【計量ファイナンスA】

2. GARCH モデルの基礎

中島 上智

（経済研究所）

ボラティリティ変動モデル

- 資産価格のボラティリティとは, 価格変化率 (リターン) の分散もしくは標準偏差.
- ボラティリティはファイナンスの理論・実務で重要な変数.
  - オプション価格
  - Value at Risk (VaR)
- ボラティリティは観測できないので, リターンのデータを使って推定する必要がある.

ボラティリティ変動モデル

- 古くは, ボラティリティはある期間一定であると仮定し, その間のリターンの標本分散や標準偏差として推定 (ヒストリカル・ボラティリティ).
- その後, ボラティリティは時間を通じて確率的に変動するという考えが主流になり, ボラティリティの変動を明示的に定式化するモデルが提案され, ボラティリティの推定にそうしたモデルが用いられるようになる.

ボラティリティ変動モデル

- ボラティリティ変動モデルには大きく分けて以下の２つのものがある.
  (1) ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity) 型モデル
  (2) SV (Stochastic Volatility) モデル
- こうしたボラティリティ変動モデルは数多く提案されており, どのモデルを使うかでボラティリティの推定値が異なる.

ARCH 型モデル

リターン (R_t) の定式化

$$R_t = \mathrm{E}\left(R_t | \boldsymbol{I}_{t-1}\right) + \epsilon_t, \quad \epsilon_t = \sigma_t z_t, \quad \sigma_t > 0,$$

$$z_t \sim \text{i.i.d.}, \quad \mathrm{E}(z_t) = 0, \quad \mathrm{Var}(z_t) = 1$$

- AR(1) モデルや AR(p) モデルとして定式化することもある.

$$R_t = a + bR_{t-1} + \epsilon_t$$

- ボラティリティ σ_t の変動についてモデル化する.

ARCH 型モデル

- ARCH 型モデルでは、t 期のボラティリティ σ_t^2 を $t-1$ 期に観測される変数だけの (確定的な) 関数として定式化する.
- ボラティリティは一旦上昇 (低下) すると, しばらく高い (低い) 時期が続く (ボラティリティ・クラスタリング). この性質をモデル化する.
  - Engle (1982) によって提案された, ARCH モデル.
  - Bollerslev (1986) によって一般化された, GARCH（Generalized ARCH）モデル.

ARCH 型モデル

- **ARCH(1) モデル**

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2, \quad \omega > 0, \quad \alpha_1 \geq 0$$

- **ARCH(q) モデル**

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \epsilon_{t-j}^2, \quad \omega > 0,\ \alpha_j \geq 0\ (j = 1, \ldots, q)$$

ARCH 型モデル

- **GARCH$(1,1)$**

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2,$$

$$\omega > 0, \quad \beta_1,\ \alpha_1 \geq 0$$

- **GARCH(p,q)**

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \epsilon_{t-j}^2,$$

$$\omega > 0,\ \beta_i,\ \alpha_j \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, p;\, j = 1, \ldots, q)$$

ARCH 型モデル

- GARCH(p, q) モデルは, $\beta_1 = \cdots = \beta_p = 0$ とすると, ARCH(q) モデルになる. したがって, ARCH モデルを一般化したという意味で Generalized ARCH (GARCH) モデルと呼ぶ.

GARCH$(1,1)$ モデルの性質

- GARCH$(1,1)$ モデル

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\epsilon_{t-1}^2$$

これをラグ・オペレータ L を用いて表すと,

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta L\sigma_t^2 + \alpha\epsilon_{t-1}^2$$

となる. ここで, $\beta < 1$ を仮定して, 展開すると,

$$\begin{aligned}
(1-\beta L)\sigma_t^2 &= \omega + \alpha\epsilon_{t-1}^2 \\
\sigma_t^2 &= \frac{\omega}{1-\beta L} + \frac{\alpha\epsilon_{t-1}^2}{1-\beta L} \\
\sigma_t^2 &= \frac{\omega}{1-\beta} + \alpha\sum_{i=1}^{\infty}\beta^{i-1}\epsilon_{t-i}^2
\end{aligned}$$

となり, ARCH(∞) モデルとして書ける.

GARCH$(1,1)$ モデルの性質

- 実際, データに ARCH, GARCH モデルを当てはめると, ARCH モデルでは大きい次数が選ばれるのに対して, GARCH モデルでは, 最も次数の小さい GARCH(1,1) モデルが選ばれることが多い.

GARCH(1, 1) モデルの性質

- GARCH(1, 1) モデルの両辺の $t-2$ 期における期待値をとると, 以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\sigma_t^2|\boldsymbol{I}_{t-2}) &= \omega + \beta \mathrm{E}(\sigma_{t-1}^2|\boldsymbol{I}_{t-2}) + \alpha \mathrm{E}(\epsilon_{t-1}^2|\boldsymbol{I}_{t-2}) \\
&= \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha \mathrm{E}(\sigma_{t-1}^2 z_{t-1}^2|\boldsymbol{I}_{t-2}) \\
&= \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha \mathrm{E}(\sigma_{t-1}^2|\boldsymbol{I}_{t-2})\mathrm{E}(z_{t-1}^2|\boldsymbol{I}_{t-2}) \\
&= \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\sigma_{t-1}^2 \\
&= \omega + (\alpha+\beta)\sigma_{t-1}^2
\end{aligned}
$$

GARCH$(1,1)$ モデルの性質

- なお, σ_{t-1}^2 と z_{t-1}^2 は無相関なので,

$$\mathrm{E}(\sigma_{t-1}^2 z_{t-1}^2 | \boldsymbol{I}_{t-2}) = \mathrm{E}(\sigma_{t-1}^2 | \boldsymbol{I}_{t-2}) \mathrm{E}(z_{t-1}^2 | \boldsymbol{I}_{t-2})$$

  また,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(z_{t-1}^2 | \boldsymbol{I}_{t-2}) = \mathrm{E}(z_{t-1}^2) &= \mathrm{E}[\{z_{t-1} - \mathrm{E}(z_{t-1})\}^2] \\ &= \mathrm{Var}(z_{t-1}) = 1 \end{aligned}$$

  である.

GARCH$(1, 1)$ モデルの性質

- $e_t = \sigma_t^2 - \mathrm{E}(\sigma_t^2 | \boldsymbol{I}_{t-2})$ と定義すると,

$$\sigma_t^2 = \omega + (\alpha + \beta)\sigma_{t-1}^2 + e_t$$

GARCH$(1,1)$ モデルの性質

- $\alpha+\beta<1$ のとき, $\sigma_0^2=\frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$, $e_1=1$, $e_t=0$ $(t\geq 2)$ とすると,

$$
\begin{aligned}
\sigma_1^2 &= \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}+1 \\
\sigma_2^2 &= \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}+\alpha+\beta \\
&\vdots \\
\sigma_t^2 &= \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}+(\alpha+\beta)^{t-1} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

となる. $t\to\infty$ とすると, σ_t^2 は定常値 $\frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$ に近づいていく.

GARCH$(1,1)$ モデルの性質

- $\alpha + \beta < 1$ であれば, ボラティリティのショックは時間とともに消滅する.
- また, ショックの持続性は $\alpha + \beta$ で測ることができ, それが 1 に近いほど持続性が高い.
- 一方, $\alpha + \beta = 1$ であれば, ショックは永久に消滅しない. $\alpha + \beta = 1$, $\omega = 0$ とした GARCH(1, 1) モデルを Integrated GARCH (IGARCH) モデルと呼ぶ.

GARCH モデルの拡張

ボラティリティの非対称性

- 株式収益率のボラティリティは, 株価が上がった日の翌日よりも株価が下がった日の翌日の方が上昇する傾向があることが経験的に知られている.
- つまり, 株価が上がったか下がったかにより, 翌日のボラティリティの変動に非対称性が生じる.
- ARCH モデルや GARCH モデルでは, このような非対称性を捉えることができない.

GARCH モデルの拡張

GJR モデル (Glosten, Jagannathan, and Runkle, 1993)

$$
\begin{aligned}
\sigma_t^2 &= \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\epsilon_{t-1}^2 + \gamma D_{t-1}^- \epsilon_{t-1}^2, \\
D_{t-1}^- &= \begin{cases} 0 & \epsilon_{t-1} \geq 0 \\ 1 & \epsilon_{t-1} < 0 \end{cases} \qquad \omega > 0,\ \alpha, \beta, \gamma \geq 0
\end{aligned}
$$

- このモデルは,

$$
\sigma_t^2 = \begin{cases} \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\epsilon_{t-1}^2 & \epsilon_{t-1} \geq 0 \\ \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + (\alpha + \gamma)\epsilon_{t-1}^2 & \epsilon_{t-1} < 0 \end{cases}
$$

と書くことができ, γ でボラティリティ変動の非対称性を捉える.

GARCH モデルの拡張

EGARCH モデル (Nelson, 1991)

$$\log(\sigma_t^2) = \omega + \beta[\log(\sigma_{t-1}^2) - \omega] + \theta z_{t-1} + \gamma\left[|z_{t-1}| - \mathrm{E}\left(|z_{t-1}|\right)\right]$$

- このモデルは, $\log(\sigma_t^2)$ を被説明変数としているので, パラメータに非負制約が必要ない.
- また, 負の値をとる変数でも説明変数に加えることができるので, z_{t-1} を加えることにより, パラメータ θ でボラティリティ変動の非対称性を考慮している.