【計量ファイナンスA】

14. Realized Volatility

中島 上智

（経済研究所）

Realized volatility

- 日中の高頻度のリターンを用いて算出するボラティリティの指標.
- $t-1$ を第 $t-1$ 日の最終時点, t を第 t 日の最終時点とする.
- 第 t 日の日中の n 個のリターン

$$\left\{ r_{t-1+1/n}, r_{t-1+2/n}, \ldots, r_t \right\}$$

を用いると, 第 t 日の日次 RV は次のように計算される.

$$\mathrm{RV}_t = \sum_{i=1}^{n} r_{t-1+i/n}^2$$

Integrated volatility

- 資産価格の対数値 $p(s)$ が拡散過程

  $$dp(s) = \mu(s)ds + \sigma(s)dW(s)$$

  に従っているものとすると, 第 t 日の真のボラティリティは次のように定義される.

  $$\sigma_t^2 = \int_{t-1}^{t} \sigma^2(s)ds$$

- 価格にノイズがない場合, $n \to \infty$ とすると, RV_t は σ_t^2 に確率収束する.

  $$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \mathrm{RV}_t = \sigma_t^2$$

Microstructure noise

- 高頻度データには, bid-ask bounce, 非同期取引などを要因として Microstructure noise と呼ばれるノイズが含まれる.
- まず,

$$\tilde{p}(s) = p(s) + \eta(s), \quad \eta(s) \sim WN(0, \sigma_\eta^2)$$

とおく.

Microstructure noise

- すると,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Var}\left(\tilde{p}(t) - \tilde{p}(t-\Delta)\right) \\
&= \mathrm{Var}\left(p(t) - p(t-\Delta)\right) + \mathrm{Var}\left(\eta(t) - \eta(t-\Delta)\right),
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{Var}\left(p(t) - p(t-\Delta)\right) = \int_{t-\Delta}^{t} \sigma^2(s)ds,
$$

$$
\mathrm{Var}\left(\eta(t) - \eta(t-\Delta)\right) = 2\sigma_\eta^2
$$

- したがって, Δ を小さくすると, 真のリターンの分散に比べて Microstructure noise の分散が相対的に大きくなる.

RV の時系列モデル

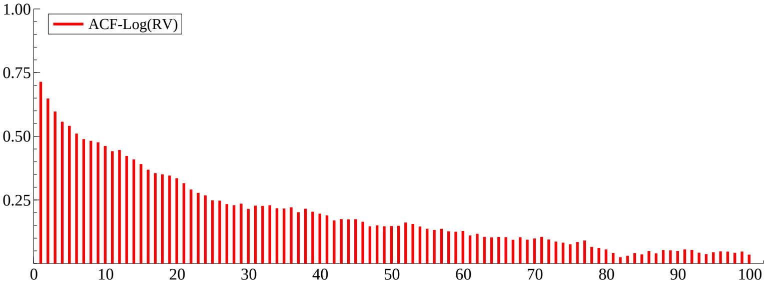
- RV には長期記憶性があることが知られている.
- ある変数の k 次の自己相関係数を $\rho(k)$ とすると,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\rho(k)| < \infty \Rightarrow \text{短期記憶 (short-memory) 過程}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\rho(k)| = \infty \Rightarrow \text{長期記憶 (long-memory) 過程}$$

RV の時系列モデル

日経 225 インデックスの 5 分おきデータから算出された RV の対数 $\log \mathrm{RV}$ の自己相関係数 (2013/11/14 日から 2022/1/25 日)



ARFIMA モデル

- RV には ARFIMA モデルのあてはまりが良いことが知られている.
- ラグ多項式

$$\begin{aligned}\Phi(L) &= 1 - \phi_1 L - \cdots \phi_p L^p \\ \Psi(L) &= 1 - \psi_1 L - \cdots \psi_q L^q\end{aligned}$$

- $\Phi(L) = 0$ と $\Psi(L) = 0$ の解の絶対値はすべて 1 より大きいと仮定する.
- ARMA(p, q) モデル

$$\Phi(L)(y_t - \mu) = \Psi(L)u_t, \quad u_t \sim N(0, \sigma^2)$$

ARFIMA モデル

- ARIMA(p, q) モデル (AR Integrated MA)

$$\Phi(L)(1-L)(y_t-\mu) = \Psi(L)u_t$$

- ARFIMA(p, d, q) モデル (AR Fractionally Integrated MA)

$$\Phi(L)(1-L)^d(y_t-\mu) = \Psi(L)u_t$$

- $d > 0$ のとき, 長期記憶過程
- また, $d < 0.5$ のとき, 定常. $d \geq 0.5$ のとき, 非定常.

HAR モデル

- Corsi (2004) により提案された Heterogeneous Autoregressive (HAR) モデルが RV のあてはまりや 1 期先予測に優れていることが知られている.
- HAR モデルは次式で表される.

$$
\begin{aligned}
&\log \mathrm{RV}_t \\
&= \quad \alpha + \beta_d \log \mathrm{RV}_{t-1} + \beta_w \log \mathrm{RV}_{t-5:t-1} + \beta_m \log \mathrm{RV}_{t-22:t-1} \\
&\quad + v_t
\end{aligned}
$$

- ここで,

$$
\mathrm{RV}_{t-5:t-1} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} \mathrm{RV}_{t-i}, \quad \mathrm{RV}_{t-22:t-1} = \frac{1}{22}\sum_{i=1}^{22} \mathrm{RV}_{t-i}
$$

Realized SV モデル

- SV モデルに RV を組み込んだ Realized SV(RSV) モデルが提案されている (Takahashi, Omori and Watanabe, 2009).
- $x_t = \log \mathrm{RV}_t$ とおき,

$$
\begin{aligned}
y_t &= \exp(h_t/2)\epsilon_t, \\
h_{t+1} &= \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t, \\
x_t &= \xi + h_t + u_t,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} \epsilon_t \\ \eta_t \\ u_t \end{pmatrix} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}), \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & \rho\sigma & 0 \\ \rho\sigma & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_u^2 \end{pmatrix}.
$$

参考文献

- Corsi, F. (2009) A simple approximate long-memory model of realized volatility, *Journal of Financial Econometrics*, 7(2), 174-196.
- Takahashi, M., Y. Omori, and T. Watanabe (2009) Estimating stochastic volatility models using daily returns and realized volatility simultaneously, *Computational Statistics and Data Analysis*, 53(6), 2404-2426.