

Mathematische Bildverarbeitung

Inhaltsverzeichnis

1 Überblick	2
1.1 Techniken der Bildverarbeitung	2
1.2 Unser Fokus	2
1.3 Verwandte Vorlesungen	2
1.4 Literatur	2
2 Was ist ein Bild?	3
2.1 Definition	3
2.2 Umwandlung	3
2.3 Beispiel Rotation	4
3 Histogramme und deren Anwendungen	5
3.1 Histogramme	5
3.2 Anwendung: Kontrastverbesserung	6
3.3 Anwendung: SW-Konvertierung	8
4 Einfache Morphographische Operationen	10
4.1 Verknüpfungen von A und B	11
5 Entrauschen: Filter & Co.	14
5.1 Rauschen	14
5.2 Glättungsfilter	15
5.3 Frequenzraum-filter	20
5.4 Filterbreite und Glättung	26

5.5	Differenzenfilter	27
5.6	Glättungsfilter und partielle Differentialgleichungen	28
5.7	Isotrope und anisotrope Diffusion	30
5.8	Bilaterale Filter	31
5.9	Entauschen mittels Variationsrechnung	32
6	Kantenerkennung	33
6.1	<u>Gradientenfilter</u>	33
6.2	Die zweite Ableitung	35
7	Schärfen und Entfalten	36
7.1	<u>Laplace-Schärfen</u>	37
7.2	Kantenverstärkende Diffusion	37
7.3	<u>Entfaltung</u>	38

1 Überblick

1.1 Techniken der Bildverarbeitung

- Kontrastverbesserung
- Entrauschen
- Kantendetektion
- Schärfen
- Inpainting
- Segmentierung (Einzlene Objekte detektieren)
- Registrierung (Bilder des selben Objektes in Einklang bringen)

1.2 Unser Fokus

- Mathematische Beschreibung

1.3 Verwandte Vorlesungen

- 3D computervision
- Digitale Bildanalyse
- Mustererkennung und Datenkompression
- Medical imaging

1.4 Literatur

- Bredies, Lorenz : Mathematische Bildverarbeitung
- Aubert, Kornprobst : Mathematical Problems in Image Processing
- Modersitzki : Numerical Methods for Image Registration
- Alt : Lineare Funktionalanalysis

2 Was ist ein Bild?

2.1 Definition

Digitale/diskrete Sicht

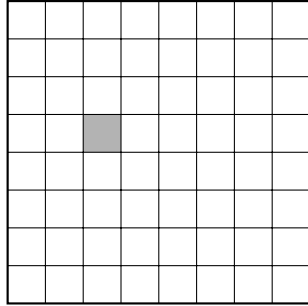


Abbildung 1: Diskretes Bild
Darstellung als Matrix.

Kontinuierlich/analoge Sicht

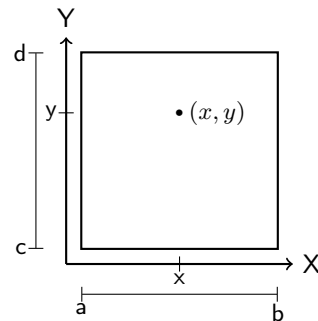


Abbildung 2: Kontinuierliches Bild
Darstellung als Funktion in zwei
Veränderlichen

Werkzeuge: Lineare Algebra

Vorteile: Endlicher Speicher

Nachteile: Probleme bei zoomen und drehen

Werkzeuge: Analysis

Vorteile: Mehr Freiheit (z.b. Kante=Linie entlang einer Unstetigkeit)

Nachteile: Unendlicher Speicher

Definition. Ein **Bild** ist eine Funktion $u : \Omega \rightarrow F$, wobei $\Omega \subset \mathbb{Z}^d$ (im diskreten Fall) oder $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (im kontinuierlichen Fall).

$d = 2$: Typisches 2D Bild

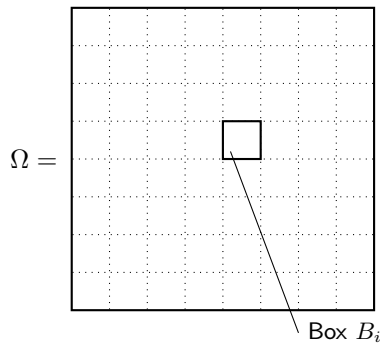
$d = 3$: 3D-Bild bzw. "Körper" oder Video: 2D Ort + Zeit

F ist der **Farbraum**, Beispiele:

- $F = [0, 1]$ oder $F = \{0, 1, \dots, 255\}$, Graustufen
- $F = \{0, 1\}$ schwarz/weiß
- $F = [0, 1]^3$ oder $F = \{0, 1, \dots, 255\}^3$ Farbbilder

2.2 Umwandlung

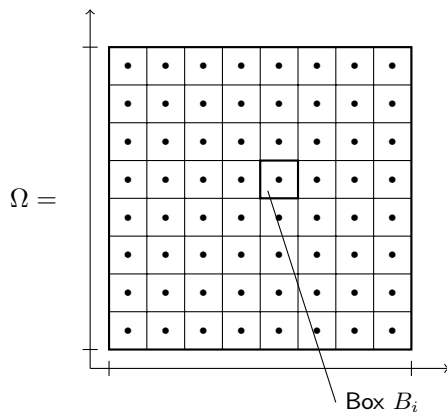
Kontinuierlich \rightarrow Diskret:



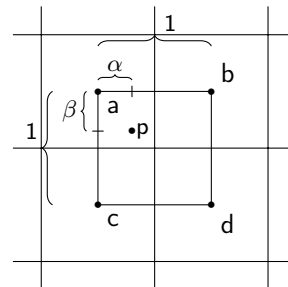
- Ω in Gitter zerlegen
- Jede Box durch nur einen Farbwert approximieren
- Etwa durch den Funktionswert im Mittelpunkt der Box
- oder durch den Mittelwert in der Box:

$$\frac{1}{|B_i|} \cdot \int_{B_i} u(x) dx$$

Diskret \rightarrow Kontinuierlich:



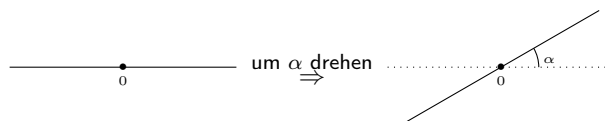
1. Idee: Jeder Punkt der Box B_i erhält den Funktionswert von B_i aus als diskretem Pixel \Rightarrow **Nearest neighbour interpolation**.
2. Idee: Mittelpunkt von Box B_i erhält den Wert von Pixel B_i sonst wird interpoliert. Grauwert $g :=$ Gewichtetes Mittel aus Grauwerten a, b, c, d .



$$g = (1-\alpha) \cdot (1-\beta) \cdot a + \alpha \cdot (1-\beta) \cdot b + (1-\alpha) \cdot \beta \cdot c + \alpha \cdot \beta \cdot d$$

Dieses wird **Bilinear interpolation** genannt.

2.3 Beispiel Rotation



1. Fall, kontinuierliches Bild

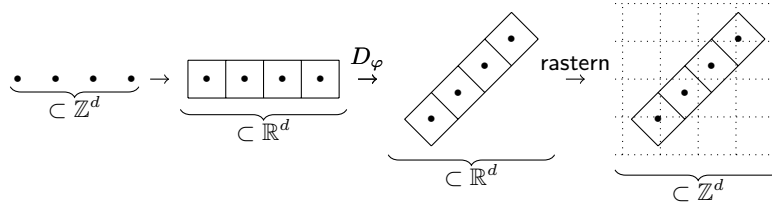
Sei u das alte Bild und v das neue Bild, dann ist die Drehung gegeben durch eine **Drehmatrix** :

$$D_\varphi \in \mathbb{R}^{d \times d}, D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

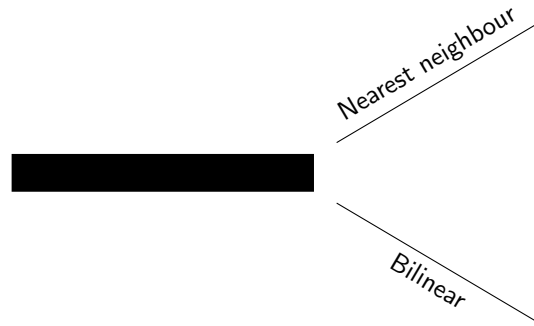
Damit folgt, dass $D(u) = D_\varphi \Omega$ und $v(x) = u(\underbrace{D_\varphi^{-1}x}_{\in \Omega}) = u(D_{-\varphi}x)$. ($D(u)$ ist die **Domain** von u)

2. Fall, diskretes Bild

Dieses ist problematisch, denn i.A. $x \in \mathbb{Z}^d$, aber $D_\varphi x \notin \mathbb{Z}^d$.



Weiterhin ist $v(x) = u(D_\varphi^{-1}x)$, wobei der konkrete Wert durch Interpolation bestimmt wird.



3 Histogramme und deren Anwendungen

3.1 Histogramme

Sei $u : \Omega \rightarrow F$ ein diskretes Bild, dann heißt die Abbildung

$$H_u : F \rightarrow \mathbb{N}_0$$

$$F \ni k \mapsto \#\{x \in \Omega | u(x) = k\}$$

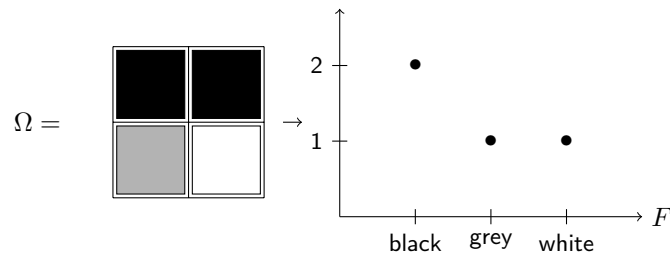
Histogramm des Bildes u . Dieses gibt an, wie oft die Farbe k im Bild vorhanden ist.

Damit gilt auch:

$$\sum_{k \in F} H_u(k) = |\Omega|, \text{ also die Anzahl der Pixel}$$

Bemerkung. Manchmal betrachtet man die relative Häufigkeit $\tilde{H}_u(k) = \frac{H_u(k)}{|\Omega|}$.

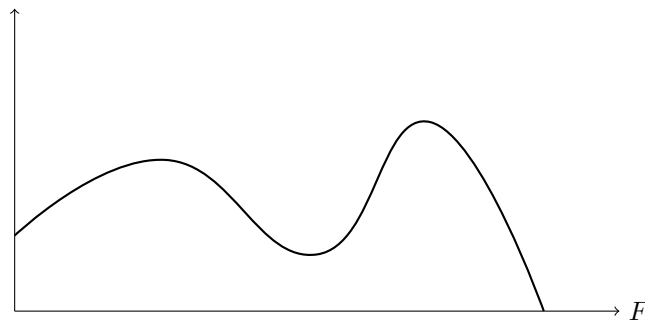
Beispiel:



Für kontinuierliche Bilder wird das allgemeinere Konzept von einem **Maß** benötigt:

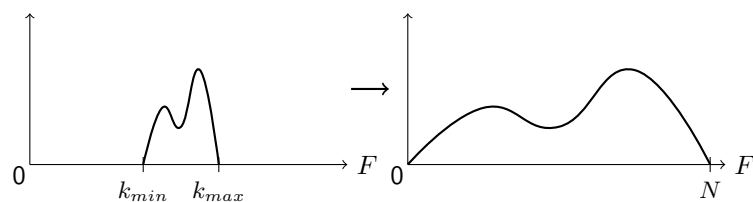
$$A \subset F, \mathcal{H}_u := |u^{-1}(A)| \begin{cases} \text{Diskretes Bild:} \\ \text{Anzahl der Elemente in } u^{-1}(A) \\ \text{Kontinuierliches Bild:} \\ \text{Volumen von } u^{-1}(A) \end{cases}$$

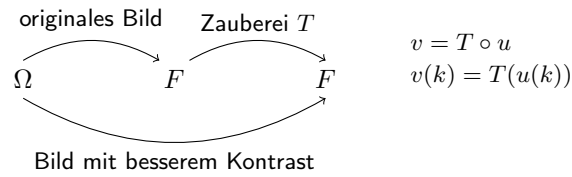
Zusammenhang zum vorherigen: $\mathcal{H}_u(A) = \sum_{k \in A} H_u(k)$. Man sagt dann, dass U_u eine **Dichte** zum Maß \mathcal{H}_u sei. Diese kann auch im kontinuierlichen existieren:



3.2 Anwendung: Kontrastverbesserung

Problem & Idee: Falls das Bild nur einen kleinen Teil von F nutzt, kann der Kontrast verbessert werden, indem man das Bild auf ganz F verteilt.





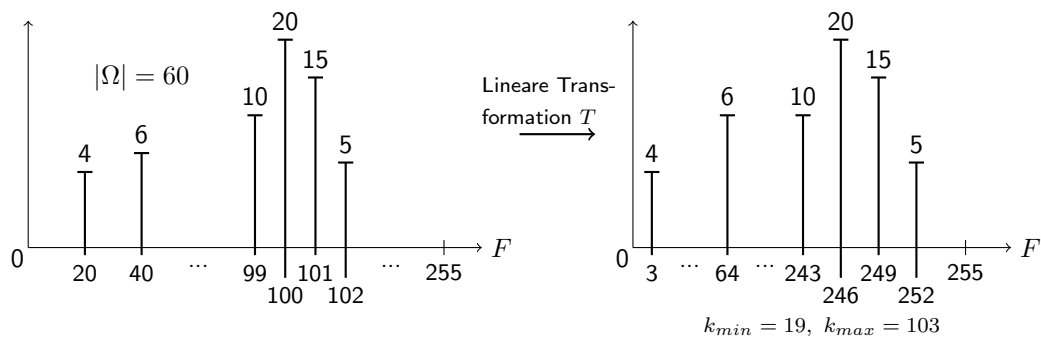
1. Idee, Kontrastdehnung:

T "lineare" Abbildung, so dass $T(k_{min}) = 0$ und $T(k_{max}) = N$:

$$T(k) = \frac{k - k_{min}}{k_{max} - k_{min}} N, \text{ Kontinuierlicher Farbraum}$$

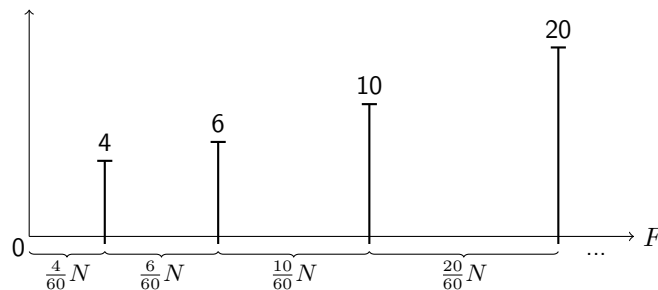
$$T(k) = \left\lceil \frac{k - k_{min}}{k_{max} - k_{min}} N \right\rceil, \text{ Diskreter Farbraum}$$

Beispiel:



2. Idee nicht-lineare Kontrastdehnung

Diesesmal setzen wir $T(k) = \left\lceil \frac{N}{|\Omega|} \sum_{l=0}^k H_u(l) \right\rceil$ für einen diskreten Farbraum und erhalten:



T lässt sich auch alternativ ausdrücken durch:

$$T(k) = \lceil \mathcal{H}_u(\{0, \dots, k\}) \rceil$$

Und somit folgt dass für den kontinuierlichen Fall T durch

$$T(k) = \frac{N}{|\Omega|} \mathcal{H}_u((0, k))$$

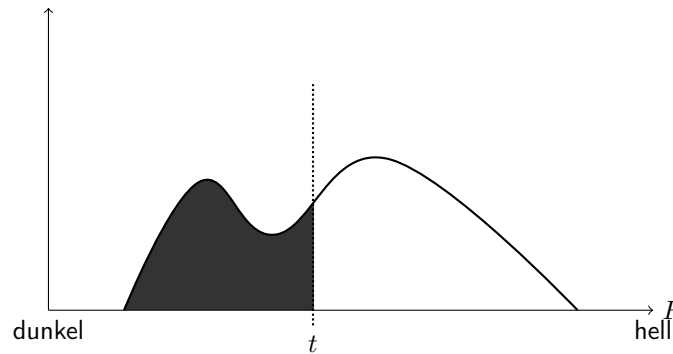
definiert werden kann. Allgemein heißt der Prozess Histogramm - equalization.

3.3 Anwendung: SW-Konvertierung

Aufgabe: Graustufenbild \rightarrow SW-Bild.

Nützlich etwa bei Objekterkennung/Segmentierung.

Idee: Das Histogramm an einem gewissen **Schwellenwert** t spalten:



Also setze nun für $t \in F$:

$$\text{schwarz} = \{k \in F | k \leq t\}$$

$$\text{weiß} = \{k \in F | k > t\}$$

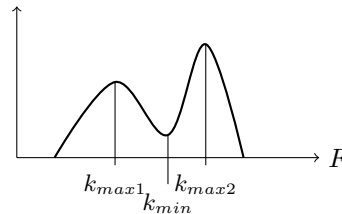
Graustufenbild $u \rightarrow$ schwarz/weiß Bild \tilde{u} :

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} 0, & u(x) \in \text{schwarz} \\ 1, & u(x) \in \text{weiß} \end{cases} \Rightarrow \tilde{F} = \{0, 1\}$$

Methoden um diesen Schwellenwert zu wählen:

1. Shape based Methods :

Falls das Histogramm von u **bimodal** ist, also die Form:



hat, dann wähle:

$$t := k_{\min}$$

$$\text{oder } t := \frac{k_{\max 1} + k_{\max 2}}{2}$$

2. Otsu's Verfahren (1979):

Vorher einige Definitionen.

Die **Masse** :

$$m_{\text{schwarz}} := \sum_{k \in \text{schwarz}} H_u(k)$$

$$m_{\text{weiß}} := \sum_{k \in \text{weiß}} H_u(k)$$

Der **Mittlewert** :

$$\mu_{\text{schwarz}} := \frac{\sum_{k \in \text{schwarz}} k \cdot H_u(k)}{\sum_{k \in \text{schwarz}} H_u(k)} = \frac{\sum_{k \in \text{schwarz}} k \cdot H_u(k)}{m_{\text{schwarz}}}$$

$$\mu_{\text{weiß}} := \frac{\sum_{k \in \text{weiß}} k \cdot H_u(k)}{\sum_{k \in \text{weiß}} H_u(k)} = \frac{\sum_{k \in \text{weiß}} k \cdot H_u(k)}{m_{\text{weiß}}}$$

Die **Varianz** :

$$\sigma_{\text{schwarz}}^2 = \sum_{k \in \text{schwarz}} (k - \mu_{\text{schwarz}})^2 \cdot H_u(k)$$

$$\sigma_{\text{weiß}}^2 = \sum_{k \in \text{weiß}} (k - \mu_{\text{weiß}})^2 \cdot H_u(k)$$

Nun lautet Otsu's Methode: $\sigma_{\text{schwarz}}^2 + \sigma_{\text{weiß}}^2 \xrightarrow{t} \min$.

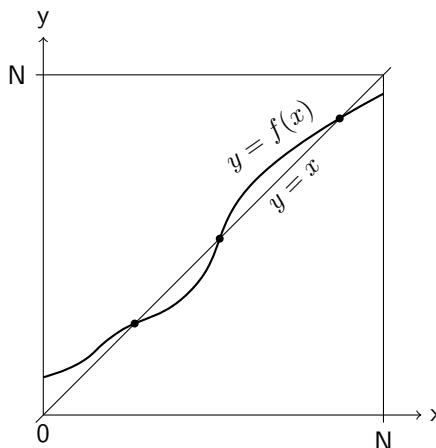
3. **Median** :

Wähle t so dass $m_{\text{schwarz}} = m_{\text{weiß}}$.

4. **Isodata Algorithmus** (1970s):

Wähle t so, dass $t = \frac{\mu_{\text{schwarz}} - \mu_{\text{weiß}}}{2} =: f(t)$.

Diese Gleichung ist bereits eine **Fixpunktgleichung** und eine Lösung kann, etwa mit einer **Fixpunktiteration** approximiert werden, das heißt $t_{n+1} := f(t_n)$.



Matlab code :

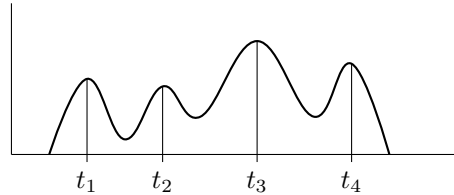
```

1 u=imread('liftingbody.png');
2 t=greythresh(u);%uses Otsu's method
3 v=im2bn(u,t);
4 imshow(v);

```

Einige dieser Verfahren können auch erweitert werden, so dass ein Graustufenbild nicht nur in zwei, sondern in M Farben zerlegt werden kann. Im allgemeinen werden dann $M - 1$ thresholds benötigt.

1. **Shape based :**



2. **Otsu's Verfahren :**

Farbklassen:

$$F_1 = \{k : k \leq t_1\}$$

$$F_2 = \{k : t_1 < k \leq t_2\}$$

\vdots

$$F_M = \{k : t_{M-1} < k\}$$

Und wie zuvor: $\sigma_1^2 + \dots + \sigma_M^2 \rightarrow \min$

3. **Median :**

Zerteile F in M Quantile gleicher Masse.

4. **Isodata :**

Hierzu existiert keine Bekannte Verallgemeinerung auf M Farbklassen.

Matlab code :

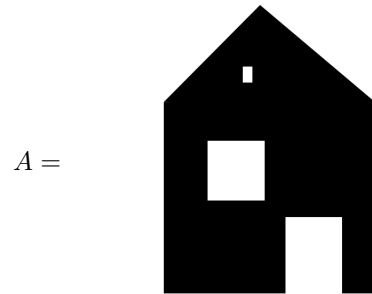
```

1 u=imread('Circles Bright Dark.png');
2 t=multithresh(u,M-1);
3 v=imquantize(u,t);
4 w=label2rgb(u,t);
5 imshow(w);

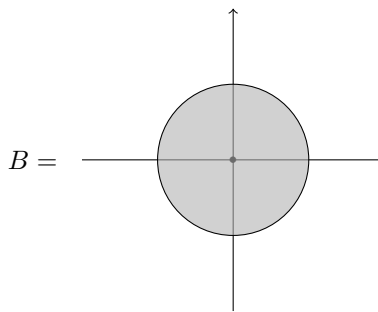
```

4 Einfache Morphographische Operationen

S/W Bild:



Strukturelement :



4.1 Verknüpfungen von A und B

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

Diese wird **dilation** genannt.

Anschaulich wird an jeden schwarzen Punkt des Bildes A das Struktur element B gelegt.

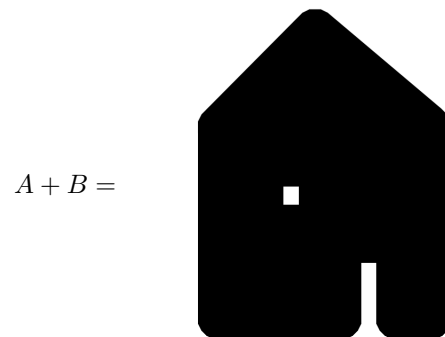


Bild erzeugt in Matlab durch:

```

1 I=imread('Bild1.png');
2 se=strel('disk',40,8);
3 I2=imcomplement(imdilate(imcomplement(I),se));%Es wird das Komplement des Bildes
   gebildet, damit das Strukturelement auf den schwarzen Bereich angewendet wird
4 imshow(I2);

```

$$A - B := \{a : a + B \subset A\}$$

Diese wird **erosion** genannt.

Anschaulich werden die schwarzen Bereiche des Bildes gesucht, in die das Strukturelement hinein passt.

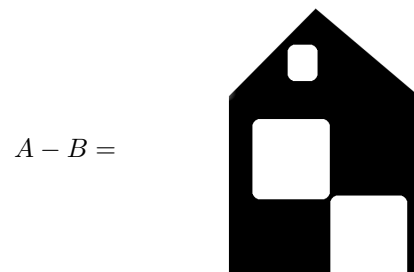


Bild erzeugt in Matlab durch:

```

1 I=imread('Bild1.png');
2 se=strel('disk',20,8);
3 I2=imcomplement(imerode(imcomplement(I),se));
4 imshow(I2);

```

Es ist schnell zu erkennen das $A \neq (A + B) - B$, deshalb wird eine neue Operation eingeführt:

$$A \bullet B := (A + B) - B$$

Dieses wird **schließen** genannt und wird etwa genutzt um Löcher, z.b. Rauschen, in einem Bild zu entfernen. Im Beispiel Bild ist zu sehen, dass das obere Fenster nicht mehr vorhanden ist.

$$A \bullet B =$$

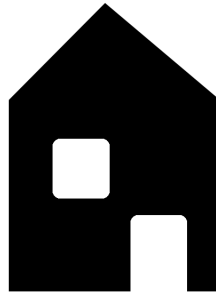


Bild erzeugt in Matlab durch:

```

1 I=imread('Bild1.png');
2 se=strel('disk',20,8);
3 I2=imcomplement(imdilate(imcomplement(I),se));
4 I3=imcomplement(imerode(imcomplement(I2),se));
5 imshow(I3);

```

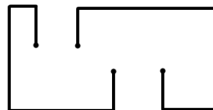
Es existiert auch die Umgekehrte Operation:

$$A \circ B := (A - B) + B$$

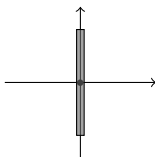
Diese wird **öffnen** genannt.

Diesmal mit einem neuen Beispiel:

$$A =$$



$$B =$$



[illegible]

Bild erzeugt in Matlab durch:

```
1 I=imread('Bild2.png');
2 se=strel('line',10,90);
3 I2=imcomplement(imerode(imcomplement(I),se));
4 I3=imcomplement(imerode(imcomplement(I2),se));
5 imshow(I3);
```

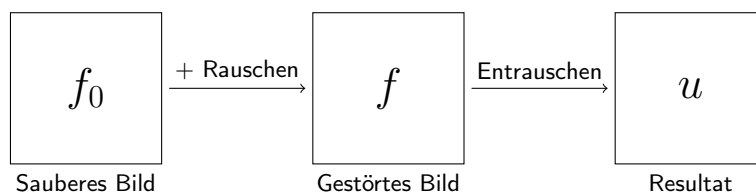
5 Entrauschen: Filter & Co.

5.1 Rauschen

Rauschen : Ungewollte Störungen in einem Bild

- punktwise
- zufällig
- unabhängig
- additiv (bei multiplikativem Rauschen *log* anwenden)

Notation:



Wie gut das entrauschte Bild u das saubere Bild f_0 beschreibt wird durch Normen gemessen.

$$\begin{aligned} & \|f - f_0\|, \text{Rauschen} \\ & \|u - f_0\|, \textbf{Absoluter Fehler} \\ & \frac{\|u - f_0\|}{\|f - f_0\|}, \textbf{Relativer Fehler} \text{ im Vergleich zum Rauschen} \\ & \frac{\|u - f_0\|}{\|f_0\|}, \text{Relativer Fehler im Vergleich zum Signal} \end{aligned}$$

Typischerweise ist die gewählte Norm:

$$\|f\| = \|f\|_2 = \sqrt{\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx}$$

oder im diskreten:

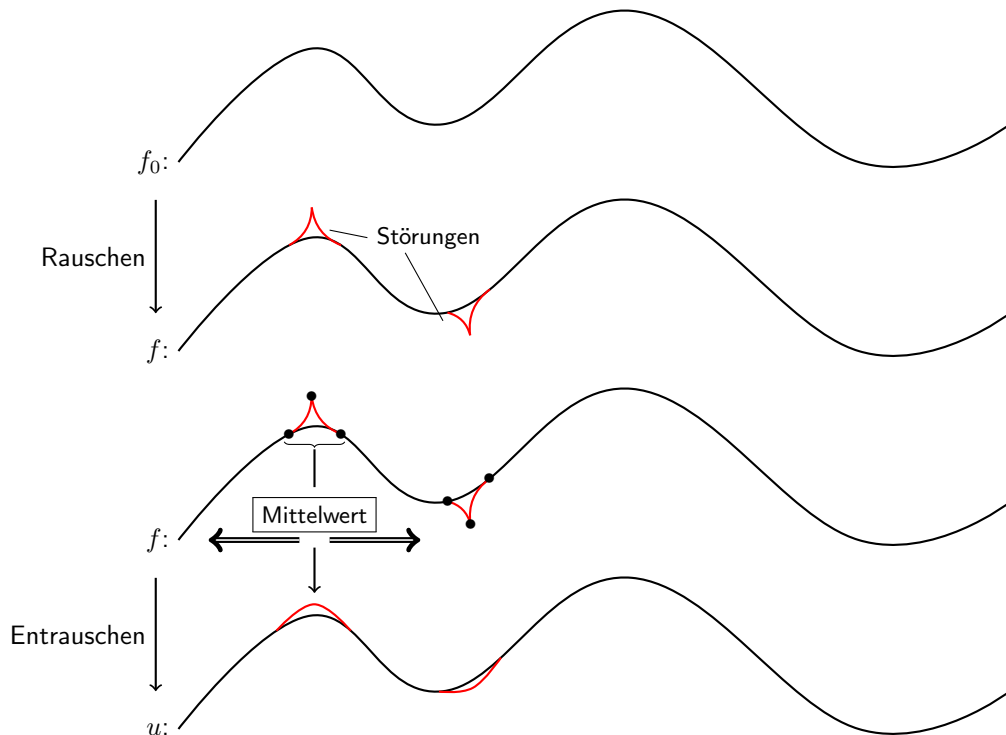
$$\|f\|_2 = \sqrt{\sum_{x \in \Omega} |f(x)|^2}$$

Eng verwandt ist die **Signal to noise ratio** (SNR):

$$\log\left(\frac{\|f_0\|_2}{\underbrace{\|u - f_0\|_2}_{\in [1, \infty)}}\right) \in [0, +\infty), \text{ wobei } 0 \text{ schlecht und } +\infty \text{ gut ist.}$$

5.2 Glättungsfilter

Grundidee: (zur Vereinfachung in 1D)

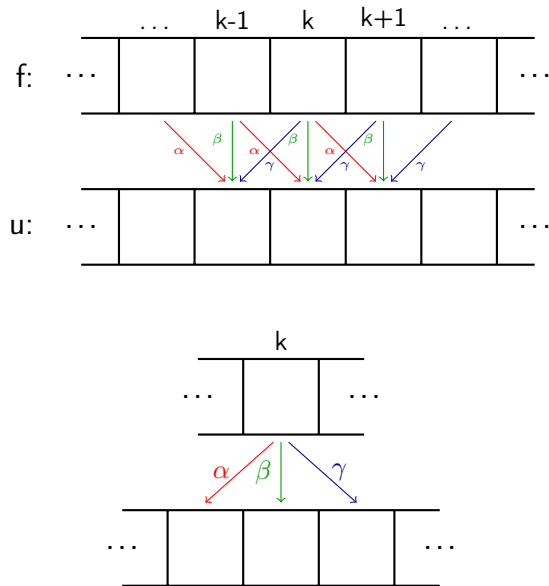


$$u(k) := \alpha \cdot f(k-1) + \beta \cdot f(k) + \gamma \cdot f(k+1) \quad (5.1)$$

wobei:

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \quad (5.2)$$

Schematisch bedeutet (5.1):



Durch (5.1) ist eine Abbildung $f \mapsto u$ gegeben, wir schreiben kurz:

$u = m \boxtimes f$, dieses wird **Korrelation** genannt.

mit:

$$(m \boxtimes f)(k) = \sum_{i \in \text{supp}(m)} m(i) f(k+i) \quad (5.3)$$

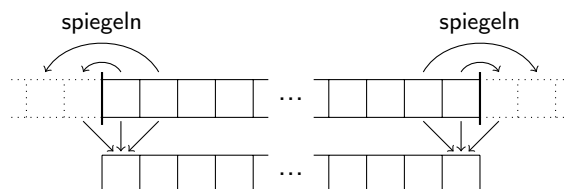
und:

$$m = \begin{array}{ccccc} & \dots & -1 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \alpha & \beta & \gamma & \dots \end{array} \quad \text{genannt } \underline{\text{Maske}} .$$

Setzt man nun $j := k + i$ in (5.1), so ist $i = j - k$, d.h.

$$(m \boxtimes f)(k) = \sum_{i \in \text{supp}(m)} m(j-k) f(j) \quad (5.4)$$

Um die Abbildung auf den Rand anzuwenden wird das Bild gespiegelt, in 1D:



in 2D:

d	b	d
q	p	q
d	b	d

Formel (5.4) erinnert an die Formel der **Faltung** :

$$(g * f)(k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} g(\underbrace{k-j}_{\text{Anders als (5.4)}}) \cdot f(j) \quad (5.5)$$

Setzt man also $g(i) := m(-i) =: \tilde{m}(i)$, was einer Spiegelung der Maske entspricht, dann ist

$$m \boxtimes f = g * f = \tilde{m} * f$$

Eigenschaften der Faltung:

- 1 $(f * g) * h = f * (g * h)$, Assoziativität
- 2 $f * g = g * f$, Kommutativität
- 3 $\tilde{f} * \tilde{g} = \widetilde{f * g}$, Kompatibilität mit Spiegelung

Eigenschaften der Korrelation:

- 1' $f \boxtimes (g \boxtimes h) = \tilde{f} * (\tilde{g} * h) \stackrel{1}{=} (\tilde{f} * \tilde{g}) * h \stackrel{3}{=} (\widetilde{f * g}) * h = (f * g) \boxtimes h \neq (f \boxtimes g) \boxtimes h$, nicht assoziativ!
- 2' $f \boxtimes g = \tilde{f} * g \stackrel{2}{=} g * \tilde{f} = \tilde{\tilde{g}} * \tilde{\tilde{f}} \stackrel{3}{=} (\widetilde{\tilde{g} * \tilde{f}}) = \widetilde{g \boxtimes f} \neq g \boxtimes f$, nicht kommutativ!
- 3' $\tilde{f} \boxtimes \tilde{g} = \tilde{\tilde{f}} * \tilde{\tilde{g}} \stackrel{3}{=} (\widetilde{\tilde{f} * \tilde{g}}) = \widetilde{f \boxtimes g}$, Kompatibilität mit Spiegelung

\boxtimes und $*$ definiert man auf: $\ell^1(\mathbb{Z}^d) := \{f = (f_i)_{i \in \mathbb{Z}^d} : \underbrace{\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} |f_i|}_{:= \|f\|_1} < \infty\}$

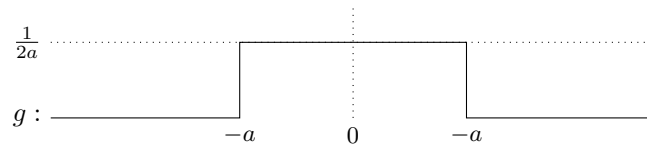
Man kann zeigen (Übung): $f, g \in \ell^1 \Rightarrow f * g \in \ell^1$ und $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$. Wobei oft die Gleichheit gilt.

Alles gilt auch in der kontinuierlichen Version:

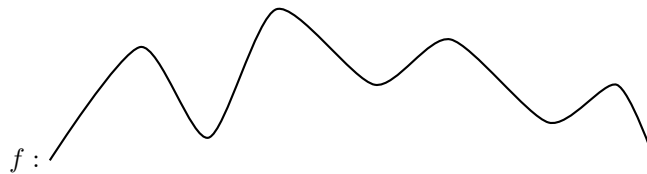
$$L^1(\mathbb{R}^d) := \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \mid \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} |f| dx}_{:= \|f\|_1} < \infty\}$$

$$f, g \in L^1(\mathbb{R}^d) : (g * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)f(y)dy, \quad y, x \in \mathbb{R}^d$$

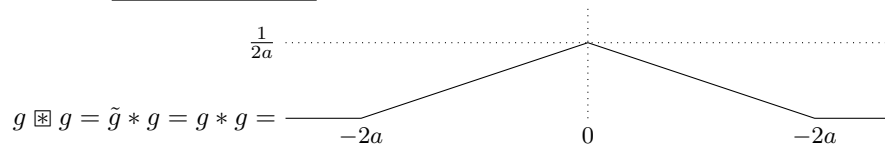
Beispiel für den kontinuierlichen Fall:



Hierbei gilt $\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = 1$



$g \boxtimes f = \underline{\text{gleitendes Mittel}}$.



Weitere Eigenschaften der Faltung:

Für alle $f, g \in L^1$ or ℓ^1

$$\left. \begin{aligned} (g_1 + g_2) * f &= (g_1 * f) + (g_2 * f) \\ (\alpha g) * f &= \alpha(g * f) \end{aligned} \right\} = \text{Linearität}$$

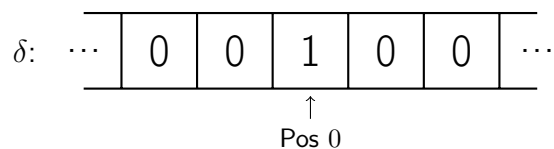
Somit ist:

$$g \mapsto f * g$$

ein linearer Operator.

Formt ℓ^1 bzw. L^1 eine Algebra mit neutralem Element δ ?

ℓ^1 ?:



Ja!

L^1 ?: Für ein solches Element muss gelten:

$$\forall f \in L^1 : d * f = f$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\delta(x-y)}_{=0 \forall x \neq y} f(y) dy = f(x)$$

Diese Funktion wird Dirac-Impuls genannt ist aber kein Element von L^1 .

Nun zu Masken in 2D:

$$u = m \boxtimes f \text{ mit } m = \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline \beta & \gamma & \delta \\ \hline \epsilon \\ \hline \end{array}$$

wobei $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 1$

Kurzschreibweise: $u_{ij} := u(x)$ wobei $x = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$, analog für f_{ij} .

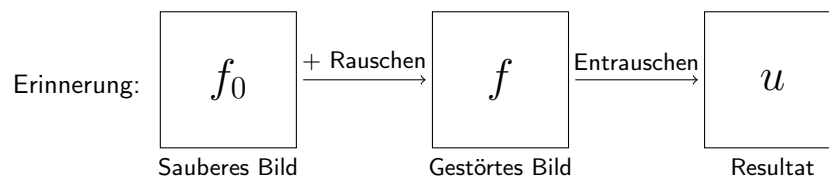
$$\Rightarrow u_{ij} = \alpha f_{i-1,j} + \beta f_{i,j-1} + \gamma f_{ij} + \delta f_{i,j+1} + \epsilon f_{i+1,j}$$

$$u = m \boxtimes f = \tilde{m} * f \text{ mit } \tilde{m} = \begin{array}{|c|} \hline \epsilon \\ \hline \delta & \gamma & \beta \\ \hline \alpha \\ \hline \end{array}$$

Symmetrischer Fall:

$$\tilde{m} = \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline \alpha & \gamma & \alpha \\ \hline \alpha \\ \hline \end{array} \text{ mit } \gamma = 1 - 4\alpha$$

$$u_{ij} = (1 - 4\alpha)f_{ij} + \alpha(f_{i-1,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1} + f_{i+1,j}) \quad (5.6)$$



Annahme: $f_{ij} = f_{ij} + r_{ij}$ mit $r_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ iid.

z.z.: $Var(u_{ij}) \leq Var(f_{ij})$

$$Var(f_{ij}) = E(\underbrace{f_{ij} - \overbrace{E f_{ij}}^{f_{ij}^0}}_{r_{ij}})^2 = \sigma^2$$

$$\begin{aligned}
Var(u_{ij}) &= E(u_{ij} - Eu_{ij})^2 = E((1 - 4\alpha)\underbrace{(f_{ij} - f_{ij}^0)}_{r_{ij}} + \alpha(\underbrace{(f_{i-1,j} - f_{i-1,j}^0)}_{r_{i-1,j}} + \dots + \underbrace{(f_{i+1,j} - f_{i+1,j}^0)}_{r_{i+1,j}})))^2 \\
&= E((1 - 4\alpha)^2 r_{ij}^2 + \alpha^2(r_{i-1,j}^2 + r_{i,j-1}^2 + r_{i,j+1}^2 + r_{i+1,j}^2) + 2(1 - 4\alpha)\alpha r_{ij}r_{i-1,j} \dots) \\
&= (1 - 4\alpha)^2 \underbrace{Er_{ij}^2}_{\sigma^2} + \alpha^2(Er_{i-1,j}^2 + \dots + Er_{i+1,j}^2) + 2(1 - 4\alpha)\alpha \underbrace{E(r_{ij}r_{i-1,j})}_{\underbrace{Er_{ij}Er_{i-1,j}}_0} + \underbrace{\dots}_0 \\
&= (1 - 4\alpha)^2 \sigma^2 + \alpha^2 4\sigma^2 = (1 - 8\alpha + 16\alpha^2 + 4\alpha^2)\sigma^2
\end{aligned}$$

Da $0 \leq \alpha$ und $0 \leq 1 - 4\alpha \Rightarrow 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{4}$:

$$(1 - 8\alpha + 16\alpha^2 + 4\alpha^2)\sigma^2 = 1 + \underbrace{20\alpha}_{\geq 0} \underbrace{(\alpha - \frac{2}{5})}_{< 0} \underbrace{\leq 1}$$

$\Rightarrow Var(u_{ij}) \leq Var(f_{ij})$ für $\alpha \in [0, \frac{1}{4}]$

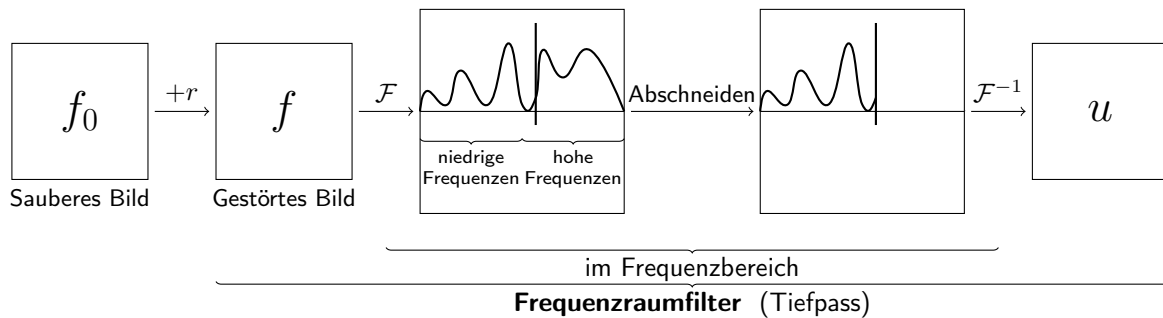
Dabei gilt: $Var(u_{ij}) \xrightarrow{\alpha} dmin \iff 1 - 8\alpha + 20\alpha^2 \xrightarrow{\alpha} min \iff -8 + 40\alpha = 0 \iff \alpha = \frac{1}{5}$

$$\Rightarrow \text{bester Filter : } \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \frac{1}{5} & \\ \hline \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \hline & \frac{1}{5} & \\ \hline \end{array}$$

5.3 Frequenzraum-filter

Ansatz: Rauschen = hochfrequente Anteile des Signals.

Diese können mittels der **Fouriertransformation** \mathcal{F} gezielt entfernt werden.



Ein wichtiges Instrument ist hierbei die Fouriertransformation:

$$\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$$

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle z, x \rangle} dx \quad (5.7)$$

Wobei $z \in \mathbb{R}^d, f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Falls auch $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist, dann lässt sich f wie folgt mittels der inversen Fouriertransformation aus \hat{f} rekonstruieren:

$$\mathcal{F}^{-1} : \hat{f} \mapsto f$$

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{i\langle z, x \rangle} dx \quad (5.8)$$

Wobei $x \in \mathbb{R}^d$.

Man hat also $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f$, d.h.

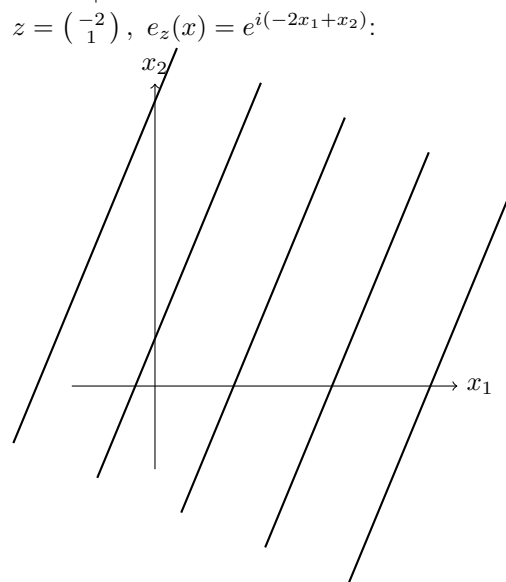
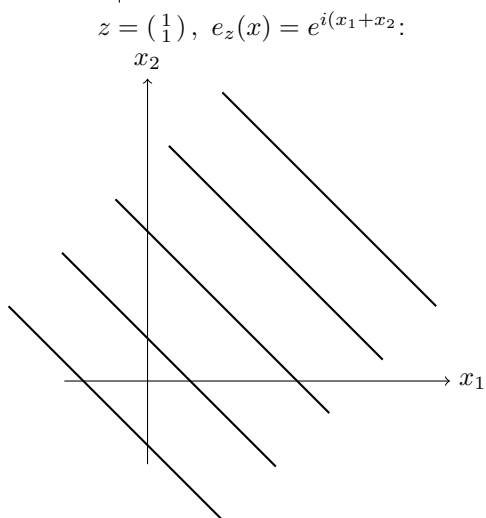
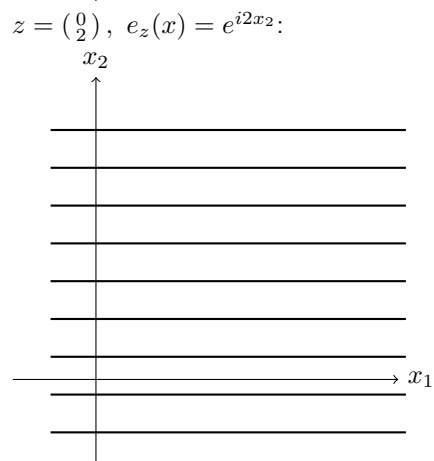
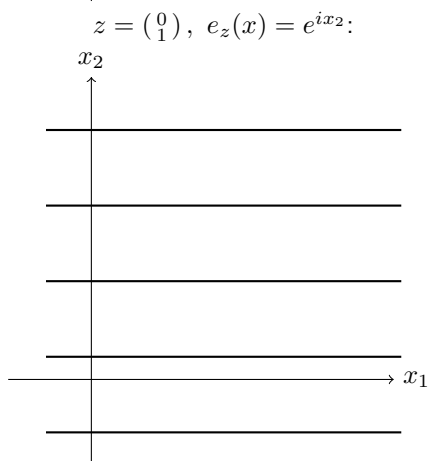
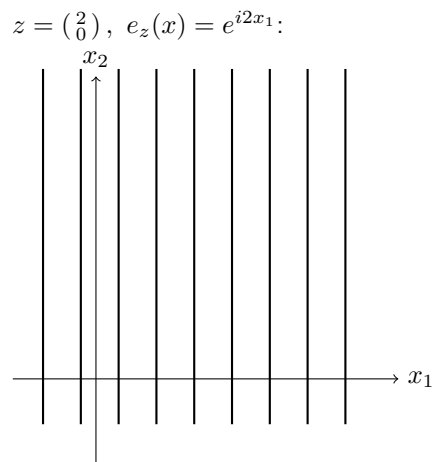
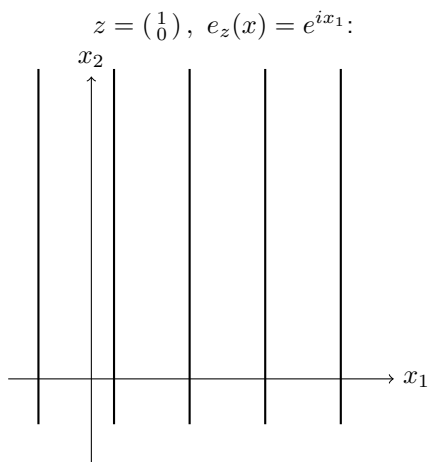
$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-i\langle z, y \rangle} dy \right) e^{i\langle z, x \rangle} dz$$

Sei nun $e_z(x) := e^{i\langle z, x \rangle}$, $x \in \mathbb{R}^d$ mit Parameter $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_d \end{pmatrix}$.

Also $e_z(x) = e^{i\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rangle} = e^{i(z_1 x_1 + z_2 x_2)}$

Beispiele in $2D$:

(Hier stellen die Linien, Punkte mit konstantem wert dar)



$f \in L^2(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\mathbb{R}^d} |f|^2 dx < \infty\}$ ist

- ein normierter Raum mit $+$, $\alpha \cdot$ und $\|\cdot\|_2 := \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx}$

- ein Skalarproduktraum mit $\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^d} f \bar{g} dx$, wobei $\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle$
- ein vollständiger Raum, also **Banachraum**

Ein vollständiger normierter Banachraum mit Skalarprodukt heißt **Hilbertraum**.

\mathcal{F} kann auch als Abbildung auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ betrachtet werden. Dann gilt:

$$\hat{f} = \mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

und

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2 \quad (5.9)$$

und sogar

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_2 = \langle f, g \rangle_2 \quad (5.10)$$

für alle $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Weitere Eigenschaften der Fouriertransformation:

- i) $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \hat{f}$ stetig und $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \hat{f}(z) = 0$
- ii) $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow C(\mathbb{R}^d)$ ist eine lineare Abbildung
- iii) $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow C(\mathbb{R}^d)$ ist eine beschränkte/stetige Abbildung
- iv) Verschiebung $\xrightarrow{\mathcal{F}}$ Modulation, d.h.

$$g(x) = f(x + a) \Rightarrow \hat{g}(z) = e^{i\langle a, z \rangle} \hat{f}(z)$$

- v) Modulation $\xrightarrow{\mathcal{F}}$ Verschiebung, d.h.

$$g(x) = e^{i\langle x, a \rangle} f(x) \Rightarrow \hat{g}(z) = \hat{f}(z - a)$$

- vi) Skalierung $\xrightarrow{\mathcal{F}}$ inverse Skalierung, d.h.

$$g(x) = f(cx) \Rightarrow \hat{g}(z) = \frac{1}{|c|} \hat{f}\left(\frac{z}{|c|}\right)$$

- vii) Konjugation: $g(x) = \overline{f(x)} \Rightarrow \hat{g}(z) = \overline{\hat{f}(-z)}$
Folglich: f reelwertig $\Rightarrow \hat{f}(z) = \overline{\hat{f}(-z)}$

viii)

$$\text{Grundmode: } \hat{f}(0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$$

$$\text{Analog: } f(0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x) dx$$

- ix) Differentiation $\xrightarrow{\mathcal{F}}$ Multiplikation mit Potenzen von z , d.h.

$$g(x) = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} f(x) \Rightarrow \hat{g}(z) = i^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d} z_1^{\alpha_1} \dots z_d^{\alpha_d} \hat{f}(z)$$

x) Umkehrung des letzten Punktes:

$$g(x) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d} f(x) \Rightarrow \hat{g}(z) = i^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_d} \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \hat{f}(z)$$

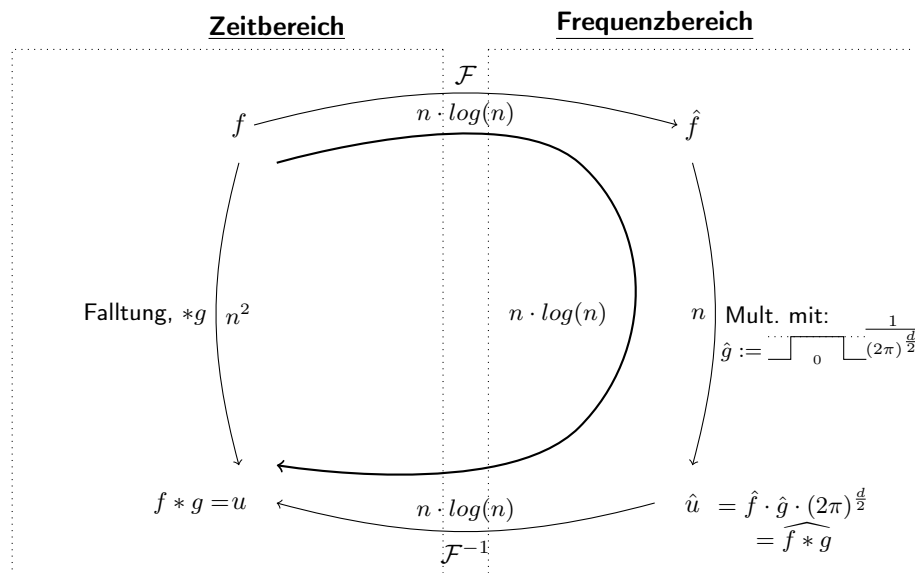
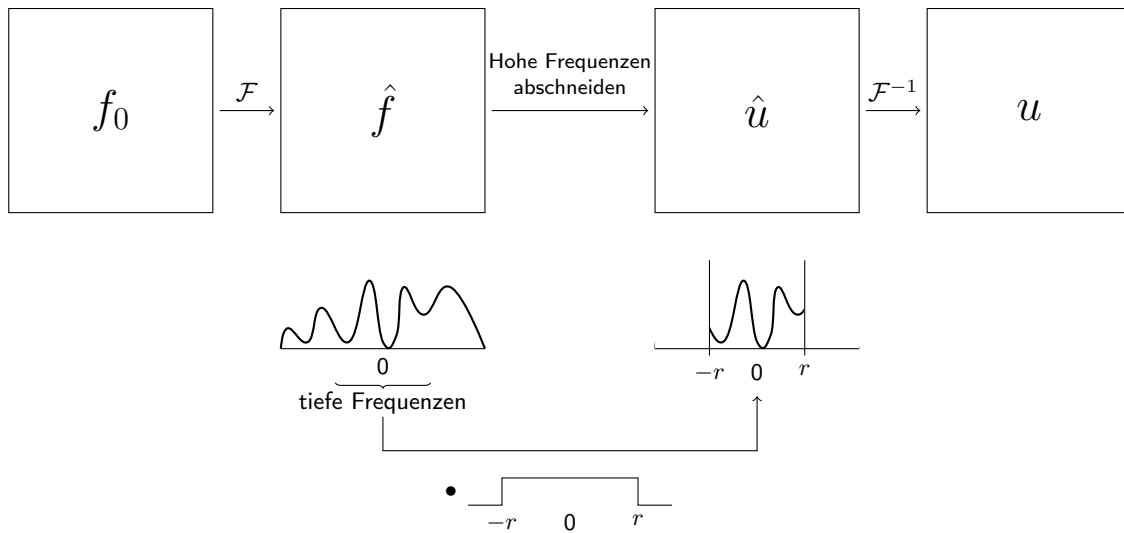
xi)

Faltungssatz: $\mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$, $\widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \hat{f} \cdot \hat{g}$

$$\text{Analog: } \mathcal{F}(f \cdot g) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g), \quad \widehat{f \cdot g} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \hat{f} * \hat{g}$$

d.h.: Faltung $\xrightarrow{\mathcal{F}}$ Multiplikation und umgekehrt

Zur Erinnerung:



Wie sieht g aus?

$$g = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \chi_{[-r,r]} \right)$$

$$\left(\chi_M(z) = \begin{cases} 0, & z \notin M \\ 1, & z \in M \end{cases} \right)$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} (\mathcal{F}^{-1} \chi_{[-r,r]^d})(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{[-r,r]^d}(z) e^{i\langle z, x \rangle} dz \\ (d=1) \rightarrow &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-r,r]}(z) e^{izx} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_r^{-r} e^{izx} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{izx}}{ix} \Big|_{z=-r}^r \\ &= \frac{1}{2\pi ix} (e^{irx} - e^{-irx}) \\ &= \frac{1}{\pi x} \sin(rx) \\ &= \text{sinc} \left(\frac{rx}{\pi} \right) \cdot \frac{r}{\pi} \end{aligned}$$

$$\text{Wobei: } \text{sinc}(\varphi) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi\varphi)}{\pi\varphi} & , \varphi \neq 0 \\ 1 & , \varphi = 0 \end{cases}$$

g hat auch Masse 1, denn mit den Eigenschaften der Fouriertransformation folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} = \hat{g}(0) &= (\mathcal{F}g)(0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \underbrace{e^{\underbrace{-\langle x, 0 \rangle}_0}}_1 dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx \\ &\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx = 1 \end{aligned}$$

Für $d = 2$ gilt:

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{(2\pi)^1} (\mathcal{F}^{-1} \chi_{[-r,r]^2})(x) \\
&= \dots \text{ (Analog zu oben)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-r,r]^2} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) e^{i(z_1 x_1 + z_2 x_2)} dz_1 dz_2 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-r}^r \left(\int_{-r}^r e^{iz_1 x_1} e^{iz_2 x_2} dz_1 \right) dz_2 \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r e^{iz_1 x_1} dz_1 \right)}_{\frac{1}{\pi x_1} \sin(\pi x_1)} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r e^{iz_2 x_2} dz_2 \right)}_{\frac{1}{\pi x_2} \sin(\pi x_2)}
\end{aligned}$$

Es ist zu bemerken, dass g eine Art Tensor Struktur besitzt, was in etwa bedeutet das sich die Funktion in beliebigen Dimensionen als Produkt der Funktion in einer Dimensionen darstellen lässt.

Gauß-Kern :

$$\begin{aligned}
G(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2}} \Rightarrow G\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x_1^2}{2}} \right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x_d^2}{2}} \right) = G(x_1) \cdot \dots \cdot G(x_d)
\end{aligned}$$

5.4 Filterbreite und Glättung

klar ist: $\frac{1}{25}$

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

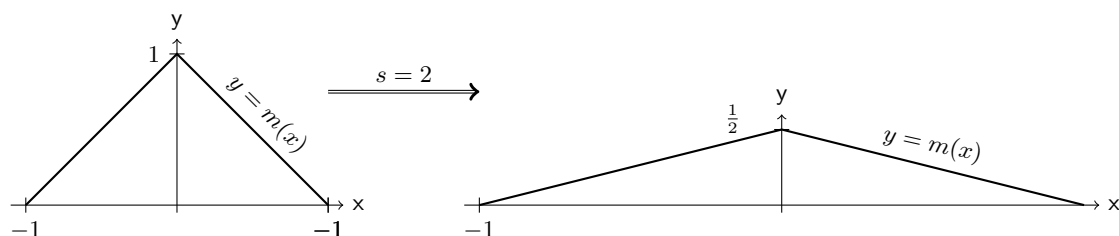
'glättet mehr als': $\frac{1}{9}$

1	1	1
1	1	1
1	1	1

Im Kontinuierlichen: Sei $m \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und $s > 0$. Setze

$$m_s(x) := \frac{1}{s^d} m\left(\frac{x}{s}\right), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

Bsp (in $d = 1$):

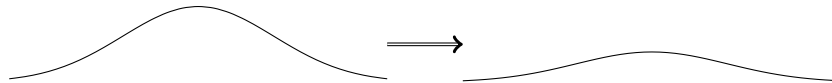


Bsp: Gauß-Kern $G(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$

Skalierung mit Faktor $s > 0$

$$\Rightarrow G_s(x) = \frac{1}{s^d} G\left(\frac{x}{s}\right) = \frac{1}{s^d} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2s^2}} = \frac{1}{(2\pi s^2)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2s^2}}$$

Skalierung $s \hat{=} \text{Standardabweichung } \sigma$:

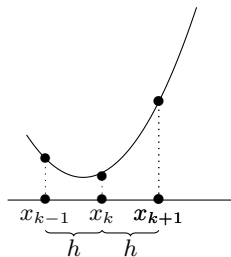


5.5 Differenzenfilter

Bisher: Glättung $\hat{=}$ Mittelwert bilden $\hat{=}$ Summe/Integrale

Jetzt: Schärfen $\hat{=}$ Differenzen/Kontraste hervorheben $\hat{=}$ Differenzen/Ableitungen

Diskretisierung von Ableitungen durch Differenzenquotienten



(hier bedeutet $f(k) = f(x_k)$)

Vorwärts: $u(h) = \frac{f(k+1) - f(k)}{h}$

Rückwärts: $u(h) = \frac{f(k) - f(k-1)}{h}$

Zentral: $u(h) = \frac{f(k+1) - f(k-1)}{2h}$

$$u = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \otimes f$$

$$u = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \otimes f$$

$$u = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \otimes f$$

2. Ableitung:

$$\begin{aligned} u(h) &\approx \frac{f'(k+1) - f'(k)}{h} \text{ (vorwärts)} \\ &\approx \frac{\frac{f(k+1) - f(k)}{h} - \frac{f(k) - f(k-1)}{h}}{h} \text{ (rückwärts)} \\ &= \frac{f(k+1) - 2f(k) + f(k-1))}{h^2} \end{aligned}$$

Also folgt $u := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \otimes f$ und $\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} * \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Denn:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} * \left(\frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} * f \right) \\
&= \left(\frac{1}{h} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} * \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) * f \\
&= \left(\frac{1}{h} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boxtimes \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) * f \\
&= \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} * f \\
&= \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \boxtimes f
\end{aligned}$$

In 2D: $\frac{\partial}{\partial x} \hat{=} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\frac{\partial}{\partial y} \hat{=} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{=} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{=} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Diskreter Laplace Operator :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{=} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5.6 Glättungsfilter und partielle Differentialgleichungen

Wir haben gesehen: $m = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ist unter allen 5-Punkt Filtern der am besten glättende.

Idee: Rauschen weiter verringern indem man $m \boxtimes$ wiederholt anwendet \Rightarrow Folge von Bildern:

$$\begin{array}{|c|} \hline f \\ \hline \text{:= } u^{(0)} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{m \boxtimes} \begin{array}{|c|} \hline u^{(1)} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{m \boxtimes} \begin{array}{|c|} \hline u^{(2)} \\ \hline \end{array} \dots$$

$$\Rightarrow u^{(n+1)} - u^{(n)} = (\text{Unterschied zwischen 'Zeit' Punkt } n \text{ und } n+1)$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{m \boxtimes u^{(n)}}_{u^{n+1}} - \underbrace{\delta \boxtimes u^{(n)}}_{u^{(n)}} \text{ mit } \delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= (m - \delta) \boxtimes u^{(n)} \\
&= \left(\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \boxtimes u^{(n)} \\
&= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} u^{(n)}
\end{aligned}$$

Somit gilt insgesamt:

$$\underbrace{u^{(n+1)} - u^{(n)}}_{\cong \frac{\partial u}{\partial t}} = \frac{1}{5} \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -4 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}}_{\cong \Delta u} \quad (5.11)$$

Kontinuierlich: Funktion u

$$u(x, t) \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \text{ Zeit}$$

(5.11) ist eine Diskretisierung (1 Zeitschritt im Eulerverfahren) der partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad (5.12)$$

Bekannt als **Wärmegleichung** oder **Diffusionsgleichung**.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ möge die Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = u^{(0)} = f(x) \quad (5.13)$$

gelten. Vorranschreiten der Zeit t repräsentiert Diffusion.

Für einen stationären Zustand, also keine Änderung $\frac{\partial u}{\partial t}$ dann muss auch $\Delta u = 0$ gelten.

Diese wird unter anderem von konstanten Funktionen oder linearen Funktionen $u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$ erfüllt.

Es existiert auch eine explizite Formel für die Lösung der Diffusionsgleichung (5.12) mit Anfangsbedingung (5.13):

$$u(x, t) = \left(G_{\sqrt{2t}} * u^{(0)} \right) (x)$$

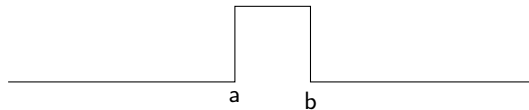
Wobei $\sqrt{2t}$ für eine Skalierung um diesen Wert steht.

Zu zeigen ist: $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$

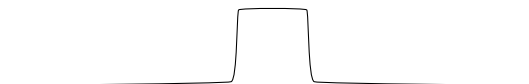
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(G_{\sqrt{2t}} * u^{(0)} \right) &= \Delta \left(G_{\sqrt{2t}} * u^{(0)} \right) \\ \xrightarrow{\text{mit Satz}} \left(\frac{\partial}{\partial t} G_{\sqrt{2t}} \right) * u^{(0)} &= (\Delta G_{\sqrt{2t}}) * u^{(0)} \end{aligned}$$

Es bleibt somit z.z.: $\frac{\partial}{\partial t} G_{\sqrt{2t}} = \Delta G_{\sqrt{2t}}$.

$t = 0$:

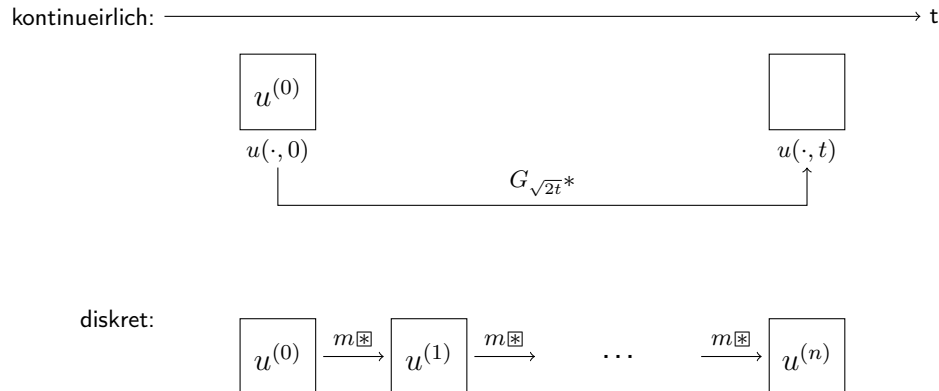


$t > 0$:



Bemerkenswert ist das, für $t = 0$ die Funktion nicht stetig ist, aber für alle $t > 0$ die Funktion beliebig oft differenzierbar ist.

Insgesamt lässt sich die Idee darstellen als:



5.7 Isotrope und anisotrope Diffusion

Wir haben gesehen: Glättung/Diffusion verringert Rauschen.

Aber: Auch Kanten/Details werden verwischt.

Ausweg: Diffusion steuern, so dass sie an Kanten (also Stellen mit großer Änderungsrate) weniger stark glättet.

Der Plan lautet also:

$$\nabla u = \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \right\|^2 = \begin{cases} \text{groß} & \Rightarrow \text{wenig Diffusion} \\ \text{klein} & \Rightarrow \text{Diffusion normal} \end{cases}$$

Diffusionsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} u = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right)}_{div} \left(\frac{\partial}{\partial x} u \right) = div(\nabla u) \quad (5.14)$$

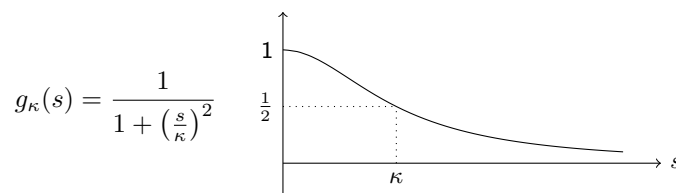
Um diese Gleichung zu regulieren setzen wir einen **Diffusionstensor** M in die Gleichung in.

$$\Delta u = div(M \nabla u) = div \left(\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} \nabla u \right)$$

Ansätze für M :

a) $M = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ übliche Diffusion

b) $M = g(\|\nabla u(x, y)\|) * I$



Diese Methode geht zurück auf Perona & Malik.

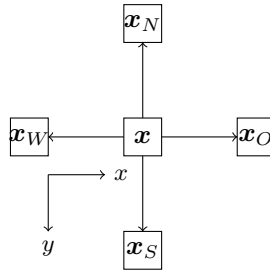
- Kanten mit $\|\nabla u\| < \kappa$ werden mehr geglättet
- Kanten mit $\|\nabla u\| \geq \kappa$ werden weniger geglättet

Diese Art der Glättung ist **Isotrop** $\hat{=}$ in alle Richtungen gleich starker Fluss.

$$c) \quad M = \begin{pmatrix} g(|\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)|) & 0 \\ 0 & g(|\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)|) \end{pmatrix}$$

Diese art der Diffusionstensoren ist **anisotrop** also richtungsabhängig.

Für $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2$ und $\mathbf{x}_W = \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ usw.



Für $M = \begin{pmatrix} c_1(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & c_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$ gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(M \cdot \nabla u(\mathbf{x})) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} c_1(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & c_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}) \\ c_2(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(\mathbf{x})(u(\mathbf{x}_O) - u(\mathbf{x})) \\ c_2(\mathbf{x})(u(\mathbf{x}_S) - u(\mathbf{x})) \end{pmatrix} \\ &\approx c_1(\mathbf{x})(u(\mathbf{x}_O) - u(\mathbf{x})) - c_1(\mathbf{x}_W)(u(\mathbf{x}_N) - u(\mathbf{x}_W)) \\ &\quad + c_2(\mathbf{x})(u(\mathbf{x}_S) - u(\mathbf{x})) - c_2(\mathbf{x}_N)(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}_N)) \end{aligned}$$

5.8 Bilaterale Filter

Es existiert auch ein anderer Ansatz für das selbe Problem.

$u(\mathbf{x}) =$ gewichtetes Mittel aus allen $f(\mathbf{y})$ mit

- \mathbf{y} ist nahe bei \mathbf{x} und
- $f(\mathbf{y})$ ist nahe bei $f(\mathbf{x})$

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{w(\mathbf{x})} \int_{\Omega} \underbrace{g(\mathbf{x} - \mathbf{y})}_{a)} \underbrace{h(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}))}_{\text{neu } b)} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

Heißt **Bilateraler Filter**, wobei

$$w(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) h(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})) d\mathbf{y}$$

Oft: g, h Gauß-Kerne (\Rightarrow nichtlineare Gaußfilter)

Manchmal: g, h charakteristische Funktionen (\Rightarrow SUSAN-Filter)

Effekt Falls Höhe der Kante $>$ Filterradius \Rightarrow Kante bleibt

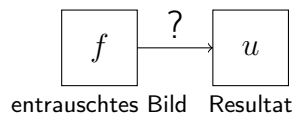
Manchmal: $f \xrightarrow{\log} \log f \xrightarrow{\text{Bil. Filter}} \log u \xrightarrow{\exp} u$

Diese Verfahren ist jedoch sehr aufwendig, denn

- keine Reine Filterung (\Rightarrow keine FFT-Implementierung möglich)
- Normalisierung $w(\mathbf{x})$ in jedem Punkt berechnen

5.9 Entrauschen mittels Variationsrechnung

Erinnerung:



Wünsche an u :

1. $u \approx f$ (Datenkonsistenz)
2. u ist 'glatt'. (Regularitätsbedingung)

Mathematische Umsetzung der Wünsche:

1. $\|u - f\|_2 = \sqrt{\int_{\Omega} |u(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})|^2 dx}$ sei klein
2. $\|\nabla u\|_2 = \sqrt{\int_{\Omega} |\nabla u(\mathbf{x})|^2 dx} = \sqrt{\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x})\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x})\right)^2 dx}$ sei klein

Kombination:

$$J(u) := \|u - f\|_2^2 + \lambda \|\nabla u\|_2^2 \stackrel{u \in U}{\rightarrow} \min \quad (5.15)$$

Für einen geeigneten Funktionen Raum U und Kopplungskonstante $\lambda > 0$.
In diesem Beispiel empfiehlt sich als Suchraum:

$$U = \{u : \|u\| < \infty, \nabla \text{ existiert}, \|\nabla\|_2 < \infty\} = W^{1,2}$$

ein so genannter **Sobolev-Räume**. Diese Suchproblem ist jedoch ∞ -dimensional und somit schwer zu lösen.

Im obigen Ansatz (5.15) stellt man fest, dass der Regularitätsterm

$$\|\nabla u\|_2^2 = \int_{\Omega} |\nabla u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}) \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x}) \right)^2 d\mathbf{x}$$

die großen Gradienten an (gewollten) Kanten zu stark bestraft. (\Rightarrow optimales u glättet Kanten)

Ausweg: Wähle $\|\nabla u\|_2$ oder $\|\nabla u\|_1 = \int_{\Omega} |\nabla u(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}) \right| + \left| \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x}) \right| d\mathbf{x}$ als Regularitätsterme.

$$J(u) := \|u - f\|_2^2 + \lambda \|\nabla u\|_1 \rightarrow \min \quad (5.16)$$

Genannt **Rudin-Osher-Fatemi-Funktional** (ROF)

Allgemeiner Ansatz bei Variationsproblemen:

$$J(u) := \underbrace{D(u, f)}_{\text{Datenkern}} + \lambda \underbrace{R(u)}_{\text{Regularitätsterm}} \xrightarrow{u \in U} \min$$

Notwendiges Kriterium:

Falls $J : U \rightarrow \mathbb{R}$ in $u \in U$ ein lokales Minimum besitzt, dann gilt für jede Richtung $v \in U$:

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{J(u + \epsilon v) - J(u)}{\epsilon} = 0 \quad (5.17)$$

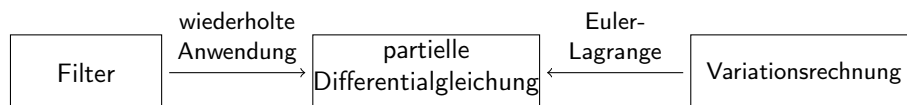
Dies ist die Verallgemeinerte Richtungsableitung (Gateaux-Ableitung).

Häufig ist J in Integralform gegeben, z.b.:

$$J(u) = \int_{\Omega} g(x, u(x), \nabla(x)) dx$$

Dann führt Bedingung (5.17) auf Gleichungen für bestimmte partielle Ableitungen von g und u , die sogenannte **Euler-Lagrange-Gleichung** für (5.17).

\Rightarrow partielle Differentialgleichung u . Fazit:



6 Kantenerkennung

6.1 Gradientenfilter

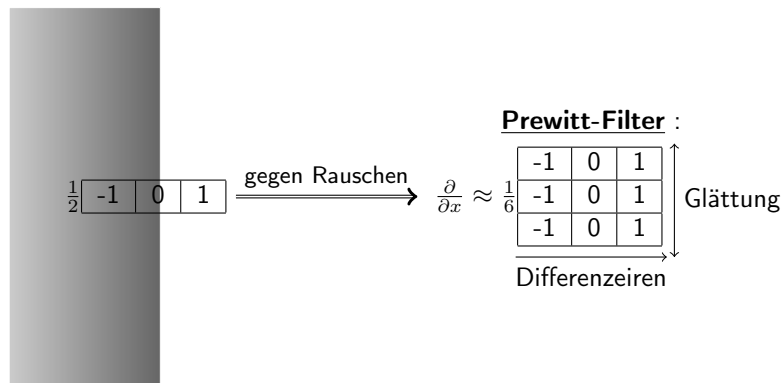
Wir suchen Stellen \mathbf{x} mit großem Gradienten:

$$\nabla u(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Approximation der Gradienten über zentrale Differenzen:

$$\frac{\partial}{\partial x} \approx \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ bzw. } \frac{\partial}{\partial y} \approx \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Um Rauschen zu verringern wird auch ein entrauschen Filter simultan angewendet:



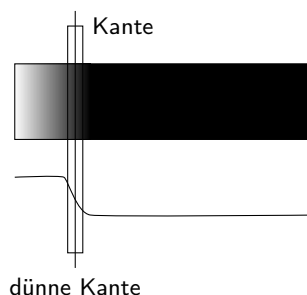
Alternative: $\frac{\partial}{\partial x} \approx \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =: D_x$, genannt **Sobel-Filter**. Eine stärkere Glättung kann mittels anderer vertikaler Filter mit Binomialkoeffizienten erzielt werden. Entsprechend wird $\frac{\partial}{\partial y} D_y := D_y^T$ definiert.

$$\nabla u(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} (D_x \otimes u)(\mathbf{x}) \\ (D_y \otimes u)(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Zur Erinnerung der Gradienten steht senkrecht auf Kanten und zeigt in Richtung heller (hoher) Werte, die Intensität wird beschrieben von $|\nabla u(\mathbf{x})|$, also dem Betrag des Gradienten.

Ein typischer Algorithmus kann etwa folgende Form annehmen:

1. Gradienten mittels Prewitt oder Sobel approximieren und Richtung auf Vielfache von 45° runden.
2. **Non-maximum suppression** (edge thinning). Da es potentiell viele Punkte mit hoher Steigung gibt kann es dazu kommen, dass Kanten sehr breit werden, dieses wird durch das edge thinning verhindert.

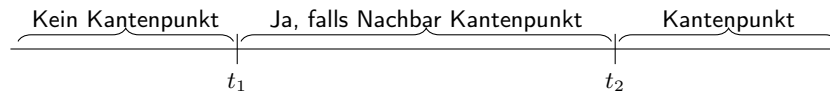


Mathematisch: x wird Kantenpunkt falls:

$$|\nabla u(x)| \leq \max(|\nabla u(x_+)|, |\nabla u(x_-)|)$$

wobei x_+ und x_- Vorgänger und Nachfolger von x in Gradientenrichtung sind.

3. Kandidat x wird Kantenpunkt, falls:



wobei t_1, t_2 thresholds sind.

x ist also ein Kantenpunkt, falls $|\nabla u(x)| \geq t_2$ oder $(|\nabla u(x)| \in [t_1, t_2]$ und x ist Nachbar eines Kantenpunktes).

Dieses wird **hysteresis thresholding** genannt und verhindert **Abreißen** von Kantenzügen.

Die am häufigsten verbreitete Version von 1) -3) ist der **Canny-Algorithmus** (1986).

Matlab:

```
1 BWimg=edge(u,'canny',[t_1, t_2],sigma);
```

BWimg: Binärbild

u: Graustufenbild

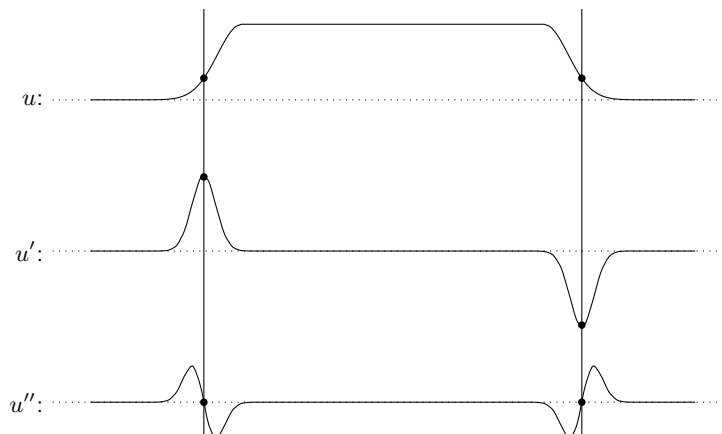
canny: Algorithmus

t_1, t_2 : Sind gewählt wie oben

sigma: Parameter für den Gaußkern aus 1)

6.2 Die zweite Ableitung

Zunächst in 1D:



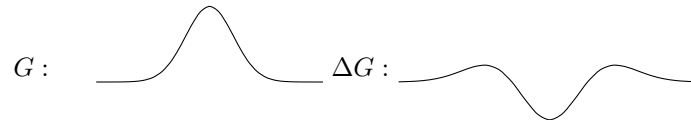
Test für kantenpunkte $u''(x) = 0$ und $|u'(x)| > \text{threshold}$.

Wichtig: Vorglätten!, da die 2. Ableitung noch anfälliger gegenüber Rauschen als die 1. Ableitung ist.

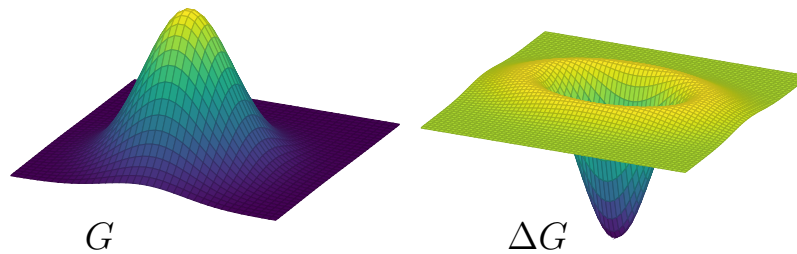
In 2D. Laplace Operator $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}$ (Richtungsunabhängige Messung der 2. Ableitung)

Vorglätten: $\Delta(G * u) = (\Delta G) * u$, wobei ΔG vorher berechnet werden kann.

In 1D:



In 2D:



Dieses wird **Laplacian of Gaußian method** genannt.

Matlab:

```
1 BWimg=edge(u,'log',thresh,sigma);
```

\Rightarrow alle $x \in \Omega$ mit:

$\Delta(G_{\text{sigma}} * u)(x) \approx u$, nicht auf Gleichheit sondern auf Vorzeichenwechsel testen.

und: $|\nabla(G_{\text{sigma}} * u)| > \text{thresh}$

7 Schärfen und Entfalten

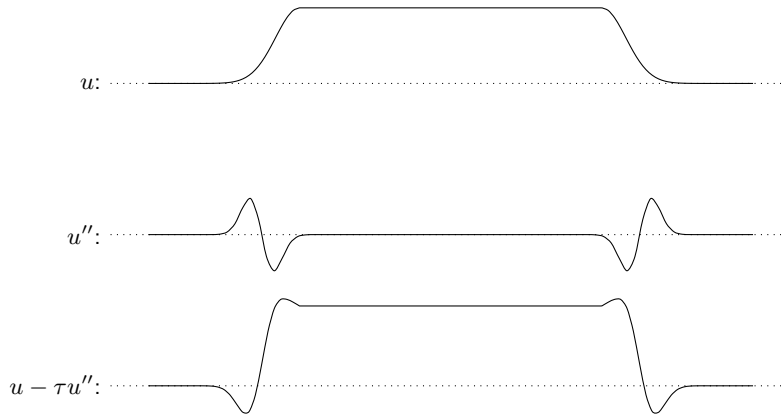
(Gegenteil von Kapitel 5)

Gegeben: unscharfes Bild

Gesucht: Version mit vielen erkennbaren Details

7.1 Laplace-Schärfen

Idee:



Zu sehen ist, dass durch die Subtraktion von u'' , skaliert mit einem Faktor $\tau > 0$ die Kanten hervor-gehoben werden.

Hinweise zur Umsetzung:

- $u - \tau u''$ reskalieren (Kontrast-stretching) falls der Farbraum verlassen wird.
- τ kann auch sehr klein gewählt werden und der Vorgang dafür wiederholt iteriert werden.
- In 2D Δ statt 2. Ableitung
- Vorglätten: $u - \tau \cdot \Delta(G * u)$

7.2 Kantenverstärkende Diffusion

Verallgemeinerte Diffusionsgleichung: $\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(M \nabla u)$. Idee: M so wählen, so dass der Fluss:

- Parallel zum Gradienten (d.h. durch die Kante verläuft): $\lambda_1 = \frac{1}{1 + \frac{|\nabla u(\mathbf{x})|^2}{\kappa^2}}$
- senkrecht zu ∇u (entlang der Kante): $\lambda_2 = 1$

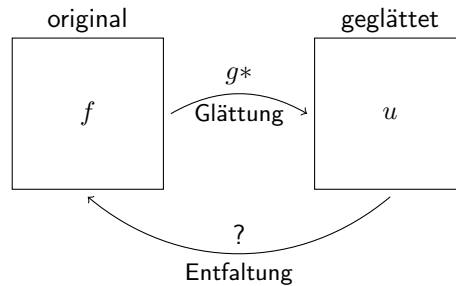
$\Rightarrow M$ hat EW λ_1 zum EV $v_1 = \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$ und EW λ_2 zum EV $v_2 = \frac{1}{|\nabla u|} \begin{pmatrix} -\frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \perp v_1$.

$\Rightarrow M \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}}_{\text{orthogonale Matrix}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = M^T$

$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}^T}_{= \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \end{pmatrix}} = \frac{1}{|\nabla u|^2} \begin{pmatrix} \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x})^2 + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x})^2 & (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x}) \\ (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x}) & \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x})^2 + \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x})^2 \end{pmatrix}$

falls $\nabla u(\mathbf{x}) \neq 0$, sonst $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7.3 Entfaltung



Das heißt: $u = f * g$, wobei u, g gegeben sind und f gesucht ist.
Alternativ kann dies als die Invertierung des Faltungsoperator $f \mapsto g * f$ betrachtet werden.

a) Diskreter Fall:

$$\begin{aligned} g * f &= u \\ (g * f)(j) &= u(j), \quad j \in \Omega \\ \sum_k g(j-k)f(k) &= u(j), \quad j \in \Omega \\ \Rightarrow \Omega \times \Omega \text{ Gleichungssystem} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} k=0 & k=1 & & & k=n \end{matrix} \\ \begin{matrix} j=0 \\ j=1 \\ \\ \\ j=n \end{matrix} \end{array} \left(\begin{array}{ccccc} g(0) & g(-1) & & & g(-n) \\ g(1) & g(0) & g(-1) & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & g(n) & & \end{array} \right) \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(n) \end{pmatrix}$$

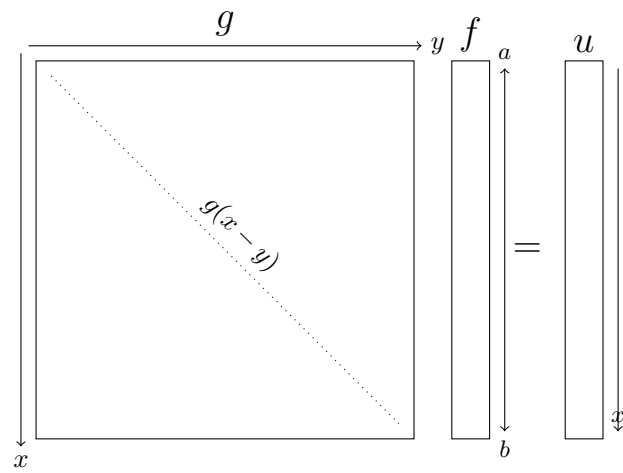
Toeplitz-Matrix

b) Kontinuierlicher Fall:

$$\begin{aligned} (g * f)(x) &= u(x), \quad x \in \Omega \\ \int g(x-y)f(y)dy &= u(x), \quad x \in \Omega \end{aligned}$$

Integralgleichung für die gesuchte Funktion f

\Rightarrow Kontinuierliche Matrix:



Wobei $[a, b]$ die das Definitionsgebiet von f ist. Diese Problem is jedoch schlecht gestellt, da der Operator kompakt ist. (↗ Datei im Studip)

Index

öffnen, 14

Abreißen, 36

Absoluter Fehler, 15

anisotrop, 32

Banachraum, 24

Bilateraler Filter, 32

Bild, 4

Bilinear interpolation, 5

bimodal, 9

Canny-Algorithmus, 36

Dichte, 7

Diffusionsgleichung, 30

Diffusionstensor, 31

dilation, 12

Dirac-Impuls, 20

Diskreter Laplace Operator, 29

Domain, 6

Drehmatrix, 5

Entfaltung, 39

erosion, 13

Euler-Lagrange-Gleichung, 34

Faltung, 18

Farbraum, 4

Fixpunktgleichung, 10

Fixpunktiteration, 10

Fouriertransformation, 21

Frequenzbereich, 25

Frequenzraumfilter, 21

Gauß-Kern, 27

gleitendes Mittel, 19

Gradientenfilter, 34

Hilbertraum, 24

Histogramm, 6

Histogramm - equalization, 8

hysteresis thresholding, 36

Isodata Algorithmus, 10

Isotrop, 32

Kopplungskonstante, 33

Korrelation, 17

Laplace-Schärfen, 38

Laplacian of Gaußian method, 37

Maß, 7

Maske, 17

Masse, 9

Median, 10

Mittelwert, 10

Morphographische Operationen, 11

Nearest neighbour interpolation, 5

Non-maximum suppression, 35

Otsu's Verfahren, 9

Prewitt-Filter, 35

Rauschen, 15

Relativer Fehler, 15

Rudin–Osher–Fatemi-Funktional, 34

schließen, 13

Schwellenwert, 9

Shape based Methods, 9

Signal to noise ratio, 16

Sobel-Filter, 35

Sobolev-Räume, 34

Strukturelement, 12

Toeplitz-Matrix, 39

Varianz, 10

Wärmegleichung, 30

Zeitbereich, 25