Mathematische Bildverarbeitung

Vorlesungsskript

Institut für Mathematik
Vorlesung von Prof. Dr. Marko Lindner
In LaTeX gesetzt durch Jonas Sattler

Fehlermeldungen an fabian.gabel@tuhh.de

Wintersemester 2018/19

Inhaltsverzeichnis

1 Überblick

1.1 Techniken der Bildverarbeitung

- Kontrastverbesserung
- Entrauschen
- Kantendetektion
- Schärfen
- Inpainting
- Segmentierung (Einzelne Objekte detektieren)
- Registrierung (Bilder des selben Objektes in Einklang bringen)

1.2 Unser Fokus

- Mathematische Beschreibung

1.3 Verwandte Vorlesungen

- 3D Computervision
- Digitale Bildanalyse
- Mustererkennung und Datenkompression
- Medical imaging

1.4 Literatur

- Bredies, Lorenz : Mathematische Bildverarbeitung
- Aubert, Kornprobst : Mathematical Problems in Image Processing
- Modersitzki : Numerical Methods for Image Registration
- Alt : Lineare Funktionalanalysis

2 Was ist ein Bild?

2.1 Definition

Digitale/diskrete Sicht

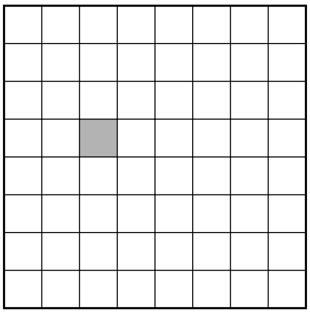


Abbildung 1: Diskretes Bild
Darstellung als Matrix.

Werkzeuge: Lineare Algebra
Vorteile: Endlicher Speicher
Nachteile: Probleme bei zoomen und drehen

Kontinuierlich/analoge Sicht

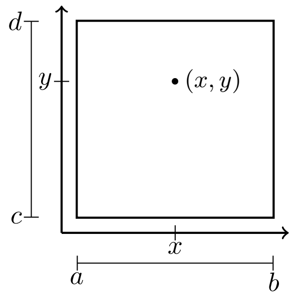


Abbildung 2: Kontinuierliches Bild
Darstelllung als Funktion in zwei Veränderlichen

Werkzeuge: Analysis
Vorteile: Mehr Freiheit (z.b. Kante=Linie entlang einer Unstetigkeit)
Nachteile: Unendlicher Speicher

Definition. Ein **Bild** ist eine Funktion $u : \Omega \to F$, wobei $\Omega \subset \mathbb{Z}^d$ (im diskreten Fall) oder $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (im kontinuierlichen Fall).

$d = 2$: Typisches 2D Bild

$d = 3$: 3D-Bild bzw. "Körper" oder Video: 2D Ort + Zeit

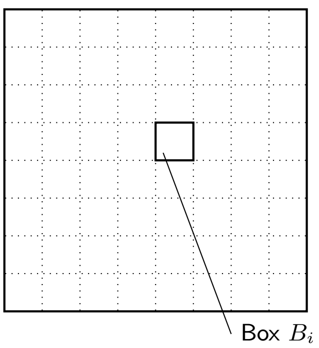
F ist der **Farbraum** , Beispiele:

- F= $[0, 1]$ oder F=$\{0, 1, ..., 255\}$, Graustufen
- F= $\{0, 1\}$ schwarz/weiß
- F= $[0, 1]^3$ oder F= $\{0, 1, ..., 255\}^3$ Farbbilder

2.2 Umwandlung

Kontinuierlich → Diskret:

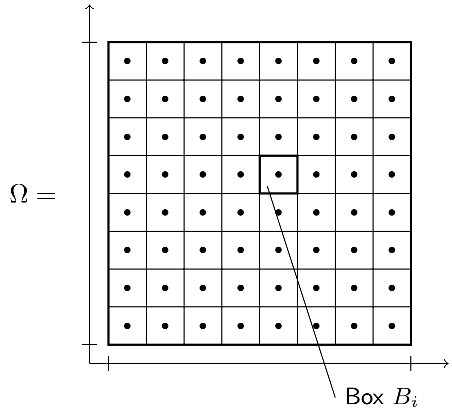
$\Omega =$



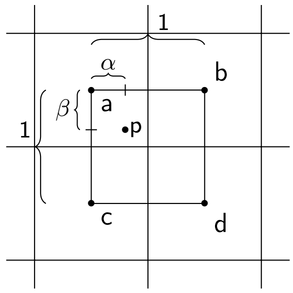
- Ω in Gitter zerlegen.
- Jede Box durch nur einen Farbwert approximieren.
- Etwa durch den Funktionswert im Mittelpunkt der Box.
- oder durch den Mittelwert in der Box:

$$\frac{1}{|B_i|} \cdot \int_{B_i} u(x)\,\mathrm{d}x.$$

Diskret → Kontinuierlich:



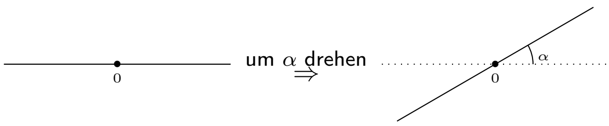
1. Idee: Jeder Punkt der Box B_i erhält den Funktionswert von B_i als Farbwert
   $\Rightarrow$ **Nearest neighbour Interpolation** .
2. Idee: Mittelpunkt von Box B_i erhält den Wert von Pixel B_i sonst wird interpoliert.
   Grauwert $g :=$ Gewichtetes Mittel aus Grauwerten a, b, c, d.



$$g = (1-\alpha)(1-\beta)a + \alpha(1-\beta)b + (1-\alpha)\beta c + \alpha\beta d$$

Dieses wird **Bilineare Interpolation** genannt.

2.3 Beispiel Rotation

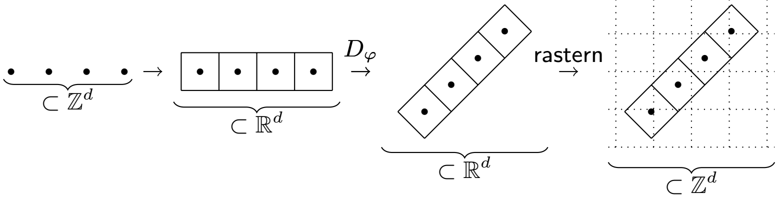


1. Fall, kontinuierliches Bild
Sei u das alte Bild und v das neue Bild, dann ist die Drehung gegeben durch eine **Drehmatrix** :

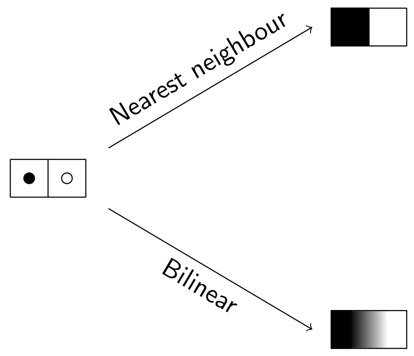
$$D_\varphi \in \mathbb{R}^{d\times d}, D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Damit folgt, dass $D(u) = D_\varphi \Omega$ und $v(x) = u(\underbrace{D_\varphi^{-1}x}_{\in\Omega}) = u(D_{-\varphi}x)$. ($D(u)$ ist die **Domain** von u)

2. Fall, diskretes Bild
Dieses ist problematisch, denn i.A. $x \in \mathbb{Z}^d$, aber $D_\varphi x \notin \mathbb{Z}^d$.



Weiterhin ist $v(x) = u(D_\varphi^{-1}x)$, wobei der konkrete Wert durch Interpolation bestimmt wird.



3 Restauration (Inpainting)

Problem: Lücken im Bild, etwa

1. Kratzer
2. Scannerzeile kaputt
3. Defekt in der Kamera
4. Bewusst entferntes Objekt

sollen sinnvoll und unauffällig geschlossen werden.

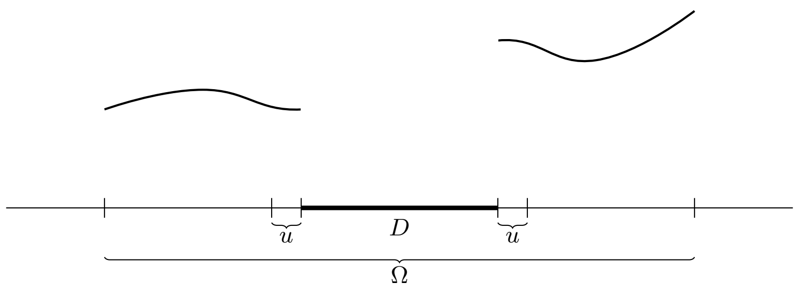
Sei $f : \Omega \to F$ unser Bild jedoch mit Defekt, d.h. fehlenden Funktionswerten in $D \subset \Omega$.

1. Fall: Jeder Punkt aus D hat Nachbarn in $\Omega \backslash D$.
$\Rightarrow$ Lücken mittels Interpolation aus benachbarten Werten in $\Omega \backslash D$ schließen.

2. Fall: D hat innere Punkte. Diesen Fall werden wir im folgenden näher betrachten.

3.1 Frequenzraum-Ansatz

Zur Illustration in 1D:



Betrachte Umgebung $U \subset \Omega \backslash D$ und errechne den Mittelwert

$$m := \frac{1}{|U|} \int_U f(x) \,\mathrm{d}x$$

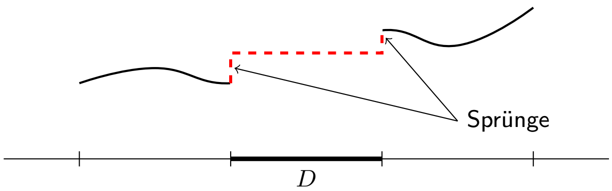
von f auf U.

Algorithmus:

Iteriere

Abbruch falls $\|f - g\| <$ threshold

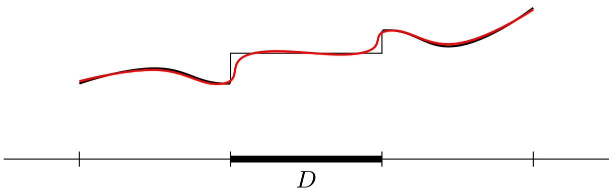
[1] Initialisiere f auf D mittels konstanter Funktion m:



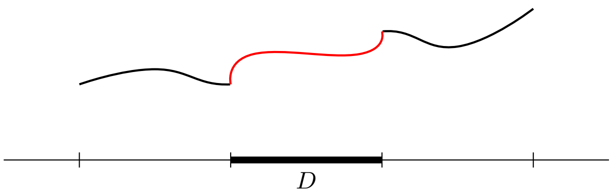
$\Rightarrow$ Sprünge am Rand von D.

Idee: Sprünge $\widehat{=}$ hochfrequente Anteile $\Rightarrow$ wende Tiefpassfilter an.

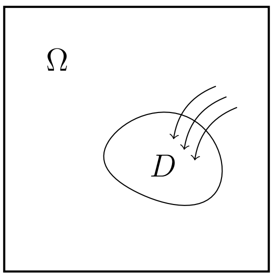
[2] $f \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f} \xrightarrow{\text{Lösche hohe Frequenzen}} \hat{g} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} g$



[3] Ersetze f innerhalb von D durch g.



3.2 PDE-Transport-Diffusions-Ansatz



Idee: Informationen aus $\Omega \backslash D$ nach D "hineinragen".

Referenzen:
- Weichert 1998
- Bornemann & März 2007

Skalierung der Diffusion: Betrachte die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(M \nabla u)$$

mit dem Diffusionstensor

$$M = \begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & v_1^T & - \\ - & v_2^T & - \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

wobei $v_1 \perp v_2$ die Eigenvektoren des sogenannten doppelt geglätteten Strukturtensors

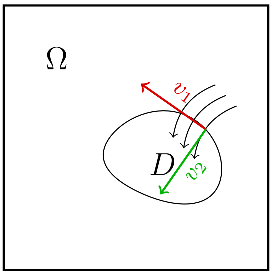
$$J = \mathrm{G}_\rho * \left[\underbrace{\begin{pmatrix} | \\ \nabla(\mathrm{G}_\sigma * u) \\ | \end{pmatrix}}_{2\times 1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} - & \nabla^T(\mathrm{G}_\sigma * u) & - \end{pmatrix}}_{1\times 2} \right]$$

sind. Hierbei bezeichnet ist $*$-Symbol komponentenweise zu verstehen. Die Faltungskerne G_σ und G_ρ sind Gauß-Kerne für die innere bzw. äußere Glättung.

$\Rightarrow$ v_1 Richtung mit maximalem Kontrast mit EW μ_1

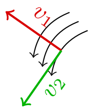
v_2 Richtung mit minimalem Kontrast mit EW μ_2, genannt **Kohärenzrichtung** .

Hierbei ist $\mu_1 \geq \mu_2$.



Fälle:

$\mu_1 \gg \mu_2 \approx 0$



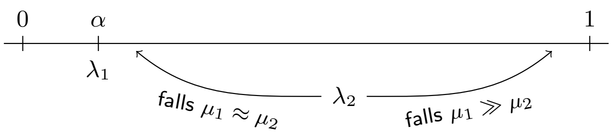
$\mu_1 \approx \mu_2 \approx 0$

Lokal keine Struktur.

$\mu_1 \approx \mu_2 \gg 0$

Kanten.

Die Werte λ_1 und λ_2 werden wie folgt gewählt:



wobei $\alpha \in (0,1)$ festgehalten wird.

$$\lambda_1 := \alpha, \ \lambda_2 := \alpha + (1-\alpha)(1 - g(\mu_1 - \mu_2)),$$

wobei g wie bei Perona Malik gewählt wird, also:

$$g(s) = \frac{1}{1 + \frac{s^2}{\kappa^2}}$$

Dieses wird **Kohärenz verstärkende Diffusion** genannt.

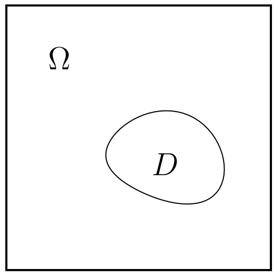
3.3 Variationsansatz

geg.: f auf $\Omega \backslash D$

ges.: u auf Ω

Wunsch 1: $u = f$ auf $\Omega \backslash D$

Wunsch 2: $\|\nabla u\|$ klein auf Ω



Daraus folgt

$$J(u) := \|\nabla u\|_2^2 \to \min \quad \text{auf} \quad := \{u \in \mathrm{W}^{1,2}(\Omega) : u|_{\Omega \backslash D} = f\}$$

Angenommen, $u \in U$ minimiere J, dann folgt für beliebige $v \in \mathrm{W}^{1,2}(\Omega)$ mit $v|_{\Omega \backslash D} = 0$, d.h. $v \in \mathrm{H}_0^1(D)$, dass

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{t \to 0} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_\Omega || \underbrace{\nabla(u + tv)(x)}_{\nabla u(x) + t \nabla v(x)} ||^2 - \|\nabla u(x)\|^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_\Omega \langle \nabla u(x) + t \nabla v(x), \nabla u(x) + t \nabla v(x) \rangle - \langle \nabla u(x), \nabla u(x) \rangle \, \mathrm{d}x \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_\Omega t^2 \|\nabla v(x)\|^2 + 2t \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle \, \mathrm{d}x = \lim_{t \to 0} \int_\Omega t \|\nabla v(x)\|^2 + 2 \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle \, \mathrm{d}x \\
&= 2 \int_D \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle \, \mathrm{d}x \overset{\text{Greensche Formel}}{=} 2 \Bigg(\overbrace{\int_{\delta D} \frac{\partial u}{\partial n} \underbrace{v(x)}_{0} \, \mathrm{d}s(x)}^{0} - \int_D \Delta u(x) v(x) \, \mathrm{d}x \Bigg) \\
&= 2 \int_D \Delta u(x) v(x) \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Daraus folgt mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung $\Delta u = 0$ in D. Insbesondere ist u die harmonische Fortsetzung von f nach D (harmonisches Impainting). Als harmonische Funktion unterliegt u auf D dem Maximumsprinzip und dem Mittelwertprinzip (s. **??**). Es gibt also keine scharfen Kanten in D, anders als z.B. bei kohärenzverstärkender Diffusion.