【計量ファイナンスA】

5. ベイズ推定と
マルコフ連鎖モンテカルロ法 (1)

中島 上智

(経済研究所)

ベイズ統計学

ベイズ統計学

- パラメータ θ を確率変数とみなし, その分布を考える.

頻度論統計学とベイズ統計学

	頻度論	ベイズ
パラメータ (θ)	定数	確率変数
データ (y)	確率変数	定数
前提とする標本サイズ	無限	有限
事前分布	なし	あり

ベイズ統計学

ベイズの定理

$$\underbrace{\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})}_{\text{事後分布}} = \frac{f(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta})}{\int f(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}} \propto \underbrace{f(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})}_{\text{尤度}} \times \underbrace{\pi(\boldsymbol{\theta})}_{\text{事前分布}}$$

- 未知のパラメータ θ について，事前の情報として事前分布 (prior distribution) があり，データ (標本) y が得られた際に，この事前分布の情報を更新し、事後分布 (posterior distribution) を得る．

ベイズ統計学

ベイズ推定

1. パラメータ θ に事前分布 $\pi(\theta)$ を設定する.
2. ベイズの定理

   $$\pi(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{y}) = \frac{f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta})}{\int f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}} \propto f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta})$$

   を使って事後分布 $\pi(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{y})$ を求める.
3. 事後分布 $\pi(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{y})$ を使ってパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ を推定する.

ベイズ統計学

- 従来は, 事後分布が解析的に解けない場合は, ベイズ推定が使い難いとされていた.
- マルコフ連鎖モンテカルロ (Markov chain Monte Carlo) 法が開発されてからは, 事後分布をサンプリングすることにより未知のパラメータの推論ができるため, 実証分析でベイズ推定が用いられるようになった.
- 最尤法が使えない複雑なモデルについても推定できるケースがあり, 特に注目されることになった.

(参考文献)

- 和合肇 編 (2005)『ベイズ計量経済分析マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用』東洋経済新報社.

MCMC 法

- 同時事後分布 $\pi(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{y})$ からのサンプリングは難しいが，パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ をいくつかのブロック $(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ に分けた場合の条件付き事後分布

$$\pi(\theta_i|\theta_1 \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_k, \boldsymbol{y}) \quad i = 1, \ldots, k$$

  からのサンプリングは可能であるとする．
- $(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ はそれぞれ 1 変量であっても多変量であってもかまわない．

MCMC 法

- 適当な初期値 $(\theta_2^{(0)}, \ldots, \theta_k^{(0)})$ を決める.
- $j = 1, \ldots, N$ について, 以下のサンプリングを繰り返す.

(1) $\pi(\theta_1 | \theta_2^{(j-1)}, \theta_3^{(j-1)}, \ldots, \theta_k^{(j-1)}, \boldsymbol{y})$ から $\theta_1^{(j)}$ をサンプリング

(2) $\pi(\theta_2 | \theta_1^{(j)}, \theta_3^{(j-1)}, \ldots, \theta_k^{(j-1)}, \boldsymbol{y})$ から $\theta_2^{(j)}$ をサンプリング

$\vdots$

(k) $\pi(\theta_k | \theta_1^{(j)}, \theta_2^{(j)}, \ldots, \theta_{k-1}^{(j)}, \boldsymbol{y})$ から $\theta_k^{(j)}$ をサンプリング

MCMC 法

- $N \to \infty$ とすると, $(\theta_1^{(N)}, \ldots, \theta_k^{(N)})$ は同時事後分布 $\pi(\theta_1^{(N)}, \ldots, \theta_k^{(N)}|y)$ からサンプリングされた確率変数に分布収束する.

MCMC 法

- 初期値の影響を取り除くために, 最初の M 回でサンプリングされた値を捨て, その後の N 回のサンプリングの結果 $(\theta_1^{(j)}, \ldots, \theta_k^{(j)})$, $(j = M+1, M+2, \cdots, M+N)$ を同時事後分布 $\pi(\theta_1, \ldots, \theta_k | y)$ からサンプリングされた値とみなし, 推定に用いることができる.

- なお, 最初の M 回を「burn-in 期間」と呼ぶ. M は十分に大きく取る必要がある.

MCMC 法

- 各パラメータの平均や分散は, サンプリングされた値の標本平均や標本分散で推定する.
- 各パラメータの 95%信用区間 (credible intervals) を求めるには, サンプリングされた値を大きさの順に並べ替え, 上側 2.5%と下側 5%の値をとればよい.
- 関数 $h(\theta)$ の平均を推定するには, サンプリングされた θ の値を $h(\theta)$ に代入し, その標本平均を計算すればよい.
- 関数 $h(\theta)$ の 95%信用区間も同様に求めることができる.

MCMC 法

- 全ての条件付き事後分布から直接サンプリングできる場合を, ギブスサンプラー (Gibbs sampler) と呼ぶ.
- 一方, そうでない場合のサンプリング方法として, Metropolis-Hastings (MH) アルゴリズムがある.