【計量ファイナンスA】

8. ベイズ推定とマルコフ連鎖モンテカルロ法 (4)

中島 上智

(経済研究所)

MCMC 法でよく使う分布: ベータ分布

$\theta \sim \mathrm{Beta}(a, b)$, $0 < \theta < 1$

$$
\begin{aligned}
\pi(\theta) &= \frac{1}{B(a, b)} \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1} \\
&\propto \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}
\end{aligned}
$$

ただし,

$$
B(a, b) = \int_0^1 \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1} d\theta
$$

MCMC 法

- 条件付き事後分布 $\pi(\theta|\cdot)$ からは直接サンプリングできない場合の手法として, AR (Acceptance-Rejection) アルゴリズムと, MH (Metropolis-Hastings) アルゴリズムがある.
- $\pi(\theta|\cdot)$ を近似していて, かつ, 直接サンプリングできるような提案密度関数 (proposal density function) $g(\theta)$ を考える.

AR アルゴリズム

- 次の条件を満たす提案密度関数 $g(\theta)$ を考える．ある正の定数 c に対して, θ の取り得る全ての値で次式が成り立つ.

$$\pi(\theta|\cdot) \; \leq \; cg(\theta)$$

- 候補となる点 θ^{new} を $g(\theta)$ からサンプリングし, その点を確率 $\pi(\theta^{new}|\cdot)/cg(\theta^{new})$ で採用する．また, 確率 $1 - \pi(\theta^{new}|\cdot)/cg(\theta^{new})$ で棄却する.
- もし棄却された場合は, 再び θ^{new} を $g(\theta)$ からサンプリングし, その点を確率 $\pi(\theta^{new}|\cdot)/cg(\theta^{new})$ で採用するかどうか決める．これを θ^{new} が採用されるまで繰り返す.

MH アルゴリズム

- MH アルゴリズムで用いる提案密度関数は，$\pi(\theta|\cdot) \leq cg(\theta)$ を満たしていなくてもよい．
- 1 つの前のサンプリングで得られた点を θ^{old} とおく．提案密度関数 $g(\theta)$ からサンプリングし，得られた値 θ^{new} を使って受容確率 $q(\theta^{old} \to \theta^{new})$ を次のように計算する．

$$q(\theta^{old} \to \theta^{new}) = \min\left[\frac{\pi(\theta^{new}|\cdot)g(\theta^{old})}{\pi(\theta^{old}|\cdot)g(\theta^{new})}, 1\right]$$

- θ^{new} を確率 q で受容し，確率 $1-q$ で棄却する．受容された場合には，θ^{new} を，棄却された場合には，θ^{old} をサンプリングされた値とする．

MH アルゴリズムの例: AR(1) モデル

次の AR(1) モデルのベイズ推定を考える.

$$
\begin{aligned}
y_t &= \phi y_{t-1} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \\
y_1 &\sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}\right), \quad |\phi| < 1
\end{aligned}
$$

- 推定するパラメータは (ϕ, σ^2).
- 事前分布を以下のように設定する.

$$
(\phi+1)/2 \sim \mathrm{Beta}(a_0, b_0), \quad \sigma^2 \sim IG(n_0/2, S_0/2)
$$

MH アルゴリズムの例: AR(1) モデル

データ $y=(y_1,\ldots,y_T)$ が得られたときの, パラメータ (ϕ,σ^2) の (同時) 事後分布は,

$$
\begin{aligned}
&\pi(\phi,\sigma^2|y)\\
\propto\quad &(\phi+1)^{a_0-1}(-\phi+1)^{b_0-1}\cdot(\sigma^2)^{-n_0/2-1}\exp\left(-\frac{S_0}{2\sigma^2}\right)\\
&\times\sqrt{1-\phi^2}(\sigma^2)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{(1-\phi^2)y_1^2}{2\sigma^2}\right\}\\
&\times\prod_{t=2}^{T}(\sigma^2)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{(y_t-\phi y_{t-1})^2}{2\sigma^2}\right\}\\
&\times I[-1<\phi<1]
\end{aligned}
$$

MH アルゴリズムの例: AR(1) モデル

ϕ の条件付き事後分布は,

$$
\begin{aligned}
&\pi(\phi|\sigma^2, y) \\
&\propto \quad (\phi+1)^{a_0-1}(-\phi+1)^{b_0-1} \cdot \sqrt{1-\phi^2}\exp\left\{-\frac{(1-\phi^2)y_1^2}{2\sigma^2}\right\} \\
&\quad \times \prod_{t=2}^{T}\exp\left\{-\frac{(y_t-\phi y_{t-1})^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot I[-1<\phi<1]
\end{aligned}
$$

ここで, 提案分布を次のようにおく.

$$
\begin{aligned}
g(\phi) &\propto \prod_{t=2}^{T}\exp\left\{-\frac{(y_t-\phi y_{t-1})^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot I[-1<\phi<1] \\
&\propto \exp\left\{-\frac{(\phi-\hat{\phi})^2}{2\hat{\lambda}^2}\right\} \cdot I[-1<\phi<1]
\end{aligned}
$$

MH アルゴリズムの例: AR(1) モデル

ただし,

$$\hat{\lambda}^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=2}^{T} y_{t-1}^2}, \quad \hat{\phi} = \frac{\sum_{t=2}^{T} y_t y_{t-1}}{\sum_{t=2}^{T} y_{t-1}^2}$$

すなわち, $\phi^{new} \sim TN_{[-1,1]}(\hat{\phi}, \hat{\lambda}^2)$ と提案する. 1 つの前にサンプリングされた値を ϕ^{old} とする. MH アルゴリズムを用いて, ϕ^{new} を次の確率で受容する.

$$\begin{aligned} q(\phi^{old} \to \phi^{new}) &= \min\left[\frac{\pi(\phi^{new}|\sigma^2, y)g(\phi^{old})}{\pi(\phi^{old}|\sigma^2, y)g(\phi^{new})}, 1\right] \\ &= \min\left[\frac{f(\phi^{new})}{f(\phi^{old})}, 1\right] \end{aligned}$$

MH アルゴリズムの例: AR(1) モデル

ただし,

$$
\begin{aligned}
f(\phi) &= (\phi+1)^{a_0-1}(-\phi+1)^{b_0-1} \\
&\quad \times \sqrt{1-\phi^2}\exp\left\{-\frac{(1-\phi^2)y_1^2}{2\sigma^2}\right\}
\end{aligned}
$$