Mathematische Bildverarbeitung

Inhaltsverzeichnis

1 Überblick

1.1 Techniken der Bildverarbeitung

- Kontrastverbesserung
- Entrauschen
- Kantendetektion
- Schärfen
- Inpainting
- Segmentierung (Einzlene Objekte detektieren)
- Registrierung (Bilder des selben Objektes in Einklang bringen)

1.2 Unser Fokus

- Mathematische Beschreibung

1.3 Verwandte Vorlesungen

- 3D computervision
- Digitale Bildanalyse
- Mustererkennung und Datenkompression
- Medical imaging

1.4 Literatur

- Bredies, Lorenz : Mathematische Bildverarbeitung
- Aubert, Kornprobst : Mathematical Problems in Image Processing
- Modersitzki : Numerical Methods for Image Registration
- Alt : Lineare Funktionalanalysis

2 Was ist ein Bild?

2.1 Definition

Digitale/diskrete Sicht

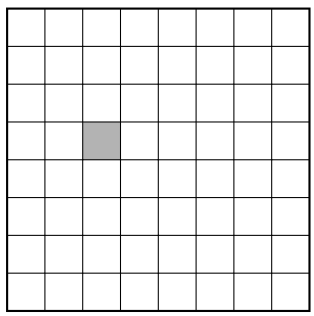


Abbildung 1: Diskretes Bild
Darstellung als Matrix.

Werkzeuge: Lineare Algebra
Vorteile: Endlicher Speicher
Nachteile: Probleme bei zoomen und drehen

Kontinuierlich/analoge Sicht

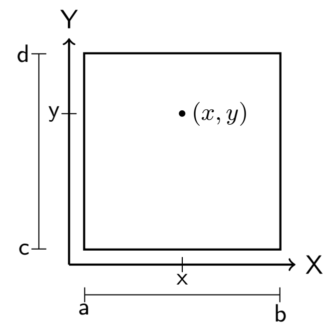


Abbildung 2: Kontinuierliches Bild
Darstelllung als Funktion in zwei Veränderlichen

Werkzeuge: Analysis
Vorteile: Mehr Freiheit (z.b. Kante=Linie entlang einer Unstetigkeit)
Nachteile: Unendlicher Speicher

Definition. Ein **Bild** ist eine Funktion $u : \Omega \to F$, wobei $\Omega \subset \mathbb{Z}^d$ (im diskreten Fall) oder $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (im kontinuierlichen Fall).

$d = 2$: Typisches 2D Bild

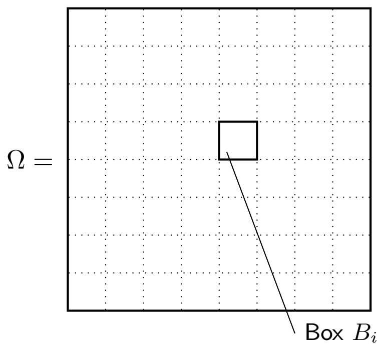
$d = 3$: 3D-Bild bzw. "Körper" oder Video: 2D Ort + Zeit

F ist der **Farbraum** , Beispiele:

- F= $[0, 1]$ oder F=$\{0, 1, ..., 255\}$, Graustufen
- F= $\{0, 1\}$ schwarz/weiß
- F= $[0, 1]^3$ oder F= $\{0, 1, ..., 255\}^3$ Farbbilder

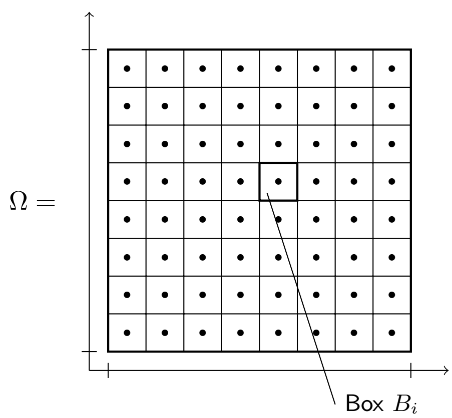
2.2 Umwandlung

Kontinuierlich $\to$ Diskret:

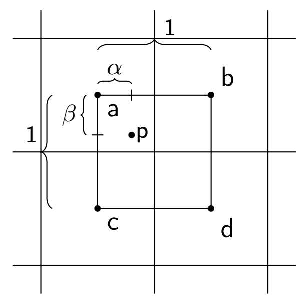


- Ω in Gitter zerlegen
- Jede Box durch nur einen Farbwert approximieren
- Etwa durch den Funktionswert im Mittelpunkt der Box
- oder durch den Mittlewert in der Box: $\frac{1}{|B_i|} \cdot \int_{B_i} u(x)dx$

Diskret $\rightarrow$ Kontinuierlich:



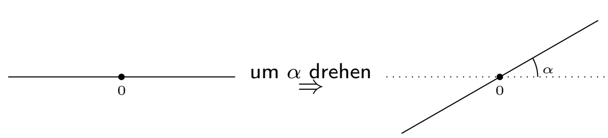
1. Idee: Jeder Punkt der Box B_i erhält den Funktionswert von B_i aus als diskretem Pixel $\Rightarrow$ **Nearest neighbour interpolation** .
2. Idee: Mittelpunkt von Box B_i erhält den Wert von Pixel B_i sonst wird interpoliert. Grauwert g := Gewichtetes Mittel aus Grauwerten a, b, c, d.



$g = (1-\alpha) \cdot (1-\beta) \cdot a + \alpha \cdot (1-\beta) \cdot b + (1-\alpha) \cdot \beta \cdot c + \alpha \cdot \beta \cdot d$

Dieses wird **Bilinear interpolation** genannt.

2.3 Beispiel Rotation



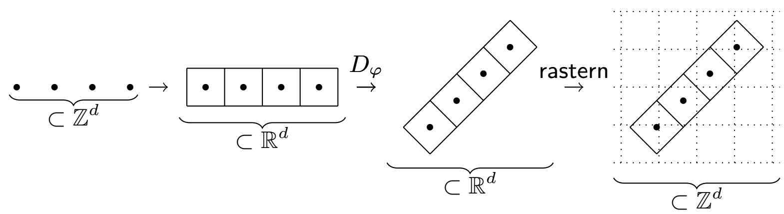
1. Fall, kontinuierliches Bild

Sei u das alte Bild und v das neue Bild, dann ist die Drehung gegeben durch eine **Drehmatrix** :

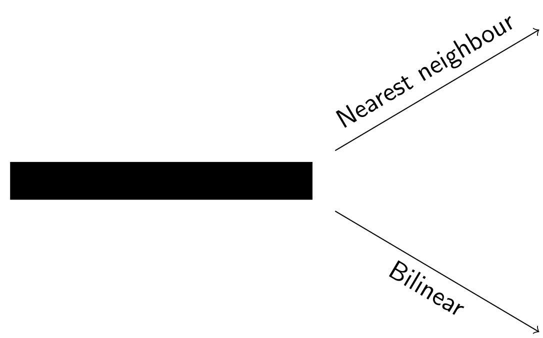
$$D_\varphi \in \mathbb{R}^{d \times d}, D_\varphi = \begin{pmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) \\ sin(\varphi) & cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Damit folgt, dass $D(u) = D_\varphi \Omega$ und $v(x) = u(\underbrace{D_\varphi^{-1} x}_{\in \Omega}) = u(D_{-\varphi} x)$. ($D(u)$ ist die **Domain** von u)

2. Fall, diskretes Bild
Dieses ist problematisch, denn I.A. $x \in \mathbb{Z}^d$, aber $D_\varphi x \notin \mathbb{Z}^d$.



Weiterhin ist $v(x) = u(D_\varphi^{-1} x)$, wobei der konkrete Wert durch Interpolation bestimmt wird.



3 Histogramme und deren Anwendungen

3.1 Histogramme

Sei $u : \Omega \to F$ ein diskretes Bild, dann heißt die Abbildung

$$H_u : F \to \mathbb{N}_0$$

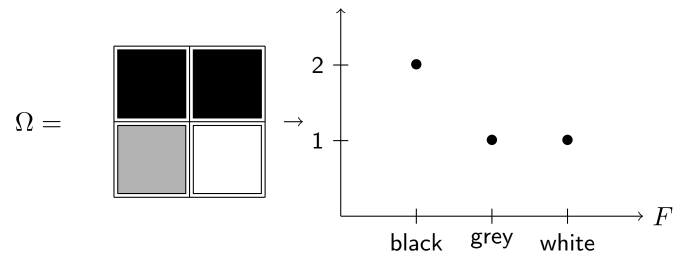
$$F \ni k \mapsto \#\{x \in \Omega | u(x) = k\}$$

Histogramm des Bildes u. Dieses gibt an, wie often die Farbe k im Bild vorhanden ist.
Damit gilt auch:

$$\sum_{k \in F} H_u(k) = |\Omega| \text{, also die Anzahl der Pixel}$$

Bemerkung. Manchmal betrachtet man die relative Häufigkeit $\tilde{H}_u(k) = \dfrac{H_u(k)}{|\Omega|}$.

Beispiel:



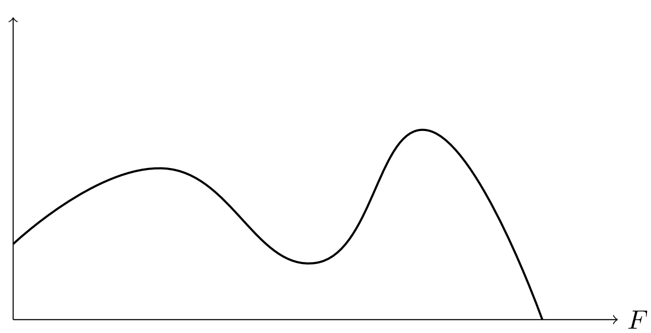
Für kontinuierliche Bilder wird das allgemeinere Konzept von einem **Maß** benötigt:

$A \subset F,\ \mathcal{H}_u := \left|u^{-1}(A)\right|$

→ Diskretes Bild: Anzahl der Elemente in $u^{-1}(A)$

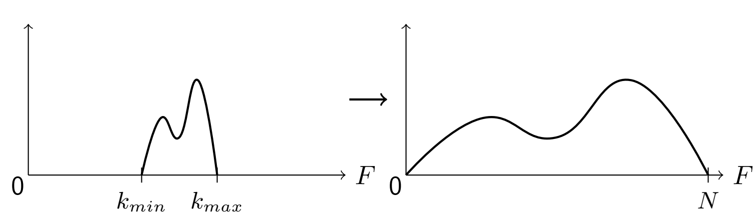
→ Kontinuierliches Bild: Volumen von $u^{-1}(A)$

Zusammenhang zum vorherigen: $\mathcal{H}_u(A) = \sum_{k \in A} H_u(k)$. Man sagt dann, dass U_u eine **Dichte** zum Maß $\mathcal{H}_u$ sei. Diese kann auch im kontinuierlichen existieren:



3.2 Anwendung: Kontrastverbesserung

Problem & Idee: Falls das Bild nur einen kleinen Teil von F nutzt, kann der Kontrast verbessert werden, indem man das Bild auf ganz F verteilt.



$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, bend left, "\text{originales Bild}"] \arrow[rr, bend right, "\text{Bild mit besserem Kontrast}"'] & F \arrow[r, bend left, "\text{Zauberei } T"] & F
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{aligned}
&v = T \circ u \\
&v(k) = T(u(k))
\end{aligned}$$

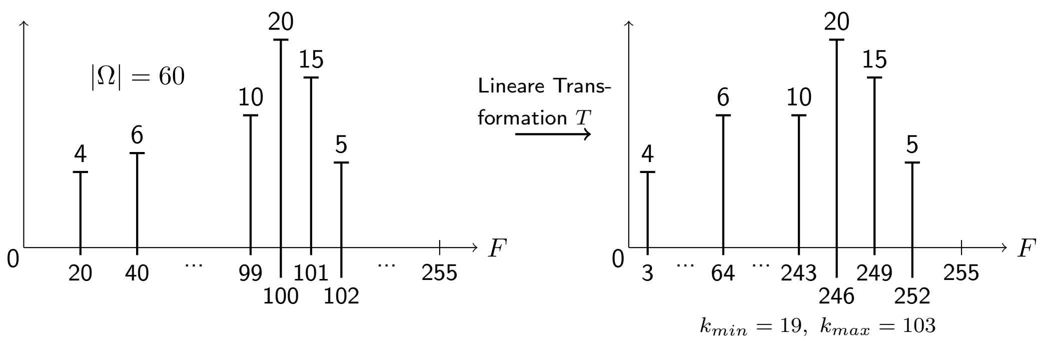
1. Idee, Kontrastdehnung:

T "lineare" Abbildung, so dass $T(k_{min}) = 0$ und $T(k_{max}) = N$:

$$T(k) = \frac{k - k_{min}}{k_{max} - k_{min}} N, \text{ Kontinuierlicher Farbraum}$$

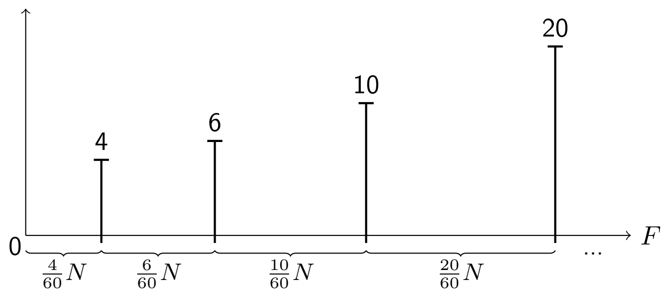
$$T(k) = \left[\frac{k - k_{min}}{k_{max} - k_{min}} N\right], \text{ Diskreter Farbraum}$$

Beispiel:



2. Idee nicht-lineare Kontrastdehnung

Diesesmal setzen wir $T(k) = \left[\frac{N}{|\Omega|} \sum_{l=0}^{k} H_u(l)\right]$ für einen diskreten Farbraum und erhalten:



T lässt sich auch alternativ ausdrücken durch:

$$T(k) = [\mathcal{H}_u(\{0, ..., k\})]$$

Und somit folgt dass für den kontinuierlichen Fall T durch

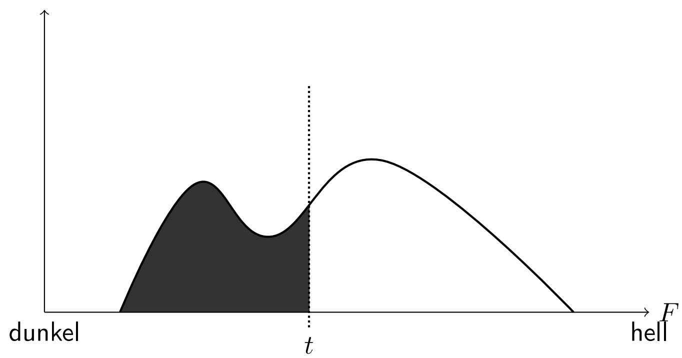
$$T(k) = \frac{N}{|\Omega|} \mathcal{H}_u((0, k))$$

definiert werden kann. Allgemein heißt der Prozess **Histogramm - equalization** .

3.3 Anwendung: SW-Konvertierung

Aufgabe: Graustufenbild $\rightarrow$ SW-Bild.
Nützlich etwa bei Objekterkennung/Segmentierung.

Idee: Das Histogramm an einem gewissen **Schwellenwert** t spalten:



Also setze nun für $t \in F$:

$$\text{schwarz} = \{k \in F | k \leq t\}$$

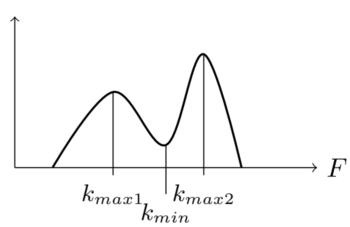
$$\text{weiß} = \{k \in F | k > t\}$$

Graustufenbild $u \longrightarrow$ schwarz/weiß Bild $\tilde{u}$:

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} 0, & u(x) \in \text{schwarz} \\ 1, & u(x) \in \text{weiß} \end{cases} \quad \Rightarrow \tilde{F} = \{0, 1\}$$

Methoden um diesen Schwellenwert zu wählen:

1. **Shape based Methods** :
   Falls das Histogramm von u **bimodal** ist, also die Form:

   hat, dann wähle:

   $$t := k_{min}$$

   $$\text{oder } t := \frac{k_{max1} + k_{max2}}{2}$$

2. **Otsu's Verfahren** (1979):
   Vorher einige Definitionen.
   Die **Masse** :

   $$m_{\text{schwarz}} := \sum_{k \in \text{schwarz}} H_u(k)$$

$$m_{\text{weiß}} := \sum_{k \in \text{weiß}} H_u(k)$$

Der **Mittlewert** :

$$\mu_{\text{schwarz}} := \frac{\sum\limits_{k \in \text{schwarz}} k \cdot H_u(k)}{\sum\limits_{k \in \text{schwarz}} H_u(k)} = \frac{\sum\limits_{k \in \text{schwarz}} k \cdot H_u(k)}{m_{\text{schwarz}}}$$

$$\mu_{\text{weiß}} := \frac{\sum\limits_{k \in \text{weiß}} k \cdot H_u(k)}{\sum\limits_{k \in \text{weiß}} H_u(k)} = \frac{\sum\limits_{k \in \text{weiß}} k \cdot H_u(k)}{m_{\text{weiß}}}$$

Die **Varianz** :

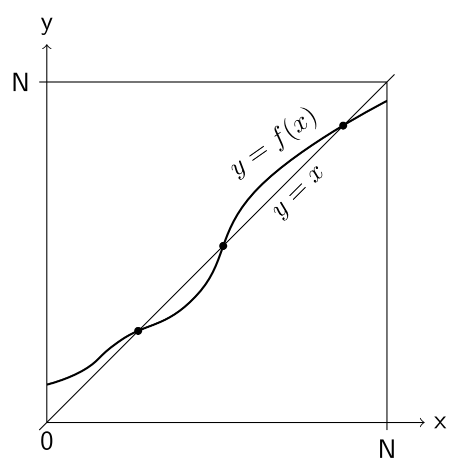
$$\sigma^2_{\text{schwarz}} = \sum_{k \in \text{schwarz}} (k - \mu_{\text{schwarz}})^2 \cdot H_u(k)$$

$$\sigma^2_{\text{weiß}} = \sum_{k \in \text{weiß}} (k - \mu_{\text{weiß}})^2 \cdot H_u(k)$$

Nun lautet Otsu's Methode: $\sigma^2_{\text{schwarz}} + \sigma^2_{\text{weiß}} \xrightarrow{t} \text{min}$.

3. **Median** :
   Wähle t so dass $m_{\text{schwarz}} = m_{\text{weiß}}$.

4. **Isodata Algorithmus** (1970s):
   Wähle t so, dass $t = \frac{\mu_{\text{schwarz}} - \mu_{\text{weiß}}}{2} =: f(t)$.
   Diese Gleichung ist bereits eine **Fixpunktgleichung** und eine Lösung kann, etwa mit einer **Fixpunktiteration** approximiert werden, das heißt $t_{n+1} := f(t_n)$.

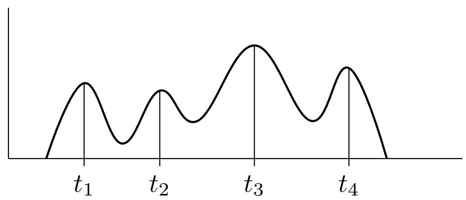


Matlab code :

```
u=imread('liftingbody.png');
t=greythresh(u);%uses Otsu's method
v=im2bn(u,t);
imshow(v);
```

Einige dieser Verfahren können auch erweitert werden, so dass ein Graustufenbild nicht nur in zwei, sondern in M Farben zerlegt werden kann. Im allgemeinen werden dann $M-1$ thresholds benötigt.

1. **Shape based** :



2. **Otsu's Verfahren** :
   Farbklassen:

$$F_1 = \{k : k \leq t_1\}$$
$$F_2 = \{k : t_1 < k \leq t_2\}$$
$$\vdots$$
$$F_M = \{k : t_{M-1} < k\}$$

   Und wie zuvor: $\sigma_1^2 + ... + \sigma_M^2 \to$ min

3. **Median** :
   Zerteile F in M Quantile gleicher Masse.

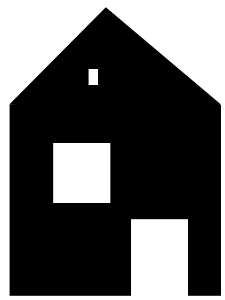
4. **Isodata** :
   Hierzu existiert keine Bekannte Verallgemeinerung auf M Farbklassen.

Matlab code :

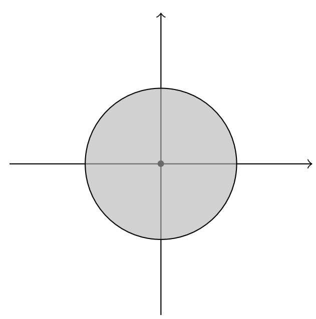
```
u=imread('Circles Bright Dark.png');
t=multithresh(u,M-1);
v=imquantize(u,t);
w=label2rgb(u,t);
imshow(w);
```

4 Einfache Morphographische Operationen

S/W Bild:

$A =$ 

Strukturelement :

$B =$ 

4.1 Verknüpfungen von A und B

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

Diese wird **dilation** genannt.
Anschaulich wird an jeden schwarzen Punkt des Bildes A das Struktur element B gelegt.

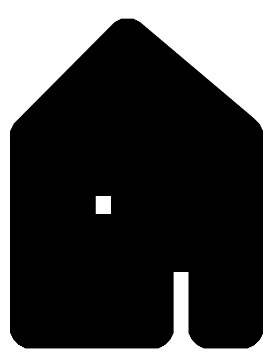
$A + B =$ 

Bild erzeugt in Matlab durch:

```
I=imread('Bild1.png');
se=strel('disk',40,8);
I2=imcomplement(imdilate(imcomplement(I),se));%Es wird das Komplement des Bildes gebildet, damit das Strukturelement auf den schwarzen bereich angewendet wird
imshow(I2);
```

$$A - B := \{a : a + B \subset A\}$$

Diese wird **erosion** genannt.
Anschaulich werden die schwarzen Bereiche des Bildes gesucht, in die das Strukturelement hinein passt.

$A - B =$

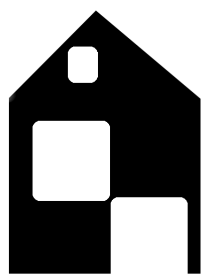


Bild erzeugt in Matlab durch:

```
I=imread('Bild1.png');
se=strel('disk',20,8);
I2=imcomplement(imerode(imcomplement(I),se));
imshow(I2);
```

Es ist schnell zu erkennen das $A \neq (A + B) - B$, deshalb wird eine neue Operation eingeführt:

$$A \bullet B := (A + B) - B$$

Dieses wird **schließen** genannt und wird etwa genutzt um Löcher, z.b. Rauschen, in einem Bild zu entfernen. Im Beispiel Bild ist zu sehen, dass das obere Fenster nicht mehr vorhanden ist.

$A \bullet B =$

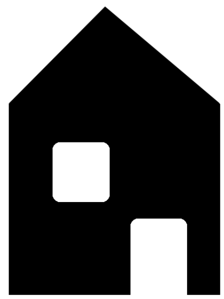


Bild erzeugt in Matlab durch:

```
I=imread('Bild1.png');
se=strel('disk',20,8);
I2=imcomplement(imdilate(imcomplement(I),se));
I3=imcomplement(imerode(imcomplement(I2),se));
imshow(I3);
```

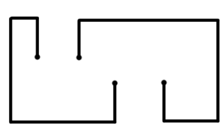
Es existiert auch die Umgekehrt Operation:

$$A \circ B := (A - B) + B$$

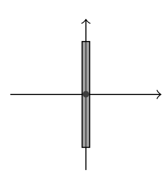
Diese wird **öffnen** genannt.

Diesmal mit einem neuen Beispiel:

$A =$



$B =$



$$A \circ B =$$

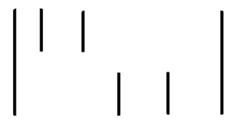


Bild erzeugt in Matlab durch:

```
I=imread('Bild2.png');
se=strel('line',10,90);
I2=imcomplement(imerode(imcomplement(I),se));
I3=imcomplement(imerode(imcomplement(I2),se));
imshow(I3);
```

5 Entrauschen: Filter & Co.

5.1 Rauschen

Rauschen : Ungewollte Störungen in einem Bild

- punktweise
- zufällig
- unabhängig
- additiv (bei multiplikativem Rauschen log anwenden)

Notation:

$$\boxed{f_0} \xrightarrow{+\text{ Rauschen}} \boxed{f} \xrightarrow{\text{Entrauschen}} \boxed{u}$$

Sauberes Bild — Gestörtes Bild — Resultat

Wie gut das entrauschte Bild u das saubere Bild f_0 beschreibt wird durch Normen gemessen.

$||f - f_0||$, Rauschen

$||u - f_0||$, **Absoluter Fehler**

$\frac{||u - f_o||}{||f - f_0||}$, **Relativer Fehler** im Vergleich zum Rauschen

$\frac{||u - f_o||}{||f_0||}$, Relativer Fehler im Vergleich zum Signal

Typischerweise ist die gewählte Norm:

$$||f|| = ||f||_2 = \sqrt{\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx}$$

oder im diskreten:

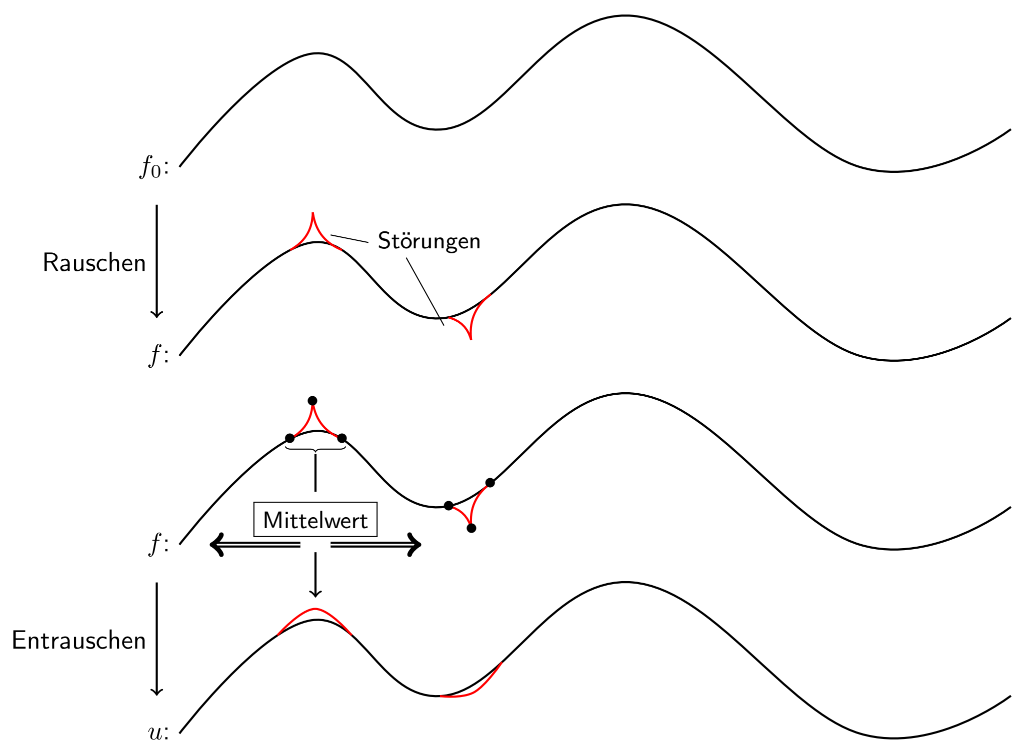
$$||f||_2 = \sqrt{\sum_{x \in \Omega} |f(x)|^2}$$

Eng verwandt ist die **Signal to noise ratio** (SNR):

$$log(\underbrace{\frac{||f_0||_2}{||u - f_0||_2}}_{\in\ [1,\infty)}) \in [0, +\infty), \text{ wobei } 0 \text{ schlecht und } +\infty \text{ gut ist.}$$

5.2 Glättungsfilter

Grundidee: (zur Vereinfachung in 1D)

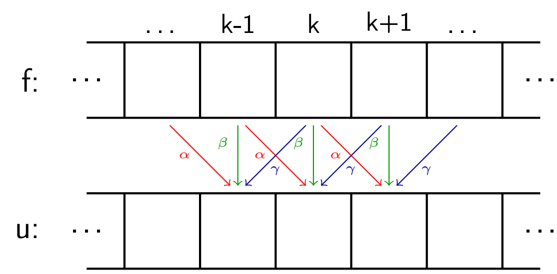


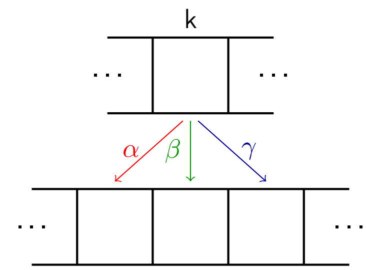
$$u(k) := \alpha \cdot f(k-1) + \beta \cdot f(k) + \gamma \cdot f(k+1) \tag{5.1}$$

wobei:

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \tag{5.2}$$

Schematisch bedeutet (5.1):





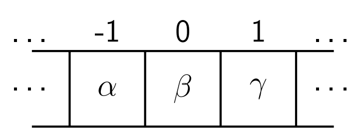
Durch (5.1) ist eine Abbildung $f \mapsto u$ gegeben, wir schreiben kurz:

$u = m \boxast f$, dieses wird **<u>Korrelation</u>** genannt.

mit:

$$\boxed{(m \boxast f)(k) = \sum_{i \in supp(m)} m(i) f(k+i)} \tag{5.3}$$

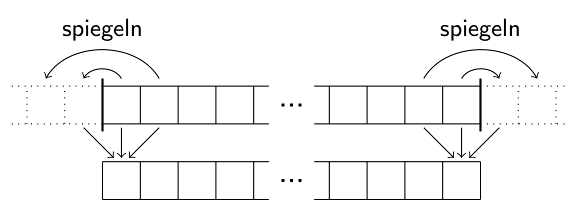
und:

m=  gennant **<u>Maske</u>** .

Setzt man nun $j := k + i$ in (5.1), so ist $i = j - k$, d.h.

$$\boxed{(m \boxast f)(k) = \sum_{i \in supp(m)} m(j-k) f(j)} \tag{5.4}$$

Um die Abbildung auf den Rand anzuwenden wird das Bild gespiegel, in 1D:



in 2D:

d	b	d
q	p	q
d	b	d

Formel (5.4) erinnert an die Formel der **Faltung** :

$$\boxed{(g * f)(k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} g(\underbrace{k - j}_{\text{Anders als (5.4)}}) \cdot f(j)} \tag{5.5}$$

Setzt man also $g(i) := m(-i) =: \tilde{m}(i)$, was einer Spieglung der Maske entspricht, dann ist

$$m \boxast f = g * f = \tilde{m} * f$$

Eigenschaften der Faltung:

$\boxed{1}$ $(f * g) * h = f * (g * h)$, Assoziativität

$\boxed{2}$ $f * g = g * f$, Kommutativität

$\boxed{3}$ $\tilde{f} * \tilde{g} = \widetilde{f * g}$, Kompatibilität mit Spiegelung

Eigenschaften der Korrelation:

$\boxed{1'}$ $f \boxast (g \boxast h) = \tilde{f} * (\tilde{g} * h) \overset{\boxed{1}}{=} (\tilde{f} * \tilde{g}) * h \overset{\boxed{3}}{=} (\widetilde{f * g}) * h = (f * g) \boxast h \neq (f \boxast g) \boxast h$, nicht assoziativ!

$\boxed{2'}$ $f \boxast g = \tilde{f} * g \overset{\boxed{2}}{=} g * \tilde{f} = \tilde{\tilde{g}} * \tilde{f} \overset{\boxed{3}}{=} (\widetilde{\tilde{g} * f}) = \widetilde{g \boxast f} \neq g \boxast f$, nicht kommutativ!

$\boxed{3'}$ $\tilde{f} \boxast \tilde{g} = \tilde{\tilde{f}} * \tilde{g} \overset{\boxed{3}}{=} (\widetilde{\tilde{f} * g}) = \widetilde{f \boxast g}$, Kompatibilität mit Spiegelung

$\boxast$ und $*$ definiert man auf: $\ell^1(\mathbb{Z}^d) := \{f = (f_i)_{i \in \mathbb{Z}^d} : \underbrace{\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} |f_i|}_{:= ||f||_1} < \infty\}$

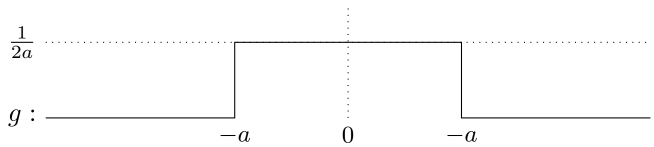
Man kann zeigen (Übung): $f, g \in \ell^1 \Rightarrow f * g \in \ell^1$ und $||f * g||_1 \leq ||f||_1 \cdot ||g||_1$. Wobei oft die Gleichheit gilt.

Alles gilt auch in der Kontinuierlichen Version:

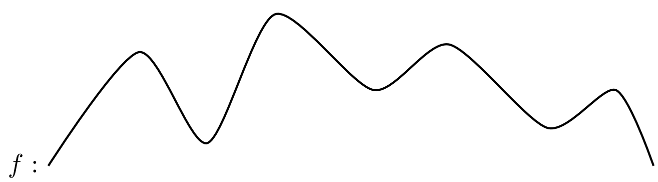
$$L^1(\mathbb{R}^d) := \{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} | \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} |f|\, dx}_{:=||f||_1} < \infty\}$$

$$f, g \in L^1(\mathbb{R}^d) : (g * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)f(y)dy,\ y, x \in \mathbb{R}^d$$

Beispiel für den kontinueirlichen Fall:

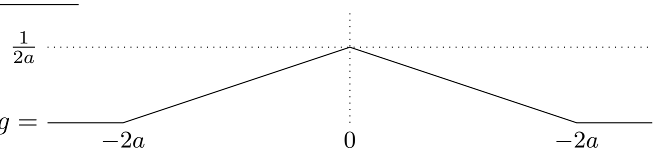


Hierbei gilt $\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = 1$



$g \boxast f =$ <u>**gleitendes Mittel**</u> .

$g \boxast g = \tilde{g} * g = g * g =$



Weitere Eigenschaften der Faltung:
Für alle $f, g \in L^1$ or ℓ^1

$$\left.\begin{aligned} (g_1 + g_2) * f = (g_1 * f) + (g_2 * g) \\ (\alpha g) * f = \alpha(g * f) \end{aligned}\right\} = \text{Linearität}$$

Somit ist:

$$g \mapsto f * g$$

ein linearer Operator.

Formt ℓ^1 bzw. L^1 eine Algebra mit neutralem Element δ?

ℓ^1?:

δ: $\cdots$	0	0	1	0	0	$\cdots$
			↑ Pos 0			

Ja!

L^1?: Für ein solches Element muss gelten:
$\forall f \in L^1 : d * f = f$
$\forall x \in \mathbb{R} : \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\delta(x-y)}_{=0 \forall x \neq y} f(y)dy = f(x)$

Diese Funktion wird **Dirac-Impuls** genannt ist aber kein Element von L^1.

Nun zu Masken in 2D:

$$u = m \circledast f \text{ mit } m = \begin{array}{ccc} & \boxed{\alpha} & \\ \boxed{\beta} & \boxed{\gamma} & \boxed{\delta} \\ & \boxed{\epsilon} & \end{array}$$

wobei $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 1$
Kurzschreibweise: $u_{ij} := u(x)$ wobei $x = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$, analog für f_{ij}.

$$\Rightarrow u_{ij} = \alpha f_{i-1,j} + \beta f_{i,j-i} + \gamma f_{ij} + \delta f_{i,j+1} + \epsilon f_{i+1,j}$$

$$u = m \circledast f = \tilde{m} * f \text{ mit } \tilde{m} = \begin{array}{ccc} & \boxed{\epsilon} & \\ \boxed{\delta} & \boxed{\gamma} & \boxed{\beta} \\ & \boxed{\alpha} & \end{array}$$

Symmetrischer Fall:

$$\tilde{m} = \begin{array}{ccc} & \boxed{\alpha} & \\ \boxed{\alpha} & \boxed{\gamma} & \boxed{\alpha} \\ & \boxed{\alpha} & \end{array} \text{ mit } \gamma = 1 - 4\alpha$$

$$u_{ij} = (1-4\alpha) f_{ij} + \alpha(f_{i-1,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1} + f_{i+1,j}) \tag{5.6}$$

$$\text{Erinnerung: } \underset{\text{Sauberes Bild}}{\boxed{f_0}} \xrightarrow{+\text{ Rauschen}} \underset{\text{Gestörtes Bild}}{\boxed{f}} \xrightarrow{\text{Entrauschen}} \underset{\text{Resultat}}{\boxed{u}}$$

Annahme: $f_{ij} = f_{ij} + r_{ij}$ mit $r_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ iid.

z.z.: $Var(u_{ij}) \leq Var(f_{ij})$

$$Var(f_{ij}) = E(\underbrace{f_{ij} - \overbrace{Ef_{ij}}^{f_{ij}^0}}_{r_{ij}})^2 = \sigma^2$$

$$
\begin{aligned}
Var(u_{ij}) &= E(u_{ij} - Eu_{ij})^2 = E((1-4\alpha)(\underbrace{f_{ij} - f^0_{ij}}_{r_{ij}}) + \alpha((\underbrace{f_{i-1,j} - f^0_{i-1,j}}_{r_{i-1,j}}) + ... + (\underbrace{f_{i+1,j} - f^0_{i+1,j}}_{r_{i+1,j}})))^2 \\
&= E((1-4\alpha)^2 r^2_{ij} + \alpha^2 (r^2_{i-1,j} + r^2_{i,j-1} + r^2_{i,j+1} + r^2_{i+1,j}) + 2(1-4\alpha)\alpha r_{ij} r_{i-1,j} ...) \\
&= (1-4\alpha)^2 \underbrace{Er^2_{i,j}}_{\sigma^2} + \alpha^2 (Er^2_{i-1,j} + ... + Er^2_{i+1,j}) + 2(1-4\alpha)\alpha \underbrace{\underbrace{E(r_{ij} r_{i-1,j})}_{Er_{ij}Er_{i-1,j}}}_{0} + \underbrace{...}_{0}) \\
&= (1-4\alpha)^2 \sigma^2 + \alpha^2 4\sigma^2 = (1 - 8\alpha + 16\alpha^2 + 4\alpha^2)\sigma^2
\end{aligned}
$$

Da $0 \leq \alpha$ und $0 \leq 1 - 4\alpha \Rightarrow 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{4}$:

$$
(1 - 8\alpha + 16\alpha^2 + 4\alpha^2)\sigma^2 = 1 + \underbrace{\underbrace{20\alpha}_{\geq 0}\underbrace{(\alpha - \frac{2}{5})}_{<0}}_{\leq 1}
$$

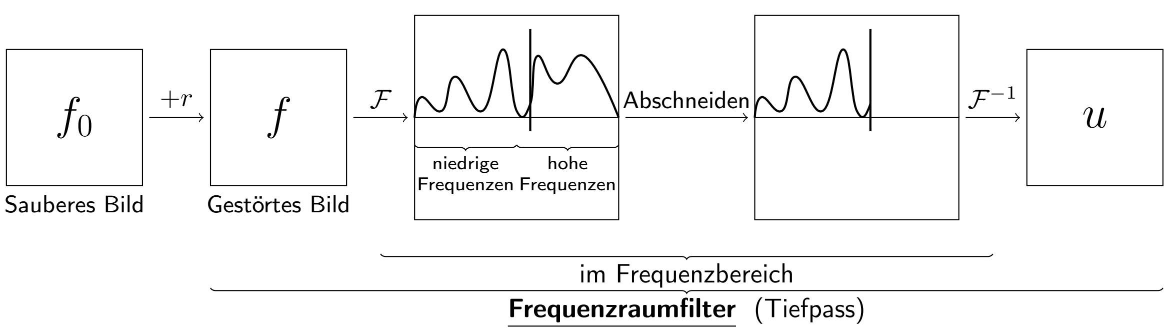
$\Rightarrow Var(u_{ij}) \leq Var(f_{ij})$ für $\alpha \in [0, \frac{1}{4}]$
Dabei gilt: $Var(u_{ij}) \overset{\alpha}{\to} d\text{min} \iff 1 - 8\alpha + 20\alpha^2 \overset{\alpha}{\to} \text{min} \iff -8 + 40\alpha = 0 \iff \alpha = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow$ bester Filter :

	$\frac{1}{5}$	
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
	$\frac{1}{5}$	

5.3 Frequenzraum-filter

Ansatz: Rauschen = hochfrequente Anteile des Signals.
Diese können mittels der **Fouriertransformation** $\mathcal{F}$ gezielt entfernt werden.



Ein wichtiges Instrument ist hierbei die Fouriertransformation:

$$
\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}
$$

$$\boxed{\hat{f}(z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle z,x\rangle} dx} \tag{5.7}$$

Wobei $z \in \mathbb{R}^d, f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Falls auch $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist ,dann lässt sich f wie folgt mittels der inversen Fouriertransformation aus $\hat{f}$ rekonstruieren:

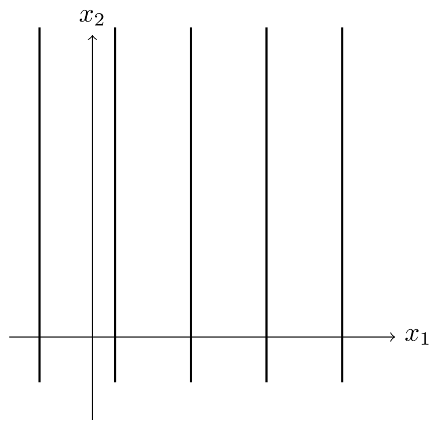
$$\mathcal{F}^{-1} : \hat{f} \mapsto f$$
$$\boxed{\hat{f}(z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{i\langle z,x\rangle} dx} \tag{5.8}$$

Wobei $x \in \mathbb{R}^d$.
Man hat also $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f$, d.h.

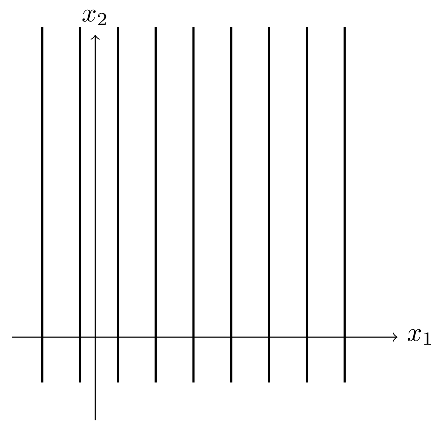
$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-i\langle z,y\rangle} dy \right) e^{i\langle z,x\rangle} dz$$

Sei nun $e_z(x) := e^{i\langle z,x\rangle},\ x \in \mathbb{R}^d$ mit Parameter $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_d \end{pmatrix}$.
Also $e_z(x) = e^{i\langle \binom{z_1}{z_2}, \binom{x_1}{x_2} \rangle} = e^{i(z_1x_1+z_2x_2)}$
Beispiele in $2D$:
(Hier stellen die Linien, Punkte mit konstantem wert dar)

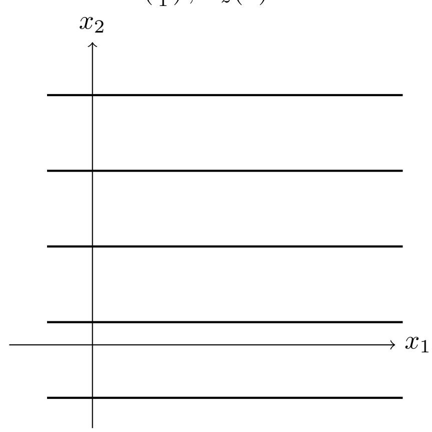
$z = \binom{1}{0},\ e_z(x) = e^{ix_1}$:



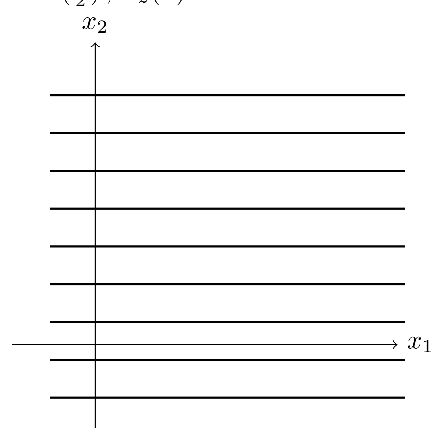
$z = \binom{2}{0},\ e_z(x) = e^{i2x_1}$:



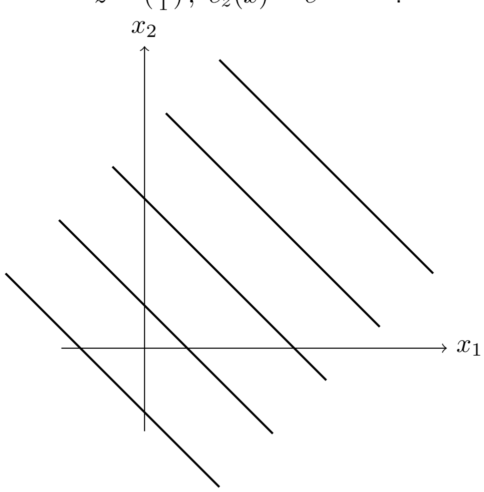
$z = \binom{0}{1},\ e_z(x) = e^{ix_2}$:



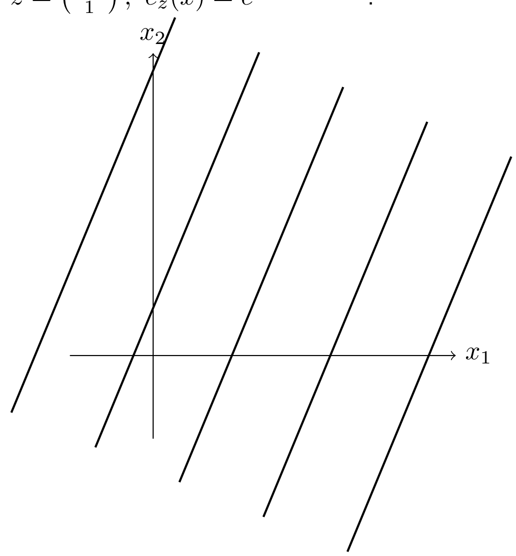
$z = \binom{0}{2},\ e_z(x) = e^{i2x_2}$:



$z = \binom{1}{1},\ e_z(x) = e^{i(x_1+x_2}$:



$z = \binom{-2}{1},\ e_z(x) = e^{i(-2x_1+x_2)}$:



$f \in L^2(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} | \int_{\mathbb{R}^d} |f|^2 \, dx < \infty\}$ ist

- ein normierter Raum mit $+$, $\alpha\cdot$ und $||\cdot||_2 := \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 \, dx}$

- ein Skalarproduktraum mit $\langle f,g\rangle := \int_{\mathbb{R}^d} f\bar{g}dx$, wobei $||f||_2^2 = \langle f,f\rangle$
- ein vollständiger Raum, also **Banachraum**

Ein vollständiger normierter Banachraum mit Skalarprodukt heißt **Hilbertraum** .

$\mathcal{F}$ kann auch als Abbildung auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ betrachtet werden. Dann gilt:

$$\hat{f} = \mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

und

$$\left|\left|\hat{f}\right|\right|_2 = ||f||_2 \tag{5.9}$$

und sogar

$$\left\langle \hat{f},\hat{g}\right\rangle_2 = \langle f,g\rangle_2 \tag{5.10}$$

für alle $f,g \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Weitere Eigenschaften der Fouriertransformation:

i) $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \hat{f}$ stetig und $\lim\limits_{|z|\to\infty} \hat{f}(z) = 0$

ii) $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^d) \to C(\mathbb{R}^d)$ ist eine lineare Abbildung

iii) $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^d) \to C(\mathbb{R}^d)$ ist eine beschränkte/stetige Abbildung

iv) Verschiebung $\stackrel{\mathcal{F}}{\to}$ Modulation, d.h.

$$g(x) = f(x+a) \Rightarrow \hat{g}(z) = e^{i\langle a,z\rangle}\hat{f}(z)$$

v) Modulation $\stackrel{\mathcal{F}}{\to}$ Verschiebung, d.h.

$$g(x) = e^{i\langle x,a\rangle}f(x) \Rightarrow \hat{g}(z) = \hat{f}(z-a)$$

vi) Skalierung $\stackrel{\mathcal{F}}{\to}$ inverse Skalierung, d.h.

$$g(x) = f(cx) \Rightarrow \hat{g}(z) = \frac{1}{|c|}\hat{f}(\frac{z}{|c|})$$

vii) Konjugation: $g(x) = \overline{f(x)} \Rightarrow \hat{g}(z) = \overline{\hat{f}(-z)}$
Folglich: f reelwertig $\Rightarrow \hat{f}(z) = \overline{\hat{f}(-z)}$

viii)

$$\text{Grundmode: } \hat{f}(0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx$$
$$\text{Analog: } f(0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x)dx$$

ix) Differentiation $\stackrel{\mathcal{F}}{\to}$ Multiplikation mit Potenzen von z, d.h.

$$g(x) = \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}f(x) \Rightarrow \hat{g}(z) = i^{\alpha_1+\cdots+\alpha_d}z_1^{\alpha_1}\cdots z_d^{\alpha_d}\hat{f}(z)$$

x) Umkehrung des letzten Punktes:

$$g(x) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d} f(x) \Rightarrow \hat{g}(z) = i^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_d} \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \hat{f}(z)$$

xi)

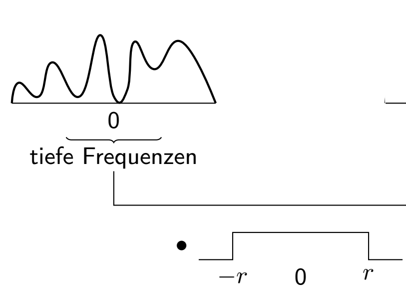
$$\text{Faltungssatz: } \mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g),\ \widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \hat{f} \cdot \hat{g}$$

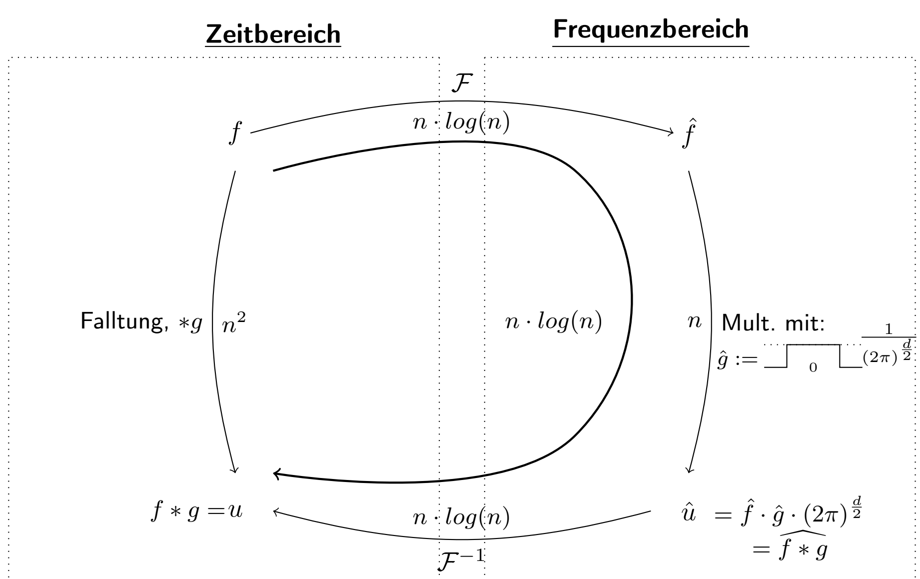
$$\text{Analog: } \mathcal{F}(f \cdot g) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g),\ \widehat{f \cdot g} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \hat{f} * \hat{g}$$

d.h.: Faltung $\overset{\mathcal{F}}{\to}$ Multiplikation und umgekehrt

Zur Erinnerung:

$$\boxed{f_0} \xrightarrow{\mathcal{F}} \boxed{\hat{f}} \xrightarrow{\text{Hohe Frequenzen abschneiden}} \boxed{\hat{u}} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \boxed{u}$$





Wie sieht g aus?

$$g = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\chi_{[-r,r]}\right)$$

$$\left(\chi_M(z) = \begin{cases} 0, & z \notin M \\ 1, & z \in M \end{cases}\right)$$

$$\begin{aligned}
g(x) =& \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}(\mathcal{F}^{-1}\chi_{[-r,r]^d})(x) \\
=& \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}\chi_{[-r,r]^d}(z)e^{i\langle z,x\rangle}dz \\
(d=1) \rightarrow =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{[-r,r]}(z)e^{izx}dz \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_{r}^{-r}e^{izx}dz \\
=& \frac{1}{2\pi}\frac{e^{izx}}{ix}\Big|_{z=-r}^{r} \\
=& \frac{1}{2\pi ix}\left(e^{irx} - e^{-irx}\right) \\
=& \frac{1}{\pi x}sin(rx) \\
=& sinc\left(\frac{rx}{\pi}\right)\cdot\frac{r}{\pi}
\end{aligned}$$

$$\text{Wobei: } sinc(\varphi) = \begin{cases} \frac{sin(\pi\varphi)}{\pi\varphi} & ,\varphi \neq 0 \\ 1 & ,\varphi = 0 \end{cases}$$

g hat auch Masse 1, denn mit den Eigenschaften der Fouriertransformation folgt:

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} = \hat{g}(0) = (\mathcal{F}g)(0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{R^d}g(x)\underbrace{e^{\overbrace{-\langle x,0\rangle}^{0}}}_{1}dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{R^d}g(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d}g(x)dx = 1$$

Für $d = 2$ gilt:

$$
\begin{aligned}
g(x) =& \frac{1}{(2\pi)^1}(\mathcal{F}^{-1}\chi_{[-r,r]^2})(x)\\
=& \ \cdots \ \text{(Analog zu oben)}\\
=& \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{[-r,r]^2}\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)\right) e^{i(z_1x_1+z_2x_2)}dz_1dz_2\\
=& \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-r}^{r}\left(\int_{-r}^{r} e^{iz_1x_1}e^{iz_2x_2}dz_1\right)dz_2\\
=& \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{r} e^{iz_1x_1}dz_1\right)}_{\frac{1}{\pi x_1}sin(\pi x_1)}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{r} e^{iz_2x_2}dz_2\right)}_{\frac{1}{\pi x_2}sin(\pi x_2)}
\end{aligned}
$$

Es ist zu bemerken, dass g eine Art Tensor Struktur besitzt, was in etwa bedeutet das sich die Funktion in beliebigen Dimensionen als Produkt der Funktion in einer Dimensionen darstellen lässt.

<u>**Gauß-Kern**</u> :

$$
\begin{aligned}
G(x) =& \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}e^{\frac{-|x|^2}{2}} \Rightarrow G\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}e^{\frac{-x_1^2-x_2^2+\cdots+x_d^2}{2}}\\
=& \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}e^{\frac{-x_1^2}{2}}\right)\cdot \ \cdots \ \cdot\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}e^{\frac{-x_d^2}{2}}\right) = G(x_1)\cdot \ \cdots \ \cdot G(x_d)
\end{aligned}
$$

5.4 Filterbreite und Glättung

klar ist: $\frac{1}{25}$

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

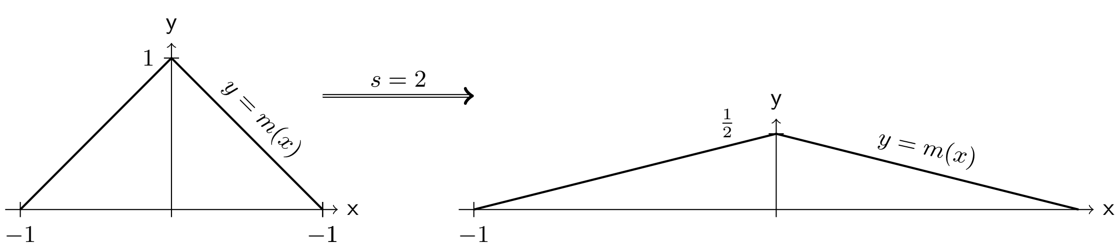
'glättet mehr als': $\frac{1}{9}$

1	1	1
1	1	1
1	1	1

Im Kontinuierlichen: Sei $m \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und $s > 0$. Setze

$$
m_s(x) := \frac{1}{s^d}m(\frac{x}{s}), \quad x \in \mathbb{R}^d
$$

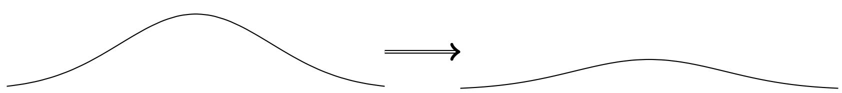
Bsp (in $d = 1$):



Bsp: Gauß-Kern $G(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{\frac{-|x|^2}{2}}$
Skalierung mit Faktor $s > 0$

$$\Rightarrow G_s(x) = \frac{1}{s^d} G\left(\frac{x}{s}\right) = \frac{1}{s^d} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{\frac{-|x|}{2}} = \frac{1}{(2\pi s^2)^{\frac{d}{2}}} e^{\frac{-|x|^2}{2s^2}}$$

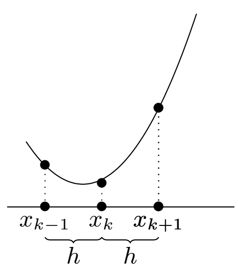
Skalierung $s \hat{=}$ Standardabweichung σ:



5.5 Differenzenfilter

Bisher: Glättung $\hat{=}$ Mittelwert bilden $\hat{=}$ Summe/Integrale
Jetzt: Schärfen $\hat{=}$ Differenzen/Kontraste hervorheben $\hat{=}$ Differenzen/Ableitungen

Diskretisierung von Ableitungen durch Differenzenquotienten



(hier bedeutet $f(k) = f(x_k)$)

Vorwärts: $u(h) = \frac{f(k+1) - f(k)}{h}$ $\qquad u = \frac{1}{h}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & -1 & 1 \\ \hline\end{array} \circledast f$

Rückwärts: $u(h) = \frac{f(k) - f(k-1)}{h}$ $\qquad u = \frac{1}{h}\begin{array}{|c|c|c|}\hline -1 & 1 & 0 \\ \hline\end{array} \circledast f$

Zentral: $u(h) = \frac{f(k+1) - f(k-1)}{2h}$ $\qquad u = \frac{1}{2h}\begin{array}{|c|c|c|}\hline -1 & 0 & 1 \\ \hline\end{array} \circledast f$

2. Ableitung:

$$\begin{aligned} u(h) &\approx \frac{f'(k+1) - f'(k)}{h} \text{(vorwärts)} \\ &\approx \frac{\frac{f(k+1)-f(k)}{h} - \frac{f(k)-f(k-1)}{h}}{h} \text{(rückwärts)} \\ &= \frac{f(k+1) - 2f(k) + f(k+1)}{h^2} \end{aligned}$$

Also folgt $u := \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & -2 & 1 \\ \hline\end{array} \circledast f$ und $\frac{1}{h^2}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & -2 & 1 \\ \hline\end{array} = \frac{1}{h}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & -1 & 1 \\ \hline\end{array} * \frac{1}{h}\begin{array}{|c|c|c|}\hline -1 & 1 & 0 \\ \hline\end{array}$
Denn:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\begin{array}{|c|c|c|}\hline -1 & 1 & 0 \\ \hline\end{array}\\
=&\frac{1}{h}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & -1 \\ \hline\end{array} * \left(\frac{1}{h}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & -1 & 0 \\ \hline\end{array} * f\right)\\
=&\left(\frac{1}{h}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & -1 \\ \hline\end{array} * \frac{1}{h}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & -1 & 0 \\ \hline\end{array}\right) * f\\
=&\left(\frac{1}{h}\begin{array}{|c|c|c|}\hline -1 & 1 & 0 \\ \hline\end{array} \boxast \frac{1}{h}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & -1 & 0 \\ \hline\end{array}\right) * f\\
=&\frac{1}{h^2}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & -2 & 1 \\ \hline\end{array} * f\\
=&\frac{1}{h^2}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & -2 & 1 \\ \hline\end{array} \boxast f
\end{aligned}
$$

In 2D: $\frac{\partial}{\partial x} \widehat{=} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & -1 & 1 \\ \hline\end{array}$, $\frac{\partial}{\partial y} \widehat{=} \begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline -1 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \widehat{=} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & -2 & 1 \\ \hline\end{array}$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2} \widehat{=} \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline -2 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array}$.

Diskreter Laplace Operator :

$$
\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \widehat{=} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & -2 & 1 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline -2 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -4 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline\end{array}
$$

5.6 Glättungsfilter und partielle Differentialgleichungen

Wir haben gesehen: $m = \frac{1}{5}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline\end{array}$ ist unter allen 5-Punkt Filtern der am besten glättende.

Idee: Rauschen weiter verringern indem man $m\boxast$ wiederholt anwendet $\Rightarrow$ Folge von Bildern:

$$
\boxed{\underset{:=u^{(0)}}{f}} \xrightarrow{m\boxast} \boxed{u^{(1)}} \xrightarrow{m\boxast} \boxed{u^{(2)}} \cdots
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow u^{(n+1)} - u^{(n)} &= (\text{Unterschied zwischen 'Zeit' Punkt } n \text{ und } n+1)\\
&= \underbrace{m \boxast u^{(n)}}_{u^{n+1}} - \underbrace{\delta \boxast u^{(n)}}_{u^{(n)}} \text{ mit } \delta = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline\end{array}\\
&= (m-\delta) \boxast u^{(n)}\\
&= \left(\frac{1}{5}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline\end{array} - \frac{1}{5}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline\end{array}\right) \boxast u^{(n)}\\
&= \frac{1}{5}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -4 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline\end{array} u^{(n)}
\end{aligned}
$$

Somit gilt insgesamt:

$$\underbrace{u^{(n+1)} - u^{(n)}}_{\widehat{=} \frac{\partial u}{\partial t}} = \underbrace{\frac{1}{5} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -4 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}}_{\widehat{=} \Delta u} \tag{5.11}$$

Kontinuierlich: Funktion u

$$u(x,t) \quad x \in \mathbb{R}^2,\ t \text{ Zeit}$$

(5.11) ist eine Diskretisierung (1 Zeitschritt im Eulerverfahren) der partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \tag{5.12}$$

Bekannt als **Wärmegleichung** oder **Diffusionsgleichung** .
Zum Zeitpunkt $t = 0$ möge die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = u^{(0)} = f(x) \tag{5.13}$$

gelten. Vorranschreiten der Zeit t repräsentiert Diffusion.
Für einen stationären Zustand, also keine Änderung $\frac{\partial u}{\partial t}$ dann muss auch $\Delta u = 0$ gelten.
Diese wird unteranderem von konstanten Funktionen oder linearen Funktionen $u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$ erfüllt.

Es existiert auch einen explizite Formel für die Lösung der Diffusionsgleichung (5.12) mit Anfangsbedingung (5.13):

$$u(x,t) = \left(G_{\sqrt{2t}} * u^{(0)} \right)(x)$$

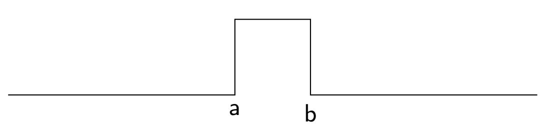
Wobei $\sqrt{2t}$ für eine Skalierung um diesen Wert steht.
Zu zeigen ist: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(G_{\sqrt{2t}} * u^{(0)} \right) = \Delta \left(G_{\sqrt{2t}} * u^{(0)} \right)$$

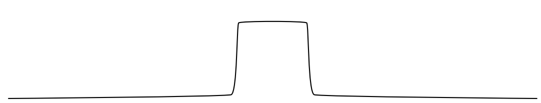
$$\overset{\text{mit Satz}}{\Longrightarrow} \left(\frac{\partial}{\partial t} G_{\sqrt{2t}} \right) * u^{(0)} = \left(\Delta G_{\sqrt{2t}} \right) * u^{(0)}$$

Es bleibt somit z.z.: $\frac{\partial}{\partial t} G_{\sqrt{2t}} = \Delta G_{\sqrt{2t}}$.

$t = 0$:

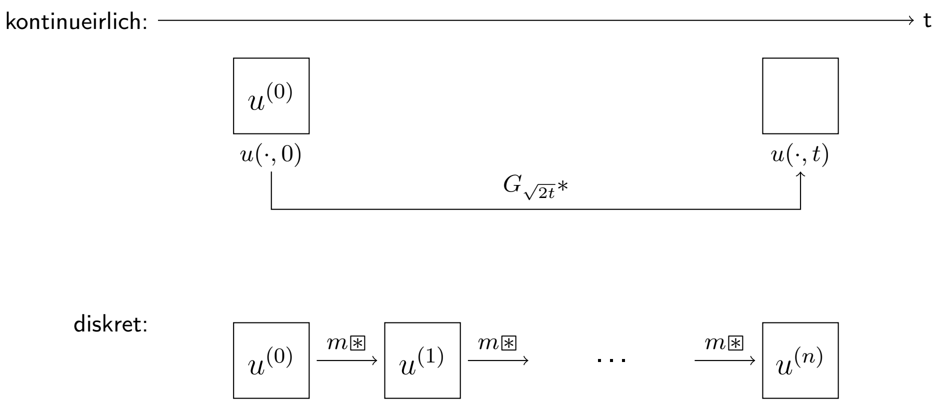


$t > 0$:



Bemerkenswert ist das, für $t = 0$ die Funktion nicht stetig ist, aber für alle $t > 0$ die Funktion beliebig oft differenzierbar ist.

Insgesamt lässt sich die Idee darstellen als:



5.7 Isotrope und anisoptrope Diffusion

Wir haben gesehen: Glättung/Diffusion verringert Rauschen.
Aber: Auch Kanten/Details werden verwischt.
Ausweg: Diffusion steuern, so dass sie an Kanten (also Stellen mit großer Änderungsrate) weniger stark glättet.
Der Plan lautet also:

$$\nabla u = \left|\left|\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}\right|\right|^2 = \begin{cases} \text{groß} & \Rightarrow \text{wenig Diffusion} \\ \text{klein} & \Rightarrow \text{Diffusion normal} \end{cases}$$

Diffusionsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}u = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}}_{div} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}u \\ \frac{\partial}{\partial y}u \end{pmatrix} = div(\nabla u) \tag{5.14}$$

Um diese Gleichung zu regulieren setzen wir einen **<u>Diffusionstensor</u>** M in die Gleichung in.

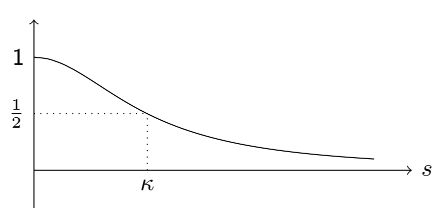
$$\Delta u = div(M \nabla u) = div(\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} \nabla u)$$

Ansätze für M:

a) $M = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ übliche Diffusion

b) $M = g(||\nabla u(x, y)||) * I$

$$g_\kappa(s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{\kappa}\right)^2}$$



Diese Methode geht zurück auf Perona & Malik.

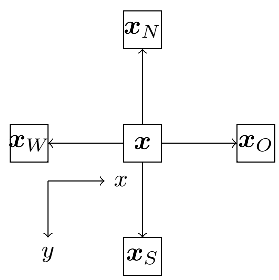
- Kanten mit $||\nabla u|| < \kappa$ werden mehr geglättet
- Kanten mit $||\nabla u|| \geq \kappa$ werden weniger geglättet

Diese Art der Glättung ist **Isotrop** $\widehat{=}$ in alle Richtungen gleich starker Fluss.

c) $M = \begin{pmatrix} g(\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right|) & 0 \\ 0 & g(\left|\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right|) \end{pmatrix}$

Diese art der Diffusionstensoren ist **anisoptrop** also richtungsabhängig.

Für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^2$ und $\boldsymbol{x}_W = \boldsymbol{x} + \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ usw.



$$\text{Für } M = \begin{pmatrix} c_1(\boldsymbol{x}) & 0 \\ 0 & c_2(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \text{ gilt:}$$

$$\begin{aligned}
div(M \cdot \nabla u(\boldsymbol{x})) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} c_1(\boldsymbol{x}) & 0 \\ 0 & c_2(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(\boldsymbol{x}) \\ \\ \frac{\partial u}{\partial y}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial x}(\boldsymbol{x}) \\ \\ c_2(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial y}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \\
&\approx \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(\boldsymbol{x})(u(\boldsymbol{x}_O) - u(\boldsymbol{x})) \\ \\ c_2(\boldsymbol{x})(u(\boldsymbol{x}_S) - u(\boldsymbol{x})) \end{pmatrix} \\
&\approx c_1(\boldsymbol{x})(u(\boldsymbol{x}_O) - u(\boldsymbol{x})) - c_1(\boldsymbol{x}_W)(u(\boldsymbol{x}_N) - u(\boldsymbol{x}_W)) \\
&+ c_2(\boldsymbol{x})(u(\boldsymbol{x}_S) - u(\boldsymbol{x})) - c_2(\boldsymbol{x}_N)(u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{x}_N))
\end{aligned}$$

5.8 Bilaterale Filter

Es existiert auch ein anderer Ansatz für das selbe Problem.

$$u(\boldsymbol{x}) = \text{ gewichtetes Mittel aus allen } f(\boldsymbol{y}) \text{ mit}$$

a) $\boldsymbol{y}$ ist nahe bei $\boldsymbol{x}$ <u>und</u>

b) $f(\boldsymbol{y})$ ist nahe bei $f(\boldsymbol{x})$

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{w(\boldsymbol{x})} \int_\Omega \underbrace{g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})}_{a)} \underbrace{h(f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}))}_{\text{neu } b)} f(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}$$

Heißt **Bilateraler Filter** , wobei

$$w(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})h(f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y}))d\boldsymbol{y}$$

Oft: g, h Gauß-Kerne ($\Rightarrow$ nichtlineare Gaußfilter)

Manchmal: g, h charakteristische Funktionen ($\Rightarrow$ SUSAN-Filter)

Effekt Falls Höhe der Kante $>$ Filterradius $\Rightarrow$ Kante bleibt

Manchmal: $f \overset{log}{\mapsto} log\ f \overset{\text{Bil. Filter}}{\mapsto} log\ u \overset{exp}{\mapsto} u$

Diese Verfahren ist jedoch sehr aufwendig, denn

- keine Reine Filterung ($\Rightarrow$ keine FFT-Implementierung möglich)
- Normalisierung $w(\boldsymbol{x})$ in jedem Punkt berechnen

5.9 Entrauschen mittels Variationsrechnung

Erinnerung:

$$\boxed{f} \xrightarrow{?} \boxed{u}$$

entrauschtes Bild Resultat

Wünsche an u:

1. $u \approx f$ (Datenkonsistenz)
2. u ist 'glatt'. (Regularitätsbedingung)

Mathematische Umsetzung der Wünsche:

1. $||u-f||_2 = \sqrt{\int_\Omega |u(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})|^2\,dx}$ sei klein
2. $||\nabla u||_2 = \sqrt{\int_\Omega |\nabla u(\boldsymbol{x})|^2\,dx} = \sqrt{\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\boldsymbol{x})\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\boldsymbol{x})\right)^2 d\boldsymbol{x}}$ sei klein

Kombination:

$$J(u) := ||u-f||_2^2 + \lambda\,||\nabla u||_2^2 \overset{u\in U}{\to} \text{min} \tag{5.15}$$

Für einen geeigneten Funktionen Raum U und **Kopplungskonstante** $\lambda > 0$.
In diesem Beispiel empfiehlt sich als Suchraum:

$$U = \{u : ||u|| < \infty,\ \nabla \text{ existiert },\ ||\nabla||_2 < \infty\} = W^{1,2}$$

ein so genannter **Sobolev-Räume** . Diese Suchproblem is jedoch ∞-dimensional und somit schwer zu lösen.
Im obigen Ansatz (5.15) stellt man fest, dass der Regularitätsterm

$$||\nabla u||_2^2 = \int_\Omega |\nabla u(\boldsymbol{x})|^2 \, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\boldsymbol{x})\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\boldsymbol{x})\right)^2 d\boldsymbol{x}$$

die großen Gradienten an (gewolleten) Kanten zu stark bestraft. ($\Rightarrow$ optimales u glättet Kanten)
Ausweg: Wähle $||\nabla u||_2$ oder $||\nabla u||_1 = \int_\Omega |\nabla u(\boldsymbol{x})| \, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x}(\boldsymbol{x})\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial y}(\boldsymbol{x})\right| d\boldsymbol{x}$ als Regularitätsterme.

$$J(u) := ||u - f||_2^2 + \lambda \, ||\nabla u||_1 \rightarrow \text{ min} \tag{5.16}$$

Genannt **Rudin–Osher–Fatemi-Funktional** (ROF)

Allgemeiner Ansatz bei Variationsproblemen:

$$J(u) := \underbrace{D(u,f)}_{\text{Datenkern}} + \lambda \underbrace{R(u)}_{\text{Regularitätsterm}} \overset{u \in U}{\rightarrow} \text{ min}$$

Notwendiges Kriterium:
Falls $J : U \rightarrow \mathbb{R}$ in $u \in U$ ein lokales Minimum besutzt, dann gilt für jede Richtung $v \in U$:

$$\lim_{\epsilon \nearrow 0} \frac{J(u + \epsilon v) - J(u)}{\epsilon} = 0 \tag{5.17}$$

Dies ist die Verallgemeinerte Richtungsableitung (Gateux-Ableitung).
Häufig ist J in Integralform gegeben, z.b.:

$$J(u) = \int_\Omega g(x, u(x), \nabla(x)) dx$$

Dann führt Bedingung (5.17) auf Gleichungen für bestimmte partielle Ableitungen von g und u, die sogenannte **Euler-Lagrange-Gleichung** für (5.17).
$\Rightarrow$ partielle Differentialgleichung u. Fazit:

$$\boxed{\text{Filter}} \xrightarrow{\text{wiederholte Anwendung}} \boxed{\begin{array}{c}\text{partielle}\\ \text{Differentialgleichung}\end{array}} \xleftarrow{\text{Euler-Lagrange}} \boxed{\text{Variationsrechnung}}$$

6 Kantenerkennung

6.1 Gradientenfilter

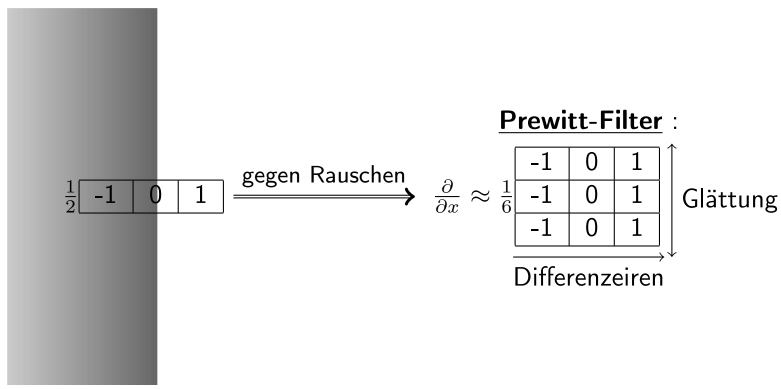
Wir suchen Stellen $\boldsymbol{x}$ mit großem Gradienten:

$$\nabla u(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

Approximation der Gradienten über zentrale Differenzen:

$$\frac{\partial}{\partial x} \approx \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ bzw. } \frac{\partial}{\partial y} \approx \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

Um Rauschen zu verringern wird auch ein entrauschen Filter simultan angewendet:



Alternative: $\frac{\partial}{\partial x} \approx \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circledast \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =: D_x$, genannt **Sobel-Filter** . Eine stärkere Glättung kann mittels anderer vertikaler Filter mit Binomialkoeffizienten erzeilt werden. Entsprechen wird $\frac{\partial}{\partial y} D_y := D_x^T$ definiert.

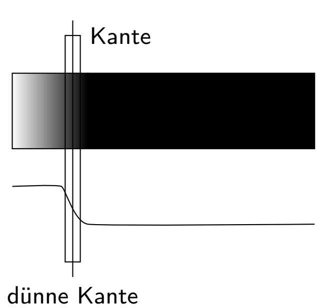
$$\nabla u(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} (D_x \circledast u)(\boldsymbol{x}) \\ (D_y \circledast u)(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

Zur Erinnerung der Gradienten steht senkrecht auf Kanten und zeigt in Richtung heller (hoher) Werte, die Intensität wird beschrieben von $|\nabla u(\boldsymbol{x})|$, also dem Betrag des Gradienten.

Ein typischer Algorithmus kann etwa folgende Form annehmen:

1. Gradienten mittels Prewitt oder Sobel approximieren und Richtung auf Vielfache von $45°$ runden.

2. **Non-maximum suppression** (edge thinning). Da es potentiell viele Punkte mit hoher Steigung gibt kann es dazu kommen, dass Kanten sehr breit werden, dieses wird durch das edge thinning verhindert.

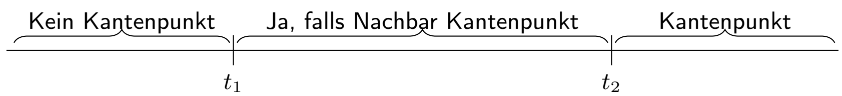


Mathematisch: $\boldsymbol{x}$ wird Kantenpunkt falls:

$$|\nabla u(\boldsymbol{x})| \leq max(|\nabla u(\boldsymbol{x}_+)|, |\nabla u(\boldsymbol{x}_-)|)$$

wobei $\boldsymbol{x}_+$ und $\boldsymbol{x}_-$ Vorgänger und Nachfolger von $\boldsymbol{x}$ in Gradientenrichtung sind.

3. Kandidat $\boldsymbol{x}$ wird Kantenpunkt, falls:



wobei $t_1,\ t_2$ thresholds sind.
$\boldsymbol{x}$ ist also ein Kantenpunkt, falls $|\nabla u(\boldsymbol{x})| \geq t_2$ oder ($|\nabla u(\boldsymbol{x})| \in [t_1, t_2]$ und $\boldsymbol{x}$ ist Nachbar eines Kantenpunktes).
Dieses wird **hysteresis thresholding** genannt und verhindert **Abreißen** von Kantenzügen.

Die am häufigsten verbreitete Version von 1) -3) ist der **Canny-Algorithmus** (1986).

Matlab:

```
BWimg=edge(u,'canny',[t_1, t_2],sigma);
```

BWimg: Binärbild

u: Graustufenbild

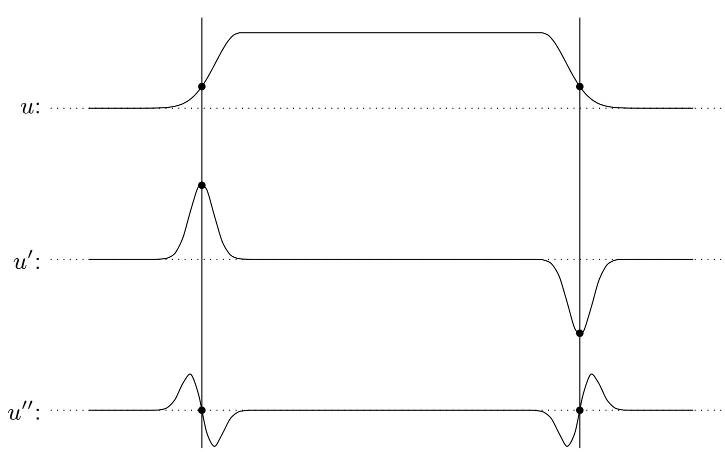
canny: Algorithmus

$t_1,\ t_2$: Sind gewählt wie oben

sigma: Parameter für den Gaußkern aus 1)

6.2 Die zweite Ableitung

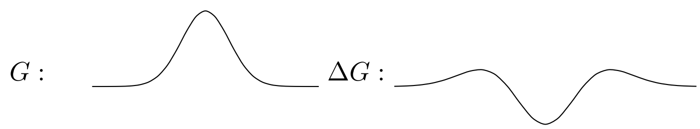
Zunächst in 1D:



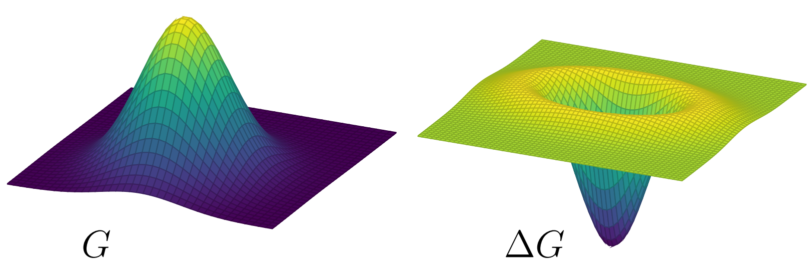
Test für kantenpunkte $u''(\boldsymbol{x}) = 0$ und $|u'(\boldsymbol{x})| > $ threshold.
Wichtig: Vorglätten!, da die 2. Ableitung noch anfälliger gegenüber Rauschen als die 1. Ableitung ist.

In 2D. Laplace Operator $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}$ (Richtungsunabhängige Messung der 2. Ableitung)
Vorglätten: $\Delta(G * u) = (\Delta G) * u$, wobei ΔG vorher berechnet werden kann.

In 1D:



In 2D:



Dieses wird **Laplacian of Gaußian method** genannt.
Matlab:

```
BWimg=edge(u,'log',thresh,sigma);
```

$\Rightarrow$ alle $\boldsymbol{x} \in \Omega$ mit:

$$\Delta(G_{sigma} * u)(\boldsymbol{x}) \approx u, \text{ nicht auf Gleichheit sondern auf Vorzeichenwechsel testen.}$$

und: $|\nabla(G_{sigma}) * u| > $ thresh

7 Schärfen und Entfalten

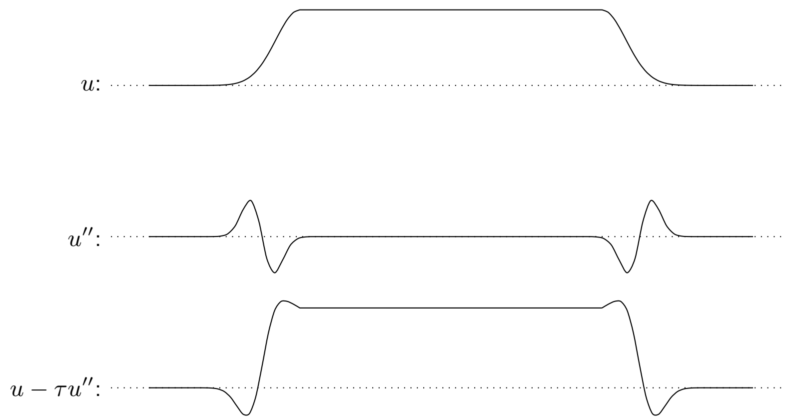
(Gegenteil von Kapitel 5)

Gegeben: unscharfes Bild

Gesucht: Version mit vielen erkennbaren Details

7.1 Laplace-Schärfen

Idee:



Zu sehen ist, dass durch die Subtraktion von u'', skaliert mit einem Faktor $\tau > 0$ die Kanten hervorgehoben werden.
Hinweise zur Umsetzung:

- $u - \tau u''$ reskalieren (Kontrast-stretching) falls der Farbraum verlassen wird.
- τ kann auch sehr klein gewählt werden und der Vorgang dafür wiederholt iteriert werden.
- In 2D $\Delta statt$ 2. Ableitung
- Vorglätten: $u - \tau \cdot \Delta(G * u)$

7.2 Kantenverstärkende Diffusion

Verallgemeinerte Diffusionsgleichung: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = div(M\nabla u)$. Idee: M so wählen, so dass der Fluss:

- Parallel zum Gradienten (d.h. durch die Kante verläuft): $\lambda_1 = \dfrac{1}{1 + \frac{|\nabla u(\boldsymbol{x})|^2}{\kappa^2}}$
- senkrecht zu ∇u (entlang der Kante): $\Lambda_2 = 1$

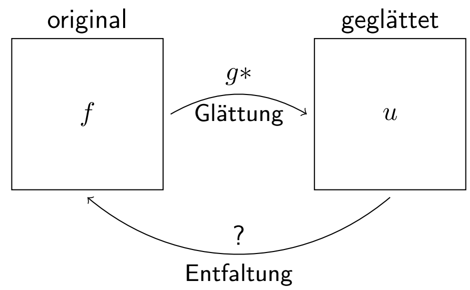
$\Rightarrow M$ hat EW λ_1 zum EV $v_1 = \dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$ und EW λ_2 zum EV $v_2 = \dfrac{1}{|\nabla u|}\begin{pmatrix} -\frac{\partial u}{\partial y}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \perp v_1$.

$$\Rightarrow M \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}}_{\text{orthogonale Matrix}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = M^T$$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}^T}_{= \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \end{pmatrix}} = \frac{1}{|\nabla u|^2} \begin{pmatrix} \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x}(\boldsymbol{x})^2 + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial y}(\boldsymbol{x})^2 & (\lambda_1 - \lambda_2)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}(\boldsymbol{x}) \\ (\lambda_1 - \lambda_2)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}(\boldsymbol{x}) & \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x}(\boldsymbol{x})^2 + \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial y}(\boldsymbol{x})^2 \end{pmatrix}$$

falls $\nabla u(\boldsymbol{x}) \neq 0$, sonst $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7.3 Entfaltung



Das heißt: $u = f * g$, wobei $u,\ g$ gegeben sind und f gesucht ist.
Alternativ kann dies als die Invertierung des Faltungsoperator $f \mapsto g * f$ betrachtet werden.

a) Diskreter Fall:

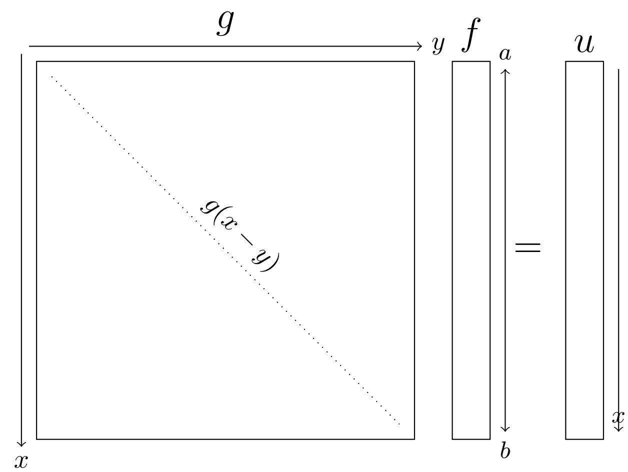
$$
\begin{aligned}
& g * f = u \\
& (g * f)(j) = u(j),\ j \in \Omega \\
& \sum_k g(j-k) f(k) = u(j),\ j \in \Omega \\
& \Rightarrow \Omega \times \Omega \text{ Gleichungssystem}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c}
\\
j=0 \\
j=1 \\
\\
\\
j=n
\end{array}
\underbrace{
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} k=0 & k=1 & & & & k=n \end{array} \\
\begin{pmatrix}
g(0) & g(-1) & & & & g(-n) \\
g(1) & g(0) & g(-1) & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & & \\
 & & & & & \\
g(n) & & & & &
\end{pmatrix}
\end{array}
}_{\text{Toeplitz-Matrix}}
\begin{pmatrix}
f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(n)
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(n)
\end{pmatrix}
$$

b) Kontinuierlicher Fall:

$$
\begin{aligned}
& (g * f)(x) = u(x),\ x \in \Omega \\
& \int g(x-y) f(y) dy = u(x),\ x \in \Omega \\
& \text{Integralgleichung für die gesuchte Funktion } f
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Kontinuierliche Matrix:



Wobei $[a,b]$ die das Definitionsgebiet von f ist. Diese Problem is jedoch schlecht gestellt, da der Operator kompakt ist. ($\nearrow$ Datei im Studip)

Wir versuchen es trotzdem zu lösen:

$$\begin{aligned}
g * f &= u && | \cdot \mathcal{F} \\
\mathcal{F}(g * f) &= \mathcal{F}u \\
(2\pi)^{\frac{d}{2}}(\mathcal{F}g) \cdot (\mathcal{F}f) &= \mathcal{F}u && | \div (2\pi)^{\frac{d}{2}}(\mathcal{F}g) \\
\mathcal{F}f &= \frac{\mathcal{F}u}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}\mathcal{F}g} && |\mathcal{F}^{-1}
\end{aligned}$$

Und erhalten:

$$f = (2\pi)^{\frac{d}{2}}\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}u}{\mathcal{F}g}\right) \tag{7.1}$$

Dieses kann jedoch zu Problemen führen, da etwa $g \approx 0$ werden kann. Je glatter g ist, desto stärker klingt $(\mathcal{F}g)(z)$ ab für $z \to \infty$.

Anders betrachtet:
Wenn $|\hat{g}(z)|$ für hohe Frequenzen klein ist, dann ist:

$$A : f \mapsto g + f$$

ein Tiefpassfilter. Nimmt man nun eine Funktion h mit hoher Frequenz und großer Amplitude, dann gilt:

$$A(f + h) = Af + \underbrace{Ah}_{\approx 0} \approx Af$$

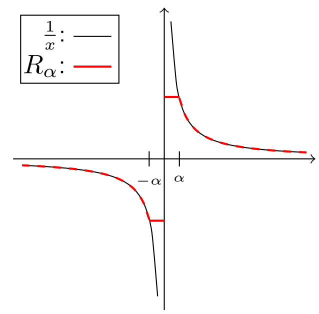
<u>Problembehebung:</u>

1. Ansatz:

Approximiere die Funktion $\frac{1}{x}$ durch

$$R_\alpha = \begin{cases} \frac{1}{x}, & |x| > \alpha \\ \frac{1}{\alpha}, & x \in [0, \alpha] \\ \frac{1}{-\alpha}, & x \in [-\alpha, 0] \end{cases}$$

wobei $\alpha > 0$.



und ersetze $f = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\hat{u}(z)}{\hat{g}(z)}\right)$ durch:

$$f = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{u}(z) R_\alpha(\hat{g}(z))\right)$$

und lasse $\alpha \to 0$.

2. Ansatz: Variationsrechnung:

   1. Wunsch: $g * f \approx u$
   2. Wunsch: $||f||_2$ klein

Minimiere nun:

$$\Rightarrow J(f) := ||g * f - u||_2^2 + \lambda \, ||f||_2^2 \to min$$
$$\iff \int_{\mathbb{R}^d} ((g * f)(x) - u(x))^2 + \lambda f(x)^2 dx \to min$$

über die Wahl von $f \in U := L^2(\mathbb{R}^d)$.
Idee: $\mathcal{F}$ anwenden $\Rightarrow$ $*$ wird zu $\cdot$ und $||\cdot||_2$ bleibt unverändert.

$$\begin{aligned} \Rightarrow J(f) &= ||g * f - u||_2^2 + \lambda \, ||f||_2^2 \\ &= ||\widehat{g * f - u}||_2^2 + \lambda ||\hat{f}||_2^2 \\ &= ||(2\pi)^{\frac{d}{2}} \hat{g}\hat{f} - \hat{u}||_2^2 + \lambda ||\hat{f}||_2^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left[\left((2\pi)^{\frac{d}{2}} \hat{g}(z)\hat{f}(z) - \hat{u}(z) \right)^2 + \lambda |\hat{f}(z)|^2 \right] dz \xrightarrow{f \in U} min \end{aligned}$$

Strategie: Integral für jedes einzelne z minimieren. Daraus erhalten wir ein optimales $\hat{f}$ und somit auch ein optimales f.
Also minimiere für jedes $z \in \mathbb{R}^d$

$$I(t) := |(2\pi)^{\frac{d}{2}} \hat{g}(z) t - \hat{u}(z)|^2 + \lambda |t|^2 \xrightarrow{t \in \mathbb{C}} min$$

Später setzen wir $\hat{f}(z) := t_{min}$, nun zur minimierung:

$$\begin{aligned} I(t) &= ((2\pi)^{\frac{d}{2}} \hat{g}(z) t - \hat{u}(z))((2\pi)^{\frac{d}{2}} \ \overline{\hat{g}(z)} \ \overline{t} - \overline{\hat{u}(z)}) + \lambda t \overline{t} \\ &= (2\pi)^{\frac{d}{2}} \hat{g}(z) \ \overline{\hat{g}(z)} \ t \ \overline{t} + \lambda t\overline{t} - (2\pi)^{\frac{d}{2}} (\hat{g}(z) \ \overline{\hat{u}(z)} \ t + \overline{\hat{g}(z)} \ \hat{u}(z) \ \overline{t}) + \hat{u}(z) \ \overline{\hat{u}(z)} \\ &= ((2\pi)^{\frac{d}{2}} |\hat{g}(z)|^2 + \lambda)|t|^2 - (2\pi)^{\frac{d}{2}} (2 \cdot Re(\underbrace{\hat{g}(z) \ \overline{\hat{u}(z)} t}_{\circledast})) + |\hat{u}(z)|^2 \xrightarrow{t \in \mathbb{C}} min \end{aligned}$$

Das Argument (Winkel) taucht nur in $\circledast$ auf

$\Rightarrow$ So wählen, das $\circledast$ auf die positive reele Achse fällt

$\Rightarrow 0 = arg(\circledast) = arg(\hat{g}(z) \ \overline{\hat{u}(z)}) + arg(t)$

$\Rightarrow arg(t) = -arg(\hat{g}(z) \ \overline{\hat{u}(z)}) = arg(\overline{\hat{g}(z)} \ \hat{u}(z))$

$\Rightarrow I(t) = ((2\pi)^{\frac{d}{2}} |\hat{g}(z)|^2 + \lambda)|t|^2 - (2\pi)^{\frac{d}{2}} 2 \cdot |\overline{\hat{g}(z)} \ \hat{u}(z)| \ |t| + |\hat{u}(z)|^2 \xrightarrow{|t| \in \mathbb{R}} min$

Dieses ist nun ein Polynom in $|t|$, sodass das minimum einfach bestimmt werden kann.

$$0 = \frac{d}{d|t|} ... = 2 \cdot ((2\pi)^{\frac{d}{2}} |\hat{g}(z)|^2 + \lambda)|t| - (2\pi)^{\frac{d}{2}} \cdot 2 \cdot |\overline{\hat{g}(z)}\ \hat{u}(z)|$$

$$\Rightarrow |t| = \frac{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \cdot 2 \cdot |\overline{\hat{g}(z)}\ \hat{u}(z)|}{2 \cdot ((2\pi)^{\frac{d}{2}} |\hat{g}(z)|^2 + \lambda)} = \frac{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \cdot |\overline{\hat{g}(z)}\ \hat{u}(z)|}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |\hat{g}(z)|^2 + \lambda} \text{ und } arg(u) = arg(\overline{\hat{g}(z)}\ \hat{u}(z))$$

$$\Rightarrow t = \frac{(2\pi)^{\frac{d}{2}}\ \overline{\hat{g}(z)}\ \hat{u}(z)}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |\hat{g}(z)|^2 + \lambda} =: \hat{f}(z)$$

Wegen

$$\hat{f}(z) = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \frac{\overline{\hat{g}(z)}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |\hat{g}(z)|^2 + \lambda} \hat{u}(z)$$

gilt

$$f(z) = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\overline{\hat{g}(z)}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |\hat{g}(z)|^2 + \lambda} \right) * u \tag{7.2}$$

Dieses Verfahren wird L^2 **deblurring** gennant. Es gibt auch einen alternativen, algebraischen Zugang:

$$I(f) = ||g * f - u||_2^2 + \lambda\, ||f||_2^2 \xrightarrow{f} min$$
$$\iff \left|\left| \begin{pmatrix} g * f - u \\ \sqrt{\lambda} f \end{pmatrix} \right|\right| \xrightarrow{f} min$$
$$\iff \left|\left| \begin{pmatrix} Af \\ \sqrt{\lambda} f \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \right|\right| = \left|\left| \begin{pmatrix} A \\ \sqrt{\lambda} \end{pmatrix} f - \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \right|\right| \xrightarrow{f} min \quad (A = f \mapsto g * f)$$

$\Rightarrow$ lineares Ausgleichsproblem.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A^* & \sqrt{\lambda} I^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ \sqrt{\lambda} I \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} A^* & \sqrt{\lambda} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(Normalengleichung)}$$
$$\Rightarrow \left(A^* A + |\lambda|\, I\right) f = A^* u$$
$$\Rightarrow f = \left(A^* A + |\lambda|\, I\right)^{-1} A^* u$$

Die Inverse existiert, da $-|\lambda|$ nicht im Spektrum von A^*A sein kann, denn das Spektrum von A^*A ist positiv und reel.

3. Ansatz: noch einmal Variationsrechnung, diesmal mit anderen Wünschen
   1. Wunsch: $g * f \approx u$
   2. Wunsch: $||\nabla f||$ klein

   Nach analoger Rechnung wie oben erhält man:

$$f = \mathcal{F} \left(\frac{\overline{\hat{g}(z)}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}\ |\hat{g}(z)|^2 + \lambda |z|^2} \right) * u \tag{7.3}$$

$\Rightarrow$ Dämpfung höher wenn Frequenz höher.
Dieses Verfahren nennt sich H^1 **deblurring** .

8 Restauration (Inpainting)

Problem: Lücken im Bild, etwa

1. Kratzer
2. Scannerzeile kaputt
3. Defekt in der Kamera
4. Bewusst entferntes Objekt

sollen sinvoll und unauffällig geschlossen werden.

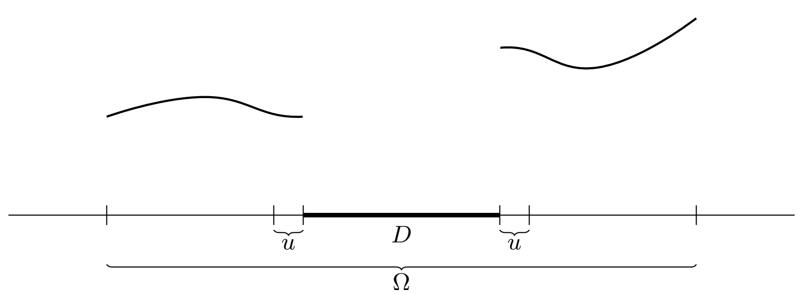
Sei $f : \Omega \to F$ unser Bild jedoch mit Defekt, d.h. fehlenden Funktionswerten in $D \subset \Omega$.

1. Fall: Jeder Punkt aus D hat Nachbarn in $\Omega \backslash D$.
$\Rightarrow$ Lücken mittels Interpolation aus benachbarten Werten in $\Omega \backslash D$ schließen.

2. Fall: D hat innere Punkte. Diesen Fall werden wir im folgenden näher betrachten.

8.1 Frequenzraum-Ansatz

Zur Illustration in 1D:



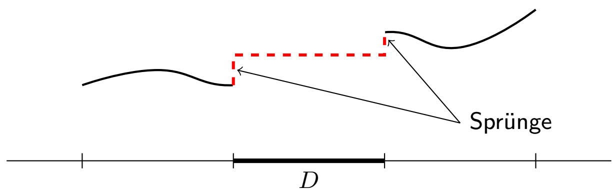
Betrachte Umgebung $u \subset \Omega \backslash D$ und errechne den Mittelwert:

$$m := \frac{1}{|u|} \int_u f(x)dx$$

von f auf u.

Algorithmus:

[1] Initialisiere f auf D mittels konstanter Funktion m:



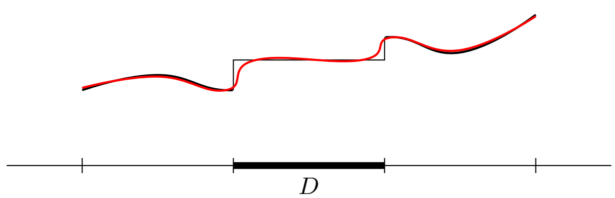
$\Rightarrow$ Sprünge am Rand von D.

Idee: Sprünge $\widehat{=}$ hochfrequente Anteile $\Rightarrow$ wende Tiefpass filter an.

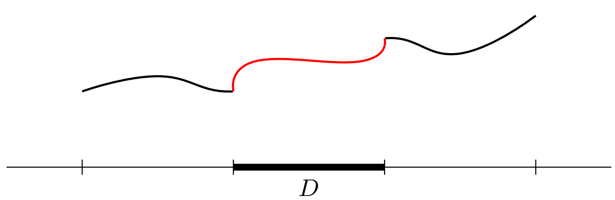
Iteriere

Abbruch falls $||f-g|| < threshold$

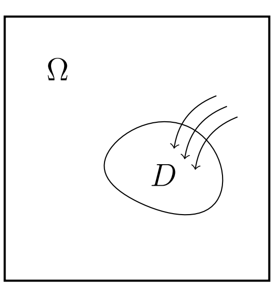
[2] $f \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f} \xrightarrow{\text{Lösche hohe Frequenzen}} \hat{g} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} g$



[3] Ersetze f <u>innerhalb</u> von D durch g.



8.2 PDE-Transport-Diffusions-Ansatz



Idee: Informationen aus $\Omega \backslash D$ nach D "hineintragen".

Referenzen:
- Weichert 1998
- Bornemann & März 2007

Skalierung der Diffusion:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = div(M \nabla u)$$

$$\text{mit } M = \begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & v_1^T & - \\ - & v_2^T & - \end{pmatrix} \in R^{2\times 2}$$

Wobei $v_1 \perp v_2$ die Eigenvektoren des sogenannten doppelt geglätteten Strukturrensors

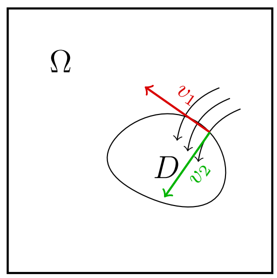
$$J = G_\rho * \left[\underbrace{\begin{pmatrix} | \\ \nabla(G_\sigma * u) \\ | \end{pmatrix}}_{2\times 1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} - & \nabla^T(G_\sigma * u) & - \end{pmatrix}}_{1\times 2} \right]$$

sind.

$\Rightarrow$ v_1 Richtung mit maximalem Kontrast mit EW μ_1

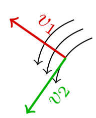
v_2 Richtung mit maximalem Kontrast mit EW μ_2, genannt **Kohärentsrichtung** .

Hierbei ist $\mu_1 \geq \mu_2$.



Fälle:

$\mu_1 \gg \mu_2 \approx 0$



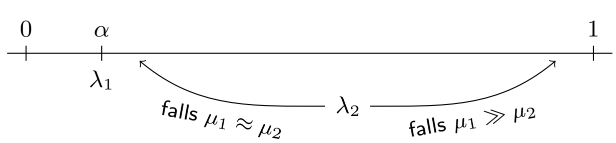
$\mu_1 \approx \mu_2 \approx 0$

Lokal keine Struktur.

$\mu_1 \approx \mu_2 \gg 0$

Kanten.

Die Werte λ_1 und λ_2 werden wie folgt gewählt:
$\alpha \in (0, 1)$ wird festgehalten.



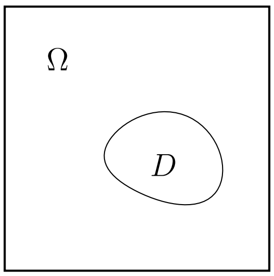
$$\lambda_1 := \alpha, \;\; \lambda_2 := \alpha + (1 - \alpha)(1 - g(\mu_1 - \mu_2))$$

wobei g wie bei Perona Malik gewählt wird, also:

$$g(x) = \frac{1}{1 + \frac{s^2}{\kappa^2}}$$

Dieses wird **Kohärenz verstärkende Diffusion** genannt.

8.3 Variationsansatz



geg.: f auf $\Omega \backslash D$

ges.: u auf Ω

Wunsch 1: $u = f$ auf $\Omega \backslash D$

Wunsch 2: $||\nabla u||$ klein auf Ω

Daraus folgt:

$$J(u) := ||\nabla u||_2^2 \to \text{min}$$

auf

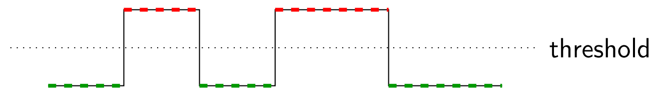
$$U := \{u \in W^{1,2}(\Omega) : u|_{\Omega \backslash D} = f\}$$

Angenommen, $u \in U$ minimiert J, dann folgt für beliebige $v \in W^{1,2}(\Omega)$ mit $v|_{\Omega \backslash D} = 0$:

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{t \to 0} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_\Omega ||\underbrace{\nabla(u+tv)(x)}_{\nabla u(x) + t\nabla v(x)}||^2 - ||\nabla u(x)||^2 \, dx \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_\Omega \langle \nabla u(x) + t\nabla v(x), \nabla u(x) + t\nabla v(x) \rangle - \langle \nabla u(x), \nabla u(x) \rangle \, dx \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_\Omega t^2 \, ||\nabla v(x)||^2 + 2t \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle \, dx = \lim_{t \to 0} \int_\Omega t \, ||\nabla v(x)||^2 + 2 \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle \, dx \\
&= 2 \int_D \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle \, dx \overset{\text{Greensche Formel}}{=} 2 \left(\overbrace{\int_{\delta D} \frac{\partial u}{\partial n} \underbrace{v(x)}_{0} \, ds(x)}^{0} - \int_D \Delta u(x) v(x) dx \right) \\
&= 2 \int_D \Delta u(x) v(x) dx \Rightarrow \nabla u = 0 \text{ in } D
\end{aligned}$$

9 Segmentierung

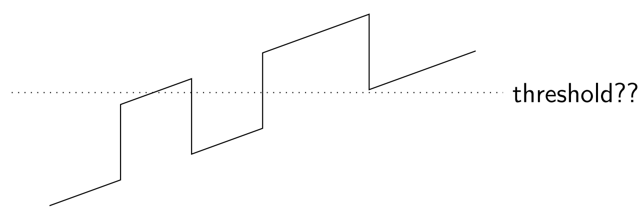
Dieses ist die Zerlegung eines Bildes in verschiedene Objekt.
Eine einfach methode hierfür ist das **Historgramm thresholding** :



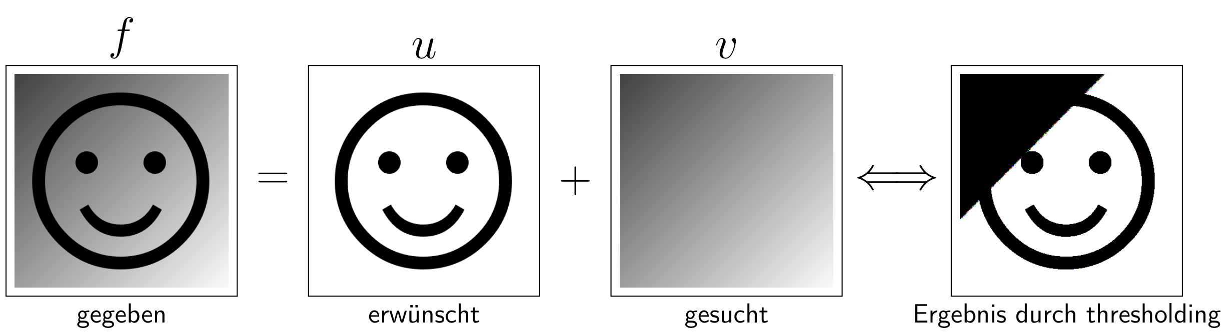
So kann ein Bild in mehrere Objekte zerlegt werden.
Hierbei können jedoch diverse Probleme auftreten, die durch preprocessing vermindert werden sollten. Einige der preprocessing methoden sind:

- Entrauschen ↗ 5.7
- Farbraum optimal ausnutzen ↗ 3.2
- **Beleuchtungsausgleich**

Dieser Beleuchtungsausgleich wurde nohc nicht vorher besprochen, das Problem:



Anstatt eines „geraden “ Bildes ist das Bild, etwa durch Beleuchtung, „gekippt “ und der Ansatz mittels Histogramthresholding würde nicht das gewünschte Ergebniss erzielen.
In 2D könnte dies so aus sehen.



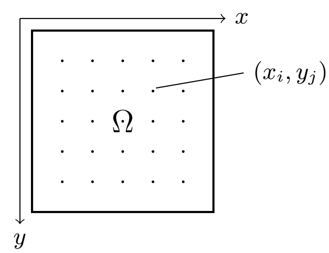
Rechts ist das Bild, das durch das Beschreibene Histogramm thresholding dargestellt wurde zu sehen. Methoden um durch preprocessing den gesuchten Gradienten zu entfernen werden im folgenden beschrieben.

9.1 Beleuchtungsausgleich

Einfachster Fall: v konstant. In diesem Fall kann man etwa eine „Leeraufnahme “ machen, $v = f$ setzen und dieses v in allen folgenden Aufnahmen subtrahieren.

Normalfall: v ändert sich bei Jeder Aufnahme. Hierbei gibt es mehrere Ansätze:

a) **Lineare Regression** :



Wir Unterstellen das der Verlauf **affin-linear** ist, d.h.:

$$v(x, y) = ax + by + c$$

Diese Parameter a, b, c gilt es nun zu schätzen.

Dazu soll gelten

$$\forall (x, y) \in \Omega : ax + by + c \approx f(x, y)$$

um dieses zu erfüllen wird eine Stichprobe von endlich vielen Punkten (x_i, y_i) aus Ω gewählt und durch diese ein Gleichungs System gebildet.

$$\begin{gathered} ax_1 + by_1 + c \approx f(x_1, y_1) \\ \vdots \\ ax_n + by_n + c \approx f(x_n, y_n) \end{gathered}$$

In Matrix form ergibt sich:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{w} \approx \underbrace{\begin{pmatrix} f(x_1, y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_n, y_n) \end{pmatrix}}_{z}$$

Die optimale Lösung dieses Problems kann über die **Normalengleichung** berechnet werden.

$$A^T A w = A^T z$$

Dauraus erhält man w, somit auch a, b, c und schlussendlich $v \Rightarrow u = f - v$.
Anschließend wird noch ein Histogram stretching durchgeführt um das finale Bild zu erhalten.

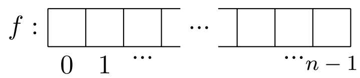
b) **Polynomiale Regression** : Ähnlich zur linearen Regression nun wird hierbei keine affin-lineare Funktion, sondern ein polynom genutzt. Für ein Polynom zwieten gerades kann etwa die Funktion

$$v(x, y) = ax^2 by^2 cxy + dx + ey + f$$

gewählt werden. Wieder entsteht ein Gleichungssytem:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1^2 & y_1^2 & x_1 y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & y_n^2 & x_n y_n & x_n & y_n & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}}_{w} \approx \underbrace{\begin{pmatrix} f(x_1, y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_n, y_n) \end{pmatrix}}_{z}$$

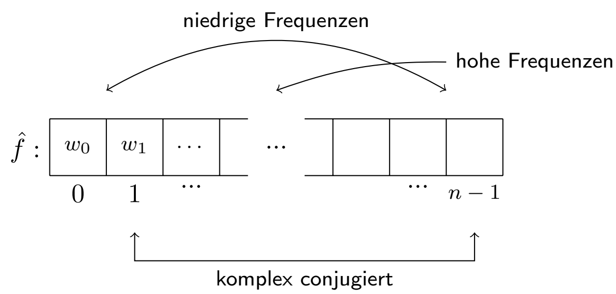
c) **Trigonometrisches Polynom** Hierbei wird v in den niedrigfrequenten Anteilen von f gesucht.



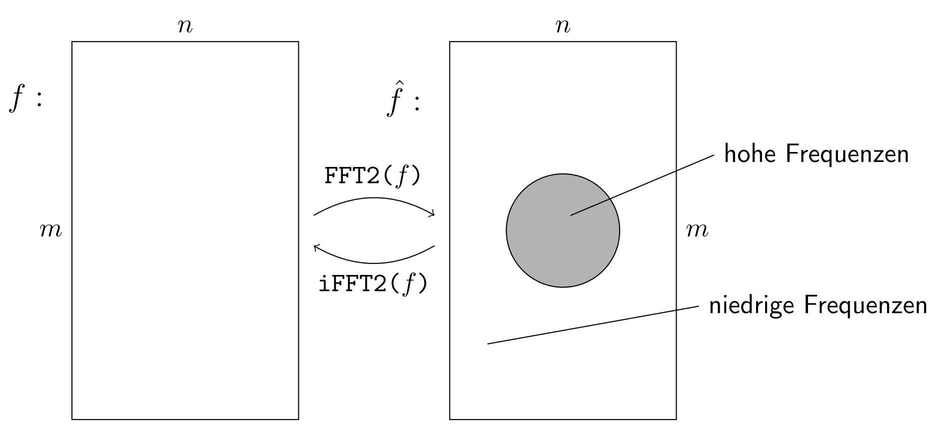
Es ergibt sich $\hat{f}$:

$$\hat{f}_k = \sum_{m=0}^{n-1} f_k \big(\underbrace{e^{-i2\pi\frac{k}{n}}}_{w_k}\big)^m \quad , \; k = 0, 1, ..., n-1$$

Mittels der FFT (Fast Fourier Transformation) ergibt sich $\hat{f}$ zu:



Durch entfernen dieser niedrigen Frequenzen ergibt sich u. Ähnliches funktioniert auch in 2D:



Index