Mathematische Bildverarbeitung

Vorlesungsskript

Technische Universität Hamburg

Institut für Mathematik
Vorlesung von Prof. Dr. Marko Lindner
In LaTeX gesetzt durch Jonas Sattler

Fehlermeldungen an fabian.gabel@tuhh.de

Wintersemester 2018/19

Inhaltsverzeichnis

1 Überblick

1.1 Techniken der Bildverarbeitung

- Kontrastverbesserung
- Entrauschen
- Kantendetektion
- Schärfen
- Inpainting
- Segmentierung (Einzelne Objekte detektieren)
- Registrierung (Bilder des selben Objektes in Einklang bringen)

1.2 Unser Fokus

- Mathematische Beschreibung

1.3 Verwandte Vorlesungen

- 3D Computervision
- Digitale Bildanalyse
- Mustererkennung und Datenkompression
- Medical imaging

1.4 Literatur

- Bredies, Lorenz : Mathematische Bildverarbeitung
- Aubert, Kornprobst : Mathematical Problems in Image Processing
- Modersitzki : Numerical Methods for Image Registration
- Alt : Lineare Funktionalanalysis

2 Was ist ein Bild?

2.1 Definition

digitale/diskrete Sicht

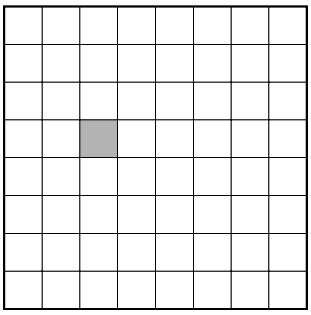


Abbildung 1: Diskretes Bild
Darstellung als Matrix.

Werkzeuge: Lineare Algebra
Vorteile: Endlicher Speicher
Nachteile: Probleme bei zoomen und drehen

kontinuierlich/analoge Sicht

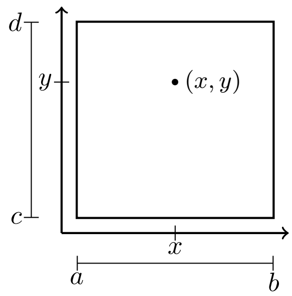


Abbildung 2: Kontinuierliches Bild
Darstelllung als Funktion in zwei Veränderlichen

Werkzeuge: Analysis
Vorteile: Mehr Freiheit (z.b. Kante=Linie entlang einer Unstetigkeit)
Nachteile: Unendlicher Speicher

Definition. Ein **Bild** ist eine Funktion $u : \Omega \to F$, wobei $\Omega \subset \mathbb{Z}^d$ (im diskreten Fall) oder $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (im kontinuierlichen Fall).

$d = 2$: Typisches 2D Bild

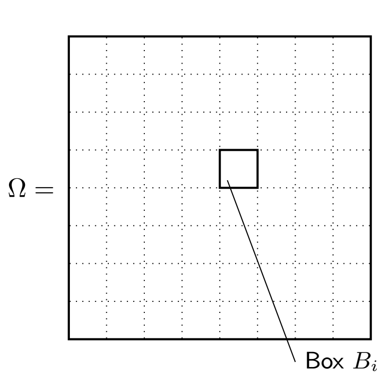
$d = 3$: 3D-Bild bzw. "Körper" oder Video: 2D Ort + Zeit

F ist der **Farbraum**, Beispiele:

- F= $[0, 1]$ oder F=$\{0, 1, ..., 255\}$, Graustufen
- F= $\{0, 1\}$ schwarz/weiß
- F= $[0, 1]^3$ oder F= $\{0, 1, ..., 255\}^3$ Farbbilder

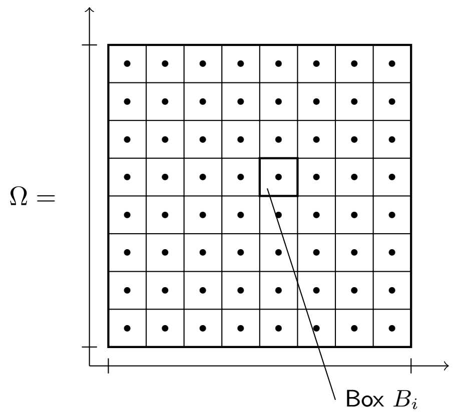
2.2 Umwandlung

kontinuierlich $\to$ diskret:

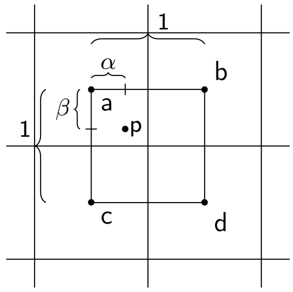


- Ω in Gitter zerlegen.
- Jede Box durch nur einen Farbwert approximieren.
- Etwa durch den Funktionswert im Mittelpunkt der Box.
- oder durch den Mittelwert in der Box:
$$\frac{1}{|B_i|} \cdot \int_{B_i} u(x)\,\mathrm{d}x.$$

Diskret $\to$ Kontinuierlich:



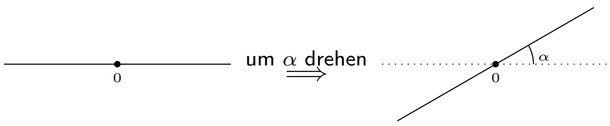
1. Idee: Jeder Punkt der Box B_i erhält den Funktionswert von B_i als Farbwert
   $\Rightarrow$ **Nearest neighbour Interpolation**.
2. Idee: Mittelpunkt von Box B_i erhält den Wert von Pixel B_i sonst wird interpoliert.
   Grauwert $g :=$ Gewichtetes Mittel aus Grauwerten a, b, c, d.



$$g = (1-\alpha)(1-\beta)a + \alpha(1-\beta)b + (1-\alpha)\beta c + \alpha\beta d$$

Dieses wird **Bilineare Interpolation** genannt.

2.3 Beispiel Rotation

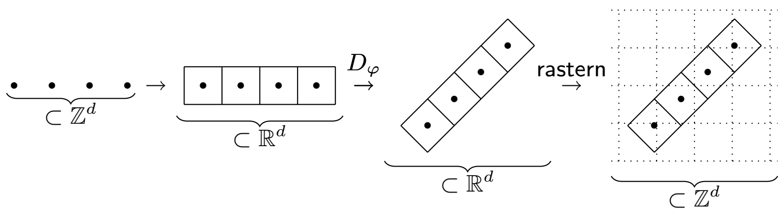


1. Fall, kontinuierliches Bild
Sei u das alte Bild und v das neue Bild, dann ist die Drehung gegeben durch eine **Drehmatrix**:

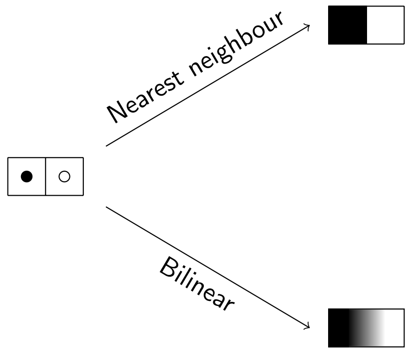
$$D_\varphi \in \mathbb{R}^{2\times 2}, D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Damit folgt, dass $D(u) = D_\varphi \Omega$ und $v(x) = u(\underbrace{D_\varphi^{-1} x}_{\in \Omega}) = u(D_{-\varphi} x)$. ($D(u)$ ist die **Domain** von u)

2. Fall, diskretes Bild
Dieses ist problematisch, denn i.A. $D_{-\varphi} x \notin \mathbb{Z}^2$ für $x \in \mathbb{Z}^2$.



In beiden Fällen: Lasse x durch die Domain von v laufen und setze $v(x) := u(D_\varphi^{-1} x)$, wobei der konkrete Wert durch Interpolation bestimmt wird.


Nearest neighbour
Bilinear

3 Histogramme und deren Anwendungen

3.1 Histogramme

Sei $u : \Omega \to F$ ein diskretes Bild, dann heißt die Abbildung

$$H_u : F \to \mathbb{N}_0$$

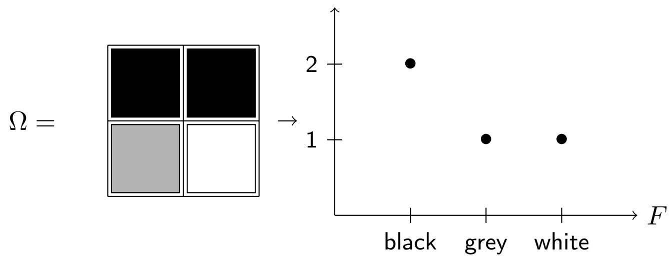
$$F \ni k \mapsto \#\{x \in \Omega \mid u(x) = k\}$$

Histogramm des Bildes u. Dieses gibt an, wie oft der Helligkeitswert k im Bild u vorhanden ist.
Damit gilt auch:

$$\sum_{k \in F} H_u(k) = |\Omega| \text{, also die Anzahl der Pixel.}$$

Bemerkung. Manchmal betrachtet man die relative Häufigkeit $\widetilde{H}_u(k) = \dfrac{H_u(k)}{|\Omega|}$.

Beispiel:



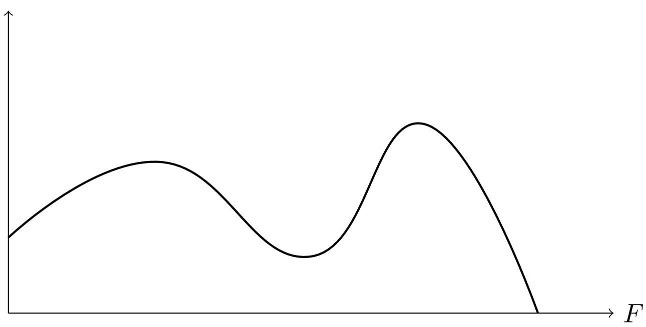
Für kontinuierliche Bilder wird das allgemeinere Konzept des **Maßes** benötigt:

$A \subset F,\ \mathcal{H}_u(A) := \left|u^{-1}(A)\right|$

↗ <u>Diskretes Bild:</u> Anzahl der Elemente in $u^{-1}(A)$

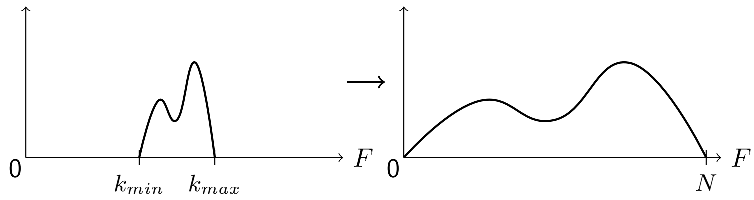
↘ <u>Kontinuierliches Bild:</u> Volumen von $u^{-1}(A)$

Zusammenhang zum vorherigen: $\mathcal{H}_u(A) = \sum_{k \in A} H_u(k)$. Man sagt dann, dass H_u eine **Dichte** zum Maß $\mathcal{H}_u$ sei.
Diese kann auch im kontinuierlichen Sinne existieren:



3.2 Anwendung: Kontrastverbesserung

Problem & Idee: Falls das Bild nur einen kleinen Teil von F nutzt, kann der Kontrast verbessert werden, indem man das Bild auf ganz F verteilt. Wir nehmen an, $F = \{0, 1, \ldots, N\}$ mit $N \in \mathbb{N}$ (z.B. $N = 255$).



$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, bend left, "\text{originales Bild}"] \arrow[rr, bend right, "\text{Bild mit besserem Kontrast}"'] & F \arrow[r, bend left, "\text{Zauberei } T"] & F \end{tikzcd}$$

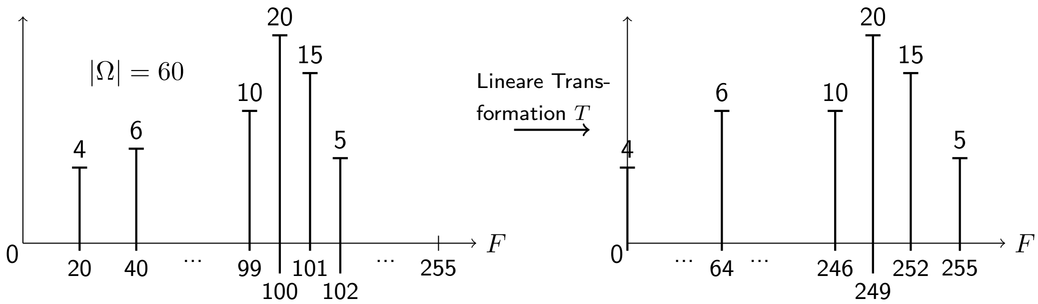
$v = T \circ u$
$v(k) = T(u(k))$

1. Idee: Kontrastdehnung
T „lineare " Abbildung, so dass $T(k_{min}) = 0$ und $T(k_{max}) = N$:

$$T(k) = \frac{k - k_{min}}{k_{max} - k_{min}} N, \text{ kontinuierlicher Farbraum}$$

$$T(k) = \left[\frac{k - k_{min}}{k_{max} - k_{min}} N \right], \text{ diskreter Farbraum}$$

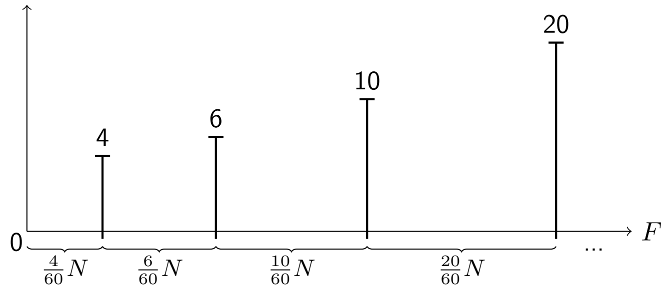
Beispiel: $k_{\min} = 20$ und $k_{\max} = 102$



Dieses brint jedoch wenig, falls das Histogramm bereits voll ausgedehnt ist.

2. Idee: Nicht-lineare Kontrastdehnung

Dieses mal setzen wir $T(k) = \left[\frac{N}{|\Omega|} \sum_{l=0}^{k} H_u(l) \right]$ für einen diskreten Farbraum und erhalten:



T lässt sich auch alternativ ausdrücken durch

$$T(k) = [\mathcal{H}_u(\{0, ..., k\})] .$$

Und somit folgt, dass für den kontinuierlichen Fall T durch

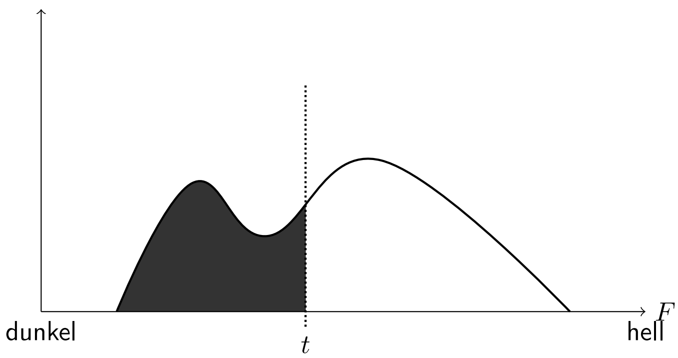
$$T(k) = \frac{N}{|\Omega|}\mathcal{H}_u((0, k))$$

definiert werden kann. Allgemein heißt der Prozess **Histogramm - equalization**.

3.3 Anwendung: SW-Konvertierung

Aufgabe: Graustufenbild $\to$ SW-Bild.
Nützlich etwa bei Objekterkennung/Segmentierung.

Idee: Das Histogramm an einem gewissen **Schwellenwert** t spalten:



Also setze nun für $t \in F$:

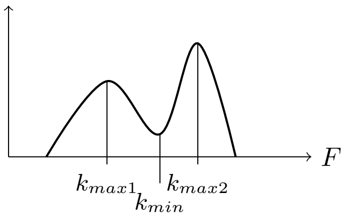
$$\begin{aligned} \text{schwarz} &= \{k \in F \mid k \leq t\} \\ \text{weiß} &= \{k \in F \mid k > t\} \end{aligned}$$

Graustufenbild $u \longrightarrow$ schwarz/weiß Bild $\tilde{u}$:

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} 0, & u(x) \in \text{schwarz} \\ 1, & u(x) \in \text{weiß} \end{cases} \quad \Rightarrow \tilde{F} = \{0, 1\}.$$

Methoden um diesen Schwellenwert t zu wählen:

1. **Shape based Methods**:
   Falls das Histogramm von u **bimodal** ist, also die Form:



   hat, dann wähle:

$$t := k_{min}$$
$$\text{oder } t := \frac{k_{max1} + k_{max2}}{2}$$

2. **Otsu's Verfahren** (1979):
   Vorher einige Definitionen.
   Die **Masse**:

$$m_{\text{schwarz}} := \sum_{k \,\in\, \text{schwarz}} H_u(k)$$
$$m_{\text{weiß}} := \sum_{k \,\in\, \text{weiß}} H_u(k)$$

   Der **Mittelwert**:

$$\mu_{\text{schwarz}} := \frac{\sum\limits_{k\in\text{schwarz}} k \cdot H_u(k)}{\sum\limits_{k\in\text{schwarz}} H_u(k)} = \frac{\sum\limits_{k\in\text{schwarz}} k \cdot H_u(k)}{m_{\text{schwarz}}}$$

$$\mu_{\text{weiß}} := \frac{\sum\limits_{k\in\text{weiß}} k \cdot H_u(k)}{\sum\limits_{k\in\text{weiß}} H_u(k)} = \frac{\sum\limits_{k\in\text{weiß}} k \cdot H_u(k)}{m_{\text{weiß}}}$$

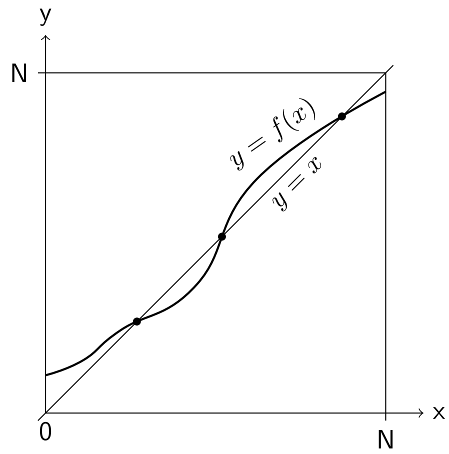
   Die **Varianz**:

$$\sigma^2_{\text{schwarz}} = \sum_{k\in\text{schwarz}} (k - \mu_{\text{schwarz}})^2 \cdot H_u(k)$$
$$\sigma^2_{\text{weiß}} = \sum_{k\in\text{weiß}} (k - \mu_{\text{weiß}})^2 \cdot H_u(k)$$

   Nun lautet Otsu's Methode: $\sigma^2_{\text{schwarz}} + \sigma^2_{\text{weiß}} \xrightarrow{t} \min$.

3. **Median**:
   Wähle t so, dass $m_{\text{schwarz}} = m_{\text{weiß}}$.

4. **Isodata Algorithmus** (1970s):
   Wähle t so, dass $t = \frac{\mu_{\text{schwarz}} + \mu_{\text{weiß}}}{2} =: f(t)$.
   Diese Gleichung ist bereits eine **Fixpunktgleichung** und eine Lösung kann, etwa mit einer Fixpunktiteration approximiert werden, das heißt $t_{n+1} := f(t_n)$.

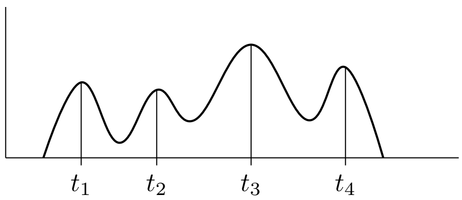


Matlab Beispiel :

```
u=imread('liftingbody.png');
t=greythresh(u);%uses Otsu's method
v=im2bn(u,t);
imshow(v);
```

Einige dieser Verfahren können auch erweitert werden, so dass ein Graustufenbild nicht nur in zwei, sondern in M Farben zerlegt werden kann. Im allgemeinen werden dann $M-1$ thresholds benötigt.

1. **Shape based** :



2. **Otsu's Verfahren** :
   Farbklassen:

$$F_1 = \{k : k \leq t_1\}$$
$$F_2 = \{k : t_1 < k \leq t_2\}$$
$$\vdots$$
$$F_M = \{k : t_{M-1} < k\}$$

   Und wie zuvor: $\sigma_1^2 + ... + \sigma_M^2 \to \min$

3. **Median** :
   Zerteile F in M Quantile gleicher Masse.

4. **Isodata** :
   Hierzu existiert keine bekannte Verallgemeinerung auf M Farbklassen.

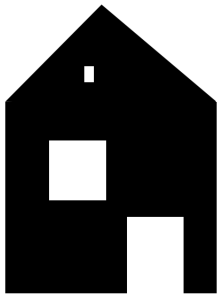
Matlab code :

```
u=imread('Circles Bright Dark.png');
t=multithresh(u,M-1);
v=imquantize(u,t);
w=label2rgb(u,t);
imshow(w);
```

4 Einfache morphologische Operationen

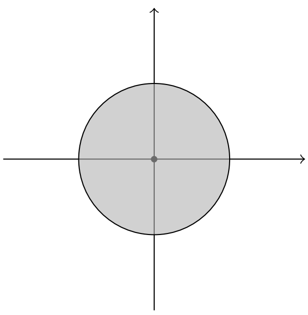
S/W Bild:

$A =$



Strukturelement:

$B =$



4.1 Verknüpfungen von A und B

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

Diese wird **Dilation** genannt. Anschaulich wird an jeden schwarzen Punkt des Bildes A das Strukturelement B gelegt.

$A + B =$

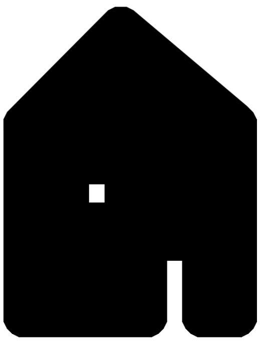


Bild erzeugt in Matlab durch:

```
I=imread('Bild1.png');
se=strel('disk',40,8);
I2=imcomplement(imdilate(imcomplement(I),se));%Es wird das Komplement des Bildes gebildet, damit das Strukturelement auf den schwarzen Bereich angewendet wird
imshow(I2);
```

$$A - B := \{a \in A : a + B \subset A\}$$

Diese wird **Erosion** genannt. Anschaulich werden die schwarzen Bereiche des Bildes gesucht, in die das Strukturelement hinein passt.

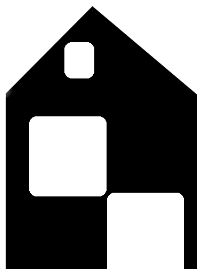
$A - B =$ 

Bild erzeugt in Matlab durch:

```
I=imread('Bild1.png');
se=strel('disk',20,8);
I2=imcomplement(imerode(imcomplement(I),se));
imshow(I2);
```

Es ist schnell zu erkennen, dass $A \neq (A + B) - B$ gilt, deshalb wird eine neue Operation eingeführt:

$$A \bullet B := (A + B) - B$$

Dieses wird **Schließen** genannt und wird etwa genutzt um Löcher in einem Bild zu entfernen. Im Beispiel Bild ist zu sehen, dass das obere Fenster nicht mehr vorhanden ist.

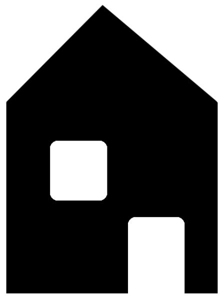
$A \bullet B =$ 

Bild erzeugt in Matlab durch:

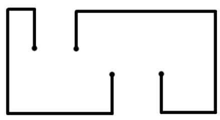
```
I=imread('Bild1.png');
se=strel('disk',20,8);
I2=imcomplement(imdilate(imcomplement(I),se));
I3=imcomplement(imerode(imcomplement(I2),se));
imshow(I3);
```

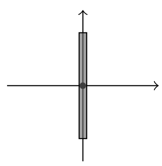
Es existiert auch die Umkehroperation:

$$A \circ B := (A - B) + B$$

Diese wird **Öffnen** genannt. Damit werden kleine Strukturen entfernt.

Weitere Anwendungsbeispiele zu Dilattion und Erosion:

$A =$ 

$B =$ 

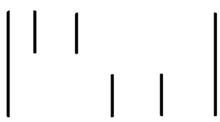
$A \circ B =$ 

Bild erzeugt in Matlab durch:

```
I=imread('Bild2.png');
se=strel('line',10,90);
I2=imcomplement(imerode(imcomplement(I),se));
I3=imcomplement(imerode(imcomplement(I2),se));
imshow(I3);
```

Viel mehr zum Thema morphologische Operationen finden Sie in Prof. Grigats Vorlesung *Digitale Bildanalyse* oder in Buch von Bredies/Lorenz.