

【計量ファイナンスA】

9. 確率的ボラティリティモデルの 推定方法と実証分析 (1)

中島 上智

(経済研究所)

SV モデル

▶ 観測方程式

$$\begin{aligned}R_t &= E(R_t | I_{t-1}) + \epsilon_t, \\ \epsilon_t &= \sigma_t Z_t, \quad Z_t \sim N(0, 1)\end{aligned}$$

▶ ボラティリティの遷移方程式

$$\log(\sigma_{t+1}^2) = \mu + \phi(\log(\sigma_t^2) - \mu) + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma^2)$$

▶ ボラティリティの定常性を仮定

$$|\phi| < 1$$

▶ h_1 は定常分布にしたがうと仮定

SV モデル

- ▶ $h_t = \log(\sigma_t^2)$ とおく. また, 便宜的に $y_t = R_t = \epsilon_t$ とする
- ▶ SV モデルは次のように書ける

$$y_t = \exp(h_t/2)z_t, \quad z_t \sim N(0, 1)$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma^2)$$

$$h_1 \sim N(\mu, \sigma^2/(1 - \phi^2))$$

SV モデルの推定

- ▶ 推定するパラメータは, $\theta = (\phi, \mu, \sigma^2)$
- ▶ 事前分布を以下のようにおく.

$$\begin{aligned}(\phi + 1)/2 &\sim \text{Beta}(a_0, b_0), \quad \mu \sim N(\mu_0, v_0^2), \\ \sigma^2 &\sim \text{IG}(n_0/2, S_0/2)\end{aligned}$$

- ▶ ボラティリティ $h = (h_1, \dots, h_T)$ を状態変数とみなし, データ $y = (y_1, \dots, y_T)$ が得られたときの, θ と h の同時事後分布を考える.

SV モデルの推定

$$\begin{aligned} \pi(\theta, h|y) & \propto (\phi + 1)^{a_0-1} (-\phi + 1)^{b_0-1} \cdot \exp \left\{ -\frac{(\mu - \mu_0)^2}{2v_0^2} \right\} \\ & \times (\sigma^2)^{-n_0/2-1} \exp \left(-\frac{S_0}{2\sigma^2} \right) \\ & \times \prod_{t=1}^T \frac{1}{e^{h_t/2}} \exp \left(-\frac{y_t^2}{2e^{h_t}} \right) \\ & \times \prod_{t=1}^{T-1} (\sigma^2)^{-1/2} \exp \left[-\frac{\{(h_{t+1} - \mu) - \phi(h_t - \mu)\}^2}{2\sigma^2} \right] \\ & \times \sqrt{1 - \phi^2} (\sigma^2)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{(1 - \phi^2)(h_1 - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \\ & \times I[-1 < \phi < 1] \end{aligned}$$

SV モデルの推定

ϕ の条件付き事後分布は, $\bar{h}_t = h_t - \mu$ とおき,

$$\pi(\phi|\mu, \sigma^2, h, y)$$

$$\begin{aligned} &\propto (\phi + 1)^{a_0-1}(-\phi + 1)^{b_0-1} \cdot \sqrt{1 - \phi^2} \exp \left\{ -\frac{(1 - \phi^2)\bar{h}_1^2}{2\sigma^2} \right\} \\ &\quad \times \prod_{t=1}^{T-1} \exp \left\{ -\frac{(\bar{h}_{t+1} - \phi\bar{h}_t)^2}{2\sigma^2} \right\} \cdot I[-1 < \phi < 1] \end{aligned}$$

ここで, 提案分布を次のようにおく.

$$\begin{aligned} g(\phi) &\propto \prod_{t=1}^{T-1} \exp \left\{ -\frac{(\bar{h}_{t+1} - \phi\bar{h}_t)^2}{2\sigma^2} \right\} \cdot I[-1 < \phi < 1] \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{(\phi - \hat{\phi})^2}{2\hat{\lambda}^2} \right\} \cdot I[-1 < \phi < 1] \end{aligned}$$

SV モデルの推定

ただし,

$$\hat{\lambda}^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^{T-1} \bar{h}_t^2}, \quad \hat{\phi} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \bar{h}_{t+1} \bar{h}_t}{\sum_{t=1}^{T-1} \bar{h}_t^2}$$

すなわち, $TN_{[-1,1]}(\hat{\phi}, \hat{\lambda}^2)$ を提案分布として, MH アルゴリズムを用いて ϕ をサンプリングする.

SV モデルの推定

μ の条件付き事後分布は,

$$\begin{aligned} \pi(\mu | \phi, \sigma, h, y) \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{(\mu - \mu_0)^2}{2\nu_0^2} \right\} \\ &\quad \times \prod_{t=1}^{T-1} \exp \left[-\frac{\{(h_{t+1} - \mu) - \phi(h_t - \mu)\}^2}{2\sigma^2} \right] \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{(1 - \phi^2)(h_1 - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{(\mu - \hat{\mu})^2}{2\hat{\nu}^2} \right\} \end{aligned}$$

SV モデルの推定

ただし

$$\begin{aligned}\hat{v}^2 &= \left(\frac{1}{v_0^2} + \frac{(1 - \phi^2) + (T - 1)(1 - \phi)^2}{\sigma^2} \right)^{-1} \\ \hat{\mu} &= \hat{v}^2 \left\{ \frac{\mu_0}{v_0^2} + \frac{(1 - \phi^2)h_1 + (1 - \phi) \sum_{t=1}^{T-1} (h_{t+1} - \phi h_t)}{\sigma^2} \right\}\end{aligned}$$

すなわち,

$$\mu \mid \phi, \sigma^2, h, y \sim N(\hat{\mu}, \hat{v}^2)$$

SV モデルの推定

σ^2 の条件付き事後分布は,

$$\begin{aligned} & \pi(\sigma^2 | \phi, \mu, h, y) \\ & \propto (\sigma^2)^{-n_0/2-1} \exp\left(-\frac{S_0}{2\sigma^2}\right) \\ & \quad \times (\sigma^2)^{-T/2} \exp\left[-\frac{\sum_{t=1}^{T-1} (\bar{h}_{t+1} - \phi \bar{h}_t)^2}{2\sigma^2}\right] \\ & \quad \times \exp\left\{-\frac{(1-\phi^2)\bar{h}_1^2}{2\sigma^2}\right\} \\ & \propto (\sigma^2)^{-\hat{n}/2-1} \exp\left(-\frac{\hat{S}}{2\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

SV モデルの推定

ただし,

$$\hat{n} = n_0 + T$$

$$\hat{S} = S_0 + (1 - \phi^2)\bar{h}_1^2 + \sum_{t=1}^{T-1} (\bar{h}_{t+1} - \phi\bar{h}_t)^2$$

すなわち,

$$\sigma^2 \mid \phi, \mu, h, y \sim IG(\hat{n}/2, \hat{S}/2)$$

SV モデルの推定: single-move sampler

(θ, h) の MCMC アルゴリズムは以下のとおりとなる.

1. (θ, h) の初期値を設定する.
2. 次のサンプリングを順に繰り返す.
 - 2.1 ϕ を MH アルゴリズムで発生させる.
 - 2.2 μ を $N(\hat{\mu}, \hat{v}^2)$ から発生させる.
 - 2.3 σ^2 を $IG(\hat{n}/2, \hat{S}/2)$ から発生させる.
 - 2.4 h_1 を $\pi(h_1|h_2, \theta, y)$ から発生させる.
 - 2.5 h_t を $\pi(h_t|h_{t-1}, h_{t+1}, \theta, y)$ から発生させる
($t = 2, \dots, T-1$).
 - 2.6 h_T を $\pi(h_T|h_{T-1}, \theta, y)$ から発生させる.

SV モデルの推定: single-move sampler

h_t の条件付き事後分布は,

$$\begin{aligned} & \pi(h_t | h_{t-1}, h_{t+1}, \theta, y) \\ & \propto \frac{1}{e^{h_t/2}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2e^{h_t}}\right) \\ & \quad \times \exp\left[-\frac{\{(h_t - \mu) - \phi(h_{t-1} - \mu)\}^2}{2\sigma^2}\right] \\ & \quad \times \exp\left[-\frac{\{(h_{t+1} - \mu) - \phi(h_t - \mu)\}^2}{2\sigma^2}\right] \\ & \propto \frac{1}{e^{h_t/2}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2e^{h_t}}\right) \cdot \exp\left\{-\frac{(h_t - \hat{h}_t)^2}{2\hat{w}^2}\right\} \end{aligned}$$

SV モデルの推定: single-move sampler

ただし,

$$\hat{h}_t = \mu + \frac{\phi\{(h_{t+1} - \mu) + (h_{t-1} - \mu)\}}{1 - \phi^2}$$

$$\hat{w} = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}$$

SV モデルの推定: single-move sampler

ここで,

$$\begin{aligned} & \exp\left(-\frac{y_t^2}{2}e^{-h_t}\right) \\ & \leq \exp\left[-\frac{y_t^2}{2}\left\{e^{-\hat{h}_t}(1+\hat{h}_t)-h_te^{-\hat{h}_t}\right\}\right] \end{aligned}$$

が成り立つことから,

$$\pi(h_t|h_{t-1}, h_{t+1}, \theta, y) \leq g(h_t|h_{t-1}, h_{t+1}, \theta, y)$$

ただし,

$$g(h_t|h_{t-1}, h_{t+1}, \theta, y) \propto \exp\left\{-\frac{(h_t - h_t^*)^2}{2\hat{w}^2}\right\}$$

SV モデルの推定: single-move sampler

なお,

$$h_t^* = \hat{h}_t + \frac{\hat{w}^2}{2} \left(\frac{y_t^2}{e^{\hat{h}_t}} - 1 \right)$$

すなわち, h_t のサンプリングには, $N(h_t^*, \hat{w}^2)$ を提案分布とする AR アルゴリズムを用いればよい.