

Mathematische Bildverarbeitung

Vorlesungsskript



Institut für Mathematik
Vorlesung von Prof. Dr. Marko Lindner
In \LaTeX gesetzt durch Jonas Sattler

Wintersemester 2018/19

Fehlermeldungen an fabian.gabel@tuhh.de

Inhaltsverzeichnis

1 Überblick	2
1.1 Techniken der Bildverarbeitung	2
1.2 Unser Fokus	2
1.3 Verwandte Vorlesungen	2
1.4 Literatur	2
2 Was ist ein Bild?	3
2.1 Definition	3
2.2 Umwandlung	3
2.3 Beispiel Rotation	4
3 Restauration (Inpainting)	5
3.1 Frequenzraum-Ansatz	5
3.2 PDE-Transport-Diffusions-Ansatz	6
3.3 Variationsansatz	8

1 Überblick

1.1 Techniken der Bildverarbeitung

- Kontrastverbesserung
- Entrauschen
- Kantendetektion
- Schärfen
- Inpainting
- Segmentierung (Einzelne Objekte detektieren)
- Registrierung (Bilder des selben Objektes in Einklang bringen)

1.2 Unser Fokus

- Mathematische Beschreibung

1.3 Verwandte Vorlesungen

- 3D Computervision
- Digitale Bildanalyse
- Mustererkennung und Datenkompression
- Medical imaging

1.4 Literatur

- Bredies, Lorenz : Mathematische Bildverarbeitung
- Aubert, Kornprobst : Mathematical Problems in Image Processing
- Modersitzki : Numerical Methods for Image Registration
- Alt : Lineare Funktionalanalysis

2 Was ist ein Bild?

2.1 Definition

Digitale/diskrete Sicht

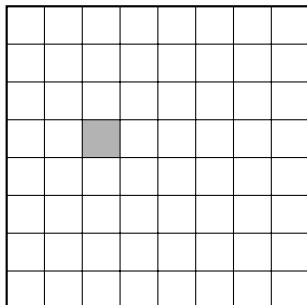


Abbildung 1: Diskretes Bild
Darstellung als Matrix.

Werkzeuge: Lineare Algebra

Vorteile: Endlicher Speicher

Nachteile: Probleme bei zoomen und drehen

Kontinuierlich/analoge Sicht

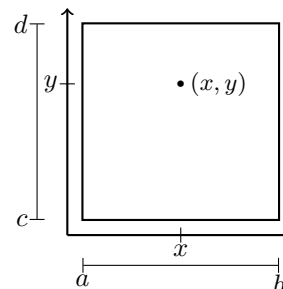


Abbildung 2: Kontinuierliches Bild
Darstellung als Funktion in zwei Veränderlichen

Werkzeuge: Analysis

Vorteile: Mehr Freiheit (z.b. Kante=Linie entlang einer Unstetigkeit)

Nachteile: Unendlicher Speicher

Definition. Ein **Bild** ist eine Funktion $u : \Omega \rightarrow F$, wobei $\Omega \subset \mathbb{Z}^d$ (im diskreten Fall) oder $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (im kontinuierlichen Fall).

$d = 2$: Typisches 2D Bild

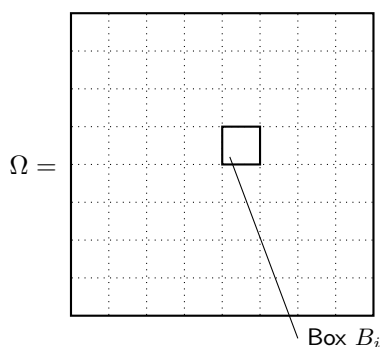
$d = 3$: 3D-Bild bzw. "Körper" oder Video: 2D Ort + Zeit

F ist der **Farbraum**, Beispiele:

- $F = [0, 1]$ oder $F = \{0, 1, \dots, 255\}$, Graustufen
- $F = \{0, 1\}$ schwarz/weiß
- $F = [0, 1]^3$ oder $F = \{0, 1, \dots, 255\}^3$ Farbbilder

2.2 Umwandlung

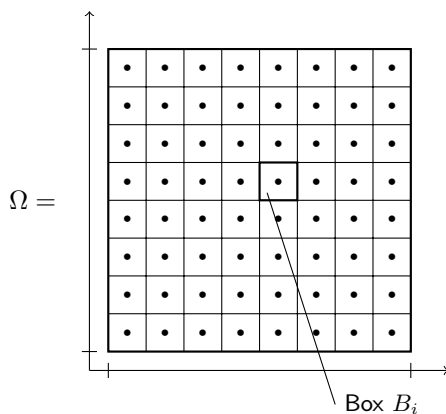
Kontinuierlich \rightarrow Diskret:



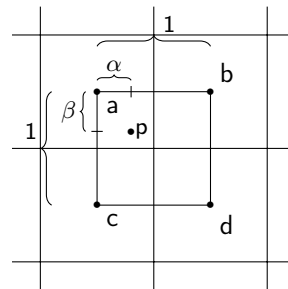
- Ω in Gitter zerlegen
- Jede Box durch nur einen Farbwert approximieren
- Etwa durch den Funktionswert im Mittelpunkt der Box
- oder durch den Mittelwert in der Box:

$$\frac{1}{|B_i|} \cdot \int_{B_i} u(x) dx$$

Diskret → Kontinuierlich:



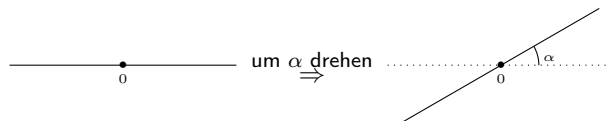
- Idee: Jeder Punkt der Box B_i erhält den Funktionswert von B_i als Farbwert
 \Rightarrow **Nearest neighbour Interpolation**.
- Idee: Mittelpunkt von Box B_i erhält den Wert von Pixel B_i sonst wird interpoliert.
 Grauwert $g :=$ Gewichtetes Mittel aus Grauwerten a, b, c, d .



$$g = (1 - \alpha)(1 - \beta)a + \alpha(1 - \beta)b + (1 - \alpha)\beta c + \alpha\beta d$$

Dieses wird **Bilineare Interpolation** genannt.

2.3 Beispiel Rotation



1. Fall, kontinuierliches Bild

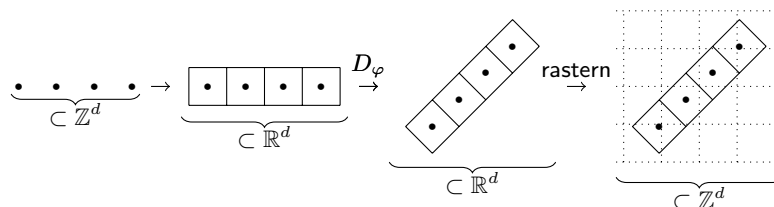
Sei u das alte Bild und v das neue Bild, dann ist die Drehung gegeben durch eine **Drehmatrix** :

$$D_\varphi \in \mathbb{R}^{d \times d}, D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

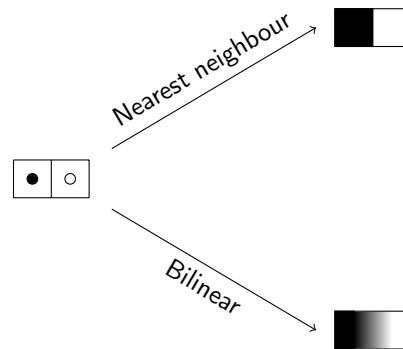
Damit folgt, dass $D(u) = D_\varphi \Omega$ und $v(x) = u(\underbrace{D_\varphi^{-1}x}_{\in \Omega}) = u(D_{-\varphi}x)$. ($D(u)$ ist die **Domain** von u)

2. Fall, diskretes Bild

Dieses ist problematisch, denn i.A. $x \in \mathbb{Z}^d$, aber $D_\varphi x \notin \mathbb{Z}^d$.



Weiterhin ist $v(x) = u(D_\varphi^{-1}x)$, wobei der konkrete Wert durch Interpolation bestimmt wird.



3 Restauration (Inpainting)

Problem: Lücken im Bild, etwa

1. Kratzer
2. Scannerzeile kaputt
3. Defekt in der Kamera
4. Bewusst entferntes Objekt

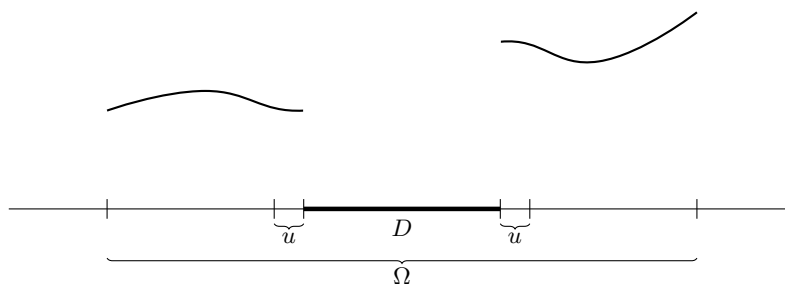
sollen sinnvoll und unauffällig geschlossen werden.

Sei $f : \Omega \rightarrow F$ unser Bild jedoch mit Defekt, d.h. fehlenden Funktionswerten in $D \subset \Omega$.

1. Fall: Jeder Punkt aus D hat Nachbarn in $\Omega \setminus D$.
 \Rightarrow Lücken mittels Interpolation aus benachbarten Werten in $\Omega \setminus D$ schließen.
2. Fall: D hat innere Punkte. Diesen Fall werden wir im folgenden näher betrachten.

3.1 Frequenzraum-Ansatz

Zur Illustration in 1D:



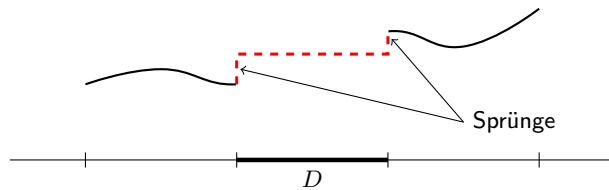
Betrachte Umgebung $U \subset \Omega \setminus D$ und errechne den Mittelwert

$$m := \frac{1}{|U|} \int_U f(x) \, dx$$

von f auf U .

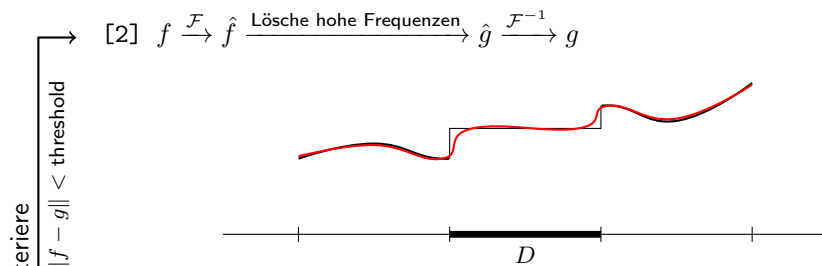
Algorithmus:

[1] Initialisiere f auf D mittels konstanter Funktion m :

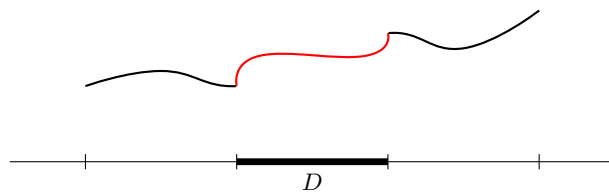


\Rightarrow Sprünge am Rand von D .

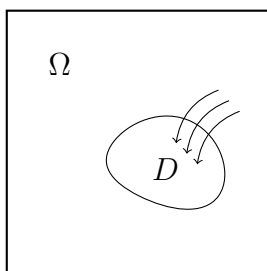
Idee: Sprünge $\hat{=}$ hochfrequente Anteile \Rightarrow wende Tiefpassfilter an.



[3] Ersetze f innerhalb von D durch g .



3.2 PDE-Transport-Diffusions-Ansatz



Idee: Informationen aus $\Omega \setminus D$ nach D "hineinragen".

- Referenzen:
- Weichert 1998
 - Bornemann & März 2007

Skalierung der Diffusion: Betrachte die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(M \nabla u)$$

mit dem Diffusionstensor

$$M = \begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -v_1^T & - \\ -v_2^T & - \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

wobei $v_1 \perp v_2$ die Eigenvektoren des sogenannten doppelt geglätteten Strukturtenors

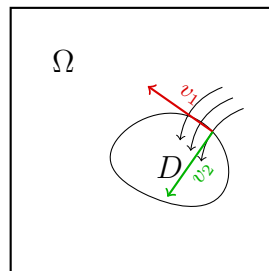
$$J = G_\rho * \left[\underbrace{\left(\nabla(G_\sigma * u) \right)}_{2 \times 1} \cdot \underbrace{\left(-\nabla^T(G_\sigma * u) - \right)}_{1 \times 2} \right]$$

sind. Hierbei bezeichnet ist *-Symbol komponentenweise zu verstehen. Die Faltungskerne G_σ und G_ρ sind Gauß-Kerne für die innere bzw. äußere Glättung.

$\Rightarrow v_1$ Richtung mit maximalem Kontrast mit EW μ_1

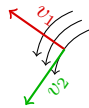
v_2 Richtung mit minimalem Kontrast mit EW μ_2 , genannt **Kohärenzrichtung**.

Hierbei ist $\mu_1 \geq \mu_2$.



Fälle:

$$\mu_1 \gg \mu_2 \approx 0$$



$$\mu_1 \approx \mu_2 \approx 0$$



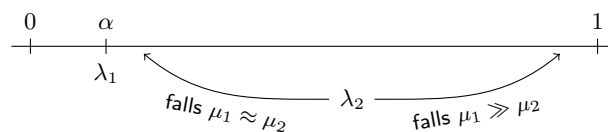
Lokal keine Struktur.

$$\mu_1 \approx \mu_2 \gg 0$$



Kanten.

Die Werte λ_1 und λ_2 werden wie folgt gewählt:



wobei $\alpha \in (0, 1)$ festgehalten wird.

$$\lambda_1 := \alpha, \quad \lambda_2 := \alpha + (1 - \alpha)(1 - g(\mu_1 - \mu_2)),$$

wobei g wie bei Perona Malik gewählt wird, also:

$$g(s) = \frac{1}{1 + \frac{s^2}{\kappa^2}}$$

Dieses wird **Kohärenz verstärkende Diffusion** genannt.

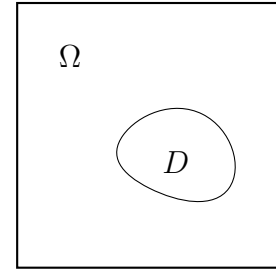
3.3 Variationsansatz

geg.: f auf $\Omega \setminus D$

ges.: u auf Ω

Wunsch 1: $u = f$ auf $\Omega \setminus D$

Wunsch 2: $\|\nabla u\|$ klein auf Ω



Daraus folgt

$$J(u) := \|\nabla u\|_2^2 \rightarrow \min \quad \text{auf} \quad := \{u \in W^{1,2}(\Omega) : u|_{\Omega \setminus D} = f\}$$

Angenommen, $u \in U$ minimiere J , dann folgt für beliebige $v \in W^{1,2}(\Omega)$ mit $v|_{\Omega \setminus D} = 0$, d.h. $v \in H_0^1(D)$, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\Omega} \underbrace{\|\nabla(u + tv)(x)\|^2}_{\|\nabla u(x) + t \nabla v(x)\|^2} - \|\nabla u(x)\|^2 \, dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\Omega} \langle \nabla u(x) + t \nabla v(x), \nabla u(x) + t \nabla v(x) \rangle - \langle \nabla u(x), \nabla u(x) \rangle \, dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\Omega} t^2 \|\nabla v(x)\|^2 + 2t \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle \, dx = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} t \|\nabla v(x)\|^2 + 2 \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle \, dx \\ &= 2 \int_D \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle \, dx \stackrel{\text{Greensche Formel}}{=} 2 \left(\overbrace{\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} v(x) \, ds(x)}^0 - \underbrace{\int_D \Delta u(x) v(x) \, dx}_0 \right) \\ &= 2 \int_D \Delta u(x) v(x) \, dx. \end{aligned}$$

Daraus folgt mit dem Fundamentallema der Variationsrechnung $\Delta u = 0$ in D . Insbesondere ist u die harmonische Fortsetzung von f nach D (harmonisches Impainting). Als harmonische Funktion unterliegt u auf D dem Maximumsprinzip und dem Mittelwertprinzip (s. ??). Es gibt also keine scharfen Kanten in D , anders als z.B. bei kohärenzverstärkender Diffusion.