

Mathematische Bildverarbeitung

Inhaltsverzeichnis

1	Überblick	2
1.1	Techniken der Bildverarbeitung	2
1.2	Unser Fokus	2
1.3	Verwandte Vorlesungen	2
1.4	Literatur	2
2	Was ist ein Bild?	3
2.1	Definition	3
2.2	Umwandlung	3
2.3	Beispiel Rotation	4
3	Histogramme und deren Anwendungen	5
3.1	Histogramme	5
3.2	Anwendung: Kontrastverbesserung	6
3.3	Anwendung: SW-Konvertierung	8
4	Einfache Morphographische Operationen	11
4.1	Verknüpfungen von A und B	11
5	Entrauschen: Filter & Co.	14
5.1	Rauschen	14
5.2	Glättungsfilter	15
5.3	Frequenzraum-filter	20

1 Überblick

1.1 Techniken der Bildverarbeitung

- Kontrastverbesserung
- Entrauschen
- Kantendetektion
- Schärfen
- Inpainting
- Segmentierung (Einzlene Objekte detektieren)
- Registrierung (Bilder des selben Objektes in Einklang bringen)

1.2 Unser Fokus

- Mathematische Beschreibung

1.3 Verwandte Vorlesungen

- 3D computervision
- Digitale Bildanalyse
- Mustererkennung und Datenkompression
- Medical imaging

1.4 Literatur

- Bredies, Lorenz : Mathematische Bildverarbeitung
- Aubert, Kornprobst : Mathematical Problems in Image Processing
- Modersitzki : Numerical Methods for Image Registration
- Alt : Lineare Funktionalanalysis

2 Was ist ein Bild?

2.1 Definition

Digitale/diskrete Sicht

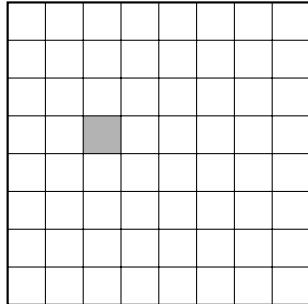


Abbildung 1: Diskretes Bild
Darstellung als Matrix.

Werkzeuge: Lineare Algebra

Vorteile: Endlicher Speicher

Nachteile: Probleme bei zoomen und drehen

Kontinuierlich/analoge Sicht

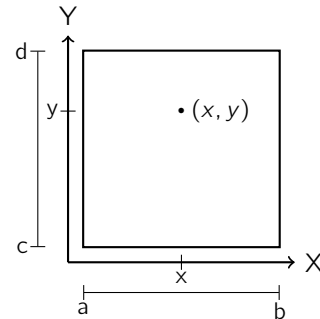


Abbildung 2: Kontinuierliches Bild
Darstellung als Funktion in zwei
Veränderlichen

Werkzeuge: Analysis

Vorteile: Mehr Freiheit (z.b. Kante=Linie
entlang einer Unstetigkeit)

Nachteile: Unendlicher Speicher

Definition. Ein **Bild** ist eine Funktion $u : \Omega \rightarrow F$, wobei $\Omega \subset \mathbb{Z}^d$ (im diskreten Fall) oder $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (im kontinuierlichen Fall).

$d = 2$: Typisches 2D Bild

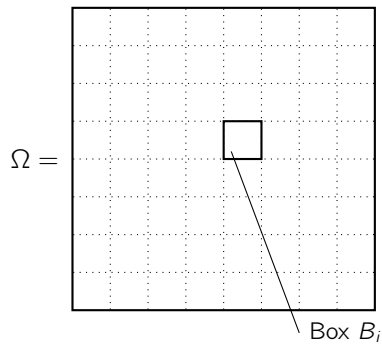
$d = 3$: 3D-Bild bzw. "Körper" oder Video: 2D Ort + Zeit

F ist der **Farbraum**, Beispiele:

- $F = [0, 1]$ oder $F = \{0, 1, \dots, 255\}$, Graustufen
- $F = \{0, 1\}$ schwarz/weiß
- $F = [0, 1]^3$ oder $F = \{0, 1, \dots, 255\}^3$ Farbbilder

2.2 Umwandlung

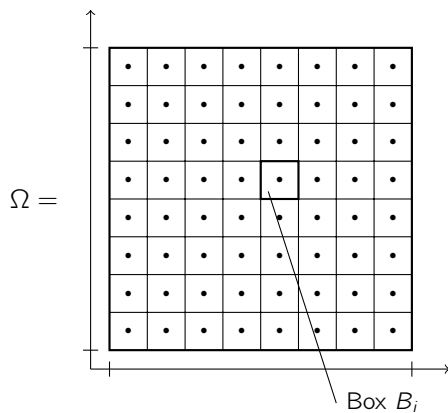
Kontinuierlich \rightarrow Diskret:



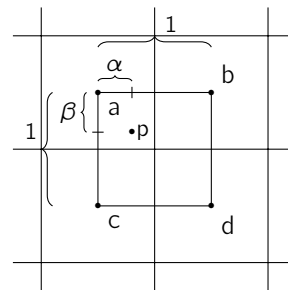
- Ω in Gitter zerlegen
- Jede Box durch nur einen Farbwert approximieren
- Etwa durch den Funktionswert im Mittelpunkt der Box
- oder durch den Mittelwert in der Box:

$$\frac{1}{|B_i|} \cdot \int_{B_i} u(x) dx$$

Diskret \rightarrow Kontinuierlich:



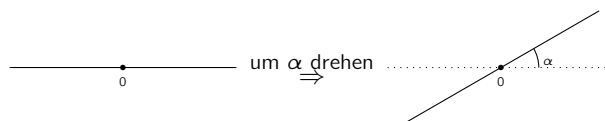
1. Idee: Jeder Punkt der Box B_i erhält den Funktionswert von B_i aus als diskretem Pixel \Rightarrow **Nearest neighbour interpolation**.
2. Idee: Mittelpunkt von Box B_i erhält den Wert von Pixel B_i sonst wird interpoliert. Grauwert $g :=$ Gewichtetes Mittel aus Grauwerten a, b, c, d .



$$g = (1-\alpha) \cdot (1-\beta) \cdot a + \alpha \cdot (1-\beta) \cdot b + (1-\alpha) \cdot \beta \cdot c + \alpha \cdot \beta \cdot d$$

Dieses wird **Bilinear interpolation** genannt.

2.3 Beispiel Rotation



1. Fall, kontinuierliches Bild

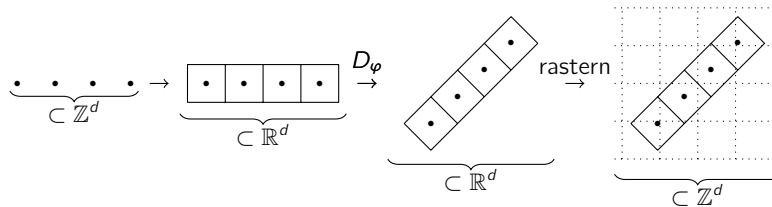
Sei u das alte Bild und v das neue Bild, dann ist die Drehung gegeben durch eine **Drehmatrix** :

$$D_\varphi \in \mathbb{R}^{d \times d}, D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

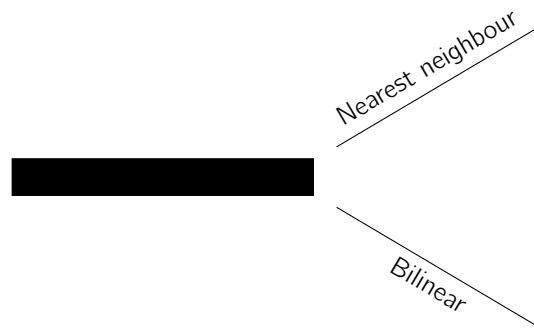
Damit folgt, dass $D(u) = D_\varphi \Omega$ und $v(x) = u(\underbrace{D_\varphi^{-1}x}_{\in \Omega}) = u(D_{-\varphi}x)$. ($D(u)$ ist die **Domain** von u)

2. Fall, diskretes Bild

Dieses ist problematisch, denn i.A. $x \in \mathbb{Z}^d$, aber $D_\varphi x \notin \mathbb{Z}^d$.



Weiterhin ist $v(x) = u(D_\varphi^{-1}x)$, wobei der konkrete Wert durch Interpolation bestimmt wird.



3 Histogramme und deren Anwendungen

3.1 Histogramme

Sei $u : \Omega \rightarrow F$ ein diskretes Bild, dann heißt die Abbildung

$$H_u : F \rightarrow \mathbb{N}_0$$

$$F \ni k \mapsto \#\{x \in \Omega \mid u(x) = k\}$$

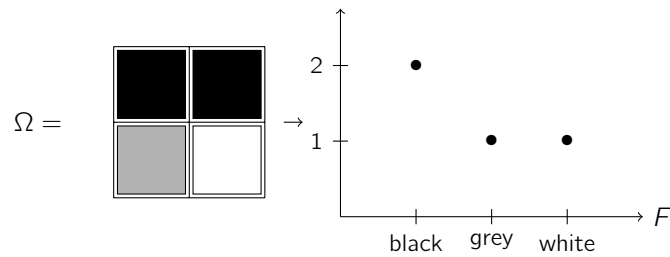
Histogramm des Bildes u . Dieses gibt an, wie oft die Farbe k im Bild vorhanden ist.

Damit gilt auch:

$$\sum_{k \in F} H_u(k) = |\Omega|, \text{ also die Anzahl der Pixel}$$

Bemerkung. Manchmal betrachtet man die relative Häufigkeit $\tilde{H}_u(k) = \frac{H_u(k)}{|\Omega|}$.

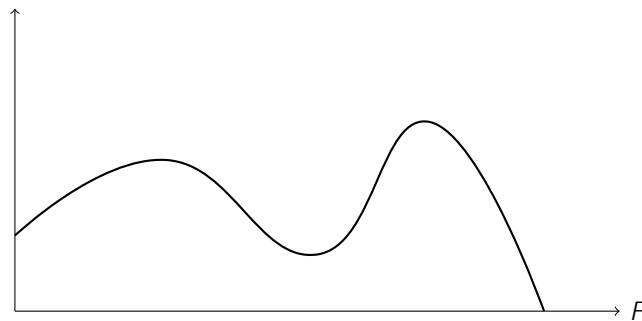
Beispiel:



Für kontinuierliche Bilder wird das allgemeinere Konzept von einem **Maß** benötigt:

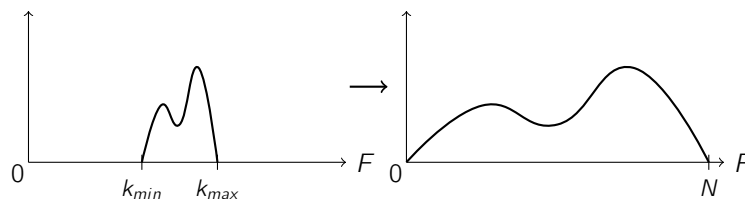
$$A \subset F, \mathcal{H}_u := |u^{-1}(A)| \begin{cases} \text{Diskretes Bild:} \\ \text{Anzahl der Elemente in } u^{-1}(A) \\ \text{Kontinuierliches Bild:} \\ \text{Volumen von } u^{-1}(A) \end{cases}$$

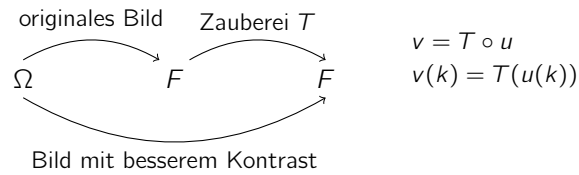
Zusammenhang zum vorherigen: $\mathcal{H}_u(A) = \sum_{k \in A} H_u(k)$. Man sagt dann, dass U_u eine **Dichte** zum Maß \mathcal{H}_u sei. Diese kann auch in kontinuierlichen existieren:



3.2 Anwendung: Kontrastverbesserung

Problem & Idee: Falls das Bild nur einen kleinen Teil von F nutzt, kann der Kontrast verbessert werden, indem man das Bild auf ganz F verteilt.





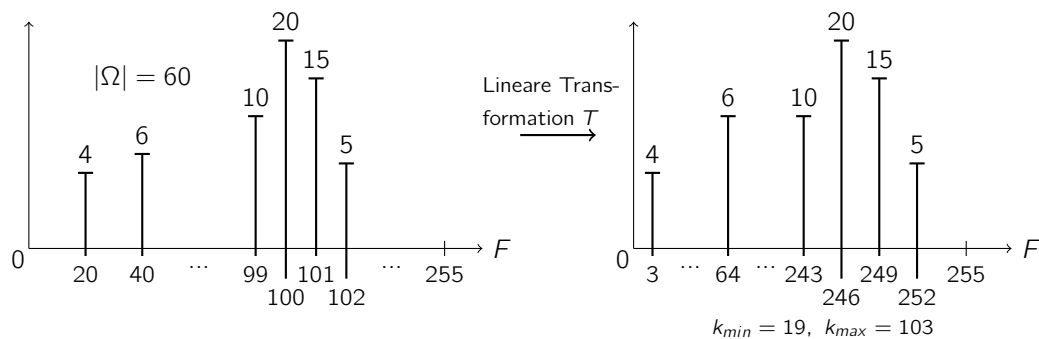
1. Idee, Kontrastdehnung:

T "lineare" Abbildung, so dass $T(k_{min}) = 0$ und $T(k_{max}) = N$:

$$T(k) = \frac{k - k_{min}}{k_{max}} N, \text{ Kontinuierlicher Farbraum}$$

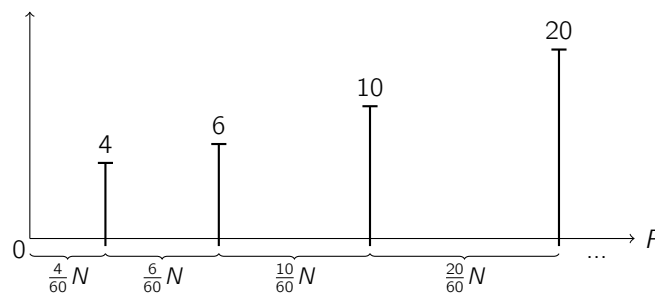
$$T(k) = \left\lceil \frac{k - k_{min}}{k_{max}} N \right\rceil, \text{ Diskreter Farbraum}$$

Beispiel:



2. Idee nicht-lineare Kontrastdehnung

Diesesmal setzen wir $T(k) = \left\lceil \frac{N}{|\Omega|} \sum_{l=0}^k H_u(l) \right\rceil$ für einen diskreten Farbraum und erhalten:



T lässt sich auch alternativ ausdrücken durch:

$$T(k) = [\mathcal{H}_u(\{0, \dots, k\})]$$

Und somit folgt dass für den kontinuierlichen Fall T durch

$$T(k) = \frac{N}{|\Omega|} \mathcal{H}_u((0, k))$$

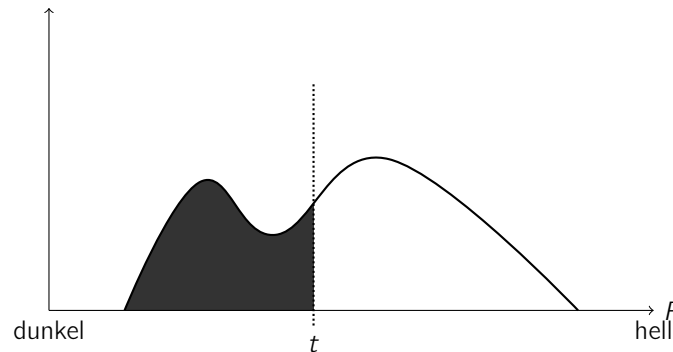
definiert werden kann. Allgemein heißt der Prozess **Histogramm - equalisation**.

3.3 Anwendung: SW-Konvertierung

Aufgabe: Graustufenbild \rightarrow SW-Bild.

Nützlich etwa bei Objekterkennung/Segmentierung.

Idee: Das Histogramm an einem gewissen Schwellenwert t spalten:



Also setze nun für $t \in F$:

$$\text{schwarz} = \{k \in F | k \leq t\}$$

$$\text{weiß} = \{k \in F | k > t\}$$

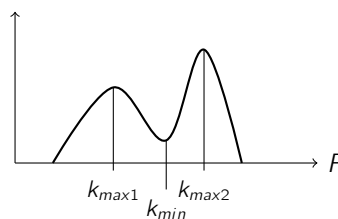
Graustufenbild $u \rightarrow$ schwarz/weiß Bild \tilde{u} :

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} 0, & u(x) \in \text{schwarz} \\ 1, & u(x) \in \text{weiß} \end{cases} \Rightarrow \tilde{F} = \{0, 1\}$$

Methoden um diesen Schwellenwert zu wählen:

1. **Shape based Methods** :

Falls das Histogramm von u **bimodal** ist, also die Form:



hat, dann wähle:

$$t := k_{min}$$

$$\text{oder } t := \frac{k_{max1} + k_{max2}}{2}$$

2. **Otsu's Verfahren** (1979):

Vorher einige Definitionen.

Die **Masse** :

$$m_{\text{schwarz}} := \sum_{k \in \text{schwarz}} H_u(k)$$

$$m_{\text{weiß}} := \sum_{k \in \text{weiß}} H_u(k)$$

Der **Mittlewert** :

$$\mu_{\text{schwarz}} := \frac{\sum_{k \in \text{schwarz}} k \cdot H_u(k)}{\sum_{k \in \text{schwarz}} H_u(k)} = \frac{\sum_{k \in \text{schwarz}} k \cdot H_u(k)}{m_{\text{schwarz}}}$$

$$\mu_{\text{weiß}} := \frac{\sum_{k \in \text{weiß}} k \cdot H_u(k)}{\sum_{k \in \text{weiß}} H_u(k)} = \frac{\sum_{k \in \text{weiß}} k \cdot H_u(k)}{m_{\text{weiß}}}$$

Die **Varianz** :

$$\sigma_{\text{schwarz}}^2 = \sum_{k \in \text{schwarz}} (k - \mu_{\text{schwarz}})^2 \cdot H_u(k)$$

$$\sigma_{\text{weiß}}^2 = \sum_{k \in \text{weiß}} (k - \mu_{\text{weiß}})^2 \cdot H_u(k)$$

Nun lautet Otsu's Methode: $\sigma_{\text{schwarz}}^2 + \sigma_{\text{weiß}}^2 \xrightarrow{t} \min$.

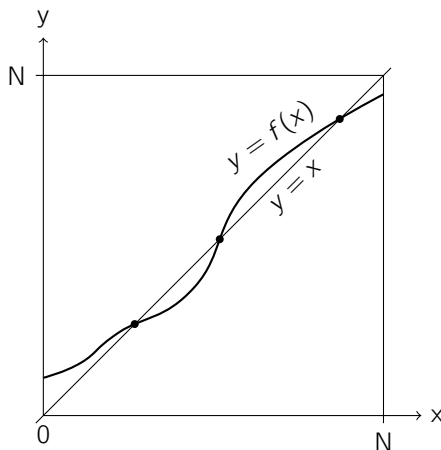
3. **Median** :

Wähle t so dass $m_{\text{schwarz}} = m_{\text{weiß}}$.

4. **Isodata Algorithmus** (1970s):

Wähle t so, dass $t = \frac{\mu_{\text{schwarz}} - \mu_{\text{weiß}}}{2} =: f(t)$.

Diese Gleichung ist bereits eine **Fixpunktgleichung** und eine Lösung kann, etwa mit einer **Fixpunktiteration** approximiert werden, das heißt $t_{n+1} := f(t_n)$.



Matlab code :

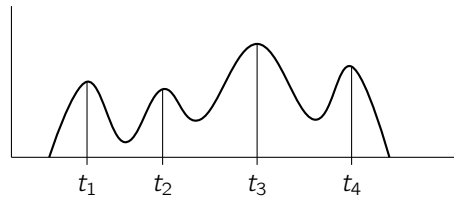
```

1 u=imread('liftingbody.png');
2 t=greythresh(u);%uses Otsu's method
3 v=im2bn(u,t);
4 imshow(v);

```

Einige dieser Verfahren können auch erweitert werden, so dass ein Graustufenbild nicht nur in zwei, sondern in M Farben zerlegt werden kann. Im allgemeinen werden dann $M - 1$ thresholds benötigt.

1. Shape based :



2. Otsu's Verfahren :

Farbklassen:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \{k : k \leq t_1\} \\
 F_2 &= \{k : t_1 < k \leq t_2\} \\
 &\vdots \\
 F_M &= \{k : t_{M-1} < k\}
 \end{aligned}$$

Und wie zuvor: $\sigma_1^2 + \dots + \sigma_M^2 \rightarrow \min$

3. Median :

Zerteile F in M Quantile gleicher Masse.

4. Isodata :

Hierzu existiert keine Bekannte Verallgemeinerung auf M Farbklassen.

Matlab code :

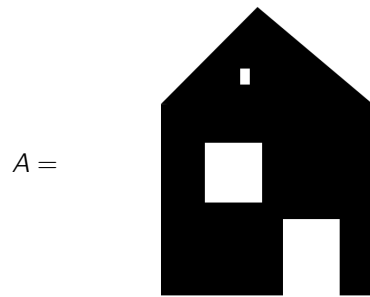
```

1 u=imread('Circles Bright Dark.png');
2 t=multithresh(u,M-1);
3 v=imquantize(u,t);
4 w=label2rgb(u,t);
5 imshow(w);

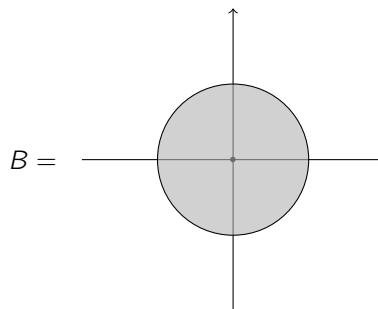
```

4 Einfache Morphographische Operationen

S/W Bild:



Strukturelement :



4.1 Verknüpfungen von A und B

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

Diese wird dilation genannt.

Anschaulich wird an jeden schwarzen Punkt des Bildes A das Struktur element B gelegt.

$$A + B =$$

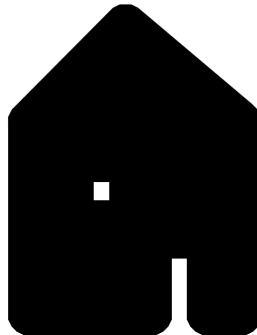


Bild erzeugt in Matlab durch:

```
1 I=imread('Bild1.png');
2 se=strel('disk',40,8);
3 I2=imcomplement(imdilate(imcomplement(I),se));%Es wird das Komplement des Bildes
    gebildet, damit das Strukturelement auf den schwarzen Bereich angewendet wird
4 imshow(I2);
```

$$A - B := \{a : a + B \subset A\}$$

Diese wird **erosion** genannt.

Anschaulich werden die schwarzen Bereiche des Bildes gesucht, in die das Strukturelement hinein passt.

$$A - B =$$

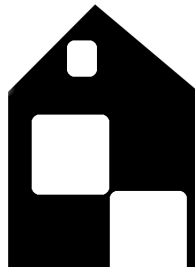


Bild erzeugt in Matlab durch:

```
1 I=imread('Bild1.png');
2 se=strel('disk',20,8);
```

```

3 I2=imcomplement(imerode(imcomplement(I),se));
4 imshow(I2);

```

Es ist schnell zu erkennen das $A \neq (A + B) - B$, deshalb wird eine neue Operation eingeführt:

$$A \bullet B := (A + B) - B$$

Dieses wird **schließen** genannt und wird etwa genutzt um Löcher, z.b. Rauschen, in einem Bild zu entfernen. Im Beispiel Bild ist zu sehen, dass das obere Fenster nicht mehr vorhanden ist.

$A \bullet B =$



Bild erzeugt in Matlab durch:

```

1 I=imread('Bild1.png');
2 se=strel('disk',20,8);
3 I2=imcomplement(imdilate(imcomplement(I),se));
4 I3=imcomplement(imerode(imcomplement(I2),se));
5 imshow(I3);

```

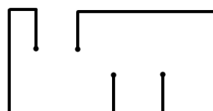
Es existiert auch die Umgekehrt Operation:

$$A \circ B := (A - B) + B$$

Diese wird **öffnen** genannt.

Diesmal mit einem neuen Beispiel:

$A =$



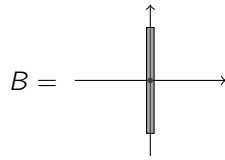


Bild erzeugt in Matlab durch:

```

1 I=imread('Bild2.png');
2 se=strel('line',10,90);
3 I2=imcomplement(imerode(imcomplement(I),se));
4 I3=imcomplement(imerode(imcomplement(I2),se));
5 imshow(I3);

```

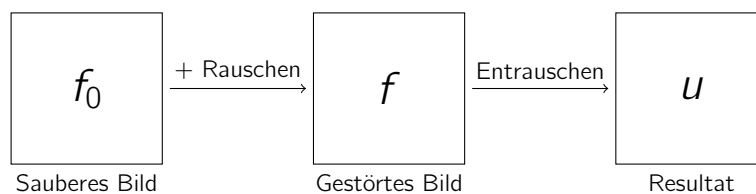
5 Entrauschen: Filter & Co.

5.1 Rauschen

Rauschen : Ungewollte Störungen in einem Bild

- punktweise
- zufällig
- unabhängig
- additiv (bei multiplikativem Rauschen *log* anwenden)

Notation:



Wie gut das entrauschte Bild u das saubere Bild f_0 beschreibt wird durch Normen gemessen.

$\|f - f_0\|$, Rauschen

$\|u - f_0\|$, **Absoluter Fehler**

$\frac{\|u - f_0\|}{\|f - f_0\|}$, **Relativer Fehler** im Vergleich zum Rauschen

$\frac{\|u - f_0\|}{\|f_0\|}$, Relativer Fehler im Vergleich zum Signal

Typischerweise ist die gewählte Norm:

$$\|f\| = \|f\|_2 = \sqrt{\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx}$$

oder im diskreten:

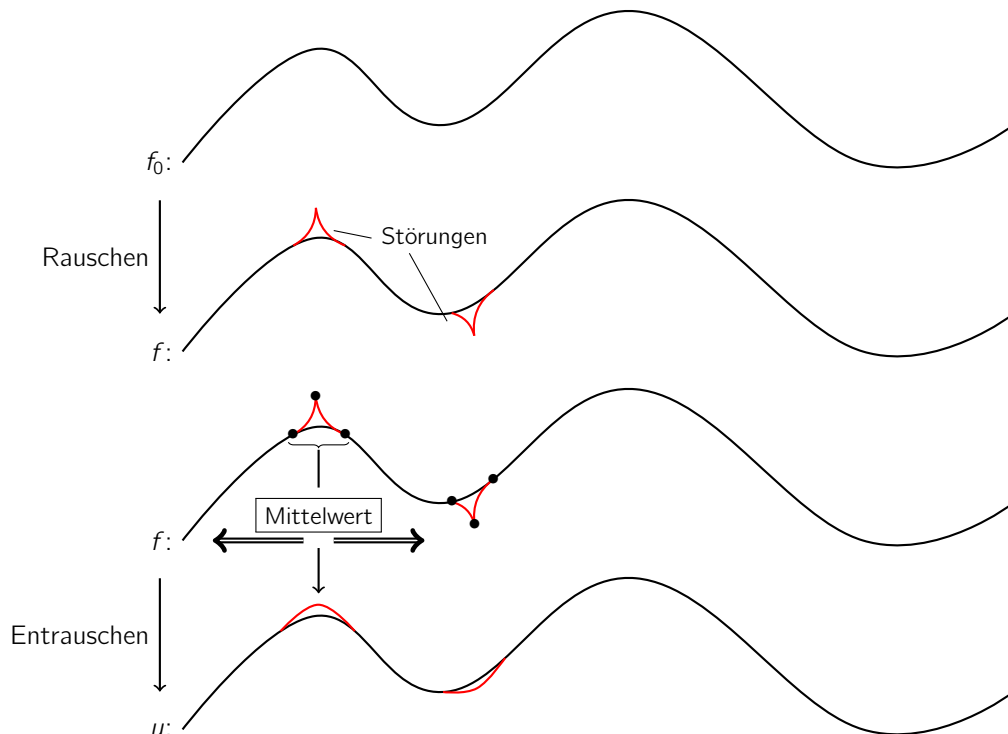
$$\|f\|_2 = \sqrt{\sum_{x \in \Omega} |f(x)|^2}$$

Eng verwandt ist die **Signal to noise ratio** (SNR):

$$\log\left(\underbrace{\frac{\|f_0\|_2}{\|u - f_0\|_2}}_{\in [1, \infty)}\right) \in [0, +\infty), \text{ wobei } 0 \text{ schlecht und } +\infty \text{ gut ist.}$$

5.2 Glättungsfilter

Grundidee: (zur Vereinfachung in 1D)

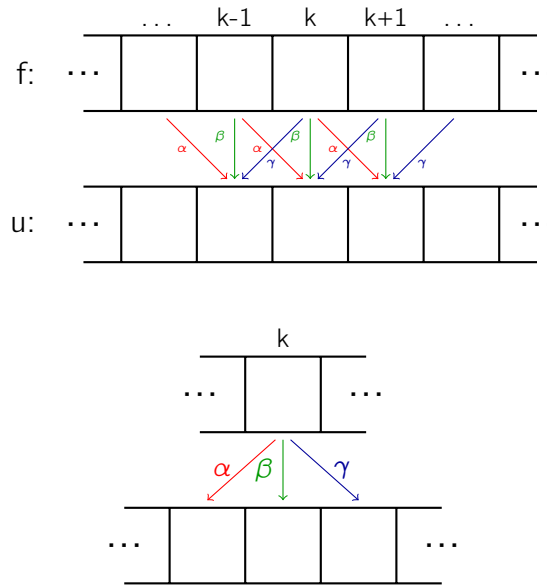


$$u(k) := \alpha \cdot f(k-1) + \beta \cdot f(k) + \gamma \cdot f(k+1) \quad (5.1)$$

wobei:

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \quad (5.2)$$

Schematisch bedeutet (5.1):



Durch (5.1) ist eine Abbildung $f \mapsto u$ gegeben, wir schreiben kurz:

$$u = m \boxtimes f, \text{ dieses wird } \underline{\text{Korrelation}} \text{ genannt.}$$

mit:

$$(m \boxtimes f)(k) = \sum_{i \in \text{supp}(m)} m(i) f(k+i) \quad (5.3)$$

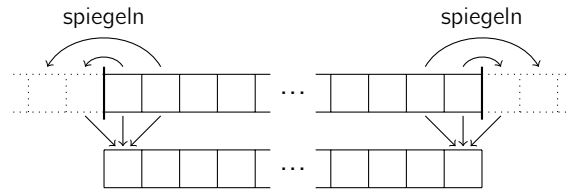
und:

$$m = \begin{array}{ccccc} & \dots & -1 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \alpha & \beta & \gamma & \dots \end{array} \text{ genannt } \underline{\text{Maske}} .$$

Setzt man nun $j := k + i$ in (5.1), so ist $i = j - k$, d.h.

$$(m \boxtimes f)(k) = \sum_{i \in \text{supp}(m)} m(j-k) f(j) \quad (5.4)$$

Um die Abbildung auf den Rand anzuwenden wird das Bild gespiegelt, in 1D:



in 2D:

d	b	d
q	p	q
d	b	d

Formel (5.4) erinnert an die Formel der **Faltung** :

$$(g * f)(k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} g(\underbrace{k-j}_{\text{Anders als (5.4)}}) \cdot f(j) \quad (5.5)$$

Setzt man also $g(i) := m(-i) =: \tilde{m}(i)$, was einer Spiegelung der Maske entspricht, dann ist

$$m \boxtimes f = g * f = \tilde{m} * f$$

Eigenschaften der Faltung:

- 1 $(f * g) * h = f * (g * h)$, Assoziativität
- 2 $f * g = g * f$, Kommutativität
- 3 $\tilde{f} * \tilde{g} = \widetilde{f * g}$, Kompatibilität mit Spiegelung

Eigenschaften der Korrelation:

- 1' $f \boxtimes (g \boxtimes h) = \tilde{f} * (\tilde{g} * h) \stackrel{1}{=} (\tilde{f} * \tilde{g}) * h \stackrel{3}{=} (\widetilde{f * g}) * h = (f * g) \boxtimes h \neq (f \boxtimes g) \boxtimes h$, nicht assoziativ!
- 2' $f \boxtimes g = \tilde{f} * g \stackrel{2}{=} g * \tilde{f} = \tilde{\tilde{g}} * \tilde{f} \stackrel{3}{=} \widetilde{(\tilde{g} * f)} = \widetilde{g \boxtimes f} \neq g \boxtimes f$, nicht kommutativ!

$$\boxed{3'} \quad \tilde{f} \boxtimes \tilde{g} = \tilde{\tilde{f} * \tilde{g}} \stackrel{\boxed{3}}{=} \widetilde{(\tilde{f} * g)} = \widetilde{f \boxtimes g}, \text{ Kompatibilität mit Spiegelung}$$

$$\boxtimes \text{ und } * \text{ definiert man auf: } \ell^1(\mathbb{Z}^d) := \{f = (f_i)_{i \in \mathbb{Z}^d} : \underbrace{\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} |f_i|}_{:= \|f\|_1} < \infty\}$$

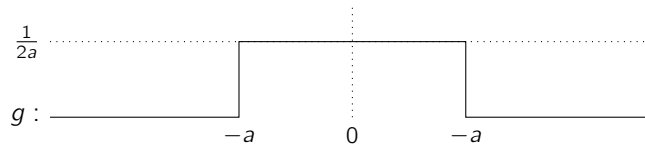
Man kann zeigen (Übung): $f, g \in \ell^1 \Rightarrow f * g \in \ell^1$ und $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$. Wobei oft die Gleichheit gilt.

Alles gilt auch in der Kontinuierlichen Version:

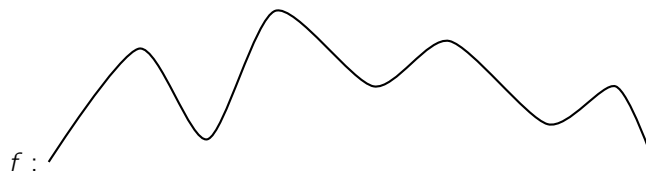
$$L^1(\mathbb{R}^d) := \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \mid \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} |f| dx}_{:= \|f\|_1} < \infty\}$$

$$f, g \in L^1(\mathbb{R}^d) : (g * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)f(y)dy, \quad y, x \in \mathbb{R}^d$$

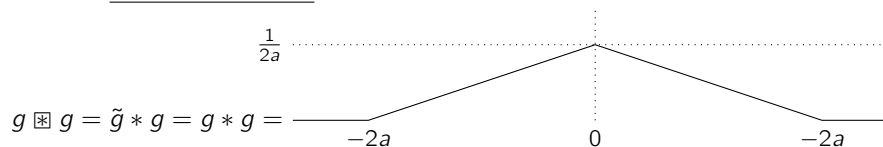
Beispiel für den kontinuierlichen Fall:



$$\text{Hierbei gilt } \int_{\mathbb{R}} g(x) dx = 1$$



$$g \boxtimes f = \underline{\text{gleitendes Mittel}}.$$



Weitere Eigenschaften der Faltung:

Für alle $f, g \in L^1$ or ℓ^1

$$\left. \begin{aligned} (g_1 + g_2) * f &= (g_1 * f) + (g_2 * f) \\ (\alpha g) * f &= \alpha(g * f) \end{aligned} \right\} = \text{Linearität}$$

Somit ist:

$$g \mapsto f * g$$

ein linearer Operator.

Formt ℓ^1 bzw. L^1 eine Algebra mit neutralem Element δ ?

ℓ^1 ?:

$$\delta: \begin{array}{cccccc} \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \end{array}$$

↑
Pos 0

Ja!

L^1 ?: Für ein solches Element muss gelten:

$$\forall f \in L^1 : d * f = f$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\delta(x-y)}_{=0 \forall x \neq y} f(y) dy = f(x)$$

Diese Funktion wird **Dirac-Impuls** genannt ist aber kein Element von L^1 .

Nun zu Masken in 2D:

$$u = m \boxtimes f \text{ mit } m = \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline \beta \quad \gamma \quad \delta \\ \hline \epsilon \\ \hline \end{array}$$

wobei $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 1$

Kurzschreibweise: $u_{ij} := u(x)$ wobei $x = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$, analog für f_{ij} .

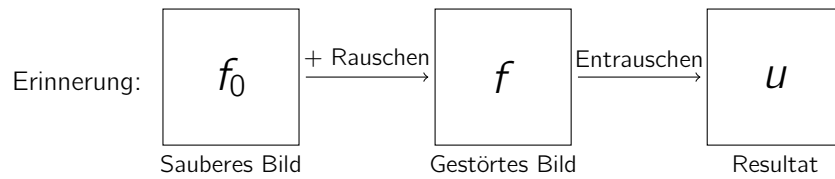
$$\Rightarrow u_{ij} = \alpha f_{i-1,j} + \beta f_{i,j-1} + \gamma f_{ij} + \delta f_{i,j+1} + \epsilon f_{i+1,j}$$

$$u = m \boxtimes f = \tilde{m} * f \text{ mit } \tilde{m} = \begin{array}{|c|} \hline \epsilon \\ \hline \delta \quad \gamma \quad \beta \\ \hline \alpha \\ \hline \end{array}$$

Symmetrischer Fall:

$$\tilde{m} = \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline \alpha \quad \gamma \quad \alpha \\ \hline \alpha \\ \hline \end{array} \text{ mit } \gamma = 1 - 4\alpha$$

$$u_{ij} = (1 - 4\alpha) f_{ij} + \alpha (f_{i-1,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1} + f_{i+1,j}) \quad (5.6)$$



Annahme: $f_{ij} = f_{ij} + r_{ij}$ mit $r_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ iid.

z.z.: $\text{Var}(u_{ij}) \leq \text{Var}(f_{ij})$

$$\text{Var}(f_{ij}) = E(\underbrace{f_{ij} - E f_{ij}}_{r_{ij}})^2 = \sigma^2$$

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(u_{ij}) &= E(u_{ij} - E u_{ij})^2 = E((1 - 4\alpha)(\underbrace{f_{ij} - f_{ij}^0}_{r_{ij}}) + \alpha(\underbrace{(f_{i-1,j} - f_{i-1,j}^0)}_{r_{i-1,j}}) + \dots + \underbrace{(f_{i+1,j} - f_{i+1,j}^0)}_{r_{i+1,j}}))^2 \\
 &= E((1 - 4\alpha)^2 r_{ij}^2 + \alpha^2(r_{i-1,j}^2 + r_{i,j-1}^2 + r_{i,j+1}^2 + r_{i+1,j}^2) + 2(1 - 4\alpha)\alpha r_{ij} r_{i-1,j} \dots) \\
 &= (1 - 4\alpha)^2 \underbrace{E r_{ij}^2}_{\sigma^2} + \alpha^2(E r_{i-1,j}^2 + \dots + E r_{i+1,j}^2) + 2(1 - 4\alpha)\alpha \underbrace{E(r_{ij} r_{i-1,j})}_{\underbrace{E r_{ij} E r_{i-1,j}}_0} + \underbrace{\dots}_0 \\
 &= (1 - 4\alpha)^2 \sigma^2 + \alpha^2 4\sigma^2 = (1 - 8\alpha + 16\alpha^2 + 4\alpha^2) \sigma^2
 \end{aligned}$$

Da $0 \leq \alpha$ und $0 \leq 1 - 4\alpha \Rightarrow 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{4}$:

$$(1 - 8\alpha + 16\alpha^2 + 4\alpha^2) \sigma^2 = 1 + \underbrace{\underbrace{20\alpha}_{\geq 0} \underbrace{(\alpha - \frac{2}{5})}_{< 0}}_{\leq 1}$$

$\Rightarrow \text{Var}(u_{ij}) \leq \text{Var}(f_{ij})$ für $\alpha \in [0, \frac{1}{4}]$

Dabei gilt: $\text{Var}(u_{ij}) \xrightarrow{\alpha} \text{dmin} \iff 1 - 8\alpha + 20\alpha^2 \xrightarrow{\alpha} \text{min} \iff -8 + 40\alpha = 0 \iff \alpha = \frac{1}{5}$

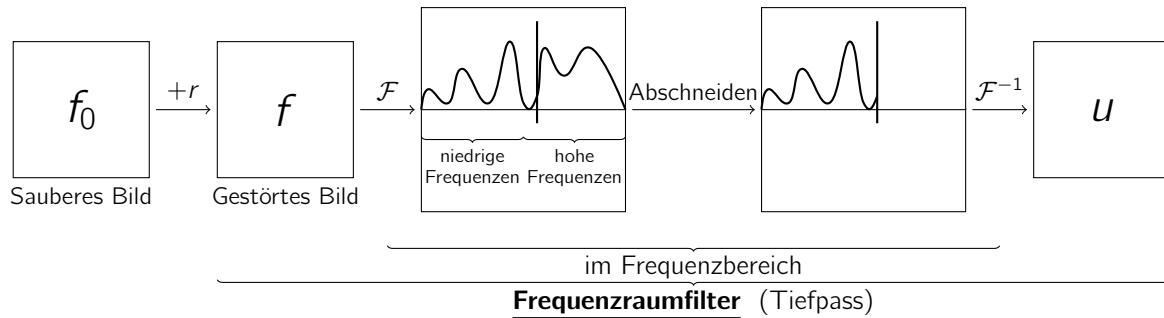
\Rightarrow bester Filter :

	$\frac{1}{5}$	
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
	$\frac{1}{5}$	

5.3 Frequenzraum-filter

Ansatz: Rauschen = hochfrequente Anteile des Signals.

Diese können mittels der **Fouriertransformation** \mathcal{F} gezielt entfernt werden.



Ein wichtiges Instrument ist hierbei die Fouriertransformation:

$$\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$$

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle z, x \rangle} dx \quad (5.7)$$

Wobei $z \in \mathbb{R}^d, f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Falls auch $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist, dann lässt sich f wie folgt mittels der inversen Fouriertransformation aus \hat{f} rekonstruieren:

$$\mathcal{F}^{-1} : \hat{f} \mapsto f$$

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{i\langle z, x \rangle} dx \quad (5.8)$$

Wobei $x \in \mathbb{R}^d$.

Man hat also $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f$, d.h.

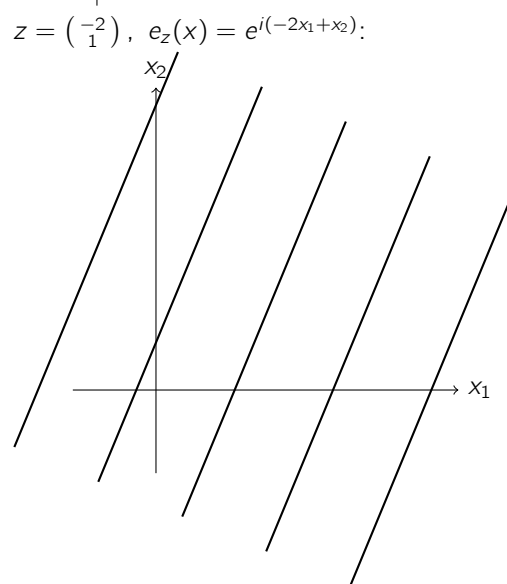
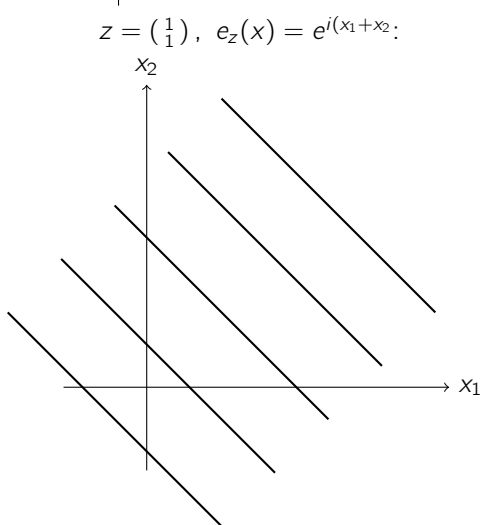
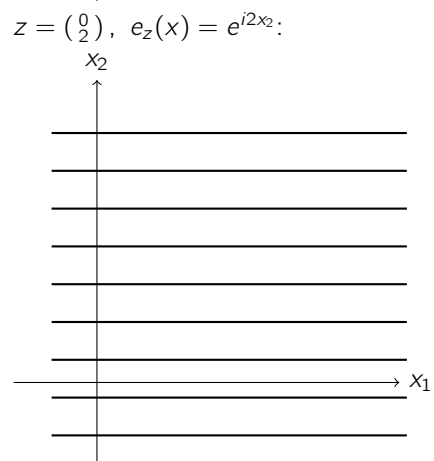
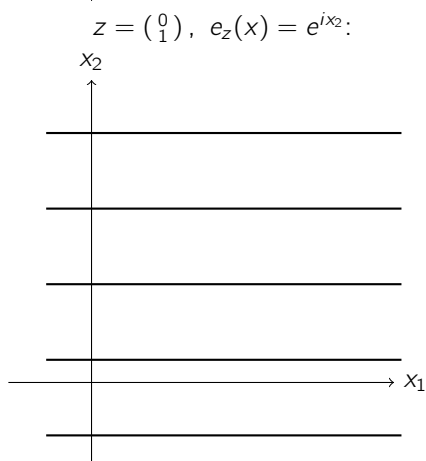
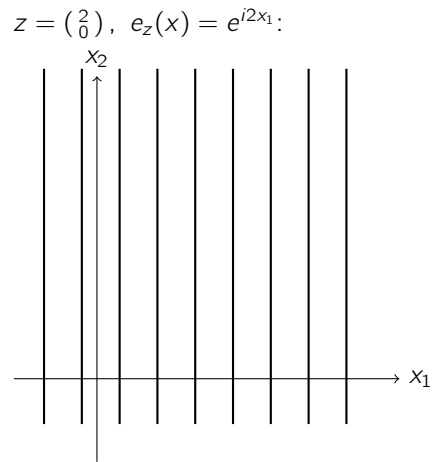
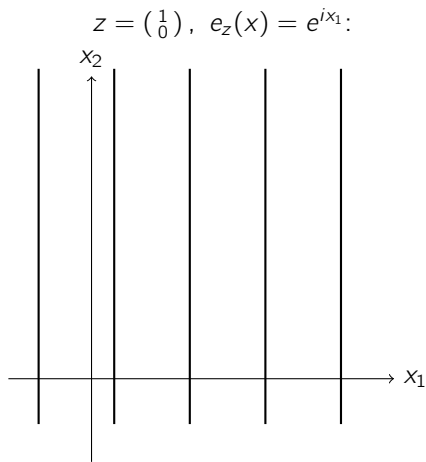
$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-i\langle z, y \rangle} dy \right) e^{i\langle z, x \rangle} dz$$

Sei nun $e_z(x) := e^{i\langle z, x \rangle}$, $x \in \mathbb{R}^d$ mit Parameter $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_d \end{pmatrix}$.

Also $e_z(x) = e^{i\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rangle} = e^{i(z_1 x_1 + z_2 x_2)}$

Beispiele in 2D:

(Hier stellen die Linien, Punkte mit konstantem wert dar)



$f \in L^2(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\mathbb{R}^d} |f|^2 dx < \infty\}$ ist

- ein normierter Raum mit $+$, $\alpha \cdot$ und $\|\cdot\|_2 := \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx}$

- ein Skalarproduktraum mit $\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^d} f \bar{g} dx$, wobei $\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle$
- ein vollständiger Raum, also **Banachraum**

Ein vollständiger normierter Banachraum mit Skalarprodukt heißt **Hilbertraum**.

\mathcal{F} kann auch als Abbildung auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ betrachtet werden. Dann gilt:

$$\hat{f} = \mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

und

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2 \quad (5.9)$$

und sogar

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_2 = \langle f, g \rangle_2 \quad (5.10)$$

für alle $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Weitere Eigenschaften der Fouriertransformation:

- i) $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \hat{f}$ stetig und $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \hat{f}(z) = 0$
- ii) $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow C(\mathbb{R}^d)$ ist eine lineare Abbildung
- iii) $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow C(\mathbb{R}^d)$ ist eine beschränkte/stetige Abbildung
- iv) Verschiebung $\xrightarrow{\mathcal{F}}$ Modulation, d.h.

$$g(x) = f(x + a) \Rightarrow \hat{g}(z) = e^{i\langle a, z \rangle} \hat{f}(z)$$

- v) Modulation $\xrightarrow{\mathcal{F}}$ Verschiebung, d.h.

$$g(x) = e^{i\langle x, a \rangle} f(x) \Rightarrow \hat{g}(z) = \hat{f}(z - a)$$

- vi) Skalierung $\xrightarrow{\mathcal{F}}$ inverse Skalierung, d.h.

$$g(x) = f(cx) \Rightarrow \hat{g}(z) = \frac{1}{|c|} \hat{f}\left(\frac{z}{|c|}\right)$$

- vii) Konjugation: $g(x) = \overline{f(x)} \Rightarrow \hat{g}(z) = \overline{\hat{f}(-z)}$
Folglich: f reellwertig $\Rightarrow \hat{f}(z) = \overline{\hat{f}(-z)}$

viii)

$$\begin{aligned} \text{Grundmode: } \hat{f}(0) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx \\ \text{Analog: } f(0) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x) dx \end{aligned}$$

- ix) Differentiation $\xrightarrow{\mathcal{F}}$ Multiplikation mit Potenzen von z , d.h.

$$g(x) = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} f(x) \Rightarrow \hat{g}(z) = i^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d} z_1^{\alpha_1} \dots z_d^{\alpha_d} \hat{f}(z)$$

x) Umkehrung des letzten Punktes:

$$g(x) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d} f(x) \Rightarrow \hat{g}(z) = i^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_d} \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \hat{f}(z)$$

xi)

$$\text{Faltungssatz: } \mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g), \quad \widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \hat{f} \cdot \hat{g}$$

$$\text{Analog: } \mathcal{F}(f \cdot g) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g), \quad \widehat{f \cdot g} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \hat{f} * \hat{g}$$

d.h.: Faltung $\xrightarrow{\mathcal{F}}$ Multiplikation und umgekehrt

Index

öffnen, 13

Absoluter Fehler, 15

Banachraum, 23

Bild, 3

Bilinear interpolation, 4

bimodal, 8

Dichte, 6

dilation, 11

Dirac-Impuls, 19

Domain, 5

Drehmatrix, 4

erosion, 12

Faltung, 17

Farbraum, 3

Fixpunktgleichung, 9

Fixpunktiteration, 9

Fouriertransformation, 20

Frequenzraumfilter, 21

gleitendes Mittel, 18

Hilbertraum, 23

Histogramm, 5

Histogramm - equalisation, 7

Isodata Algorithmus, 9

Korrelation, 16

Maß, 6

Maske, 16

Masse, 9

Median, 9

Mittlewert, 9

Morphographische Operationen, 11

Nearest neighbour interpolation, 4

Otsu's Verfahren, 8

Rauschen, 14

Relativer Fehler, 15

schließen, 13

Schwellenwert, 8

Shape based Methods, 8

Signal to noise ratio, 15

Strukturelement, 11

Varianz, 9