  $\|u - f\|_2 = \sqrt{\int_{\Omega} |u(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})|^2 dx}$  sei klein
2.  $\|\nabla u\|_2 = \sqrt{\int_{\Omega} |\nabla u(\mathbf{x})|^2 dx} = \sqrt{\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x})\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x})\right)^2 dx}$  sei klein

Kombination:

$$J(u) := \|u - f\|_2^2 + \lambda \|\nabla u\|_2^2 \stackrel{u \in U}{\rightarrow} \min \quad (5.15)$$

Für einen geeigneten Funktionen Raum  $U$  und Kopplungskonstante  $\lambda > 0$ .  
In diesem Beispiel empfiehlt sich als Suchraum:

$$U = \{u : \|u\| < \infty, \nabla \text{ existiert}, \|\nabla\|_2 < \infty\} = W^{1,2}$$

ein so genannter **Sobolev-Räume**. Diese Suchproblem ist jedoch  $\infty$ -dimensional und somit schwer zu lösen.

Im obigen Ansatz (5.15) stellt man fest, dass der Regularitätsterm

$$\|\nabla u\|_2^2 = \int_{\Omega} |\nabla u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}) \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x}) \right)^2 d\mathbf{x}$$

die großen Gradienten an (gewollten) Kanten zu stark bestraft. ( $\Rightarrow$  optimales  $u$  glättet Kanten)

Ausweg: Wähle  $\|\nabla u\|_2$  oder  $\|\nabla u\|_1 = \int_{\Omega} |\nabla u(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}) \right| + \left| \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x}) \right| d\mathbf{x}$  als Regularitätsterme.

$$J(u) := \|u - f\|_2^2 + \lambda \|\nabla u\|_1 \rightarrow \min \quad (5.16)$$

Genannt **Rudin-Osher-Fatemi-Funktional** (ROF)

**Allgemeiner Ansatz bei Variationsproblemen:**

$$J(u) := \underbrace{D(u, f)}_{\text{Datenkern}} + \lambda \underbrace{R(u)}_{\text{Regularitätsterm}} \xrightarrow{u \in U} \min$$

Notwendiges Kriterium:

Falls  $J : U \rightarrow \mathbb{R}$  in  $u \in U$  ein lokales Minimum besitzt, dann gilt für jede Richtung  $v \in U$ :

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{J(u + \epsilon v) - J(u)}{\epsilon} = 0 \quad (5.17)$$

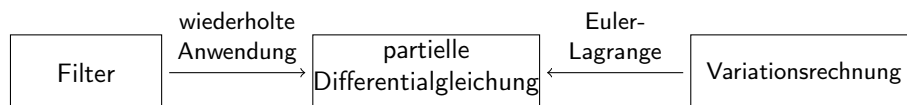
Dies ist die Verallgemeinerte Richtungsableitung (Gateaux-Ableitung).

Häufig ist  $J$  in Integralform gegeben, z.b.:

$$J(u) = \int_{\Omega} g(x, u(x), \nabla(x)) dx$$

Dann führt Bedingung (5.17) auf Gleichungen für bestimmte partielle Ableitungen von  $g$  und  $u$ , die sogenannte **Euler-Lagrange-Gleichung** für (5.17).

$\Rightarrow$  partielle Differentialgleichung  $u$ . Fazit:



## 6 Kantenerkennung

### 6.1 Gradientenfilter

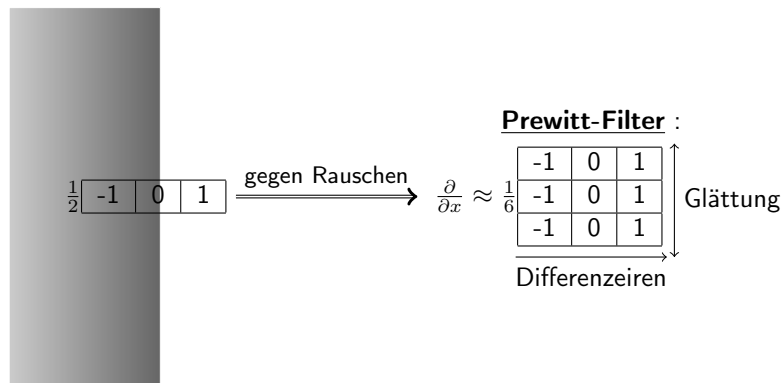
Wir suchen Stellen  $\mathbf{x}$  mit großem Gradienten:

$$\nabla u(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Approximation der Gradienten über zentrale Differenzen:

$$\frac{\partial}{\partial x} \approx \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ bzw. } \frac{\partial}{\partial y} \approx \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Um Rauschen zu verringern wird auch ein entrauschen Filter simultan angewendet:



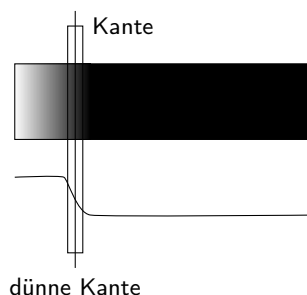
Alternative:  $\frac{\partial}{\partial x} \approx \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =: D_x$ , genannt **Sobel-Filter**. Eine stärkere Glättung kann mittels anderer vertikaler Filter mit Binomialkoeffizienten erzielt werden. Entsprechend wird  $\frac{\partial}{\partial y} D_y := D_x^T$  definiert.

$$\nabla u(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} (D_x \otimes u)(\mathbf{x}) \\ (D_y \otimes u)(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Zur Erinnerung der Gradienten steht senkrecht auf Kanten und zeigt in Richtung heller (hoher) Werte, die Intensität wird beschrieben von  $|\nabla u(\mathbf{x})|$ , also dem Betrag des Gradienten.

Ein typischer Algorithmus kann etwa folgende Form annehmen:

1. Gradienten mittels Prewitt oder Sobel approximieren und Richtung auf Vielfache von  $45^\circ$  runden.
2. **Non-maximum suppression** (edge thinning). Da es potentiell viele Punkte mit hoher Steigung gibt kann es dazu kommen, dass Kanten sehr breit werden, dieses wird durch das edge thinning verhindert.

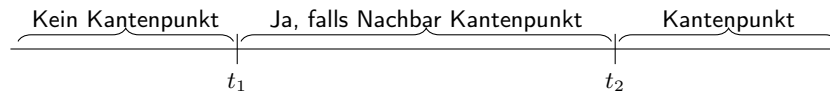


Mathematisch:  $x$  wird Kantenpunkt falls:

$$|\nabla u(x)| \leq \max(|\nabla u(x_+)|, |\nabla u(x_-)|)$$

wobei  $x_+$  und  $x_-$  Vorgänger und Nachfolger von  $x$  in Gradientenrichtung sind.

3. Kandidat  $x$  wird Kantenpunkt, falls:



wobei  $t_1, t_2$  thresholds sind.

$x$  ist also ein Kantenpunkt, falls  $|\nabla u(x)| \geq t_2$  oder  $(|\nabla u(x)| \in [t_1, t_2]$  und  $x$  ist Nachbar eines Kantenpunktes).

Dieses wird **hysteresis thresholding** genannt und verhindert **Abreißen** von Kantenzügen.

Die am häufigsten verbreitete Version von 1) -3) ist der **Canny-Algorithmus** (1986).

Matlab:

---

```
1 BWimg=edge(u,'canny',[t_1, t_2],sigma);
```

---

BWimg: Binärbild

u: Graustufenbild

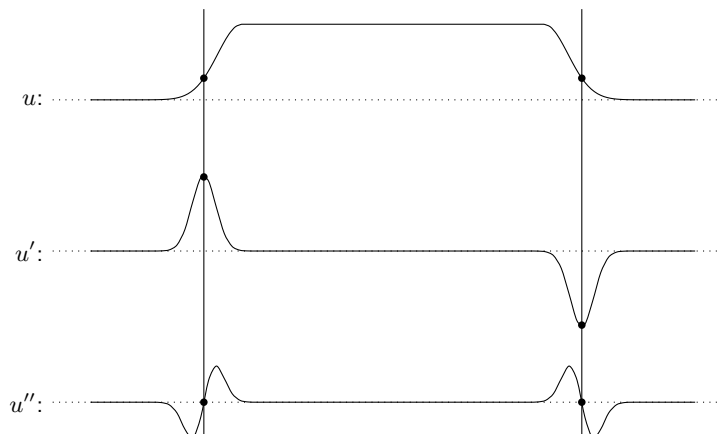
canny: Algorithmus

$t_1, t_2$ : Sind gewählt wie oben

sigma: Parameter für den Gaußkern aus 1)

## 6.2 Die zweite Ableitung

Zunächst in 1D:



Test für kantenpunkte  $u''(\mathbf{x}) = 0$  und  $|u'(\mathbf{x})| > \text{threshold}$ .

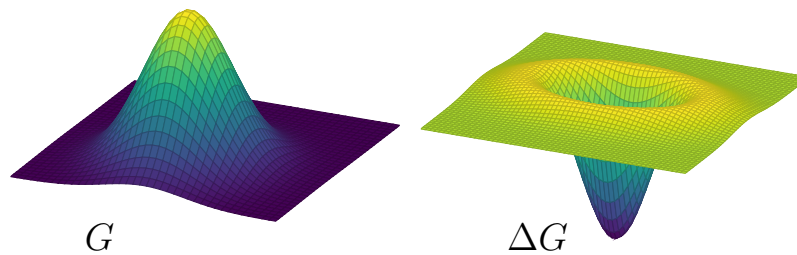
Wichtig: Vorglätten!, da die 2. Ableitung noch anfälliger gegenüber Rauschen als die 1. Ableitung ist.

In 2D. Laplace Operator  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}$  (Richtungsunabhängige Messung der 2. Ableitung)

Vorglätten:  $\Delta(G * u) = (\Delta G) * u$ , wobei  $\Delta G$  vorher berechnet werden kann.

In 1D:

In 2D:



## Index

öffnen, 13

Abreißen, 35

Absoluter Fehler, 14

anisotrop, 31

Banachraum, 23

Bilateraler Filter, 31

Bild, 3

Bilinear interpolation, 4

bimodal, 8

Canny-Algorithmus, 35

Dichte, 6

Diffusionsgleichung, 29

Diffusionstensor, 30

dilation, 11

Dirac-Impuls, 19

Diskreter Laplace Operator, 28

Domain, 5

Drehmatrix, 4

erosion, 12

Euler-Lagrange-Gleichung, 33

Faltung, 17

Farbraum, 3

Fixpunktgleichung, 9

Fixpunktiteration, 9

Fouriertransformation, 20

Frequenzbereich, 24

Frequenzraumfilter, 20

Gauß-Kern, 26

gleitendes Mittel, 18

Gradientenfilter, 33

Hilbertraum, 23

Histogramm, 5

Histogramm - equalization, 7

hysteresis thresholding, 35

Isodata Algorithmus, 9

Isotrop, 31

Kopplungskonstante, 32

Korrelation, 16

Maß, 6

Maske, 16

Masse, 8

Median, 9

Mittlewert, 9

Morphographische Operationen, 10

Nearest neighbour interpolation, 4

Non-maximum suppression, 34

Otsu's Verfahren, 8

Prewitt-Filter, 34

Rauschen, 14

Relativer Fehler, 14

Rudin–Osher–Fatemi-Funktional, 33

schließen, 12

Schwellenwert, 8

Shape based Methods, 8

Signal to noise ratio, 15

Sobel-Filter, 34

Sobolev-Räume, 33

Strukturelement, 11

Varianz, 9

Wärmegleichung, 29

Zeitbereich, 24