

# Mathematische Bildverarbeitung

## Vorlesungsskript



Institut für Mathematik  
Vorlesung von Prof. Dr. Marko Lindner  
In  $\LaTeX$ gesetzt durch Jonas Sattler

Wintersemester 2018/19

Fehlermeldungen an [fabian.gabel@tuhh.de](mailto:fabian.gabel@tuhh.de)

---

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Überblick</b>	<b>2</b>
1.1	Techniken der Bildverarbeitung . . . . .	2
1.2	Unser Fokus . . . . .	2
1.3	Verwandte Vorlesungen . . . . .	2
1.4	Literatur . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Was ist ein Bild?</b>	<b>3</b>
2.1	Definition . . . . .	3
2.2	Umwandlung . . . . .	3
2.3	Beispiel Rotation . . . . .	4

# 1 Überblick

## 1.1 Techniken der Bildverarbeitung

- Kontrastverbesserung
- Entrauschen
- Kantendetektion
- Schärfen
- Inpainting
- Segmentierung (Einzelne Objekte detektieren)
- Registrierung (Bilder des selben Objektes in Einklang bringen)

## 1.2 Unser Fokus

- Mathematische Beschreibung

## 1.3 Verwandte Vorlesungen

- 3D Computervision
- Digitale Bildanalyse
- Mustererkennung und Datenkompression
- Medical imaging

## 1.4 Literatur

- Bredies, Lorenz : Mathematische Bildverarbeitung
- Aubert, Kornprobst : Mathematical Problems in Image Processing
- Modersitzki : Numerical Methods for Image Registration
- Alt : Lineare Funktionalanalysis

## 2 Was ist ein Bild?

### 2.1 Definition

#### Digitale/diskrete Sicht

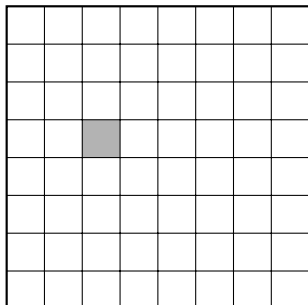


Abbildung 1: Diskretes Bild  
Darstellung als Matrix.

**Werkzeuge:** Lineare Algebra

**Vorteile:** Endlicher Speicher

**Nachteile:** Probleme bei zoomen und drehen

#### Kontinuierlich/analoge Sicht

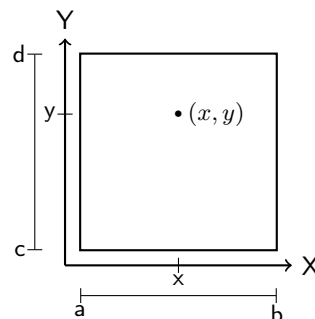


Abbildung 2: Kontinuierliches Bild  
Darstellung als Funktion in zwei Veränderlichen

**Werkzeuge:** Analysis

**Vorteile:** Mehr Freiheit (z.b. Kante=Linie entlang einer Unstetigkeit)

**Nachteile:** Unendlicher Speicher

**Definition.** Ein **Bild** ist eine Funktion  $u : \Omega \rightarrow F$ , wobei  $\Omega \subset \mathbb{Z}^d$  (im diskreten Fall) oder  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  (im kontinuierlichen Fall).

$d = 2$ : Typisches 2D Bild

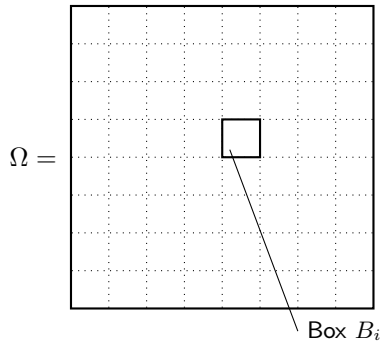
$d = 3$ : 3D-Bild bzw. "Körper" oder Video: 2D Ort + Zeit

$F$  ist der **Farbraum**, Beispiele:

- $F = [0, 1]$  oder  $F = \{0, 1, \dots, 255\}$ , Graustufen
- $F = \{0, 1\}$  schwarz/weiß
- $F = [0, 1]^3$  oder  $F = \{0, 1, \dots, 255\}^3$  Farbbilder

### 2.2 Umwandlung

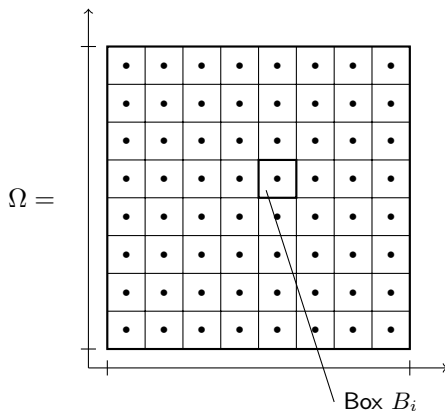
Kontinuierlich  $\rightarrow$  Diskret:



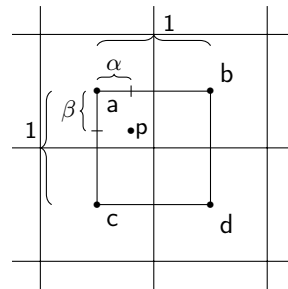
- $\Omega$  in Gitter zerlegen
- Jede Box durch nur einen Farbwert approximieren
- Etwa durch den Funktionswert im Mittelpunkt der Box
- oder durch den Mittelwert in der Box:  

$$\frac{1}{|B_i|} \cdot \int_{B_i} u(x) dx$$

Diskret  $\rightarrow$  Kontinuierlich:



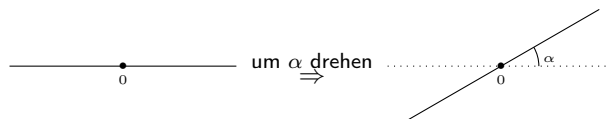
1. Idee: Jeder Punkt der Box  $B_i$  erhält den Funktionswert von  $B_i$  als Farbwert  
 $\Rightarrow$  **Nearest neighbour Interpolation** .
2. Idee: Mittelpunkt von Box  $B_i$  erhält den Wert von Pixel  $B_i$  sonst wird interpoliert.  
 Grauwert  $g :=$  Gewichtetes Mittel aus Grauwerten  $a, b, c, d$ .



$$g = (1 - \alpha)(1 - \beta)a + \alpha(1 - \beta)b + (1 - \alpha)\beta c + \alpha\beta d$$

Dieses wird **Bilineare Interpolation** genannt.

## 2.3 Beispiel Rotation



### 1. Fall, kontinuierliches Bild

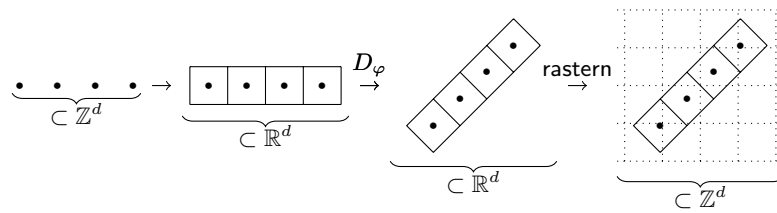
Sei  $u$  das alte Bild und  $v$  das neue Bild, dann ist die Drehung gegeben durch eine **Drehmatrix** :

$$D_\varphi \in \mathbb{R}^{d \times d}, D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

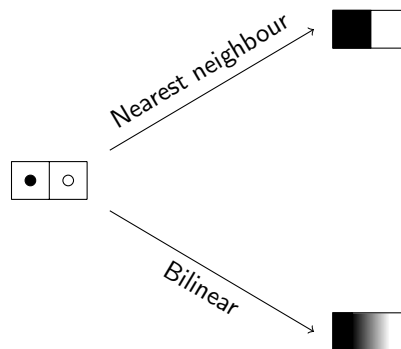
Damit folgt, dass  $D(u) = D_\varphi \Omega$  und  $v(x) = u(\underbrace{D_\varphi^{-1}x}_{\in \Omega}) = u(D_{-\varphi}x)$ . ( $D(u)$  ist die **Domain** von  $u$ )

### 2. Fall, diskretes Bild

Dieses ist problematisch, denn i.A.  $x \in \mathbb{Z}^d$ , aber  $D_\varphi x \notin \mathbb{Z}^d$ .



Weiterhin ist  $v(x) = u(D_\varphi^{-1}x)$ , wobei der konkrete Wert durch Interpolation bestimmt wird.



# Index

$H^1$  deblurring, 42  
 $L^2$  deblurring, 42  
öffnen, 14

Abreißen, 35  
Absoluter Fehler, 15  
affin-linear, 48  
anisotrop, 31

Banachraum, 24  
Beleuchtungsausgleich, 47  
Bilateraler Filter, 32  
Bild, 4  
Bilineare Interpolation, 5  
bimodal, 9

Canny-Algorithmus, 35

Dichte, 7  
Diffusionsgleichung, 29  
Diffusionstensor, 31  
dilation, 12  
Dirac-Impuls, 20  
Diskreter Laplace Operator, 28  
Distributioneller Gradient, 60  
Distributionen, 58  
Domain, 6  
doppelt geglätteter Strukturtensor, 45  
Drehmatrix, 5  
Dualraum, 57

Entfaltung, 39  
erosion, 13  
Euler-Lagrange-Gleichung, 34

Faltung, 18  
Farbraum, 4  
Fixpunktgleichung, 10  
Fixpunktiteration, 10  
Fouriertransformation, 21  
Frequenzbereich, 25  
Frequenzraumfilter, 21

Gauß-Kern, 27  
gleitendes Mittel, 19  
Gradientenfilter, 34

Hilbertraum, 24  
Histogramm, 6  
Histogramm - equalization, 9  
Histogramm thresholding, 46  
hysteresis thresholding, 35

Isodata Algorithmus, 10

Isotrop, 31

Kohärenzrichtung, 45  
Kohärenz verstärkende Diffusion, 46  
Kopplungskonstante, 33  
Korrelation, 17

Landmarks, 53  
Laplace-Schärfen, 37  
Laplacian of Gaußian method, 37  
Lineare Regression, 48

Maß, 7  
Maske, 17  
Masse, 10  
Median, 10  
Merkmale, 53  
Mittelwert, 10  
Morphographische Operationen, 11  
Mumford-Shah-Funktional, 52

Nearest neighbour Interpolation, 5  
Non-maximum suppression, 35  
Normalengleichung, 48  
Normalized Crosscorrelation, 56

Otsu's Verfahren, 10

Polynomiale Regression, 48  
Prewitt-Filter, 34

Rauschen, 15  
Relativer Fehler, 15  
Rudin-Osher-Fatemi-Funktional, 33

schließen, 13  
Schwellenwert, 9  
Shape based Methods, 9  
Signal to noise ratio, 16  
Sobel-Filter, 35  
Sobolev-Räume, 33  
strengkonvex, 62  
Strukturelement, 12  
Sub-Niveaumenge, 62

Toeplitz-Matrix, 39  
Totalvariation, 50  
Trigonometrisches Polynom, 49

Untere Halbstetigkeit, 61

Varianz, 10

Wärmegleichung, 29

Zeitbereich, 25