

Mathematische Bildverarbeitung

Vorlesungsskript



Institut für Mathematik
Vorlesung von Prof. Dr. Marko Lindner
In \LaTeX gesetzt durch Jonas Sattler

Wintersemester 2018/19

Fehlermeldungen an fabian.gabel@tuhh.de

Inhaltsverzeichnis

1 Überblick	2
1.1 Techniken der Bildverarbeitung	2
1.2 Unser Fokus	2
1.3 Verwandte Vorlesungen	2
1.4 Literatur	2

1 Überblick

1.1 Techniken der Bildverarbeitung

- Kontrastverbesserung
- Entrauschen
- Kantendetektion
- Schärfen
- Inpainting
- Segmentierung (Einzelne Objekte detektieren)
- Registrierung (Bilder des selben Objektes in Einklang bringen)

1.2 Unser Fokus

- Mathematische Beschreibung

1.3 Verwandte Vorlesungen

- 3D Computervision
- Digitale Bildanalyse
- Mustererkennung und Datenkompression
- Medical imaging

1.4 Literatur

- Bredies, Lorenz : Mathematische Bildverarbeitung
- Aubert, Kornprobst : Mathematical Problems in Image Processing
- Modersitzki : Numerical Methods for Image Registration
- Alt : Lineare Funktionalanalysis

2 Was ist ein Bild?

2.1 Definition

Digitale/diskrete Sicht

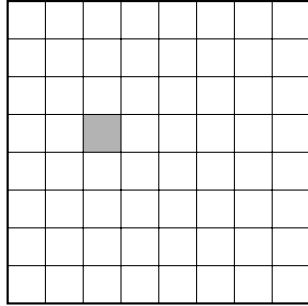


Abbildung 1: Diskretes Bild
Darstellung als Matrix.

Kontinuierlich/analoge Sicht

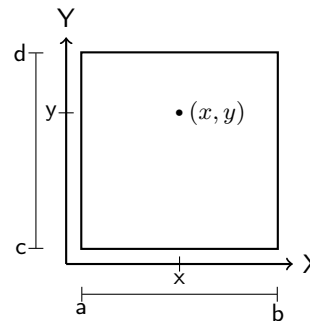


Abbildung 2: Kontinuierliches Bild
Darstellung als Funktion in zwei
Veränderlichen

Werkzeuge: Lineare Algebra

Vorteile: Endlicher Speicher

Nachteile: Probleme bei zoomen und drehen

Werkzeuge: Analysis

Vorteile: Mehr Freiheit (z.b. Kante=Linie entlang einer Unstetigkeit)

Nachteile: Unendlicher Speicher

Definition. Ein **Bild** ist eine Funktion $u : \Omega \rightarrow F$, wobei $\Omega \subset \mathbb{Z}^d$ (im diskreten Fall) oder $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (im kontinuierlichen Fall).

$d = 2$: Typisches 2D Bild

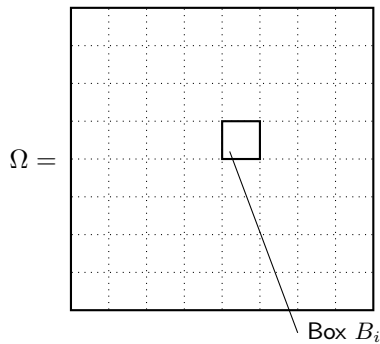
$d = 3$: 3D-Bild bzw. "Körper" oder Video: 2D Ort + Zeit

F ist der **Farbraum**, Beispiele:

- $F = [0, 1]$ oder $F = \{0, 1, \dots, 255\}$, Graustufen
- $F = \{0, 1\}$ schwarz/weiß
- $F = [0, 1]^3$ oder $F = \{0, 1, \dots, 255\}^3$ Farbbilder

2.2 Umwandlung

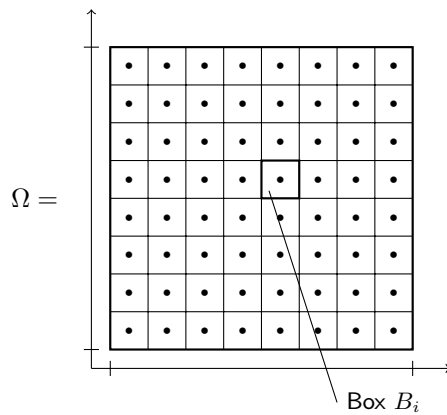
Kontinuierlich \rightarrow Diskret:



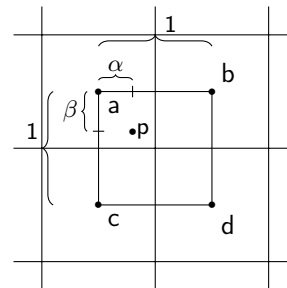
- Ω in Gitter zerlegen
- Jede Box durch nur einen Farbwert approximieren
- Etwa durch den Funktionswert im Mittelpunkt der Box
- oder durch den Mittelwert in der Box:

$$\frac{1}{|B_i|} \cdot \int_{B_i} u(x) dx$$

Diskret \rightarrow Kontinuierlich:



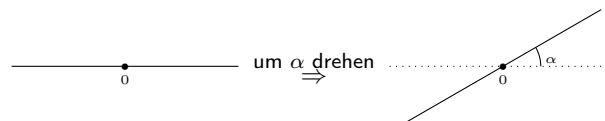
1. Idee: Jeder Punkt der Box B_i erhält den Funktionswert von B_i als Farbwert
 \Rightarrow Nearest neighbour Interpolation .
2. Idee: Mittelpunkt von Box B_i erhält den Wert von Pixel B_i sonst wird interpoliert.
 Grauwert $g :=$ Gewichtetes Mittel aus Grauwerten a, b, c, d .



$$g = (1 - \alpha)(1 - \beta)a + \alpha(1 - \beta)b + (1 - \alpha)\beta c + \alpha\beta d$$

Dieses wird Bilineare Interpolation genannt.

2.3 Beispiel Rotation



1. Fall, kontinuierliches Bild

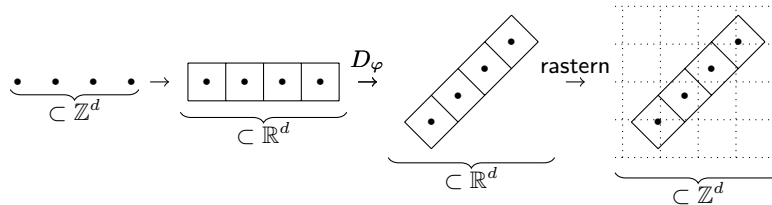
Sei u das alte Bild und v das neue Bild, dann ist die Drehung gegeben durch eine Drehmatrix :

$$D_\varphi \in \mathbb{R}^{d \times d}, D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

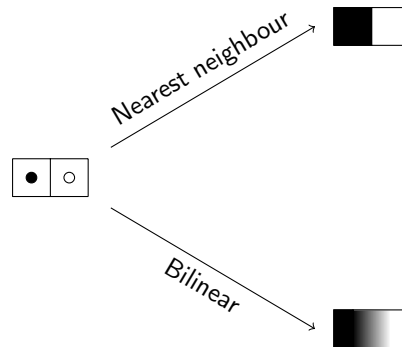
Damit folgt, dass $D(u) = D_\varphi \Omega$ und $v(x) = u(\underbrace{D_\varphi^{-1}x}_{\in \Omega}) = u(D_{-\varphi}x)$. ($D(u)$ ist die **Domain** von u)

2. Fall, diskretes Bild

Dieses ist problematisch, denn i.A. $x \in \mathbb{Z}^d$, aber $D_\varphi x \notin \mathbb{Z}^d$.



Weiterhin ist $v(x) = u(D_\varphi^{-1}x)$, wobei der konkrete Wert durch Interpolation bestimmt wird.



Index

- H^1 deblurring, 42
- L^2 deblurring, 42
- öffnen, 14

- Abreißen, 35
- Absoluter Fehler, 15
- affin-linear, 48
- anisotrop, 31

- Banachraum, 24
- Beleuchtungsausgleich, 47
- Bilateraler Filter, 32
- Bild, 4
- Bilineare Interpolation, 5
- bimodal, 9

- Canny-Algorithmus, 35

- Dichte, 7
- Diffusionsgleichung, 29
- Diffusionstensor, 31
- dilation, 12
- Dirac-Impuls, 20
- Diskreter Laplace Operator, 28
- Distributioneller Gradient, 60
- Distributionen, 58
- Domain, 6
- doppelt geglätteter Strukturtensor, 45
- Drehmatrix, 5
- Dualraum, 57

- Entfaltung, 39
- erosion, 13
- Euler-Lagrange-Gleichung, 34

- Faltung, 18
- Farbraum, 4
- Fixpunktgleichung, 10
- Fixpunktiteration, 10
- Fouriertransformation, 21
- Frequenzbereich, 25
- Frequenzraumfilter, 21

- Gauß-Kern, 27
- gleitendes Mittel, 19
- Gradientenfilter, 34

- Hilbertraum, 24
- Histogramm, 6
- Histogramm - equalization, 9
- Histogramm thresholding, 46
- hysteresis thresholding, 35

- Isodata Algorithmus, 10
- Isotrop, 31

- Kohärenzrichtung, 45
- Kohärenz verstärkende Diffusion, 46
- Kopplungskonstante, 33
- Korrelation, 17

- Landmarks, 53
- Laplace-Schärfen, 37
- Laplacian of Gaußian method, 37
- Lineare Regression, 48

- Maß, 7
- Maske, 17
- Masse, 10
- Median, 10
- Merkmale, 53
- Mittelwert, 10
- Morphographische Operationen, 11
- Mumford-Shah-Funktional, 52

- Nearest neighbour Interpolation, 5
- Non-maximum suppression, 35
- Normalengleichung, 48
- Normalized Crosscorrelation, 56

- Otsu's Verfahren, 10

- Polynomiale Regression, 48
- Prewitt-Filter, 34

- Rauschen, 15
- Relativer Fehler, 15
- Rudin–Osher–Fatemi-Funktional, 33

- schließen, 13
- Schwellenwert, 9
- Shape based Methods, 9
- Signal to noise ratio, 16
- Sobel-Filter, 35
- Sobolev-Räume, 33
- strengkonvex, 62
- Strukturelement, 12
- Sub-Niveaumenge, 62

- Toeplitz-Matrix, 39
- Totalvariation, 50
- Trigonometrisches Polynom, 49

- Untere Halbstatigkeit, 61

- Varianz, 10

Wärmegleichung, [29](#)

Zeitbereich, [25](#)