# 【計量ファイナンスA】

# 5. ベイズ推定と マルコフ連鎖モンテカルロ法 (1)

中島 上智

(経済研究所)

# ベイズ統計学

## ベイズ統計学

- パラメータ $\theta$ を確率変数とみなし，その分布を考える．

## 頻度論統計学とベイズ統計学

| | 頻度論 | ベイズ |
|---|---|---|
| パラメータ ($\theta$) | 定数 | 確率変数 |
| データ ($y$) | 確率変数 | 定数 |
| 前提とする標本サイズ | 無限 | 有限 |
| 事前分布 | なし | あり |

# ベイズ統計学

## ベイズの定理

$$\underbrace{\pi(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{y})}_{\text{事後分布}} = \frac{f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta})}{\int f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}} \propto \underbrace{f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta})}_{\text{尤度}} \times \underbrace{\pi(\boldsymbol{\theta})}_{\text{事前分布}}$$

- 未知のパラメータ $\theta$ について，事前の情報として事前分布 (prior distribution) があり，データ (標本) $y$ が得られた際に，この事前分布の情報を更新し、事後分布 (posterior distribution) を得る．

# ベイズ統計学

## ベイズ推定

1. パラメータ $\theta$ に事前分布 $\pi(\theta)$ を設定する.
2. ベイズの定理

$$\pi(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{y}) = \frac{f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta})}{\int f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}} \propto f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta})$$

   を使って事後分布 $\pi(\theta|y)$ を求める.
3. 事後分布 $\pi(\theta|y)$ を使ってパラメータ $\theta$ を推定する.

# ベイズ統計学

- 従来は, 事後分布が解析的に解けない場合は, ベイズ推定が使い難いとされていた.
- マルコフ連鎖モンテカルロ (Markov chain Monte Carlo) 法が開発されてからは, 事後分布をサンプリングすることにより未知のパラメータの推論ができるため, 実証分析でベイズ推定が用いられるようになった.
- 最尤法が使えない複雑なモデルについても推定できるケースがあり, 特に注目されることになった.

(参考文献)


- 和合肇 編 (2005)『ベイズ計量経済分析マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用』東洋経済新報社.

# MCMC 法

- 同時事後分布 $\pi(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{y})$ からのサンプリングは難しいが，パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ をいくつかのブロック $(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ に分けた場合の条件付き事後分布

$$\pi(\theta_i|\theta_1 \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_k, \boldsymbol{y}) \quad i = 1, \ldots, k$$

  からのサンプリングは可能であるとする．

- $(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ はそれぞれ 1 変量であっても多変量であってもかまわない．

# MCMC 法

- 適当な初期値 $(\theta_2^{(0)}, \ldots, \theta_k^{(0)})$ を決める.
- $j = 1, \ldots, N$ について, 以下のサンプリングを繰り返す.

(1) $\pi(\theta_1 | \theta_2^{(j-1)}, \theta_3^{(j-1)}, \ldots, \theta_k^{(j-1)}, \boldsymbol{y})$ から $\theta_1^{(j)}$ をサンプリング

(2) $\pi(\theta_2 | \theta_1^{(j)}, \theta_3^{(j-1)}, \ldots, \theta_k^{(j-1)}, \boldsymbol{y})$ から $\theta_2^{(j)}$ をサンプリング

$\vdots$

(k) $\pi(\theta_k | \theta_1^{(j)}, \theta_2^{(j)}, \ldots, \theta_{k-1}^{(j)}, \boldsymbol{y})$ から $\theta_k^{(j)}$ をサンプリング

# MCMC 法

- $N \to \infty$ とすると, $(\theta_1^{(N)}, \ldots, \theta_k^{(N)})$ は同時事後分布 $\pi(\theta_1^{(N)}, \ldots, \theta_k^{(N)} | y)$ からサンプリングされた確率変数に分布収束する.

# MCMC 法

- 初期値の影響を取り除くために, 最初の $M$ 回でサンプリングされた値を捨て, その後の $N$ 回のサンプリングの結果 $(\theta_1^{(j)}, \ldots, \theta_k^{(j)})$, $(j = M+1, M+2, \cdots, M+N)$ を同時事後分布 $\pi(\theta_1, \ldots, \theta_k | y)$ からサンプリングされた値とみなし, 推定に用いることができる.

- なお, 最初の $M$ 回を「burn-in 期間」と呼ぶ. $M$ は十分に大きく取る必要がある.

# MCMC 法

- 各パラメータの平均や分散は，サンプリングされた値の標本平均や標本分散で推定する．
- 各パラメータの 95%信用区間 (credible intervals) を求めるには，サンプリングされた値を大きさの順に並べ替え，上側 2.5%と下側 5%の値をとればよい．

# MCMC 法

- 全ての条件付き事後分布から直接サンプリングできる場合を, ギブスサンプラー (Gibbs sampler) と呼ぶ.
- 一方, そうでない場合のサンプリング方法として, Metropolis-Hastings (MH) アルゴリズムがある.