【計量ファイナンスA】

4. 確率的ボラティリティモデルの基礎

中島 上智

（経済研究所）

確率的ボラティリティモデル

- 観測方程式

$$
\begin{aligned}
R_t &= \mathrm{E}\left(R_t \middle| \boldsymbol{I}_{t-1}\right) + \epsilon_t, \\
\epsilon_t &= \sigma_t z_t, \quad z_t \sim N(0,1)
\end{aligned}
$$

- 標準的な確率的ボラティリティ (Stochastic volatility, SV) モデル

$$
\log(\sigma_t^2) = \omega + \phi \log(\sigma_{t-1}^2) + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2)
$$

- ボラティリティの定常性を仮定

$$
|\phi| < 1
$$

確率的ボラティリティモデル

- ボラティリティの初期値については, 通常, AR(1) モデルの定常分布を仮定する.

$$\log(\sigma_1^2) \sim N\left(\frac{\omega}{1-\phi}, \frac{\sigma_\eta^2}{1-\phi^2}\right)$$

確率的ボラティリティモデル

- 金融工学理論では, ボラティリティのモデル化に連続時間型の確率過程である, Ornstein-Uhlenbeck(OU) 過程を用いることが多い.
- SV モデルは, OU 過程によるボラティリティ変動モデルを離散近似したもの.
- ARCH 型モデルとは異なり, SV モデルでは, η_t が確率変数であるため, t 時点のボラティリティ σ_t^2 が $t-1$ 時点で未知である.
- このため, SV モデルのパラメータを最尤推定することが難しい.

確率的ボラティリティモデル

- SV モデルのパラメータ $\theta \equiv (\omega, \phi, \sigma_\eta)$ に関する尤度

$$
\begin{aligned}
L(\theta) & \\
&= f\left(\{\epsilon_t\}_{t=1}^T | \theta\right) \\
&= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty f\left(\{\epsilon_t\}_{t=1}^T, \{\sigma_t^2\}_{t=1}^T | \theta\right) d\sigma_1^2 \cdots d\sigma_T^2 \\
&= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty f\left(\{\epsilon_t\}_{t=1}^T | \{\sigma_t^2\}_{t=1}^T\right) f\left(\{\sigma_t^2\}_{t=1}^T | \theta\right) d\sigma_1^2 \cdots d\sigma_T^2 \\
&= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left[\prod_{t=1}^T f(\epsilon_t | \sigma_t^2)\right] f(\sigma_1^2 | \theta) \\
&\qquad \cdot \left[\prod_{t=2}^T f(\sigma_t^2 | \sigma_{t-1}^2, \theta)\right] d\sigma_1^2 \cdots d\sigma_T^2
\end{aligned}
$$

確率的ボラティリティモデル

- ただし，

$$
f(\epsilon_t|\sigma_t^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{\epsilon_t^2}{2\sigma_t^2}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
& f(\sigma_t^2|\sigma_{t-1}^2, \theta) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2}\sigma_t^2} \exp\left(-\frac{\{\log(\sigma_t^2) - \omega - \phi\log(\sigma_{t-1}^2)\}^2}{2\sigma_\eta^2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& f(\sigma_1^2|\theta) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2/(1-\phi^2)}\sigma_1^2} \exp\left(-\frac{\{\log(\sigma_1^2) - \omega/(1-\phi)\}^2}{2\sigma_\eta^2/(1-\phi^2)}\right)
\end{aligned}
$$

確率的ボラティリティモデルの推定方法の種類

1. 積率法
2. 最尤法
   2.1 線形カルマンフィルタ (正規分布による近似)
   2.2 非線形カルマンフィルタ
3. ベイズ推定法
   3.1 Single-move sampler
   3.2 Multi-move sampler
   3.3 Mixture sampler

確率的ボラティリティモデルの最尤法

- 線形状態空間モデルへの変換

$$\log(\epsilon_t^2) = \log(\sigma_t^2) + \log(z_t^2)$$

  - $\log(z_t^2)$ の分布は正規分布ではない.
  - $E[\log(z_t^2)] = -1.27$, $\mathrm{Var}[\log(z_t^2)] = \pi^2/2$ を用いて, $\log(z_t^2)$ を正規分布で近似する.

確率的ボラティリティモデルの最尤法

- SV モデルの線形状態空間モデルによる表現

$$\underbrace{\log(\epsilon_t^2) + 1.27}_{y_t} = \underbrace{\log(\sigma_t^2)}_{x_t} + \underbrace{\log(z_t^2) + 1.27}_{u_t}$$

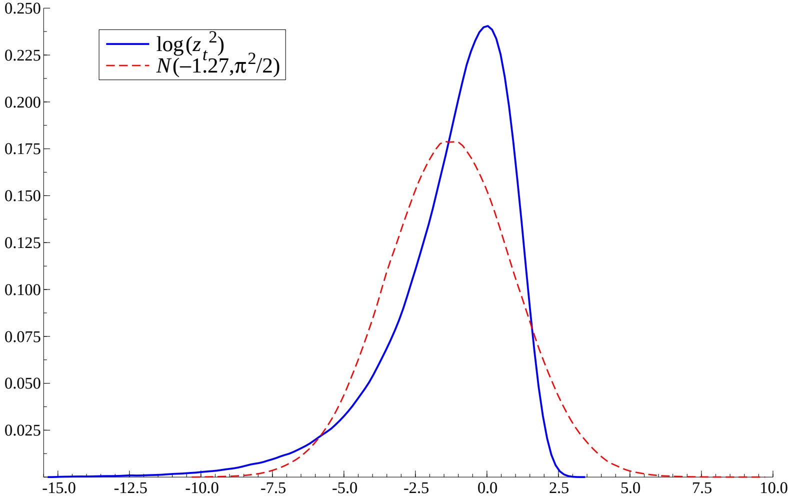
$$\underbrace{\log(\sigma_t^2)}_{x_t} = \omega + \phi \underbrace{\log(\sigma_{t-1}^2)}_{x_{t-1}} + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2)$$

- 書き換えると,

$$\begin{aligned} y_t &= x_t + u_t \\ x_t &= \omega + \phi x_{t-1} + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2) \end{aligned}$$

- u_t の分布は正規分布ではないが, 平均 0, 分散 $\pi^2/2$ の正規分布 $u_t \sim N(0, \pi^2/2)$ で近似する.

確率的ボラティリティモデルの最尤法



線形状態空間モデル

- y_t を観測される変数, x_t を観測されない状態変数 (潜在変数) とする.
- 次の定式化を線形状態空間 (linear state space) モデルと呼ぶ.

  観測方程式 (measurement equation)

  $$y_t = a + bx_t + u_t$$

  遷移方程式 (transition equation)

  $$x_t = \omega + \phi x_{t-1} + \eta_t$$

- ただし, u_t, η_t はホワイトノイズとする.

線形ガウシアン状態空間モデル

- u_t, η_t が次のようにどちらも正規分布に従う場合, 線形ガウシアン状態空間 (linear Gaussian state space) モデルと呼ぶ.

$$u_t \sim N(0, \sigma_u^2), \quad \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2)$$

- 以下では, y_t, x_t がスカラーの場合を説明するが, それらがベクトルの場合にも拡張できる.
- また, u_t と η_t は無相関であると仮定するが, 相関がある場合にも拡張できる.
- パラメータ $(a, b, \omega, \phi, \sigma_u^2, \sigma_\eta^2)$ は時間を通じて一定であるとするが, $t-1$ 期において t 期のパラメータの値が既知であれば, 値が一定でなくても, 応用可能である.

カルマンフィルタ

- 観測値を $\tilde{y}_t = (y_1, \ldots, y_t)$ とおく.
- フィルタリング確率密度 $f(x_t|\tilde{y}_t)$ は, $f(x_1|\tilde{y}_0) = f(x_1)$ から始め, 予測方程式 (prediction equation) と更新方程式 (updating equation) を逐次的に解くことにより計算できる.

カルマンフィルタ

- 予測方程式:

$$
\begin{aligned}
f(x_t|\tilde{y}_{t-1}) &= \int f(x_t, x_{t-1}|\tilde{y}_{t-1}) dx_{t-1} \\
&= \int f(x_t|x_{t-1}, \tilde{y}_{t-1}) f(x_{t-1}|\tilde{y}_{t-1}) dx_{t-1} \\
&= \int f(x_t|x_{t-1}) f(x_{t-1}|\tilde{y}_{t-1}) dx_{t-1}
\end{aligned}
$$

- 更新方程式:

$$
\begin{aligned}
f(x_t|\tilde{y}_t) &= f(x_t|y_t, \tilde{y}_{t-1}) \\
&= \frac{f(y_t|x_t, \tilde{y}_{t-1}) f(x_t|\tilde{y}_{t-1})}{f(y_t|\tilde{y}_{t-1})} \\
&= \frac{f(y_t|x_t) f(x_t|\tilde{y}_{t-1})}{f(y_t|\tilde{y}_{t-1})}
\end{aligned}
$$

カルマンフィルタ

- ただし, 分母は,

$$f(y_t|\tilde{y}_{t-1}) = \int f(y_t|x_t)f(x_t|\tilde{y}_{t-1})dx_t$$

カルマンフィルタ

- 線形ガウシアン状態空間モデルでは,

$$
\begin{aligned}
f(y_t|x_t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2}} \exp\left[-\frac{(y_t - a - bx_t)^2}{2\sigma_u^2}\right] \\
f(x_t|x_{t-1}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2}} \exp\left[-\frac{(x_t - \omega - \phi x_{t-1})^2}{2\sigma_\eta^2}\right]
\end{aligned}
$$

  であり, 予測方程式および更新方程式の確率密度は全て, 正規分布の確率密度になるので, フィルタリングの計算は平均と分散だけで表すことができる.

- $f(x_t|\tilde{y}_{t-1})$ の平均と分散を $x_{t|t-1}$, $P_{t|t-1}$, $f(x_t|\tilde{y}_t)$ の平均と分散を $x_{t|t}$, $P_{t|t}$, $f(y_t|\tilde{y}_{t-1})$ の平均と分散を ν_t, F_t とおく.

カルマンフィルタ

- **予測方程式**

$$
\begin{aligned}
x_{t|t-1} &= \omega + \phi x_{t-1|t-1} \\
P_{t|t-1} &= \phi^2 P_{t-1|t-1} + \sigma_\eta^2
\end{aligned}
$$

- **更新方程式**

$$
\begin{aligned}
x_{t|t} &= x_{t|t-1} + \frac{bP_{t|t-1}}{F_t}\nu_t \\
P_{t|t} &= P_{t|t-1} - \frac{b^2 P_{t|t-1}^2}{F_t}
\end{aligned}
$$

ただし,

$$
\begin{aligned}
\nu_t &= y_t - a - bx_{t|t-1} \\
F_t &= b^2 P_{t|t-1} + \sigma_u^2
\end{aligned}
$$

カルマンフィルタ

- カルマンフィルタは, $x_{1|0} = \omega/(1-\phi)$, $P_{1|0} = \sigma_\eta^2/(1-\phi^2)$ からスタートして, 逐次的に予測方程式と更新方程式を計算する.
- 尤度

$$L = f(\tilde{y}_T) = f(y_1)\prod_{t=2}^{T} f(y_t|\tilde{y}_{t-1})$$

の $f(y_t|\tilde{y}_{t-1})$ はカルマンフィルタによって計算される ν_t, F_t を使って次のように計算できる.

$$f(y_t|\tilde{y}_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi F_t}}\exp\left(-\frac{\nu_t^2}{2F_t}\right)$$

平滑化 (スムージング)

- $f(x_T|\tilde{y}_T)$ からスタートして時間と逆方向に以下のアルゴリズムを逐次的に実行すると，スムージングを行える．

$$
\begin{aligned}
f(x_t, x_{t+1}|\tilde{y}_T) &= f(x_{t+1}|\tilde{y}_T) f(x_t|x_{t+1}, \tilde{y}_T) \\
&= f(x_{t+1}|\tilde{y}_T) f(x_t|x_{t+1}, \tilde{y}_t) \\
&= f(x_{t+1}|\tilde{y}_T) \frac{f(x_{t+1}|x_t, \tilde{y}_t) f(x_t|\tilde{y}_t)}{f(x_{t+1}|\tilde{y}_t)} \\
&= f(x_{t+1}|\tilde{y}_T) \frac{f(x_{t+1}|x_t) f(x_t|\tilde{y}_t)}{f(x_{t+1}|\tilde{y}_t)}
\end{aligned}
$$

平滑化 (スムージング)

$$
\begin{aligned}
f(x_t|\tilde{y}_T) &= \int f(x_t, x_{t+1}|\tilde{y}_T) dx_{t+1} \\
&= f(x_t|\tilde{y}_t) \int \frac{f(x_{t+1}|\tilde{y}_T) f(x_{t+1}|x_t)}{f(x_{t+1}|\tilde{y}_t)} dx_{t+1}
\end{aligned}
$$

平滑化 (スムージング)

- 線形ガウシアン状態空間モデルでは, $f(x_t|\tilde{y}_T)$ の平均と分散を $x_{t|T}$, $P_{t|T}$ とすると, 以下のように表すことができる.

$$
\begin{aligned}
x_{t|T} &= x_{t|t} + P_t^*(x_{t+1|T} - x_{t+1|t}) \\
P_{t|T} &= P_{t|t} + P_t^{*2}(P_{t+1|T} - P_{t+1|t})
\end{aligned}
$$

ただし,

$$
P_t^* = \phi \frac{P_{t|t}}{P_{t+1|t}}
$$

- まず, カルマンフィルターにより, $x_{t|t-1}$, $P_{t|t-1}$, $x_{t|t}$, $P_{t|t}$ $(t = 1, \ldots, T)$ を計算し, 次に, $x_{T|T}$, $P_{T|T}$ から始め, 上のアルゴリズムを時間と逆方向に実行すればスムージングを行える.