【計量ファイナンスA】

3. GARCH モデルの推定方法と実証分析

中島 上智

（経済研究所）

GARCH モデルの最尤推定

- 尤度とは, モデルのパラメータ θ が与えられたときのデータ $(y_1, \ldots, y_T)$ の確率密度 $L = f(y_1, \ldots, y_T | \theta)$ である.
- これを θ の関数と見なしたものを尤度関数と呼び, $L(\theta)$ と表す.
- 尤度関数 $L(\theta)$ を最大化する θ の値を推定値とする方法を最尤推定法 (または最尤法) と呼ぶ.
- $(y_1, \ldots, y_T)$ が互いに独立であれば尤度は

$$f(y_1, \ldots, y_T | \theta) = f(y_1 | \theta) \cdots f(y_T | \theta)$$

として計算できる.

GARCH モデルの最尤推定

- 時系列モデルでは $(y_1, \ldots, y_T)$ は互いに独立ではないことが多く,

$$f(y_1, \ldots, y_T|\theta) = f(y_1|\theta)f(y_2|y_1, \theta)\cdots f(y_T|y_{T-1}, \ldots, y_1, \theta)$$

として尤度を計算することが多い.

GARCH モデルの最尤推定

- GARCH(1, 1) モデルの最尤推定について考える.

$$R_t = a + bR_{t-1} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t = \sigma_t z_t,$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\epsilon_{t-1}^2,$$

$$\omega > 0, \quad \beta, \alpha \geq 0$$

- リターン式のパラメータ (a, b) と GARCH(1, 1) モデルのパラメータ (ω, α, β) は, 厳密には, 同時推定することが望ましいが, ここでは, 簡便な２段階推定法を用いる.

GARCH モデルの最尤推定

- ２段階推定法では，まず，１段階目として，

$$R_t = a + bR_{t-1} + \epsilon_t$$

  を最小２乗法で推定し，残差 $(\hat{\epsilon}_1, \ldots, \hat{\epsilon}_T)$ を計算する．
- 次に，２段階目として，この残差 $(\hat{\epsilon}_1, \ldots, \hat{\epsilon}_T)$ を誤差 $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_T)$ であると考え，それをデータとして GARCH(1,1) モデルのパラメータ (ω, α, β) を最尤推定する．
- この場合，GARCH モデルの尤度は

$$L = f(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_T | \omega, \alpha, \beta)$$

  である．

GARCH モデルの最尤推定

- 条件に $(\sigma_0^2, \epsilon_0^2)$ を加えて
$$L \approx f(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_T | \sigma_0^2, \epsilon_0^2, \omega, \alpha, \beta)$$
とする.
- このとき, $(\sigma_0^2, \epsilon_0^2)$ は, 通常, 残差 $(\hat{\epsilon}_1, \ldots, \hat{\epsilon}_T)$ の標本分散, もしくはそれらの無条件の期待値 (定常値) $\omega/(1-\alpha-\beta)$ に等しいとする.
- $(\sigma_0^2, \epsilon_0^2, \omega, \beta, \alpha)$ が与えられると,
$$\sigma_1^2 = \omega + \beta\sigma_0^2 + \alpha\epsilon_0^2$$
から, σ_1^2 を計算できる. これは, $f(\epsilon_1 | \sigma_0^2, \epsilon_0^2, \omega, \alpha, \beta)$ の分散である.

GARCH モデルの最尤推定

- 最尤推定では誤差項 z_t の分布を仮定する必要があるが，多くの場合，標準正規分布を仮定するので，ここでも以下，標準正規分布を仮定する．
- ϵ_1 の平均は 0 なので，$f(\epsilon_1|\sigma_0^2, \epsilon_0^2, \omega, \alpha, \beta)$ は，以下のように，平均 0，分散 σ_1^2 の正規分布の確率密度として計算できる．

$$f(\epsilon_1|\sigma_0^2, \epsilon_0^2, \omega, \alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left(-\frac{\epsilon_1^2}{2\sigma_1^2}\right)$$

GARCH モデルの最尤推定

- さらに ϵ_1 の値が与えられると,

$$\sigma_2^2 = \omega + \beta\sigma_1^2 + \alpha\epsilon_1^2$$

  により σ_2^2 が計算できる．これは, $f(\epsilon_2|\epsilon_1, \sigma_0^2, \epsilon_0^2, \omega, \alpha, \beta)$ の分散である.

- ϵ_2 の平均はゼロなので, $f(\epsilon_2|\epsilon_1, \sigma_0^2, \epsilon_0^2, \omega, \alpha, \beta)$ は, 以下のように, 平均 0, 分散 σ_2^2 の正規分布の確率密度として計算できる.

$$f(\epsilon_2|\epsilon_1, \sigma_0^2, \epsilon_0^2, \omega, \alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp\left(-\frac{\epsilon_2^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

GARCH モデルの最尤推定

- これを繰り返していくと，尤度

$$
\begin{aligned}
L &= f(\epsilon_1|\sigma_0^2, \epsilon_0^2, \omega, \alpha, \beta) f(\epsilon_2|\epsilon_1, \sigma_0^2, \epsilon_0^2, \omega, \alpha, \beta) \cdots \\
&\quad f(\epsilon_T|\epsilon_{T-1}, \ldots, \epsilon_1, \sigma_0^2, \epsilon_0^2, \omega, \alpha, \beta)
\end{aligned}
$$

の全ての部分の確率密度が計算できる．ただし，

$$
f(\epsilon_t|\epsilon_{t-1}, \ldots, \epsilon_1, \sigma_0^2, \epsilon_0^2, \omega, \alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{\epsilon_t^2}{2\sigma_t^2}\right)
$$

GARCH モデルの最尤推定

- 以上の方法で計算される尤度を最大化するパラメータの値を求める.
- 実際に尤度の最大化を行うときには, 対数尤度

$$
\begin{aligned}
\log L &= \log f(\epsilon_1|\sigma_0^2, \epsilon_0^2, \omega, \alpha, \beta) + \log f(\epsilon_2|\epsilon_1, \sigma_0^2, \epsilon_0^2, \omega, \alpha, \beta) \\
&\quad + \cdots + \log f(\epsilon_T|\epsilon_{T-1}, \ldots, \epsilon_1, \sigma_0^2, \epsilon_0^2, \omega, \alpha, \beta)
\end{aligned}
$$

を用いる. ただし,

$$
\begin{aligned}
&\log f(\epsilon_t|\epsilon_{t-1}, \ldots, \epsilon_1, \sigma_0^2, \epsilon_0^2, \omega, \alpha, \beta) \\
&= -\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(\sigma_t^2) - \frac{\epsilon_t^2}{2\sigma_t^2}
\end{aligned}
$$

GARCH モデルの最尤推定

最尤推定量の標準誤差

- $T \to \infty$ とすると,

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_T^{\mathrm{ML}} - \theta) \sim N(0, A^{-1})$$

- ただし,

$$A = -\frac{1}{T} E\left(\frac{\partial^2 \log L(\theta)}{\partial\theta\partial\theta'}\right) \approx -\frac{1}{T}\left.\frac{\partial^2 \log L(\theta)}{\partial\theta\partial\theta'}\right|_{\theta=\hat{\theta}_T^{\mathrm{ML}}}$$

- したがって, $\hat{\theta}_T^{\mathrm{ML}}$ の分散は,

$$\frac{1}{T}A^{-1} \approx -\left(\left.\frac{\partial^2 \log L(\theta)}{\partial\theta\partial\theta'}\right|_{\theta=\hat{\theta}_T^{\mathrm{ML}}}\right)^{-1}$$

情報量基準

- AIC と SBIC は以下のように定義される.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AIC} &= -2\log L + 2k \\
\mathrm{SBIC} &= -2\log L + k\log(T)
\end{aligned}
$$

ただし, $k =$ 推定するパラメータの数.

資産価格収益率の計算

- P_t を t 期の資産価格とすると, 収益率（リターン）は,

$$y_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \times 100$$

で計算される．または,

$$y_t = (\log P_t - \log P_{t-1}) \times 100$$

と計算される.