

Mathematische Bildverarbeitung

Inhaltsverzeichnis

1	Überblick	2
1.1	Techniken der Bildverarbeitung	2
1.2	Unser Fokus	2
1.3	Verwandte Vorlesungen	2
1.4	Literatur	2
2	Was ist ein Bild?	3
2.1	Definition	3
2.2	Umwandlung	3
2.3	Beispiel Rotation	4
3	Histogramme und deren Anwendungen	5
3.1	Histogramme	5
3.2	Anwendung: Kontrastverbesserung	6
3.3	Anwendung: SW-Konvertierung	8
4	Einfache morphographisch Operationen	11
4.1	Verknüpfungen von A und B	11
5	Entrauschen: Filter & Co.	14
5.1	Rauschen	14
5.2	Glättungsfilter	15

1 Überblick

1.1 Techniken der Bildverarbeitung

- Kontrastverbesserung
- Entrauschen
- Kantendetektion
- Schärfen
- Inpainting
- Segmentierung (Einzlene Objekte detektieren)
- Registrierung (Bilder des selben Objektes in Einklang bringen)

1.2 Unser Fokus

- Mathematische Beschreibung

1.3 Verwandte Vorlesungen

- 3D computervision
- Digitale Bildanalyse
- Mustererkennung und Datenkompression
- Medical imaging

1.4 Literatur

- Bredies, Lorenz : Mathematische Bildverarbeitung
- Aubert, Kornprobst : Mathematical Problems in Image Processing
- Modersitzki : Numerical Methods for Image Registration
- Alt : Lineare Funktionalanalysis

2 Was ist ein Bild?

2.1 Definition

Digitale/diskrete Sicht

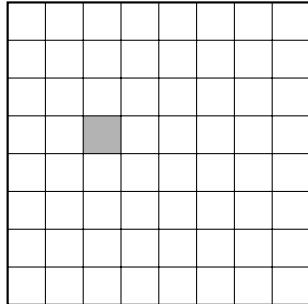


Abbildung 1: Diskretes Bild
Darstellung als Matrix.

Werkzeuge: Lineare Algebra

Vorteile: Endlicher Speicher

Nachteile: Probleme bei zoomen und drehen

Kontinuierlich/analoge Sicht

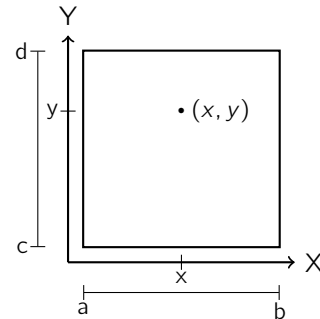


Abbildung 2: Kontinuierliches Bild
Darstellung als Funktion in zwei
Veränderlichen

Werkzeuge: Analysis

Vorteile: Mehr Freiheit (z.b. Kante=Linie
entlang einer Unstetigkeit)

Nachteile: Unendlicher Speicher

Definition. Ein **Bild** ist eine Funktion $u : \Omega \rightarrow F$, wobei $\Omega \subset \mathbb{Z}^d$ (im diskreten Fall) oder $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (im kontinuierlichen Fall).

$d = 2$: Typisches 2D Bild

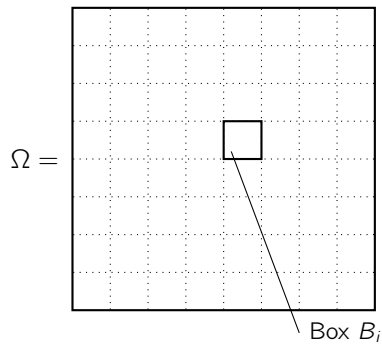
$d = 3$: 3D-Bild bzw. "Körper" oder Video: 2D Ort + Zeit

F ist der **Farbraum**, Beispiele:

- $F = [0, 1]$ oder $F = \{0, 1, \dots, 255\}$, Graustufen
- $F = \{0, 1\}$ schwarz/weiß
- $F = [0, 1]^3$ oder $F = \{0, 1, \dots, 255\}^3$ Farbbilder

2.2 Umwandlung

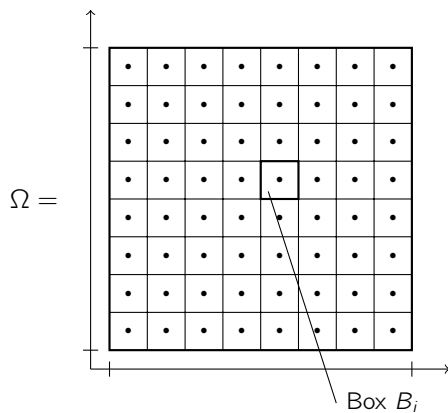
Kontinuierlich \rightarrow Diskret:



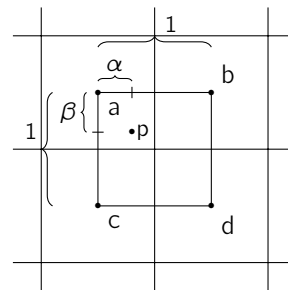
- Ω in Gitter zerlegen
- Jede Box durch nur einen Farbwert approximieren
- Etwa durch den Funktionswert im Mittelpunkt der Box
- oder durch den Mittelwert in der Box:

$$\frac{1}{|B_i|} \cdot \int_{B_i} u(x) dx$$

Diskret \rightarrow Kontinuierlich:



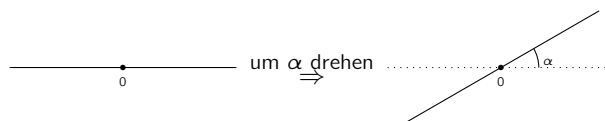
1. Idee: Jeder Punkt der Box B_i erhält den Funktionswert von B_i aus als diskretem Pixel \Rightarrow **Nearest neighbour interpolation**.
2. Idee: Mittelpunkt von Box B_i erhält den Wert von Pixel B_i sonst wird interpoliert. Grauwert $g :=$ Gewichtetes Mittel aus Grauwerten a, b, c, d .



$$g = (1-\alpha) \cdot (1-\beta) \cdot a + \alpha \cdot (1-\beta) \cdot b + (1-\alpha) \cdot \beta \cdot c + \alpha \cdot \beta \cdot d$$

Dieses wird **Bilinear interpolation** genannt.

2.3 Beispiel Rotation



1. Fall, kontinuierliches Bild

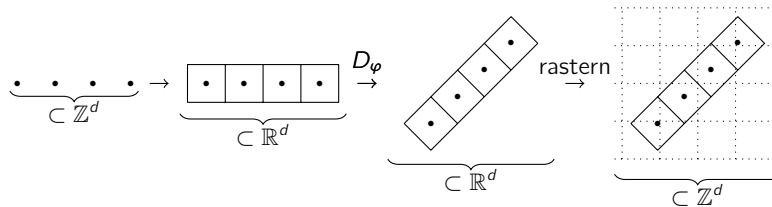
Sei u das alte Bild und v das neue Bild, dann ist die Drehung gegeben durch eine **Drehmatrix** :

$$D_\varphi \in \mathbb{R}^{d \times d}, D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

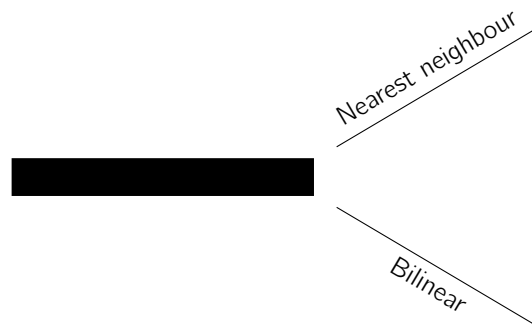
Damit folgt, dass $D(u) = D_\varphi \Omega$ und $v(x) = u(\underbrace{D_\varphi^{-1}x}_{\in \Omega}) = u(D_{-\varphi}x)$. ($D(u)$ ist die **Domain** von u)

2. Fall, diskretes Bild

Dieses ist problematisch, denn i.A. $x \in \mathbb{Z}^d$, aber $D_\varphi x \notin \mathbb{Z}^d$.



Weiterhin ist $v(x) = u(D_\varphi^{-1}x)$, wobei der konkrete Wert durch Interpolation bestimmt wird.



3 Histogramme und deren Anwendungen

3.1 Histogramme

Sei $u : \Omega \rightarrow F$ ein diskretes Bild, dann heißt die Abbildung

$$H_u : F \rightarrow \mathbb{N}_0$$

$$F \ni k \mapsto \#\{x \in \Omega | u(x) = k\}$$

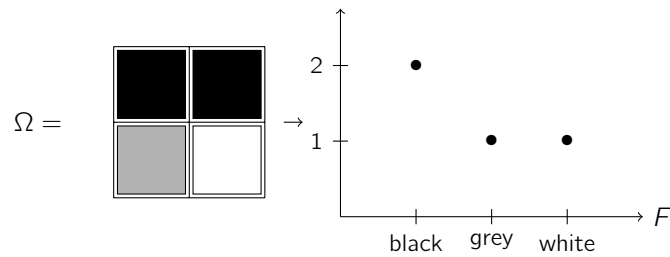
Histogramm des Bildes u . Dieses gibt an, wie oft die Farbe k im Bild vorhanden ist.

Damit gilt auch:

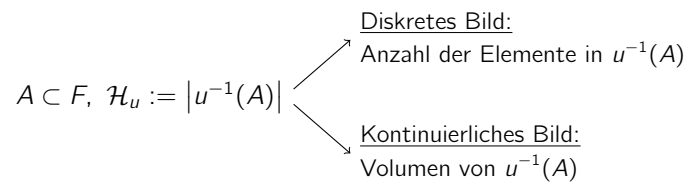
$$\sum_{k \in F} H_u(k) = |\Omega|, \text{ also die Anzahl der Pixel}$$

Bemerkung. Manchmal betrachtet man die relative Häufigkeit $\tilde{H}_u(k) = \frac{H_u(k)}{|\Omega|}$.

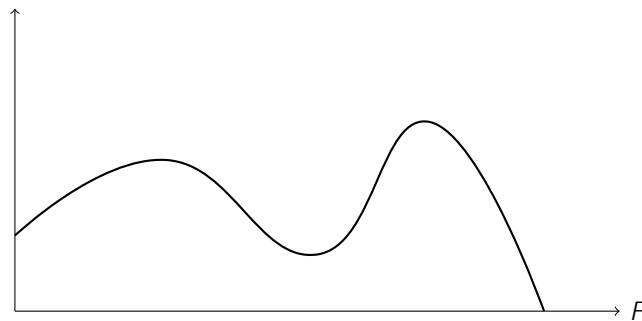
Beispiel:



Für kontinuierliche Bilder wird das allgemeinere Konzept von einem **Maß** benötigt:

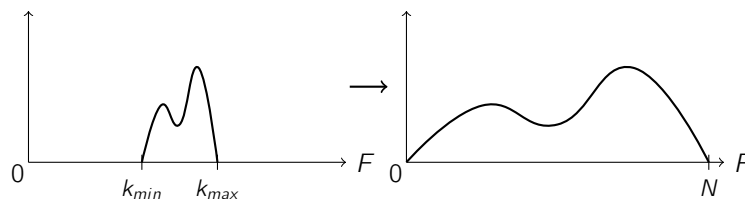


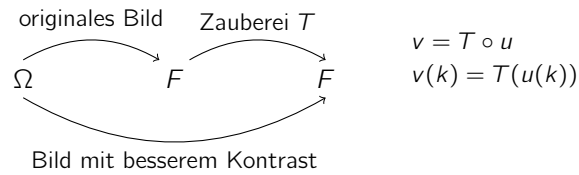
Zusammenhang zum vorherigen: $\mathcal{H}_u(A) = \sum_{k \in A} H_u(k)$. Man sagt dann, dass U_u eine **Dichte** zum Maß \mathcal{H}_u sei. Diese kann auch in kontinuierlichen existieren:



3.2 Anwendung: Kontrastverbesserung

Problem & Idee: Falls das Bild nur einen kleinen Teil von F nutzt, kann der Kontrast verbessert werden, indem man das Bild auf ganz F verteilt.





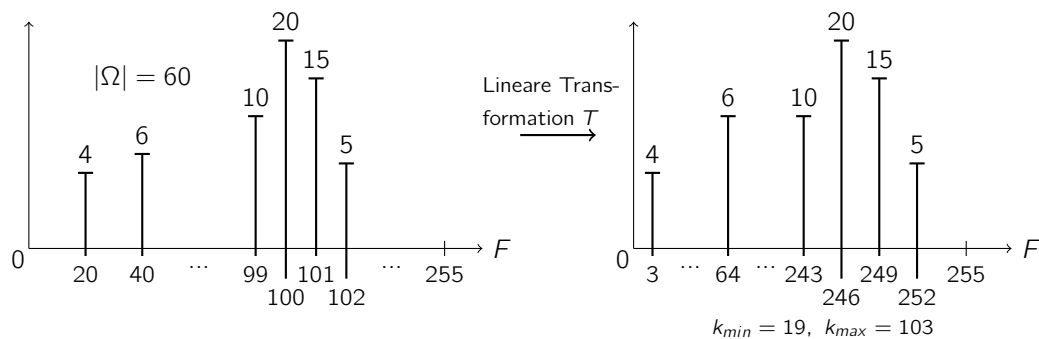
1. Idee, Kontrastdehnung:

T "lineare" Abbildung, so dass $T(k_{min}) = 0$ und $T(k_{max}) = N$:

$$T(k) = \frac{k - k_{min}}{k_{max}} N, \text{ Kontinuierlicher Farbraum}$$

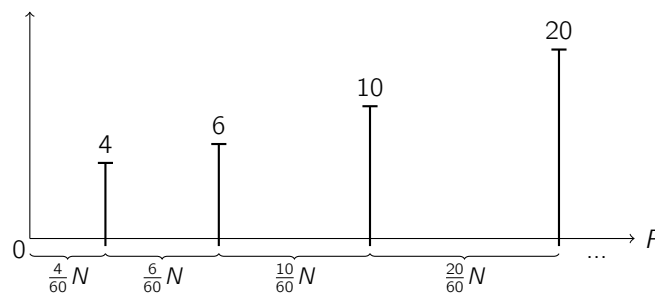
$$T(k) = \left\lceil \frac{k - k_{min}}{k_{max}} N \right\rceil, \text{ Diskreter Farbraum}$$

Beispiel:



2. Idee nicht-lineare Kontrastdehnung

Diesesmal setzen wir $T(k) = \left\lceil \frac{N}{|\Omega|} \sum_{l=0}^k H_u(l) \right\rceil$ für einen diskreten Farbraum und erhalten:



T lässt sich auch alternativ ausdrücken durch:

$$T(k) = [\mathcal{H}_u(\{0, \dots, k\})]$$

Und somit folgt dass für den kontinuierlichen Fall T durch

$$T(k) = \frac{N}{|\Omega|} \mathcal{H}_u((0, k))$$

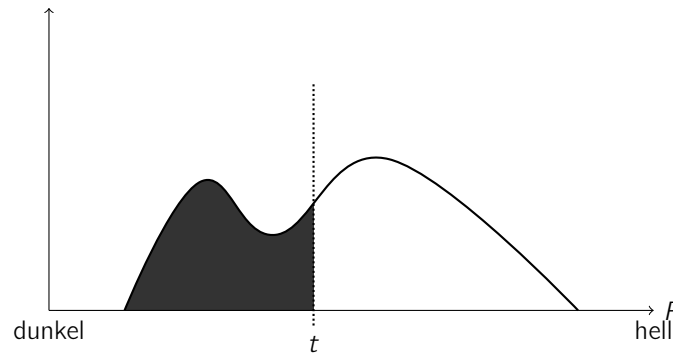
definiert werden kann. Allgemein heißt der Prozess **Histogramm - equalisation**.

3.3 Anwendung: SW-Konvertierung

Aufgabe: Graustufenbild \rightarrow SW-Bild.

Nützlich etwa bei Objekterkennung/Segmentierung.

Idee: Das Histogramm an einem gewissen Schwellenwert t spalten:



Also setze nun für $t \in F$:

$$\text{schwarz} = \{k \in F | k \leq t\}$$

$$\text{weiß} = \{k \in F | k > t\}$$

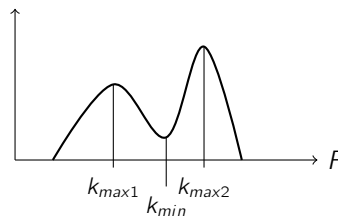
Graustufenbild $u \rightarrow$ schwarz/weiß Bild \tilde{u} :

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} 0, & u(x) \in \text{schwarz} \\ 1, & u(x) \in \text{weiß} \end{cases} \Rightarrow \tilde{F} = \{0, 1\}$$

Methoden um diesen Schwellenwert zu wählen:

1. Shape based Methods :

Falls das Histogramm von u bimodal ist, also die Form:



hat, dann wähle:

$$t := k_{min}$$

$$\text{oder } t := \frac{k_{max1} + k_{max2}}{2}$$

2. Otsu's Verfahren (1979):

Vorher einige Definitionen.

Die **Masse** :

$$m_{\text{schwarz}} := \sum_{k \in \text{schwarz}} H_u(k)$$

$$m_{\text{weiß}} := \sum_{k \in \text{weiß}} H_u(k)$$

Der **Mittlewert** :

$$\mu_{\text{schwarz}} := \frac{\sum_{k \in \text{schwarz}} k \cdot H_u(k)}{\sum_{k \in \text{schwarz}} H_u(k)} = \frac{\sum_{k \in \text{schwarz}} k \cdot H_u(k)}{m_{\text{schwarz}}}$$

$$\mu_{\text{weiß}} := \frac{\sum_{k \in \text{weiß}} k \cdot H_u(k)}{\sum_{k \in \text{weiß}} H_u(k)} = \frac{\sum_{k \in \text{weiß}} k \cdot H_u(k)}{m_{\text{weiß}}}$$

Die **Varianz** :

$$\sigma_{\text{schwarz}}^2 = \sum_{k \in \text{schwarz}} (k - \mu_{\text{schwarz}})^2 \cdot H_u(k)$$

$$\sigma_{\text{weiß}}^2 = \sum_{k \in \text{weiß}} (k - \mu_{\text{weiß}})^2 \cdot H_u(k)$$

Nun lautet Otsu's Methode: $\sigma_{\text{schwarz}}^2 + \sigma_{\text{weiß}}^2 \xrightarrow{t} \min$.

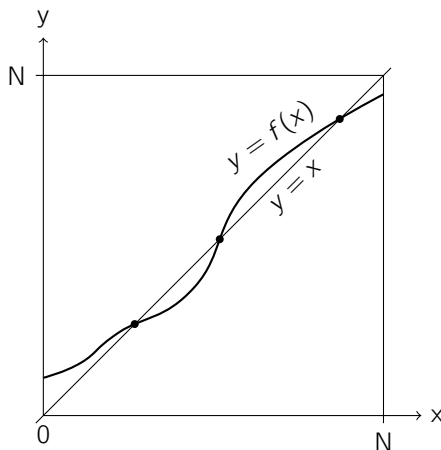
3. **Median** :

Wähle t so dass $m_{\text{schwarz}} = m_{\text{weiß}}$.

4. **Isodata Algorithmus** (1970s):

Wähle t so, dass $t = \frac{\mu_{\text{schwarz}} - \mu_{\text{weiß}}}{2} =: f(t)$.

Diese Gleichung ist bereits eine **Fixpunktgleichung** und eine Lösung kann, etwa mit einer **Fixpunktiteration** approximiert werden, das heißt $t_{n+1} := f(t_n)$.



Matlab code :

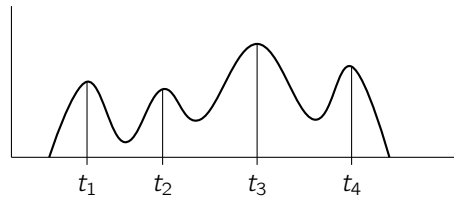
```

1 u=imread('liftingbody.png');
2 t=greythresh(u);%uses Otsu's method
3 v=im2bn(u,t);
4 imshow(v);

```

Einige dieser Verfahren können auch erweitert werden, so dass ein Graustufenbild nicht nur in zwei, sondern in M Farben zerlegt werden kann. Im allgemeinen werden dann $M - 1$ thresholds benötigt.

1. Shape based :



2. Otsu's Verfahren :

Farbklassen:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \{k : k \leq t_1\} \\
 F_2 &= \{k : t_1 < k \leq t_2\} \\
 &\vdots \\
 F_M &= \{k : t_{M-1} < k\}
 \end{aligned}$$

Und wie zuvor: $\sigma_1^2 + \dots + \sigma_M^2 \rightarrow \min$

3. Median :

Zerteile F in M Quantile gleicher Masse.

4. Isodata :

Hierzu existiert keine Bekannte Verallgemeinerung auf M Farbklassen.

Matlab code :

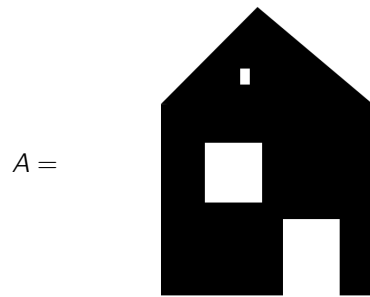
```

1 u=imread('Circles Bright Dark.png');
2 t=multithresh(u,M-1);
3 v=imquantize(u,t);
4 w=label2rgb(u,t);
5 imshow(w);

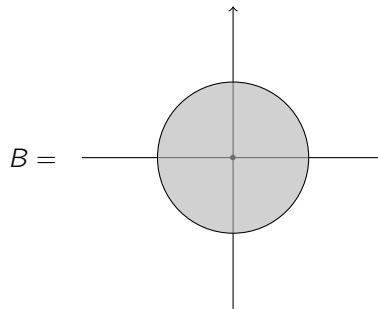
```

4 Einfache morphographisch Operationen

S/W Bild:



Strukturelement :



4.1 Verknüpfungen von A und B

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

Diese wird dilation genannt.

Anschaulich wird an jeden schwarzen Punkt des Bildes A das Struktur element B gelegt.

$$A + B =$$

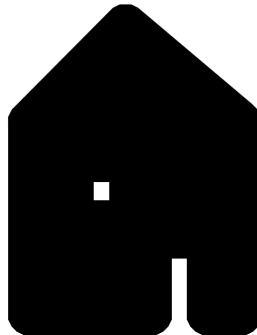


Bild erzeugt in Matlab durch:

```

1 I=imread('Bild1.png');
2 se=strel('disk',40,8);
3 I2=imcomplement(imdilate(imcomplement(I),se));%Es wird das Komplement des Bildes
    gebildet, damit das Strukturelement auf den schwarzen Bereich angewendet wird
4 imshow(I2);

```

$$A - B := \{a : a + B \subset A\}$$

Diese wird **erosion** genannt.

Anschaulich werden die schwarzen Bereiche des Bildes gesucht, in die das Strukturelement hinein passt.

$$A - B =$$

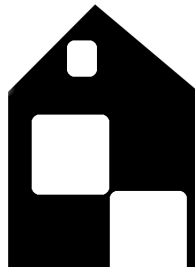


Bild erzeugt in Matlab durch:

```

1 I=imread('Bild1.png');
2 se=strel('disk',20,8);

```

```

3 I2=imcomplement(imerode(imcomplement(I),se));
4 imshow(I2);

```

Es ist schnell zu erkennen das $A \neq (A + B) - B$, deshalb wird eine neue Operation eingeführt:

$$A \bullet B := (A + B) - B$$

Dieses wird **schließen** genannt und wird etwa genutzt um Löcher, z.b. Rauschen, in einem Bild zu entfernen. Im Beispiel Bild ist zu sehen, dass das obere Fenster nicht mehr vorhanden ist.

$A \bullet B =$



Bild erzeugt in Matlab durch:

```

1 I=imread('Bild1.png');
2 se=strel('disk',20,8);
3 I2=imcomplement(imdilate(imcomplement(I),se));
4 I3=imcomplement(imerode(imcomplement(I2),se));
5 imshow(I3);

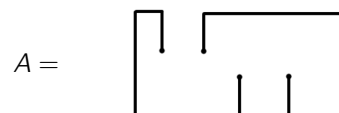
```

Es existiert auch die Umgekehrt Operation:

$$A \circ B := (A - B) + B$$

Diese wird **öffnen** genannt.

Diesmal mit einem neuen Beispiel:



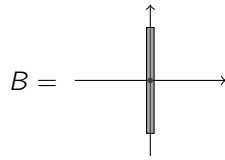


Bild erzeugt in Matlab durch:

```

1 I=imread('Bild2.png');
2 se=strel('line',10,90);
3 I2=imcomplement(imerode(imcomplement(I),se));
4 I3=imcomplement(imerode(imcomplement(I2),se));
5 imshow(I3);

```

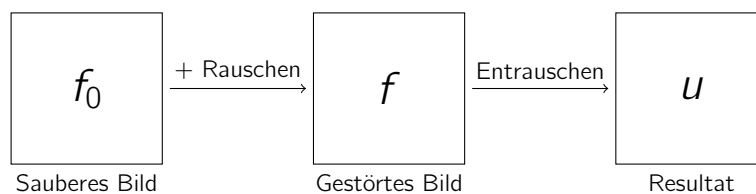
5 Entrauschen: Filter & Co.

5.1 Rauschen

Rauschen : Ungewollte Störungen in einem Bild

- punktweise
- zufällig
- unabhängig
- additiv (bei multiplikativem Rauschen *log* anwenden)

Notation:



Wie gut das entrauschte Bild u das saubere Bild f_0 beschreibt wird durch Normen gemessen.

$\|f - f_0\|$, Rauschen

$\|u - f_0\|$, **Absoluter Fehler**

$\frac{\|u - f_0\|}{\|f - f_0\|}$, **Relativer Fehler** im Vergleich zum Rauschen

$\frac{\|u - f_0\|}{\|f_0\|}$, Relativer Fehler im Vergleich zum Signal

Typischerweise ist die gewählte Norm:

$$\|f\| = \|f\|_2 = \sqrt{\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx}$$

oder im diskreten:

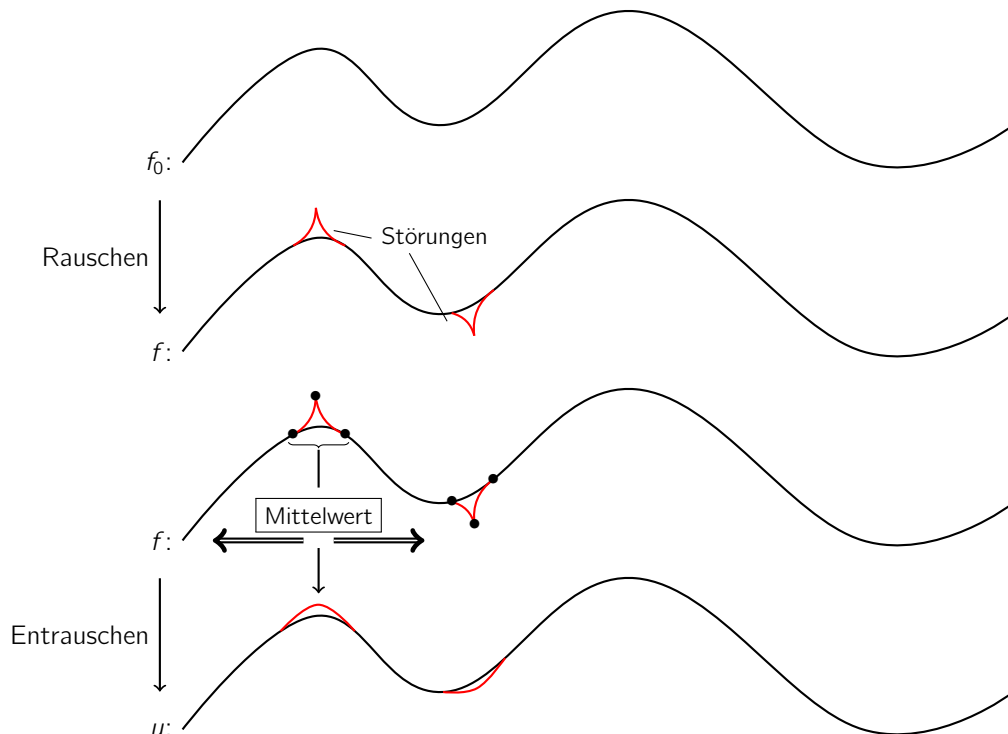
$$\|f\|_2 = \sqrt{\sum_{x \in \Omega} |f(x)|^2}$$

Eng verwandt ist die **Signal to noise ratio** (SNR):

$$\log\left(\underbrace{\frac{\|f_0\|_2}{\|u - f_0\|_2}}_{\in [1, \infty)}\right) \in [0, +\infty), \text{ wobei } 0 \text{ schlecht und } +\infty \text{ gut ist.}$$

5.2 Glättungsfilter

Grundidee: (zur Vereinfachung in 1D)

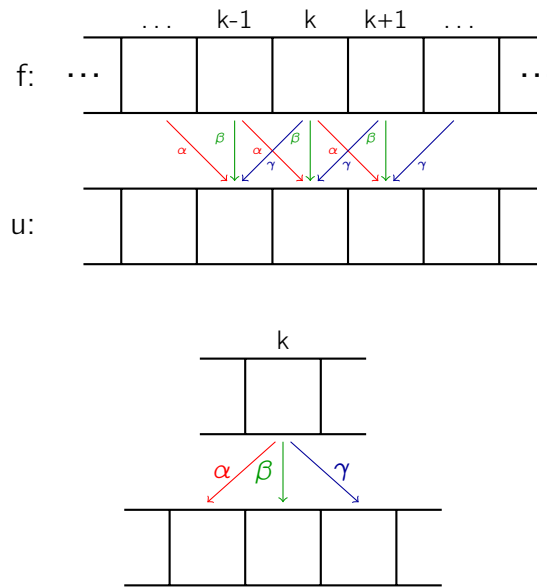


$$u(k) := \alpha \cdot f(k-1) + \beta \cdot f(k) + \gamma \cdot f(k+1) \quad (5.1)$$

wobei:

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \quad (5.2)$$

Schematisch bedeutet (5.1):



Durch (5.1) ist eine Abbildung $f \mapsto u$ gegeben, wir schreiben kurz:

$$u = m \boxtimes f, \text{ dieses wird } \underline{\text{Korrelation}} \text{ genannt.}$$

mit:

$$(m \boxtimes f)(k) = \sum_{i \in \text{supp}(m)} m(i) f(k+i) \quad (5.3)$$

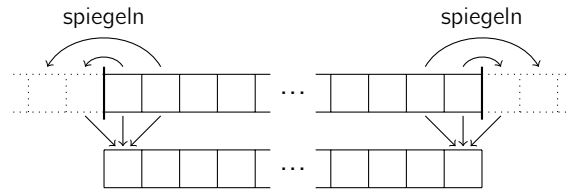
und:

$$m = \begin{array}{ccccc} & \dots & -1 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \alpha & \beta & \gamma & \dots \end{array} \text{ genannt } \underline{\text{Maske}} .$$

Setzt man nun $j := k + i$ in (5.1), so ist $i = j - k$, d.h.

$$(m \boxtimes f)(k) = \sum_{i \in \text{supp}(m)} m(j-k) f(j) \quad (5.4)$$

Um die Abbildung auf den Rand anzuwenden wird das Bild gespiegelt, in 1D:



in 2D:

d	b	d
q	p	q
d	b	d

Formel (5.4) erinnert an die Formel der Faltung:

$$(g * f)(k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} g(\underbrace{k-j}_{\text{Anders als (5.4)}}) \cdot f(j) \quad (5.5)$$

Setzt man also $g(i) := m(-i) =: \tilde{m}(i)$, was einer Spiegelung der Maske entspricht, dann ist

$$m \boxtimes f = g * f = \tilde{m} * f$$

Eigenschaften der Faltung:

- 1' $(f * g) * h = f * (g * h)$, Assoziativität
- 2' $f * g = g * f$, Kommutativität
- 3' $\tilde{f} * \tilde{g} = \widetilde{f * g}$, kompatibel mit Spiegelung

Eigenschaften der Korrelation:

- 1' $f \boxtimes (g \boxtimes h) = \tilde{f} * (\tilde{g} * h) \stackrel{1}{=} (\tilde{f} * \tilde{g}) * h \stackrel{3}{=} (\widetilde{f * g}) * h = (f * g) \boxtimes h \neq (f \boxtimes g) \boxtimes h$, nicht assoziativ!
- 2' $f \boxtimes g = \tilde{f} * g \stackrel{2}{=} g * \tilde{f} = \tilde{\tilde{g}} * \tilde{\tilde{f}} \stackrel{3}{=} \widetilde{(\tilde{g} * \tilde{f})} = \widetilde{g \boxtimes f} \neq g \boxtimes f$, nicht kommutativ!
- 3' $\tilde{f} \boxtimes \tilde{g} = \tilde{\tilde{f}} * \tilde{\tilde{g}} \stackrel{3}{=} \widetilde{(\tilde{f} * \tilde{g})} = \widetilde{f \boxtimes g}$, kompatibel mit Spiegelung

Index

öffnen, 13

Absoluter Fehler, 15

Bild, 3

Bilinear interpolation, 4

bimodal, 8

Dichte, 6

dilation, 11

Domain, 5

Drehmatrix, 4

erosion, 12

Farbraum, 3

Fixpunktgleichung, 9

Fixpunktiteration, 9

Histogramm, 5

Histogramm - equalisation, 7

Isodata Algorithmus, 9

Korrelation, 16

Maß, 6

Maske, 16

Masse, 9

Median, 9

Mittelwert, 9

morphographisch Operationen, 11

Nearest neighbour interpolation, 4

Otsu's Verfahren, 8

Rauschen, 14

Relativer Fehler, 15

schließen, 13

Schwellenwert, 8

Shape based Methods, 8

Signal to noise ratio, 15

Strukturelement, 11

Varianz, 9