【計量ファイナンスA】

11. 確率的ボラティリティモデルの推定方法と実証分析 (3)

中島 上智

（経済研究所）

MCMC 法の収束判定

- MCMC が収束したかどうかを判定する統計量に, Geweke (1992) の CD (Convergence Diagnostic) 統計量がある.
- これは, burn-in 以降の N 個のサンプルの中の最初から N_A 個のサンプルの平均 $\bar{\theta}_A$ と最後から N_B 個のサンプルの平均 $\bar{\theta}_B$ を使って以下のように計算される.

$$\mathrm{CD} = \frac{\bar{\theta}_A - \bar{\theta}_B}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Var}}(\bar{\theta}_A) + \widehat{\mathrm{Var}}(\bar{\theta}_B)}}$$

- MCMC が収束していれば, これは漸近的に標準正規分布に従う.
- Geweke (1992) は $N_A = 0.1N$, $N_B = 0.5N$ とすることを推奨している.

SV モデルの拡張

- ボラティリティの非対称性 (レバレッジ効果) の導入
- t-分布, skew-t 分布の導入
- ジャンプ項の導入
- 複数系列のボラティリティの導入

SV with leverage

- $h_t = \log(\sigma_t^2)$ とおく．また, 便宜的に $y_t = R_t = \epsilon_t$ とする
- SV モデルは次のように書ける

$$
\begin{aligned}
y_t &= \exp(h_t/2) z_t, \quad z_t \sim N(0,1) \\
h_{t+1} &= \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma^2) \\
h_1 &\sim N\left(\mu, \sigma^2/(1-\phi^2)\right)
\end{aligned}
$$

- 元々, z_t と η_t は独立と仮定.

SV with leverage

- z_t と η_t の相関を導入すると,

$$
\begin{aligned}
y_t &= \exp(h_t/2) z_t, \\
h_{t+1} &= \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t, \\
\begin{pmatrix} z_t \\ \eta_t \end{pmatrix} &\sim N\left(0, \begin{pmatrix} 1 & \rho\sigma \\ \rho\sigma & \sigma^2 \end{pmatrix}\right), \\
h_1 &\sim N\left(\mu, \sigma^2/(1-\phi^2)\right)
\end{aligned}
$$

SV with leverage

- y_t と h_{t+1} に相関があると仮定.
- 株価市場では, 相関係数 ρ が負に推計されることが多い. これをレバレッジ効果と呼ぶ.
- MCMC アルゴリズムは複雑になるが, レバレッジ効果がない場合に比べて, ある場合の方がモデルのフィットは高くなる (Omori et al., 2007).

SV with leverage

- レバレッジ効果がない場合の SV モデルは, z_t^* を K 個の混合正規分布で近似していた.

$$
\begin{aligned}
\log(y_t^2) &= h_t + log(\epsilon_t^2) \\
y_t^* &= h_t + z_t^* \\
f(z_t^*) &= \sum_{j=1}^{K} p_j \frac{1}{\sqrt{2\pi v_j^2}} \exp\left\{ -\frac{(z_t^* - m_j)^2}{2v_j^2} \right\}
\end{aligned}
$$

SV with leverage

- レバレッジ効果がある場合は, (z_t^*, η_t) を K 個の混合二変量正規分布で近似する.
- z_t^* を条件としたときの, η_t の確率分布は,

$$\eta_t | z_t^* \sim N\left(d_t \rho \sigma \exp(z_t^*/2), \sigma^2(1-\rho^2)\right)$$

  ここで, d_t は y_t が正 (または 0) のとき 1, 負のとき -1 を取る変数である.
- (z_t^*, η_t) の同時分布の近似を次のように書く.

SV with leverage

$$
\begin{aligned}
f(z_t^*, \eta_t) &= \sum_{j=1}^{K} p_j \frac{1}{\sqrt{2\pi v_j^2}} \exp\left\{ -\frac{(z_t^* - m_j)^2}{2v_j^2} \right\} \\
&\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi V_j^2}} \exp\left\{ -\frac{(\eta_t - M_j)^2}{2V_j^2} \right\}
\end{aligned}
$$

ただし,

$$
\begin{aligned}
M_j &= d_t \rho \sigma \exp(m_j/2)\{a_j + b_j(z_t^* - m_j)\}, \\
V_j &= \sigma^2(1 - \rho^2)
\end{aligned}
$$

SV with leverage

j	p_j	m_j	v_j^2
1	0.00609	1.92677	0.11265
2	0.04775	1.34744	0.17788
3	0.13057	0.73504	0.26768
4	0.20674	0.02266	0.40611
5	0.22715	−0.85173	0.62699
6	0.18842	−1.97278	0.98583
7	0.12047	−3.46788	1.57469
8	0.05591	−5.55246	2.54498
9	0.01575	−8.68384	4.16591
10	0.00115	−14.65000	7.33342

SV with leverage

j	a_j	b_j
1	1.01418	0.50710
2	1.02248	0.51124
3	1.03403	0.51701
4	1.05207	0.52604
5	1.08153	0.54076
6	1.13114	0.56557
7	1.21754	0.60877
8	1.37454	0.68728
9	1.68327	0.84163
10	2.50097	1.25049

SV with t-distribution

- 標準的な SV モデルでは, z_t の分布を正規分布と仮定.

$$
\begin{aligned}
y_t &= \exp(h_t/2) z_t, \quad z_t \sim N(0,1) \\
h_{t+1} &= \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0,\sigma^2) \\
h_1 &\sim N\left(\mu, \sigma^2/(1-\phi^2)\right)
\end{aligned}
$$

- 金融市場価格のリターンは, 正規分布よりも裾が厚いことが知られている.

SV with t-distribution

- z_t に t 分布を仮定したモデルが提案されている.

$$
\begin{aligned}
y_t &= \exp(h_t/2)z_t, \quad z_t = \sqrt{\lambda_t}\varepsilon_t \\
\lambda_t &\sim IG(\nu/2, \nu/2), \quad \varepsilon_t \sim N(0,1) \\
h_{t+1} &= \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma^2) \\
h_1 &\sim N\left(\mu, \sigma^2/(1-\phi^2)\right)
\end{aligned}
$$

- Chib, Nardari, and Shephard (2002)

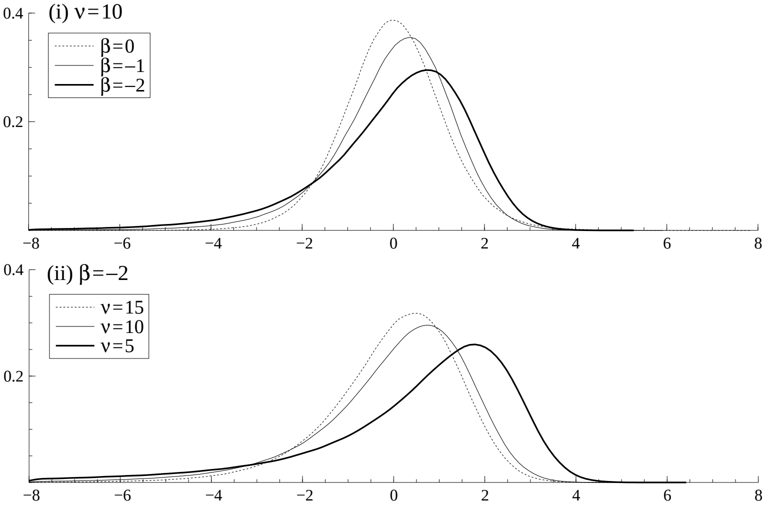
SV with skew t-distribution

- また, 金融市場価格のリターンは, 裾の左右非対称性が知られている.
- z_t に skew-t 分布を仮定したモデルも提案されている.

$$
\begin{aligned}
y_t &= \exp(h_t/2) z_t, \\
z_t &= \beta(\lambda_t - \mathrm{E}[\lambda_t]) + \sqrt{\lambda_t}\varepsilon_t \\
\lambda_t &\sim IG(\nu/2, \nu/2), \quad \varepsilon_t \sim N(0,1) \\
h_{t+1} &= \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma^2) \\
h_1 &\sim N\left(\mu, \sigma^2/(1-\phi^2)\right)
\end{aligned}
$$

- Nakajima and Omori (2012)

SV with skew t-distribution



SV with jumps

- リターンの分布の裾の厚さを捉えるために, ジャンプを導入する.

$$
\begin{aligned}
y_t &= k_t\gamma_t + \exp(h_t/2)z_t, \quad z_t \sim N(0,1) \\
h_{t+1} &= \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0,\sigma^2) \\
h_1 &\sim N\left(\mu, \sigma^2/(1-\phi^2)\right)
\end{aligned}
$$

- $\gamma_t \in \{0,1\}$ は t でジャンプが起きるかどうかを示すパラメータ
- k_t はジャンプの大きさを示すパラメータ

SV with jumps

- ジャンプのパラメータには, 次のような事前分布を置く.

$$
\begin{aligned}
\pi(\gamma_t = 1) &= \kappa, \quad 0 < \kappa < 1 \\
\log(1 + k_t) &\sim N(-0.5\delta^2, \delta^2)
\end{aligned}
$$

- Chib, Nardari, and Shephard (2002)

SV with jumps

- ボラティリティの遷移方程式にもジャンプを入れることができる.

$$
\begin{aligned}
y_t &= k_t \gamma_t + \exp(h_t/2) z_t, \quad z_t \sim N(0,1) \\
h_{t+1} &= \mu + \phi(h_t - \mu) + r_t \gamma_t + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma^2) \\
h_1 &\sim N\left(\mu, \sigma^2/(1-\phi^2)\right)
\end{aligned}
$$

- ジャンプのサイズは, $r_t \sim \mathrm{Exp}(\mu_J)$ とおき, これを条件付けて, $k_t | j_t \sim N(\mu_k + \beta_J j_t)$ とおく
- Nakajima and Omori (2009)

SV superposition model

- SV モデルのボラティリティを 2 つの AR(1) の和とモデル化することがある.

$$
\begin{aligned}
y_t &= \exp(h_t/2) z_t, \quad z_t \sim N(0,1) \\
h_t &= x_{1t} + x_{2t} \\
x_{1,t+1} &= \mu + \phi_1 (x_{1t} - \mu) + \eta_{1t}, \quad \eta_{1t} \sim N(0, \sigma_1^2) \\
x_{2,t+1} &= \phi_2 x_{2t} + \eta_{2t}, \quad \eta_{2t} \sim N(0, \sigma_2^2) \\
x_{11} &\sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2/(1-\phi_1^2)\right) \\
x_{21} &\sim N\left(0, \sigma_2^2/(1-\phi_2^2)\right)
\end{aligned}
$$

SV superposition model

- モデルの識別のために, $0 < \phi_1 < \phi_2 < 1$ と仮定する.
- x_{2t} は長期間のサイクル, x_{1t} は短期間の変動を捉える.
- Barndorff-Nielsen and Shephard (2001)
- Omori et al. (2007)

参考文献

- Barndorff-Nielsen, O.E., and N. Shephard (2001) Non-Gaussian Ornstein–Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics (with discussion), *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 63, 167-241.
- Chib, S., F. Nardari, and N. Shephard (2002) Markov chain Monte Carlo methods for stochastic volatility models, *Journal of Econometrics*, 108, 281-316.
- Geweke, J. (1992), Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculation of posterior moments (with discussion), in *Bayesian Statistics 4*, eds. J. M. Bernardo, J. 0. Berger, A. P. Dawid, and A. F. M. Smith, New York: Oxford University Press, 169-193.

参考文献

- Nakajima, J., and Y. Omori (2009) Leverage, heavy-tails and correlated jumps in stochastic volatility models, *Computational Statistics and Data Analysis*, 53, 2335-2353.
- Nakajima, J., and Y. Omori (2012) Stochastic volatility model with leverage and asymmetrically heavy-tailed error using GH skew Student's t-distribution, *Computational Statistics and Data Analysis*, 56, 3690-3704.
- Omori, Y., S. Chib, N. Shephard, and J. Nakajima (2007) Stochastic volatility with leverage: Fast and efficient likelihood inference, *Journal of Econometrics*, 140(2), 425-449.

MCMC 法に関する文献

- ギブスサンプラー

  Gelfand, A. E., Hills, S. E., Racine-Poon, A., and Smith, A. F. M. (1990), Illustration of Bayesian inference in normal data models using Gibbs sampling, *Journal of the American Statistical Association*, 85, 912-985.

- MH アルゴリズム

  Tierney, L. (1994) Markov chains for exploring posterior distributions, *Annals of Statistics*, 1701-1728.

MCMC 法に関する文献

- ベイズ推定の考え方

  繁桝 算男, (1985) 『ベイズ統計入門』東京大学出版会

- 計量経済学のモデルと MCMC 法

  Koop, G., (2003) *Bayesian Econometrics*, John Wiley & Sons.

- モンテカルロ法と MCMC 法

  Robert, C., and G. Casella (2010) *Monte Carlo Statistical Methods*, Springer.