

【計量ファイナンスA】

5. ベイズ推定と マルコフ連鎖モンテカルロ法 (1)

中島 上智
(経済研究所)

ベイズ統計学

ベイズ統計学

- ▶ パラメータ θ を確率変数とみなし, その分布を考える.

頻度論統計学とベイズ統計学

	頻度論	ベイズ
パラメータ (θ)	定数	確率変数
データ (y)	確率変数	定数
前提とする標本サイズ	無限	有限
事前分布	なし	あり

ベイズ統計学

ベイズの定理

$$\underbrace{\pi(\theta|y)}_{\text{事後分布}} = \frac{f(y|\theta)\pi(\theta)}{\int f(y|\theta)\pi(\theta)d\theta} \propto \underbrace{f(y|\theta)}_{\text{尤度}} \times \underbrace{\pi(\theta)}_{\text{事前分布}}$$

- ▶ 未知のパラメータ θ について、事前の情報として事前分布 (prior distribution) があり、データ (標本) y が得られた際に、この事前分布の情報を更新し、事後分布 (posterior distribution) を得る.

ベイズ推定

1. パラメータ θ に事前分布 $\pi(\theta)$ を設定する.
2. ベイズの定理

$$\pi(\theta|y) = \frac{f(y|\theta)\pi(\theta)}{\int f(y|\theta)\pi(\theta)d\theta} \propto f(y|\theta)\pi(\theta)$$

を使って事後分布 $\pi(\theta|y)$ を求める.

3. 事後分布 $\pi(\theta|y)$ を使ってパラメータ θ を推定する.

ベイズ統計学

- ▶ 従来は、事後分布が解析的に解けない場合は、ベイズ推定が使い難いとされていた。
- ▶ マルコフ連鎖モンテカルロ (Markov chain Monte Carlo) 法が開発されてからは、事後分布をサンプリングすることにより未知のパラメータの推論ができるため、実証分析でベイズ推定が用いられるようになった。
- ▶ 最尤法が使えない複雑なモデルについても推定できるケースがあり、特に注目されることになった。

(参考文献)

- ▶ 和合肇 編 (2005) 『ベイズ計量経済分析マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用』 東洋経済新報社。

MCMC 法

- ▶ 同時事後分布 $\pi(\theta|\mathbf{y})$ からのサンプリングは難しいが、パラメータ θ をいくつかのブロック $(\theta_1, \dots, \theta_k)$ に分けた場合の条件付き事後分布

$$\pi(\theta_i | \theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_k, \mathbf{y}) \quad i = 1, \dots, k$$

からのサンプリングは可能であるとする.

- ▶ $(\theta_1, \dots, \theta_k)$ はそれぞれ 1 変量であっても多変量であってもかまわない.

MCMC 法

- ▶ 適当な初期値 $(\theta_2^{(0)}, \dots, \theta_k^{(0)})$ を決める.
- ▶ $j = 1, \dots, N$ について, 以下のサンプリングを繰り返す.
 - (1) $\pi(\theta_1 | \theta_2^{(j-1)}, \theta_3^{(j-1)}, \dots, \theta_k^{(j-1)}, \mathbf{y})$ から $\theta_1^{(j)}$ をサンプリング
 - (2) $\pi(\theta_2 | \theta_1^{(j)}, \theta_3^{(j-1)}, \dots, \theta_k^{(j-1)}, \mathbf{y})$ から $\theta_2^{(j)}$ をサンプリング
 - \vdots
 - (k) $\pi(\theta_k | \theta_1^{(j)}, \theta_2^{(j)}, \dots, \theta_{k-1}^{(j)}, \mathbf{y})$ から $\theta_k^{(j)}$ をサンプリング

MCMC 法

- ▶ $N \rightarrow \infty$ とすると, $(\theta_1^{(N)}, \dots, \theta_k^{(N)})$ は同時事後分布 $\pi(\theta_1^{(N)}, \dots, \theta_k^{(N)} | y)$ からサンプリングされた確率変数に分布収束する.

MCMC 法

- ▶ 初期値の影響を取り除くために、最初の M 回でサンプリングされた値を捨て、その後の N 回のサンプリングの結果 $(\theta_1^{(j)}, \dots, \theta_k^{(j)})$, $(j = M + 1, M + 2, \dots, M + N)$ を同時事後分布 $\pi(\theta_1, \dots, \theta_k | y)$ からサンプリングされた値とみなし、推定に用いることができる.
- ▶ なお、最初の M 回を「burn-in 期間」と呼ぶ. M は十分に大きく取る必要がある.

MCMC 法

- ▶ 各パラメータの平均や分散は, サンプルされた値の標本平均や標本分散で推定する.
- ▶ 各パラメータの 95%信用区間 (credible intervals) を求めるには, サンプルされた値を大きさの順に並べ替え, 上側 2.5%と下側 5%の値をとればよい.

MCMC 法

- ▶ 全ての条件付き事後分布から直接サンプリングできる場合を, ギブスサンプラー (Gibbs sampler) と呼ぶ.
- ▶ 一方, そうでない場合のサンプリング方法として, Metropolis-Hastings (MH) アルゴリズムがある.