Mathematische Bildverarbeitung

Inhaltsverzeichnis

1 Überblick

1.1 Techniken der Bildverarbeitung

- Kontrastverbesserung
- Entrauschen
- Kantendetektion
- Schärfen
- Inpainting
- Segmentierung (Einzlene Objekte detektieren)
- Registrierung (Bilder des selben Objektes in Einklang bringen)

1.2 Unser Fokus

- Mathematische Beschreibung

1.3 Verwandte Vorlesungen

- 3D computervision
- Digitale Bildanalyse
- Mustererkennung und Datenkompression
- Medical imaging

1.4 Literatur

- Bredies, Lorenz : Mathematische Bildverarbeitung
- Aubert, Kornprobst : Mathematical Problems in Image Processing
- Modersitzki : Numerical Methods for Image Registration
- Alt : Lineare Funktionalanalysis

2 Was ist ein Bild?

2.1 Definition

Digitale/diskrete Sicht

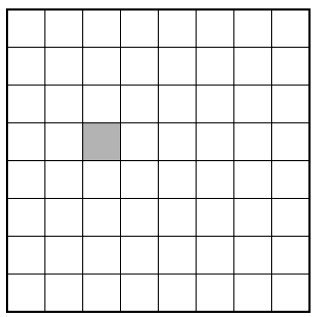


Abbildung 1: Diskretes Bild
Darstellung als Matrix.

Kontinuierlich/analoge Sicht

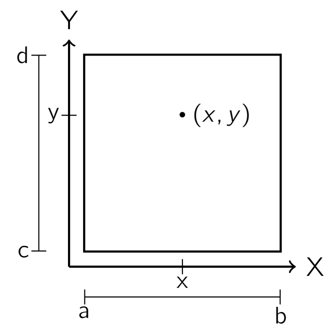


Abbildung 2: Kontinuierliches Bild
Darstelllung als Funktion in zwei Veränderlichen

Werkzeuge: Lineare Algebra
Vorteile: Endlicher Speicher
Nachteile: Probleme bei zoomen und drehen

Werkzeuge: Analysis
Vorteile: Mehr Freiheit (z.b. Kante=Linie entlang einer Unstetigkeit)
Nachteile: Unendlicher Speicher

Definition. Ein **Bild** ist eine Funktion $u : \Omega \to F$, wobei $\Omega \subset \mathbb{Z}^d$ (im diskreten Fall) oder $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (im kontinuierlichen Fall).

$d = 2$: Typisches 2D Bild

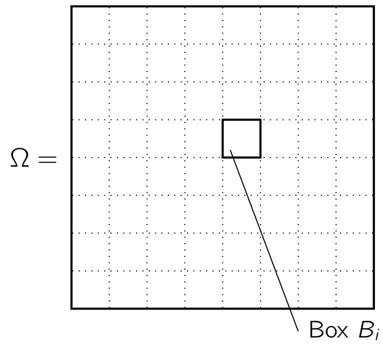
$d = 3$: 3D-Bild bzw. "Körper" oder Video: 2D Ort + Zeit

F ist der **Farbraum** , Beispiele:

- F$= [0, 1]$ oder F$=\{0, 1, ..., 255\}$, Graustufen
- F$= \{0, 1\}$ schwarz/weiß
- F$= [0, 1]^3$ oder F$= \{0, 1, ..., 255\}^3$ Farbbilder

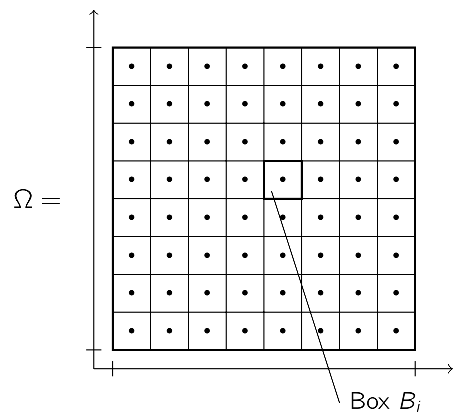
2.2 Umwandlung

Kontinuierlich → Diskret:

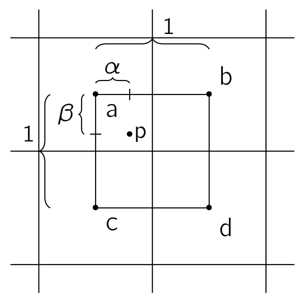


- Ω in Gitter zerlegen
- Jede Box durch nur einen Farbwert approximieren
- Etwa durch den Funktionswert im Mittelpunkt der Box
- oder durch den Mittlewert in der Box: $\frac{1}{|B_i|} \cdot \int_{B_i} u(x)dx$

Diskret $\rightarrow$ Kontinuierlich:



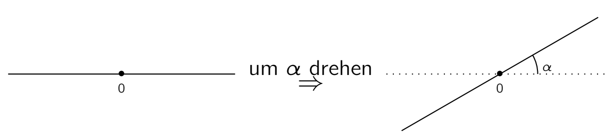
1. Idee: Jeder Punkt der Box B_i erhält den Funktionswert von B_i aus als diskretem Pixel $\Rightarrow$ **Nearest neighbour interpolation** .
2. Idee: Mittelpunkt von Box B_i erhält den Wert von Pixel B_i sonst wird interpoliert. Grauwert g := Gewichtetes Mittel aus Grauwerten a, b, c, d.



$$g = (1-\alpha)\cdot(1-\beta)\cdot a+\alpha\cdot(1-\beta)\cdot b+(1-\alpha)\cdot\beta\cdot c+\alpha\cdot\beta\cdot d$$

Dieses wird **Bilinear interpolation** genannt.

2.3 Beispiel Rotation



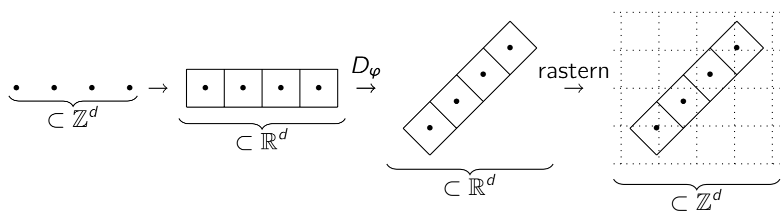
1. Fall, kontinuierliches Bild

Sei u das alte Bild und v das neue Bild, dann ist die Drehung gegeben durch eine **Drehmatrix** :

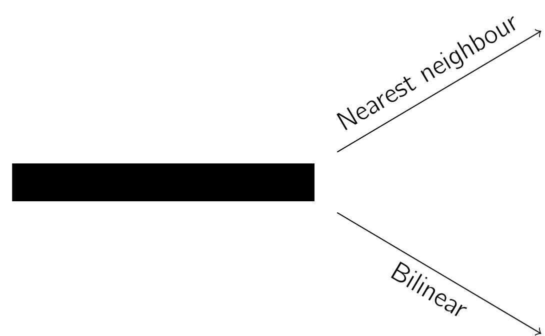
$$D_\varphi \in \mathbb{R}^{d\times d}, D_\varphi = \begin{pmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) \\ sin(\varphi) & cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Damit folgt, dass $D(u) = D_\varphi\Omega$ und $v(x) = u(\underbrace{D_\varphi^{-1}x}_{\in\Omega}) = u(D_{-\varphi}x)$. ($D(u)$ ist die **Domain** von u)

2. Fall, diskretes Bild
Dieses ist problematisch, denn I.A. $x \in \mathbb{Z}^d$, aber $D_\varphi x \notin \mathbb{Z}^d$.



Weiterhin ist $v(x) = u(D_\varphi^{-1}x)$, wobei der konkrete Wert durch Interpolation bestimmt wird.



3 Histogramme und deren Anwendungen

3.1 Histogramme

Sei $u : \Omega \to F$ ein diskretes Bild, dann heißt die Abbildung

$$H_u : F \to \mathbb{N}_0$$

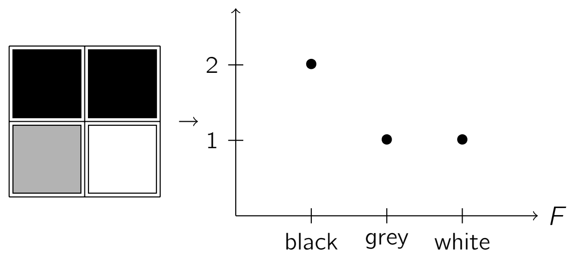
$$F \ni k \mapsto \#\{x \in \Omega | u(x) = k\}$$

Histogramm des Bildes u. Dieses gibt an, wie often die Farbe k im Bild vorhanden ist.
Damit gilt auch:

$$\sum_{k \in F} H_u(k) = |\Omega| \text{ , also die Anzahl der Pixel}$$

Bemerkung. Manchmal betrachtet man die relative Häufigkeit $\tilde{H}_u(k) = \dfrac{H_u(k)}{|\Omega|}$.

Beispiel:

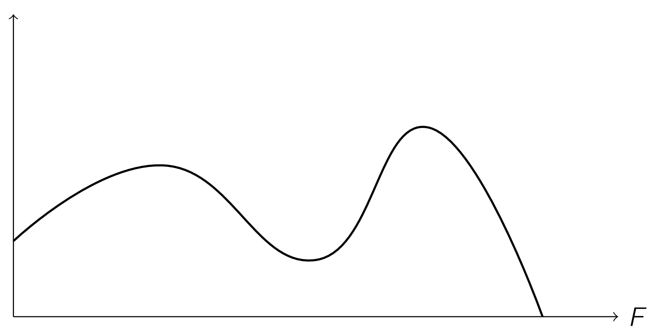
$\Omega =$ 

Für kontinuierliche Bilder wird das allgemeinere Konzept von einem **<u>Maß</u>** benötigt:

$A \subset F,\ \mathcal{H}_u := \left|u^{-1}(A)\right|$ →

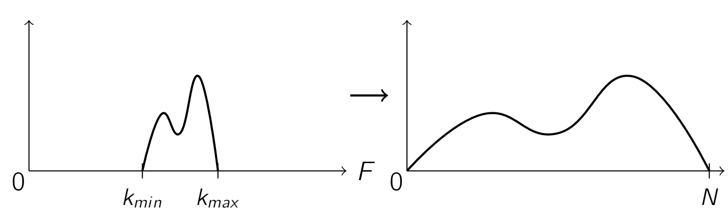
- <u>Diskretes Bild:</u> Anzahl der Elemente in $u^{-1}(A)$
- <u>Kontinuierliches Bild:</u> Volumen von $u^{-1}(A)$

Zusammenhang zum vorherigen: $\mathcal{H}_u(A) = \sum_{k \in A} H_u(k)$. Man sagt dann, dass U_u eine **<u>Dichte</u>** zum Maß $\mathcal{H}_u$ sei. Diese kann auch in kontinueirlichen existieren:



3.2 Anwendung: Kontrastverbesserung

Problem & Idee: Falls das Bild nur einen kleinen Teil von F nutzt, kann der Kontrast verbessert werden, indem man das Bild auf ganz F verteilt.



$$
\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, bend left, "\text{originales Bild}"] \arrow[rr, bend right, "\text{Bild mit besserem Kontrast}"'] & F \arrow[r, bend left, "\text{Zauberei } T"] & F
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{l}
v = T \circ u \\
v(k) = T(u(k))
\end{array}
$$

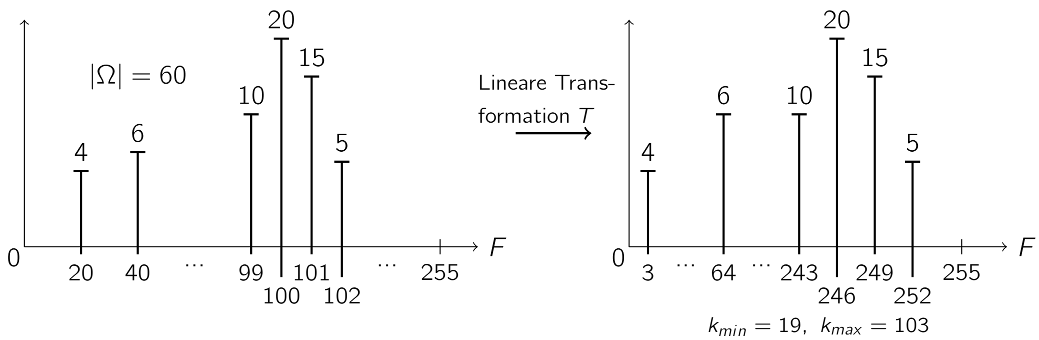
1. Idee, Kontrastdehnung:

T "lineare" Abbildung, so dass $T(k_{min}) = 0$ und $T(k_{max}) = N$:

$$T(k) = \frac{k - k_{min}}{k_m ax} N, \text{ Kontinuierlicher Farbraum}$$

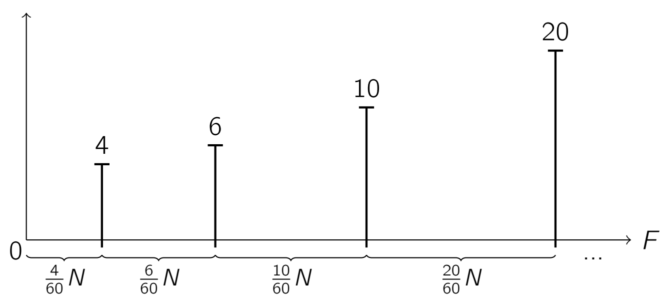
$$T(k) = \left[\frac{k - k_{min}}{k_m ax} N \right], \text{ Diskreter Farbraum}$$

<u>Beispiel:</u>



2. Idee nicht-lineare Kontrastdehnung

Diesesmal setzen wir $T(k) = \left[\frac{N}{|\Omega|} \sum_{l=0}^{k} H_u(l) \right]$ für einen diskreten Farbraum und erhalten:



T lässt sich auch alternativ ausdrücken durch:

$$T(k) = [\mathcal{H}_u(\{0, ..., k\})]$$

Und somit folg dass für den kontinueirlichen Fall T durch

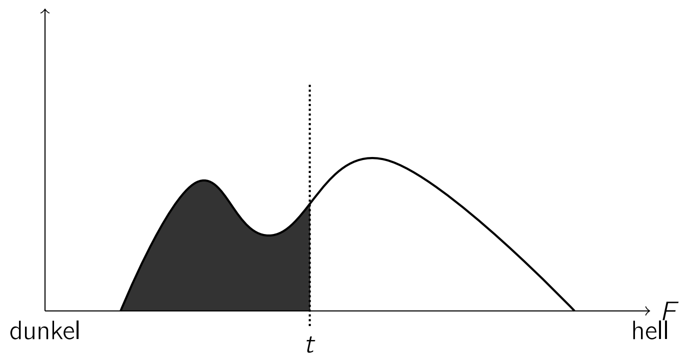
$$T(k) = \frac{N}{|\Omega|} \mathcal{H}_u((0, k))$$

definiert werden kann. Allgemein heißt der Prozess <u>**Histogramm - equalisation**</u> .

3.3 Anwendung: SW-Konvertierung

Aufgabe: Graustufenbild $\rightarrow$ SW-Bild.
Nüzlich etwa bei Objekterkennung/Segmentierung.

Idee: Das Histogramm an einem gewissen **Schwellenwert** t spalten:



Also setze nun für $t \in F$:

$$\text{schwarz} = \{k \in F | k \leq t\}$$

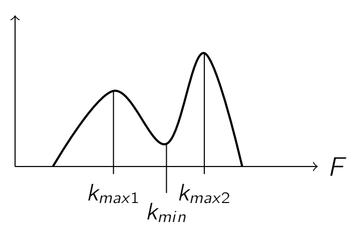
$$\text{weiß} = \{k \in F | k > t\}$$

Graustufenbild $u \longrightarrow$ schwarz/weiß Bild $\tilde{u}$:

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} 0, & u(x) \in \text{schwarz} \\ 1, & u(x) \in \text{weiß} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \tilde{F} = \{0, 1\}$$

Methoden um diesen Schwellenwert zu wählen:

1. **Shape based Methods** :
   Falls das Histogramm von u **bimodal** ist, also die Form:

   hat, dann wähle:

   $$t := k_{min}$$

   $$\text{oder } t := \frac{k_{max1} + k_{max2}}{2}$$

2. **Otsu's Verfahren** (1979):
   Vorher einige Definitionen.

Die **Masse** :

$$m_{\text{schwarz}} := \sum_{k \in \text{schwarz}} H_u(k)$$

$$m_{\text{weiß}} := \sum_{k \in \text{weiß}} H_u(k)$$

Der **Mittlewert** :

$$\mu_{\text{schwarz}} := \frac{\sum\limits_{k \in \text{schwarz}} k \cdot H_u(k)}{\sum\limits_{k \in \text{schwarz}} H_u(k)} = \frac{\sum\limits_{k \in \text{schwarz}} k \cdot H_u(k)}{m_{\text{schwarz}}}$$

$$\mu_{\text{weiß}} := \frac{\sum\limits_{k \in \text{weiß}} k \cdot H_u(k)}{\sum\limits_{k \in \text{weiß}} H_u(k)} = \frac{\sum\limits_{k \in \text{weiß}} k \cdot H_u(k)}{m_{\text{weiß}}}$$

Die **Varianz** :

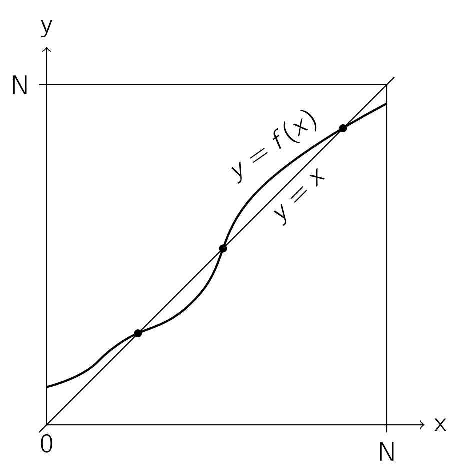
$$\sigma^2_{\text{schwarz}} = \sum_{k \in \text{schwarz}} (k - \mu_{\text{schwarz}})^2 \cdot H_u(k)$$

$$\sigma^2_{\text{weiß}} = \sum_{k \in \text{weiß}} (k - \mu_{\text{weiß}})^2 \cdot H_u(k)$$

Nun lautet Otsu's Methode: $\sigma^2_{\text{schwarz}} + \sigma^2_{\text{weiß}} \xrightarrow{t} \min.$

3. **Median** :
   Wähle t so dass $m_{\text{schwarz}} = m_{\text{weiß}}$.

4. **Isodata Algorithmus** (1970s):
   Wähle t so, dass $t = \dfrac{\mu_{\text{schwarz}} - \mu_{\text{weiß}}}{2} =: f(t)$.
   Diese Gleichung ist bereits eine **Fixpunktgleichung** und eine Lösung kann, etwa mit einer **Fixpunktiteration** approximiert werden, das heißt $t_{n+1} := f(t_n)$.

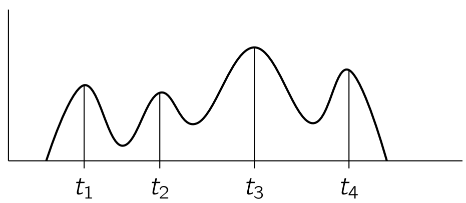


Matlab code :

```
u=imread('liftingbody.png');
t=greythresh(u);%uses Otsu's method
v=im2bn(u,t);
imshow(v);
```

Einige dieser Verfahren können auch erweitert werden, so dass ein Graustufenbild nicht nur in zwei, sondern in M Farben zerlegt werden kann. Im allgemeinen werden dann $M-1$ thresholds benötigt.

1. **Shape based** :



2. **Otsu's Verfahren** :
   Farbklassen:

$$F_1 = \{k : k \leq t_1\}$$
$$F_2 = \{k : t_1 < k \leq t_2\}$$
$$\vdots$$
$$F_M = \{k : t_{M-1} < k\}$$

   Und wie zuvor: $\sigma_1^2 + ... + \sigma_M^2 \to \min$

3. **Median** :
   Zerteile F in M Quantile gleicher Masse.

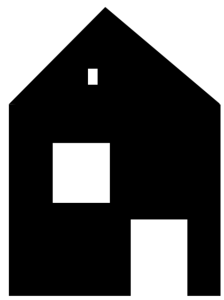
4. **Isodata** :
   Hierzu existiert keine Bekannte Verallgemeinerung auf M Farbklassen.

Matlab code :

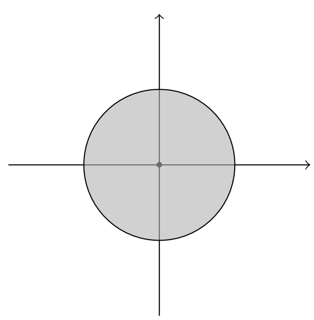
```
u=imread('Circles Bright Dark.png');
t=multithresh(u,M-1);
v=imquantize(u,t);
w=label2rgb(u,t);
imshow(w);
```

4 Einfache Morphographische Operationen

S/W Bild:

$A =$ 

Strukturelement :

$B =$ 

4.1 Verknüpfungen von A und B

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

Diese wird **dilation** genannt.
Anschaulich wird an jeden schwarzen Punkt des Bildes A das Struktur element B gelegt.

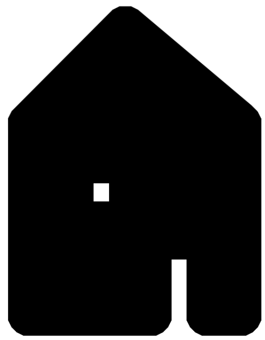
$A + B =$ 

Bild erzeugt in Matlab durch:

```
I=imread('Bild1.png');
se=strel('disk',40,8);
I2=imcomplement(imdilate(imcomplement(I),se));%Es wird das Komplement des Bildes gebildet, damit das Strukturelement auf den schwarzen bereich angewendet wird
imshow(I2);
```

$$A - B := \{a : a + B \subset A\}$$

Diese wird **erosion** genannt.
Anschaulich werden die schwarzen Bereiche des Bildes gesucht, in die das Strukturelement hinein passt.

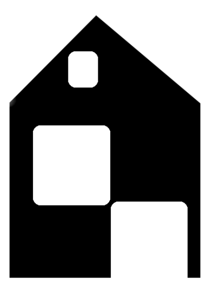
$A - B =$ 

Bild erzeugt in Matlab durch:

```
I=imread('Bild1.png');
se=strel('disk',20,8);
```

```
I2=imcomplement(imerode(imcomplement(I),se));
imshow(I2);
```

Es ist schnell zu erkennen das $A \neq (A + B) - B$, deshalb wird eine neue Operation eingeführt:

$$A \bullet B := (A + B) - B$$

Dieses wird **schließen** gennant und wird etwa genutzt um Löcher, z.b. Rauschen, in einem Bild zu entfernen. Im Beispiel Bild ist zu sehen, dass das obere Fenster nicht mehr vorhanden ist.

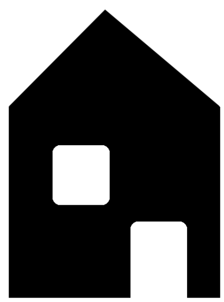
$A \bullet B =$ 

Bild erzeugt in Matlab durch:

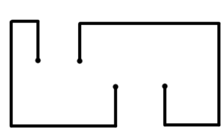
```
I=imread('Bild1.png');
se=strel('disk',20,8);
I2=imcomplement(imdilate(imcomplement(I),se));
I3=imcomplement(imerode(imcomplement(I2),se));
imshow(I3);
```

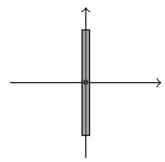
Es existiert auch die Umgekehrt Operation:

$$A \circ B := (A - B) + B$$

Diese wird **öffnen** gennant.

Diesmal mit einem neuen Beispiel:

$A =$ 

$B =$ 

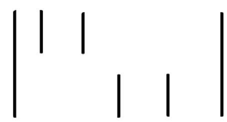
$A \circ B =$ 

Bild erzeugt in Matlab durch:

```
I=imread('Bild2.png');
se=strel('line',10,90);
I2=imcomplement(imerode(imcomplement(I),se));
I3=imcomplement(imerode(imcomplement(I2),se));
imshow(I3);
```

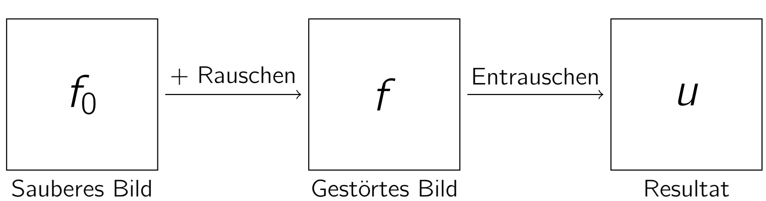
5 Entrauschen: Filter & Co.

5.1 Rauschen

Rauschen : Ungewollte Störungen in einem Bild

- punktweise
- zufällig
- unabhängig
- additiv (bei multiplikativem Rauschen log anwenden)

Notation:



Wie gut das entrauschte Bild u das saubere Bild f_0 beschreibt wird durch Normen gemessen.

$||f - f_0||$, Rauschen

$||u - f_0||$, **Absoluter Fehler**

$\frac{||u - f_o||}{||f - f_0||}$, **Relativer Fehler** im Vergleich zum Rauschen

$\frac{||u - f_o||}{||f_0||}$, Relativer Fehler im Vergleich zum Signal

Typischerweise ist die gewählte Norm:

$$||f|| = ||f||_2 = \sqrt{\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx}$$

oder im diskreten:

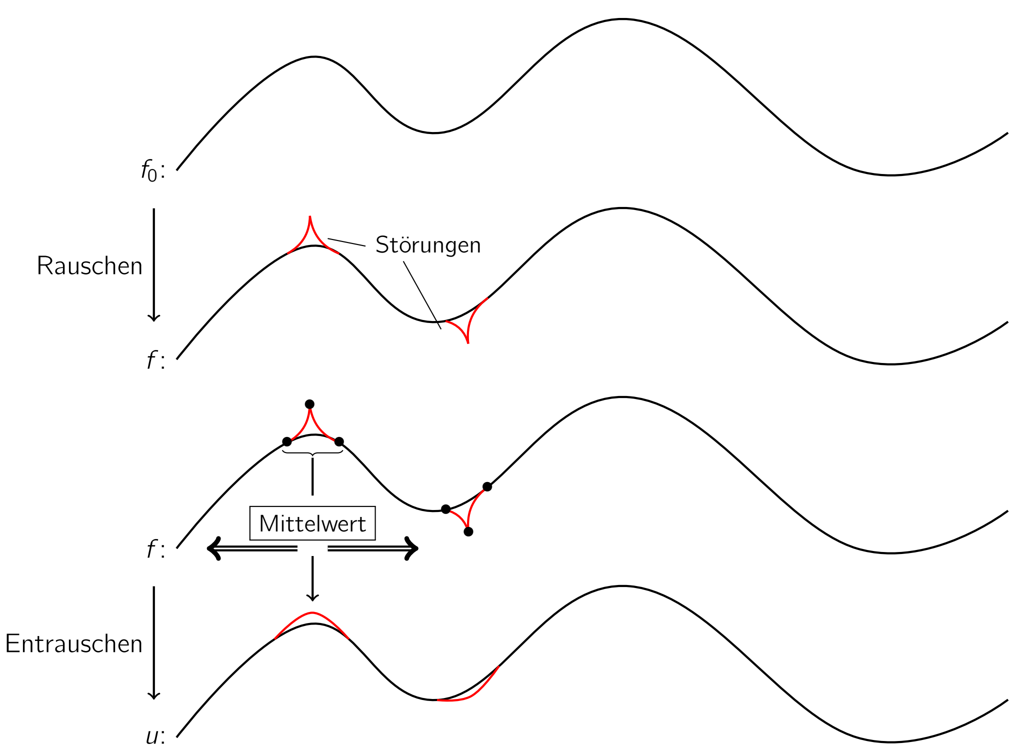
$$||f||_2 = \sqrt{\sum_{x \in \Omega} |f(x)|^2}$$

Eng verwandt ist die **Signal to noise ratio** (SNR):

$$log(\underbrace{\frac{||f_0||_2}{||u - f_0||_2}}_{\in\ [1,\infty)}) \in [0, +\infty), \text{ wobei 0 schlecht und } +\infty \text{ gut ist.}$$

5.2 Glättungsfilter

Grundidee: (zur Vereinfachung in 1D)

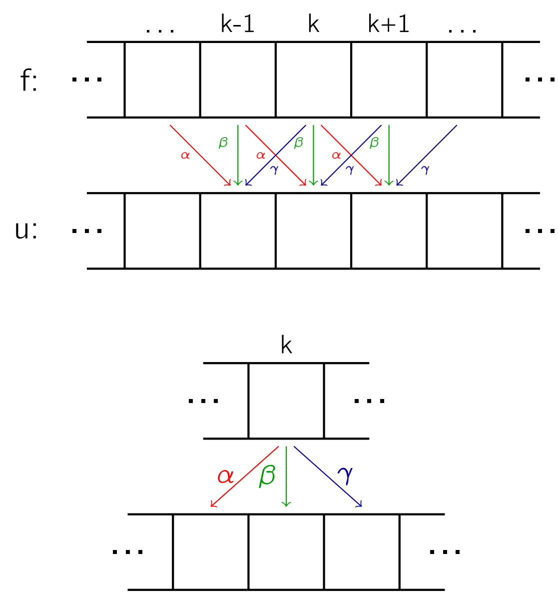


$$u(k) := \alpha \cdot f(k-1) + \beta \cdot f(k) + \gamma \cdot f(k+1) \tag{5.1}$$

wobei:

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \tag{5.2}$$

Schematisch bedeutet (5.1):



Durch (5.1) ist eine Abbildung $f \mapsto u$ gegeben, wir schreiben kurz:

$u = m \boxast f$, dieses wird **Korrelation** genannt.

mit:

$$\boxed{(m \boxast f)(k) = \sum_{i \in supp(m)} m(i) f(k+i)} \tag{5.3}$$

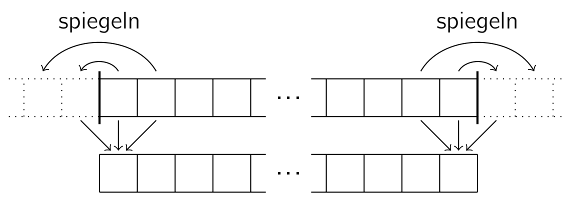
und:

$$m = \begin{array}{ccccc} \dots & -1 & 0 & 1 & \dots \\ \cdots & \alpha & \beta & \gamma & \cdots \end{array}$$ gennant **Maske** .

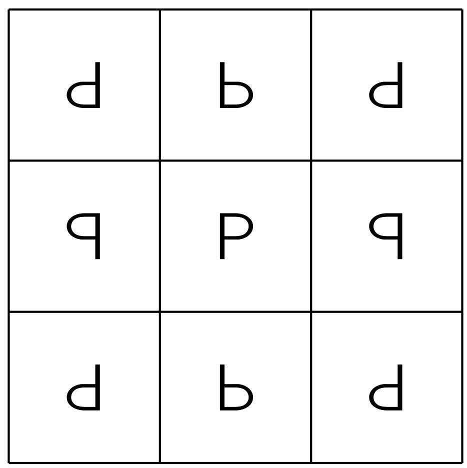
Setzt man nun $j := k + i$ in (5.1), so ist $i = j - k$, d.h.

$$\boxed{(m \boxast f)(k) = \sum_{i \in supp(m)} m(j-k) f(j)} \tag{5.4}$$

Um die Abbildung auf den Rand anzuwenden wird das Bild gespiegel, in 1D:



in 2D:



Formel (5.4) erinnert an die Formel der **Faltung** :

$$\boxed{(g * f)(k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} g(\underbrace{k - j}_{\text{Anders als (5.4)}}) \cdot f(j)} \tag{5.5}$$

Setzt man also $g(i) := m(-i) =: \tilde{m}(i)$, was einer Spieglung der Maske entspricht, dann ist

$$m \boxast f = g * f = \tilde{m} * f$$

Eigenschaften der Faltung:

$\boxed{1}$ $(f * g) * h = f * (g * h)$, Assoziativität

$\boxed{2}$ $f * g = g * f$, Kommutativität

$\boxed{3}$ $\tilde{f} * \tilde{g} = \widetilde{f * g}$, Kompatibilität mit Spiegelung

Eigenschaften der Korrelation:

$\boxed{1'}$ $f \boxast (g \boxast h) = \tilde{f} * (\tilde{g} * h) \overset{\boxed{1}}{=} (\tilde{f} * \tilde{g}) * h \overset{\boxed{3}}{=} (\widetilde{f * g}) * h = (f * g) \boxast h \neq (f \boxast g) \boxast h$, nicht assoziativ!

$\boxed{2'}$ $f \boxast g = \tilde{f} * g \overset{\boxed{2}}{=} g * \tilde{f} = \tilde{\tilde{g}} * \tilde{f} \overset{\boxed{3}}{=} (\widetilde{\tilde{g} * f}) = \widetilde{g \boxast f} \neq g \boxast f$, nicht kommutativ!

$\boxed{3'}$ $\tilde{f} \circledast \tilde{g} = \tilde{\tilde{f}} * \tilde{g} \overset{\boxed{3}}{=} \widetilde{(\tilde{f} * g)} = \widetilde{f \circledast g}$, Kompatibilität mit Spiegelung

$\circledast$ und $*$ definiert man auf: $\ell^1(\mathbb{Z}^d) := \{f = (f_i)_{i \in \mathbb{Z}^d} : \underbrace{\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} |f_i|}_{:=||f||_1} < \infty\}$

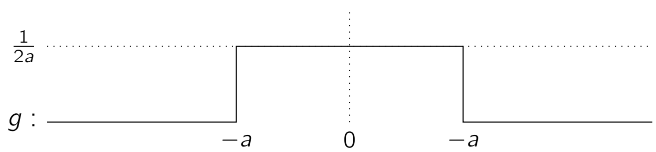
Man kann zeigen (Übung): $f, g \in \ell^1 \Rightarrow f * g \in \ell^1$ und $||f * g||_1 \leq ||f||_1 \cdot ||g||_1$. Wobei oft die Gleichheit gilt.

Alles gilt auch in der Kontinuierlichen Version:

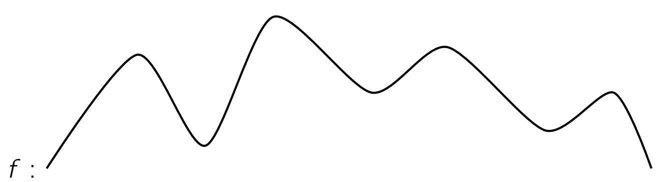
$$L^1(\mathbb{R}^d) := \{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} | \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} |f| \, dx}_{:=||f||_1} < \infty\}$$

$$f, g \in L^1(\mathbb{R}^d) : (g * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x-y) f(y) dy, \ y, x \in \mathbb{R}^d$$

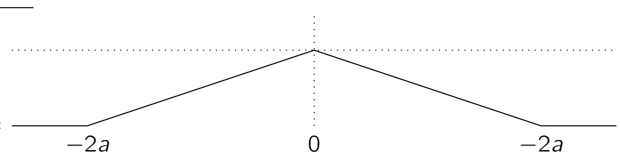
Beispiel für den kontinueirlichen Fall:



Hierbei gilt $\int_{\mathbb{R}} g(x) dx = 1$



$g \circledast f =$ <u>**gleitendes Mittel**</u> .

$g \circledast g = \tilde{g} * g = g * g =$


Weitere Eigenschaften der Faltung:
Für alle $f, g \in L^1$ or ℓ^1

$$\left.\begin{aligned} (g_1 + g_2) * f = (g_1 * f) + (g_2 * g) \\ (\alpha g) * f = \alpha (g * f) \end{aligned}\right\} = \text{Linearität}$$

Somit ist:

$$g \mapsto f * g$$

ein linearer Operator.

Formt ℓ^1 bzw. L^1 eine Algebra mit neutralem Element δ?

ℓ^1?:

$$\delta: \quad \cdots \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \cdots$$

$$\underset{\text{Pos } 0}{\uparrow}$$

Ja!

L^1?: Für ein solches Element muss gelten:
$\forall f \in L^1 : d * f = f$
$\forall x \in \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\delta(x-y)}_{=0 \forall x \neq y} f(y) dy = f(x)$

Diese Funktion wird **Dirac-Impuls** gennant ist aber kein Element von L^1.

Nun zu Masken in 2D:

$$u = m \circledast f \text{ mit } m = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \alpha & \\ \hline \beta & \gamma & \delta \\ \hline & \epsilon & \\ \hline \end{array}$$

wobei $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 1$
Kurzschreibweise: $u_{ij} := u(x)$ wobei $x = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$, analog für f_{ij}.

$$\Rightarrow u_{ij} = \alpha f_{i-1,j} + \beta f_{i,j-i} + \gamma f_{ij} + \delta f_{i,j+1} + \epsilon f_{i+1,j}$$

$$u = m \circledast f = \tilde{m} * f \text{ mit } \tilde{m} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \epsilon & \\ \hline \delta & \gamma & \beta \\ \hline & \alpha & \\ \hline \end{array}$$

Symmetrischer Fall:

$$\tilde{m} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \alpha & \\ \hline \alpha & \gamma & \alpha \\ \hline & \alpha & \\ \hline \end{array} \text{ mit } \gamma = 1 - 4\alpha$$

$$u_{ij} = (1-4\alpha) f_{ij} + \alpha(f_{i-1,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1} + f_{i+1,j}) \tag{5.6}$$

$$\text{Erinnerung:}\quad \underset{\text{Sauberes Bild}}{\boxed{f_0}} \xrightarrow{+\text{ Rauschen}} \underset{\text{Gestörtes Bild}}{\boxed{f}} \xrightarrow{\text{Entrauschen}} \underset{\text{Resultat}}{\boxed{u}}$$

Annahme: $f_{ij} = f_{ij} + r_{ij}$ mit $r_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ iid.

z.z.: $Var(u_{ij}) \leq Var(f_{ij})$

$$Var(f_{ij}) = E(\underbrace{f_{ij} - \overbrace{Ef_{ij}}^{f_{ij}^0}}_{r_{ij}})^2 = \sigma^2$$

$$\begin{aligned}
Var(u_{ij}) &= E(u_{ij} - Eu_{ij})^2 = E((1-4\alpha)(\underbrace{f_{ij} - f_{ij}^0}_{r_{ij}}) + \alpha((\underbrace{f_{i-1,j} - f_{i-1,j}^0}_{r_{i-1,j}}) + \dots + (\underbrace{f_{i+1,j} - f_{i+1,j}^0}_{r_{i+1,j}})))^2 \\
&= E((1-4\alpha)^2 r_{ij}^2 + \alpha^2(r_{i-1,j}^2 + r_{i,j-1}^2 + r_{i,j+1}^2 + r_{i+1,j}^2) + 2(1-4\alpha)\alpha r_{ij} r_{i-1,j} \dots) \\
&= (1-4\alpha)^2 \underbrace{Er_{i,j}^2}_{\sigma^2} + \alpha^2(Er_{i-1,j}^2 + \dots + Er_{i+1,j}^2) + 2(1-4\alpha)\alpha \underbrace{\underbrace{E(r_{ij} r_{i-1,j})}_{Er_{ij}Er_{i-1,j}}}_{0} + \underbrace{\dots}_{0}) \\
&= (1-4\alpha)^2\sigma^2 + \alpha^2 4\sigma^2 = (1 - 8\alpha + 16\alpha^2 + 4\alpha^2)\sigma^2
\end{aligned}$$

Da $0 \leq \alpha$ und $0 \leq 1 - 4\alpha \Rightarrow 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{4}$:

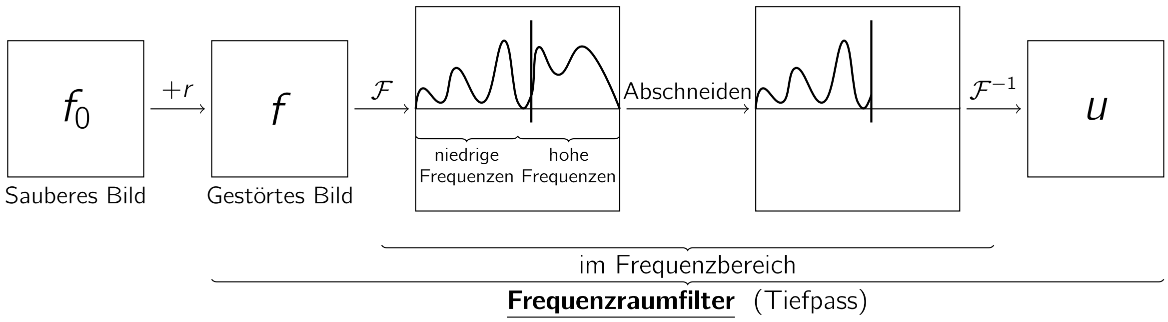
$$(1 - 8\alpha + 16\alpha^2 + 4\alpha^2)\sigma^2 = \underbrace{1 + \underbrace{20\alpha}_{\geq 0}\underbrace{(\alpha - \frac{2}{5})}_{<0}}_{\leq 1}$$

$\Rightarrow Var(u_{ij}) \leq Var(f_{ij})$ für $\alpha \in [0, \frac{1}{4}]$
Dabei gilt: $Var(u_{ij}) \overset{\alpha}{\to} d\min \iff 1 - 8\alpha + 20\alpha^2 \overset{\alpha}{\to} \min \iff -8 + 40\alpha = 0 \iff \alpha = \frac{1}{5}$

$$\Rightarrow \text{bester Filter}: \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \frac{1}{5} & \\ \hline \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \hline & \frac{1}{5} & \\ \hline \end{array}$$

5.3 Frequenzraum-filter

Ansatz: Rauschen = hochfrequente Anteile des Signals.
Diese können mittels der **Fouriertransformation** $\mathcal{F}$ gezielt entfernt werden.



Ein wichtiges Instrument ist hierbei die Fouriertransformation:

$$\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$$

$$\boxed{\hat{f}(z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle z,x\rangle} dx} \tag{5.7}$$

Wobei $z \in \mathbb{R}^d$, $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Falls auch $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist ,dann lässt sich f wie folgt mittels der inversen Fouriertransformation aus $\hat{f}$ rekonstruieren:

$$\mathcal{F}^{-1} : \hat{f} \mapsto f$$

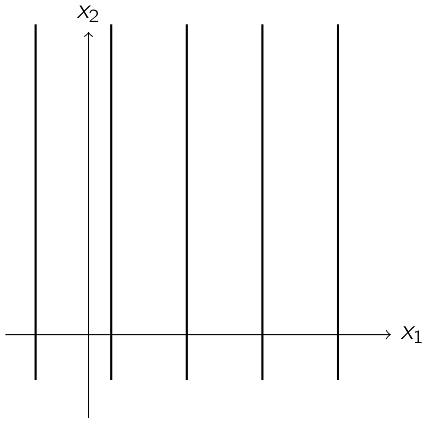
$$\boxed{\hat{f}(z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{i\langle z,x\rangle} dx} \tag{5.8}$$

Wobei $x \in \mathbb{R}^d$.
Man hat also $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f$, d.h.

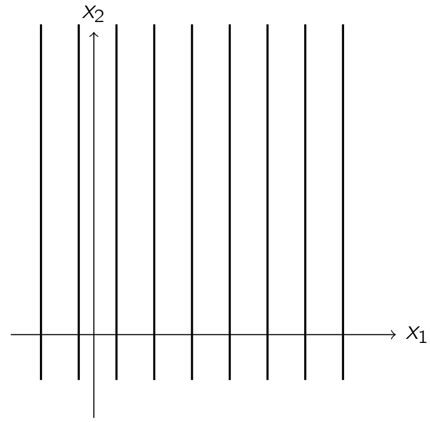
$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-i\langle z,y\rangle} dy\Big) e^{i\langle z,x\rangle} dz$$

Sei nun $e_z(x) := e^{i\langle z,x\rangle},\ x \in \mathbb{R}^d$ mit Parameter $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_d \end{pmatrix}$.
Also $e_z(x) = e^{i\langle \binom{z_1}{z_2}, \binom{x_1}{x_2}\rangle} = e^{i(z_1x_1 + z_2x_2)}$
Beispiele in $2D$:
(Hier stellen die Linien, Punkte mit konstantem wert dar)

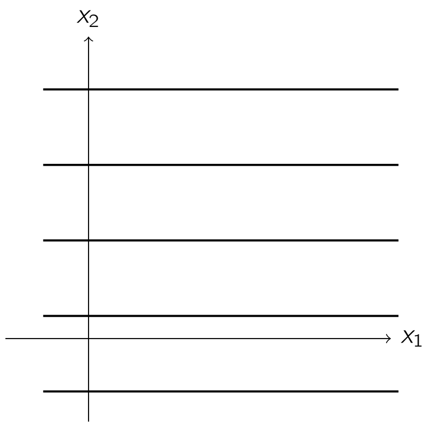
$z = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right),\ e_z(x) = e^{ix_1}$:



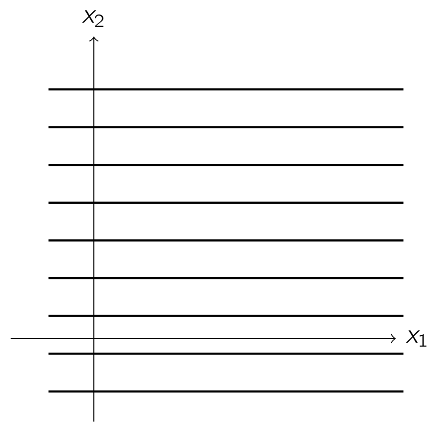
$z = \left(\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}\right),\ e_z(x) = e^{i2x_1}$:



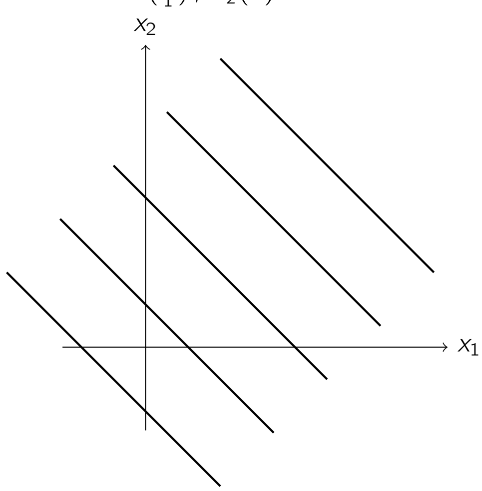
$z = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right),\ e_z(x) = e^{ix_2}$:



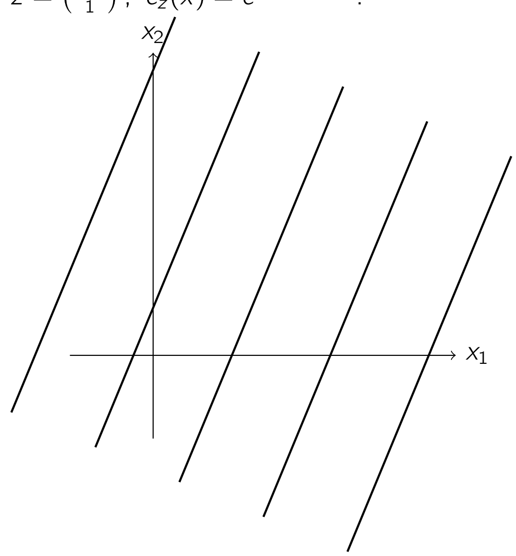
$z = \left(\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix}\right),\ e_z(x) = e^{i2x_2}$:



$z = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right),\ e_z(x) = e^{i(x_1+x_2}$:



$z = \left(\begin{smallmatrix}-2\\1\end{smallmatrix}\right),\ e_z(x) = e^{i(-2x_1+x_2)}$:



$f \in L^2(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} | \int_{\mathbb{R}^d} |f|^2 \, dx < \infty\}$ ist

- ein normierter Raum mit $+$, $\alpha\cdot$ und $||\cdot||_2 := \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 \, dx}$

- ein Skalarproduktraum mit $\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^d} f \bar{g} dx$, wobei $||f||_2^2 = \langle f, f \rangle$
- ein vollständiger Raum, also **Banachraum**

Ein vollständiger normierter Banachraum mit Skalarproduk heißt **Hilbertraum** .

$\mathcal{F}$ kann auch als Abbildung auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ betrachtet werden. Dann gilt:

$$\hat{f} = \mathcal{F} f \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

und

$$\left|\left|\hat{f}\right|\right|_2 = ||f||_2 \tag{5.9}$$

und sogar

$$\left\langle \hat{f}, \hat{g} \right\rangle_2 = \langle f, g \rangle_2 \tag{5.10}$$

für alle $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Weitere Eigenschaften der Fouriertransformation:

i) $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \hat{f}$ stetig und $\lim\limits_{|z| \to \infty} \hat{f}(z) = 0$

ii) $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \to C(\mathbb{R}^d)$ ist eine lineare Abbildung

iii) $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \to C(\mathbb{R}^d)$ ist eine beschränkte/stetige Abbildung

iv) Verschiebung $\overset{\mathcal{F}}{\to}$ Modulation, d.h.

$$g(x) = f(x + a) \Rightarrow \hat{g}(z) = e^{i\langle a,z \rangle} \hat{f}(z)$$

v) Modulation $\overset{\mathcal{F}}{\to}$ Verschiebung, d.h.

$$g(x) = e^{i\langle x,a \rangle} f(x) \Rightarrow \hat{g}(z) = \hat{f}(z - a)$$

vi) Skalierung $\overset{\mathcal{F}}{\to}$ inverse Skalierung, d.h.

$$g(x) = f(cx) \Rightarrow \hat{g}(z) = \frac{1}{|c|} \hat{f}(\frac{z}{|c|})$$

vii) Konjugation: $g(x) = \overline{f(x)} \Rightarrow \hat{g}(z) = \overline{\hat{f}(-z)}$
Folglich: f reelwertig $\Rightarrow \hat{f}(z) = \overline{\hat{f}(-z)}$

viii)

$$\text{Grundmode: } \hat{f}(0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$$

$$\text{Analog: } f(0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x) dx$$

ix) Differentation $\overset{\mathcal{F}}{\to}$ Multiplikation mit Potenzen von z, d.h.

$$g(x) = \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}} f(x) \Rightarrow \hat{g}(z) = i^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_d} z_1^{\alpha_1} \cdots z_d^{\alpha_d} \hat{f}(z)$$

x) Unkehrung des letzten Punktes:

$$g(x) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d} f(x) \Rightarrow \hat{g}(z) = i^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_d} \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \hat{f}(z)$$

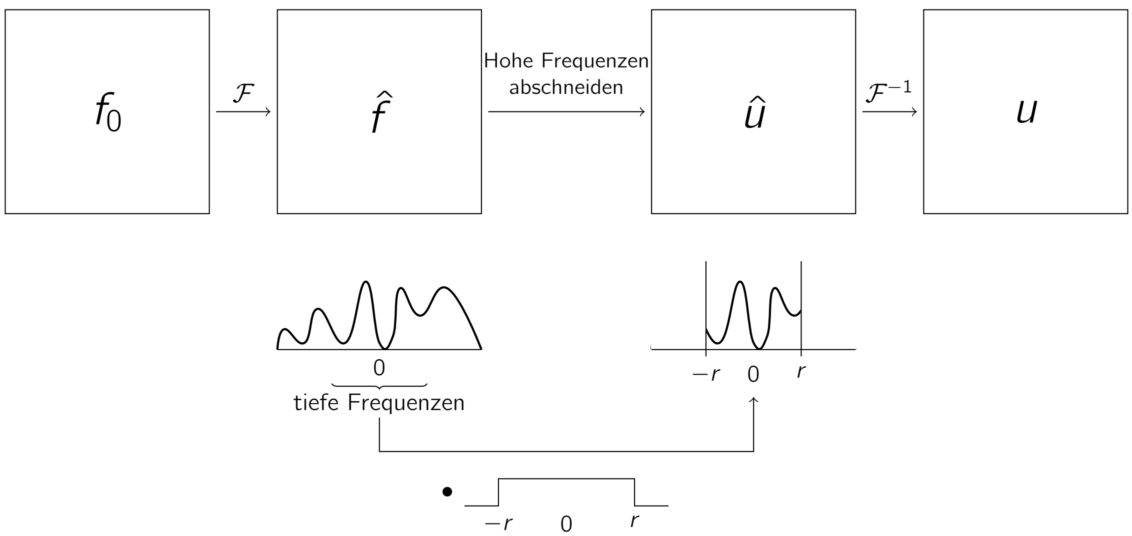
xi)

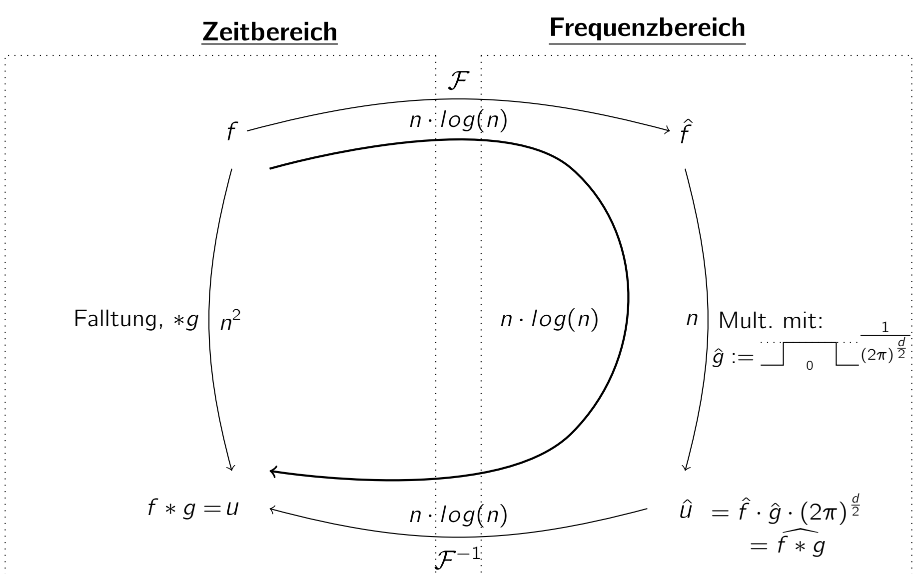
$$\text{Faltungssatz: } \mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g),\ \widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \hat{f} \cdot \hat{g}$$

$$\text{Analog: } \mathcal{F}(f \cdot g) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g),\ \widehat{f \cdot g} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \hat{f} * \hat{g}$$

d.h.: Faltung $\xrightarrow{\mathcal{F}}$ Multiplikation und umgekehrt

Zur Erinnerung:





Wie sieht g aus?

$$g = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\chi_{[-r,r]}\right)$$

$$\left(\chi_M(z) = \begin{cases} 0, & z \notin M \\ 1, & z \in M \end{cases}\right)$$

$$\begin{aligned}
g(x) =& \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}(\mathcal{F}^{-1}\chi_{[-r,r]^d})(x) \\
=& \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d}\chi_{[-r,r]^d}(z)e^{i\langle z,x\rangle}dz \\
(d=1) \rightarrow =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{[-r,r]}(z)e^{izx}dz \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_{r}^{-r}e^{izx}dz \\
=& \frac{1}{2\pi}\frac{e^{izx}}{ix}\Big|_{z=-r}^{r} \\
=& \frac{1}{2\pi ix}\left(e^{irx} - e^{-irx}\right) \\
=& \frac{1}{\pi x}sin(rx) \\
=& sinc\left(\frac{rx}{\pi}\right)\cdot\frac{r}{\pi}
\end{aligned}$$

$$\text{Wobei: } sinc(\varphi) = \begin{cases} \frac{sin(\pi\varphi)}{\pi\varphi} & ,\varphi \neq 0 \\ 1 & ,\varphi = 0 \end{cases}$$

g hat auch Masse 1, denn mit den Eigenschaften der Fouriertransformation folgt:

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} = \hat{g}(0) = (\mathcal{F}g)(0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{R^d}g(x)\underbrace{e^{\overbrace{-\langle x,0\rangle}^{0}}}_{1}dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{R^d}g(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d}g(x)dx = 1$$

Für $d = 2$ gilt:

$$
\begin{aligned}
g(x) =& \frac{1}{(2\pi)^1}(\mathcal{F}^{-1}\chi_{[-r,r]^2})(x)\\
=& \cdots \text{ (Analog zu oben)}\\
=& \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{[-r,r]^2}\left(\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right)\right)e^{i(z_1x_1+z_2x_2)}dz_1dz_2\\
=& \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-r}^{r}\left(\int_{-r}^{r}e^{iz_1x_1}e^{iz_2x_2}dz_1\right)dz_2\\
=& \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{r}e^{iz_1x_1}dz_1\right)}_{\frac{1}{\pi x_1}sin(\pi x_1)}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{r}e^{iz_2x_2}dz_2\right)}_{\frac{1}{\pi x_2}sin(\pi x_2)}
\end{aligned}
$$

Es ist zu bemerken, dass g eine Art Tensor Struktur besitzt, was in etwa bedeutet das sich die Funktion in belibigen Dimensionen als Produkt der Funktion in einer Dimensionen darstellen lässt.

Gauß-Kern :

$$
\begin{aligned}
G(x) =& \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}e^{\frac{-|x|^2}{2}} \Rightarrow G\left(\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_d\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}e^{\frac{-x_1^2-x_2^2+\cdots+x_d^2}{2}}\\
=& \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}e^{\frac{-x_1^2}{2}}\right)\cdot\ \cdots\ \cdot\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}e^{\frac{-x_d^2}{2}}\right) = G(x_1)\cdot\ \cdots\ \cdot G(x_d)
\end{aligned}
$$

5.4 Filterbreite und Glättung

Index