

# 【計量ファイナンスA】

## 14. Realized Volatility

中島 上智

(経済研究所)

## Realized volatility

- ▶ 日中の高頻度のリターンを用いて算出するボラティリティの指標.
- ▶  $t-1$  を第  $t-1$  日の最終時点,  $t$  を第  $t$  日の最終時点とする.
- ▶ 第  $t$  日の日中の  $n$  個のリターン

$$\{r_{t-1+1/n}, r_{t-1+2/n}, \dots, r_t\}$$

を用いると, 第  $t$  日の日次 RV は次のように計算される.

$$RV_t = \sum_{i=1}^n r_{t-1+i/n}^2$$

# Integrated volatility

- ▶ 資産価格の対数値  $p(s)$  が拡散過程

$$dp(s) = \mu(s)ds + \sigma(s)dW(s)$$

に従っているものとする, 第  $t$  日の真のボラティリティは次のように定義される.

$$\sigma_t^2 = \int_{t-1}^t \sigma^2(s)ds$$

- ▶ 価格にノイズがない場合,  $n \rightarrow \infty$  とすると,  $RV_t$  は  $\sigma_t^2$  に確率収束する.

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} RV_t = \sigma_t^2$$

## Microstructure noise

- ▶ 高頻度データには, bid-ask bounce, 非同期取引などを要因として Microstructure noise と呼ばれるノイズが含まれる.
- ▶ まず,

$$\tilde{p}(s) = p(s) + \eta(s), \quad \eta(s) \sim WN(0, \sigma_\eta^2)$$

とおく.

## Microstructure noise

▶ すると,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\tilde{p}(t) - \tilde{p}(t - \Delta)) \\ = \mathrm{Var}(p(t) - p(t - \Delta)) + \mathrm{Var}(\eta(t) - \eta(t - \Delta)),\end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}(p(t) - p(t - \Delta)) = \int_{t-\Delta}^t \sigma^2(s) ds,$$

$$\mathrm{Var}(\eta(t) - \eta(t - \Delta)) = 2\sigma_\eta^2$$

▶ したがって,  $\Delta$  を小さくすると, 真のリターンの分散に比べて Microstructure noise の分散が相対的に大きくなる.

## RV の時系列モデル

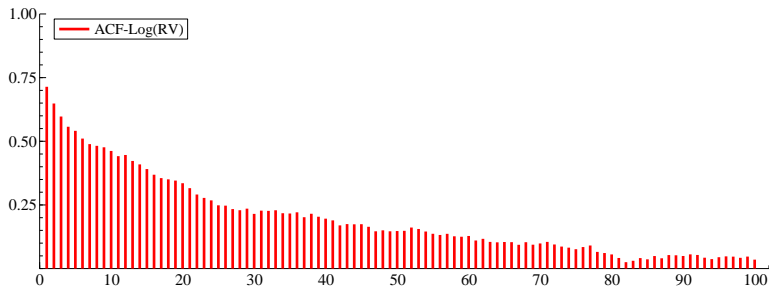
- ▶ RV には長期記憶性があることが知られている.
- ▶ ある変数の  $k$  次の自己相関係数を  $\rho(k)$  とすると,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\rho(k)| < \infty \Rightarrow \text{短期記憶 (short-memory) 過程}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\rho(k)| = \infty \Rightarrow \text{長期記憶 (long-memory) 過程}$$

## RV の時系列モデル

日経 225 インデックスの 5 分おきデータから算出された RV  
の対数  $\log RV$  の自己相関係数  
(2013/11/14 日から 2022/1/25 日)



# ARFIMA モデル

- ▶ RV には ARFIMA モデルのあてはまりが良いことが知られている.
- ▶ ラグ多項式

$$\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \cdots - \phi_p L^p$$

$$\Psi(L) = 1 - \psi_1 L - \cdots - \psi_q L^q$$

- ▶  $\Phi(L) = 0$  と  $\Psi(L) = 0$  の解の絶対値はすべて 1 より大きいと仮定する.
- ▶ ARMA(p, q) モデル

$$\Phi(L)(y_t - \mu) = \Psi(L)u_t, \quad u_t \sim N(0, \sigma^2)$$



# ARFIMA モデル

- ▶ ARIMA(p, q) モデル (AR Integrated MA)

$$\Phi(L)(1 - L)(y_t - \mu) = \Psi(L)u_t$$

- ▶ ARFIMA(p, d, q) モデル (AR Fractionally Integrated MA)

$$\Phi(L)(1 - L)^d(y_t - \mu) = \Psi(L)u_t$$

- ▶  $d > 0$  のとき, 長期記憶過程
- ▶ また,  $d < 0.5$  のとき, 定常.  $d \geq 0.5$  のとき, 非定常.

# HAR モデル

- ▶ Corsi (2004) により提案された Heterogeneous Autoregressive (HAR) モデルが RV のあてはまりや 1 期先予測に優れていることが知られている.
- ▶ HAR モデルは次式で表される.

$$\begin{aligned}\log RV_t \\ &= \alpha + \beta_d \log RV_{t-1} + \beta_w \log RV_{t-5:t-1} + \beta_m \log RV_{t-22:t-1} \\ &\quad + v_t\end{aligned}$$

- ▶ ここで,

$$RV_{t-5:t-1} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 RV_{t-i}, \quad RV_{t-22:t-1} = \frac{1}{22} \sum_{i=1}^{22} RV_{t-i}$$

## Realized SV モデル

- ▶ SV モデルに RV を組み込んだ Realized SV(RSV) モデルが提案されている (Takahashi, Omori and Watanabe, 2009).
- ▶  $x_t = \log \text{RV}_t$  とおき,

$$y_t = \exp(h_t/2)\epsilon_t,$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t,$$

$$x_t = \xi + h_t + u_t,$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_t \\ \eta_t \\ u_t \end{pmatrix} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}), \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & \rho\sigma & 0 \\ \rho\sigma & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_u^2 \end{pmatrix}.$$

## 参考文献

---

- ▶ Corsi, F. (2009) A simple approximate long-memory model of realized volatility, *Journal of Financial Econometrics*, 7(2), 174-196.
- ▶ Takahashi, M., Y. Omori, and T. Watanabe (2009) Estimating stochastic volatility models using daily returns and realized volatility simultaneously, *Computational Statistics and Data Analysis*, 53(6), 2404-2426.