【計量ファイナンスA】

6. ベイズ推定と マルコフ連鎖モンテカルロ法 (2)

中島 上智

(経済研究所)

MCMC 法でよく使う分布: 正規分布

$$\theta \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\begin{aligned}
\pi(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(\theta-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \\
&\propto \exp\left\{-\frac{(\theta-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}
\end{aligned}$$

MCMC 法でよく使う分布: 逆ガンマ分布

$\theta \sim IG(n, S),\ \theta > 0$

$$\begin{aligned}
\pi(\theta) &= \frac{S^n}{\Gamma(n)} \theta^{-n-1} \exp\left(-\frac{S}{\theta}\right) \\
&\propto \theta^{-n-1} \exp\left(-\frac{S}{\theta}\right)
\end{aligned}$$

- ただし,

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty \theta^{n-1} e^{-\theta} d\theta$$

- なお,

$$\mathrm{E}(\theta) = \frac{S}{n-1}, \quad \mathrm{Var}(\theta) = \frac{S^2}{(n-1)^2(n-2)}$$

ギブスサンプラーの例: 回帰モデル

次の回帰モデルのベイズ推定を考える.

$$y_t = \beta x_t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

- 推定するパラメータは (β, σ^2).
- 事前分布を以下のように設定する.

$$\beta \sim N(\beta_0, v_0^2), \quad \sigma^2 \sim IG(n_0/2, S_0/2)$$

ギブスサンプラーの例: 回帰モデル

データ $y = (y_1, \ldots, y_T)$ が得られた時のパラメータ (β, σ^2) の (同時) 事後分布は,

$$
\begin{aligned}
\pi(\beta, \sigma^2 | y) &\propto \pi(\beta) \cdot \pi(\sigma^2) \cdot f(y|\beta, \sigma^2) \\
&\propto \exp\left\{-\frac{(\beta - \beta_0)^2}{2v_0^2}\right\} \cdot (\sigma^2)^{-n_0/2-1} \exp\left(-\frac{S_0}{2\sigma^2}\right) \\
&\quad \times (\sigma^2)^{-T/2} \exp\left\{-\frac{\sum_{t=1}^{T}(y_t - \beta x_t)^2}{2\sigma^2}\right\}
\end{aligned}
$$

ギブスサンプラーの例: 回帰モデル

β の条件付き事後分布は,

$$\pi(\beta|\sigma^2, y) \propto \exp\left\{-\frac{(\beta-\beta_0)^2}{2v_0^2}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{\sum_{t=1}^{T}(y_t-\beta x_t)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$\propto \exp\left\{-\frac{(\beta-\hat{\beta})^2}{2\hat{v}^2}\right\}$$

ただし,

$$\hat{v}^2 = \left(\frac{1}{v_0^2} + \frac{\sum_{t=1}^{T} x_t^2}{\sigma^2}\right)^{-1}, \quad \hat{\beta} = \hat{v}^2\left(\frac{\beta_0}{v_0^2} + \frac{\sum_{t=1}^{T} x_t y_t}{\sigma^2}\right)$$

すなわち,

$$\beta \,|\, \sigma^2, y \sim N(\hat{\beta}, \hat{v}^2)$$

ギブスサンプラーの例: 回帰モデル

σ^2 の条件付き事後分布は,

$$\begin{aligned}\pi(\sigma^2|\beta, y) &\propto (\sigma^2)^{-n_0/2-1} \exp\left(-\frac{S_0}{2\sigma^2}\right) \\ &\quad \times (\sigma^2)^{-T/2} \exp\left\{-\frac{\sum_{t=1}^{T}(y_t - \beta x_t)^2}{2\sigma^2}\right\} \\ &\propto (\sigma^2)^{-\hat{n}/2-1} \exp\left(-\frac{\hat{S}}{2\sigma^2}\right)\end{aligned}$$

ただし, $\hat{n} = n_0 + T$, $\hat{S} = S_0 + \sum_{t=1}^{T}(y_t - \beta x_t)^2$. すなわち,

$$\sigma^2 \mid \beta, y \sim IG(\hat{n}/2, \hat{S}/2)$$

ギブスサンプラーの例: 回帰モデル

(β, σ^2) のギブスサンプラーは以下のとおりとなる.

1. (β, σ^2) の初期値を設定する.
2. 次のサンプリングを交互に繰り返す.
   2.1 β を $N(\hat{\beta}, \hat{v}^2)$ から発生させる.
   2.2 σ^2 を $IG(\hat{n}/2, \hat{S}/2)$ から発生させる.