

【計量ファイナンスA】

10. 確率的ボラティリティモデルの 推定方法と実証分析 (2)

中島 上智

(経済研究所)

SV モデル: Mixture sampler

- ▶ 線形状態空間モデルへの変換を考える

$$\log(y_t^2) = \log(\sigma_t^2) + \log(z_t^2)$$

- ▶ 便宜的に, $y_t^* = \log(y_t^2)$ とおく. また, $h_t = \log(\sigma_t^2)$ より,

$$y_t^* = h_t + \log(z_t^2)$$

- ▶ $\log(z_t^2)$ の分布は正規分布ではない.
- ▶ 混合正規分布を用いて, $\log(z_t^2)$ を近似する.

SV モデル: Mixture sampler

- ▶ z_t^* は $\log(z_t^2)$ の近似として, K 個の正規分布からなる混合正規分布にしたがうとする

$$y_t^* = h_t + z_t^*$$

- ▶ ただし,

$$f(z_t^*) = \sum_{j=1}^K p_j \frac{1}{\sqrt{2\pi v_j^2}} \exp \left\{ -\frac{(z_t^* - m_j)^2}{2v_j^2} \right\}$$

- ▶ ここで, j 番目の正規分布は $N(m_j, v_j^2)$ で, 重み付けは p_j , ($j = 1, \dots, K$).

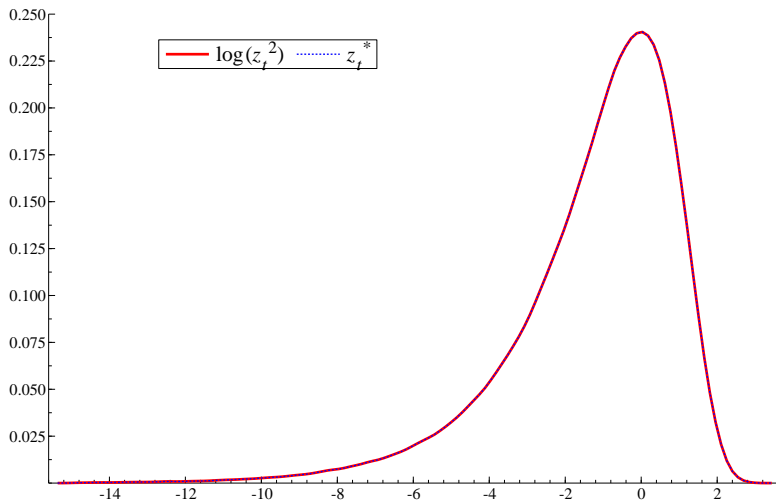
SV モデル: Mixture sampler

- ▶ Kim, Shephard and Chib (1998) は, $K = 7$ を提案.
- ▶ Omori, Chib, Shephard and Nakajima (2007) は, $K = 10$ を提案.

SV モデル: Mixture sampler

j	p_j	m_j	v_j^2
1	0.00609	1.92677	0.11265
2	0.04775	1.34744	0.17788
3	0.13057	0.73504	0.26768
4	0.20674	0.02266	0.40611
5	0.22715	-0.85173	0.62699
6	0.18842	-1.97278	0.98583
7	0.12047	-3.46788	1.57469
8	0.05591	-5.55246	2.54498
9	0.01575	-8.68384	4.16591
10	0.00115	-14.65000	7.33342

SV モデル: Mixture sampler



SV モデル: Mixture sampler

- ▶ 状態変数 $s_t \in \{1, 2, \dots, K\}$ を導入する.

$$z_t^* | (s_t = j) \sim N(m_j, v_j^2)$$

- ▶ ただし,

$$\pi(s_t = j) = p_j$$

- ▶ これを用いると, s_t を条件付けたとき,

$$y_t^* = h_t + \xi_t, \quad \xi_t \sim N(m_{s_t}, v_{s_t}^2)$$

と書ける.

- ▶ $s = (s_1, \dots, s_T)$ も含めた, (θ, h, s) の同時事後分布を考える.

SV モデル: Mixture sampler

$$\begin{aligned} \pi(\theta, h, s|y) &\propto (\phi + 1)^{a_0-1}(-\phi + 1)^{b_0-1} \cdot \exp \left\{ -\frac{(\mu - \mu_0)^2}{2v_0^2} \right\} \\ &\times (\sigma^2)^{-n_0/2-1} \exp \left(-\frac{S_0}{2\sigma^2} \right) \\ &\times \prod_{t=1}^T \sum_{s_t=1}^K p_{s_t} (v_{s_t}^2)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{(y_t^* - h_t - m_{s_t})^2}{2v_{s_t}^2} \right\} \\ &\times \prod_{t=1}^{T-1} (\sigma^2)^{-1/2} \exp \left[-\frac{\{(h_{t+1} - \mu) - \phi(h_t - \mu)\}^2}{2\sigma^2} \right] \\ &\times \sqrt{1 - \phi^2} (\sigma^2)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{(1 - \phi^2)(h_1 - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \\ &\times I[-1 < \phi < 1] \end{aligned}$$

SV モデル: Mixture sampler

s_t の条件付き事後分布は,

$$\begin{aligned} \pi(s_t = j | \theta, h, y) \\ \propto p_j (v_j^2)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{(y_t^* - h_t - m_j)^2}{2v_j^2} \right\} \quad (\equiv P_j) \end{aligned}$$

すなわち,

$$\pi(s_t = j | \theta, h, y) = \frac{P_j}{\sum_{j=1}^K P_j}$$

SV モデル: Mixture sampler

(θ, s, h) の MCMC アルゴリズムは以下のとおりとなる.

1. (θ, s, h) の初期値を設定する.
2. 次のサンプリングを順に繰り返す.
 - 2.1 ϕ を MH アルゴリズムで発生させる.
 - 2.2 μ を $N(\hat{\mu}, \hat{v}^2)$ から発生させる.
 - 2.3 σ^2 を $IG(\hat{n}/2, \hat{S}/2)$ から発生させる.
 - 2.4 s_t を確率 $P_j / \sum_{j=1}^K P_j$ にしたがって発生させる
($t = 1, \dots, T$).
 - 2.5 h を Simulation smoother により発生させる.

Simulation smoother

▶ 線形状態空間モデル

観測方程式 (measurement equation)

$$y_t = a_t + bx_t + u_t, \quad u_t \sim N(0, v_t^2)$$

遷移方程式 (transition equation)

$$x_{t+1} = \omega_t + \phi x_t + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, w_t^2)$$

▶ ただし, $x_0 = 0$ とする.

Simulation smoother

カルマンフィルタ

- ▶ 観測値を $\tilde{y}_t = (y_1, \dots, y_t)$ とおく.
- ▶ カルマンフィルタを用いると, フィルタリング確率密度 $f(x_t|\tilde{y}_t)$ について, $f(x_1|\tilde{y}_0) = f(x_1)$ から始め, 予測方程式 (prediction equation) と更新方程式 (updating equation) を逐次的に解くことにより計算できる.

Simulation smoother

カルマンフィルタ

▶ 予測方程式

$$\begin{aligned}x_{t|t-1} &= \omega_{t-1} + \phi x_{t-1|t-1} \\ P_{t|t-1} &= \phi^2 P_{t-1|t-1} + w_{t-1}^2\end{aligned}$$

▶ 更新方程式

$$\begin{aligned}x_{t|t} &= x_{t|t-1} + \frac{bP_{t|t-1}}{F_t} \nu_t \\ P_{t|t} &= P_{t|t-1} - \frac{b^2 P_{t|t-1}^2}{F_t}\end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned}\nu_t &= y_t - a_t - bx_{t|t-1} \\ F_t &= b^2 P_{t|t-1} + v_t^2\end{aligned}$$

Simulation smoother

平滑化 (スムージング)

- ▶ $f(x_T|\tilde{y}_T)$ からスタートして時間と逆方向に以下のアルゴリズムを逐次的に実行すると, スムージングを行える.

$$\begin{aligned}x_{t|T} &= x_{t|t} + P_t^*(x_{t+1|T} - x_{t+1|t}) \\ P_{t|T} &= P_{t|t} + P_t^{*2}(P_{t+1|T} - P_{t+1|t})\end{aligned}$$

ただし,

$$P_t^* = \phi \frac{P_{t|t}}{P_{t+1|t}}$$

Simulation smoother

平滑化におけるサンプリング

- ▶ 平滑化と同様に, $t = T$ からスタートして, 時間と逆方向に下記のアルゴリズムで逐次的に $t = 0$ まで η_t を発生させ, 遷移方程式を用いて (x_1, \dots, x_T) を計算すると, これは $\pi(x_1, \dots, x_T | \tilde{y}_T)$ からのサンプリングとなる. これを Simulation smoother(de Jong and Shephard, 1995) という.
- ▶ カルマンフィルタで, 以下を計算しておく.

$$L_t = \phi \left(1 - \frac{b^2 P_{t|t-1}}{F_t} \right)$$

Simulation smoother

平滑化におけるサンプリング

$r_T = U_T = 0$ として, $t = T, \dots, 0$ の順に,

$$C_t = w_t^2(1 - w_t^2 U_t)$$

$$\eta_t = w_t^2 r_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, C_t)$$

$$V_t = w_t^2 U_t L_t$$

$$r_{t-1} = \frac{b\nu_t}{F_t} + L_t r_t - \frac{V_t \varepsilon_t}{C_t}$$

$$U_{t-1} = \frac{b^2}{F_t} + L_t^2 U_t + \frac{V_t^2}{C_t}$$

Simulation smoother

平滑化におけるサンプリング

混合正規分布によって近似された SV モデルとの変数の対応は,

$$y_t \rightarrow y_t^*, \quad a_t \rightarrow m_{s_t}, \quad b \rightarrow 1$$

$$v_t^2 \rightarrow v_{s_t}^2, \quad x_t \rightarrow h_t$$

$$\omega_t \rightarrow (1 - \phi)\mu \quad (\omega_0 \rightarrow \mu)$$

$$w_t^2 \rightarrow \sigma^2 \quad (w_0^2 \rightarrow \sigma^2/(1 - \phi^2))$$

参考文献

- ▶ de Jong, P., and N. Shephard (1995) The simulation smoother for time series models, *Biometrika*, 82(2), 339-350.
- ▶ Kim, S., N. Shephard, S. Chib (1998) Stochastic volatility: likelihood inference and comparison with ARCH models, *Review of Economic Studies*, 65(3), 361-393.
- ▶ Omori, Y., S. Chib, N. Shephard, and J. Nakajima (2007) Stochastic volatility with leverage: Fast and efficient likelihood inference, *Journal of Econometrics*, 140(2), 425-449.