

## 【計量ファイナンスA】

### 11. 確率的ボラティリティモデルの 推定方法と実証分析 (3)

中島 上智

(経済研究所)

## MCMC 法の収束判定

- ▶ MCMC が収束したかどうかを判定する統計量に, Geweke (1992) の CD (Convergence Diagnostic) 統計量がある.
- ▶ これは, burn-in 以降の  $N$  個のサンプルの中の最初から  $N_A$  個のサンプルの平均  $\bar{\theta}_A$  と最後から  $N_B$  個のサンプルの平均  $\bar{\theta}_B$  を使って以下のように計算される.

$$\text{CD} = \frac{\bar{\theta}_A - \bar{\theta}_B}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\bar{\theta}_A) + \widehat{\text{Var}}(\bar{\theta}_B)}}$$

- ▶ MCMC が収束していれば, これは漸近的に標準正規分布に従う.
- ▶ Geweke (1992) は  $N_A = 0.1N$ ,  $N_B = 0.5N$  とすることを推奨している.

## SV モデルの拡張

- ▶ ボラティリティの非対称性 (レバレッジ効果) の導入
- ▶ t-分布, skew-t 分布の導入
- ▶ ジャンプ項の導入
- ▶ 複数列のボラティリティの導入

## SV with leverage

- ▶  $h_t = \log(\sigma_t^2)$  とおく. また, 便宜的に  $y_t = R_t = \epsilon_t$  とする
- ▶ SV モデルは次のように書ける

$$y_t = \exp(h_t/2)z_t, \quad z_t \sim N(0, 1)$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma^2)$$

$$h_1 \sim N(\mu, \sigma^2/(1 - \phi^2))$$

- ▶ 元々,  $z_t$  と  $\eta_t$  は独立と仮定.

## SV with leverage

►  $z_t$  と  $\eta_t$  の相関を導入すると,

$$y_t = \exp(h_t/2)z_t,$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t,$$

$$\begin{pmatrix} z_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim N\left(0, \begin{pmatrix} 1 & \rho\sigma \\ \rho\sigma & \sigma^2 \end{pmatrix}\right),$$

$$h_1 \sim N(\mu, \sigma^2/(1 - \phi^2))$$

## SV with leverage

- ▶  $y_t$  と  $h_{t+1}$  に相関があると仮定.
- ▶ 株価市場では, 相関係数  $\rho$  が負に推計されることが多い. これをレバレッジ効果と呼ぶ.
- ▶ MCMC アルゴリズムは複雑になるが, レバレッジ効果がない場合に比べて, ある場合の方がモデルのフィットは高くなる (Omori et al., 2007).

## SV with leverage

- ▶ レバレッジ効果がない場合の SV モデルは,  $z_t^*$  を  $K$  個の混合正規分布で近似していた.

$$\log(y_t^2) = h_t + \log(z_t^2)$$

$$y_t^* = h_t + z_t^*$$

$$f(z_t^*) = \sum_{j=1}^K p_j \frac{1}{\sqrt{2\pi v_j^2}} \exp \left\{ -\frac{(z_t^* - m_j)^2}{2v_j^2} \right\}$$

## SV with leverage

- ▶ レバレッジ効果がある場合は,  $(z_t^*, \eta_t)$  を  $K$  個の混合二変量正規分布で近似する.
- ▶  $z_t^*$  を条件としたときの,  $\eta_t$  の確率分布は,

$$\eta_t | z_t^* \sim N(d_t \rho \sigma \exp(z_t^*/2), \sigma^2(1 - \rho^2))$$

ここで,  $d_t$  は  $y_t$  が正 (または 0) のとき 1, 負のとき  $-1$  を取る変数である.

- ▶  $(z_t^*, \eta_t)$  の同時分布の近似を次のように書く.



## SV with leverage

$$f(z_t^*, \eta_t) = \sum_{j=1}^K p_j \frac{1}{\sqrt{2\pi v_j^2}} \exp \left\{ -\frac{(z_t^* - m_j)^2}{2v_j^2} \right\} \\ \times \frac{1}{\sqrt{2\pi V_j^2}} \exp \left\{ -\frac{(\eta_t - M_j)^2}{2V_j^2} \right\}$$

ただし,

$$M_j = d_t \rho \sigma \exp(m_j/2) \{a_j + b_j(z_t^* - m_j)\}, \\ V_j = \sigma^2(1 - \rho^2)$$

## SV with leverage

$j$	$p_j$	$m_j$	$v_j^2$
1	0.00609	1.92677	0.11265
2	0.04775	1.34744	0.17788
3	0.13057	0.73504	0.26768
4	0.20674	0.02266	0.40611
5	0.22715	-0.85173	0.62699
6	0.18842	-1.97278	0.98583
7	0.12047	-3.46788	1.57469
8	0.05591	-5.55246	2.54498
9	0.01575	-8.68384	4.16591
10	0.00115	-14.65000	7.33342

## SV with leverage

$j$	$a_j$	$b_j$
1	1.01418	0.50710
2	1.02248	0.51124
3	1.03403	0.51701
4	1.05207	0.52604
5	1.08153	0.54076
6	1.13114	0.56557
7	1.21754	0.60877
8	1.37454	0.68728
9	1.68327	0.84163
10	2.50097	1.25049

## SV with t-distribution

- ▶ 標準的な SV モデルでは,  $z_t$  の分布を正規分布と仮定.

$$y_t = \exp(h_t/2)z_t, \quad z_t \sim N(0, 1)$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma^2)$$

$$h_1 \sim N(\mu, \sigma^2/(1 - \phi^2))$$

- ▶ 金融市場価格のリターンは, 正規分布よりも裾が厚いことが知られている.

## SV with t-distribution

- ▶  $z_t$  に  $t$  分布を仮定したモデルが提案されている.

$$y_t = \exp(h_t/2)z_t, \quad z_t = \sqrt{\lambda_t}\varepsilon_t$$

$$\lambda_t \sim IG(\nu/2, \nu/2), \quad \varepsilon_t \sim N(0, 1)$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma^2)$$

$$h_1 \sim N(\mu, \sigma^2/(1 - \phi^2))$$

- ▶ Chib, Nardari, and Shephard (2002)

## SV with skew t-distribution

- ▶ また、金融市場価格のリターンは、裾の左右非対称性が知られている.
- ▶  $z_t$  に skew- $t$  分布を仮定したモデルも提案されている.

$$y_t = \exp(h_t/2)z_t,$$

$$z_t = \beta(\lambda_t - E[\lambda_t]) + \sqrt{\lambda_t}\varepsilon_t$$

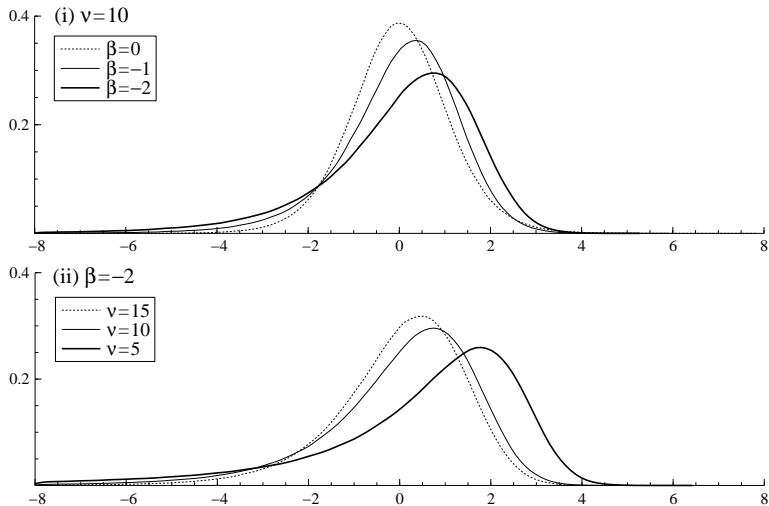
$$\lambda_t \sim IG(\nu/2, \nu/2), \quad \varepsilon_t \sim N(0, 1)$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma^2)$$

$$h_1 \sim N(\mu, \sigma^2/(1 - \phi^2))$$

- ▶ Nakajima and Omori (2012)

# SV with skew t-distribution



## SV with jumps

- ▶ リターンの分布の裾の厚さを捉えるために、ジャンプを導入する.

$$y_t = k_t \gamma_t + \exp(h_t/2) z_t, \quad z_t \sim N(0, 1)$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma^2)$$

$$h_1 \sim N(\mu, \sigma^2/(1 - \phi^2))$$

- ▶  $\gamma_t \in \{0, 1\}$  は  $t$  でジャンプが起きるかどうかを示すパラメータ
- ▶  $k_t$  はジャンプの大きさを示すパラメータ



## SV with jumps

- ▶ ジャンプのパラメータには, 次のような事前分布を置く.

$$\pi(\gamma_t = 1) = \kappa, \quad 0 < \kappa < 1$$

$$\log(1 + k_t) \sim N(-0.5\delta^2, \delta^2)$$

- ▶ Chib, Nardari, and Shephard (2002)

## SV with jumps

- ▶ ボラティリティの遷移方程式にもジャンプを入れることができる.

$$y_t = k_t \gamma_t + \exp(h_t/2) z_t, \quad z_t \sim N(0, 1)$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + r_t \gamma_t + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma^2)$$

$$h_1 \sim N(\mu, \sigma^2/(1 - \phi^2))$$

- ▶ ジャンプのサイズは,  $r_t \sim \text{Exp}(\mu_J)$  とおき, これを条件付けて,  $k_t | j_t \sim N(\mu_k + \beta_J j_t)$  とおく
- ▶ Nakajima and Omori (2009)

## SV superposition model

- ▶ SV モデルのボラティリティを 2 つの AR(1) の和とモデル化することがある.

$$y_t = \exp(h_t/2)z_t, \quad z_t \sim N(0, 1)$$

$$h_t = x_{1t} + x_{2t}$$

$$x_{1,t+1} = \mu + \phi_1(x_{1t} - \mu) + \eta_{1t}, \quad \eta_{1t} \sim N(0, \sigma_1^2)$$

$$x_{2,t+1} = \phi_2 x_{2t} + \eta_{2t}, \quad \eta_{2t} \sim N(0, \sigma_2^2)$$

$$x_{11} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2/(1 - \phi_1^2))$$

$$x_{21} \sim N(0, \sigma_2^2/(1 - \phi_2^2))$$

## SV superposition model

- ▶ モデルの識別のために,  $0 < \phi_1 < \phi_2 < 1$  と仮定する.
- ▶  $x_{2t}$  は長期間のサイクル,  $x_{1t}$  は短期間の変動を捉える.
- ▶ Barndorff-Nielsen and Shephard (2001)
- ▶ Omori et al. (2007)

- ▶ Barndorff-Nielsen, O.E., and N. Shephard (2001) Non-Gaussian Ornstein–Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics (with discussion), *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 63, 167-241.
- ▶ Chib, S., F. Nardari, and N. Shephard (2002) Markov chain Monte Carlo methods for stochastic volatility models, *Journal of Econometrics*, 108, 281-316.
- ▶ Geweke, J. (1992), Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculation of posterior moments (with discussion), in *Bayesian Statistics 4*, eds. J. M. Bernardo, J. O. Berger, A. P. Dawid, and A. F. M. Smith, New York: Oxford University Press, 169-193.

## 参考文献

- ▶ Nakajima, J., and Y. Omori (2009) Leverage, heavy-tails and correlated jumps in stochastic volatility models, *Computational Statistics and Data Analysis*, 53, 2335-2353.
- ▶ Nakajima, J., and Y. Omori (2012) Stochastic volatility model with leverage and asymmetrically heavy-tailed error using GH skew Student's t-distribution, *Computational Statistics and Data Analysis*, 56, 3690-3704.
- ▶ Omori, Y., S. Chib, N. Shephard, and J. Nakajima (2007) Stochastic volatility with leverage: Fast and efficient likelihood inference, *Journal of Econometrics*, 140(2), 425-449.

# MCMC 法に関する文献

## ▶ ギブスサンプラー

Gelfand, A. E., Hills, S. E., Racine-Poon, A., and Smith, A. F. M. (1990), Illustration of Bayesian inference in normal data models using Gibbs sampling, *Journal of the American Statistical Association*, 85, 912-985.

## ▶ MH アルゴリズム

Tierney, L. (1994) Markov chains for exploring posterior distributions, *Annals of Statistics*, 1701-1728.

# MCMC 法に関する文献

- ▶ ベイズ推定の考え方

繁樹 算男, (1985) 『ベイズ統計入門』 東京大学出版会

- ▶ 計量経済学のモデルと MCMC 法

Koop, G., (2003) *Bayesian Econometrics*, John Wiley & Sons.

- ▶ モンテカルロ法と MCMC 法

Robert, C., and G. Casella (2010) *Monte Carlo Statistical Methods*, Springer.