【計量ファイナンスA】

1. 時系列分析の基礎

中島 上智

（経済研究所）

時系列分析の基礎

- 定常性
- AR, MA, ARMA モデル

弱定常性

- y_t が以下の条件をすべて満たすとき, 弱定常 (weakly stationary, covariance stationary) であるという.

  1. $\mathrm{E}(y_t) = \mu < \infty$
  2. $\mathrm{Var}(y_t) = \sigma^2 < \infty$
  3. $\mathrm{Cov}(y_t, y_s) = f(|t - s|) < \infty$

ホワイト・ノイズ

- ϵ_t が以下の条件をすべて満たすとき，ホワイト・ノイズであるという．

1. $\mathrm{E}(\epsilon_t) = 0$
2. $\mathrm{Var}(\epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2 < \infty$
3. $\mathrm{Cov}(\epsilon_t, \epsilon_s) = 0$ for all $t \neq s$.

時系列モデル

- AR(p) モデル

$$y_t = \mu' + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t$$

- MA(q) モデル

$$y_t = \mu + \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \epsilon_{t-q}$$

- ARMA(p,q) モデル

$$y_t = \mu' + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \epsilon_{t-q}$$

ラグ多項式による表現

ラグ・オペレーター

- $Ly_t = y_{t-1}$
- $L^k y_t = y_{t-k}$

ラグ多項式による表現

AR(p) モデル

$$y_t = \mu' + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t$$

$$y_t - \phi_1 y_{t-1} - \cdots - \phi_p y_{t-p} = \mu' + \epsilon_t$$
$$y_t - \phi_1 L y_t - \cdots - \phi_p L^p y_t = \mu' + \epsilon_t$$
$$\underbrace{(1 - \phi_1 L - \cdots - \phi_p L^p)}_{\Phi_p(L)} y_t = \mu' + \epsilon_t$$

$$\Phi_p(L) y_t = \mu' + \epsilon_t$$

ラグ多項式による表現

MA(q) モデル

$$
\begin{aligned}
y_t &= \mu + \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \epsilon_{t-q} \\
&= \mu + \epsilon_t - \theta_1 L \epsilon_t - \cdots - \theta_q L^q \epsilon_t \\
&= \mu + \underbrace{(1 - \theta_1 L - \cdots - \theta_q L^q)}_{\Theta_q(L)} \epsilon_t
\end{aligned}
$$

$$
y_t = \mu + \Theta_q(L) \epsilon_t
$$

ラグ多項式による表現

ARMA(p,q) モデル

$$y_t = \mu' + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \epsilon_{t-q}$$

$$\begin{aligned} y_t - \phi_1 y_{t-1} - \cdots - \phi_p y_{t-p} &= \mu' + \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \epsilon_{t-q} \\ y_t - \phi_1 L y_t - \cdots - \phi_p L^p y_t &= \mu' + \epsilon_t - \theta_1 L \epsilon_t - \cdots - \theta_q L^q \epsilon_t \\ \underbrace{(1 - \phi_1 L - \cdots - \phi_p L^p)}_{\Phi_p(L)} y_t &= \mu' + \underbrace{(1 - \theta_1 L - \cdots - \theta_q L^q)}_{\Theta_q(L)} \epsilon_t \end{aligned}$$

$$\Phi_p(L) y_t = \mu' + \Theta_q(L) \epsilon_t$$

AR(p) モデルの定常性

AR(p) モデル

$$y_t = \mu' + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t$$

$$\underbrace{(1 - \phi_1 L - \cdots - \phi_p L^p)}_{\Phi_p(L)} y_t = \mu' + \epsilon_t$$

- $\Phi_p(x) = 1 - \phi_1 x - \cdots - \phi_p x^p = 0$ を特性方程式 (characteristic equation) と呼ぶ.
- 特性方程式のすべての根の絶対値が 1 を上回れば定常性を満たす.
- 定常性を満たせば, AR(p) モデルは MA(∞) モデルで表せる.

AR(1) モデルの定常性

- AR(1) モデル

$$y_t = \mu' + \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

  の特性方程式は

$$\Phi_1(x) = 1 - \phi x = 0$$

- この根は $x = 1/\phi$ なので, AR(1) モデルの定常性の条件は, $|\phi| < 1$.

AR(1) モデルの定常性

- AR(1) モデル

$$y_t = \mu' + \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

の y_{t-1} に

$$y_{t-1} = \mu' + \phi y_{t-2} + \epsilon_{t-1}$$

を代入すると,

$$y_t = \mu'(1+\phi) + \phi^2 y_{t-2} + \epsilon_t + \phi\epsilon_{t-1}$$

- 同様の操作を k 回繰り返すと,

$$y_t = \mu'(1+\phi+\cdots+\phi^k)+\phi^{k+1}y_{t-k-1}+\epsilon_t+\phi\epsilon_{t-1}+\cdots+\phi^k\epsilon_{t-k}$$

AR(1) モデルの定常性

- $|\phi| < 1$ であれば, $k \to \infty$ とすると, 以下のような MA(∞) モデルになる.

$$y_t = \frac{\mu'}{1-\phi} + \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k \epsilon_{t-k}$$

AR(1) モデルの定常性

ラグ・オペレーターによる展開

$$y_t = \mu' + \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

$$(1 - \phi L) y_t = \mu' + \epsilon_t$$

$$\begin{aligned}
y_t &= \frac{\mu'}{1 - \phi L} + \frac{\epsilon_t}{1 - \phi L} \\
&= (1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \cdots)\mu' + (1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \cdots)\epsilon_t \\
&= (1 + \phi + \phi^2 + \cdots)\mu' + \epsilon_t + \phi \epsilon_{t-1} + \phi^2 \epsilon_{t-2} + \cdots \\
&= \frac{\mu'}{1 - \phi} + \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k \epsilon_{t-k}
\end{aligned}$$

AR(1) モデルの無条件期待値

- 定常性の条件 $|\phi| < 1$ を満たせば, AR(1) モデル

$$y_t = \mu' + \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

は, 以下の MA(∞) モデルで表せる.

$$y_t = \frac{\mu'}{1-\phi} + \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k \epsilon_{t-k}$$

- したがって, 無条件期待値は,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(y_t\right) &= \mathrm{E}\left(\frac{\mu'}{1-\phi} + \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k \epsilon_{t-k}\right) \\ &= \frac{\mu'}{1-\phi} + \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k \mathrm{E}\left(\epsilon_{t-k}\right) = \frac{\mu'}{1-\phi} \end{aligned}$$

AR(1) モデルの無条件期待値

- AR(1) モデル

$$y_t = \mu' + \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

の両辺の無条件期待値をとると，

$$\mathrm{E}(y_t) = \mu' + \phi \mathrm{E}(y_{t-1})$$

- 定常性が満たされるなら，$\mathrm{E}(y_t) = \mathrm{E}(y_{t-1})$ なので，

$$\mathrm{E}(y_t) = \mu' + \phi \mathrm{E}(y_t)$$

- したがって，

$$\mathrm{E}(y_t) = \frac{\mu'}{1 - \phi}$$

AR(1) モデルの無条件期待値

- AR(1) モデルを,

$$y_t = \mu + \phi(y_{t-1} - \mu) + \epsilon_t$$

  と表すことがある.
- これは

$$y_t = \mu(1 - \phi) + \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

  となるので,

$$y_t = \mu' + \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

  と比べると,

$$\mu = \frac{\mu'}{1 - \phi}$$

- したがって, $\mu = \mathrm{E}(y_t)$.

AR(1) モデルの無条件分散

- AR(1) モデル

$$y_t = \mu' + \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

は, $|\phi| < 1$ であれば,

$$y_t = \frac{\mu'}{1-\phi} + \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k \epsilon_{t-k}$$

- したがって, 無条件分散は,

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(y_t) &= \mathrm{Var}\left(\frac{\mu'}{1-\phi} + \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k \epsilon_{t-k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \phi^{2k} \mathrm{Var}\left(\epsilon_{t-k}\right) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\phi^2} \end{aligned}$$

AR(1) モデルの無条件分散

- AR(1) モデル

$$y_t = \mu' + \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

の両辺の無条件分散をとると,

$$\mathrm{Var}(y_t) = \phi^2 \mathrm{Var}(y_{t-1}) + \sigma_\epsilon^2$$

- 定常性が満たされるなら, $\mathrm{Var}(y_t) = \mathrm{Var}(y_{t-1})$ なので,

$$\mathrm{Var}(y_t) = \phi^2 \mathrm{Var}(y_t) + \sigma_\epsilon^2$$

- したがって,

$$\mathrm{Var}(y_t) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - \phi^2}$$