【計量ファイナンスA】

12. 多変量確率的ボラティリティモデル

中島 上智

(経済研究所)

MCMC 法でよく使う分布: 多変量正規分布

$p \times 1$ vector: $\boldsymbol{\theta} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$

$$\begin{aligned} \pi(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p |\boldsymbol{\Sigma}|}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}) \right\} \\ &\propto \exp\left\{ -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\mu}) \right\} \end{aligned}$$

MCMC 法でよく使う分布: 逆ウィッシャート分布

$p \times p$ matrix: $\mathbf{\Theta} \sim IW(n, \mathbf{S})$

$$\begin{aligned}\pi(\mathbf{\Theta}) &= \frac{|\mathbf{S}|^{n/2}}{2^{np/2}\Gamma_p(n/2)} |\mathbf{\Theta}|^{-(n+p+1)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\mathbf{S}\mathbf{\Theta}^{-1}\right)\right\} \\ &\propto |\mathbf{\Theta}|^{-(n+p+1)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\mathbf{S}\mathbf{\Theta}^{-1}\right)\right\}\end{aligned}$$

ただし,

$$\Gamma_p(n) = \int_{S>0} \exp\left(-\mathrm{tr}(S)\right) |S|^{n-(p+1)/2} \, dS$$

ギブスサンプラーの例: 多変量回帰モデル

次の多変量回帰モデルのベイズ推定を考える.

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{e}_t, \quad \boldsymbol{e}_t \sim N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$$

- $\boldsymbol{y}_t$: $k \times 1$, $\boldsymbol{X}_t$: $k \times p$, $\boldsymbol{\beta}$: $p \times 1$, $\boldsymbol{e}_t$: $k \times 1$, $\boldsymbol{\Sigma}$: $k \times k$.
- 推定するパラメータは $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma})$.
- 事前分布を以下のように設定する.

$$\boldsymbol{\beta} \sim N(\boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{V}_0), \quad \boldsymbol{\Sigma} \sim IW(n_0, \boldsymbol{S}_0)$$

ギブスサンプラーの例: 多変量回帰モデル

データ $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_T)$ が得られた時のパラメータ $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma})$ の (同時) 事後分布は,

$$\begin{aligned}
&\pi(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}|\boldsymbol{y}) \\
&\quad\propto \quad \pi(\boldsymbol{\beta}) \cdot \pi(\boldsymbol{\Sigma}) \cdot f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}) \\
&\quad\propto \quad \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0)\right\} \\
&\qquad\quad \times |\boldsymbol{\Sigma}|^{-(n_0+p+1)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{S}_0\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\right)\right\} \\
&\qquad\quad \times |\boldsymbol{\Sigma}|^{-T/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta})\right\}
\end{aligned}$$

ギブスサンプラーの例: 多変量回帰モデル

β の条件付き事後分布は,

$$
\begin{aligned}
&\pi(\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{y}) \\
&\propto \quad \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}_0)'\boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}_0)\right\} \\
&\qquad \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(\boldsymbol{y}_t-\boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{y}_t-\boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta})\right\} \\
&\propto \quad \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}-\hat{\boldsymbol{\beta}})'\hat{\boldsymbol{V}}^{-1}(\boldsymbol{\beta}-\hat{\boldsymbol{\beta}})\right\}
\end{aligned}
$$

ギブスサンプラーの例: 多変量回帰モデル

ただし,

$$\hat{\boldsymbol{V}} = \left(\boldsymbol{V}_0^{-1} + \sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{X}_t' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{X}_t \right)^{-1}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \hat{\boldsymbol{V}} \left(\boldsymbol{V}_0^{-1} \boldsymbol{\beta}_0 + \sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{X}_t' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{y}_t \right)$$

すなわち,

$$\boldsymbol{\beta} \,|\, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{y} \sim N(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{V}})$$

ギブスサンプラーの例: 多変量回帰モデル

$\boldsymbol{\Sigma}$ の条件付き事後分布は,

$$
\begin{aligned}
&\pi(\boldsymbol{\Sigma}|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y}) \\
&\quad \propto \quad |\boldsymbol{\Sigma}|^{-(n_0+p+1)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{S}_0\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\right)\right\} \\
&\qquad\qquad \times |\boldsymbol{\Sigma}|^{-T/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta})\right\} \\
&\quad \propto \quad |\boldsymbol{\Sigma}|^{-(\hat{n}+p+1)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\hat{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

ギブスサンプラーの例: 多変量回帰モデル

ただし,

$$
\begin{aligned}
\hat{n} &= n_0 + T \\
\hat{S} &= S_0 + \sum_{t=1}^{T} (\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{X}_t \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{X}_t \boldsymbol{\beta})'
\end{aligned}
$$

すなわち,

$$
\boldsymbol{\Sigma} \,|\, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y} \sim IW(\hat{n}, \hat{S})
$$

ギブスサンプラーの例: 多変量回帰モデル

$(\beta, \boldsymbol{\Sigma})$ のギブスサンプラーは以下のとおりとなる.

1. $(\beta, \boldsymbol{\Sigma})$ の初期値を設定する.
2. 次のサンプリングを交互に繰り返す.
   2.1 β を $N(\hat{\beta}, \hat{\boldsymbol{V}})$ から発生させる.
   2.2 $\boldsymbol{\Sigma}$ を $IW(\hat{n}, \hat{\boldsymbol{S}})$ から発生させる.

多変量 SV モデル

- k 種類の金融資産のリターンを
  $\boldsymbol{y}_t = y_{1:k,t} = (y_{1t}, \ldots, y_{kt})'$ と書く.
- y_{it} がそれぞれ独立に SV モデルにしたがう場合,

$$
\begin{aligned}
y_{it} &= \exp(h_{it}/2) z_{it}, \quad z_{it} \sim N(0,1) \\
h_{i,t+1} &= \mu_i + \phi_i (h_{it} - \mu_i) + \eta_{it}, \quad \eta_{it} \sim N(0, \sigma_i^2)
\end{aligned}
$$

多変量 SV モデル

- $\boldsymbol{z}_t = z_{1:k,t}$, $\boldsymbol{V}_t = \mathrm{diag}(\exp(h_{1:k,t}))$, $\boldsymbol{h}_t = h_{1:k,t}$, $\boldsymbol{\mu} = \mu_{1:k}$, $\boldsymbol{\Phi} = \mathrm{diag}(\phi_{1:k})$, $\boldsymbol{\eta}_t = \eta_{1:k,t}$, $\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{diag}(\sigma^2_{1:k})$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_t &= \boldsymbol{V}_t^{1/2}\boldsymbol{z}_t \\
\boldsymbol{h}_{t+1} &= \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{h}_t - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\eta}_t \\
\begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_t \\ \boldsymbol{\eta}_t \end{pmatrix} &\sim N\left(\mathbf{0}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{\Sigma} \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

多変量 SV モデル

- 複数の金融資産のリターンの間に相関が生じることがある.
- この相関を捉えるために, いくつかの方法が提案されている.

1. MSV モデル
   - Smith and Pitts (2006)
2. Factor MSV モデル
   - Chib, Nardari, and Shephard (2006)
3. Wishart process モデル
   - Philipov and Glickman (2006)

MSV モデル

- 観測方程式の誤差項がしたがう分布の分散共分散行列を一般化する.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_t &= \boldsymbol{V}_t^{1/2}\boldsymbol{z}_t \\
\boldsymbol{h}_{t+1} &= \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{h}_t - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\eta}_t \\
\begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_t \\ \boldsymbol{\eta}_t \end{pmatrix} &\sim N\left(\mathbf{0}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{\Sigma} \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

ただし,

$$
\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1k} \\ \rho_{21} & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \rho_{k1} & \cdots & & 1 \end{pmatrix}
$$

Factor MSV モデル

- リターンの変動の共通成分を $\boldsymbol{f}_t$ とおき，観測方程式に導入する．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_t &= B\boldsymbol{f}_t + \boldsymbol{V}_t^{1/2}\boldsymbol{z}_t \\
\boldsymbol{h}_{t+1} &= \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{h}_t - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\eta}_t
\end{aligned}
$$

- $\boldsymbol{f}_t$ $(p \times 1)$ をファクターと呼ぶ．ただし，$p < k$
- B $(k \times p)$ をファクター・ローディングと呼ぶ

Factor MSV モデル

- ファクターを次のようにモデル化する.

$$\boldsymbol{f}_t \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{V}_t^f)$$

または,

$$\boldsymbol{f}_{t+1} = \boldsymbol{\Psi} f_t + \boldsymbol{\xi}_t, \quad \boldsymbol{\xi}_t \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{V}_t^f)$$

- ここで, $\boldsymbol{V}_t = \mathrm{diag}(\exp(h_{1t}^f), \ldots, \exp(h_{pt}^f))$, $\boldsymbol{h}_t^f = h_{1:p,t}^f$ として,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{h}_{t+1}^f &= \boldsymbol{\mu}^f + \boldsymbol{\Phi}^f(\boldsymbol{h}_t^f - \boldsymbol{\mu}^f) + \boldsymbol{\eta}_t^f \\
\begin{pmatrix} z_t \\ \eta_t \\ \eta_t^f \end{pmatrix} &\sim N\left(\mathbf{0}, \begin{pmatrix} I & O & O \\ O & \boldsymbol{\Sigma} & O \\ O & O & \boldsymbol{\Sigma}^f \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Factor MSV モデル

- リターンの共分散行列は,

$$\mathrm{Var}(\boldsymbol{y}_t|\boldsymbol{h}_t, \boldsymbol{h}_t^f) = \boldsymbol{V}_t + \boldsymbol{B}\boldsymbol{V}_t^f\boldsymbol{B}$$

  となる.

- なお, モデルの識別のために, B に制約を課すことが多い.

Wishart process モデル

- リターンの共分散行列が逆ウィッシャート分布にしたがい, そのパラメータが変化すると仮定する.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_t &\sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_t) \\
\boldsymbol{\Sigma}_t &\sim IW(n, \boldsymbol{S}_{t-1}) \\
\boldsymbol{S}_{t-1} &= \frac{1}{n} \boldsymbol{D} \left(\boldsymbol{\Sigma}_{t-1}^{-1} \right)^{d} \boldsymbol{D}'
\end{aligned}
$$

- ただし, $\boldsymbol{D}$ は正定値行列 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{D}'$ となるようにコレスキー分解したもの.

参考文献

- Chib, S., F. Nardari, and N. Shephard (2006) Analysis of high dimensional multivariate stochastic volatility models. *Journal of Econometrics*, 134, 341-371.
- Philipov, A., and M. E. Glickman (2006) Multivariate stochastic volatility via Wishart processes. *Journal of Business and Economic Statistics*, 24, 313-328.
- Smith, M., and A. Pitts (2006) Foreign exchange intervention by the Bank of Japan: Bayesian analysis using a bivariate stochastic volatility model, *Econometric Reviews*, 25, 425-451.