

【計量ファイナンスA】

6. ベイズ推定と マルコフ連鎖モンテカルロ法 (2)

中島 上智
(経済研究所)

MCMC 法でよく使う分布: 正規分布

$$\theta \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\begin{aligned}\pi(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(\theta - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \\ &\propto \exp\left\{-\frac{(\theta - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\end{aligned}$$

MCMC 法でよく使う分布: 逆ガンマ分布

$$\theta \sim IG(n, S), \theta > 0$$

$$\begin{aligned}\pi(\theta) &= \frac{S^n}{\Gamma(n)} \theta^{-n-1} \exp\left(-\frac{S}{\theta}\right) \\ &\propto \theta^{-n-1} \exp\left(-\frac{S}{\theta}\right)\end{aligned}$$

▶ ただし,

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty \theta^{n-1} e^{-\theta} d\theta$$

▶ なお,

$$E(\theta) = \frac{S}{n-1}, \quad \text{Var}(\theta) = \frac{S^2}{(n-1)^2(n-2)}$$

ギブスサンプラーの例: 回帰モデル

次の回帰モデルのベイズ推定を考える.

$$y_t = \beta x_t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

- ▶ 推定するパラメータは (β, σ^2) .
- ▶ 事前分布を以下のように設定する.

$$\beta \sim N(\beta_0, v_0^2), \quad \sigma^2 \sim IG(n_0/2, S_0/2)$$

ギブスサンプラーの例: 回帰モデル

データ $y = (y_1, \dots, y_T)$ が得られた時のパラメータ (β, σ^2) の (同時) 事後分布は,

$$\begin{aligned}\pi(\beta, \sigma^2 | y) &\propto \pi(\beta) \cdot \pi(\sigma^2) \cdot f(y | \beta, \sigma^2) \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{(\beta - \beta_0)^2}{2\nu_0^2} \right\} \cdot (\sigma^2)^{-n_0/2-1} \exp \left(-\frac{S_0}{2\sigma^2} \right) \\ &\quad \times (\sigma^2)^{-T/2} \exp \left\{ -\frac{\sum_{t=1}^T (y_t - \beta x_t)^2}{2\sigma^2} \right\}\end{aligned}$$

ギブスサンプラーの例: 回帰モデル

β の条件付き事後分布は,

$$\begin{aligned}\pi(\beta|\sigma^2, y) &\propto \exp\left\{-\frac{(\beta - \beta_0)^2}{2v_0^2}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{\sum_{t=1}^T (y_t - \beta x_t)^2}{2\sigma^2}\right\} \\ &\propto \exp\left\{-\frac{(\beta - \hat{\beta})^2}{2\hat{v}^2}\right\}\end{aligned}$$

ただし,

$$\hat{v}^2 = \left(\frac{1}{v_0^2} + \frac{\sum_{t=1}^T x_t^2}{\sigma^2}\right)^{-1}, \quad \hat{\beta} = \hat{v}^2 \left(\frac{\beta_0}{v_0^2} + \frac{\sum_{t=1}^T x_t y_t}{\sigma^2}\right)$$

すなわち,

$$\beta|\sigma^2, y \sim N(\hat{\beta}, \hat{v}^2)$$

ギブスサンプラーの例: 回帰モデル

σ^2 の条件付き事後分布は,

$$\begin{aligned}\pi(\sigma^2 | \beta, y) &\propto (\sigma^2)^{-n_0/2-1} \exp\left(-\frac{S_0}{2\sigma^2}\right) \\ &\quad \times (\sigma^2)^{-T/2} \exp\left\{-\frac{\sum_{t=1}^T (y_t - \beta x_t)^2}{2\sigma^2}\right\} \\ &\propto (\sigma^2)^{-\hat{n}/2-1} \exp\left(-\frac{\hat{S}}{2\sigma^2}\right)\end{aligned}$$

ただし, $\hat{n} = n_0 + T$, $\hat{S} = S_0 + \sum_{t=1}^T (y_t - \beta x_t)^2$. すなわち,

$$\sigma^2 | \beta, y \sim IG(\hat{n}/2, \hat{S}/2)$$

ギブスサンプラーの例: 回帰モデル

(β, σ^2) のギブスサンプラーは以下のとおりとなる.

1. (β, σ^2) の初期値を設定する.
2. 次のサンプリングを交互に繰り返す.
 - 2.1 β を $N(\hat{\beta}, \hat{v}^2)$ から発生させる.
 - 2.2 σ^2 を $IG(\hat{n}/2, \hat{S}/2)$ から発生させる.