

Mathematische Bildverarbeitung

Inhaltsverzeichnis

1 Überblick	3
1.1 Techniken der Bildverarbeitung	3
1.2 Unser Fokus	3
1.3 Verwandte Vorlesungen	3
1.4 Literatur	3
2 Was ist ein Bild?	4
2.1 Definition	4
2.2 Umwandlung	4
2.3 Beispiel Rotation	5
3 Histogramme und deren Anwendungen	6
3.1 Histogramme	6
3.2 Anwendung: Kontrastverbesserung	7
3.3 Anwendung: SW-Konvertierung	9
4 Einfache Morphographische Operationen	11
4.1 Verknüpfungen von A und B	12
5 Entrauschen: Filter & Co.	15
5.1 Rauschen	15
5.2 Glättungsfilter	16
5.3 Frequenzraum-filter	21
5.4 Filterbreite und Glättung	27

5.5	Differenzenfilter	28
5.6	Glättungsfilter und partielle Differentialgleichungen	29

1 Überblick

1.1 Techniken der Bildverarbeitung

- Kontrastverbesserung
- Entrauschen
- Kantendetektion
- Schärfen
- Inpainting
- Segmentierung (Einzlene Objekte detektieren)
- Registrierung (Bilder des selben Objektes in Einklang bringen)

1.2 Unser Fokus

- Mathematische Beschreibung

1.3 Verwandte Vorlesungen

- 3D computervision
- Digitale Bildanalyse
- Mustererkennung und Datenkompression
- Medical imaging

1.4 Literatur

- Bredies, Lorenz : Mathematische Bildverarbeitung
- Aubert, Kornprobst : Mathematical Problems in Image Processing
- Modersitzki : Numerical Methods for Image Registration
- Alt : Lineare Funktionalanalysis

2 Was ist ein Bild?

2.1 Definition

Digitale/diskrete Sicht

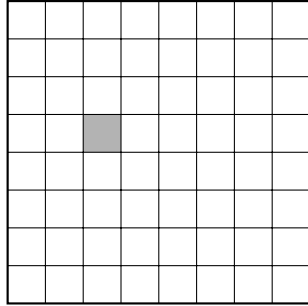


Abbildung 1: Diskretes Bild
Darstellung als Matrix.

Kontinuierlich/analoge Sicht

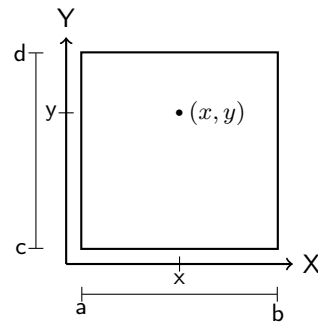


Abbildung 2: Kontinuierliches Bild
Darstellung als Funktion in zwei
Veränderlichen

Werkzeuge: Lineare Algebra

Vorteile: Endlicher Speicher

Nachteile: Probleme bei zoomen und drehen

Werkzeuge: Analysis

Vorteile: Mehr Freiheit (z.b. Kante=Linie entlang einer Unstetigkeit)

Nachteile: Unendlicher Speicher

Definition. Ein **Bild** ist eine Funktion $u : \Omega \rightarrow F$, wobei $\Omega \subset \mathbb{Z}^d$ (im diskreten Fall) oder $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (im kontinuierlichen Fall).

$d = 2$: Typisches 2D Bild

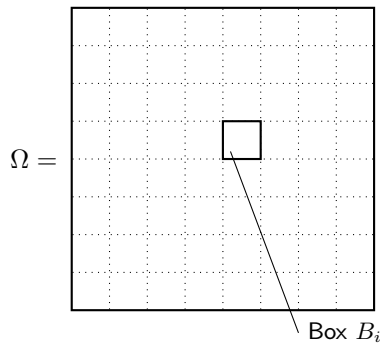
$d = 3$: 3D-Bild bzw. "Körper" oder Video: 2D Ort + Zeit

F ist der **Farbraum**, Beispiele:

- $F = [0, 1]$ oder $F = \{0, 1, \dots, 255\}$, Graustufen
- $F = \{0, 1\}$ schwarz/weiß
- $F = [0, 1]^3$ oder $F = \{0, 1, \dots, 255\}^3$ Farbbilder

2.2 Umwandlung

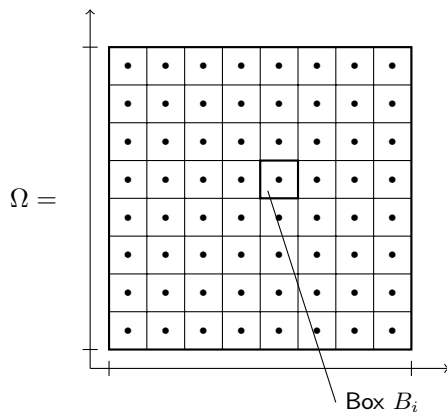
Kontinuierlich \rightarrow Diskret:



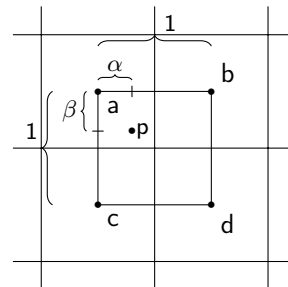
- Ω in Gitter zerlegen
- Jede Box durch nur einen Farbwert approximieren
- Etwa durch den Funktionswert im Mittelpunkt der Box
- oder durch den Mittelwert in der Box:

$$\frac{1}{|B_i|} \cdot \int_{B_i} u(x) dx$$

Diskret \rightarrow Kontinuierlich:



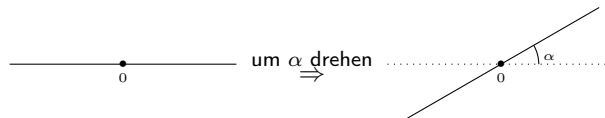
1. Idee: Jeder Punkt der Box B_i erhält den Funktionswert von B_i aus als diskretem Pixel \Rightarrow **Nearest neighbour interpolation**.
2. Idee: Mittelpunkt von Box B_i erhält den Wert von Pixel B_i sonst wird interpoliert. Grauwert $g :=$ Gewichtetes Mittel aus Grauwerten a, b, c, d .



$$g = (1-\alpha) \cdot (1-\beta) \cdot a + \alpha \cdot (1-\beta) \cdot b + (1-\alpha) \cdot \beta \cdot c + \alpha \cdot \beta \cdot d$$

Dieses wird **Bilinear interpolation** genannt.

2.3 Beispiel Rotation



1. Fall, kontinuierliches Bild

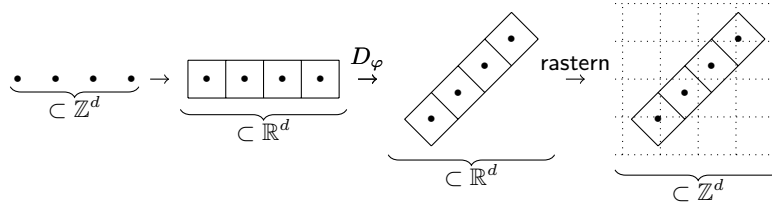
Sei u das alte Bild und v das neue Bild, dann ist die Drehung gegeben durch eine **Drehmatrix** :

$$D_\varphi \in \mathbb{R}^{d \times d}, D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

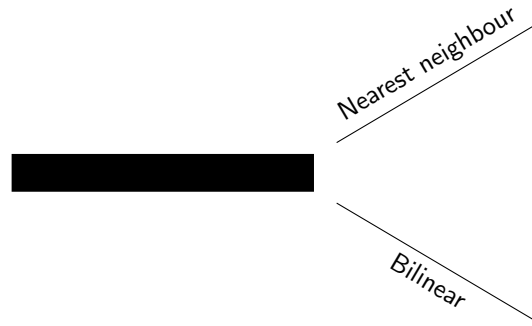
Damit folgt, dass $D(u) = D_\varphi \Omega$ und $v(x) = u(\underbrace{D_\varphi^{-1}x}_{\in \Omega}) = u(D_{-\varphi}x)$. ($D(u)$ ist die **Domain** von u)

2. Fall, diskretes Bild

Dieses ist problematisch, denn i.A. $x \in \mathbb{Z}^d$, aber $D_\varphi x \notin \mathbb{Z}^d$.



Weiterhin ist $v(x) = u(D_\varphi^{-1}x)$, wobei der konkrete Wert durch Interpolation bestimmt wird.



3 Histogramme und deren Anwendungen

3.1 Histogramme

Sei $u : \Omega \rightarrow F$ ein diskretes Bild, dann heißt die Abbildung

$$H_u : F \rightarrow \mathbb{N}_0$$

$$F \ni k \mapsto \#\{x \in \Omega | u(x) = k\}$$

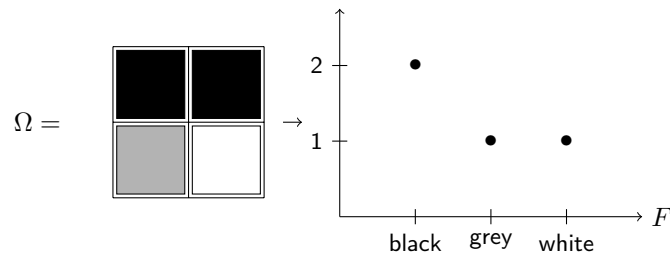
Histogramm des Bildes u . Dieses gibt an, wie oft die Farbe k im Bild vorhanden ist.

Damit gilt auch:

$$\sum_{k \in F} H_u(k) = |\Omega|, \text{ also die Anzahl der Pixel}$$

Bemerkung. Manchmal betrachtet man die relative Häufigkeit $\tilde{H}_u(k) = \frac{H_u(k)}{|\Omega|}$.

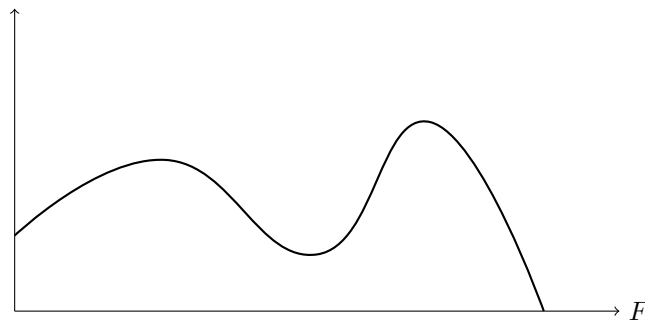
Beispiel:



Für kontinuierliche Bilder wird das allgemeinere Konzept von einem **Maß** benötigt:

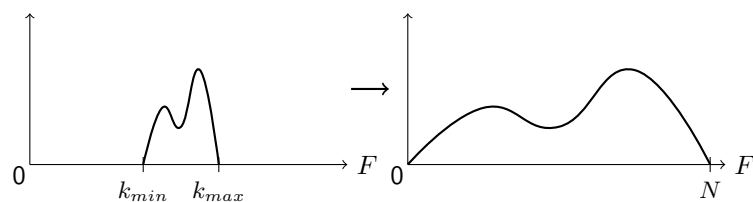
$$A \subset F, \mathcal{H}_u := |u^{-1}(A)| \begin{cases} \text{Diskretes Bild:} \\ \text{Anzahl der Elemente in } u^{-1}(A) \\ \text{Kontinuierliches Bild:} \\ \text{Volumen von } u^{-1}(A) \end{cases}$$

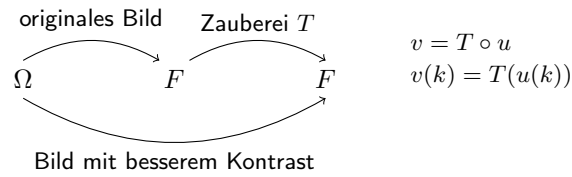
Zusammenhang zum vorherigen: $\mathcal{H}_u(A) = \sum_{k \in A} H_u(k)$. Man sagt dann, dass U_u eine **Dichte** zum Maß \mathcal{H}_u sei. Diese kann auch im kontinuierlichen existieren:



3.2 Anwendung: Kontrastverbesserung

Problem & Idee: Falls das Bild nur einen kleinen Teil von F nutzt, kann der Kontrast verbessert werden, indem man das Bild auf ganz F verteilt.





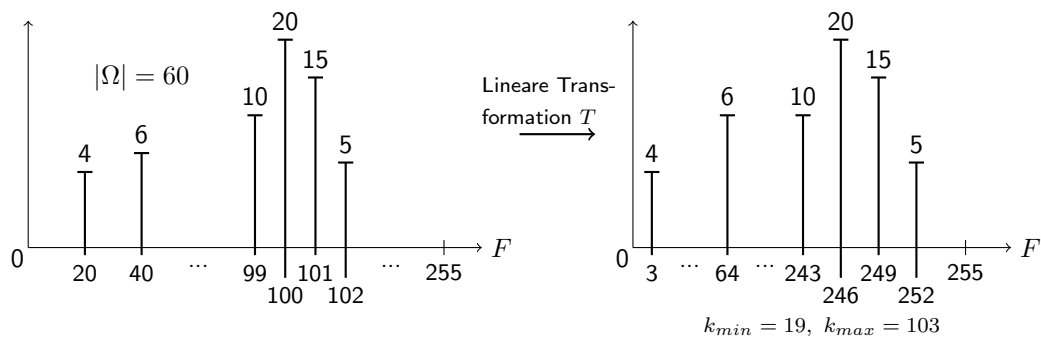
1. Idee, Kontrastdehnung:

T "lineare" Abbildung, so dass $T(k_{min}) = 0$ und $T(k_{max}) = N$:

$$T(k) = \frac{k - k_{min}}{k_{max} - k_{min}} N, \text{ Kontinuierlicher Farbraum}$$

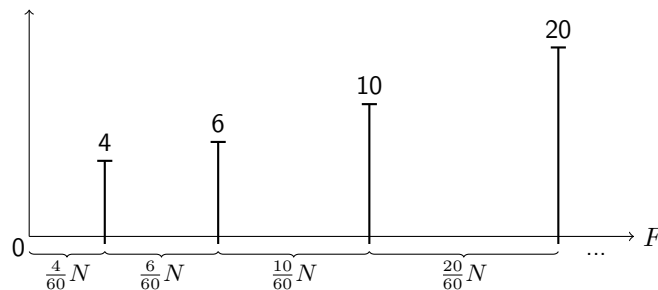
$$T(k) = \left\lceil \frac{k - k_{min}}{k_{max} - k_{min}} N \right\rceil, \text{ Diskreter Farbraum}$$

Beispiel:



2. Idee nicht-lineare Kontrastdehnung

Diesesmal setzen wir $T(k) = \left\lceil \frac{N}{|\Omega|} \sum_{l=0}^k H_u(l) \right\rceil$ für einen diskreten Farbraum und erhalten:



T lässt sich auch alternativ ausdrücken durch:

$$T(k) = \lceil \mathcal{H}_u(\{0, \dots, k\}) \rceil$$

Und somit folgt dass für den kontinuierlichen Fall T durch

$$T(k) = \frac{N}{|\Omega|} \mathcal{H}_u((0, k))$$

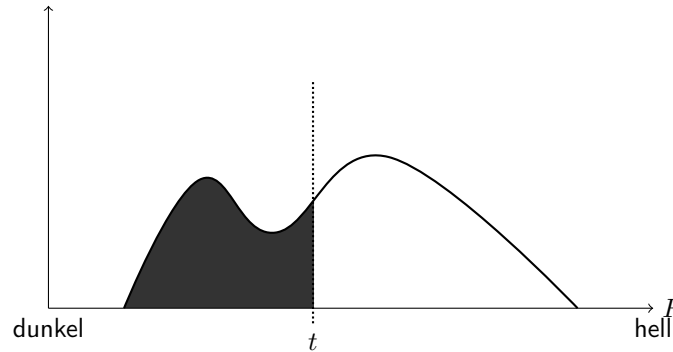
definiert werden kann. Allgemein heißt der Prozess Histogramm - equalization.

3.3 Anwendung: SW-Konvertierung

Aufgabe: Graustufenbild \rightarrow SW-Bild.

Nützlich etwa bei Objekterkennung/Segmentierung.

Idee: Das Histogramm an einem gewissen **Schwellenwert** t spalten:



Also setze nun für $t \in F$:

$$\text{schwarz} = \{k \in F | k \leq t\}$$

$$\text{weiß} = \{k \in F | k > t\}$$

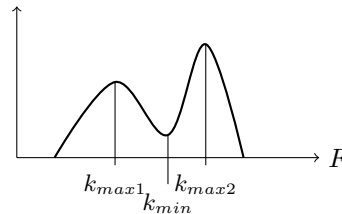
Graustufenbild $u \rightarrow$ schwarz/weiß Bild \tilde{u} :

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} 0, & u(x) \in \text{schwarz} \\ 1, & u(x) \in \text{weiß} \end{cases} \Rightarrow \tilde{F} = \{0, 1\}$$

Methoden um diesen Schwellenwert zu wählen:

1. Shape based Methods :

Falls das Histogramm von u **bimodal** ist, also die Form:



hat, dann wähle:

$$t := k_{\min}$$

$$\text{oder } t := \frac{k_{\max 1} + k_{\max 2}}{2}$$

2. Otsu's Verfahren (1979):

Vorher einige Definitionen.

Die **Masse** :

$$m_{\text{schwarz}} := \sum_{k \in \text{schwarz}} H_u(k)$$

$$m_{\text{weiß}} := \sum_{k \in \text{weiß}} H_u(k)$$

Der **Mittlewert** :

$$\mu_{\text{schwarz}} := \frac{\sum_{k \in \text{schwarz}} k \cdot H_u(k)}{\sum_{k \in \text{schwarz}} H_u(k)} = \frac{\sum_{k \in \text{schwarz}} k \cdot H_u(k)}{m_{\text{schwarz}}}$$

$$\mu_{\text{weiß}} := \frac{\sum_{k \in \text{weiß}} k \cdot H_u(k)}{\sum_{k \in \text{weiß}} H_u(k)} = \frac{\sum_{k \in \text{weiß}} k \cdot H_u(k)}{m_{\text{weiß}}}$$

Die **Varianz** :

$$\sigma_{\text{schwarz}}^2 = \sum_{k \in \text{schwarz}} (k - \mu_{\text{schwarz}})^2 \cdot H_u(k)$$

$$\sigma_{\text{weiß}}^2 = \sum_{k \in \text{weiß}} (k - \mu_{\text{weiß}})^2 \cdot H_u(k)$$

Nun lautet Otsu's Methode: $\sigma_{\text{schwarz}}^2 + \sigma_{\text{weiß}}^2 \xrightarrow{t} \min$.

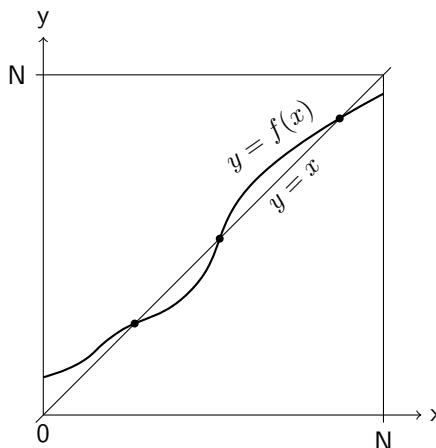
3. **Median** :

Wähle t so dass $m_{\text{schwarz}} = m_{\text{weiß}}$.

4. **Isodata Algorithmus** (1970s):

Wähle t so, dass $t = \frac{\mu_{\text{schwarz}} - \mu_{\text{weiß}}}{2} =: f(t)$.

Diese Gleichung ist bereits eine **Fixpunktgleichung** und eine Lösung kann, etwa mit einer **Fixpunktiteration** approximiert werden, das heißt $t_{n+1} := f(t_n)$.



Matlab code :

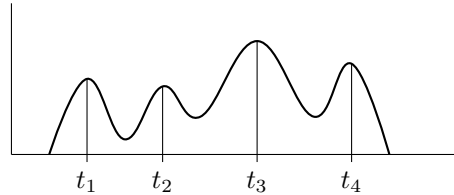
```

1 u=imread('liftingbody.png');
2 t=greythresh(u);%uses Otsu's method
3 v=im2bn(u,t);
4 imshow(v);

```

Einige dieser Verfahren können auch erweitert werden, so dass ein Graustufenbild nicht nur in zwei, sondern in M Farben zerlegt werden kann. Im allgemeinen werden dann $M - 1$ thresholds benötigt.

1. **Shape based :**



2. **Otsu's Verfahren :**

Farbklassen:

$$F_1 = \{k : k \leq t_1\}$$

$$F_2 = \{k : t_1 < k \leq t_2\}$$

$$\vdots$$

$$F_M = \{k : t_{M-1} < k\}$$

Und wie zuvor: $\sigma_1^2 + \dots + \sigma_M^2 \rightarrow \min$

3. **Median :**

Zerteile F in M Quantile gleicher Masse.

4. **Isodata :**

Hierzu existiert keine Bekannte Verallgemeinerung auf M Farbklassen.

Matlab code :

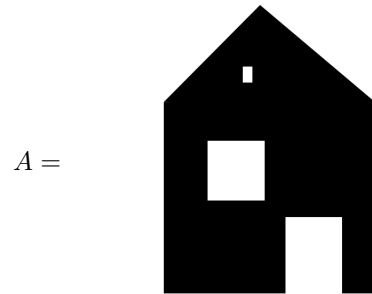
```

1 u=imread('Circles Bright Dark.png');
2 t=multithresh(u,M-1);
3 v=imquantize(u,t);
4 w=label2rgb(u,t);
5 imshow(w);

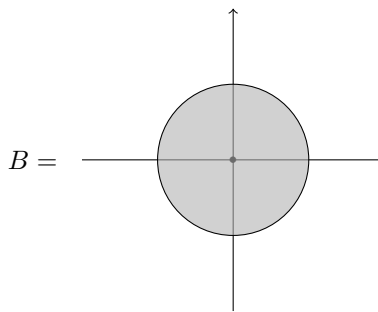
```

4 Einfache Morphographische Operationen

S/W Bild:



Strukturelement :



4.1 Verknüpfungen von A und B

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

Diese wird **dilation** genannt.

Anschaulich wird an jeden schwarzen Punkt des Bildes A das Struktur element B gelegt.

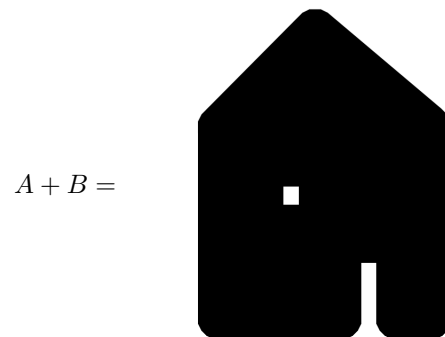


Bild erzeugt in Matlab durch:

```

1 I=imread('Bild1.png');
2 se=strel('disk',40,8);
3 I2=imcomplement(imdilate(imcomplement(I),se));%Es wird das Komplement des Bildes
   gebildet, damit das Strukturelement auf den schwarzen Bereich angewendet wird
4 imshow(I2);

```

$$A - B := \{a : a + B \subset A\}$$

Diese wird **erosion** genannt.

Anschaulich werden die schwarzen Bereiche des Bildes gesucht, in die das Strukturelement hinein passt.

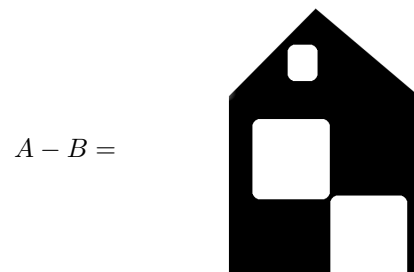


Bild erzeugt in Matlab durch:

```

1 I=imread('Bild1.png');
2 se=strel('disk',20,8);
3 I2=imcomplement(imerode(imcomplement(I),se));
4 imshow(I2);

```

Es ist schnell zu erkennen das $A \neq (A + B) - B$, deshalb wird eine neue Operation eingeführt:

$$A \bullet B := (A + B) - B$$

Dieses wird **schließen** genannt und wird etwa genutzt um Löcher, z.b. Rauschen, in einem Bild zu entfernen. Im Beispiel Bild ist zu sehen, dass das obere Fenster nicht mehr vorhanden ist.

$$A \bullet B =$$

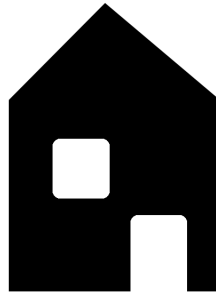


Bild erzeugt in Matlab durch:

```

1 I=imread('Bild1.png');
2 se=strel('disk',20,8);
3 I2=imcomplement(imdilate(imcomplement(I),se));
4 I3=imcomplement(imerode(imcomplement(I2),se));
5 imshow(I3);

```

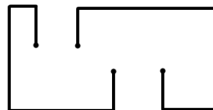
Es existiert auch die Umgekehrte Operation:

$$A \circ B := (A - B) + B$$

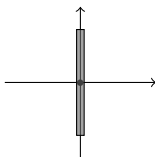
Diese wird **öffnen** genannt.

Diesmal mit einem neuen Beispiel:

$$A =$$



$$B =$$



[illegible]

Bild erzeugt in Matlab durch:

```
1 I=imread('Bild2.png');
2 se=strel('line',10,90);
3 I2=imcomplement(imerode(imcomplement(I),se));
4 I3=imcomplement(imerode(imcomplement(I2),se));
5 imshow(I3);
```

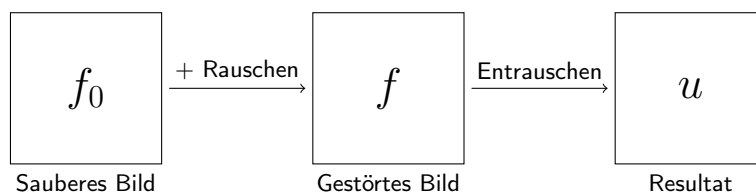
5 Entauschen: Filter & Co.

5.1 Rauschen

Rauschen : Ungewollte Störungen in einem Bild

- punktweise
- zufällig
- unabhängig
- additiv (bei multiplikativem Rauschen *log* anwenden)

Notation:



Wie gut das entrauschte Bild u das saubere Bild f_0 beschreibt wird durch Normen gemessen.

$$\begin{aligned} & \|f - f_0\|, \text{ Rauschen} \\ & \|u - f_0\|, \text{ **Absoluter Fehler**} \\ & \frac{\|u - f_0\|}{\|f - f_0\|}, \text{ **Relativer Fehler** im Vergleich zum Rauschen} \\ & \frac{\|u - f_0\|}{\|f_0\|}, \text{ Relativer Fehler im Vergleich zum Signal} \end{aligned}$$

Typischerweise ist die gewählte Norm:

$$\|f\| = \|f\|_2 = \sqrt{\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx}$$

oder im diskreten:

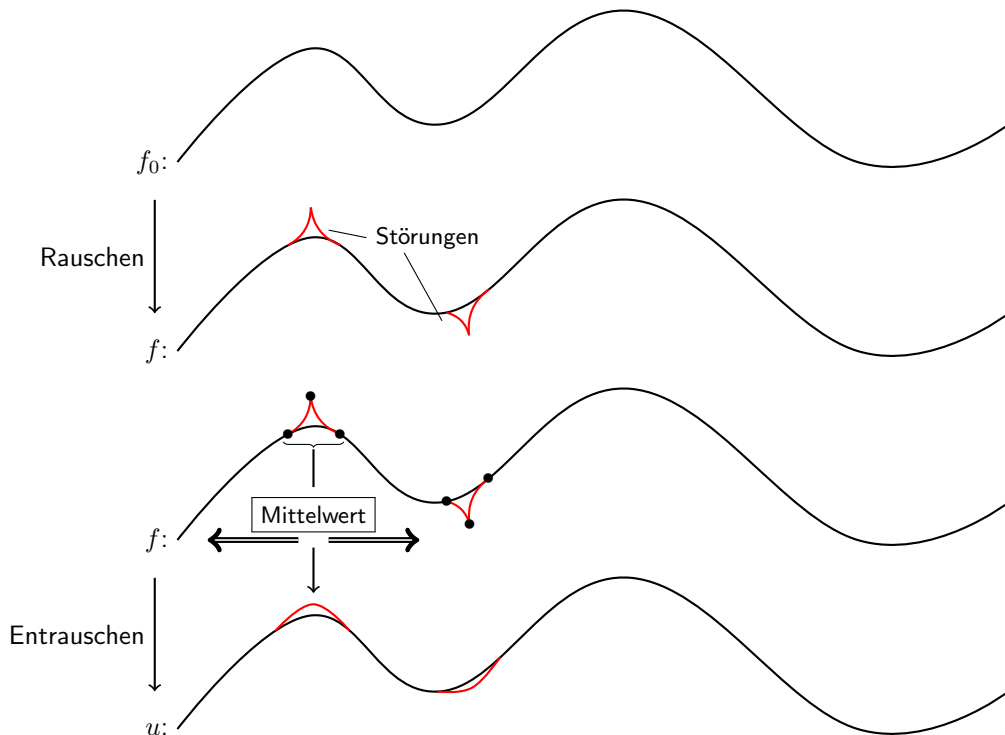
$$\|f\|_2 = \sqrt{\sum_{x \in \Omega} |f(x)|^2}$$

Eng verwandt ist die **Signal to noise ratio** (SNR):

$$\log\left(\frac{\|f_0\|_2}{\underbrace{\|u - f_0\|_2}_{\in [1, \infty)}}\right) \in [0, +\infty), \text{ wobei } 0 \text{ schlecht und } +\infty \text{ gut ist.}$$

5.2 Glättungsfilter

Grundidee: (zur Vereinfachung in 1D)

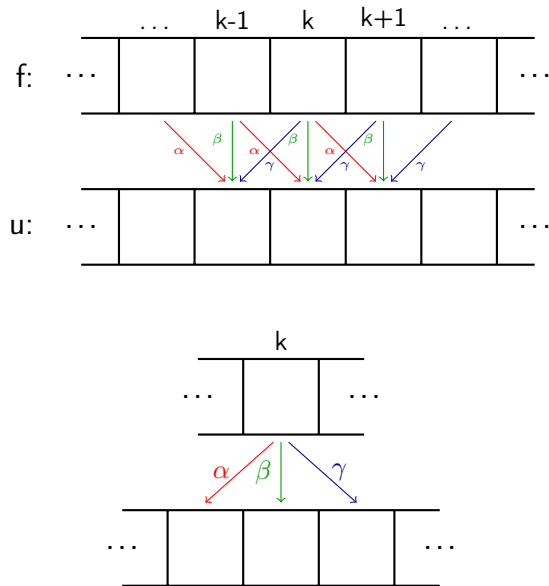


$$u(k) := \alpha \cdot f(k-1) + \beta \cdot f(k) + \gamma \cdot f(k+1) \quad (5.1)$$

wobei:

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \quad (5.2)$$

Schematisch bedeutet (5.1):



Durch (5.1) ist eine Abbildung $f \mapsto u$ gegeben, wir schreiben kurz:

$u = m \boxtimes f$, dieses wird **Korrelation** genannt.

mit:

$$(m \boxtimes f)(k) = \sum_{i \in \text{supp}(m)} m(i) f(k+i) \quad (5.3)$$

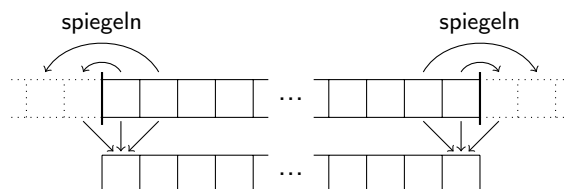
und:

$$m = \begin{array}{ccccc} & \dots & -1 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \alpha & \beta & \gamma & \dots \end{array} \quad \text{gennant } \underline{\text{Maske}} .$$

Setzt man nun $j := k + i$ in (5.1), so ist $i = j - k$, d.h.

$$(m \boxtimes f)(k) = \sum_{i \in \text{supp}(m)} m(j-k) f(j) \quad (5.4)$$

Um die Abbildung auf den Rand anzuwenden wird das Bild gespiegelt, in 1D:



in 2D:

d	b	d
q	p	q
d	b	d

Formel (5.4) erinnert an die Formel der **Faltung** :

$$(g * f)(k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} g(\underbrace{k-j}_{\text{Anders als (5.4)}}) \cdot f(j) \quad (5.5)$$

Setzt man also $g(i) := m(-i) =: \tilde{m}(i)$, was einer Spiegelung der Maske entspricht, dann ist

$$m \boxtimes f = g * f = \tilde{m} * f$$

Eigenschaften der Faltung:

- 1 $(f * g) * h = f * (g * h)$, Assoziativität
- 2 $f * g = g * f$, Kommutativität
- 3 $\tilde{f} * \tilde{g} = \widetilde{f * g}$, Kompatibilität mit Spiegelung

Eigenschaften der Korrelation:

- 1' $f \boxtimes (g \boxtimes h) = \tilde{f} * (\tilde{g} * h) \stackrel{1}{=} (\tilde{f} * \tilde{g}) * h \stackrel{3}{=} (\widetilde{f * g}) * h = (f * g) \boxtimes h \neq (f \boxtimes g) \boxtimes h$, nicht assoziativ!
- 2' $f \boxtimes g = \tilde{f} * g \stackrel{2}{=} g * \tilde{f} = \tilde{\tilde{g}} * \tilde{\tilde{f}} \stackrel{3}{=} (\widetilde{\tilde{g} * \tilde{f}}) = \widetilde{g \boxtimes f} \neq g \boxtimes f$, nicht kommutativ!
- 3' $\tilde{f} \boxtimes \tilde{g} = \tilde{\tilde{f}} * \tilde{\tilde{g}} \stackrel{3}{=} (\widetilde{\tilde{f} * \tilde{g}}) = \widetilde{f \boxtimes g}$, Kompatibilität mit Spiegelung

\boxtimes und $*$ definiert man auf: $\ell^1(\mathbb{Z}^d) := \{f = (f_i)_{i \in \mathbb{Z}^d} : \underbrace{\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} |f_i|}_{:= \|f\|_1} < \infty\}$

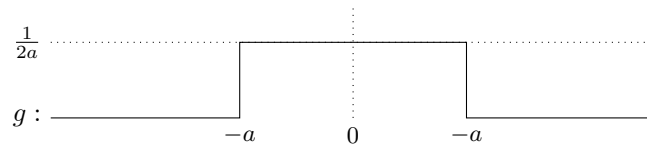
Man kann zeigen (Übung): $f, g \in \ell^1 \Rightarrow f * g \in \ell^1$ und $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$. Wobei oft die Gleichheit gilt.

Alles gilt auch in der kontinuierlichen Version:

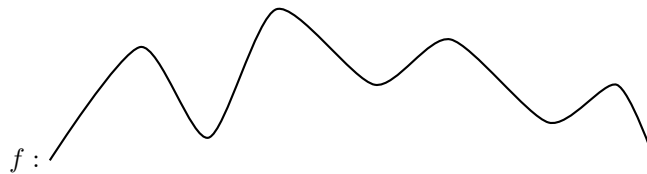
$$L^1(\mathbb{R}^d) := \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \mid \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} |f| dx}_{:= \|f\|_1} < \infty\}$$

$$f, g \in L^1(\mathbb{R}^d) : (g * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)f(y)dy, \quad y, x \in \mathbb{R}^d$$

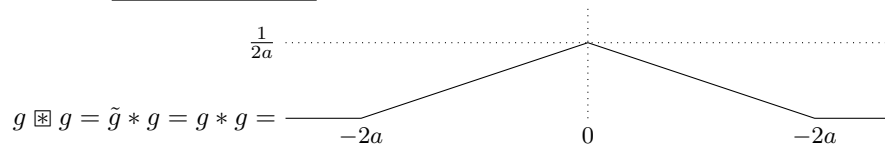
Beispiel für den kontinuierlichen Fall:



Hierbei gilt $\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = 1$



$g \boxtimes f = \underline{\text{gleitendes Mittel}}$.



Weitere Eigenschaften der Faltung:

Für alle $f, g \in L^1$ or ℓ^1

$$\left. \begin{aligned} (g_1 + g_2) * f &= (g_1 * f) + (g_2 * f) \\ (\alpha g) * f &= \alpha(g * f) \end{aligned} \right\} = \text{Linearität}$$

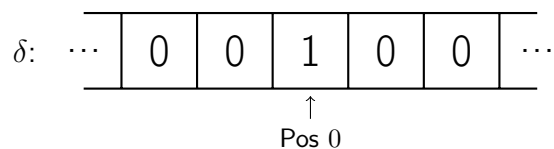
Somit ist:

$$g \mapsto f * g$$

ein linearer Operator.

Formt ℓ^1 bzw. L^1 eine Algebra mit neutralem Element δ ?

ℓ^1 ?:



Ja!

L^1 ? Für ein solches Element muss gelten:

$$\forall f \in L^1 : d * f = f$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\delta(x-y)}_{=0 \forall x \neq y} f(y) dy = f(x)$$

Diese Funktion wird Dirac-Impuls genannt ist aber kein Element von L^1 .

Nun zu Masken in 2D:

$$u = m \boxtimes f \text{ mit } m = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \alpha & \\ \hline \beta & \gamma & \delta \\ \hline & \epsilon & \\ \hline \end{array}$$

wobei $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 1$

Kurzschreibweise: $u_{ij} := u(x)$ wobei $x = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$, analog für f_{ij} .

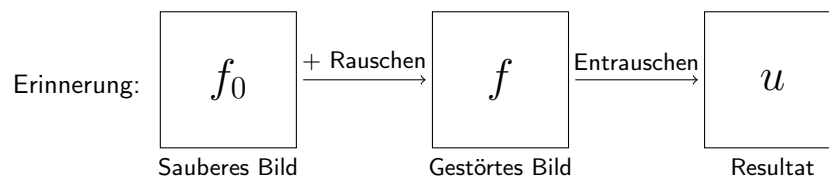
$$\Rightarrow u_{ij} = \alpha f_{i-1,j} + \beta f_{i,j-1} + \gamma f_{ij} + \delta f_{i,j+1} + \epsilon f_{i+1,j}$$

$$u = m \boxtimes f = \tilde{m} * f \text{ mit } \tilde{m} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \epsilon & \\ \hline \delta & \gamma & \beta \\ \hline & \alpha & \\ \hline \end{array}$$

Symmetrischer Fall:

$$\tilde{m} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \alpha & \\ \hline \alpha & \gamma & \alpha \\ \hline & \alpha & \\ \hline \end{array} \text{ mit } \gamma = 1 - 4\alpha$$

$$u_{ij} = (1 - 4\alpha) f_{ij} + \alpha (f_{i-1,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1} + f_{i+1,j}) \quad (5.6)$$



Annahme: $f_{ij} = f_{ij} + r_{ij}$ mit $r_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ iid.

z.z.: $\text{Var}(u_{ij}) \leq \text{Var}(f_{ij})$

$$\text{Var}(f_{ij}) = E(\underbrace{f_{ij} - \overbrace{E f_{ij}}^{f_{ij}^0}}_{r_{ij}})^2 = \sigma^2$$

$$\begin{aligned}
Var(u_{ij}) &= E(u_{ij} - Eu_{ij})^2 = E((1 - 4\alpha) \underbrace{(f_{ij} - f_{ij}^0)}_{r_{ij}} + \alpha \underbrace{((f_{i-1,j} - f_{i-1,j}^0) + \dots + (f_{i+1,j} - f_{i+1,j}^0))}_{r_{i-1,j} + \dots + r_{i+1,j}}))^2 \\
&= E((1 - 4\alpha)^2 r_{ij}^2 + \alpha^2 (r_{i-1,j}^2 + r_{i,j-1}^2 + r_{i,j+1}^2 + r_{i+1,j}^2) + 2(1 - 4\alpha)\alpha r_{ij} r_{i-1,j} \dots) \\
&= (1 - 4\alpha)^2 \underbrace{Er_{ij}^2}_{\sigma^2} + \alpha^2 (Er_{i-1,j}^2 + \dots + Er_{i+1,j}^2) + 2(1 - 4\alpha)\alpha \underbrace{E(r_{ij} r_{i-1,j})}_{\underbrace{Er_{ij} Er_{i-1,j}}_0} + \underbrace{\dots}_0 \\
&= (1 - 4\alpha)^2 \sigma^2 + \alpha^2 4\sigma^2 = (1 - 8\alpha + 16\alpha^2 + 4\alpha^2) \sigma^2
\end{aligned}$$

Da $0 \leq \alpha$ und $0 \leq 1 - 4\alpha \Rightarrow 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{4}$:

$$(1 - 8\alpha + 16\alpha^2 + 4\alpha^2) \sigma^2 = 1 + \underbrace{20\alpha}_{\geq 0} \underbrace{(\alpha - \frac{2}{5})}_{< 0} \underbrace{\leq 1}$$

$\Rightarrow Var(u_{ij}) \leq Var(f_{ij})$ für $\alpha \in [0, \frac{1}{4}]$

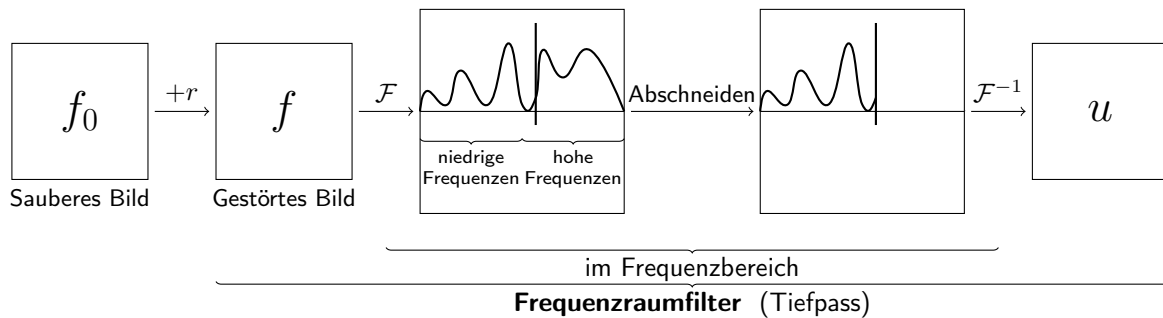
Dabei gilt: $Var(u_{ij}) \xrightarrow{\alpha} dmin \iff 1 - 8\alpha + 20\alpha^2 \xrightarrow{\alpha} min \iff -8 + 40\alpha = 0 \iff \alpha = \frac{1}{5}$

$$\Rightarrow \text{bester Filter : } \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \frac{1}{5} & \\ \hline \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \hline & \frac{1}{5} & \\ \hline \end{array}$$

5.3 Frequenzraum-filter

Ansatz: Rauschen = hochfrequente Anteile des Signals.

Diese können mittels der **Fouriertransformation** \mathcal{F} gezielt entfernt werden.



Ein wichtiges Instrument ist hierbei die Fouriertransformation:

$$\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$$

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle z, x \rangle} dx \quad (5.7)$$

Wobei $z \in \mathbb{R}^d, f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Falls auch $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist, dann lässt sich f wie folgt mittels der inversen Fouriertransformation aus \hat{f} rekonstruieren:

$$\mathcal{F}^{-1} : \hat{f} \mapsto f$$

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{i\langle z, x \rangle} dx \quad (5.8)$$

Wobei $x \in \mathbb{R}^d$.

Man hat also $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f$, d.h.

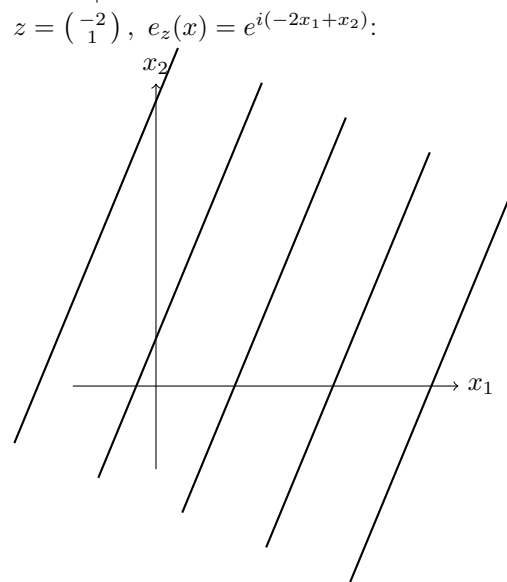
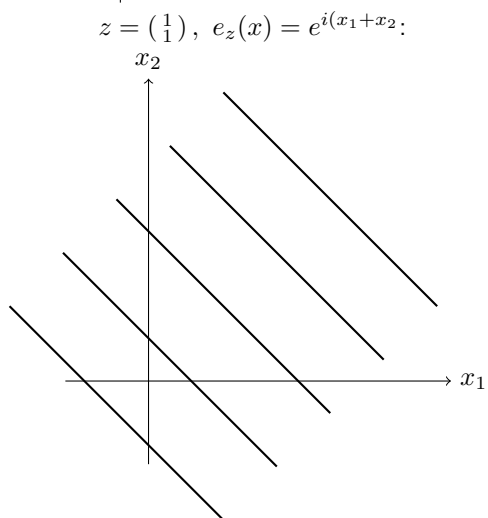
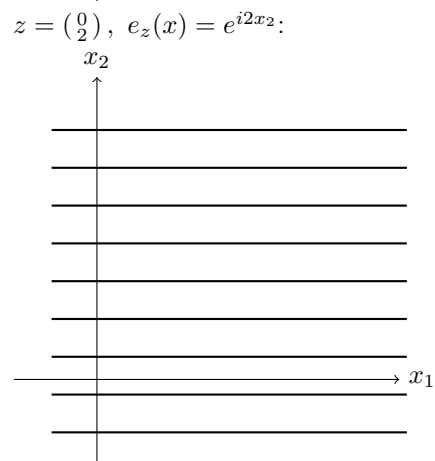
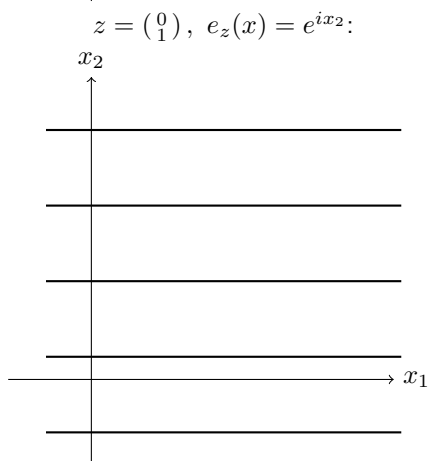
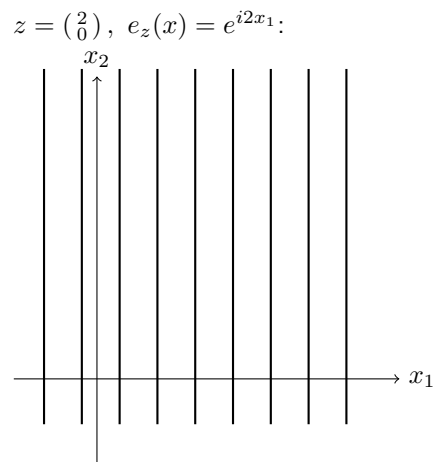
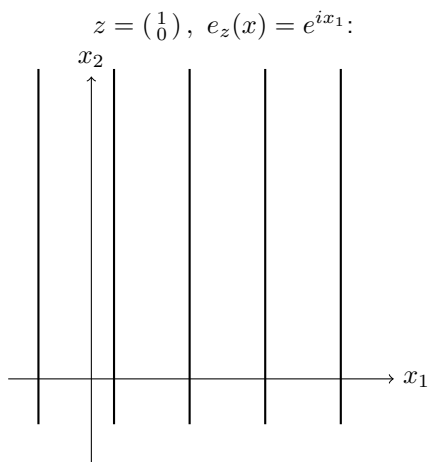
$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-i\langle z, y \rangle} dy \right) e^{i\langle z, x \rangle} dz$$

Sei nun $e_z(x) := e^{i\langle z, x \rangle}$, $x \in \mathbb{R}^d$ mit Parameter $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_d \end{pmatrix}$.

Also $e_z(x) = e^{i\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rangle} = e^{i(z_1 x_1 + z_2 x_2)}$

Beispiele in $2D$:

(Hier stellen die Linien, Punkte mit konstantem wert dar)



$f \in L^2(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\mathbb{R}^d} |f|^2 dx < \infty\}$ ist

- ein normierter Raum mit $+$, $\alpha \cdot$ und $\|\cdot\|_2 := \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx}$

- ein Skalarproduktraum mit $\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^d} f \bar{g} dx$, wobei $\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle$
- ein vollständiger Raum, also **Banachraum**

Ein vollständiger normierter Banachraum mit Skalarprodukt heißt **Hilbertraum**.

\mathcal{F} kann auch als Abbildung auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ betrachtet werden. Dann gilt:

$$\hat{f} = \mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

und

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2 \quad (5.9)$$

und sogar

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_2 = \langle f, g \rangle_2 \quad (5.10)$$

für alle $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Weitere Eigenschaften der Fouriertransformation:

- i) $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \hat{f}$ stetig und $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \hat{f}(z) = 0$
- ii) $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow C(\mathbb{R}^d)$ ist eine lineare Abbildung
- iii) $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow C(\mathbb{R}^d)$ ist eine beschränkte/stetige Abbildung
- iv) Verschiebung $\xrightarrow{\mathcal{F}}$ Modulation, d.h.

$$g(x) = f(x + a) \Rightarrow \hat{g}(z) = e^{i\langle a, z \rangle} \hat{f}(z)$$

- v) Modulation $\xrightarrow{\mathcal{F}}$ Verschiebung, d.h.

$$g(x) = e^{i\langle x, a \rangle} f(x) \Rightarrow \hat{g}(z) = \hat{f}(z - a)$$

- vi) Skalierung $\xrightarrow{\mathcal{F}}$ inverse Skalierung, d.h.

$$g(x) = f(cx) \Rightarrow \hat{g}(z) = \frac{1}{|c|} \hat{f}\left(\frac{z}{|c|}\right)$$

- vii) Konjugation: $g(x) = \overline{f(x)} \Rightarrow \hat{g}(z) = \overline{\hat{f}(-z)}$
Folglich: f reelwertig $\Rightarrow \hat{f}(z) = \overline{\hat{f}(-z)}$

viii)

$$\text{Grundmode: } \hat{f}(0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$$

$$\text{Analog: } f(0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x) dx$$

- ix) Differentiation $\xrightarrow{\mathcal{F}}$ Multiplikation mit Potenzen von z , d.h.

$$g(x) = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} f(x) \Rightarrow \hat{g}(z) = i^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d} z_1^{\alpha_1} \dots z_d^{\alpha_d} \hat{f}(z)$$

x) Umkehrung des letzten Punktes:

$$g(x) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d} f(x) \Rightarrow \hat{g}(z) = i^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_d} \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \hat{f}(z)$$

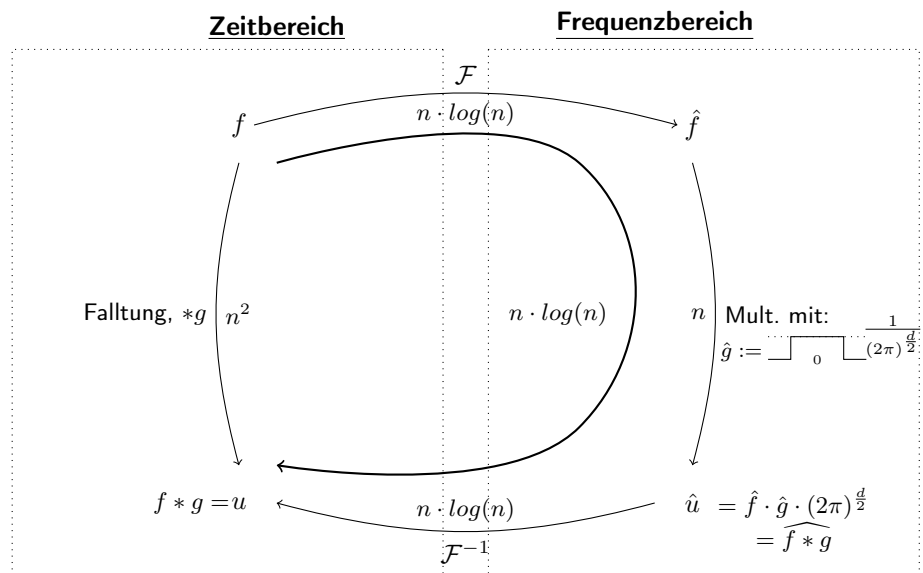
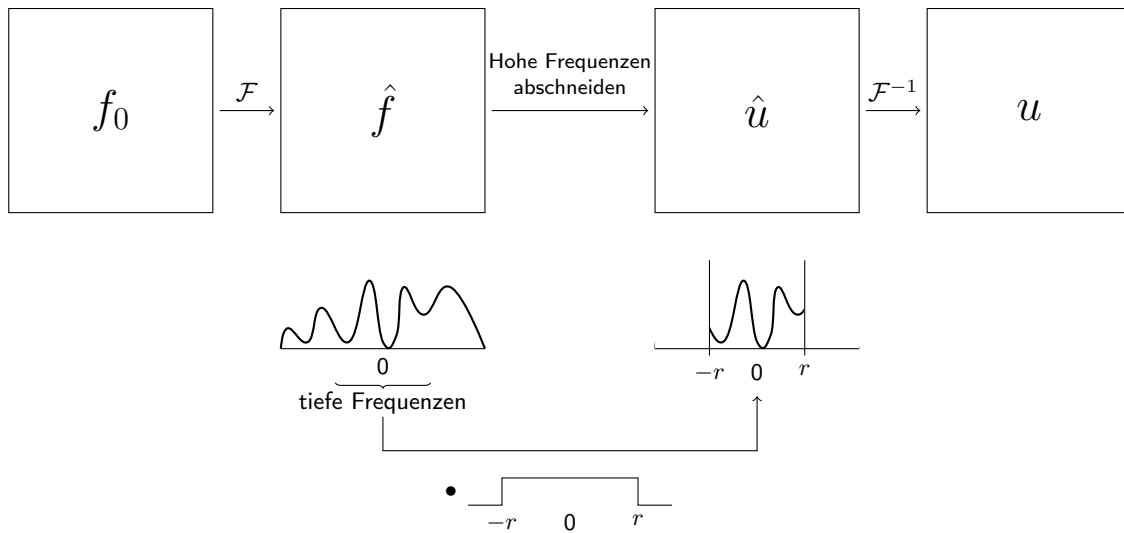
xi)

$$\text{Faltungssatz: } \mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g), \quad \widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \hat{f} \cdot \hat{g}$$

$$\text{Analog: } \mathcal{F}(f \cdot g) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g), \quad \widehat{f \cdot g} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \hat{f} * \hat{g}$$

d.h.: Faltung $\xrightarrow{\mathcal{F}}$ Multiplikation und umgekehrt

Zur Erinnerung:



Wie sieht g aus?

$$g = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \chi_{[-r,r]} \right)$$

$$\left(\chi_M(z) = \begin{cases} 0, & z \notin M \\ 1, & z \in M \end{cases} \right)$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} (\mathcal{F}^{-1} \chi_{[-r,r]^d})(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{[-r,r]^d}(z) e^{i\langle z, x \rangle} dz \\ (d=1) \rightarrow &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-r,r]}(z) e^{izx} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_r^{-r} e^{izx} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{izx}}{ix} \Big|_{z=-r}^r \\ &= \frac{1}{2\pi ix} (e^{irx} - e^{-irx}) \\ &= \frac{1}{\pi x} \sin(rx) \\ &= \text{sinc} \left(\frac{rx}{\pi} \right) \cdot \frac{r}{\pi} \end{aligned}$$

$$\text{Wobei: } \text{sinc}(\varphi) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi\varphi)}{\pi\varphi} & , \varphi \neq 0 \\ 1 & , \varphi = 0 \end{cases}$$

g hat auch Masse 1, denn mit den Eigenschaften der Fouriertransformation folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} = \hat{g}(0) &= (\mathcal{F}g)(0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \underbrace{e^{\underbrace{-\langle x, 0 \rangle}_0}}_1 dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx \\ &\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx = 1 \end{aligned}$$

Für $d = 2$ gilt:

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{(2\pi)^1} (\mathcal{F}^{-1} \chi_{[-r,r]^2})(x) \\
&= \dots \text{ (Analog zu oben)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-r,r]^2} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) e^{i(z_1 x_1 + z_2 x_2)} dz_1 dz_2 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-r}^r \left(\int_{-r}^r e^{iz_1 x_1} e^{iz_2 x_2} dz_1 \right) dz_2 \\
&= \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r e^{iz_1 x_1} dz_1 \right)}_{\frac{1}{\pi x_1} \sin(\pi x_1)} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r e^{iz_2 x_2} dz_2 \right)}_{\frac{1}{\pi x_2} \sin(\pi x_2)}
\end{aligned}$$

Es ist zu bemerken, dass g eine Art Tensor Struktur besitzt, was in etwa bedeutet das sich die Funktion in beliebigen Dimensionen als Produkt der Funktion in einer Dimensionen darstellen lässt.

Gauß-Kern :

$$\begin{aligned}
G(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2}} \Rightarrow G\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{x_1^2 - x_2^2 + \dots + x_d^2}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x_1^2}{2}} \right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x_d^2}{2}} \right) = G(x_1) \cdot \dots \cdot G(x_d)
\end{aligned}$$

5.4 Filterbreite und Glättung

klar ist: $\frac{1}{25}$

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

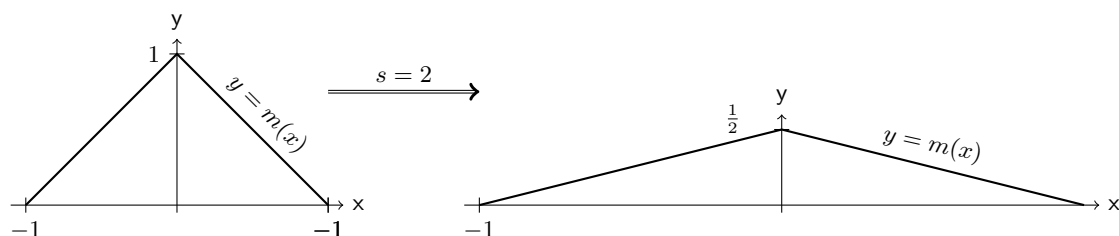
'glättet mehr als': $\frac{1}{9}$

1	1	1
1	1	1
1	1	1

Im Kontinuierlichen: Sei $m \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und $s > 0$. Setze

$$m_s(x) := \frac{1}{s^d} m\left(\frac{x}{s}\right), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

Bsp (in $d = 1$):

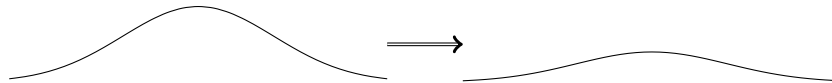


Bsp: Gauß-Kern $G(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$

Skalierung mit Faktor $s > 0$

$$\Rightarrow G_s(x) = \frac{1}{s^d} G\left(\frac{x}{s}\right) = \frac{1}{s^d} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2s^2}} = \frac{1}{(2\pi s^2)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2s^2}}$$

Skalierung $s \hat{=} \text{Standardabweichung } \sigma$:

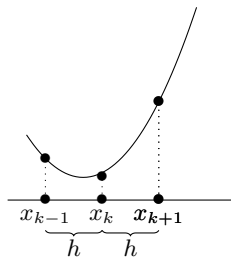


5.5 Differenzenfilter

Bisher: Glättung $\hat{=}$ Mittelwert bilden $\hat{=}$ Summe/Integrale

Jetzt: Schärfen $\hat{=}$ Differenzen/Kontraste hervorheben $\hat{=}$ Differenzen/Ableitungen

Diskretisierung von Ableitungen durch Differenzenquotienten



(hier bedeutet $f(k) = f(x_k)$)

Vorwärts: $u(h) = \frac{f(k+1) - f(k)}{h}$

Rückwärts: $u(h) = \frac{f(k) - f(k-1)}{h}$

Zentral: $u(h) = \frac{f(k+1) - f(k-1)}{2h}$

$$u = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \otimes f$$

$$u = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \otimes f$$

$$u = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \otimes f$$

2. Ableitung:

$$\begin{aligned} u(h) &\approx \frac{f'(k+1) - f'(k)}{h} \text{ (vorwärts)} \\ &\approx \frac{\frac{f(k+1) - f(k)}{h} - \frac{f(k) - f(k-1)}{h}}{h} \text{ (rückwärts)} \\ &= \frac{f(k+1) - 2f(k) + f(k-1))}{h^2} \end{aligned}$$

Also folgt $u := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \otimes f$ und $\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} * \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Denn:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} * \left(\frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} * f \right) \\
&= \left(\frac{1}{h} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} * \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) * f \\
&= \left(\frac{1}{h} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boxtimes \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) * f \\
&= \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} * f \\
&= \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \boxtimes f
\end{aligned}$$

In 2D: $\frac{\partial}{\partial x} \hat{=} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\frac{\partial}{\partial y} \hat{=} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{=} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{=} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Diskreter Laplace Operator :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{=} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5.6 Glättungsfilter und partielle Differentialgleichungen

Wir haben gesehen: $m = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ist unter allen 5-Punkt Filtern der am besten glättende.

Idee: Rauschen weiter verringern indem man $m \boxtimes$ wiederholt anwendet \Rightarrow Folge von Bildern:

$$\begin{array}{|c|} \hline f \\ \hline \text{:= } u^{(0)} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{m \boxtimes} \begin{array}{|c|} \hline u^{(1)} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{m \boxtimes} \begin{array}{|c|} \hline u^{(2)} \\ \hline \end{array} \dots$$

$$\Rightarrow u^{(n+1)} - u^{(n)} = (\text{Unterschied zwischen 'Zeit' Punkt } n \text{ und } n+1)$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{m \boxtimes u^{(n)}}_{u^{n+1}} - \underbrace{\delta \boxtimes u^{(n)}}_{u^{(n)}} \text{ mit } \delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= (m - \delta) \boxtimes u^{(n)} \\
&= \left(\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \boxtimes u^{(n)} \\
&= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} u^{(n)}
\end{aligned}$$

Somit gilt insgesamt:

$$\underbrace{u^{(n+1)} - u^{(n)}}_{\cong \frac{\partial u}{\partial t}} = \frac{1}{5} \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -4 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}}_{\cong \Delta u} \quad (5.11)$$

Kontinuierlich: Funktion u

$$u(x, t) \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \text{ Zeit}$$

(5.11) ist eine Diskretisierung (1 Zeitschritt im Eulerverfahren) der partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad (5.12)$$

Bekannt als Wärmegleichung oder Diffusionsgleichung

Index

öffnen, 14

Absoluter Fehler, 15

Banachraum, 24

Bild, 4

Bilinear interpolation, 5

bimodal, 9

Dichte, 7

Diffusionsgleichung, 30

dilation, 12

Dirac-Impuls, 20

Diskreter Laplace Operator, 29

Domain, 6

Drehmatrix, 5

erosion, 13

Faltung, 18

Farbraum, 4

Fixpunktgleichung, 10

Fixpunktiteration, 10

Fouriertransformation, 21

Frequenzbereich, 25

Frequenzraumfilter, 21

Gauß-Kern, 27

gleitendes Mittel, 19

Hilbertraum, 24

Histogramm, 6

Histogramm - equalization, 8

Isodata Algorithmus, 10

Korrelation, 17

Maß, 7

Maske, 17

Masse, 9

Median, 10

Mittelwert, 10

Morphographische Operationen, 11

Nearest neighbour interpolation, 5

Otsu's Verfahren, 9

Rauschen, 15

Relativer Fehler, 15

schließen, 13

Schwellenwert, 9

Shape based Methods, 9

Signal to noise ratio, 16

Strukturelement, 12

Varianz, 10

Wärmegleichung, 30

Zeitbereich, 25