【計量ファイナンスA】

1. 時系列分析の基礎

中島 上智

（経済研究所）

時系列分析の基礎

- 定常性
- AR, MA, ARMA モデル

弱定常性

- y_t が以下の条件をすべて満たすとき, 弱定常 (weakly stationary, covariance stationary) であるという.

1. $\mathrm{E}(y_t) = \mu < \infty$
2. $\mathrm{Var}(y_t) = \sigma^2 < \infty$
3. $\mathrm{Cov}(y_t, y_s) = f(|t - s|) < \infty$

ホワイト・ノイズ

- ϵ_t が以下の条件をすべて満たすとき，ホワイト・ノイズであるという．

1. $\mathrm{E}(\epsilon_t) = 0$
2. $\mathrm{Var}(\epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2 < \infty$
3. $\mathrm{Cov}(\epsilon_t, \epsilon_s) = 0$ for all $t \neq s$.

時系列モデル

- AR(p) モデル

$$y_t = \mu' + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t$$

- MA(q) モデル

$$y_t = \mu + \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \epsilon_{t-q}$$

- ARMA(p,q) モデル

$$y_t = \mu' + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + y_{t-p} + \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \epsilon_{t-q}$$

ラグ多項式による表現

ラグ・オペレーター

- $Ly_t = y_{t-1}$
- $L^k y_t = y_{t-k}$

ラグ多項式による表現

AR(p) モデル

$$y_t = \mu' + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t$$

$$\begin{aligned}
y_t - \phi_1 y_{t-1} - \cdots - \phi_p y_{t-p} &= \mu' + \epsilon_t \\
y_t - \phi_1 L y_t - \cdots - \phi_p L^p y_t &= \mu' + \epsilon_t \\
\underbrace{(1 - \phi_1 L - \cdots - \phi_p L^p)}_{\Phi_p(L)} y_t &= \mu' + \epsilon_t
\end{aligned}$$

$$\Phi_p(L) y_t = \mu' + \epsilon_t$$

ラグ多項式による表現

MA(q) モデル

$$\begin{aligned} y_t &= \mu + \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \epsilon_{t-q} \\ &= \mu + \epsilon_t - \theta_1 L \epsilon_t - \cdots - \theta_q L^q \epsilon_t \\ &= \mu + \underbrace{(1 - \theta_1 L - \cdots - \theta_q L^q)}_{\Theta_q(L)} \epsilon_t \end{aligned}$$

$$y_t = \mu + \Theta_q(L) \epsilon_t$$

ラグ多項式による表現

ARMA(p,q) モデル

$$y_t = \mu' + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \epsilon_{t-q}$$

$$\begin{aligned}
y_t - \phi_1 y_{t-1} - \cdots - \phi_p y_{t-p} &= \mu' + \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \epsilon_{t-q} \\
y_t - \phi_1 L y_t - \cdots - \phi_p L^p y_t &= \mu' + \epsilon_t - \theta_1 L \epsilon_t - \cdots - \theta_q L^q \epsilon_t \\
\underbrace{(1 - \phi_1 L - \cdots - \phi_p L^p)}_{\Phi_p(L)} y_t &= \mu' + \underbrace{(1 - \theta_1 L - \cdots - \theta_q L^q)}_{\Theta_q(L)} \epsilon_t
\end{aligned}$$

$$\Phi_p(L) y_t = \mu' + \Theta_q(L) \epsilon_t$$

AR(p) モデルの定常性

AR(p) モデル

$$y_t = \mu' + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t$$

$$\underbrace{(1 - \phi_1 L - \cdots - \phi_p L^p)}_{\Phi_p(L)} y_t = \mu' + \epsilon_t$$

- $\Phi_p(x) = 1 - \phi_1 x - \cdots - \phi_p x^p = 0$ を特性方程式 (characteristic equation) と呼ぶ.
- 特性方程式のすべての根の絶対値が 1 を上回れば定常性を満たす.
- 定常性を満たせば, AR(p) モデルは MA(∞) モデルで表せる.

AR(1) モデルの定常性

- AR(1) モデル

$$y_t = \mu' + \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

  の特性方程式は

$$\Phi_1(x) = 1 - \phi x = 0$$

- この根は $x = 1/\phi$ なので, AR(1) モデルの定常性の条件は, $|\phi| < 1$.

AR(1) モデルの定常性

- AR(1) モデル

$$y_t = \mu' + \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

の y_{t-1} に

$$y_{t-1} = \mu' + \phi y_{t-2} + \epsilon_{t-1}$$

を代入すると,

$$y_t = \mu'(1+\phi) + \phi^2 y_{t-2} + \epsilon_t + \phi\epsilon_{t-1}$$

- 同様の操作を k 回繰り返すと,

$$y_t = \mu'(1+\phi+\cdots+\phi^k)+\phi^{k+1}y_{t-k-1}+\epsilon_t+\phi\epsilon_{t-1}+\cdots+\phi^k\epsilon_{t-k}$$

AR(1) モデルの定常性

- $|\phi| < 1$ であれば, $k \to \infty$ とすると, 以下のような MA(∞) モデルになる.

$$y_t = \frac{\mu'}{1-\phi} + \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k \epsilon_{t-k}$$

AR(1) モデルの定常性

ラグ・オペレーターによる展開

$$y_t = \mu' + \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

$$(1 - \phi L) y_t = \mu' + \epsilon_t$$

$$\begin{aligned}
y_t &= \frac{\mu'}{1 - \phi L} + \frac{\epsilon_t}{1 - \phi L} \\
&= (1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \cdots)\mu' + (1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \cdots)\epsilon_t \\
&= (1 + \phi + \phi^2 + \cdots)\mu' + \epsilon_t + \phi \epsilon_{t-1} + \phi^2 \epsilon_{t-2} + \cdots \\
&= \frac{\mu'}{1 - \phi} + \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k \epsilon_{t-k}
\end{aligned}$$

AR(1) モデルの無条件期待値

- 定常性の条件 $|\phi| < 1$ を満たせば, AR(1) モデル

$$y_t = \mu' + \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

は, 以下の MA(∞) モデルで表せる.

$$y_t = \frac{\mu'}{1-\phi} + \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k \epsilon_{t-k}$$

- したがって, 無条件期待値は,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(y_t) &= \mathrm{E}\left(\frac{\mu'}{1-\phi} + \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k \epsilon_{t-k} \right) \\ &= \frac{\mu'}{1-\phi} + \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k \mathrm{E}(\epsilon_{t-k}) = \frac{\mu'}{1-\phi} \end{aligned}$$

AR(1) モデルの無条件期待値

- AR(1) モデル

$$y_t = \mu' + \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

の両辺の無条件期待値をとると,

$$\mathrm{E}(y_t) = \mu' + \phi \mathrm{E}(y_{t-1})$$

- 定常性が満たされるなら, $\mathrm{E}(y_t) = \mathrm{E}(y_{t-1})$ なので,

$$\mathrm{E}(y_t) = \mu' + \phi \mathrm{E}(y_t)$$

- したがって,

$$\mathrm{E}(y_t) = \frac{\mu'}{1-\phi}$$

AR(1) モデルの無条件期待値

- AR(1) モデルを,

$$y_t = \mu + \phi(y_{t-1} - \mu) + \epsilon_t$$

  と表すことがある.
- これは

$$y_t = \mu(1 - \phi) + \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

  となるので,

$$y_t = \mu' + \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

  と比べると,

$$\mu = \frac{\mu'}{1 - \phi}$$

- したがって, $\mu = \mathrm{E}(y_t)$.

AR(1) モデルの無条件分散

- AR(1) モデル

$$y_t = \mu' + \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

は, $|\phi| < 1$ であれば,

$$y_t = \frac{\mu'}{1-\phi} + \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k \epsilon_{t-k}$$

- したがって, 無条件分散は,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(y_t) &= \mathrm{Var}\left(\frac{\mu'}{1-\phi} + \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k \epsilon_{t-k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \phi^{2k} \mathrm{Var}\left(\epsilon_{t-k}\right) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\phi^2}
\end{aligned}$$

AR(1) モデルの無条件分散

- AR(1) モデル

$$y_t = \mu' + \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

の両辺の無条件分散をとると，

$$\mathrm{Var}(y_t) = \phi^2 \mathrm{Var}(y_{t-1}) + \sigma_\epsilon^2$$

- 定常性が満たされるなら，$\mathrm{Var}(y_t) = \mathrm{Var}(y_{t-1})$ なので，

$$\mathrm{Var}(y_t) = \phi^2 \mathrm{Var}(y_t) + \sigma_\epsilon^2$$

- したがって，

$$\mathrm{Var}(y_t) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\phi^2}$$

AR(1) モデルの無条件自己共分散

- AR(1) モデル

$$y_t = \mu' + \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

は, $|\phi| < 1$ であれば,

$$y_t = \frac{\mu'}{1-\phi} + \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k \epsilon_{t-k}$$

- したがって, 1 次の自己共分散は,

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(y_t, y_{t-1}) &= \phi[\mathrm{Var}(\epsilon_{t-1}) + \phi^2 \mathrm{Var}(\epsilon_{t-2}) + \cdots] \\ &= \phi(1 + \phi^2 + \cdots)\sigma_\epsilon^2 \\ &= \frac{\phi\sigma_\epsilon^2}{1-\phi^2} \end{aligned}$$

AR(1) モデルの無条件自己共分散

- より一般的に, k 次の自己共分散は,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(y_t, y_{t-k}) &= \phi^k[\mathrm{Var}(\epsilon_{t-k}) + \phi^2\mathrm{Var}(\epsilon_{t-k-1}) + \cdots] \\
&= \phi^k(1 + \phi^2 + \cdots)\sigma_\epsilon^2 \\
&= \frac{\phi^k\sigma_\epsilon^2}{1-\phi^2}
\end{aligned}$$

- k 次の自己相関係数:

$$\begin{aligned}
\rho(y_t, y_{t-k}) &= \frac{\mathrm{Cov}(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{\mathrm{Var}(y_t)\mathrm{Var}(y_{t-k})}} \\
&= \frac{\mathrm{Cov}(y_t, y_{t-k})}{\mathrm{Var}(y_t)} \\
&= \phi^k
\end{aligned}$$

AR(2) モデルの定常性

- AR(2) モデル

$$y_t = \mu' + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \epsilon_t$$

$$\underbrace{(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)}_{\Phi_2(L)} y_t = \mu' + \epsilon_t$$

の特性方程式は

$$\Phi_2(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 = 0$$

- この式が,

$$\Phi_2(x) = (1 - \lambda_1 x)(1 - \lambda_2 x) = 0$$

と表されるとすると, 根は $x = 1/\lambda_1,\ 1/\lambda_2$.

- したがって, AR(2) モデルの定常性の条件は, $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| < 1$.

AR(2) モデルの定常性

- AR(2) モデル

$$(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2)y_t=\mu'+\epsilon_t$$

$$(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)y_t=\mu'+\epsilon_t$$

$$y_t=\frac{\mu'}{(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)}+\frac{\epsilon_t}{(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)}$$

- ここで,

$$\frac{1}{(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)}=\frac{c_1}{1-\lambda_1 L}+\frac{c_2}{1-\lambda_2 L}$$

  とする.

- この式が成り立つためには,

$$c_1+c_2=1, \quad c_1\lambda_2+c_2\lambda_1=0$$

AR(2) モデルの定常性

- そうすると,

$$\frac{c_1}{1-\lambda_1 L}+\frac{c_2}{1-\lambda_2 L}$$
$$=c_1(1+\lambda_1 L+\lambda_1^2 L^2+\cdots)+c_2(1+\lambda_2 L+\lambda_2^2 L^2+\cdots)$$

- $|\lambda_1|<1$, $|\lambda_2|<1$ であれば,

$$y_t=\left(\frac{c_1}{1-\lambda_1 L}+\frac{c_2}{1-\lambda_2 L}\right)\mu'+\left(\frac{c_1}{1-\lambda_1 L}+\frac{c_2}{1-\lambda_2 L}\right)\epsilon_t$$
$$=\frac{\mu'}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}+\sum_{k=0}^{\infty}\left(c_1\lambda_1^k+c_2\lambda_2^k\right)\epsilon_{t-k}$$
$$=\frac{\mu'}{1-\phi_1-\phi_2}+\sum_{k=0}^{\infty}\left(c_1\lambda_1^k+c_2\lambda_2^k\right)\epsilon_{t-k}$$

AR(p) モデルの無条件期待値

- AR(p) モデル

$$y_t = \mu' + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t$$

  の両辺の無条件期待値をとると,

$$\mathrm{E}(y_t) = \mu' + \phi_1 \mathrm{E}(y_{t-1}) + \cdots + \phi_p \mathrm{E}(y_{t-p})$$

- 定常性が満たされるなら, $\mathrm{E}(y_t) = \cdots = \mathrm{E}(y_{t-p})$ なので,

$$\mathrm{E}(y_t) = \mu' + (\phi_1 + \cdots + \phi_p)\mathrm{E}(y_t)$$

- したがって,

$$\mathrm{E}(y_t) = \frac{\mu'}{1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p}$$

AR(p) モデルの無条件期待値

- AR(p) モデルを,

$$y_t = \mu + \phi_1(y_{t-1} - \mu) + \cdots + \phi_p(y_{t-p} - \mu) + \epsilon_t$$

と表すと, $\mu = \mathrm{E}(y_t)$.

AR(p) モデルの条件付き期待値

- AR(p) モデル

$$y_t = \mu' + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t$$

- 条件付き期待値

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left(y_t \middle| y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\mu' + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t \middle| y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots\right) \\
&= \mu' + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \underbrace{\mathrm{E}\left(\epsilon_t \middle| y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots\right)}_{0} \\
&= \mu' + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p}
\end{aligned}$$

AR(p) モデルの条件付き分散

- 条件付き分散

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Var}\left(y_t \middle| y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots\right) \\
&= \mathrm{E}\left[\left\{y_t - \mathrm{E}\left(y_t \middle| y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots\right)\right\}^2 \middle| y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots\right] \\
&= \mathrm{E}\left(\epsilon_t^2 \middle| y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots\right) \\
&= \sigma_\epsilon^2
\end{aligned}
$$