

【計量ファイナンスA】

8. ベイズ推定と マルコフ連鎖モンテカルロ法 (4)

中島 上智
(経済研究所)

MCMC 法でよく使う分布: ベータ分布

$$\theta \sim \text{Beta}(a, b), 0 < \theta < 1$$

$$\begin{aligned}\pi(\theta) &= \frac{1}{B(a, b)} \theta^{a-1} (1 - \theta)^{b-1} \\ &\propto \theta^{a-1} (1 - \theta)^{b-1}\end{aligned}$$

ただし,

$$B(a, b) = \int_0^1 \theta^{a-1} (1 - \theta)^{b-1} d\theta$$

MCMC 法

- ▶ 条件付き事後分布 $\pi(\theta|\cdot)$ からは直接サンプリングできない場合の手法として, AR (Acceptance-Rejection) アルゴリズムと, MH (Metropolis-Hastings) アルゴリズムがある.
- ▶ $\pi(\theta|\cdot)$ を近似していて, かつ, 直接サンプリングできるような提案密度関数 (proposal density function) $g(\theta)$ を考える.

AR アルゴリズム

- ▶ 次の条件を満たす提案密度関数 $g(\theta)$ を考える. ある正の定数 c に対して, θ の取り得る全ての値で次式が成り立つ.

$$\pi(\theta|\cdot) \leq cg(\theta)$$

- ▶ 候補となる点 θ^{new} を $g(\theta)$ からサンプリングし, その点を確率 $\pi(\theta^{new}|\cdot)/cg(\theta^{new})$ で採用する. また, 確率 $1 - \pi(\theta^{new}|\cdot)/cg(\theta^{new})$ で棄却する.
- ▶ もし棄却された場合は, 再び θ^{new} を $g(\theta)$ からサンプリングし, その点を確率 $\pi(\theta^{new}|\cdot)/cg(\theta^{new})$ で採用するかどうか決める. これを θ^{new} が採用されるまで繰り返す.

MH アルゴリズム

- ▶ MH アルゴリズムで用いる提案密度関数は,
 $\pi(\theta|\cdot) \leq cg(\theta)$ を満たしていなくてもよい.
- ▶ 1 つの前のサンプリングで得られた点を θ^{old} とおく. 提案密度関数 $g(\theta)$ からサンプリングし, 得られた値 θ^{new} を使って受容確率 $q(\theta^{old} \rightarrow \theta^{new})$ を次のように計算する.

$$q(\theta^{old} \rightarrow \theta^{new}) = \min \left[\frac{\pi(\theta^{new}|\cdot)g(\theta^{old})}{\pi(\theta^{old}|\cdot)g(\theta^{new})}, 1 \right]$$

- ▶ θ^{new} を確率 q で受容し, 確率 $1 - q$ で棄却する. 受容された場合には, θ^{new} を, 棄却された場合には, θ^{old} をサンプリングされた値とする.

MH アルゴリズムの例: AR(1) モデル

次の AR(1) モデルのベイズ推定を考える.

$$y_t = \phi y_{t-1} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

$$y_1 \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}\right), \quad |\phi| < 1$$

- ▶ 推定するパラメータは (ϕ, σ^2) .
- ▶ 事前分布を以下のように設定する.

$$(\phi + 1)/2 \sim \text{Beta}(a_0, b_0), \quad \sigma^2 \sim \text{IG}(n_0/2, S_0/2)$$

MH アルゴリズムの例: AR(1) モデル

データ $y = (y_1, \dots, y_T)$ が得られたときの, パラメータ (ϕ, σ^2) の (同時) 事後分布は,

$$\begin{aligned} \pi(\phi, \sigma^2 | y) & \propto (\phi + 1)^{a_0 - 1} (-\phi + 1)^{b_0 - 1} \cdot (\sigma^2)^{-n_0/2 - 1} \exp\left(-\frac{S_0}{2\sigma^2}\right) \\ & \times \sqrt{1 - \phi^2} (\sigma^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(1 - \phi^2)y_1^2}{2\sigma^2}\right\} \\ & \times \prod_{t=2}^T (\sigma^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(y_t - \phi y_{t-1})^2}{2\sigma^2}\right\} \\ & \times I[-1 < \phi < 1] \end{aligned}$$

MH アルゴリズムの例: AR(1) モデル

ϕ の条件付き事後分布は,

$$\pi(\phi|\sigma^2, y)$$

$$\begin{aligned} &\propto (\phi + 1)^{a_0-1}(-\phi + 1)^{b_0-1} \cdot \sqrt{1 - \phi^2} \exp \left\{ -\frac{(1 - \phi^2)y_1^2}{2\sigma^2} \right\} \\ &\quad \times \prod_{t=2}^T \exp \left\{ -\frac{(y_t - \phi y_{t-1})^2}{2\sigma^2} \right\} \cdot I[-1 < \phi < 1] \end{aligned}$$

ここで, 提案分布を次のようにおく.

$$\begin{aligned} g(\phi) &\propto \prod_{t=2}^T \exp \left\{ -\frac{(y_t - \phi y_{t-1})^2}{2\sigma^2} \right\} \cdot I[-1 < \phi < 1] \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{(\phi - \hat{\phi})^2}{2\hat{\lambda}^2} \right\} \cdot I[-1 < \phi < 1] \end{aligned}$$

MH アルゴリズムの例: AR(1) モデル

ただし,

$$\hat{\lambda}^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=2}^T y_{t-1}^2}, \quad \hat{\phi} = \frac{\sum_{t=2}^T y_t y_{t-1}}{\sum_{t=2}^T y_{t-1}^2}$$

すなわち, $\phi^{new} \sim TN_{[-1,1]}(\hat{\phi}, \hat{\lambda}^2)$ と提案する. 1 つの前にサンプリングされた値を ϕ^{old} とする. MH アルゴリズムを用いて, ϕ^{new} を次の確率で受容する.

$$\begin{aligned} q(\phi^{old} \rightarrow \phi^{new}) &= \min \left[\frac{\pi(\phi^{new} | \sigma^2, y) g(\phi^{old})}{\pi(\phi^{old} | \sigma^2, y) g(\phi^{new})}, 1 \right] \\ &= \min \left[\frac{f(\phi^{new})}{f(\phi^{old})}, 1 \right] \end{aligned}$$

MH アルゴリズムの例: AR(1) モデル

ただし,

$$\begin{aligned} f(\phi) &= (\phi + 1)^{a_0-1} (-\phi + 1)^{b_0-1} \\ &\quad \times \sqrt{1 - \phi^2} \exp \left\{ -\frac{(1 - \phi^2)y_1^2}{2\sigma^2} \right\} \end{aligned}$$