

# Mathematische Bildverarbeitung

## Vorlesungsskript



Institut für Mathematik  
Vorlesung von Prof. Dr. Marko Lindner  
In  $\LaTeX$  gesetzt durch Jonas Sattler

Wintersemester 2018/19

Fehlermeldungen an [fabian.gabel@tuhh.de](mailto:fabian.gabel@tuhh.de)

---

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Überblick</b>	<b>2</b>
1.1 Techniken der Bildverarbeitung . . . . .	2
1.2 Unser Fokus . . . . .	2
1.3 Verwandte Vorlesungen . . . . .	2
1.4 Literatur . . . . .	2
<b>2 Was ist ein Bild?</b>	<b>3</b>
2.1 Definition . . . . .	3
2.2 Umwandlung . . . . .	3
2.3 Beispiel Rotation . . . . .	4
<b>3 Histogramme und deren Anwendungen</b>	<b>5</b>
3.1 Histogramme . . . . .	5
3.2 Anwendung: Kontrastverbesserung . . . . .	6
3.3 Anwendung: SW-Konvertierung . . . . .	7
<b>4 Einfache Morphographische Operationen</b>	<b>10</b>
4.1 Verknüpfungen von A und B . . . . .	10
<b>5 Entrauschen: Filter &amp; Co.</b>	<b>13</b>
5.1 Rauschen . . . . .	13
5.2 Glättungsfilter . . . . .	14

5.3	Frequenzraum-filter . . . . .	19
5.4	Filterbreite und Glättung . . . . .	25
5.5	Differenzenfilter . . . . .	25
5.6	Glättungsfilter und partielle Differentialgleichungen . . . . .	26
5.7	Isotrope und anisotrope Diffusion . . . . .	28
5.8	Bilaterale Filter . . . . .	29
5.9	Entrauschen mittels Variationsrechnung . . . . .	30
<b>6</b>	<b>Kantenerkennung</b>	<b>32</b>
6.1	Gradientenfilter . . . . .	32
6.2	Die zweite Ableitung . . . . .	33
<b>7</b>	<b>Schärfen und Entfalten</b>	<b>35</b>
7.1	<u>Laplace-Schärfen</u> . . . . .	35
7.2	Kantenverstärkende Diffusion . . . . .	35
7.3	Entfaltung . . . . .	36
<b>8</b>	<b>Restauration (Inpainting)</b>	<b>40</b>
8.1	Frequenzraum-Ansatz . . . . .	40
8.2	PDE-Transport-Diffusions-Ansatz . . . . .	41
8.3	Variationsansatz . . . . .	43
<b>9</b>	<b>Segmentierung</b>	<b>43</b>
9.1	Beleuchtungsausgleich . . . . .	44
9.2	Thresholding als Variationsproblem . . . . .	46
9.3	Segmentierung nach Mumford und Shah . . . . .	48
<b>10</b>	<b>Registrierung</b>	<b>49</b>
10.1	Merkmalsbasierte Verfahren . . . . .	50
10.2	Globale Verfahren . . . . .	51
<b>11</b>	<b>Mathematischer Nachschlag</b>	<b>52</b>
11.1	Verallgemeinerte Funktionen und Ableitungen . . . . .	53
11.2	Verallgemeinerter Gradient und Totalvariation . . . . .	56

11.3 Existenz und Eindeutigkeit der Variationslösung . . . . .	57
--	----

# 1 Überblick

## 1.1 Techniken der Bildverarbeitung

- Kontrastverbesserung
- Entrauschen
- Kantendetektion
- Schärfen
- Inpainting
- Segmentierung (Einzelne Objekte detektieren)
- Registrierung (Bilder des selben Objektes in Einklang bringen)

## 1.2 Unser Fokus

- Mathematische Beschreibung

## 1.3 Verwandte Vorlesungen

- 3D Computervision
- Digitale Bildanalyse
- Mustererkennung und Datenkompression
- Medical imaging

## 1.4 Literatur

- Bredies, Lorenz : Mathematische Bildverarbeitung
- Aubert, Kornprobst : Mathematical Problems in Image Processing
- Modersitzki : Numerical Methods for Image Registration
- Alt : Lineare Funktionalanalysis

## 2 Was ist ein Bild?

### 2.1 Definition

#### Digitale/diskrete Sicht

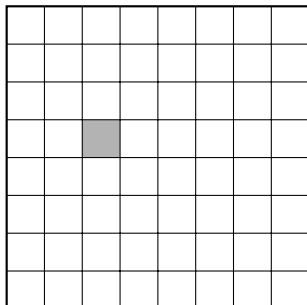


Abbildung 1: Diskretes Bild  
Darstellung als Matrix.

**Werkzeuge:** Lineare Algebra

**Vorteile:** Endlicher Speicher

**Nachteile:** Probleme bei zoomen und drehen

#### Kontinuierlich/analoge Sicht

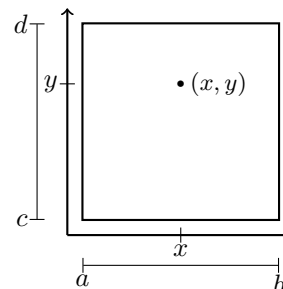


Abbildung 2: Kontinuierliches Bild  
Darstellung als Funktion in zwei Veränderlichen

**Werkzeuge:** Analysis

**Vorteile:** Mehr Freiheit (z.b. Kante=Linie entlang einer Unstetigkeit)

**Nachteile:** Unendlicher Speicher

**Definition.** Ein **Bild** ist eine Funktion  $u : \Omega \rightarrow F$ , wobei  $\Omega \subset \mathbb{Z}^d$  (im diskreten Fall) oder  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  (im kontinuierlichen Fall).

$d = 2$ : Typisches 2D Bild

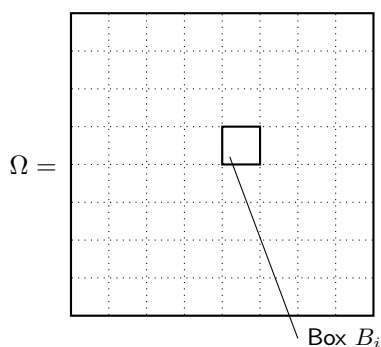
$d = 3$ : 3D-Bild bzw. "Körper" oder Video: 2D Ort + Zeit

$F$  ist der **Farbraum**, Beispiele:

- $F = [0, 1]$  oder  $F = \{0, 1, \dots, 255\}$ , Graustufen
- $F = \{0, 1\}$  schwarz/weiß
- $F = [0, 1]^3$  oder  $F = \{0, 1, \dots, 255\}^3$  Farbbilder

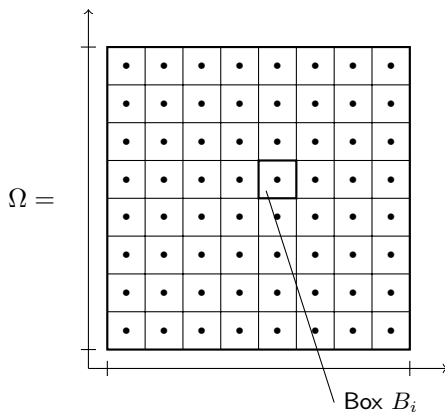
### 2.2 Umwandlung

Kontinuierlich  $\rightarrow$  Diskret:

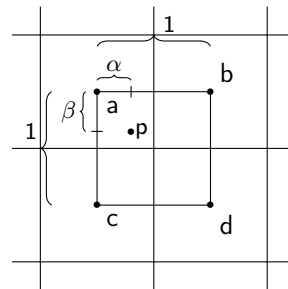


- $\Omega$  in Gitter zerlegen.
- Jede Box durch nur einen Farbwert approximieren.
- Etwa durch den Funktionswert im Mittelpunkt der Box.
- oder durch den Mittelwert in der Box:

$$\frac{1}{|B_i|} \cdot \int_{B_i} u(x) \, dx.$$

Diskret  $\rightarrow$  Kontinuierlich:

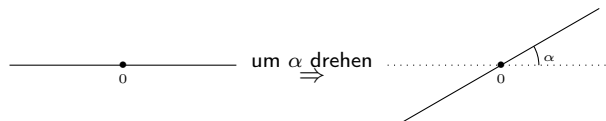
- Idee: Jeder Punkt der Box  $B_i$  erhält den Funktionswert von  $B_i$  als Farbwert  
 $\Rightarrow$  **Nearest neighbour Interpolation**.
- Idee: Mittelpunkt von Box  $B_i$  erhält den Wert von Pixel  $B_i$  sonst wird interpoliert.  
 Grauwert  $g :=$  Gewichtetes Mittel aus Grauwerten  $a, b, c, d$ .



$$g = (1 - \alpha)(1 - \beta)a + \alpha(1 - \beta)b + (1 - \alpha)\beta c + \alpha\beta d$$

Dieses wird **Bilineare Interpolation** genannt.

## 2.3 Beispiel Rotation



### 1. Fall, kontinuierliches Bild

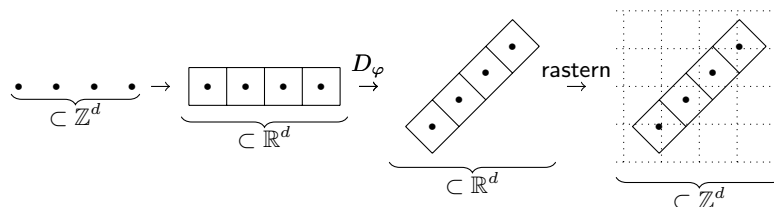
Sei  $u$  das alte Bild und  $v$  das neue Bild, dann ist die Drehung gegeben durch eine **Drehmatrix** :

$$D_\varphi \in \mathbb{R}^{d \times d}, D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

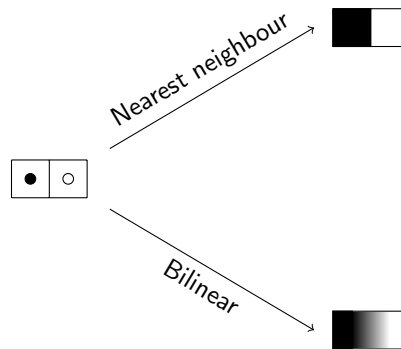
Damit folgt, dass  $D(u) = D_\varphi \Omega$  und  $v(x) = u(\underbrace{D_\varphi^{-1}x}_{\in \Omega}) = u(D_{-\varphi}x)$ . ( $D(u)$  ist die **Domain** von  $u$ )

### 2. Fall, diskretes Bild

Dieses ist problematisch, denn i.A.  $x \in \mathbb{Z}^d$ , aber  $D_\varphi x \notin \mathbb{Z}^d$ .



Weiterhin ist  $v(x) = u(D_\varphi^{-1}x)$ , wobei der konkrete Wert durch Interpolation bestimmt wird.



### 3 Histogramme und deren Anwendungen

#### 3.1 Histogramme

Sei  $u : \Omega \rightarrow F$  ein diskretes Bild, dann heißt die Abbildung

$$H_u : F \rightarrow \mathbb{N}_0$$

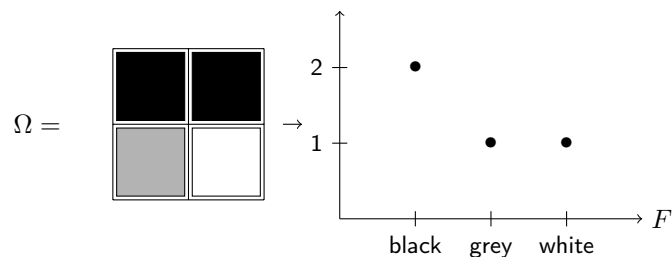
$$F \ni k \mapsto \#\{x \in \Omega \mid u(x) = k\}$$

**Histogramm** des Bildes  $u$ . Dieses gibt an, wie oft die Farbe  $k$  im Bild vorhanden ist. Damit gilt auch:

$$\sum_{k \in F} H_u(k) = |\Omega|, \text{ also die Anzahl der Pixel.}$$

**Bemerkung.** Manchmal betrachtet man die relative Häufigkeit  $\tilde{H}_u(k) = \frac{H_u(k)}{|\Omega|}$ .

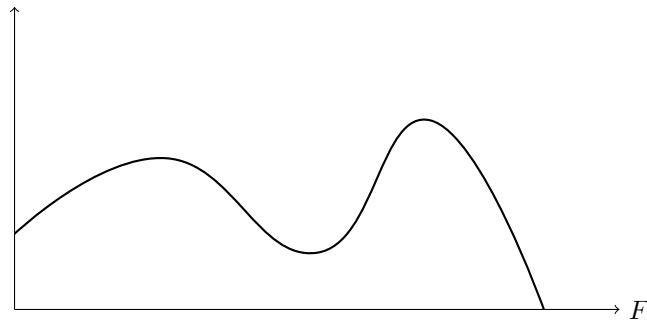
**Beispiel:**



Für kontinuierliche Bilder wird das allgemeinere Konzept von einem **Maß** benötigt:

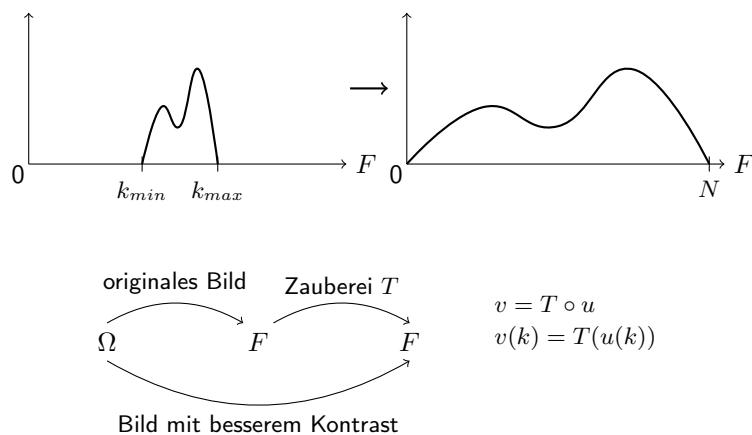
$$A \subset F, \mathcal{H}_u(A) := |u^{-1}(A)| \begin{cases} \text{Diskretes Bild:} \\ \text{Anzahl der Elemente in } u^{-1}(A) \\ \text{Kontinuierliches Bild:} \\ \text{Volumen von } u^{-1}(A) \end{cases}$$

Zusammenhang zum vorherigen:  $\mathcal{H}_u(A) = \sum_{k \in A} H_u(k)$ . Man sagt dann, dass  $H_u$  eine **Dichte** zum Maß  $\mathcal{H}_u$  sei. Diese kann auch im kontinuierlichen Sinne existieren:



### 3.2 Anwendung: Kontrastverbesserung

**Problem & Idee:** Falls das Bild nur einen kleinen Teil von  $F$  nutzt, kann der Kontrast verbessert werden, indem man das Bild auf ganz  $F$  verteilt.



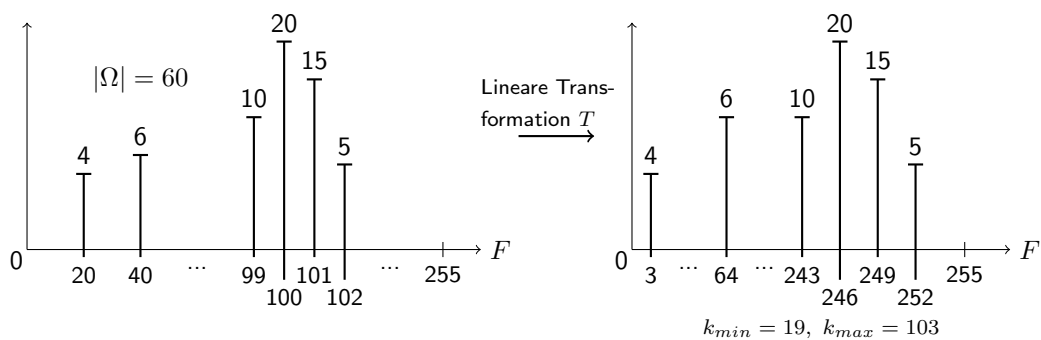
#### 1. Idee: Kontrastdehnung

$T$  „lineare“ Abbildung, so dass  $T(k_{min}) = 0$  und  $T(k_{max}) = N$ :

$$T(k) = \frac{k - k_{min}}{k_{max} - k_{min}} N, \text{ Kontinuierlicher Farbraum}$$

$$T(k) = \left\lfloor \frac{k - k_{min}}{k_{max} - k_{min}} N \right\rfloor, \text{ Diskreter Farbraum}$$

Beispiel:

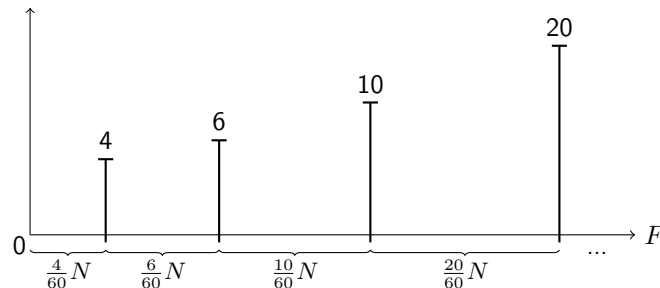




Dieses kann jedoch schiefgehen, falls das Histogramm bereits voll ausgedehnt ist, jedoch nur wenige Punkte an den Rändern liegen.

## 2. Idee: Nicht-lineare Kontrastdehnung

Dieses mal setzen wir  $T(k) = \left[ \frac{N}{|\Omega|} \sum_{l=0}^k H_u(l) \right]$  für einen diskreten Farbraum und erhalten:



$T$  lässt sich auch alternativ ausdrücken durch

$$T(k) = [\mathcal{H}_u(\{0, \dots, k\})].$$

Und somit folgt, dass für den kontinuierlichen Fall  $T$  durch

$$T(k) = \frac{N}{|\Omega|} \mathcal{H}_u((0, k))$$

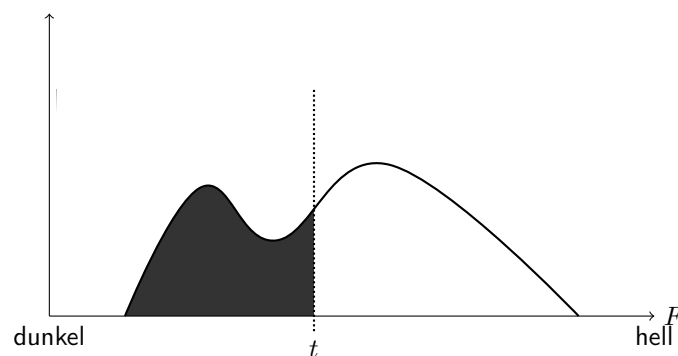
definiert werden kann. Allgemein heißt der Prozess Histogramm - equalization.

## 3.3 Anwendung: SW-Konvertierung

Aufgabe: Graustufenbild  $\rightarrow$  SW-Bild.

Nützlich etwa bei Objekterkennung/Segmentierung.

Idee: Das Histogramm an einem gewissen Schwellenwert  $t$  spalten:



Also setze nun für  $t \in F$ :

$$\text{schwarz} = \{k \in F | k \leq t\}$$

$$\text{weiß} = \{k \in F | k > t\}$$

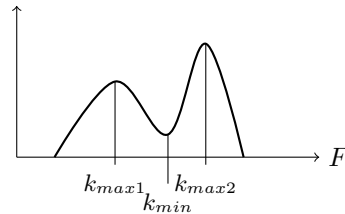
Graustufenbild  $u \rightarrow$  schwarz/weiß Bild  $\tilde{u}$ :

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} 0, & u(x) \in \text{schwarz} \\ 1, & u(x) \in \text{weiß} \end{cases} \Rightarrow \tilde{F} = \{0, 1\}.$$

Methoden um diesen Schwellenwert zu wählen:

1. **Shape based Methods** :

Falls das Histogramm von  $u$  **bimodal** ist, also die Form:



hat, dann wähle:

$$t := k_{\min}$$

oder  $t := \frac{k_{\max 1} + k_{\max 2}}{2}$

2. **Otsu's Verfahren** (1979):

Vorher einige Definitionen.

Die **Masse** :

$$m_{\text{schwarz}} := \sum_{k \in \text{schwarz}} H_u(k)$$

$$m_{\text{weiß}} := \sum_{k \in \text{weiß}} H_u(k)$$

Der **Mittelwert** :

$$\mu_{\text{schwarz}} := \frac{\sum_{k \in \text{schwarz}} k \cdot H_u(k)}{\sum_{k \in \text{schwarz}} H_u(k)} = \frac{\sum_{k \in \text{schwarz}} k \cdot H_u(k)}{m_{\text{schwarz}}}$$

$$\mu_{\text{weiß}} := \frac{\sum_{k \in \text{weiß}} k \cdot H_u(k)}{\sum_{k \in \text{weiß}} H_u(k)} = \frac{\sum_{k \in \text{weiß}} k \cdot H_u(k)}{m_{\text{weiß}}}$$

Die **Varianz** :

$$\sigma_{\text{schwarz}}^2 = \sum_{k \in \text{schwarz}} (k - \mu_{\text{schwarz}})^2 \cdot H_u(k)$$

$$\sigma_{\text{weiß}}^2 = \sum_{k \in \text{weiß}} (k - \mu_{\text{weiß}})^2 \cdot H_u(k)$$

Nun lautet Otsu's Methode:  $\sigma_{\text{schwarz}}^2 + \sigma_{\text{weiß}}^2 \xrightarrow{t} \min$ .

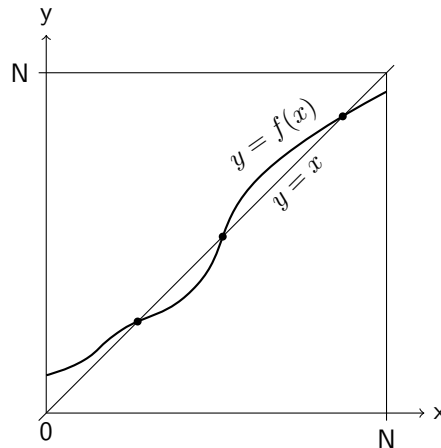
3. **Median** :

Wähle  $t$  so, dass  $m_{\text{schwarz}} = m_{\text{weiß}}$ .

#### 4. Isodata Algorithmus (1970s):

Wähle  $t$  so, dass  $t = \frac{\mu_{\text{schwarz}} + \mu_{\text{weiß}}}{2} =: f(t)$ .

Diese Gleichung ist bereits eine **Fixpunktgleichung** und eine Lösung kann, etwa mit einer **Fixpunktiteration** approximiert werden, das heißt  $t_{n+1} := f(t_n)$ .



#### Matlab code :

---

```

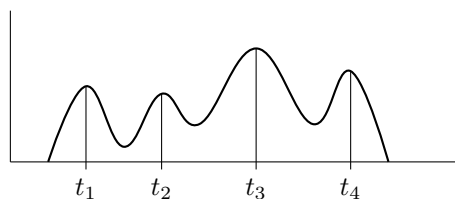
1 u=imread('liftingbody.png');
2 t=greythresh(u);%uses Otsu's method
3 v=im2bn(u,t);
4 imshow(v);

```

---

Einige dieser Verfahren können auch erweitert werden, so dass ein Graustufenbild nicht nur in zwei, sondern in  $M$  Farben zerlegt werden kann. Im allgemeinen werden dann  $M - 1$  thresholds benötigt.

#### 1. Shape based :



#### 2. Otsu's Verfahren :

Farbklassen:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \{k : k \leq t_1\} \\
 F_2 &= \{k : t_1 < k \leq t_2\} \\
 &\vdots \\
 F_M &= \{k : t_{M-1} < k\}
 \end{aligned}$$

Und wie zuvor:  $\sigma_1^2 + \dots + \sigma_M^2 \rightarrow \min$

3. **Median :**

Zerteile  $F$  in  $M$  Quantile gleicher Masse.

4. **Isodata :**

Hierzu existiert keine bekannte Verallgemeinerung auf  $M$  Farbklassen.

**Matlab code :**

---

```

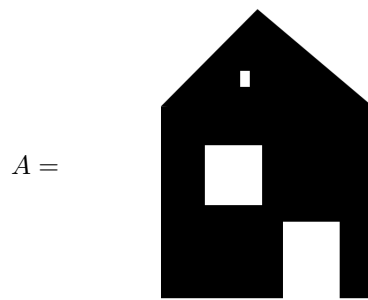
1 u=imread('Circles Bright Dark.png');
2 t=multithresh(u,M-1);
3 v=imquantize(u,t);
4 w=label2rgb(u,t);
5 imshow(w);

```

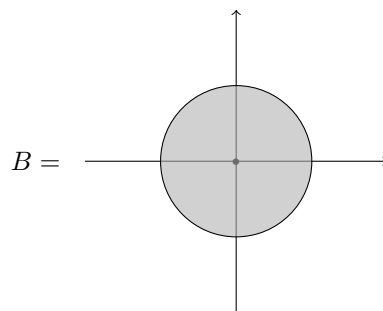
---

## 4 Einfache Morphographische Operationen

S/W Bild:



**Strukturelement :**



### 4.1 Verknüpfungen von A und B

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

Diese wird **Dilation** genannt. Anschaulich wird an jeden schwarzen Punkt des Bildes  $A$  das Struktur Element  $B$  gelegt.

$$A + B =$$

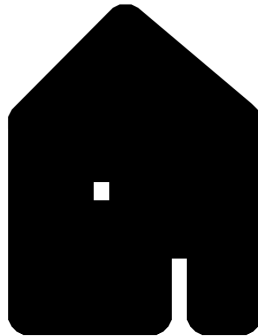


Bild erzeugt in Matlab durch:

---

```

1 I=imread('Bild1.png');
2 se=strel('disk',40,8);
3 I2=imcomplement(imdilate(imcomplement(I),se));%Es wird das Komplement des Bildes gebildet, damit
    das Strukturelement auf den schwarzen Bereich angewendet wird
4 imshow(I2);

```

---

$$A - B := \{a \in A : a + B \subset A\}$$

Diese wird **Erosion** genannt. Anschaulich werden die schwarzen Bereiche des Bildes gesucht, in die das Strukturelement hinein passt.

$$A - B =$$

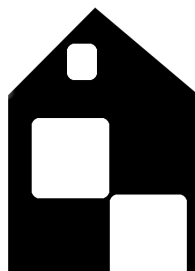


Bild erzeugt in Matlab durch:

---

```

1 I=imread('Bild1.png');
2 se=strel('disk',20,8);
3 I2=imcomplement(imerode(imcomplement(I),se));
4 imshow(I2);

```

---

Es ist schnell zu erkennen, dass  $A \neq (A + B) - B$  gilt, deshalb wird eine neue Operation eingeführt:

$$A \bullet B := (A + B) - B$$

Dieses wird **Schließen** genannt und wird etwa genutzt um Löcher, z.b. Rauschen, in einem Bild zu entfernen. Im Beispiel Bild ist zu sehen, dass das obere Fenster nicht mehr vorhanden ist.

$A \bullet B =$

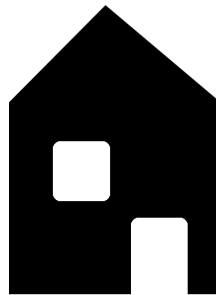


Bild erzeugt in Matlab durch:

---

```

1 I=imread('Bild1.png');
2 se=strel('disk',20,8);
3 I2=imcomplement(imdilate(imcomplement(I),se));
4 I3=imcomplement(imerode(imcomplement(I2),se));
5 imshow(I3);

```

---

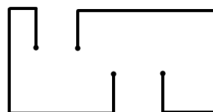
Es existiert auch die Umgekehrte Operation:

$$A \circ B := (A - B) + B$$

Diese wird **Öffnen** genannt.

Diesmal mit einem neuen Beispiel:

$A =$



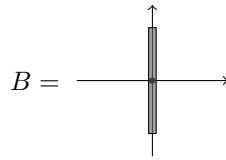


Bild erzeugt in Matlab durch:

```
1 I=imread('Bild2.png');
2 se=strel('line',10,90);
3 I2=imcomplement(imerode(imcomplement(I),se));
4 I3=imcomplement(imerode(imcomplement(I2),se));
5 imshow(I3);
```

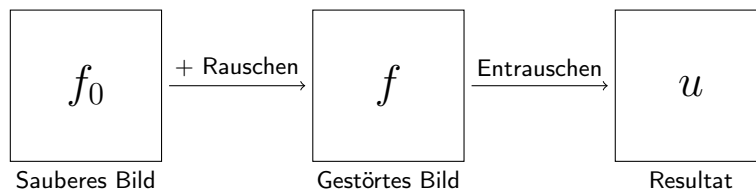
## 5 Entrauschen: Filter & Co.

### 5.1 Rauschen

**Rauschen** : Ungewollte Störungen in einem Bild

- punktweise
- zufällig
- unabhängig
- additiv (bei multiplikativem Rauschen  $\log$  anwenden)

Notation:



Wie gut das entrauschte Bild  $u$  das saubere Bild  $f_0$  beschreibt wird durch Normen gemessen.

$\|f - f_0\|$ , Rauschen

$\|u - f_0\|$ , **Absoluter Fehler**

$\frac{\|u - f_0\|}{\|f - f_0\|}$ , **Relativer Fehler** im Vergleich zum Rauschen

$\frac{\|u - f_0\|}{\|f_0\|}$ , Relativer Fehler im Vergleich zum Signal

Typischerweise ist die gewählte Norm:

$$\|f\| = \|f\|_2 = \sqrt{\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx}$$

oder im diskreten:

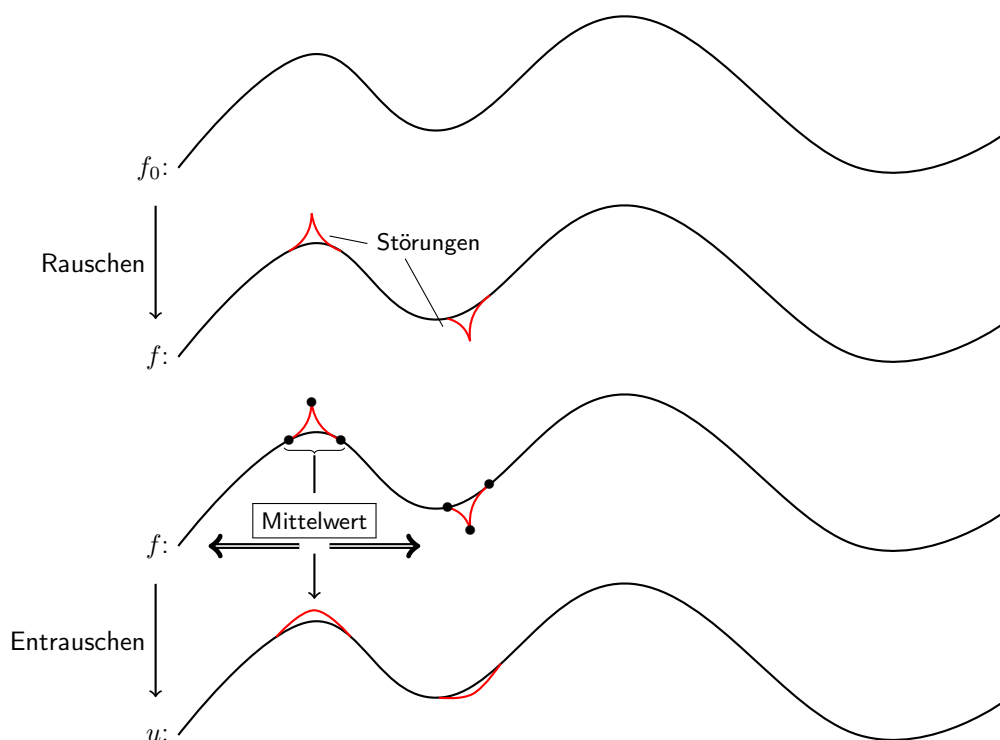
$$\|f\|_2 = \sqrt{\sum_{x \in \Omega} |f(x)|^2}$$

Eng verwandt ist die **Signal to noise ratio** (SNR):

$$\log\left(\underbrace{\frac{\|f_0\|_2}{\|u - f_0\|_2}}_{\in [1, \infty)}\right) \in [0, +\infty), \text{ wobei } 0 \text{ schlecht und } +\infty \text{ gut ist.}$$

## 5.2 Glättungsfilter

Grundidee: (zur Vereinfachung in 1D)



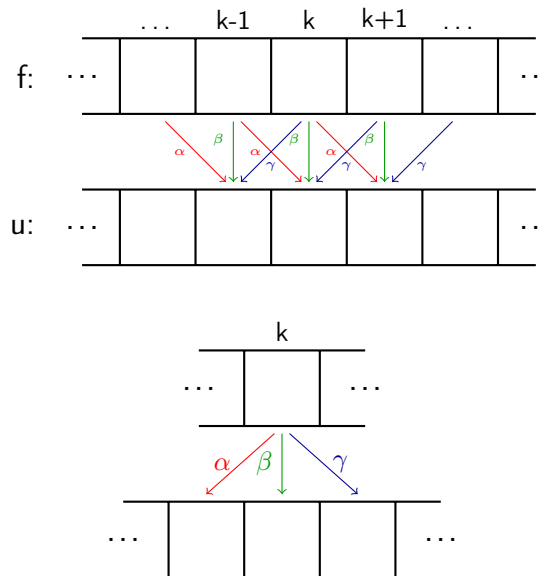


$$u(k) := \alpha \cdot f(k-1) + \beta \cdot f(k) + \gamma \cdot f(k+1) \quad (5.1)$$

wobei:

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \quad (5.2)$$

Schematisch bedeutet (5.1):



Durch (5.1) ist eine Abbildung  $f \mapsto u$  gegeben, wir schreiben kurz:

$$u = m \boxtimes f, \text{ dieses wird } \underline{\text{Korrelation}} \text{ genannt.}$$

mit:

$$(m \boxtimes f)(k) = \sum_{i \in \text{supp}(m)} m(i) f(k+i) \quad (5.3)$$

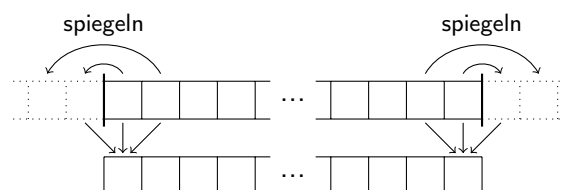
und:

$$m = \begin{array}{ccccc} & \dots & -1 & 0 & 1 & \dots \\ & \dots & \alpha & \beta & \gamma & \dots \end{array} \text{ genannt } \underline{\text{Maske}} .$$

Setzt man nun  $j := k + i$  in (5.1), so ist  $i = j - k$ , d.h.

$$(m \boxtimes f)(k) = \sum_{i \in \text{supp}(m)} m(j-k) f(j) \quad (5.4)$$

Um die Abbildung auf den Rand anzuwenden wird das Bild gespiegelt, in 1D:



in 2D:

d	b	d
q	p	q
d	b	d

Formel (5.4) erinnert an die Formel der **Faltung** :

$$(g * f)(k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} g(\underbrace{k-j}_{\text{Anders als (5.4)}}) \cdot f(j) \quad (5.5)$$

Setzt man also  $g(i) := m(-i) =: \tilde{m}(i)$ , was einer Spiegelung der Maske entspricht, dann ist

$$m \boxtimes f = g * f = \tilde{m} * f$$

Eigenschaften der Faltung:

- 1  $(f * g) * h = f * (g * h)$ , Assoziativität
- 2  $f * g = g * f$ , Kommutativität
- 3  $\tilde{f} * \tilde{g} = \widetilde{f * g}$ , Kompatibilität mit Spiegelung

Eigenschaften der Korrelation:

- 1'  $f \boxtimes (g \boxtimes h) = \tilde{f} * (\tilde{g} * h) \stackrel{1}{=} (\tilde{f} * \tilde{g}) * h \stackrel{3}{=} (\widetilde{f * g}) * h = (f * g) \boxtimes h \neq (f \boxtimes g) \boxtimes h$ , nicht assoziativ!
- 2'  $f \boxtimes g = \tilde{f} * g \stackrel{2}{=} g * \tilde{f} = \tilde{\tilde{g}} * \tilde{\tilde{f}} \stackrel{3}{=} \widetilde{(\tilde{g} * \tilde{f})} = \widetilde{g \boxtimes f} \neq g \boxtimes f$ , nicht kommutativ!
- 3'  $\tilde{f} \boxtimes \tilde{g} = \tilde{\tilde{f}} * \tilde{\tilde{g}} \stackrel{3}{=} \widetilde{(\tilde{f} * \tilde{g})} = \widetilde{f \boxtimes g}$ , Kompatibilität mit Spiegelung

$\boxtimes$  und  $*$  definiert man auf:  $\ell^1(\mathbb{Z}^d) := \{f = (f_i)_{i \in \mathbb{Z}^d} : \underbrace{\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} |f_i|}_{:= \|f\|_1} < \infty\}$

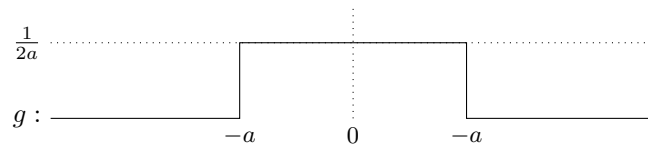
Man kann zeigen (Übung):  $f, g \in \ell^1 \Rightarrow f * g \in \ell^1$  und  $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$ . Wobei oft die Gleichheit gilt.

Alles gilt auch in der kontinuierlichen Version:

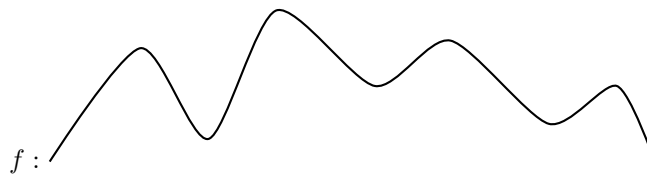
$$L^1(\mathbb{R}^d) := \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} : \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} |f| dx}_{:= \|f\|_1} < \infty\}$$

$$f, g \in L^1(\mathbb{R}^d) : (g * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)f(y)dy, \quad y, x \in \mathbb{R}^d$$

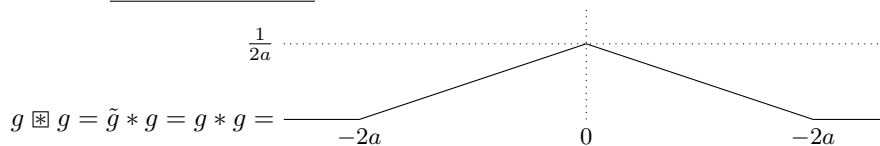
Beispiel für den kontinuierlichen Fall:



Hierbei gilt  $\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = 1$



$g \boxtimes f =$  gleitendes Mittel.



Weitere Eigenschaften der Faltung:

Für alle  $f, g \in L^1$  or  $\ell^1$

$$\left. \begin{aligned} (g_1 + g_2) * f &= (g_1 * f) + (g_2 * f) \\ (\alpha g) * f &= \alpha(g * f) \end{aligned} \right\} = \text{Linearität}$$

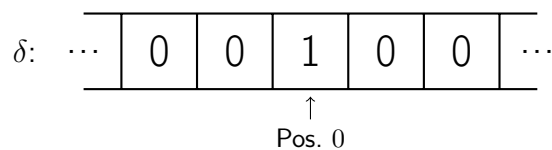
Somit ist:

$$g \mapsto f * g$$

ein linearer Operator.

Formt  $\ell^1$  bzw.  $L^1$  eine Algebra mit neutralem Element  $\delta$ ?

$\ell^1$ ?:



Ja!

$L^1$ ? Für ein solches Element muss gelten:

$$\forall f \in L^1 : d * f = f$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\delta(x-y)}_{=0 \forall x \neq y} f(y) dy = f(x)$$

Diese Funktion wird Dirac-Impuls genannt ist aber kein Element von  $L^1$ .

**Nun zu Masken in 2D:**

$$u = m \boxtimes f \text{ mit } m = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \alpha & \\ \hline \beta & \gamma & \delta \\ \hline & \epsilon & \\ \hline \end{array}$$

wobei  $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 1$

Kurzschreibweise:  $u_{ij} := u(x)$  wobei  $x = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$ , analog für  $f_{ij}$ .

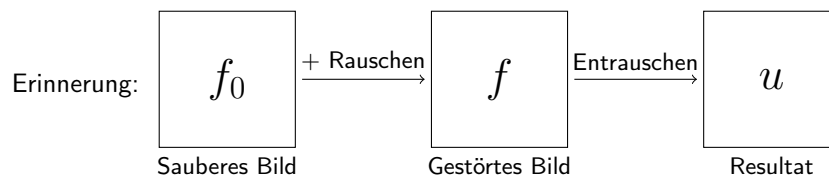
$$\Rightarrow u_{ij} = \alpha f_{i-1,j} + \beta f_{i,j-1} + \gamma f_{ij} + \delta f_{i,j+1} + \epsilon f_{i+1,j}$$

$$u = m \boxtimes f = \tilde{m} * f \text{ mit } \tilde{m} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \epsilon & \\ \hline \delta & \gamma & \beta \\ \hline & \alpha & \\ \hline \end{array}$$

**Symmetrischer Fall:**

$$\tilde{m} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \alpha & \\ \hline \alpha & \gamma & \alpha \\ \hline & \alpha & \\ \hline \end{array} \text{ mit } \gamma = 1 - 4\alpha$$

$$u_{ij} = (1 - 4\alpha)f_{ij} + \alpha(f_{i-1,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1} + f_{i+1,j}) \quad (5.6)$$



Annahme:  $f_{ij} = f_{ij} + r_{ij}$  mit  $r_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$  iid.

z.z.:  $\text{Var}(u_{ij}) \leq \text{Var}(f_{ij})$

$$\text{Var}(f_{ij}) = E(\underbrace{f_{ij} - \overbrace{E f_{ij}}^{f_{ij}^0}}_{r_{ij}})^2 = \sigma^2$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}(u_{ij}) &= E(u_{ij} - Eu_{ij})^2 = E((1-4\alpha)\underbrace{(f_{ij} - f_{ij}^0)}_{r_{ij}} + \alpha(\underbrace{(f_{i-1,j} - f_{i-1,j}^0)}_{r_{i-1,j}} + \dots + \underbrace{(f_{i+1,j} - f_{i+1,j}^0)}_{r_{i+1,j}})))^2 \\
&= E((1-4\alpha)^2 r_{ij}^2 + \alpha^2(r_{i-1,j}^2 + r_{i,j-1}^2 + r_{i,j+1}^2 + r_{i+1,j}^2) + 2(1-4\alpha)\alpha r_{ij} r_{i-1,j} \dots) \\
&= (1-4\alpha)^2 \underbrace{Er_{ij}^2}_{\sigma^2} + \alpha^2(Er_{i-1,j}^2 + \dots + Er_{i+1,j}^2) + 2(1-4\alpha)\alpha \underbrace{E(r_{ij} r_{i-1,j})}_{Er_{ij} Er_{i-1,j}} + \underbrace{\dots}_0 \\
&= (1-4\alpha)^2 \sigma^2 + \alpha^2 4\sigma^2 = (1-8\alpha + 16\alpha^2 + 4\alpha^2) \sigma^2
\end{aligned}$$

Da  $0 \leq \alpha$  und  $0 \leq 1-4\alpha \Rightarrow 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{4}$ :

$$(1-8\alpha + 16\alpha^2 + 4\alpha^2) \sigma^2 = 1 + \underbrace{20\alpha}_{\geq 0} \underbrace{(\alpha - \frac{2}{5})}_{< 0} \underbrace{\leq 1}$$

$\Rightarrow \text{Var}(u_{ij}) \leq \text{Var}(f_{ij})$  für  $\alpha \in [0, \frac{1}{4}]$

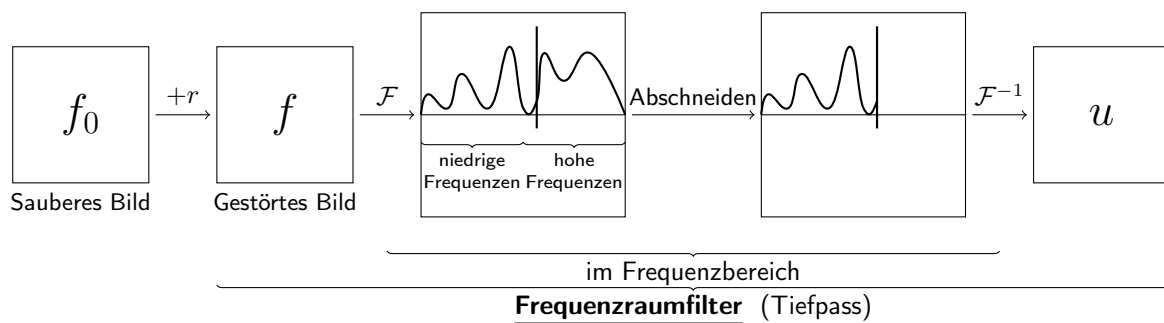
Dabei gilt:  $\text{Var}(u_{ij}) \xrightarrow{\alpha} \min \iff 1-8\alpha + 20\alpha^2 \xrightarrow{\alpha} \min \iff -8 + 40\alpha = 0 \iff \alpha = \frac{1}{5}$

$$\Rightarrow \text{bester Filter : } \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \frac{1}{5} & \\ \hline \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \hline & \frac{1}{5} & \\ \hline \end{array}$$

### 5.3 Frequenzraum-filter

Ansatz: Rauschen = hochfrequente Anteile des Signals.

Diese können mittels der **Fouriertransformation**  $\mathcal{F}$  gezielt entfernt werden.



Ein wichtiges Instrument ist hierbei die Fouriertransformation:

$$\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$$

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle z, x \rangle} dx \quad (5.7)$$

Wobei  $z \in \mathbb{R}^d, f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ .

Falls auch  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$  ist, dann lässt sich  $f$  wie folgt mittels der inversen Fouriertransformation aus  $\hat{f}$  rekonstruieren:

$$\mathcal{F}^{-1} : \hat{f} \mapsto f$$

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x) e^{i\langle z, x \rangle} dx} \quad (5.8)$$

Wobei  $x \in \mathbb{R}^d$ .

Man hat also  $\mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} f$ , d.h.

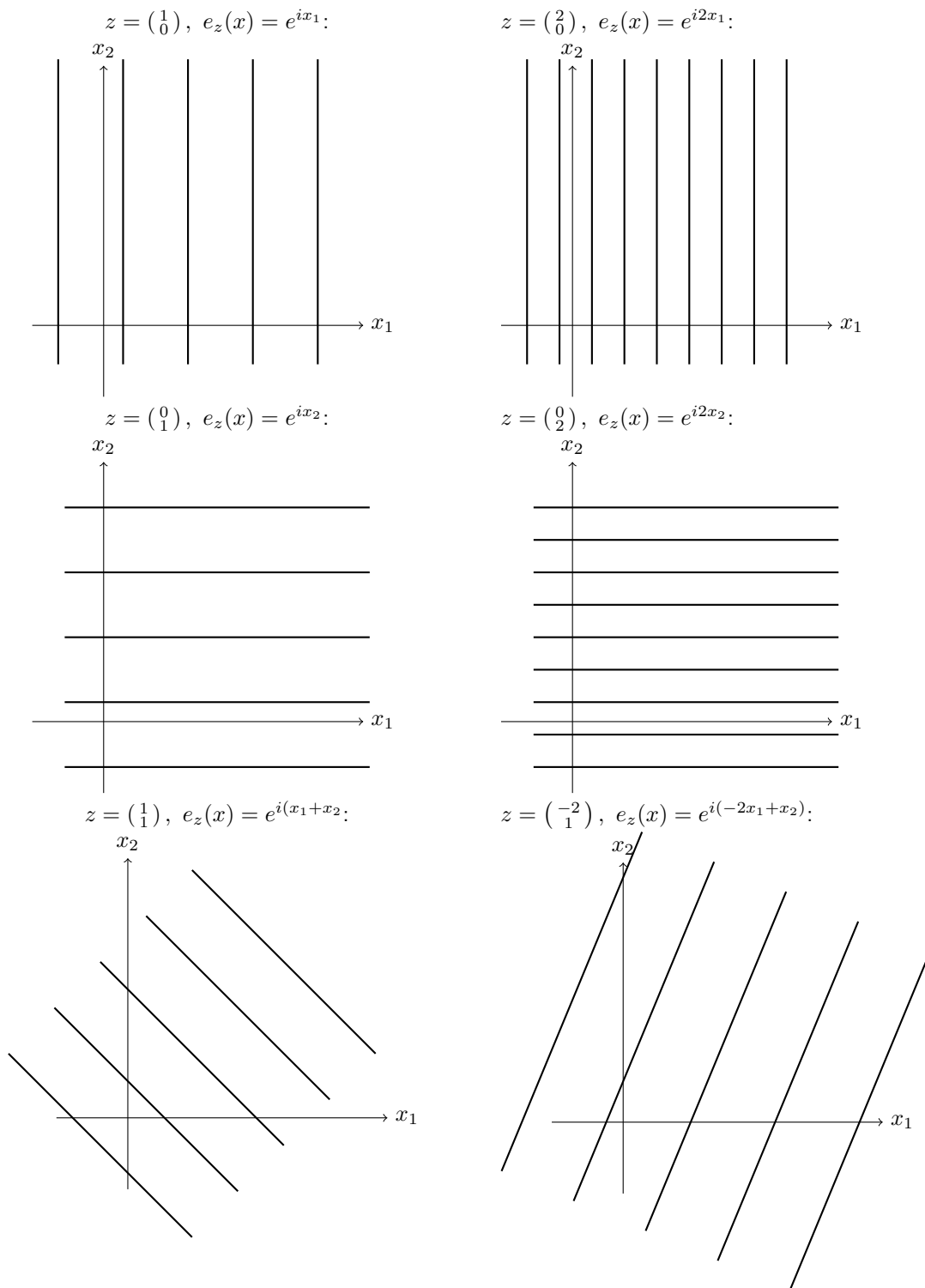
$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \left( \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-i\langle z, y \rangle} dy \right) e^{i\langle z, x \rangle} dz$$

Sei nun  $e_z(x) := e^{i\langle z, x \rangle}$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$  mit Parameter  $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_d \end{pmatrix}$ .

Also  $e_z(x) = e^{i\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rangle} = e^{i(z_1 x_1 + z_2 x_2)}$

Beispiele in 2D:

(Hier stellen die Linien, Punkte mit konstantem Wert dar)



$f \in L^2(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\mathbb{R}^d} |f|^2 dx < \infty\}$  ist

- ein normierter Raum mit  $+$ ,  $\alpha \cdot$  und  $\| \cdot \|_2 := \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx}$
- ein Skalarproduktraum mit  $\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^d} f \bar{g} dx$ , wobei  $\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle$

- ein vollständiger metrischer Raum, also ein **Banachraum**

Ein vollständiger normierter Banachraum mit Skalarprodukt heißt **Hilbertraum**.

$\mathcal{F}$  kann auch als Abbildung auf  $L^2(\mathbb{R}^d)$  betrachtet werden. Dann gilt:

$$\hat{f} = \mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

und

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2 \quad (5.9)$$

und sogar

$$\langle \hat{f}\hat{g} \rangle_2 = \langle f, g \rangle_2 \quad (5.10)$$

für alle  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ .

Weitere Eigenschaften der Fouriertransformation:

i)  $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \hat{f}$  stetig und  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \hat{f}(z) = 0$

ii)  $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow C(\mathbb{R}^d)$  ist eine lineare Abbildung

iii)  $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow C(\mathbb{R}^d)$  ist eine beschränkte/stetige Abbildung

iv) Verschiebung  $\xrightarrow{\mathcal{F}}$  Modulation, d.h.

$$g(x) = f(x + a) \Rightarrow \hat{g}(z) = e^{i\langle a, z \rangle} \hat{f}(z)$$

v) Modulation  $\xrightarrow{\mathcal{F}}$  Verschiebung, d.h.

$$g(x) = e^{i\langle x, a \rangle} f(x) \Rightarrow \hat{g}(z) = \hat{f}(z - a)$$

vi) Skalierung  $\xrightarrow{\mathcal{F}}$  inverse Skalierung, d.h.

$$g(x) = f(cx) \Rightarrow \hat{g}(z) = \frac{1}{|c|} \hat{f}\left(\frac{z}{|c|}\right)$$

vii) Konjugation:  $g(x) = \overline{f(x)} \Rightarrow \hat{g}(z) = \overline{\hat{f}(-z)}$

Folglich:  $f$  reelwertig  $\Rightarrow \hat{f}(z) = \overline{\hat{f}(-z)}$

viii)

$$\text{Grundmode: } \hat{f}(0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$$

$$\text{Analog: } f(0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x) dx$$

ix) Differentiation  $\xrightarrow{\mathcal{F}}$  Multiplikation mit Potenzen von  $z$ , d.h.

$$g(x) = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} f(x) \Rightarrow \hat{g}(z) = i^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d} z_1^{\alpha_1} \dots z_d^{\alpha_d} \hat{f}(z)$$

x) Umkehrung des letzten Punktes:

$$g(x) = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d} f(x) \Rightarrow \hat{g}(z) = i^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d} \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \hat{f}(z)$$



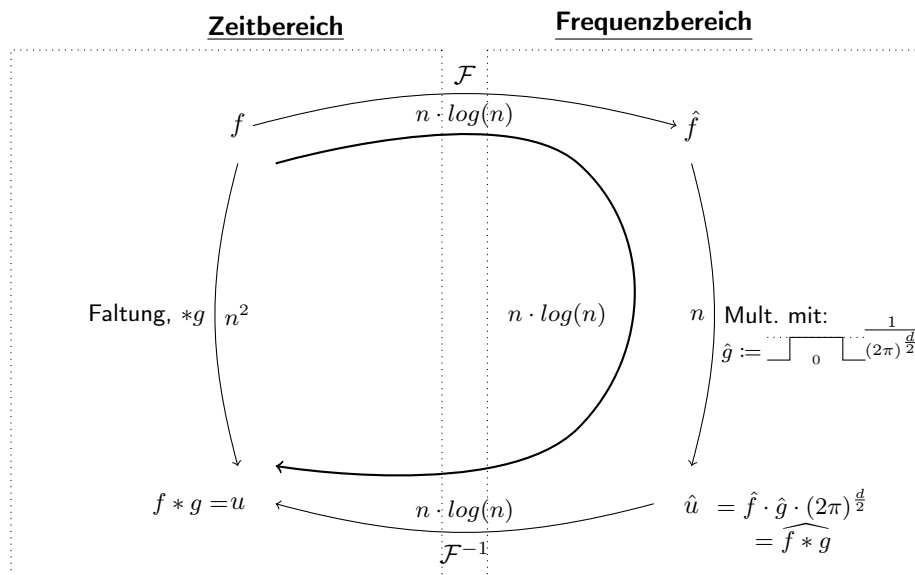
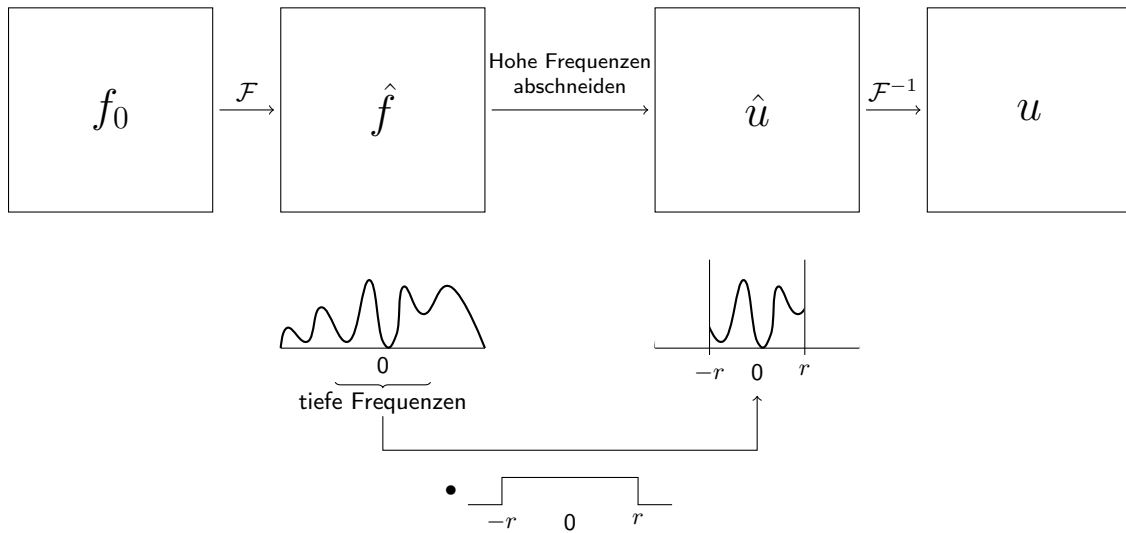
xi)

$$\text{Faltungssatz: } \mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g), \quad \widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \hat{f} \cdot \hat{g}$$

$$\text{Analog: } \mathcal{F}(f \cdot g) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g), \quad \widehat{f \cdot g} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \hat{f} * \hat{g}$$

d.h.: Faltung  $\xrightarrow{\mathcal{F}}$  Multiplikation und umgekehrt

## Zur Erinnerung:



Wie sieht  $g$  aus?

$$g = \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \chi_{[-r, r]} \right), \quad \chi_M(z) = \begin{cases} 0, & z \notin M \\ 1, & z \in M \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} (\mathcal{F}^{-1} \chi_{[-r,r]^d})(x) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{[-r,r]^d}(z) e^{i\langle z, x \rangle} dz \\
(d=1) \rightarrow &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-r,r]}(z) e^{izx} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r e^{izx} dz \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{izx}}{ix} \Big|_{z=-r}^r = \frac{1}{2\pi ix} (e^{irx} - e^{-irx}) \\
&= \frac{1}{\pi x} \sin(rx) = \text{sinc}\left(\frac{rx}{\pi}\right) \cdot \frac{r}{\pi}
\end{aligned}$$

$$\text{Wobei: } \text{sinc}(\varphi) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi\varphi)}{\pi\varphi} & , \varphi \neq 0 \\ 1 & , \varphi = 0 \end{cases}$$

$g$  hat auch Masse 1, denn mit den Eigenschaften der Fouriertransformation folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} = \hat{g}(0) &= (\mathcal{F}g)(0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \underbrace{e^{-\langle x, 0 \rangle}}_1 dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx \\
&\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx = 1
\end{aligned}$$

Für  $d = 2$  gilt:

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{(2\pi)^1} (\mathcal{F}^{-1} \chi_{[-r,r]^2})(x) \\
&= \dots \text{ (Analog zu oben)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-r,r]^2} \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) e^{i(z_1 x_1 + z_2 x_2)} dz_1 dz_2 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-r}^r \left( \int_{-r}^r e^{iz_1 x_1} e^{iz_2 x_2} dz_1 \right) dz_2 \\
&= \underbrace{\left( \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r e^{iz_1 x_1} dz_1 \right)}_{\frac{1}{\pi x_1} \sin(\pi x_1)} \underbrace{\left( \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r e^{iz_2 x_2} dz_2 \right)}_{\frac{1}{\pi x_2} \sin(\pi x_2)}
\end{aligned}$$

Es ist zu bemerken, dass  $g$  eine Art Tensor Struktur besitzt, was in etwa bedeutet das sich die Funktion in beliebigen Dimensionen als Produkt der Funktion in einer Dimensionen darstellen lässt.

**Gauß-Kern :**

$$\begin{aligned}
G(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2}} \Rightarrow G\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2}{2}} \\
&= \left( \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x_1^2}{2}} \right) \cdot \dots \cdot \left( \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x_d^2}{2}} \right) = G(x_1) \cdot \dots \cdot G(x_d)
\end{aligned}$$

## 5.4 Filterbreite und Glättung

klar ist:  $\frac{1}{25}$

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

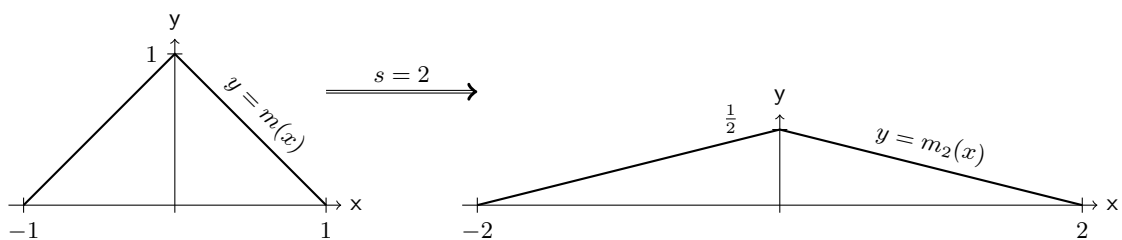
„glättet mehr als“:  $\frac{1}{9}$

1	1	1
1	1	1
1	1	1

Im Kontinuierlichen: Sei  $m \in L^1(\mathbb{R}^d)$  und  $s > 0$ . Setze

$$m_s(x) := \frac{1}{s^d} m\left(\frac{x}{s}\right), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

Bsp. (für  $d = 1$ ):

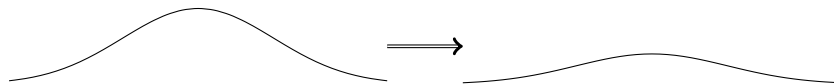


Bsp: Gauß-Kern  $G(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$

Skalierung mit Faktor  $s > 0$

$$\Rightarrow G_s(x) = \frac{1}{s^d} G\left(\frac{x}{s}\right) = \frac{1}{s^d} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2s^2}} = \frac{1}{(2\pi s^2)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2s^2}}$$

Skalierung  $s \hat{=}$  Standardabweichung  $\sigma$ :

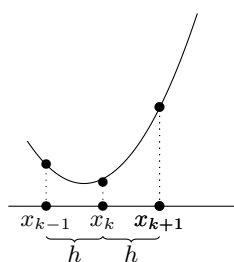


## 5.5 Differenzenfilter

Bisher: Glättung  $\hat{=}$  Mittelwert bilden  $\hat{=}$  Summe/Integrale

Jetzt: Schärfen  $\hat{=}$  Differenzen/Kontraste hervorheben  $\hat{=}$  Differenzen/Ableitungen

**Diskretisierung von Ableitungen durch Differenzenquotienten:**



Hier bedeutet  $f(k) = f(x_k)$

Vorwärts:  $u_V^{(1)}(k) = \frac{f(k+1) - f(k)}{h} \Rightarrow u_V^{(1)} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \otimes f$

Rückwärts:  $u_R^{(1)}(k) = \frac{f(k) - f(k-1)}{h} \Rightarrow u_R^{(1)} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes f$

Zentral:  $u_Z^{(1)}(k) = \frac{f(k+1) - f(k-1)}{2h} \Rightarrow u_Z^{(1)} = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes f$

## 2. Ableitung:

$$\begin{aligned}
 u^{(2)}(k) &\approx \frac{f'(k+1) - f'(k)}{h} \text{ (vorwärts)} \\
 &\approx \frac{\frac{f(k+1) - f(k)}{h} - \frac{f(k) - f(k-1)}{h}}{h} \text{ (rückwärts)} \\
 &= \frac{f(k+1) - 2f(k) + f(k-1))}{h^2}
 \end{aligned}$$

Also folgt  $u^{(2)} := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \boxtimes f$  und  $\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} * \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$   
Denn:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} * \left( \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} * f \right) \\
 &= \left( \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} * \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) * f \\
 &= \left( \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boxtimes \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) * f \\
 &= \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} * f \\
 &= \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \boxtimes f
 \end{aligned}$$

In 2D:  $\frac{\partial}{\partial x} \hat{=} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y} \hat{=} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{=} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{=} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

Diskreter Laplace Operator :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{=} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

## 5.6 Glättungsfilter und partielle Differentialgleichungen

Wir haben gesehen:  $m = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  ist unter allen 5-Punkt Filtern der am besten glättende.

Idee: Rauschen weiter verringern indem man  $m \boxtimes$  wiederholt anwendet  $\Rightarrow$  Folge von Bildern:

$$\boxed{f}_{:=u^{(0)}} \xrightarrow{m \boxtimes} \boxed{u^{(1)}} \xrightarrow{m \boxtimes} \boxed{u^{(2)}} \dots$$

$\Rightarrow u^{(n+1)} - u^{(n)} \hat{=} \text{„Unterschied zwischen 'Zeit' Punkt } n \text{ und } n+1 \text{“}$

$$\begin{aligned}
 &\hat{=} \underbrace{m \boxtimes u^{(n)}}_{u^{n+1}} - \underbrace{\delta \boxtimes u^{(n)}}_{u^{(n)}} \text{ mit } \delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= (m - \delta) \boxtimes u^{(n)} \\
 &= \left( \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \boxtimes u^{(n)} \\
 &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boxtimes u^{(n)}
 \end{aligned}$$

Somit gilt insgesamt:

$$\underbrace{u^{(n+1)} - u^{(n)}}_{\hat{=} \frac{\partial u}{\partial t}} = \underbrace{\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\hat{=} \Delta u} u^{(n)} \quad (5.11)$$

Kontinuierlich: Funktion  $u$

$$u(x, t) \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \text{ Zeit}$$

(5.11) ist eine Diskretisierung (1 Zeitschritt im Eulerverfahren) der partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad (5.12)$$

Bekannt als **Wärmegleichung** oder **Diffusionsgleichung**.

Zum Zeitpunkt  $t = 0$  möge die Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = u^{(0)} = f(x) \quad (5.13)$$

gelten. Voranschreiten der Zeit  $t$  repräsentiert Diffusion.

Für einen stationären Zustand, also keine Änderung  $\frac{\partial u}{\partial t}$  dann muss auch  $\Delta u = 0$  gelten.

Diese wird unter anderem von konstanten Funktionen oder linearen Funktionen  $u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$  erfüllt.

Es existiert auch eine explizite Formel für die Lösung der Diffusionsgleichung (5.12) mit Anfangsbedingung (5.13):

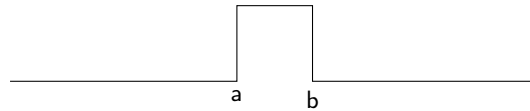
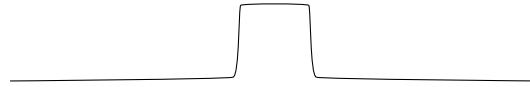
$$u(x, t) = \left( G_{\sqrt{2t}} * u^{(0)} \right) (x)$$

Wobei  $\sqrt{2t}$  für eine Skalierung um diesen Wert steht.

Zu zeigen ist:  $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$

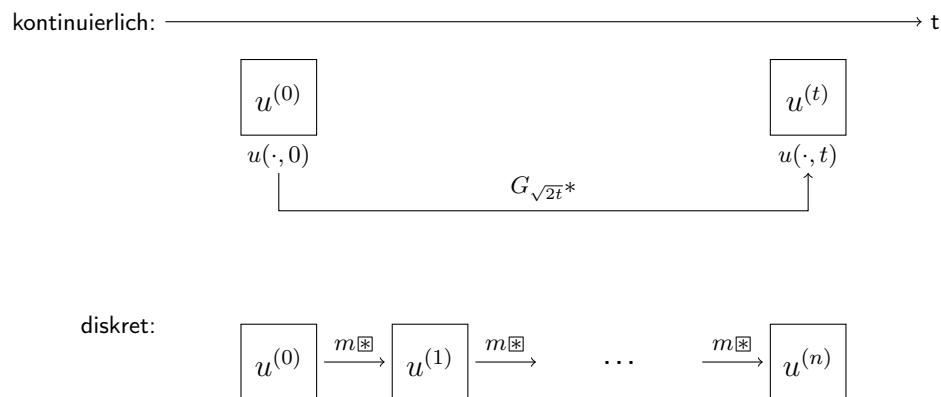
$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial}{\partial t} \left( G_{\sqrt{2t}} * u^{(0)} \right) = \Delta \left( G_{\sqrt{2t}} * u^{(0)} \right) \\
 &\stackrel{\text{mit Satz}}{\implies} \left( \frac{\partial}{\partial t} G_{\sqrt{2t}} \right) * u^{(0)} = (\Delta G_{\sqrt{2t}}) * u^{(0)}
 \end{aligned}$$

Es bleibt somit z.z.:  $\frac{\partial}{\partial t} G_{\sqrt{2t}} = \Delta G_{\sqrt{2t}}$ .

$t = 0$ : $t > 0$ :

Bemerkenswert ist das, für  $t = 0$  die Funktion nicht stetig ist, aber für alle  $t > 0$  die Funktion beliebig oft differenzierbar ist.

Insgesamt lässt sich die Idee darstellen als:



## 5.7 Isotrope und anisotrope Diffusion

Wir haben gesehen: Glättung/Diffusion verringert Rauschen.

Aber: Auch Kanten/Details werden verwischt.

Ausweg: Diffusion steuern, so dass sie an Kanten (also Stellen mit großer Änderungsrate) weniger stark glättet.

Der Plan lautet also:

$$\nabla u = \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \right\|^2 = \begin{cases} \text{groß} & \Rightarrow \text{wenig Diffusion} \\ \text{klein} & \Rightarrow \text{Diffusion normal} \end{cases}$$

Diffusionsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} u = \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right)}_{div} \left( \frac{\partial}{\partial x} u \right) = div(\nabla u) \quad (5.14)$$

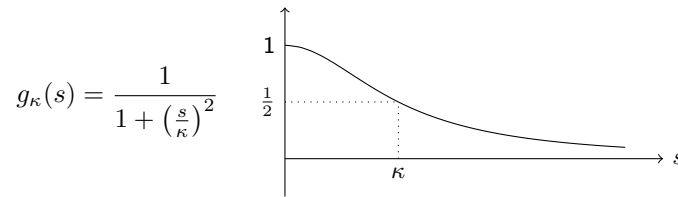
Um diese Gleichung zu regulieren setzen wir einen **Diffusionstensor**  $M$  in die Gleichung (5.14) in.

$$\Delta u = div(M \nabla u) = div \left( \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} \nabla u \right)$$

Ansätze für  $M$ :

a)  $M = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$  übliche Diffusion

b)  $M = g_\kappa(\|\nabla u(x, y)\|) \cdot I$



Diese Methode geht zurück auf Perona & Malik.

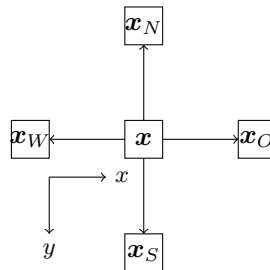
- Kanten mit  $\|\nabla u\| < \kappa$  werden mehr geglättet
- Kanten mit  $\|\nabla u\| \geq \kappa$  werden weniger geglättet

Diese Art der Glättung ist **Isotrop**  $\hat{=}$  in alle Richtungen gleich starker Fluss.

c)  $M = \begin{pmatrix} g(|\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)|) & 0 \\ 0 & g(|\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)|) \end{pmatrix}$

Diese Art der Diffusionstensenoren ist **anisotrop** also richtungsabhängig.

Für  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2$  und  $\mathbf{x}_W = \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  usw.



Für  $M = \begin{pmatrix} c_1(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & c_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$  gilt:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(M \cdot \nabla u(\mathbf{x})) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} c_1(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & c_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}) \\ c_2(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \\
 &\approx \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(\mathbf{x})(u(\mathbf{x}_O) - u(\mathbf{x})) \\ c_2(\mathbf{x})(u(\mathbf{x}_S) - u(\mathbf{x})) \end{pmatrix} \\
 &\approx c_1(\mathbf{x})(u(\mathbf{x}_O) - u(\mathbf{x})) - c_1(\mathbf{x}_W)(u(\mathbf{x}_N) - u(\mathbf{x}_W)) \\
 &\quad + c_2(\mathbf{x})(u(\mathbf{x}_S) - u(\mathbf{x})) - c_2(\mathbf{x}_N)(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}_N))
 \end{aligned}$$

## 5.8 Bilaterale Filter

Es existiert auch ein anderer Ansatz für das selbe Problem.

$u(\mathbf{x}) =$  gewichtetes Mittel aus allen  $f(\mathbf{y})$  mit

- a)  $y$  ist nahe bei  $x$  und  
 b)  $f(y)$  ist nahe bei  $f(x)$

$$u(x) = \frac{1}{w(x)} \int_{\Omega} \underbrace{g(x-y)}_{a)} \underbrace{h(f(x)-f(y))}_{\text{neu } b)} f(y) dy$$

Heißt **Bilateraler Filter**, wobei

$$w(x) = \int_{\Omega} g(x-y) h(f(x)-f(y)) dy$$

Oft:  $g, h$  Gauß-Kerne ( $\Rightarrow$  nichtlineare Gaußfilter)

Manchmal:  $g, h$  charakteristische Funktionen ( $\Rightarrow$  SUSAN-Filter)

Effekt Falls Höhe der Kante  $>$  Filterradius  $\Rightarrow$  Kante bleibt

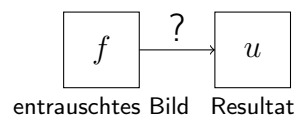
Manchmal:  $f \xrightarrow{\log} \log f \xrightarrow{\text{Bil. Filter}} \log u \xrightarrow{\exp} u$

Diese Verfahren ist jedoch sehr aufwendig, denn

- keine Reine Filterung ( $\Rightarrow$  keine FFT-Implementierung möglich)
- Normalisierung  $w(x)$  in jedem Punkt berechnen

## 5.9 Entrauschen mittels Variationsrechnung

Erinnerung:



Wünsche an  $u$ :

1.  $u \approx f$  (Datenkonsistenz)
2.  $u$  ist 'glatt'. (Regularitätsbedingung)

Mathematische Umsetzung der Wünsche:

$$1. \|u - f\|_2 = \sqrt{\int_{\Omega} |u(x) - f(x)|^2 dx} \text{ sei klein}$$

$$2. \|\nabla u\|_2 = \sqrt{\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx} = \sqrt{\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x)\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x)\right)^2 dx} \text{ sei klein}$$



Kombination:

$$J(u) := \|u - f\|_2^2 + \lambda \|\nabla u\|_2^2 \xrightarrow{u \in U} \min \quad (5.15)$$

Für einen geeigneten Funktionen Raum  $U$  und Kopplungskonstante  $\lambda > 0$ .  
In diesem Beispiel empfiehlt sich als Suchraum:

$$U = \{u : \|u\|_2 < \infty, \nabla u \text{ existiert}, \|\nabla u\|_2 < \infty\} = W^{1,2}$$

ein so genannter Sobolev-Räume. Diese Suchproblem ist jedoch  $\infty$ -dimensional und somit schwer zu lösen.  
Im obigen Ansatz (5.15) stellt man fest, dass der Regularitätsterm

$$\|\nabla u\|_2^2 = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x) \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y}(x) \right)^2 dx$$

die großen Gradienten an (gewollten) Kanten zu stark bestraft. ( $\Rightarrow$  optimales  $u$  glättet Kanten)

Ausweg: Wähle  $\|\nabla u\|_2$  oder  $\|\nabla u\|_1 = \int_{\Omega} |\nabla u(x)| dx = \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x) \right| + \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x) \right| dx$  als Regularitätsterme.

$$J(u) := \|u - f\|_2^2 + \lambda \|\nabla u\|_1 \rightarrow \min \quad (5.16)$$

Genannt Rudin–Osher–Fatemi-Funktional (ROF)

**Allgemeiner Ansatz bei Variationsproblemen:**

$$J(u) := \underbrace{D(u, f)}_{\text{Datenkern}} + \lambda \underbrace{R(u)}_{\text{Regularitätsterm}} \xrightarrow{u \in U} \min$$

Notwendiges Kriterium:

Falls  $J : U \rightarrow \mathbb{R}$  in  $u \in U$  ein lokales Minimum besitzt, dann gilt für jede Richtung  $v \in U$ :

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{J(u + \epsilon v) - J(u)}{\epsilon} = 0 \quad (5.17)$$

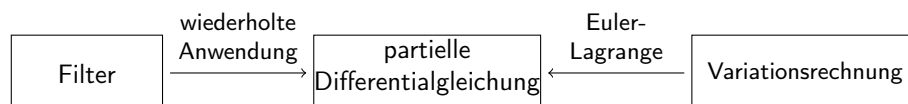
Dies ist die Verallgemeinerte Richtungsableitung (Gateaux-Ableitung).

Häufig ist  $J$  in Integralform gegeben, z.b.:

$$J(u) = \int_{\Omega} g(x, u(x), \nabla(x)) dx$$

Dann führt Bedingung (5.17) auf Gleichungen für bestimmte partielle Ableitungen von  $g$  und  $u$ , die sogenannte Euler-Lagrange-Gleichung für (5.17).

$\Rightarrow$  partielle Differentialgleichung  $u$ . Fazit:



## 6 Kantenerkennung

### 6.1 Gradientenfilter

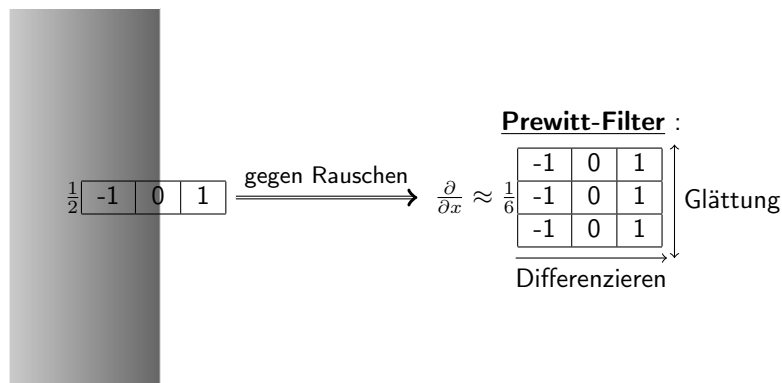
Wir suchen Stellen  $x$  mit großem Gradienten:

$$\nabla u(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x) \end{pmatrix}$$

Approximation der Gradienten über zentrale Differenzen:

$$\frac{\partial}{\partial x} \approx \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ bzw. } \frac{\partial}{\partial y} \approx \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Um Rauschen zu verringern wird auch ein entrauschen Filter simultan angewendet:



Alternative:  $\frac{\partial}{\partial x} \approx \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circledast \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =: D_x$ , genannt **Sobel-Filter**. Eine stärkere

Glättung kann mittels anderer vertikaler Filter mit Binomialkoeffizienten erzielt werden.

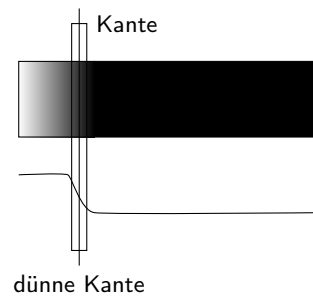
Entsprechen wird  $\frac{\partial}{\partial y} D_y := D_x^T$  definiert.

$$\nabla u(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} (D_x \circledast u)(x) \\ (D_y \circledast u)(x) \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Zur Erinnerung der Gradienten steht senkrecht auf Kanten und zeigt in Richtung heller (hoher) Werte, die Intensität wird beschrieben von  $|\nabla u(x)|$ , also dem Betrag des Gradienten.

Ein typischer Algorithmus kann etwa folgende Form annehmen:

1. Gradienten mittels Prewitt oder Sobel approximieren und Richtung auf Vielfache von  $45^\circ$  runden.
2. **Non-maximum suppression** (edge thinning). Da es potentiell viele Punkte mit hoher Steigung gibt kann es dazu kommen, dass Kanten sehr breit werden, dieses wird durch das edge thinning verhindert.

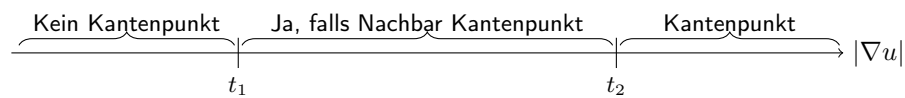


Mathematisch:  $x$  wird Kantenpunkt falls:

$$|\nabla u(x)| \leq \max(|\nabla u(x_+)|, |\nabla u(x_-)|)$$

wobei  $x_+$  und  $x_-$  Vorgänger und Nachfolger von  $x$  in Gradientenrichtung sind.

3. Kandidat  $x$  wird Kantenpunkt, falls:



wobei  $t_1, t_2$  thresholds sind.

$x$  ist also ein Kantenpunkt, falls  $|\nabla u(x)| \geq t_2$  oder  $(|\nabla u(x)| \in [t_1, t_2]$  und  $x$  ist Nachbar eines Kantenpunktes).

Dieses wird **hysteresis thresholding** genannt und verhindert **Abreißen** von Kantenzügen.

Die am häufigsten verbreitete Version von 1) -3) ist der **Canny-Algorithmus** (1986).

Matlab:

```
1 BWimg=edge(u,'canny',[t_1, t_2],sigma);
```

BWimg: Binärbild

u: Graustufenbild

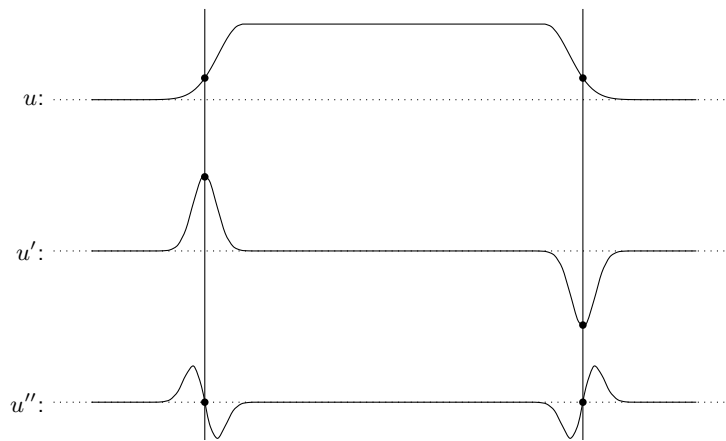
canny: Algorithmus

$t_1, t_2$ : Sind gewählt wie oben

sigma: Parameter für den Gaußkern aus 1)

## 6.2 Die zweite Ableitung

Zunächst in 1D:



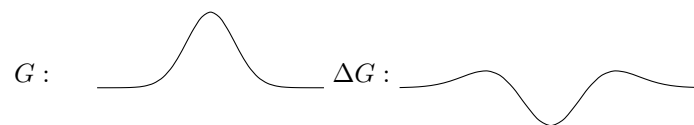
Test für Kantenpunkte  $u''(x) = 0$  und  $|u'(x)| > \text{threshold}$ .

Wichtig: Vorglätten!, da die 2. Ableitung noch anfälliger gegenüber Rauschen als die 1. Ableitung ist.

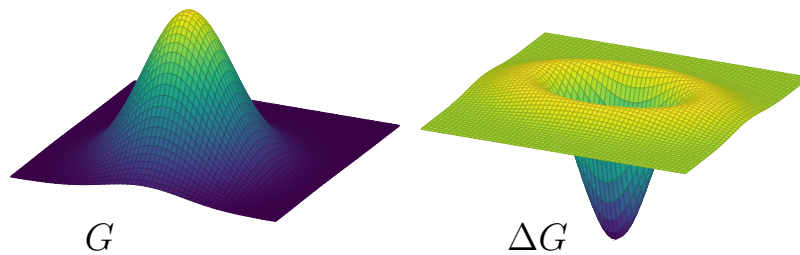
In 2D. Laplace Operator  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  (Richtungsunabhängige Messung der 2. Ableitung)

Vorglätten:  $\Delta(G * u) = (\Delta G) * u$ , wobei  $\Delta G$  vorher berechnet werden kann.

In 1D:



In 2D:



Dieses wird **Laplacian of Gaußian method** genannt.

Matlab:

---

```
1 BWing=edge(u,'log',thresh,sigma);
```

---

$\Rightarrow$  alle  $x \in \Omega$  mit:

$\Delta(G_{\text{sigma}} * u)(\mathbf{x}) \approx u$ , nicht auf Gleichheit sondern auf Vorzeichenwechsel testen.

und:  $|\nabla(G_{\text{sigma}} * u)| > \text{thresh}$

## 7 Schärfen und Entfalten

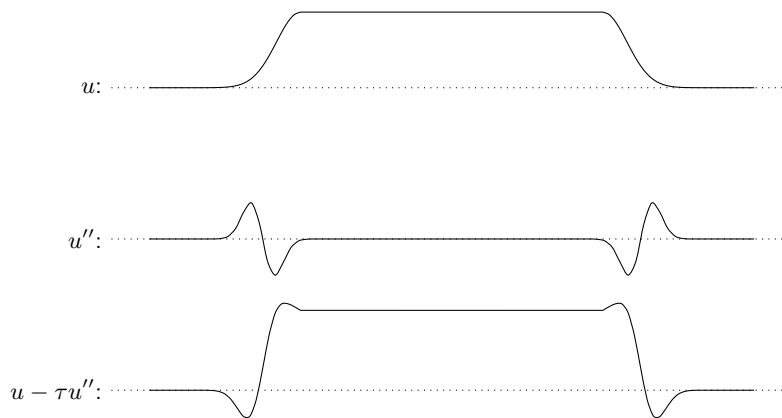
(Gegenteil von Kapitel 5)

Gegeben: unscharfes Bild

Gesucht: Version mit vielen erkennbaren Details

### 7.1 Laplace-Schärfen

Idee:



Zu sehen ist, dass durch die Subtraktion von  $u''$ , skaliert mit einem Faktor  $\tau > 0$  die Kanten hervorgehoben werden.

Hinweise zur Umsetzung:

- $u - \tau u''$  reskalieren (Kontrast-stretching) falls der Farbraum verlassen wird.
- $\tau$  kann auch sehr klein gewählt werden und der Vorgang dafür wiederholt iteriert werden.
- In 2D  $\Delta$  statt 2. Ableitung
- Vorglätten:  $u - \tau \cdot \Delta(G * u)$

### 7.2 Kantenverstärkende Diffusion

Verallgemeinerte Diffusionsgleichung:  $\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(M \nabla u)$ . Idee:  $M$  so wählen, so dass der Fluss:

- Parallel zum Gradienten (d.h. durch die Kante verläuft):  $\lambda_1 = \frac{1}{1 + \frac{|\nabla u(\mathbf{x})|^2}{\kappa^2}}$

- senkrecht zu  $\nabla u$  (entlang der Kante):  $\lambda_2 = 1$

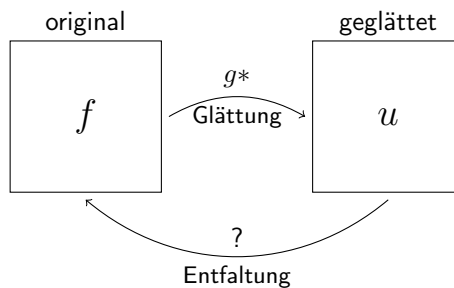
$\Rightarrow M$  hat EW  $\lambda_1$  zum EV  $v_1 = \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$  und EW  $\lambda_2$  zum EV  $v_2 = \frac{1}{|\nabla u|} \begin{pmatrix} -\frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \perp v_1$ .

$\Rightarrow M \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}}_{\text{orthogonale Matrix}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = M^T$

$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}^T}_{= \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \end{pmatrix}} = \frac{1}{|\nabla u|^2} \begin{pmatrix} \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x})^2 + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x})^2 & (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x}) \\ (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x}) & \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x})^2 + \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x})^2 \end{pmatrix}$

falls  $\nabla u(\mathbf{x}) \neq 0$ , sonst  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

### 7.3 Entfaltung



Das heißt:  $u = f * g$ , wobei  $u, g$  gegeben sind und  $f$  gesucht ist.

Alternativ kann dies als die Invertierung des Faltungsoperator  $f \mapsto g * f$  betrachtet werden.

a) Diskreter Fall:

$$g * f = u$$

$$(g * f)(j) = u(j), \quad j \in \Omega$$

$$\sum_k g(j-k)f(k) = u(j), \quad j \in \Omega$$

$\Rightarrow \Omega \times \Omega$  Gleichungssystem

$$\begin{array}{c}
 k=0 \quad k=1 \qquad \qquad \qquad k=n \\
 \begin{array}{c} j=0 \\ j=1 \\ \vdots \\ j=n \end{array}
 \begin{pmatrix}
 g(0) & g(-1) & & g(-n) \\
 g(1) & g(0) & g(-1) & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots \\
 & & & g(n)
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 f(0) \\
 f(1) \\
 \vdots \\
 f(n)
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 u(0) \\
 u(1) \\
 \vdots \\
 u(n)
 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Toeplitz-Matrix

b) Kontinuierlicher Fall:

$$(g * f)(x) = u(x), \quad x \in \Omega$$

$$\int_{\mathbb{R}} g(x-y)f(y)dy = u(x), \quad x \in \Omega$$

Integralgleichung für die gesuchte Funktion  $f$

⇒ Kontinuierliche Matrix:

Wobei  $[a, b]$  die das Definitionsgebiet von  $f$  ist. Diese Problem is jedoch schlecht gestellt, da der Operator kompakt ist. (↗ Datei im Studip)

Wir versuchen es trotzdem zu lösen:

$$\begin{array}{ll}
 g * f = u & | \cdot \mathcal{F} \\
 \mathcal{F}(g * f) = \mathcal{F}u & \\
 (2\pi)^{\frac{d}{2}}(\mathcal{F}g) \cdot (\mathcal{F}f) = \mathcal{F}u & | \text{div } (2\pi)^{\frac{d}{2}}(\mathcal{F}g) \\
 \mathcal{F}f = \frac{\mathcal{F}u}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}\mathcal{F}g} & | \mathcal{F}^{-1}
 \end{array}$$

Und erhalten:

$$f = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{\mathcal{F}u}{\mathcal{F}g} \right) \quad (7.1)$$

Dieses kann jedoch zu Problemen führen, da etwa  $g \approx 0$  werden kann. Je glatter  $g$  ist, desto stärker klingt  $(\mathcal{F}g)(z)$  ab für  $z \rightarrow \infty$ .

Anders betrachtet:

Wenn  $|\hat{g}(z)|$  für hohe Frequenzen klein ist, dann ist:

$$A : f \mapsto g + f$$

ein Tiefpassfilter. Nimmt man nun eine Funktion  $h$  mit hoher Frequenz und großer Amplitude, dann gilt:

$$A(f + h) = Af + \underbrace{Ah}_{\approx 0} \approx Af$$

Problembeseitigung:

1. Ansatz:

Approximiere die Funktion  $\frac{1}{x}$  durch

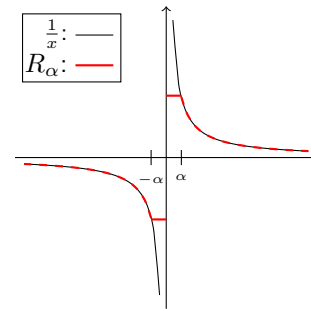
$$R_\alpha = \begin{cases} \frac{1}{x}, & |x| > \alpha \\ \frac{1}{\alpha}, & x \in [0, \alpha] \\ -\frac{1}{\alpha}, & x \in [-\alpha, 0] \end{cases}$$

wobei  $\alpha > 0$ .

und ersetze  $f = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{\hat{u}(z)}{\hat{g}(z)} \right)$  durch:

$$f = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \mathcal{F}^{-1} (\hat{u}(z) R_\alpha(\hat{g}(z)))$$

und lasse  $\alpha \rightarrow 0$ .



2. Ansatz: Variationsrechnung:

1. Wunsch:  $g * f \approx u$

2. Wunsch:  $\|f\|_2$  klein

Minimiere nun:

$$\Rightarrow J(f) := \|g * f - u\|_2^2 + \lambda \|f\|_2^2 \rightarrow \min$$

$$\iff \int_{\mathbb{R}^d} ((g * f)(x) - u(x))^2 + \lambda f(x)^2 dx \rightarrow \min$$

über die Wahl von  $f \in U := L^2(\mathbb{R}^d)$ .

Idee:  $\mathcal{F}$  anwenden  $\Rightarrow *$  wird zu  $\cdot$  und  $\|\cdot\|_2$  bleibt unverändert.

$$\begin{aligned} \Rightarrow J(f) &= \|g * f - u\|_2^2 + \lambda \|f\|_2^2 \\ &= \|\widehat{g * f - u}\|_2^2 + \lambda \|\hat{f}\|_2^2 \\ &= \|(2\pi)^{\frac{d}{2}} \hat{g} \hat{f} - \hat{u}\|_2^2 + \lambda \|\hat{f}\|_2^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left[ \left| (2\pi)^{\frac{d}{2}} \hat{g}(z) \hat{f}(z) - \hat{u}(z) \right|^2 + \lambda |\hat{f}(z)|^2 \right] dz \xrightarrow{f \in U} \min \end{aligned}$$

Strategie: Integral für jedes einzelne  $z$  minimieren. Daraus erhalten wir ein optimales  $\hat{f}$  und somit auch ein optimales  $f$ .



Also minimiere für jedes  $z \in \mathbb{R}^d$

$$I(t) := |(2\pi)^{\frac{d}{2}} \hat{g}(z)t - \hat{u}(z)|^2 + \lambda |t|^2 \xrightarrow{t \in \mathbb{C}} \min$$

Später setzen wir  $\hat{f}(z) := t_{\min}$ , nun zur Minimierung:

$$\begin{aligned} I(t) &= ((2\pi)^{\frac{d}{2}} \hat{g}(z)t - \hat{u}(z))((2\pi)^{\frac{d}{2}} \overline{\hat{g}(z)} \bar{t} - \overline{\hat{u}(z)}) + \lambda t \bar{t} \\ &= (2\pi)^{\frac{d}{2}} \hat{g}(z) \overline{\hat{g}(z)} t \bar{t} + \lambda t \bar{t} - (2\pi)^{\frac{d}{2}} (\hat{g}(z) \overline{\hat{u}(z)} t + \overline{\hat{g}(z)} \hat{u}(z) \bar{t}) + \hat{u}(z) \overline{\hat{u}(z)} \\ &= ((2\pi)^{\frac{d}{2}} |\hat{g}(z)|^2 + \lambda) |t|^2 - (2\pi)^{\frac{d}{2}} \underbrace{2 \cdot \operatorname{Re}(\hat{g}(z) \overline{\hat{u}(z)} t)}_{\circledast} + |\hat{u}(z)|^2 \xrightarrow{t \in \mathbb{C}} \min \end{aligned}$$

Das Argument (Winkel) taucht nur in  $\circledast$  auf

$\Rightarrow$  So wählen, das  $\circledast$  auf die positive reelle Achse fällt

$$\Rightarrow 0 = \arg(\circledast) = \arg(\hat{g}(z) \overline{\hat{u}(z)}) + \arg(t)$$

$$\Rightarrow \arg(t) = -\arg(\hat{g}(z) \overline{\hat{u}(z)}) = \arg(\overline{\hat{g}(z)} \hat{u}(z))$$

$$\Rightarrow I(t) = ((2\pi)^{\frac{d}{2}} |\hat{g}(z)|^2 + \lambda) |t|^2 - (2\pi)^{\frac{d}{2}} 2 \cdot |\overline{\hat{g}(z)} \hat{u}(z)| |t| + |\hat{u}(z)|^2 \xrightarrow{|t| \in \mathbb{R}} \min$$

Dieses ist nun ein Polynom in  $|t|$ , sodass das Minimum einfach bestimmt werden kann.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d|t|} \dots = 2 \cdot ((2\pi)^{\frac{d}{2}} |\hat{g}(z)|^2 + \lambda) |t| - (2\pi)^{\frac{d}{2}} \cdot 2 \cdot |\overline{\hat{g}(z)} \hat{u}(z)| \\ \Rightarrow |t| &= \frac{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \cdot 2 \cdot |\overline{\hat{g}(z)} \hat{u}(z)|}{2 \cdot ((2\pi)^{\frac{d}{2}} |\hat{g}(z)|^2 + \lambda)} = \frac{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \cdot |\overline{\hat{g}(z)} \hat{u}(z)|}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |\hat{g}(z)|^2 + \lambda} \text{ und } \arg(u) = \arg(\overline{\hat{g}(z)} \hat{u}(z)) \\ \Rightarrow t &= \frac{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \overline{\hat{g}(z)} \hat{u}(z)}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |\hat{g}(z)|^2 + \lambda} =: \hat{f}(z) \end{aligned}$$

Wegen

$$\hat{f}(z) = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \frac{\overline{\hat{g}(z)}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |\hat{g}(z)|^2 + \lambda} \hat{u}(z)$$

gilt

$$f(z) = \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{\overline{\hat{g}(z)}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |\hat{g}(z)|^2 + \lambda} \right) * u \quad (7.2)$$

Dieses Verfahren wird  $L^2$  deblurring genannt. Es gibt auch einen alternativen, algebraischen Zugang:

$$\begin{aligned} I(f) &= \|g * f - u\|_2^2 + \lambda \|f\|_2^2 \xrightarrow{f} \min \\ &\iff \left\| \begin{pmatrix} g * f - u \\ \sqrt{\lambda} f \end{pmatrix} \right\| \xrightarrow{f} \min \\ &\iff \left\| \begin{pmatrix} Af \\ \sqrt{\lambda} f \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} A \\ \sqrt{\lambda} I \end{pmatrix} f - \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \xrightarrow{f} \min \quad (A = f \mapsto g * f) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  lineares Ausgleichsproblem.

$$\begin{aligned} \Rightarrow (A^* \quad \sqrt{\lambda} I^*) \begin{pmatrix} A \\ \sqrt{\lambda} I \end{pmatrix} f &= (A^* \quad \sqrt{\lambda} I) \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Normalengleichung}) \\ &\Rightarrow (A^* A + |\lambda| I) f = A^* u \\ &\Rightarrow f = (A^* A + |\lambda| I)^{-1} A^* u \end{aligned}$$

Die Inverse existiert, da  $-|\lambda|$  nicht im Spektrum von  $A^* A$  sein kann, denn das Spektrum von  $A^* A$  ist positiv und reel.

3. Ansatz: noch einmal Variationsrechnung, diesmal mit anderen Wünschen

1. Wunsch:  $g * f \approx u$
2. Wunsch:  $\|\nabla f\|$  klein

Nach analoger Rechnung wie oben erhält man:

$$f = \mathcal{F} \left( \frac{\overline{\hat{g}(z)}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |\hat{g}(z)|^2 + \lambda |z|^2} \right) * u \quad (7.3)$$

$\Rightarrow$  Dämpfung höher wenn Frequenz höher.

Dieses Verfahren nennt sich  $H^1$  deblurring.

## 8 Restauration (Inpainting)

Problem: Lücken im Bild, etwa

1. Kratzer
2. Scannerzeile kaputt
3. Defekt in der Kamera
4. Bewusst entferntes Objekt

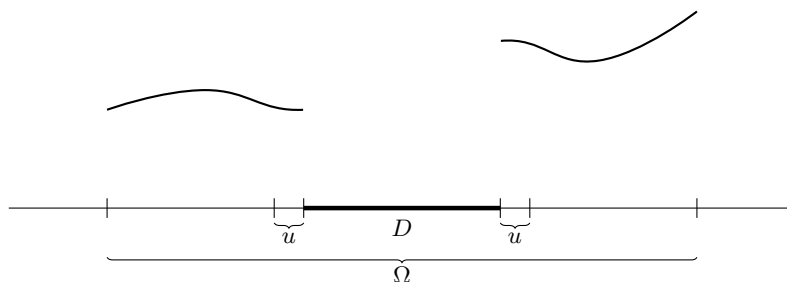
sollen sinnvoll und unauffällig geschlossen werden.

Sei  $f : \Omega \rightarrow F$  unser Bild jedoch mit Defekt, d.h. fehlenden Funktionswerten in  $D \subset \Omega$ .

1. Fall: Jeder Punkt aus  $D$  hat Nachbarn in  $\Omega \setminus D$ .  
 $\Rightarrow$  Lücken mittels Interpolation aus benachbarten Werten in  $\Omega \setminus D$  schließen.
2. Fall:  $D$  hat innere Punkte. Diesen Fall werden wir im folgenden näher betrachten.

### 8.1 Frequenzraum-Ansatz

Zur Illustration in 1D:



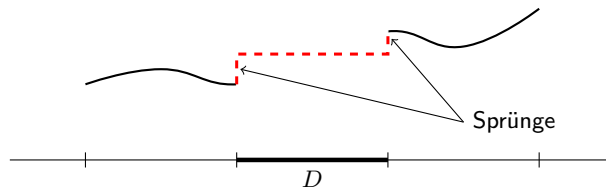
Betrachte Umgebung  $U \subset \Omega \setminus D$  und errechne den Mittelwert

$$m := \frac{1}{|U|} \int_U f(x) \, dx$$

von  $f$  auf  $U$ .

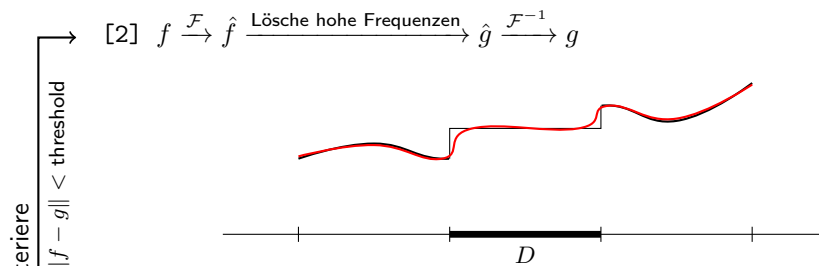
**Algorithmus:**

[1] Initialisiere  $f$  auf  $D$  mittels konstanter Funktion  $m$ :

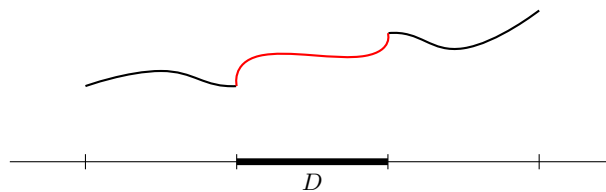


$\Rightarrow$  Sprünge am Rand von  $D$ .

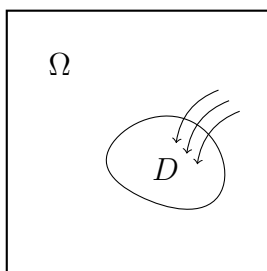
Idee: Sprünge  $\hat{=}$  hochfrequente Anteile  $\Rightarrow$  wende Tiefpassfilter an.



[3] Ersetze  $f$  innerhalb von  $D$  durch  $g$ .



## 8.2 PDE-Transport-Diffusions-Ansatz



Idee: Informationen aus  $\Omega \setminus D$  nach  $D$  "hineinragen".

- Referenzen:
- Weichert 1998
  - Bornemann & März 2007

**Skalierung der Diffusion:** Betrachte die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(M \nabla u)$$

mit dem Diffusionstensor

$$M = \begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -v_1^T & - \\ -v_2^T & - \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

wobei  $v_1 \perp v_2$  die Eigenvektoren des sogenannten doppelt geglätteten Strukturtenors

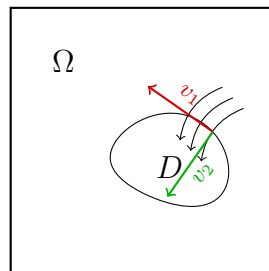
$$J = G_\rho * \left[ \underbrace{\left( \nabla(G_\sigma * u) \right)}_{2 \times 1} \cdot \underbrace{\left( -\nabla^T(G_\sigma * u) - \right)}_{1 \times 2} \right]$$

sind. Hierbei bezeichnet ist  $*$ -Symbol komponentenweise zu verstehen. Die Faltungskerne  $G_\sigma$  und  $G_\rho$  sind Gauß-Kerne für die innere bzw. äußere Glättung.

$\Rightarrow v_1$  Richtung mit maximalem Kontrast mit EW  $\mu_1$

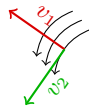
$v_2$  Richtung mit minimalem Kontrast mit EW  $\mu_2$ , genannt **Kohärenzrichtung**.

Hierbei ist  $\mu_1 \geq \mu_2$ .



Fälle:

$$\mu_1 \gg \mu_2 \approx 0$$



$$\mu_1 \approx \mu_2 \approx 0$$



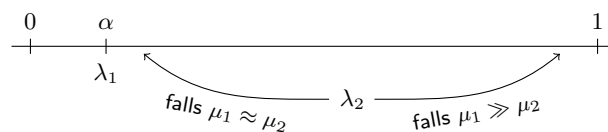
Lokal keine Struktur.

$$\mu_1 \approx \mu_2 \gg 0$$



Kanten.

Die Werte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  werden wie folgt gewählt:



wobei  $\alpha \in (0, 1)$  festgehalten wird.

$$\lambda_1 := \alpha, \quad \lambda_2 := \alpha + (1 - \alpha)(1 - g(\mu_1 - \mu_2)),$$

wobei  $g$  wie bei Perona Malik gewählt wird, also:

$$g(s) = \frac{1}{1 + \frac{s^2}{\kappa^2}}$$

Dieses wird **Kohärenz verstärkende Diffusion** genannt.

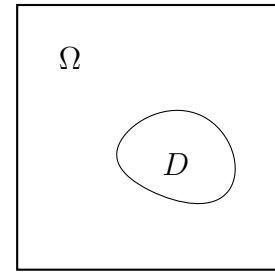
### 8.3 Variationsansatz

geg.:  $f$  auf  $\Omega \setminus D$

ges.:  $u$  auf  $\Omega$

Wunsch 1:  $u = f$  auf  $\Omega \setminus D$

Wunsch 2:  $\|\nabla u\|$  klein auf  $\Omega$



Daraus folgt

$$J(u) := \|\nabla u\|_2^2 \rightarrow \min \quad \text{auf} \quad := \{u \in W^{1,2}(\Omega) : u|_{\Omega \setminus D} = f\}$$

Angenommen,  $u \in U$  minimiere  $J$ , dann folgt für beliebige  $v \in W^{1,2}(\Omega)$  mit  $v|_{\Omega \setminus D} = 0$ , d.h.  $v \in H_0^1(D)$ , dass

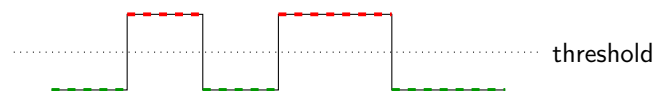
$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\Omega} \underbrace{\|\nabla(u + tv)(x)\|^2}_{\|\nabla u(x) + t \nabla v(x)\|^2} - \|\nabla u(x)\|^2 \, dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\Omega} \langle \nabla u(x) + t \nabla v(x), \nabla u(x) + t \nabla v(x) \rangle - \langle \nabla u(x), \nabla u(x) \rangle \, dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\Omega} t^2 \|\nabla v(x)\|^2 + 2t \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle \, dx = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} t \|\nabla v(x)\|^2 + 2 \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle \, dx \\ &= 2 \int_D \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle \, dx \stackrel{\text{Greensche Formel}}{=} 2 \left( \overbrace{\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} v(x) \, ds(x)}^0 - \int_D \Delta u(x) v(x) \, dx \right) \\ &= 2 \int_D \Delta u(x) v(x) \, dx. \end{aligned}$$

Daraus folgt mit dem Fundamentallema der Variationsrechnung  $\Delta u = 0$  in  $D$ . Insbesondere ist  $u$  die harmonische Fortsetzung von  $f$  nach  $D$  (harmonisches Impainting). Als harmonische Funktion unterliegt  $u$  auf  $D$  dem Maximumsprinzip und dem Mittelwertprinzip (s. ??). Es gibt also keine scharfen Kanten in  $D$ , anders als z.B. bei kohärenzverstärkender Diffusion.

## 9 Segmentierung

Dieses ist die Zerlegung eines Bildes in verschiedene Objekt.

Eine einfache Methode hierfür ist das **Histogramm thresholding** :

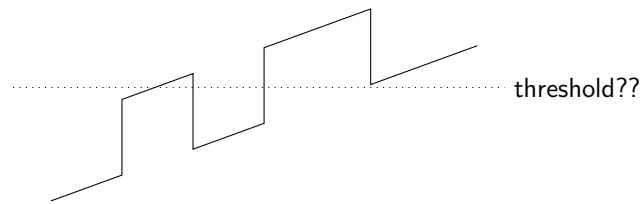


So kann ein Bild in mehrere Objekte zerlegt werden.

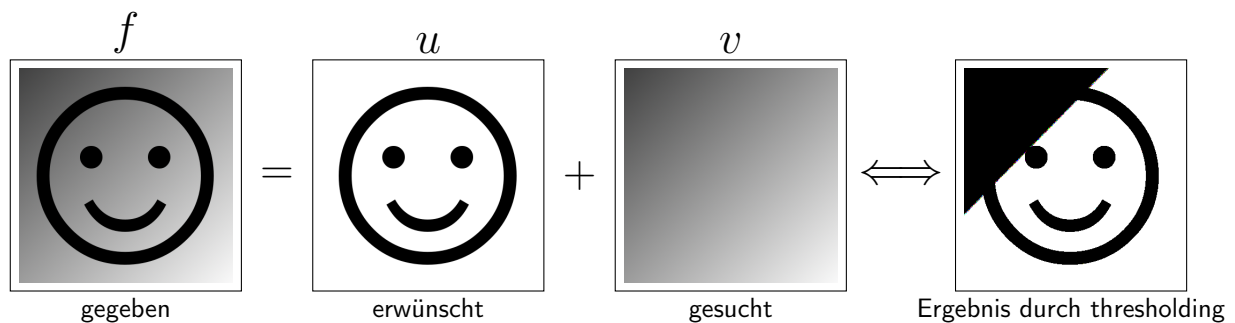
Hierbei können jedoch diverse Probleme auftreten, die vor der Zerlegung durch preprocessing behoben werden sollten. Einige der preprocessing Methoden sind:

- Entrauschen ↗ 5.7
- Farbraum optimal ausnutzen ↗ 3.2
- Beleuchtungsausgleich

Dieser Beleuchtungsausgleich wurde noch nicht vorher besprochen, das Problem:



Anstatt eines „geraden“ Bildes ist das Bild, etwa durch Beleuchtung, „gekippt“ und der Ansatz mittels Histogramthresholding würde nicht das gewünschte Ergebnis erzielen. In 2D könnte dies so aus sehen.



Rechts ist das Bild, das durch das Beschriebene Histogramm thresholding dargestellt wurde zu sehen. Methoden um durch preprocessing den gesuchten Gradienten zu entfernen werden im folgenden beschrieben.

## 9.1 Beleuchtungsausgleich

Geg.: inhomogen ausgeleuchtetes Bild  $f$ .

Ges.: Zerlegung  $f = u + v$ , wobei

$u$  erwünschter Anteil,  
 $v$  Inhomogenität .

Gilt  $f = u \cdot v$  (multiplikative Verknüpfung) so erhält man den obigen Fall durch Betrachtung des Logarithmus  $\log(f)$ .

Einfachster Fall:  $v$  konstant. In diesem Fall kann man etwa eine „Leeraufnahme“ machen,  $v = f$  setzen und dieses  $v$  in allen folgenden Aufnahmen subtrahieren.

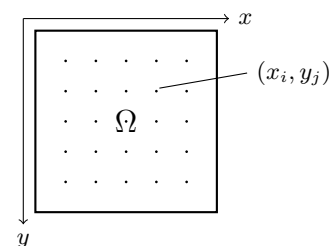
Normalfall:  $v$  ändert sich bei Jeder Aufnahme. Hierbei gibt es mehrere Ansätze:

### a) Lineare Regression :

Wir unterstellen, dass der Verlauf **affin-linear** ist, d.h.:

$$v(x, y) = ax + by + c$$

Diese Parameter  $a$ ,  $b$ ,  $c$  gilt es nun so zu schätzen.



Dazu soll gelten

$$\forall (x, y) \in \Omega: \quad ax + by + c \approx f(x, y).$$

Um dies zu erfüllen wird eine Stichprobe von endlich vielen Punkten  $(x_i, y_i)$  aus  $\Omega$  gewählt und durch diese ein Gleichungssystem gebildet:

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + c &\approx f(x_1, y_1) \\ &\vdots \\ ax_n + by_n + c &\approx f(x_n, y_n) \end{aligned}$$

In Matrix Form ergibt sich:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_w \approx \underbrace{\begin{pmatrix} f(x_1, y_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_n, y_n) \end{pmatrix}}_z$$

Wir erhalten also ein lineares Ausgleichsproblem (überbestimmtes Gleichungssystem). Die optimale Lösung dieses Problems kann über die **Normalengleichung** berechnet werden:

$$A^T A w = A^T z.$$

Daraus erhält man  $w$ , somit auch  $a, b, c$  und schlussendlich  $v \Rightarrow u = f - v$ .

Eventuell wird durch die Subtraktion bei  $u$  der Farbraum verlassen. Anschließend wird daher noch ein Histogramm stretching durchgeführt, um das finale Bild zu erhalten.

- b) **Polynomiale Regression** : Ähnlich zur linearen Regression wird hierbei keine affin-lineare Funktion, sondern ein Polynom genutzt. Für ein Polynom zweiten Grades kann etwa die Funktion

$$v(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$$

gewählt werden. Wieder entsteht ein Gleichungssystem:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1^2 & y_1^2 & x_1 y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & y_n^2 & x_n y_n & x_n & y_n & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}}_w \approx \underbrace{\begin{pmatrix} f(x_1, y_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_n, y_n) \end{pmatrix}}_z$$

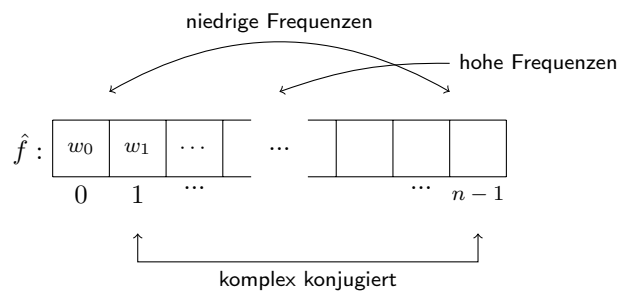
- c) **Trigonometrisches Polynom** : Hierbei wird  $v$  in den niedrigfrequenten Anteilen von  $f$  (großflächiger Verlauf, keine Details) gesucht.

$$f : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline 0 & 1 & \cdots & \cdots n-1 \end{array} \quad \cdots \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \cdots n-1 & \cdots n-1 & \cdots n-1 & \cdots n-1 \end{array}$$

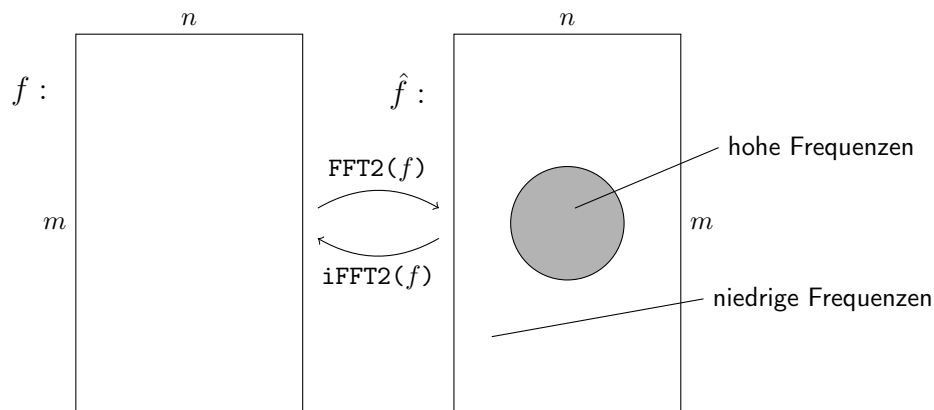
Es ergibt sich  $\hat{f}$ :

$$\hat{f}_k = \sum_{m=0}^{n-1} f_k \left( \underbrace{e^{-i2\pi \frac{k}{n}}}_{w_k} \right)^m, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Mittels der FFT (Fast Fourier Transformation) ergibt sich  $\hat{f}$  zu:



Durch entfernen dieser niedrigen Frequenzen ergibt sich  $u$ . Ähnliches funktioniert auch in 2D:



## 9.2 Thresholding als Variationsproblem

geg: Bild  $u : \Omega \rightarrow F = [0, 1]$  und Schwellenwert  $t \in (0, 1)$ .

$\Rightarrow$ :  $\left. \begin{array}{l} \Omega_0 = \{x \in \Omega : u(x) \leq t\} \rightarrow \text{schwarz} \\ \Omega_1 = \{x \in \Omega : u(x) > t\} \rightarrow \text{weiß} \end{array} \right\}$  soll in ein Variationsproblem umformuliert werden.

Setze dazu:

$$J(v) := - \int_{\Omega} (u(x) - t) \cdot v(x) \, dx \rightarrow \min \quad (9.1)$$

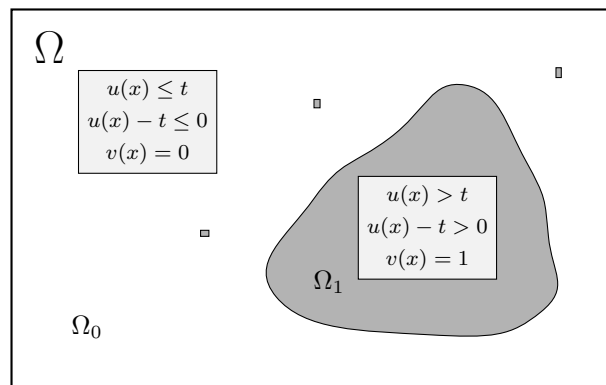
mit  $v \in U := \{v \in \Omega \rightarrow \{0, 1\} \text{ (oder } [0, 1])\}$ , dies ist jedoch kein Vektorraum.

Die Lösung dieses Problems ist offenbar

$$v(x) = \chi_{\Omega_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega_0 \\ 1, & x \in \Omega_1 \end{cases}$$

illustriert hier:





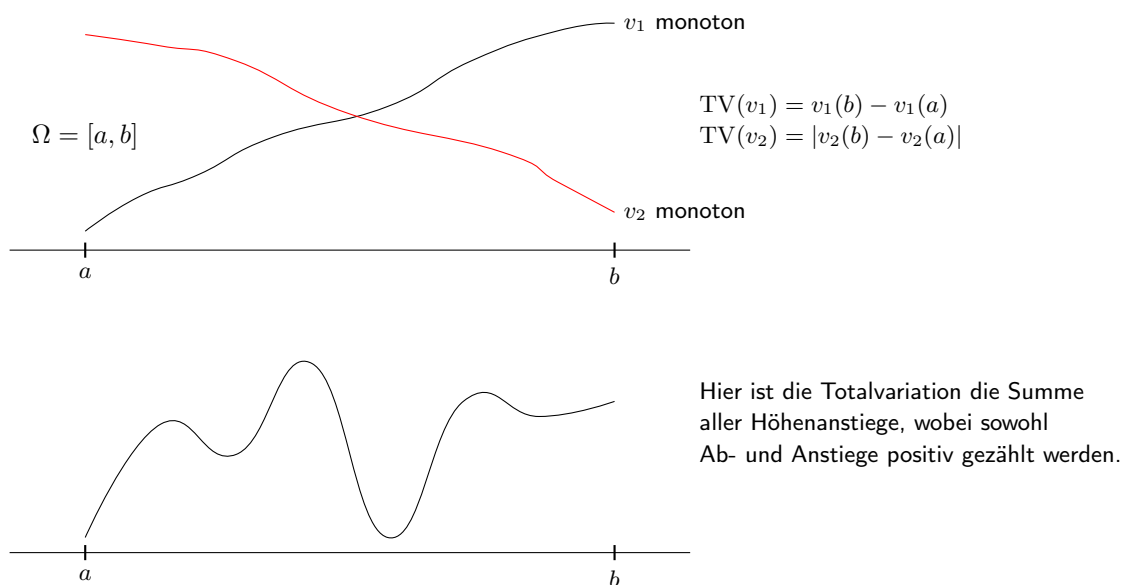
Diese Herangehensweise ist jedoch kompliziert, um sie zu begründen betrachten wir die Flecken die neben der großen Masse in der obigen Illustration zu sehen sind und etwa durch Rauschen entstanden sein könnten. Durch Verallgemeinerung des in 9.1 gegebenen Funktional können wir die Zerlegung von  $\Omega$  in  $\Omega_0$  und  $\Omega_1$  weniger anfällig gegenüber Rauschen und sonstigen kleinen Strukturen machen.

Dazu sei

$$\text{TV}(v) := \int_{\Omega} |\nabla v(x)| \, dx \quad (9.2)$$

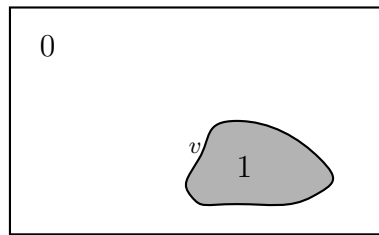
die sogenannte **Totalvariation** einer Funktion  $v$  auf  $\Omega$ .

Illustration in 1D:



In Abschnitt ?? werden wir weiterhin sehen, dass die Totalvariation sich auch auf nicht stetigen Funktionen etwa  $\chi_{(0,\infty)}$  berechnen lässt, obwohl für diese der Gradient nicht definiert ist. Für die eben genannte Funktion etwa beträgt die Totalvariation 1.

Nun in 2D:

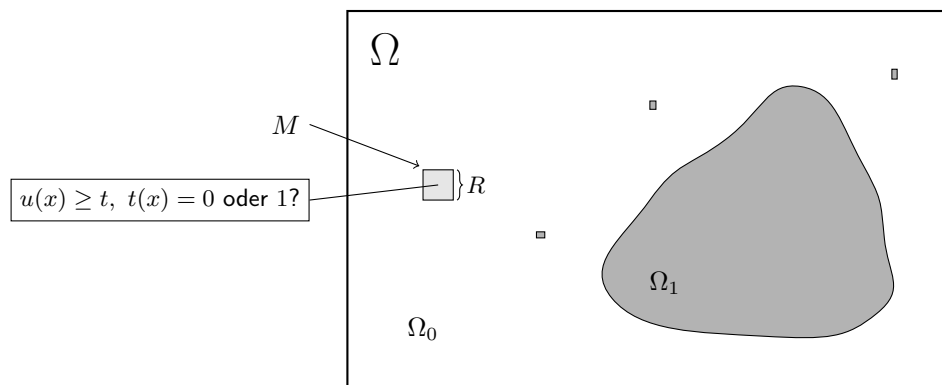


$TV(v)$  ist hier die Länge der Kante die  $\Omega_1$  von  $\Omega_0$  trennt. Die Idee ist nun  $TV(v)$  als Strafterm zu 9.1 hinzu zu addieren,

$$\tilde{J}(v) := \underbrace{- \int_{\Omega} (u(x) - t) \cdot v(x) dx}_{J(x)} + \lambda \cdot TV(v) \rightarrow \min \quad (9.3)$$

wobei  $v \in U$  ist.

Der Effekt dieser Herangehensweise wird nun illustriert:



$$\left. \begin{array}{l} \text{Falls: } v|_M = 0 : \quad a \quad + \quad \lambda \cdot b \\ \text{Falls: } v|_M = 1 : \quad a - dR^2 \quad + \quad \lambda \cdot (b + 4R) \end{array} \right\} \text{Also } M \rightarrow 0 \iff 4\lambda - dR < 0 \iff R > \frac{4\lambda}{d}$$

Das heißt das kleine Segment  $M$  wird durch 9.3 „erkannt“ falls seine Kantenlänge  $R > \frac{4\lambda}{d}$  ist. Somit können die Abmessung der kleinsten zu segmentierenden Strukturen über  $\lambda$  gesteuert werden.

### 9.3 Segmentierung nach Mumford und Shah

Wieder: Variationsrechnung

Diesmal: Ohne Vorkenntnis des thresholds

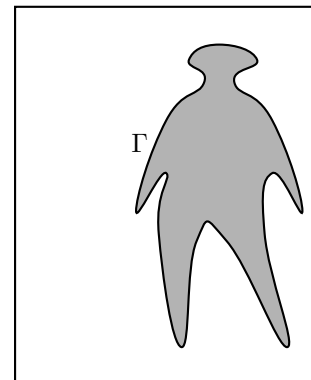
Idee: Bild zerlegen in „glatte“ Teile getrennt durch Sprünge an deren Rändern.

geg.: Bild  $u$

ges.: Stückweise glattes Bild  $v$  mit Randkurve  $\Gamma$

1. Wunsch:  $u \approx v$  auf ganz  $\Omega$

2. Wunsch:  $\nabla v$  klein auf  $\Omega \setminus \Gamma$



$$\Rightarrow J(v, \Gamma) := \underbrace{\|u - v\|_{2, \Omega}^2}_{1. \text{ Wunsch}} + \lambda \underbrace{\|\nabla v\|_{2, \Omega \setminus \Gamma}^2}_{2. \text{ Wunsch}} \rightarrow \min$$

Wie im letzten Abschnitt 9.2 soll nun noch die Segmentierung sehr kleiner Strukturen vermieden werden, indem man zu  $J$  einen entsprechenden Strafterm addiert.

$$\tilde{J}(v, \Gamma) := \|u - v\|_{2, \Gamma}^2 + \lambda \|\nabla v\|_{2, \Omega \setminus \Gamma}^2 + \mu \text{ Länge}(\Gamma) \rightarrow \min$$

Dieses wird **Mumford-Shah-Funktional** (1989) genannt.

$\lambda$  bestimmt die „Flachheit“ von  $v$  auf  $\Omega \setminus \Gamma$

$\mu$  ist proportional zur Größe der kleinsten zu segmentierenden Struktur.

Die numerische Lösung dieses Problemes ist jedoch sehr kompliziert, da neben  $v$  auch die Kurve  $\Gamma$  variiert wird, deshalb existiert eine „vereinfachte“ Version das dieses Problem approximiert.

Mumford-Shah (1989):

$$\tilde{J}(v, \Gamma) := \|u - v\|_{2, \Gamma}^2 + \lambda \|\nabla v\|_{2, \Omega \setminus \Gamma}^2 + \mu \text{ Länge}(\Gamma)$$

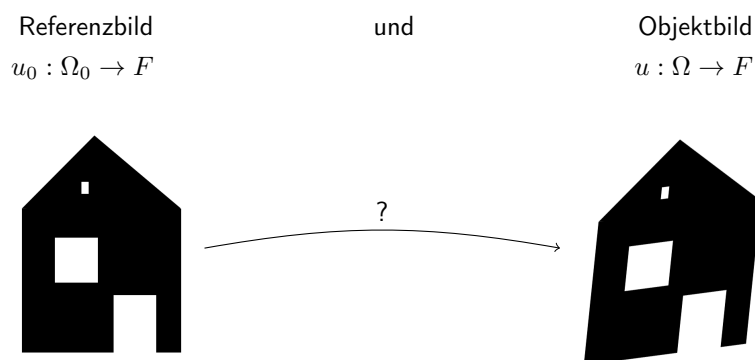
Steklovskiy & Cremers (2014):

$$\tilde{J}(v) := \int_{\Omega} \left[ |u(x) - v(x)|^2 + \min(\lambda |\nabla c(x)|^2, \mu) \right] dx$$

Die Minimierung und  $\mu$  simulieren den Sprung an der Randkurve  $\Gamma$ .

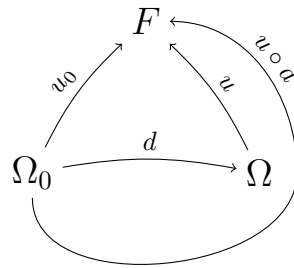
## 10 Registrierung

geg.:



ges.: Transformation/Deformation d.h.  $d : \Omega_0 \rightarrow \Omega$ , die beide Bilder bestmöglich in Einklang bringt, d.h.

$$\begin{aligned} u \circ d &\approx u_0 \\ u(d(x)) &\approx u_0(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega_0 \end{aligned}$$



Man unterscheidet zunächst in

- Merkmalsbasierte Verfahren
- Globale Verfahren

## 10.1 Merkmalsbasierte Verfahren

Hierbei sollen endlich viele **Landmarks** ( **Merkmale** ) aus  $u_0$  und  $u$  paarweise in Einklang gebracht werden, hieraus erhält man endlich viele Gleichungen zur Schätzung von  $d$ . Diese Kontrollpunkte müssen jedoch vorher von Hand bestimmt werden und in den beiden gegebenen Bildern miteinander identifiziert werden, es ist nur schwer möglich dem Computer das Finden dieser Kontrollpunkte beizubringen.

Beispiel:  $d : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  linear + Translation, d.h.:

$$d : \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_p \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} := \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_q = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 + e \\ cx_1 + dx_2 + f \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & x_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A_p} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}.$$

Die zu lösende Gleichung ergibt sich somit zu:

$$A_p \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = q.$$

Sind  $p_1, \dots, p_n \in \Omega_0$  und  $q_1, \dots, q_n \in \Omega$  paarweise zusammen gehörende Kontrollpunkte, so kann man  $a, b, c, d, e, f$  über das folgende Lineare Ausgleichsproblem schätzen:

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_{p_1}} \\ \boxed{A_{p_2}} \\ \dots \\ \boxed{A_{p_n}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \boxed{q_1} \\ \boxed{q_2} \\ \dots \\ \boxed{q_n} \end{pmatrix}.$$

Dieses kann etwa über Normalengleichungen oder QR Zerlegungen geschehen:

$n < 3$ : unterbestimmt

$n = 3$ : fair

$n > 3$ : überbestimmt

Im selben Stil können quadratische oder höhere Deformationen berechnet werden:

$$d: \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_p \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f \\ gx_1^2 + hx_1x_2 + ix_2^2 + jx_1 + kx_2 + l \end{pmatrix}}_q = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_q$$

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1 & x_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1 & x_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ l \end{pmatrix}$$

Um die 12 gesuchten Parameter hier  $a, b, \dots, l$  zu bestimmen werden  $n \geq 6$  Kontrollpunkte auf jeder Seite benötigt.

Es gibt auch noch einen anderen Spezialfall der affin-linearen Deformationen, etwa über Dreh-Spiegelungen mit Verschiebung:

$$d: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi)x_1 - r \cdot \sin(\varphi)x_2 + e \\ r \cdot \sin(\varphi)x_1 + r \cdot \cos(\varphi)x_2 + f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & 1 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \\ e \\ f \end{pmatrix} \begin{matrix} := g \\ := h \\ \\ \end{matrix}$$

Somit brauchen wir  $n \geq 2$  Kontrollpunkte um  $g, h, e, f$  zu bestimmen, hieraus können dann  $r := \sqrt{g^2 + h^2}$  und  $\varphi = \arctan(\frac{h}{g})$  bestimmt werden.

## 10.2 Globale Verfahren

Globale Verfahren benutzen keine Manuell bestimmten Kontrollpunkte und können somit komplett durch einen Computer durchgeführt werden, wiederum wird dieses Problem mittels der Variationsrechnung formuliert. Hierbei lautet das zu minimierende Funktional:

$$J(d) := \underbrace{D(u_0, u \circ d)}_{\text{Datenterm}} + \lambda \underbrace{R(d)}_{\text{Regularitätsterm}} \rightarrow \min$$

### 1. Wahl des Datenterms $D$

(a) Punktweise Differenz in der  $L^2$ -Norm:

$$D(f, g) := \|f - g\|_2^2 = \int_{\Omega} |f(x) - g(x)|^2 dx$$

(b) Vergleich der Grauwert-Verläufe

$$\bar{f} := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(x) dx, \quad \bar{g} := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} g(x) dx$$

und dann Vergleich von

$$\frac{f - \bar{f}}{\|f - \bar{f}\|_2} \quad \text{und} \quad \frac{g - \bar{g}}{\|g - \bar{g}\|_2}$$

über das  $L^2$ -Skalarprodukt

$$\left\langle \frac{f - \bar{f}}{\|f - \bar{f}\|_2}, \frac{g - \bar{g}}{\|g - \bar{g}\|_2} \right\rangle \in [-1, 1]$$

1 bedeutet vollständige Korreliertheit mit gleicher Tendenz

-1 vollständige Korreliertheit mit entgegengesetzter Tendenz

0 bedeutet Unkorreliertheit

Der sich ergebende Datenterm lautet:

$$D(f, g) := 1 - \left\langle \frac{f - \bar{f}}{\|f - \bar{f}\|_2}, \frac{g - \bar{g}}{\|g - \bar{g}\|_2} \right\rangle$$

Diese Verfahren nennt sich **Normalized Crosscorrelation** (NCC).

(c) Punktweise Differenzen der Gradienten:

$$D(f, g) := \|\nabla f - \nabla g\|_2^2 = \int_{\Omega} |\nabla f - \nabla g|^2 \, dx$$

(d) Vergleich der Gradientenverläufe, also NCC (wie in (b)) von  $\nabla f$  und  $\nabla g$ .

Es ist zu bemerken das (a) keine Verschiebung um eine Konstante erkennt, (b) findet sogar Transformationen der Form  $f = a * g + c$ .

2. Notwendigkeit und Wahl des Regularitätsterms. Betrachte etwa 

1	2	3	4
---	---	---	---

 $\rightarrow$ 

1	4	3	2
---	---	---	---

, diese Zerreißung muss bestraft werden. Ansätze:

$$d : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1(x_1, x_2) \\ y_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

(a) Große Streckungen/Deformationen bestrafen

$$R(d) := \int_{\Omega} (|\nabla y_1(x)|^2 + |\nabla y_2(x)|^2) \, dx$$

Hier werden Ableitungen 1. Ordnung benutzt.

(b) Große Krümmungen bestrafen

$$R(d) := \int_{\Omega} (|\Delta y_1(x)|^2 + |\Delta y_2(x)|^2) \, dx$$

Hier werden Ableitungen 2. Ordnung benutzt.

Es können aber auch Ableitungen höherer Ordnungen sowie Kombinationen verwendet werden.

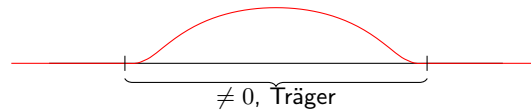
## 11 Mathematischer Nachschlag

Aus mathematischer Sicht sind einige Fragen offen geblieben, etwa:

## 11.1 Verallgemeinerte Funktionen und Ableitungen

Wie differenziert man unstetige Funktionen?

Sei  $\mathcal{D} := C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  die Menge (auch ein Vektorraum) der beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf  $\mathbb{R}^d$  mit beschränktem Träger. Etwa:



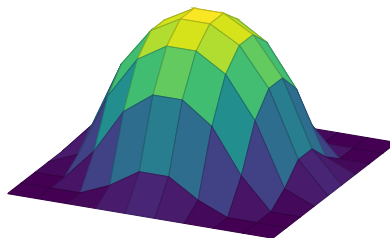
Für diese Funktion gilt

$$\varphi(x) := g(1 - |x|^2) \in \mathcal{D},$$

wobei

$$g(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & , t > 0 \\ 0 & , t \leq 0 \end{cases}$$

Dieses funktioniert auch im  $\mathbb{R}^d$ .

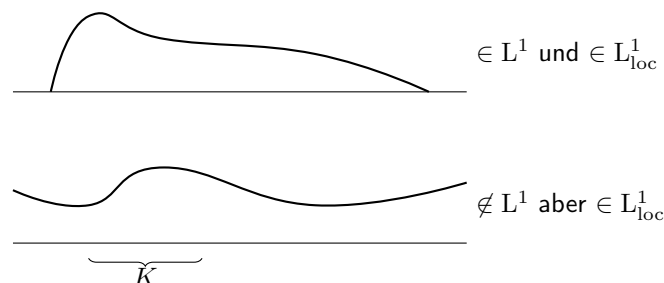


ist in  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  und hat kompakten Träger.

Sei nun  $L_{loc}^1(\mathbb{R}^d)$  die Menge aller Funktionen auf  $\mathbb{R}^d$  mit kompaktem Träger für die

$$\int_K |f(x)| \, dx < \infty$$

für alle abgeschlossenen und beschränkten Mengen  $K \subset \mathbb{R}^d$  gilt.



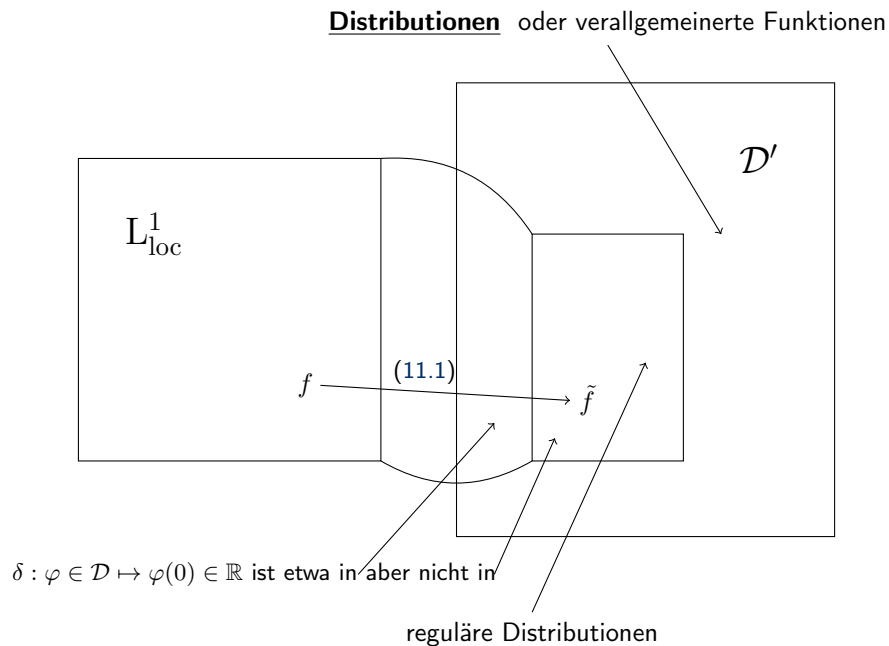
Die zweite Funktion ist nicht in  $L^1$ , da ihr Gesamtintegral nicht endlich ist. Jedoch ist das Integral über jede kompakte Menge endlich, sie hat also keine Pole, somit ist sie in  $L_{loc}^1$ .

Für jede Funktion  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$  bildet

$$\tilde{f} : \varphi \in \mathcal{D} \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \cdot \varphi(x) \, dx \in \mathbb{R} \quad (11.1)$$

ein stetiges lineares Funktional auf  $\mathcal{D}$ .

Sei nun  $\mathcal{D}'$  die Menge aller stetigen linearen Funktionalen auf  $\mathcal{D}$ , also der **Dualraum**. Also ist für jedes  $f \in L^1_{\text{loc}}$  das Funktional  $\tilde{f}$  aus (11.1) in  $\mathcal{D}'$ .



Nun zu den Ableitungen. Sei zunächst  $d = 1$  und  $f \in C^1 \subset L^1_{\text{loc}}$ . Dann gilt für alle  $\varphi \in \mathcal{D}$  wobei  $[-a, a] \supset \text{supp}(\varphi)$ :

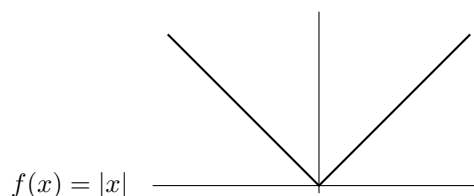
$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^1} f'(x) \varphi(x) \, dx}_{f'(\varphi)} = \int_{-a}^a f(x) \varphi(x) \, dx = \underbrace{f(x) \varphi(x) \Big|_{-a}^a}_{=0} - \int_{-a}^a f(x) \varphi'(x) \, dx = - \int_{\mathbb{R}^1} f(x) \varphi'(x) \, dx = -\tilde{f}(\varphi').$$

Für  $f \in C^1 \subset L^1_{\text{loc}}$  folgt daraus  $\tilde{f}'(\varphi) = -\tilde{f}(\varphi'), \varphi \in \mathcal{D}$ . Wir nehmen dies als Ansatz und setzen:

$$F'(\varphi) := -F(\varphi'), \quad \varphi \in \mathcal{D} \quad (11.2)$$

für alle  $F \in \mathcal{D}$ , genannt Distributionen Ableitung.

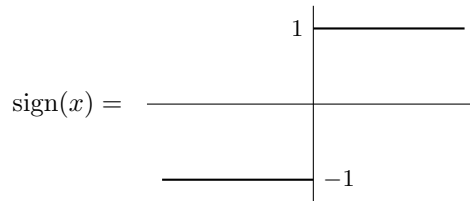
Beispiel:





Und  $F := \tilde{f}$  also:

$$\begin{aligned} F'(\varphi) &= -F(\varphi') = -\int_{-a}^a |x| \varphi'(x) dx = -\int_{-a}^0 -x\varphi'(x) dx - \int_0^a x\varphi'(x) dx = \int_{-a}^0 x\varphi'(x) dx - \int_0^a x\varphi'(x) dx \\ &= \underbrace{x\varphi(x)|_{-a}^0}_0 - \int_{-a}^0 1\varphi(x) dx - \underbrace{x\varphi(x)|_0^a}_0 + \int_0^a 1\varphi(x) dx = \int_{-a}^a \text{sign}(x)\varphi(x) dx = \tilde{\text{sign}}(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D} \end{aligned}$$



Also gilt  $F' = \tilde{\text{sign}}$ .

Nun leiten wir die sign Funktion noch einmal ab:

$$\begin{aligned} \tilde{\text{sign}}'(\varphi) &= -\tilde{\text{sign}}(\varphi') = -\int_{\mathbb{R}} \text{sign}(x)\varphi'(x) dx = -\int_{-a}^a \text{sign}(x)\varphi'(x) dx \\ &= -\int_{-a}^0 (-1)\varphi'(x) dx - \int_0^a 1\varphi'(x) dx \\ &= \underbrace{\int_{-a}^0 \varphi'(x) dx}_{\varphi(0) - \varphi(-a)} - \underbrace{\int_0^a \varphi'(x) dx}_{-\varphi(a) + \varphi(0)} = 2\varphi(0) = 2\delta(\varphi) \\ &\Rightarrow \tilde{\text{sign}}' = 2\delta \end{aligned}$$

Diese Ableitung ist jedoch nicht mehr mit einem Element in  $L^1_{\text{loc}}$  identifizierbar. Distributionen sind beliebig oft differenzierbar, somit folgt:

$$F^{(k)}(\varphi) = (-1)^k F(\varphi^{(k)}).$$

Ein anderes Beispiel in mehr Dimensionen:

Hier ist die Ableitung definiert über:

$$(D^\alpha F)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} F(D^\alpha \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}, \alpha \in \mathbb{N}^d$$

Für dieses Beispiel ist  $d = 2$  und  $\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , wobei  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ .

$$\Rightarrow D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{(\partial x_1)^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{(\partial x_2)^{\alpha_2}} = \frac{\partial^2}{(\partial x_1)^2} \frac{\partial}{\partial x_2}$$

also

$$(\underbrace{D^\alpha F}_{F_{x_1 x_1 x_2}})(\varphi) = (-1)^3 F(\varphi_{x_1 x_1 x_2})$$

$|\alpha| = 1 \Rightarrow$  eine partielle Ableitung  $\Rightarrow$  Gradient, also Vektor der 1. partiellen Ableitungen.

## 11.2 Verallgemeinerter Gradient und Totalvariation

Für  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  erwarten wir  $\nabla f = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ \vdots \\ f_{x_d} \end{pmatrix}$  als Gradient. Nun fassen wir jede Komponente  $f_{x_i}$  als Distribution auf:

$$\tilde{\nabla} f := \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ \vdots \\ f_{x_d} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_d \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{f_{x_1}(\varphi_1) + \dots + f_{x_d}(\varphi_d)}_{\in \mathbb{R}}.$$

Mit (11.2) ergibt sich:

$$\nabla f(\varphi) = \sum_{k=1}^d \tilde{f}_{x_k}(\varphi_k) \stackrel{(11.2)}{=} \sum_{k=1}^d -\tilde{f}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \varphi_k\right) = -\tilde{f}\left(\sum_{k=1}^d \frac{\partial}{\partial x_k} \varphi_k\right) = -\tilde{f}(\operatorname{div}(\varphi)), \quad \varphi \in \mathcal{D}^d \quad (11.3)$$

genannt **Distributioneller Gradient**. Das heißt  $\tilde{\nabla} f$  ist eine lineare Abbildung von  $\mathcal{D}^d \rightarrow \mathbb{R}$ .

Die Totalvariation von  $f \in L^1_{\text{loc}}$  ist die Operatornorm dieses Funktional  $\tilde{\nabla} f : (\mathcal{D}^d, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\operatorname{TV}(f) := \sup_{\varphi \in \mathcal{D}^d, \|\varphi\|_\infty=1} |\tilde{\nabla} f(\varphi)| \stackrel{(11.3)}{=} \operatorname{TV}(f) := \sup_{\varphi \in \mathcal{D}^d, \|\varphi\|_\infty=1} |\tilde{f}(\operatorname{div}(\varphi))|. \quad (11.4)$$

Für folgende Spezialfälle wird  $\operatorname{TV}(\varphi)$  etwas handlicher als in (11.4):

1. Sei  $f \in C^1(\Omega)$ , d.h. stetig differenzierbar auf  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  und  $r \in \mathbb{R}^d$  mit  $\|r\| = 1$ . Für die Richtungsableitung  $\frac{\partial f}{\partial r}$  bezüglich  $r$  gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial r}(x) = \langle \nabla f(x), r \rangle \leq \|\nabla f(x)\| \cdot \underbrace{\|r\|}_1 = \|\nabla f(x)\|$$

mit Gleichheit im Falle von  $r = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$ . Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \operatorname{TV}(f) &= \sup_{\varphi \in \mathcal{D}^d, \|\varphi\|_\infty=1} (f_{x_1}(\varphi_1) + \dots + f_{x_d}(\varphi_d)) \\ &= \sup_{\varphi \in \mathcal{D}^d, \|\varphi\|_\infty=1} \underbrace{\int_{\Omega} f_{x_1} \varphi_1(x) + \dots + f_{x_d}(x) \varphi_d(x) \, dx}_{\langle \nabla f(x), \varphi(x) \rangle} = \int_{\Omega} \|\nabla f(x)\| \, dx \end{aligned} \quad (11.5)$$

Dabei wird immer  $\varphi(x) = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$  gewählt, was zwar im Allgemeinen nicht in  $\mathcal{D}^d$  liegt, sich aber beliebig gut durch Elemente aus  $\mathcal{D}^d$  approximieren lässt.

2. Sei  $f = \chi_D$  die charakteristische Funktion von  $D \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$ , wobei  $D$  beschränkt sei und stückweise glatten Rand besitzt. Dann gilt:

$$\tilde{\nabla} f(\varphi) \stackrel{(11.3)}{=} - \int \chi_D \operatorname{div}(\varphi(x)) \, dx \stackrel{\text{Gaußscher Integralsatz}}{=} - \int_{\partial D} \langle \varphi(x), n(x) \rangle \, ds(x),$$

wobei  $n(x)$  der Normalenvektor an  $\partial D$  ist. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{TV}(f) &= \sup_{\varphi \in \mathcal{D}^d, \|\varphi\|_\infty=1} \int_{\partial D} \langle \varphi(x), n(x) \rangle \, ds(x) \\ &= \int_{\partial D} \underbrace{\|n(x)\|}_1 \, ds(x) = \int_{\partial D} 1 \, ds(x) = |\partial D|. \end{aligned} \quad (11.6)$$

## 11.3 Existenz und Eindeutigkeit der Variationslösung

Wann ist ein Minimierungsproblem

$$J(u) \xrightarrow{u \in U} \min$$

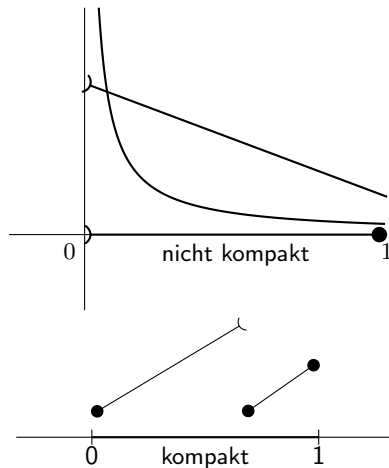
eindeutig lösbar?

a) Existenz

$$J : U \rightarrow \mathbb{R}$$

Wobei  $U$  ein metrischer Raum ist.

Aus der Analysis ist bekannt, dass stetige Funktionen auf kompakten Mengen ihr Maximum und Minimum annehmen.



Nimmt sein Maximum nicht an, da  $U$  nicht kompakt ist, jedoch ist  $f$  stetig.

Nimmt sein Maximum nicht an, da  $f$  unstetig ist, jedoch ist  $U$  kompakt.

Wir benötigen jedoch nur die Existenz des Minimums, nicht des Maximums, daher reicht im obigen Satz die **Untere Halbstetigkeit**, diese ist für ein  $u_0 \in U$  erfüllt falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : J(U_\delta(u_0)) \subset (J(u_0) - \varepsilon, \infty)$$

Im Vergleich zur gewöhnlichen Stetigkeit:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : J(U_\delta(u_0)) \subset U_\varepsilon(J(u_0))$$

Aber auch die Kompaktheit von  $U$  ist nicht oft erfüllt, deshalb definieren wir:

$$S_\alpha := \{u \in U : J(u) \leq \alpha\}, \quad \text{Sub-Niveaumenge zu Niveau } \alpha$$

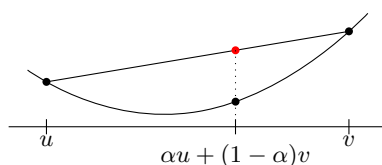
**Existenzsatz:** Sei  $U$  ein metrischer Raum und  $J : U \rightarrow \mathbb{R}$  so, dass

- i)  $J$  unter-halbstetig.
- ii)  $\exists \alpha \in \mathbb{R} : S_\alpha \neq \emptyset$  und kompakt.

Dann existiert ein Minimierer  $u^* \in U$  mit

$$J(u^*) \leq J(u) \quad \forall u \in U.$$

b) Eindeutigkeit



$J : U \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **strengkonvex** falls  $\forall u, v \in U, \alpha \in (0, 1)$ :

$$\underbrace{J(\alpha u + (1 - \alpha)v)}_{\bullet} < \underbrace{\alpha J(u) + (1 - \alpha)J(v)}_{\bullet}$$

**Eindeutigkeitssatz:** Falls  $J$  strengkonvex ist existiert höchstens ein Minimierer.

*Beweis.* Angenommen,  $u^* \neq v^* \in U$  seien Minimierer von  $J$ , d.h.

$$J(u^*) = J(v^*) = \inf_{u \in U} J(u)$$

$$\stackrel{\text{str. konvex}}{\implies} \forall \alpha \in (0, 1) : J(\alpha u^* + (1 - \alpha)v^*) < \alpha J(u^*) + (1 - \alpha)J(v^*) = \inf_{u \in U} J(u) \not\leq$$

Dieses ist jedoch ein Widerspruch zur Minimalität von  $J(u^*)$  und  $J(v^*)$ . □