【計量ファイナンスA】

7. ベイズ推定とマルコフ連鎖モンテカルロ法 (3)

中島 上智

(経済研究所)

MCMC 法でよく使う分布: 切断正規分布

$$\theta \sim TN_{[a,b]}(\mu, \sigma^2)$$

$$\begin{aligned} \pi(\theta) &\propto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(\theta-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} I[a<\theta<b] \\ &\propto \exp\left\{-\frac{(\theta-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} I[a<\theta<b] \end{aligned}$$

ギブスサンプラーの例: 混合正規モデル

次の混合正規モデルのベイズ推定を考える.

$$
\begin{aligned}
y_i &= \alpha_i + \beta x_i + \epsilon_i, \quad \epsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \\
\alpha_i &= \begin{cases} \mu_1 & (\text{w.p. } 0.5) \\ \mu_2 & (\text{w.p. } 0.5), \end{cases} \qquad \mu_1 < \mu_2
\end{aligned}
$$

- 定数項 α_i は確率 0.5 で μ_1 か μ_2 のいずれかを取り得る.
- 推定するパラメータは $\theta = (\beta, \sigma^2, \mu_1, \mu_2)$.
- 事前分布を以下のように設定する.

$$
\begin{aligned}
\beta &\sim N(\beta_0, v_0^2), \quad \sigma^2 \sim IG(n_0/2, S_0/2) \\
\mu_1 &\sim TN_{[-\infty, \mu_2]}(\mu_{01}, w_{01}^2), \quad \mu_2 \sim TN_{[\mu_1, \infty]}(\mu_{02}, w_{02}^2)
\end{aligned}
$$

ギブスサンプラーの例: 混合正規モデル

- それぞれの観測値 y_i について, 状態変数 $s_i \in (1, 2)$ を導入する.
- s_i を条件付けた場合の y_i のモデルを, 次のように書く.

$$
y_i = \begin{cases} \mu_1 + \beta x_i + \epsilon_i & (\text{if } s_i = 1) \\ \mu_2 + \beta x_i + \epsilon_i & (\text{if } s_i = 2) \end{cases}
$$

- s_i の事前分布は, $\pi(s_i = 1) = 0.5$, $\pi(s_i = 2) = 0.5$.
- データを $y = (y_1, \ldots, y_n)$, 状態変数を $s = (s_1, \ldots, s_n)$ と書く.

ギブスサンプラーの例: 混合正規モデル

パラメータ θ および状態変数 s の (同時) 事後分布は,

$$
\begin{aligned}
&\pi(\theta, s|y) \\
&\propto \quad \exp\left\{-\frac{(\beta-\beta_0)^2}{2v_0^2}\right\} \cdot (\sigma^2)^{-n_0/2-1} \exp\left(-\frac{S_0}{2\sigma^2}\right) \\
&\quad \times \exp\left\{-\frac{(\mu_1-\mu_{01})^2}{2w_{01}^2}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{(\mu_2-\mu_{02})^2}{2w_{02}^2}\right\} \\
&\quad \times \prod_{i=1}^{n} \Bigg[I[s_i=1] \cdot (\sigma^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(y_i-\mu_1-\beta x_i)^2}{2\sigma^2}\right\} \\
&\qquad\qquad + I[s_i=2] \cdot (\sigma^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(y_i-\mu_2-\beta x_i)^2}{2\sigma^2}\right\} \Bigg] \\
&\quad \times \prod_{i=1}^{n} \left\{\frac{1}{2} I[s_i=1] + \frac{1}{2} I[s_i=2]\right\} \cdot I[\mu_1<\mu_2]
\end{aligned}
$$

ギブスサンプラーの例: 混合正規モデル

β の条件付き事後分布は,

$$
\begin{aligned}
& \pi(\beta|\sigma^2, \mu_1, \mu_2, s, y) \\
\propto \quad & \exp\left\{-\frac{(\beta-\beta_0)^2}{2v_0^2}\right\} \\
& \times \prod_{i=1}^{n}\left[I[s_i=1]\cdot(\sigma^2)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{(y_i-\mu_1-\beta x_i)^2}{2\sigma^2}\right\}\right. \\
& \qquad \left. + I[s_i=2]\cdot(\sigma^2)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{(y_i-\mu_2-\beta x_i)^2}{2\sigma^2}\right\}\right] \\
\propto \quad & \exp\left\{-\frac{(\beta-\hat{\beta})^2}{2\hat{v}^2}\right\}
\end{aligned}
$$

ギブスサンプラーの例: 混合正規モデル

ただし,

$$
\begin{aligned}
\hat{v}^2 &= \left(\frac{1}{v_0^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\sigma^2} \right)^{-1} \\
\hat{\beta} &= \hat{v}^2 \left\{ \frac{\beta_0}{v_0^2} + \frac{\sum_{s_i=1}(y_i - \mu_1)x_i + \sum_{s_i=2}(y_i - \mu_2)x_i}{\sigma^2} \right\}
\end{aligned}
$$

すなわち,

$$
\beta \,|\, \sigma^2, \mu_1, \mu_2, s, y \sim N(\hat{\beta}, \hat{v}^2)
$$

ギブスサンプラーの例: 混合正規モデル

σ^2 の条件付き事後分布は,

$$
\begin{aligned}
&\pi(\sigma^2|\beta, \mu_1, \mu_2, s, y) \\
&\propto \quad (\sigma^2)^{-n_0/2-1} \exp\left(-\frac{S_0}{2\sigma^2}\right) \\
&\qquad \times \prod_{i=1}^{n} \left[I[s_i = 1] \cdot (\sigma^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(y_i - \mu_1 - \beta x_i)^2}{2\sigma^2}\right\} \right. \\
&\qquad\qquad \left. + I[s_i = 2] \cdot (\sigma^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(y_i - \mu_2 - \beta x_i)^2}{2\sigma^2}\right\} \right] \\
&\propto \quad (\sigma^2)^{-\hat{n}/2-1} \exp\left(-\frac{\hat{S}}{2\sigma^2}\right)
\end{aligned}
$$

ギブスサンプラーの例: 混合正規モデル

ただし,

$$\begin{aligned} \hat{n} &= n_0 + n \\ \hat{S} &= S_0 + \sum_{s_i=1} (y_i - \mu_1 - \beta x_i)^2 + \sum_{s_i=2} (y_i - \mu_2 - \beta x_i)^2 \end{aligned}$$

すなわち,

$$\sigma^2 \,|\, \beta, \mu_1, \mu_2, s, y \sim IG(\hat{n}/2, \hat{S}/2)$$

ギブスサンプラーの例: 混合正規モデル

μ_1 の条件付き事後分布は,

$$
\begin{aligned}
\pi(\mu_1|\beta,\sigma^2,\mu_2,s,y) &\propto \exp\left\{-\frac{(\mu_1-\mu_{01})^2}{2w_{01}^2}\right\}\cdot I[\mu_1<\mu_2] \\
&\quad \times \prod_{i=1}^{n} I[s_i=1]\cdot\exp\left\{-\frac{(y_i-\mu_1-\beta x_i)^2}{2\sigma^2}\right\} \\
&\propto \exp\left\{-\frac{(\mu_1-\hat{\mu}_1)^2}{2\hat{w}_1^2}\right\}\cdot I[\mu_1<\mu_2]
\end{aligned}
$$

ギブスサンプラーの例: 混合正規モデル

ただし, $n_1 = \sum_{i=1}^{n} I[s_i = 1]$ として,

$$
\begin{aligned}
\hat{w}_1^2 &= \left(\frac{1}{w_{01}^2} + \frac{n_1}{\sigma^2} \right)^{-1} \\
\hat{\mu}_1 &= \hat{w}_1^2 \left\{ \frac{\mu_{01}}{w_{01}^2} + \frac{\sum_{s_i=1}(y_i - \beta x_i)}{\sigma^2} \right\}
\end{aligned}
$$

すなわち,

$$
\mu_1 \,|\, \beta, \sigma^2, \mu_2, s, y \;\sim\; TN_{[-\infty,\mu_2]}(\hat{\mu}_1, \hat{w}_1^2)
$$

- μ_2 の条件付き事後分布も同様に求められる.

ギブスサンプラーの例: 混合正規モデル

s_i の条件付き事後分布は,

$$
\begin{aligned}
&\pi(s_i|\theta, y) \\
&\propto \quad \left[I[s_i = 1] \cdot \exp\left\{ -\frac{(y_i - \mu_1 - \beta x_i)^2}{2\sigma^2} \right\} \right. \\
&\qquad \left. + I[s_i = 2] \cdot \exp\left\{ -\frac{(y_i - \mu_2 - \beta x_i)^2}{2\sigma^2} \right\} \right] \\
&\qquad \times \left(\frac{1}{2} I[s_i = 1] + \frac{1}{2} I[s_i = 2] \right)
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
\pi(s_i = 1|\theta, y) &= c \cdot \exp\left\{ -\frac{(y_i - \mu_1 - \beta x_i)^2}{2\sigma^2} \right\} \equiv a_{1i} \\
\pi(s_i = 2|\theta, y) &= c \cdot \exp\left\{ -\frac{(y_i - \mu_2 - \beta x_i)^2}{2\sigma^2} \right\} \equiv a_{2i}
\end{aligned}
$$

ギブスサンプラーの例: 混合正規モデル

すなわち,

$$p_i = \frac{a_{1i}}{a_{1i} + a_{2i}}$$

とおき,

$$s_i | \theta, y = \begin{cases} 1 & (\text{w.p. } p_i) \\ 2 & (\text{w.p. } 1 - p_i) \end{cases}$$

ギブスサンプラーの例: 混合正規モデル

(θ, s) のギブスサンプラーは以下のとおりとなる.

1. (θ, s) の初期値を設定する.
2. 次のサンプリングを順に繰り返す.
   - 2.1 β を $N(\hat{\beta}, \hat{v}^2)$ から発生させる.
   - 2.2 σ^2 を $IG(\hat{n}/2, \hat{S}/2)$ から発生させる.
   - 2.3 μ_1 を $TN(\hat{\mu}_1, \hat{w}_1^2)$ から発生させる.
   - 2.4 μ_2 を $TN(\hat{\mu}_2, \hat{w}_2^2)$ から発生させる.
   - 2.5 s_i を p_i の確率で 1, それ以外は 2 とする $(i = 1, \ldots, n)$.