【計量ファイナンスA】

10. 確率的ボラティリティモデルの推定方法と実証分析 (2)

中島 上智

(経済研究所)

SV モデル: Mixture sampler

- 線形状態空間モデルへの変換を考える

$$\log(y_t^2) = \log(\sigma_t^2) + \log(z_t^2)$$

- 便宜的に, $y_t^* = \log(y_t^2)$ とおく. また, $h_t = \log(\sigma_t^2)$ より,

$$y_t^* = h_t + \log(z_t^2)$$

- $\log(z_t^2)$ の分布は正規分布ではない.
- 混合正規分布を用いて, $\log(z_t^2)$ を近似する.

SV モデル: Mixture sampler

- z_t^* は $\log(z_t^2)$ の近似として, K 個の正規分布からなる混合正規分布にしたがうとする

$$y_t^* = h_t + z_t^*$$

- ただし,

$$f(z_t^*) = \sum_{j=1}^{K} p_j \frac{1}{\sqrt{2\pi v_j^2}} \exp\left\{-\frac{(z_t^* - m_j)^2}{2v_j^2}\right\}$$

- ここで, j 番目の正規分布は $N(m_j, v_j^2)$ で, 重み付けは p_j, $(j = 1, \ldots, K)$.

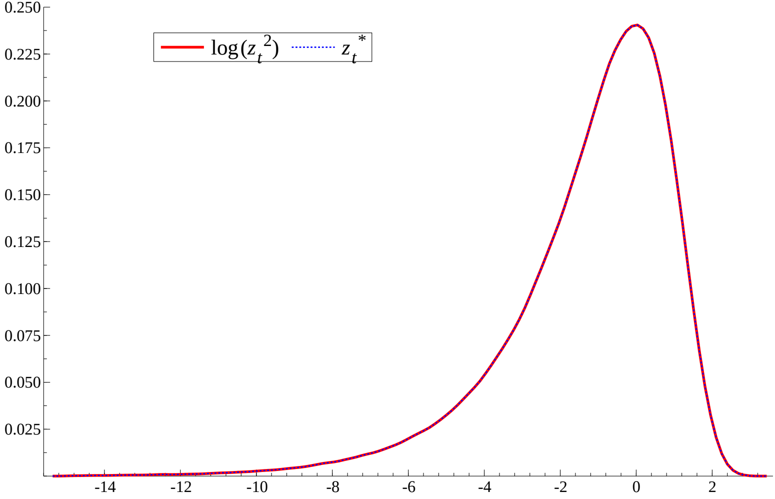
SV モデル: Mixture sampler

- Kim, Shephard and Chib (1998) は, $K = 7$ を提案.
- Omori, Chib, Shephard and Nakajima (2007) は, $K = 10$ を提案.

SV モデル: Mixture sampler

j	p_j	m_j	v_j^2
1	0.00609	1.92677	0.11265
2	0.04775	1.34744	0.17788
3	0.13057	0.73504	0.26768
4	0.20674	0.02266	0.40611
5	0.22715	−0.85173	0.62699
6	0.18842	−1.97278	0.98583
7	0.12047	−3.46788	1.57469
8	0.05591	−5.55246	2.54498
9	0.01575	−8.68384	4.16591
10	0.00115	−14.65000	7.33342

SV モデル: Mixture sampler



SV モデル: Mixture sampler

- 状態変数 $s_t \in \{1, 2, \ldots, K\}$ を導入する.

$$z_t^* | (s_t = j) \sim N(m_j, v_j^2)$$

- ただし,

$$\pi(s_t = j) = p_j$$

- これを用いると, s_t を条件付けたとき,

$$y_t^* = h_t + \xi_t, \quad \xi_t \sim N(m_{s_t}, v_{s_t}^2)$$

と書ける.

- $s = (s_1, \ldots, s_T)$ も含めた, (θ, h, s) の同時事後分布を考える.

SV モデル: Mixture sampler

$$
\begin{aligned}
&\pi(\theta, h, s|y) \\
\propto\ & (\phi+1)^{a_0-1}(-\phi+1)^{b_0-1} \cdot \exp\left\{-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2v_0^2}\right\} \\
& \times (\sigma^2)^{-n_0/2-1} \exp\left(-\frac{S_0}{2\sigma^2}\right) \\
& \times \prod_{t=1}^{T} \sum_{s_t=1}^{K} p_{s_t} (v_{s_t}^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(y_t^* - h_t - m_{s_t})^2}{2v_{s_t}^2}\right\} \\
& \times \prod_{t=1}^{T-1} (\sigma^2)^{-1/2} \exp\left[-\frac{\{(h_{t+1}-\mu)-\phi(h_t-\mu)\}^2}{2\sigma^2}\right] \\
& \times \sqrt{1-\phi^2}(\sigma^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(1-\phi^2)(h_1-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \\
& \times I[-1<\phi<1]
\end{aligned}
$$

SV モデル: Mixture sampler

s_t の条件付き事後分布は,

$$\pi(s_t = j|\theta, h, y) \propto p_j(v_j^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(y_t^* - h_t - m_j)^2}{2v_j^2}\right\} \quad (\equiv P_j)$$

すなわち,

$$\pi(s_t = j|\theta, h, y) = \frac{P_j}{\sum_{j=1}^{K} P_j}$$

SV モデル: Mixture sampler

(θ, s, h) の MCMC アルゴリズムは以下のとおりとなる.

1. (θ, s, h) の初期値を設定する.
2. 次のサンプリングを順に繰り返す.
   - 2.1 ϕ を MH アルゴリズムで発生させる.
   - 2.2 μ を $N(\hat{\mu}, \hat{v}^2)$ から発生させる.
   - 2.3 σ^2 を $IG(\hat{n}/2, \hat{S}/2)$ から発生させる.
   - 2.4 s_t を確率 $P_j / \sum_{j=1}^{K} P_j$ にしたがって発生させる $(t = 1, \ldots, T)$.
   - 2.5 h を Simulation smoother により発生させる.

Simulation smoother

- 線形状態空間モデル

  観測方程式 (measurement equation)

  $$y_t = a_t + bx_t + u_t, \quad u_t \sim N(0, v_t^2)$$

  遷移方程式 (transition equation)

  $$x_{t+1} = \omega_t + \phi x_t + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, w_t^2)$$

- ただし, $x_0 = 0$ とする.

Simulation smoother

カルマンフィルタ

- 観測値を $\tilde{y}_t = (y_1, \ldots, y_t)$ とおく.
- カルマンフィルタを用いると, フィルタリング確率密度 $f(x_t|\tilde{y}_t)$ について, $f(x_1|\tilde{y}_0) = f(x_1)$ から始め, 予測方程式 (prediction equation) と更新方程式 (updating equation) を逐次的に解くことにより計算できる.

Simulation smoother

カルマンフィルタ

- 予測方程式

$$
\begin{aligned}
x_{t|t-1} &= \omega_{t-1} + \phi x_{t-1|t-1} \\
P_{t|t-1} &= \phi^2 P_{t-1|t-1} + w_{t-1}^2
\end{aligned}
$$

- 更新方程式

$$
\begin{aligned}
x_{t|t} &= x_{t|t-1} + \frac{bP_{t|t-1}}{F_t}\nu_t \\
P_{t|t} &= P_{t|t-1} - \frac{b^2 P_{t|t-1}^2}{F_t}
\end{aligned}
$$

ただし,

$$
\begin{aligned}
\nu_t &= y_t - a_t - bx_{t|t-1} \\
F_t &= b^2 P_{t|t-1} + v_t^2
\end{aligned}
$$

Simulation smoother

平滑化 (スムージング)

- $f(x_T|\tilde{y}_T)$ からスタートして時間と逆方向に以下のアルゴリズムを逐次的に実行すると，スムージングを行える．

$$
\begin{aligned}
x_{t|T} &= x_{t|t} + P_t^*(x_{t+1|T} - x_{t+1|t}) \\
P_{t|T} &= P_{t|t} + P_t^{*2}(P_{t+1|T} - P_{t+1|t})
\end{aligned}
$$

ただし，

$$
P_t^* = \phi \frac{P_{t|t}}{P_{t+1|t}}
$$

Simulation smoother

平滑化におけるサンプリング

- 平滑化と同様に, $t = T$ からスタートして, 時間と逆方向に下記のアルゴリズムで逐次的に $t = 0$ まで η_t を発生させ, 遷移方程式を用いて $(x_1, \ldots, x_T)$ を計算すると, これは $\pi(x_1, \ldots, x_T | \tilde{y}_T)$ からのサンプリングとなる. これを Simulation smoother(de Jong and Shephard, 1995) という.
- カルマンフィルタで, 以下を計算しておく.

$$L_t = \phi \left(1 - \frac{b^2 P_{t|t-1}}{F_t} \right)$$

Simulation smoother

平滑化におけるサンプリング

$r_T = U_T = 0$ として, $t = T, \ldots, 0$ の順に,

$$\begin{aligned}
C_t &= w_t^2(1 - w_t^2 U_t) \\
\eta_t &= w_t^2 r_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, C_t) \\
V_t &= w_t^2 U_t L_t \\
r_{t-1} &= \frac{b\nu_t}{F_t} + L_t r_t - \frac{V_t \varepsilon_t}{C_t} \\
U_{t-1} &= \frac{b^2}{F_t} + L_t^2 U_t + \frac{V_t^2}{C_t}
\end{aligned}$$

Simulation smoother

平滑化におけるサンプリング

混合正規分布によって近似された SV モデルとの変数の対応は,

$$
\begin{aligned}
&y_t \to y_t^*, \quad a_t \to m_{s_t}, \quad b \to 1 \\
&v_t^2 \to v_{s_t}^2, \quad x_t \to h_t \\
&\omega_t \to (1-\phi)\mu \quad (\omega_0 \to \mu) \\
&w_t \to \sigma^2 \quad \left(w_0 \to \sigma^2/(1-\phi^2)\right)
\end{aligned}
$$

参考文献

- de Jong, P., and N. Shephard (1995) The simulation smoother for time series models, *Biometrika*, 82(2), 339-350.
- Kim, S., N. Shephard, S. Chib (1998) Stochastic volatility: likelihood inference and comparison with ARCH models, *Review of Economic Studies*, 65(3), 361-393.
- Omori, Y., S. Chib, N. Shephard, and J. Nakajima (2007) Stochastic volatility with leverage: Fast and efficient likelihood inference, *Journal of Econometrics*, 140(2), 425-449.