【計量ファイナンスA】

9. 確率的ボラティリティモデルの推定方法と実証分析 (1)

中島 上智

(経済研究所)

SV モデル

- 観測方程式

$$\begin{aligned} R_t &= \mathrm{E}\left(R_t \middle| \boldsymbol{I}_{t-1}\right) + \epsilon_t, \\ \epsilon_t &= \sigma_t z_t, \quad z_t \sim N(0,1) \end{aligned}$$

- ボラティリティの遷移方程式

$$\log(\sigma_{t+1}^2) = \mu + \phi(\log(\sigma_t^2) - \mu) + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma^2)$$

- ボラティリティの定常性を仮定

$$|\phi| < 1$$

- h_1 は定常分布にしたがうと仮定

SV モデル

- $h_t = \log(\sigma_t^2)$ とおく．また，便宜的に $y_t = R_t = \epsilon_t$ とする
- SV モデルは次のように書ける

$$
\begin{aligned}
y_t &= \exp(h_t/2) z_t, \quad z_t \sim N(0,1) \\
h_{t+1} &= \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma^2) \\
h_1 &\sim N\left(\mu, \sigma^2/(1-\phi^2)\right)
\end{aligned}
$$

SV モデルの推定

- 推定するパラメータは, $\theta = (\phi, \mu, \sigma^2)$
- 事前分布を以下のようにおく.

$$
\begin{aligned}
&(\phi+1)/2 \sim \mathrm{Beta}(a_0, b_0), \quad \mu \sim N(\mu_0, v_0^2), \\
&\sigma^2 \sim IG(n_0/2, S_0/2)
\end{aligned}
$$

- ボラティリティ $h = (h_1, \ldots, h_T)$ を状態変数とみなし, データ $y = (y_1, \ldots, y_T)$ が得られたときの, θ と h の同時事後分布を考える.

SV モデルの推定

$$
\begin{aligned}
&\pi(\theta, h|y) \\
\propto\ & (\phi+1)^{a_0-1}(-\phi+1)^{b_0-1}\cdot\exp\left\{-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2v_0^2}\right\} \\
&\times(\sigma^2)^{-n_0/2-1}\exp\left(-\frac{S_0}{2\sigma^2}\right) \\
&\times\prod_{t=1}^{T}\frac{1}{e^{h_t/2}}\exp\left(-\frac{y_t^2}{2e^{h_t}}\right) \\
&\times\prod_{t=1}^{T-1}(\sigma^2)^{-1/2}\exp\left[-\frac{\{(h_{t+1}-\mu)-\phi(h_t-\mu)\}^2}{2\sigma^2}\right] \\
&\times\sqrt{1-\phi^2}(\sigma^2)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{(1-\phi^2)(h_1-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \\
&\times I[-1<\phi<1]
\end{aligned}
$$

SV モデルの推定

ϕ の条件付き事後分布は, $\bar{h}_t = h_t - \mu$ とおき,

$$\pi(\phi|\mu, \sigma^2, h, y)$$

$$\begin{aligned}
&\propto (\phi+1)^{a_0-1}(-\phi+1)^{b_0-1} \cdot \sqrt{1-\phi^2} \exp\left\{-\frac{(1-\phi^2)\bar{h}_1^2}{2\sigma^2}\right\} \\
&\times \prod_{t=1}^{T-1} \exp\left\{-\frac{(\bar{h}_{t+1}-\phi\bar{h}_t)^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot I[-1<\phi<1]
\end{aligned}$$

ここで, 提案分布を次のようにおく.

$$\begin{aligned}
g(\phi) &\propto \prod_{t=1}^{T-1} \exp\left\{-\frac{(\bar{h}_{t+1}-\phi\bar{h}_t)^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot I[-1<\phi<1] \\
&\propto \exp\left\{-\frac{(\phi-\hat{\phi})^2}{2\hat{\lambda}^2}\right\} \cdot I[-1<\phi<1]
\end{aligned}$$

SV モデルの推定

ただし，

$$\hat{\lambda}^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^{T-1} \bar{h}_t^2}, \quad \hat{\phi} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \bar{h}_{t+1}\bar{h}_t}{\sum_{t=1}^{T-1} \bar{h}_t^2}$$

すなわち，$TN_{[-1,1]}(\hat{\phi}, \hat{\lambda}^2)$ を提案分布として，MH アルゴリズムを用いて ϕ をサンプリングする.

SV モデルの推定

μ の条件付き事後分布は,

$$
\begin{aligned}
& \pi(\mu|\phi, \sigma, h, y) \\
\propto \quad & \exp\left\{-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2v_0^2}\right\} \\
& \times \prod_{t=1}^{T-1} \exp\left[-\frac{\{(h_{t+1}-\mu)-\phi(h_t-\mu)\}^2}{2\sigma^2}\right] \\
& \times \exp\left\{-\frac{(1-\phi^2)(h_1-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \\
\propto \quad & \exp\left\{-\frac{(\mu-\hat{\mu})^2}{2\hat{v}^2}\right\}
\end{aligned}
$$

SV モデルの推定

ただし

$$
\begin{aligned}
\hat{v}^2 &= \left(\frac{1}{v_0^2} + \frac{(1-\phi^2) + (T-1)(1-\phi)^2}{\sigma^2} \right)^{-1} \\
\hat{\mu} &= \hat{v}^2 \left\{ \frac{\mu_0}{v_0^2} + \frac{(1-\phi^2)h_1 + (1-\phi)\sum_{t=1}^{T-1}(h_{t+1} - \phi h_t)}{\sigma^2} \right\}
\end{aligned}
$$

すなわち,

$$
\mu \,|\, \phi, \sigma^2, h, y \sim N(\hat{\mu}, \hat{v}^2)
$$

SV モデルの推定

σ^2 の条件付き事後分布は,

$$
\begin{aligned}
& \pi(\sigma^2|\phi, \mu, h, y) \\
\propto \quad & (\sigma^2)^{-n_0/2-1} \exp\left(-\frac{S_0}{2\sigma^2}\right) \\
& \times (\sigma^2)^{-T/2} \exp\left[-\frac{\sum_{t=1}^{T-1}(\bar{h}_{t+1} - \phi\bar{h}_t)^2}{2\sigma^2}\right] \\
& \times \ \exp\left\{-\frac{(1-\phi^2)\bar{h}_1^2}{2\sigma^2}\right\} \\
\propto \quad & (\sigma^2)^{-\hat{n}/2-1} \exp\left(-\frac{\hat{S}}{2\sigma^2}\right)
\end{aligned}
$$

SV モデルの推定

ただし,

$$\begin{aligned}\hat{n} &= n_0 + T \\ \hat{S} &= S_0 + (1 - \phi^2)\bar{h}_1^2 + \sum_{t=1}^{T-1} (\bar{h}_{t+1} - \phi \bar{h}_t)^2\end{aligned}$$

すなわち,

$$\sigma^2 \,|\, \phi, \mu, h, y \;\sim\; IG(\hat{n}/2, \hat{S}/2)$$