

# Mathematische Bildverarbeitung

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Überblick</b>	<b>2</b>
1.1	Techniken der Bildverarbeitung . . . . .	2
1.2	Unser Fokus . . . . .	2
1.3	Verwandte Vorlesungen . . . . .	2
1.4	Literatur . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Was ist ein Bild?</b>	<b>3</b>
2.1	Definition . . . . .	3
2.2	Umwandlung . . . . .	3
2.3	Beispiel Rotation . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Histogramme und deren Anwendungen</b>	<b>5</b>
3.1	Histogramme . . . . .	5
3.2	Anwendung: Kontrastverbesserung . . . . .	6
3.3	Anwendung: SW-Konvertierung . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Einfache morphographisch Operationen</b>	<b>11</b>
4.1	Verknüpfungen von A und B . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Entauschen: Filter &amp; Co.</b>	<b>14</b>
5.1	Rauschen . . . . .	14
5.2	Glättungsfilter . . . . .	15

# **1 Überblick**

## **1.1 Techniken der Bildverarbeitung**

- Kontrastverbesserung
- Entrauschen
- Kantendetektion
- Schärfen
- Inpainting
- Segmentierung (Einzlene Objekte detektieren)
- Registrierung (Bilder des selben Objektes in Einklang bringen)

## **1.2 Unser Fokus**

- Mathematische Beschreibung

## **1.3 Verwandte Vorlesungen**

- 3D computervision
- Digitale Bildanalyse
- Mustererkennung und Datenkompression
- Medical imaging

## **1.4 Literatur**

- Bredies, Lorenz : Mathematische Bildverarbeitung
- Aubert, Kornprobst : Mathematical Problems in Image Processing
- Modersitzki : Numerical Methods for Image Registration
- Alt : Lineare Funktionalanalysis

## 2 Was ist ein Bild?

### 2.1 Definition

#### Digitale/diskrete Sicht

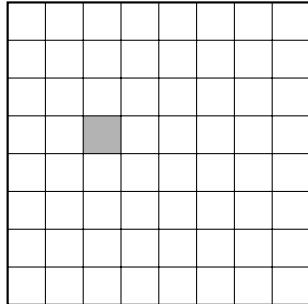


Abbildung 1: Diskretes Bild  
Darstellung als Matrix.

**Werkzeuge:** Lineare Algebra

**Vorteile:** Endlicher Speicher

**Nachteile:** Probleme bei zoomen und drehen

#### Kontinuierlich/analoge Sicht

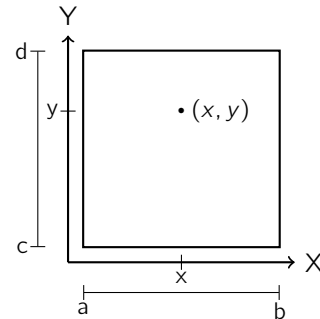


Abbildung 2: Kontinuierliches Bild  
Darstellung als Funktion in zwei  
Veränderlichen

**Werkzeuge:** Analysis

**Vorteile:** Mehr Freiheit (z.b. Kante=Linie entlang einer Unstetigkeit)

**Nachteile:** Unendlicher Speicher

**Definition.** Ein **Bild** ist eine Funktion  $u : \Omega \rightarrow F$ , wobei  $\Omega \subset \mathbb{Z}^d$  (im diskreten Fall) oder  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  (im kontinuierlichen Fall).

$d = 2$ : Typisches 2D Bild

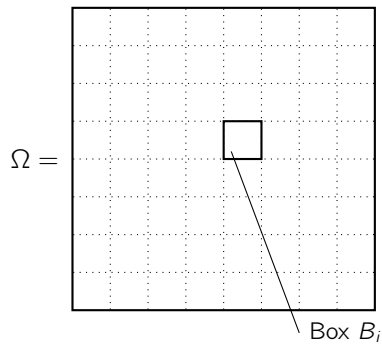
$d = 3$ : 3D-Bild bzw. "Körper" oder Video: 2D Ort + Zeit

$F$  ist der **Farbraum**, Beispiele:

- $F = [0, 1]$  oder  $F = \{0, 1, \dots, 255\}$ , Graustufen
- $F = \{0, 1\}$  schwarz/weiß
- $F = [0, 1]^3$  oder  $F = \{0, 1, \dots, 255\}^3$  Farbbilder

### 2.2 Umwandlung

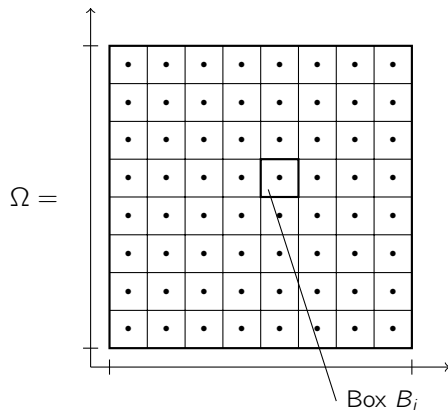
Kontinuierlich  $\rightarrow$  Diskret:



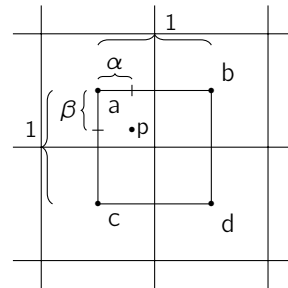
- $\Omega$  in Gitter zerlegen
- Jede Box durch nur einen Farbwert approximieren
- Etwa durch den Funktionswert im Mittelpunkt der Box
- oder durch den Mittelwert in der Box:  

$$\frac{1}{|B_i|} \cdot \int_{B_i} u(x) dx$$

Diskret  $\rightarrow$  Kontinuierlich:



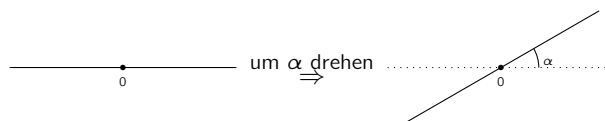
1. Idee: Jeder Punkt der Box  $B_i$  erhält den Funktionswert von  $B_i$  aus als diskretem Pixel  $\Rightarrow$  **Nearest neighbour interpolation**.
2. Idee: Mittelpunkt von Box  $B_i$  erhält den Wert von Pixel  $B_i$  sonst wird interpoliert. Grauwert  $g :=$  Gewichtetes Mittel aus Grauwerten  $a, b, c, d$ .



$$g = (1-\alpha) \cdot (1-\beta) \cdot a + \alpha \cdot (1-\beta) \cdot b + (1-\alpha) \cdot \beta \cdot c + \alpha \cdot \beta \cdot d$$

Dieses wird **Bilinear interpolation** genannt.

## 2.3 Beispiel Rotation



### 1. Fall, kontinuierliches Bild

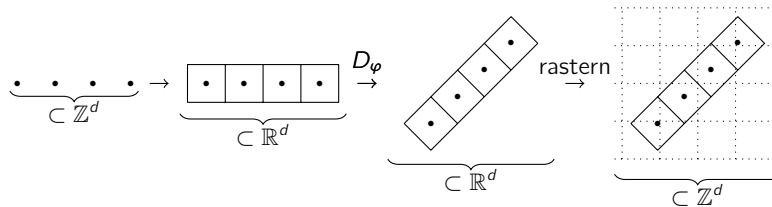
Sei  $u$  das alte Bild und  $v$  das neue Bild, dann ist die Drehung gegeben durch eine **Drehmatrix** :

$$D_\varphi \in \mathbb{R}^{d \times d}, D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

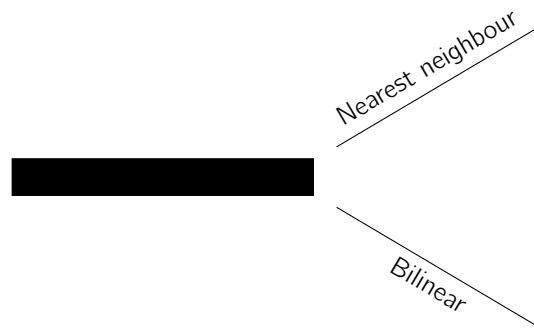
Damit folgt, dass  $D(u) = D_\varphi \Omega$  und  $v(x) = u(\underbrace{D_\varphi^{-1}x}_{\in \Omega}) = u(D_{-\varphi}x)$ . ( $D(u)$  ist die **Domain** von  $u$ )

## 2. Fall, diskretes Bild

Dieses ist problematisch, denn i.A.  $x \in \mathbb{Z}^d$ , aber  $D_\varphi x \notin \mathbb{Z}^d$ .



Weiterhin ist  $v(x) = u(D_\varphi^{-1}x)$ , wobei der konkrete Wert durch Interpolation bestimmt wird.



## 3 Histogramme und deren Anwendungen

### 3.1 Histogramme

Sei  $u : \Omega \rightarrow F$  ein diskretes Bild, dann heißt die Abbildung

$$H_u : F \rightarrow \mathbb{N}_0$$

$$F \ni k \mapsto \#\{x \in \Omega | u(x) = k\}$$

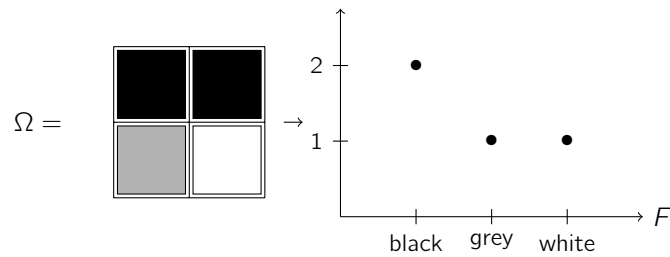
**Histogramm** des Bildes  $u$ . Dieses gibt an, wie oft die Farbe  $k$  im Bild vorhanden ist.

Damit gilt auch:

$$\sum_{k \in F} H_u(k) = |\Omega|, \text{ also die Anzahl der Pixel}$$

**Bemerkung.** Manchmal betrachtet man die relative Häufigkeit  $\tilde{H}_u(k) = \frac{H_u(k)}{|\Omega|}$ .

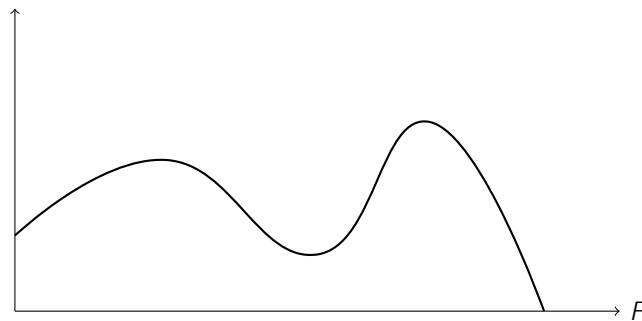
**Beispiel:**



Für kontinuierliche Bilder wird das allgemeinere Konzept von einem **Maß** benötigt:

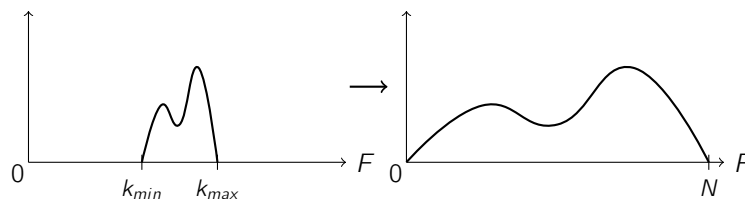
$$A \subset F, \mathcal{H}_u := |u^{-1}(A)| \begin{cases} \text{Diskretes Bild:} \\ \text{Anzahl der Elemente in } u^{-1}(A) \\ \text{Kontinuierliches Bild:} \\ \text{Volumen von } u^{-1}(A) \end{cases}$$

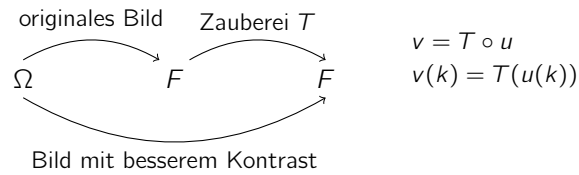
Zusammenhang zum vorherigen:  $\mathcal{H}_u(A) = \sum_{k \in A} H_u(k)$ . Man sagt dann, dass  $U_u$  eine **Dichte** zum Maß  $\mathcal{H}_u$  sei. Diese kann auch in kontinuierlichen existieren:



### 3.2 Anwendung: Kontrastverbesserung

**Problem & Idee:** Falls das Bild nur einen kleinen Teil von  $F$  nutzt, kann der Kontrast verbessert werden, indem man das Bild auf ganz  $F$  verteilt.





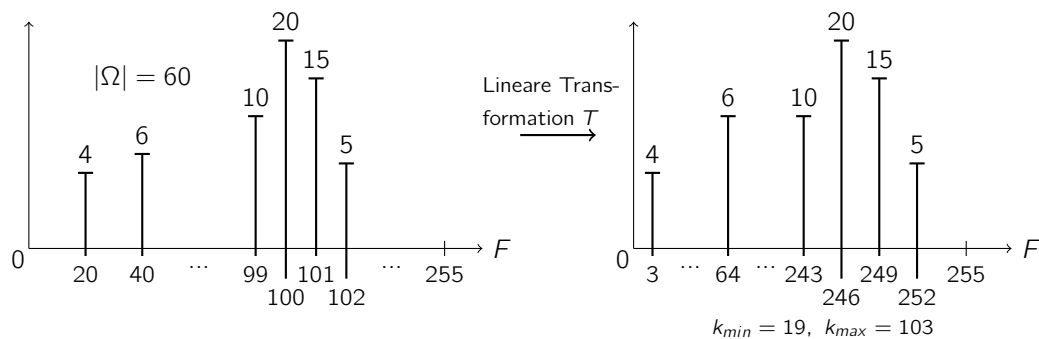
### 1. Idee, Kontrastdehnung:

$T$  "lineare" Abbildung, so dass  $T(k_{min}) = 0$  und  $T(k_{max}) = N$ :

$$T(k) = \frac{k - k_{min}}{k_{max}} N, \text{ Kontinuierlicher Farbraum}$$

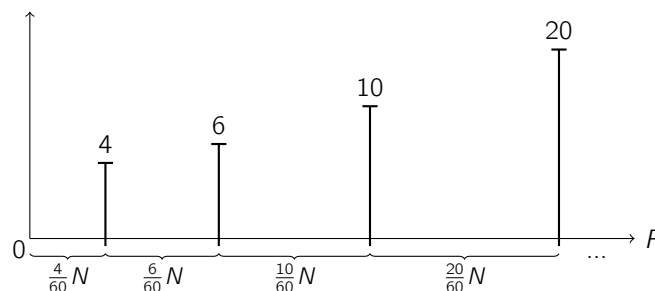
$$T(k) = \left\lceil \frac{k - k_{min}}{k_{max}} N \right\rceil, \text{ Diskreter Farbraum}$$

Beispiel:



### 2. Idee nicht-lineare Kontrastdehnung

Diesesmal setzen wir  $T(k) = \left\lceil \frac{N}{|\Omega|} \sum_{l=0}^k H_u(l) \right\rceil$  für einen diskreten Farbraum und erhalten:



$T$  lässt sich auch alternativ ausdrücken durch:

$$T(k) = [\mathcal{H}_u(\{0, \dots, k\})]$$

Und somit folgt dass für den kontinuierlichen Fall  $T$  durch

$$T(k) = \frac{N}{|\Omega|} \mathcal{H}_u((0, k))$$

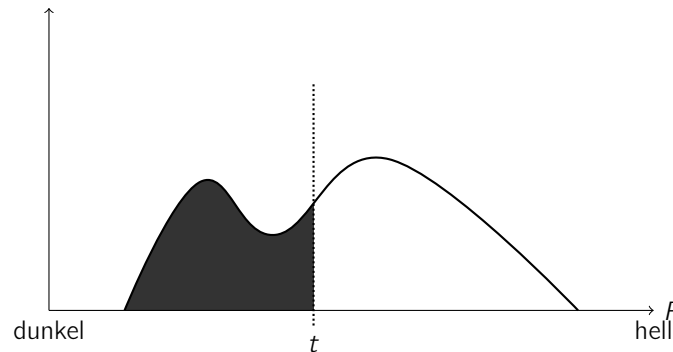
definiert werden kann. Allgemein heißt der Prozess **Histogramm - equalisation**.

### 3.3 Anwendung: SW-Konvertierung

Aufgabe: Graustufenbild  $\rightarrow$  SW-Bild.

Nützlich etwa bei Objekterkennung/Segmentierung.

Idee: Das Histogramm an einem gewissen Schwellenwert  $t$  spalten:



Also setze nun für  $t \in F$ :

$$\text{schwarz} = \{k \in F | k \leq t\}$$

$$\text{weiß} = \{k \in F | k > t\}$$

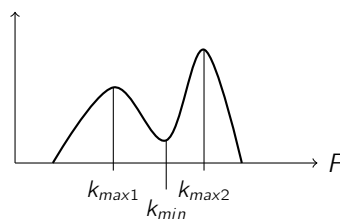
Graustufenbild  $u \rightarrow$  schwarz/weiß Bild  $\tilde{u}$ :

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} 0, & u(x) \in \text{schwarz} \\ 1, & u(x) \in \text{weiß} \end{cases} \Rightarrow \tilde{F} = \{0, 1\}$$

Methoden um diesen Schwellenwert zu wählen:

1. **Shape based Methods** :

Falls das Histogramm von  $u$  **bimodal** ist, also die Form:



hat, dann wähle:

$$t := k_{min}$$

$$\text{oder } t := \frac{k_{max1} + k_{max2}}{2}$$

2. **Otsu's Verfahren** (1979):

Vorher einige Definitionen.



Die **Masse** :

$$m_{\text{schwarz}} := \sum_{k \in \text{schwarz}} H_u(k)$$

$$m_{\text{weiß}} := \sum_{k \in \text{weiß}} H_u(k)$$

Der **Mittlewert** :

$$\mu_{\text{schwarz}} := \frac{\sum_{k \in \text{schwarz}} k \cdot H_u(k)}{\sum_{k \in \text{schwarz}} H_u(k)} = \frac{\sum_{k \in \text{schwarz}} k \cdot H_u(k)}{m_{\text{schwarz}}}$$

$$\mu_{\text{weiß}} := \frac{\sum_{k \in \text{weiß}} k \cdot H_u(k)}{\sum_{k \in \text{weiß}} H_u(k)} = \frac{\sum_{k \in \text{weiß}} k \cdot H_u(k)}{m_{\text{weiß}}}$$

Die **Varianz** :

$$\sigma_{\text{schwarz}}^2 = \sum_{k \in \text{schwarz}} (k - \mu_{\text{schwarz}})^2 \cdot H_u(k)$$

$$\sigma_{\text{weiß}}^2 = \sum_{k \in \text{weiß}} (k - \mu_{\text{weiß}})^2 \cdot H_u(k)$$

Nun lautet Otsu's Methode:  $\sigma_{\text{schwarz}}^2 + \sigma_{\text{weiß}}^2 \xrightarrow{t} \min$ .

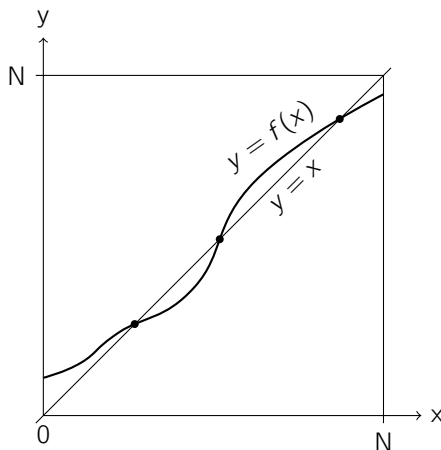
### 3. **Median** :

Wähle  $t$  so dass  $m_{\text{schwarz}} = m_{\text{weiß}}$ .

### 4. **Isodata Algorithmus** (1970s):

Wähle  $t$  so, dass  $t = \frac{\mu_{\text{schwarz}} - \mu_{\text{weiß}}}{2} =: f(t)$ .

Diese Gleichung ist bereits eine **Fixpunktgleichung** und eine Lösung kann, etwa mit einer **Fixpunktiteration** approximiert werden, das heißt  $t_{n+1} := f(t_n)$ .



**Matlab code** :

---

```

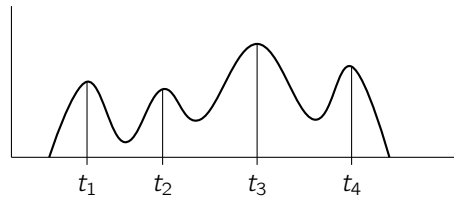
1 u=imread('liftingbody.png');
2 t=greythresh(u);%uses Otsu's method
3 v=im2bn(u,t);
4 imshow(v);

```

---

Einige dieser Verfahren können auch erweitert werden, so dass ein Graustufenbild nicht nur in zwei, sondern in  $M$  Farben zerlegt werden kann. Im allgemeinen werden dann  $M - 1$  thresholds benötigt.

### 1. Shape based :



### 2. Otsu's Verfahren :

Farbklassen:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \{k : k \leq t_1\} \\
 F_2 &= \{k : t_1 < k \leq t_2\} \\
 &\vdots \\
 F_M &= \{k : t_{M-1} < k\}
 \end{aligned}$$

Und wie zuvor:  $\sigma_1^2 + \dots + \sigma_M^2 \rightarrow \min$

### 3. Median :

Zerteile  $F$  in  $M$  Quantile gleicher Masse.

### 4. Isodata :

Hierzu existiert keine Bekannte Verallgemeinerung auf  $M$  Farbklassen.

### Matlab code :

---

```

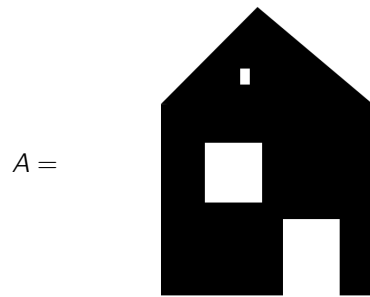
1 u=imread('Circles Bright Dark.png');
2 t=multithresh(u,M-1);
3 v=imquantize(u,t);
4 w=label2rgb(u,t);
5 imshow(w);

```

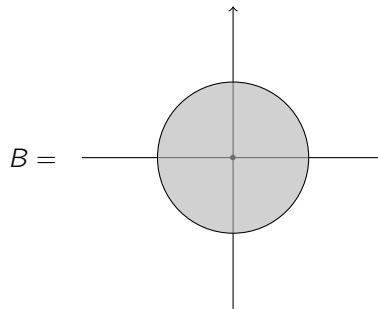
---

## 4 Einfache morphographisch Operationen

S/W Bild:



Strukturelement :



### 4.1 Verknüpfungen von A und B

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

Diese wird dilation genannt.

Anschaulich wird an jeden schwarzen Punkt des Bildes  $A$  das Struktur element  $B$  gelegt.

$$A + B =$$

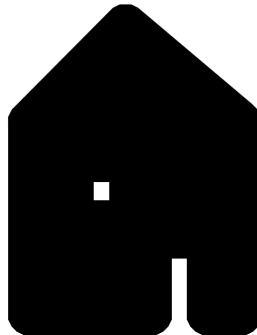


Bild erzeugt in Matlab durch:

---

```
1 I=imread('Bild1.png');
2 se=strel('disk',40,8);
3 I2=imcomplement(imdilate(imcomplement(I),se));%Es wird das Komplement des Bildes
    gebildet, damit das Strukturelement auf den schwarzen Bereich angewendet wird
4 imshow(I2);
```

---

$$A - B := \{a : a + B \subset A\}$$

Diese wird **erosion** genannt.

Anschaulich werden die schwarzen Bereiche des Bildes gesucht, in die das Strukturelement hinein passt.

$$A - B =$$

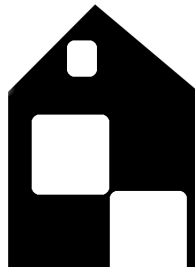


Bild erzeugt in Matlab durch:

---

```
1 I=imread('Bild1.png');
2 se=strel('disk',20,8);
```

---

```

3 I2=imcomplement(imerode(imcomplement(I),se));
4 imshow(I2);

```

---

Es ist schnell zu erkennen das  $A \neq (A + B) - B$ , deshalb wird eine neue Operation eingeführt:

$$A \bullet B := (A + B) - B$$

Dieses wird **schließen** genannt und wird etwa genutzt um Löcher, z.b. Rauschen, in einem Bild zu entfernen. Im Beispiel Bild ist zu sehen, dass das obere Fenster nicht mehr vorhanden ist.

$A \bullet B =$



Bild erzeugt in Matlab durch:

```

1 I=imread('Bild1.png');
2 se=strel('disk',20,8);
3 I2=imcomplement(imdilate(imcomplement(I),se));
4 I3=imcomplement(imerode(imcomplement(I2),se));
5 imshow(I3);

```

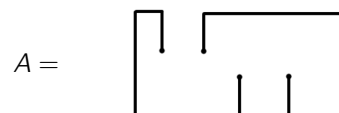
---

Es existiert auch die Umgekehrt Operation:

$$A \circ B := (A - B) + B$$

Diese wird **öffnen** genannt.

Diesmal mit einem neuen Beispiel:



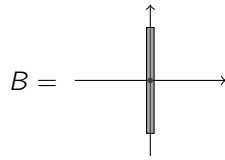


Bild erzeugt in Matlab durch:

---

```

1 I=imread('Bild2.png');
2 se=strel('line',10,90);
3 I2=imcomplement(imerode(imcomplement(I),se));
4 I3=imcomplement(imerode(imcomplement(I2),se));
5 imshow(I3);

```

---

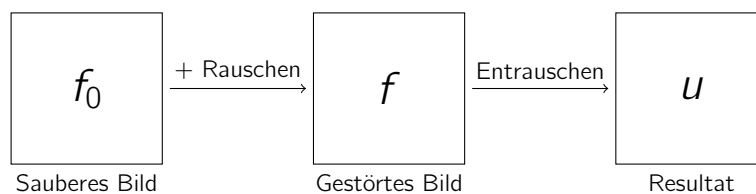
## 5 Entrauschen: Filter & Co.

### 5.1 Rauschen

**Rauschen** : Ungewollte Störungen in einem Bild

- punktweise
- zufällig
- unabhängig
- additiv (bei multiplikativem Rauschen *log* anwenden)

Notation:



Wie gut das entrauschte Bild  $u$  das saubere Bild  $f_0$  beschreibt wird durch Normen gemessen.

$\|f - f_0\|$ , Rauschen

$\|u - f_0\|$ , **Absoluter Fehler**

$\frac{\|u - f_0\|}{\|f - f_0\|}$ , **Relativer Fehler** im Vergleich zum Rauschen

$\frac{\|u - f_0\|}{\|f_0\|}$ , Relativer Fehler im Vergleich zum Signal

Typischerweise ist die gewählte Norm:

$$\|f\| = \|f\|_2 = \sqrt{\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx}$$

oder im diskreten:

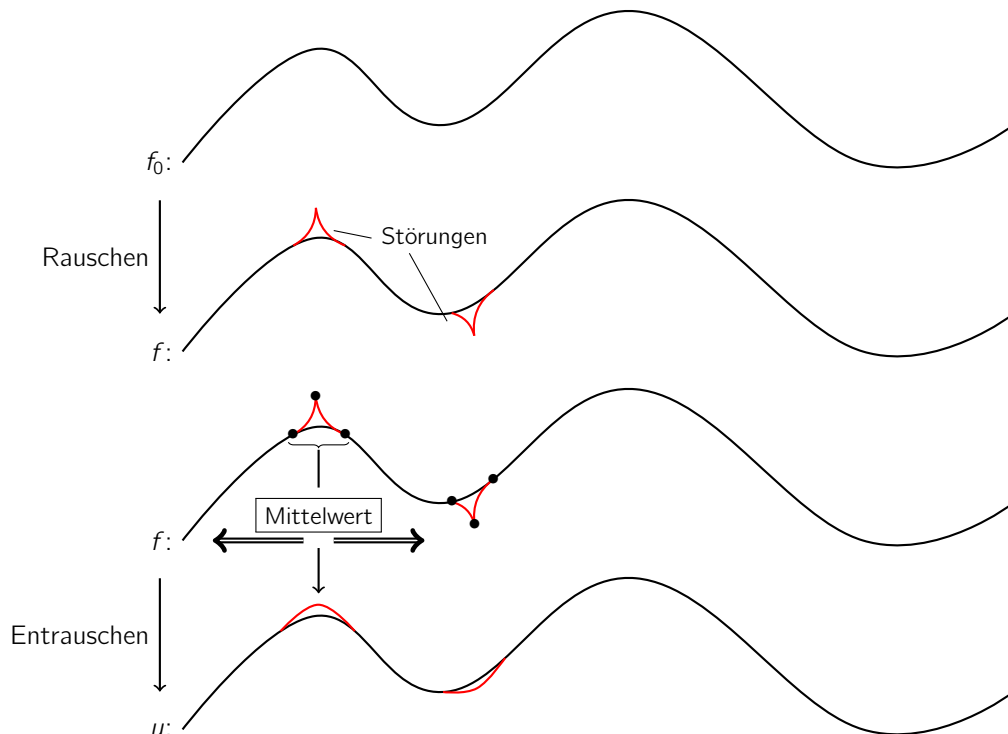
$$\|f\|_2 = \sqrt{\sum_{x \in \Omega} |f(x)|^2}$$

Eng verwandt ist die **Signal to noise ratio** (SNR):

$$\log\left(\underbrace{\frac{\|f_0\|_2}{\|u - f_0\|_2}}_{\in [1, \infty)}\right) \in [0, +\infty), \text{ wobei } 0 \text{ schlecht und } +\infty \text{ gut ist.}$$

## 5.2 Glättungsfilter

Grundidee: (zur Vereinfachung in 1D)

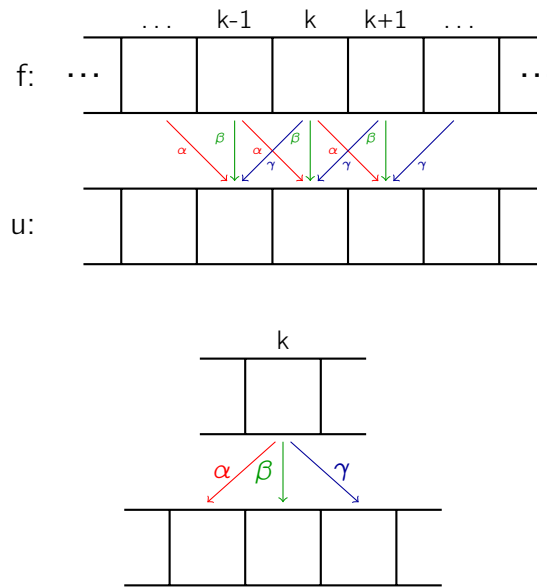


$$u(k) := \alpha \cdot f(k-1) + \beta \cdot f(k) + \gamma \cdot f(k+1) \quad (5.1)$$

wobei:

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \quad (5.2)$$

Schematisch bedeutet (5.1):



Durch (5.1) ist eine Abbildung  $f \mapsto u$  gegeben, wir schreiben kurz:

$$u = m \boxtimes f, \text{ dieses wird } \underline{\text{Korrelation}} \text{ genannt.}$$

mit:

$$(m \boxtimes f)(k) = \sum_{i \in \text{supp}(m)} m(i) f(k+i) \quad (5.3)$$

und:

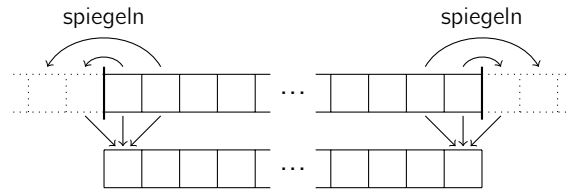
$$m = \begin{array}{ccccc} & \dots & -1 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \alpha & \beta & \gamma & \dots \end{array} \text{ genannt } \underline{\text{Maske}} .$$

Setzt man nun  $j := k + i$  in (5.1), so ist  $i = j - k$ , d.h.

$$(m \boxtimes f)(k) = \sum_{i \in \text{supp}(m)} m(j-k) f(j) \quad (5.4)$$

Um die Abbildung auf den Rand anzuwenden wird das Bild gespiegelt, in 1D:





in 2D:

d	b	d
q	p	q
d	b	d

Formel (5.4) erinnert an die Formel der **Faltung** :

$$(g * f)(k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} g(\underbrace{k-j}_{\text{Anders als (5.4)}}) \cdot f(j) \quad (5.5)$$

Setzt man also  $g(i) := m(-i) =: \tilde{m}(i)$ , was einer Spiegelung der Maske entspricht, dann ist

$$m \boxtimes f = g * f = \tilde{m} * f$$

Eigenschaften der Faltung:

- 1'  $(f * g) * h = f * (g * h)$ , Assoziativität
- 2'  $f * g = g * f$ , Kommutativität
- 3'  $\tilde{f} * \tilde{g} = \widetilde{f * g}$ , Kompatibilität mit Spiegelung

Eigenschaften der Korrelation:

- 1'  $f \boxtimes (g \boxtimes h) = \tilde{f} * (\tilde{g} * h) \stackrel{1}{=} (\tilde{f} * \tilde{g}) * h \stackrel{3}{=} (\widetilde{f * g}) * h = (f * g) \boxtimes h \neq (f \boxtimes g) \boxtimes h$ , nicht assoziativ!
- 2'  $f \boxtimes g = \tilde{f} * g \stackrel{2}{=} g * \tilde{f} = \tilde{g} * \tilde{f} \stackrel{3}{=} \widetilde{(\tilde{g} * f)} = \widetilde{g \boxtimes f} \neq g \boxtimes f$ , nicht kommutativ!
- 3'  $\tilde{f} \boxtimes \tilde{g} = \tilde{f} * \tilde{g} \stackrel{3}{=} \widetilde{(\tilde{f} * g)} = \widetilde{f \boxtimes g}$ , Kompatibilität mit Spiegelung

## Index

öffnen, 13

Absoluter Fehler, 15

Bild, 3

Bilinear interpolation, 4

bimodal, 8

Dichte, 6

dilation, 11

Domain, 5

Drehmatrix, 4

erosion, 12

Faltung, 17

Farbraum, 3

Fixpunktgleichung, 9

Fixpunktiteration, 9

Histogramm, 5

Histogramm - equalisation, 7

Isodata Algorithmus, 9

Korrelation, 16

Maß, 6

Maske, 16

Masse, 9

Median, 9

Mittelwert, 9

morphographisch Operationen, 11

Nearest neighbour interpolation, 4

Otsu's Verfahren, 8

Rauschen, 14

Relativer Fehler, 15

schließen, 13

Schwellenwert, 8

Shape based Methods, 8

Signal to noise ratio, 15

Strukturelement, 11

Varianz, 9