【計量ファイナンスA】

9. 確率的ボラティリティモデルの推定方法と実証分析 (1)

中島 上智

（経済研究所）

SV モデル

- 観測方程式

$$
\begin{aligned}
R_t &= \mathrm{E}\left(R_t \middle| \boldsymbol{I}_{t-1}\right) + \epsilon_t, \\
\epsilon_t &= \sigma_t z_t, \quad z_t \sim N(0,1)
\end{aligned}
$$

- ボラティリティの遷移方程式

$$
\log(\sigma_{t+1}^2) = \mu + \phi(\log(\sigma_t^2) - \mu) + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma^2)
$$

- ボラティリティの定常性を仮定

$$
|\phi| < 1
$$

- h_1 は定常分布にしたがうと仮定

SV モデル

- $h_t = \log(\sigma_t^2)$ とおく．また, 便宜的に $y_t = R_t = \epsilon_t$ とする
- SV モデルは次のように書ける

$$
\begin{aligned}
y_t &= \exp(h_t/2)z_t, \quad z_t \sim N(0,1) \\
h_{t+1} &= \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma^2) \\
h_1 &\sim N\left(\mu, \sigma^2/(1-\phi^2)\right)
\end{aligned}
$$

SV モデルの推定

- 推定するパラメータは, $\theta = (\phi, \mu, \sigma^2)$
- 事前分布を以下のようにおく.

$$
\begin{aligned}
&(\phi+1)/2 \sim \mathrm{Beta}(a_0, b_0), \quad \mu \sim N(\mu_0, v_0^2), \\
&\sigma^2 \sim IG(n_0/2, S_0/2)
\end{aligned}
$$

- ボラティリティ $h = (h_1, \ldots, h_T)$ を状態変数とみなし, データ $y = (y_1, \ldots, y_T)$ が得られたときの, θ と h の同時事後分布を考える.

SV モデルの推定

$$
\begin{aligned}
&\pi(\theta, h|y) \\
\propto\ & (\phi+1)^{a_0-1}(-\phi-1)^{b_0-1}\cdot\exp\left\{-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2v_0^2}\right\} \\
&\times(\sigma^2)^{-n_0/2-1}\exp\left(-\frac{S_0}{2\sigma^2}\right) \\
&\times\prod_{t=1}^{T}\frac{1}{e^{h_t/2}}\exp\left(-\frac{y_t^2}{2e^{h_t}}\right) \\
&\times\prod_{t=1}^{T-1}(\sigma^2)^{-1/2}\exp\left[-\frac{\{(h_{t+1}-\mu)-\phi(h_t-\mu)\}^2}{2\sigma^2}\right] \\
&\times\sqrt{1-\phi^2}(\sigma^2)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{(1-\phi^2)(h_1-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \\
&\times I[-1<\phi<1]
\end{aligned}
$$

SV モデルの推定

ϕ の条件付き事後分布は, $\bar{h}_t = h_t - \mu$ とおき,

$$
\begin{aligned}
&\pi(\phi|\mu, \sigma^2, h, y) \\
&\propto \quad (\phi+1)^{a_0-1}(-\phi-1)^{b_0-1} \cdot \sqrt{1-\phi^2}\,\exp\left\{-\frac{(1-\phi^2)\bar{h}_1^2}{2\sigma^2}\right\} \\
&\quad\times \prod_{t=1}^{T-1} \exp\left\{-\frac{(\bar{h}_{t+1}-\phi\bar{h}_t)^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot I[-1<\phi<1]
\end{aligned}
$$

ここで, 提案分布を次のようにおく.

$$
\begin{aligned}
g(\phi) \quad &\propto \quad \prod_{t=1}^{T-1} \exp\left\{-\frac{(\bar{h}_{t+1}-\phi\bar{h}_t)^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot I[-1<\phi<1] \\
&\propto \quad \exp\left\{-\frac{(\phi-\hat{\phi})^2}{2\hat{\lambda}^2}\right\} \cdot I[-1<\phi<1]
\end{aligned}
$$

SV モデルの推定

ただし,

$$\hat{\lambda}^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^{T-1} \bar{h}_t^2}, \quad \hat{\phi} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \bar{h}_{t+1}\bar{h}_t}{\sum_{t=1}^{T-1} \bar{h}_t^2}$$

すなわち, $TN_{[-1,1]}(\hat{\phi}, \hat{\lambda}^2)$ を提案分布として, MH アルゴリズムを用いて ϕ をサンプリングする.

SV モデルの推定

μ の条件付き事後分布は,

$$
\begin{aligned}
& \pi(\mu|\phi, \sigma, h, y) \\
\propto \quad & \exp\left\{-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2v_0^2}\right\} \\
& \times \prod_{t=1}^{T-1} \exp\left[-\frac{\{(h_{t+1}-\mu)-\phi(h_t-\mu)\}^2}{2\sigma^2}\right] \\
& \times \exp\left\{-\frac{(1-\phi^2)(h_1-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \\
\propto \quad & \exp\left\{-\frac{(\mu-\hat{\mu})^2}{2\hat{v}^2}\right\}
\end{aligned}
$$

SV モデルの推定

ただし

$$
\begin{aligned}
\hat{v}^2 &= \left(\frac{1}{v_0^2} + \frac{(1-\phi)^2 + (T-1)(1-\phi)^2}{\sigma^2} \right)^{-1} \\
\hat{\mu} &= \hat{v}^2 \left\{ \frac{\mu_0}{v_0^2} + \frac{(1-\phi^2)h_1 + (1-\phi)\sum_{t=1}^{T-1}(h_{t+1} - \phi h_t)}{\sigma^2} \right\}
\end{aligned}
$$

すなわち，

$$
\mu \,|\, \phi, \sigma^2, h, y \;\sim\; N(\hat{\mu}, \hat{v}^2)
$$

SV モデルの推定

σ^2 の条件付き事後分布は,

$$
\begin{aligned}
& \pi(\sigma^2|\phi, \mu, h, y) \\
\propto\ & (\sigma^2)^{-n_0/2-1} \exp\left(-\frac{S_0}{2\sigma^2}\right) \\
& \times (\sigma^2)^{-T/2} \exp\left[-\frac{\sum_{t=1}^{T-1}(\bar{h}_{t+1} - \phi\bar{h}_t)^2}{2\sigma^2}\right] \\
& \times\ \exp\left\{-\frac{(1-\phi^2)\bar{h}_1^2}{2\sigma^2}\right\} \\
\propto\ & (\sigma^2)^{-\hat{n}/2-1} \exp\left(-\frac{\hat{S}}{2\sigma^2}\right)
\end{aligned}
$$

SV モデルの推定

ただし,

$$
\begin{aligned}
\hat{n} &= n_0 + T \\
\hat{S} &= S_0 + (1-\phi^2)\bar{h}_1^2 + \sum_{t=1}^{T-1} (\bar{h}_{t+1} - \phi \bar{h}_t)^2
\end{aligned}
$$

すなわち,

$$
\sigma^2 \,|\, \phi, \mu, h, y \sim IG(\hat{n}/2, \hat{S}/2)
$$

SV モデルの推定: single-move sampler

(θ, h) の MCMC アルゴリズムは以下のとおりとなる.

1. (θ, h) の初期値を設定する.
2. 次のサンプリングを順に繰り返す.
   - 2.1 ϕ を MH アルゴリズムで発生させる.
   - 2.2 μ を $TN(\hat{\mu}, \hat{v}^2)$ から発生させる.
   - 2.3 σ^2 を $IG(\hat{n}/2, \hat{S}/2)$ から発生させる.
   - 2.4 h_1 を $\pi(h_1|h_2, \theta, y)$ から発生させる.
   - 2.5 h_t を $\pi(h_t|h_{t-1}, h_{t+1}, \theta, y)$ から発生させる $(t = 2, \ldots, T-1)$.
   - 2.6 h_T を $\pi(h_T|h_{T-1}, \theta, y)$ から発生させる.

SV モデルの推定: single-move sampler

h_t の条件付き事後分布は,

$$
\begin{aligned}
&\pi(h_t | h_{t-1}, h_{t+1}, \theta, y) \\
&\propto \quad \frac{1}{e^{h_t/2}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2e^{h_t}}\right) \\
&\qquad \times \ \exp\left[-\frac{\{(h_t-\mu)-\phi(h_{t-1}-\mu)\}^2}{2\sigma^2}\right] \\
&\qquad \times \ \exp\left[-\frac{\{(h_{t+1}-\mu)-\phi(h_t-\mu)\}^2}{2\sigma^2}\right] \\
&\propto \quad \frac{1}{e^{h_t/2}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2e^{h_t}}\right) \cdot \exp\left\{-\frac{(h_t-\hat{h}_t)^2}{2\hat{w}^2}\right\}
\end{aligned}
$$

SV モデルの推定: single-move sampler

ただし,

$$\hat{h}_t = \mu + \frac{\phi\{(h_{t+1} - \mu) + (h_{t-1} - \mu)\}}{1 - \phi^2}$$

$$\hat{w} = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}$$

SV モデルの推定: single-move sampler

ここで,

$$\exp\left(-\frac{y_t^2}{2}e^{-h_t}\right) \leq \exp\left[-\frac{y_t^2}{2}\left\{e^{-\hat{h}_t}(1+\hat{h}_t) - h_t e^{-\hat{h}_t}\right\}\right]$$

が成り立つことから,

$$\pi(h_t|h_{t-1}, h_{t+1}, \theta, y) \leq g(h_t|h_{t-1}, h_{t+1}, \theta, y)$$

ただし,

$$g(h_t|h_{t-1}, h_{t+1}, \theta, y) \propto \exp\left\{-\frac{(h_t - h_t^*)^2}{2\hat{w}^2}\right\}$$

SV モデルの推定: single-move sampler

なお,

$$h_t^* = \hat{h}_t + \frac{\hat{w}^2}{2}\left(\frac{y_t^2}{e^{h_t}} - 1\right)$$

すなわち, h_t のサンプリングには, $N(h_t^*, \hat{w}^2)$ を提案分布とする AR アルゴリズムを用いればよい.