

## 【計量ファイナンスA】

### 3. GARCH モデルの推定方法と実証分析

中島 上智

(経済研究所)

## GARCH モデルの最尤推定

- ▶ 尤度とは, モデルのパラメータ  $\theta$  が与えられたときのデータ  $(y_1, \dots, y_T)$  の確率密度  $L = f(y_1, \dots, y_T | \theta)$  である.
- ▶ これを  $\theta$  の関数と見なしたものを尤度関数と呼び,  $L(\theta)$  と表す.
- ▶ 尤度関数  $L(\theta)$  を最大化する  $\theta$  の値を推定値とする方法を最尤推定法 (または最尤法) と呼ぶ.
- ▶  $(y_1, \dots, y_T)$  が互いに独立であれば尤度は

$$f(y_1, \dots, y_T | \theta) = f(y_1 | \theta) \cdots f(y_T | \theta)$$

として計算できる.

## GARCH モデルの最尤推定

- ▶ 時系列モデルでは  $(y_1, \dots, y_T)$  は互いに独立ではないことが多く,

$$f(y_1, \dots, y_T | \theta) = f(y_1 | \theta) f(y_2 | y_1, \theta) \cdots f(y_T | y_{T-1}, \dots, y_1, \theta)$$

として尤度を計算することが多い.

# GARCH モデルの最尤推定

- ▶ GARCH(1, 1) モデルの最尤推定について考える.

$$R_t = a + bR_{t-1} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t = \sigma_t Z_t,$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\epsilon_{t-1}^2,$$

$$\omega > 0, \quad \beta, \alpha \geq 0$$

- ▶ リターン式のパラメータ  $(a, b)$  と GARCH(1, 1) モデルのパラメータ  $(\omega, \alpha, \beta)$  は, 厳密には, 同時推定することが望ましいが, ここでは, 簡便な 2 段階推定法を用いる.

## GARCH モデルの最尤推定

- ▶ 2段階推定法では、まず、1段階目として、

$$R_t = a + bR_{t-1} + \epsilon_t$$

を最小2乗法で推定し、残差  $(\hat{\epsilon}_1, \dots, \hat{\epsilon}_T)$  を計算する.

- ▶ 次に、2段階目として、この残差  $(\hat{\epsilon}_1, \dots, \hat{\epsilon}_T)$  を誤差  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_T)$  であると考え、それをデータとして GARCH(1, 1) モデルのパラメータ  $(\omega, \alpha, \beta)$  を最尤推定する.
- ▶ この場合、GARCH モデルの尤度は

$$L = f(\epsilon_1, \dots, \epsilon_T | \omega, \alpha, \beta)$$

である.

# GARCH モデルの最尤推定

- ▶ 条件に  $(\sigma_0^2, \epsilon_0^2)$  を加えて

$$L \approx f(\epsilon_1, \dots, \epsilon_T | \sigma_0^2, \epsilon_0^2, \omega, \alpha, \beta)$$

とする.

- ▶ このとき,  $(\sigma_0^2, \epsilon_0^2)$  は, 通常, 残差  $(\hat{\epsilon}_1, \dots, \hat{\epsilon}_T)$  の標本分散, もしくはそれらの無条件の期待値 (定常値)  $\omega/(1 - \alpha - \beta)$  に等しいとする.
- ▶  $(\sigma_0^2, \epsilon_0^2, \omega, \beta, \alpha)$  が与えられると,

$$\sigma_1^2 = \omega + \beta\sigma_0^2 + \alpha\epsilon_0^2$$

から,  $\sigma_1^2$  を計算できる. これは,  $f(\epsilon_1 | \sigma_0^2, \epsilon_0^2, \omega, \alpha, \beta)$  の分散である.

## GARCH モデルの最尤推定

- ▶ 最尤推定では誤差項  $z_t$  の分布を仮定する必要があるが、多くの場合、標準正規分布を仮定するので、ここでも以下、標準正規分布を仮定する。
- ▶  $\epsilon_1$  の平均は 0 なので、 $f(\epsilon_1|\sigma_0^2, \epsilon_0^2, \omega, \alpha, \beta)$  は、以下のように、平均 0、分散  $\sigma_1^2$  の正規分布の確率密度として計算できる。

$$f(\epsilon_1|\sigma_0^2, \epsilon_0^2, \omega, \alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left(-\frac{\epsilon_1^2}{2\sigma_1^2}\right)$$

## GARCH モデルの最尤推定

- ▶ さらに  $\epsilon_1$  の値が与えられると,

$$\sigma_2^2 = \omega + \beta\sigma_1^2 + \alpha\epsilon_1^2$$

により  $\sigma_2^2$  が計算できる. これは,  $f(\epsilon_2|\epsilon_1, \sigma_0^2, \epsilon_0^2, \omega, \alpha, \beta)$  の分散である.

- ▶  $\epsilon_2$  の平均はゼロなので,  $f(\epsilon_2|\epsilon_1, \sigma_0^2, \epsilon_0^2, \omega, \alpha, \beta)$  は, 以下の  
ように, 平均 0, 分散  $\sigma_2^2$  の正規分布の確率密度として計算できる.

$$f(\epsilon_2|\epsilon_1, \sigma_0^2, \epsilon_0^2, \omega, \alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp\left(-\frac{\epsilon_2^2}{2\sigma_2^2}\right)$$



## GARCH モデルの最尤推定

- ▶ これを繰り返していくと、尤度

$$L = f(\epsilon_1 | \sigma_0^2, \epsilon_0^2, \omega, \alpha, \beta) f(\epsilon_2 | \epsilon_1, \sigma_0^2, \epsilon_0^2, \omega, \alpha, \beta) \cdots \\ f(\epsilon_T | \epsilon_{T-1}, \dots, \epsilon_1, \sigma_0^2, \epsilon_0^2, \omega, \alpha, \beta)$$

の全ての部分の確率密度が計算できる。ただし、

$$f(\epsilon_t | \epsilon_{t-1}, \dots, \epsilon_1, \sigma_0^2, \epsilon_0^2, \omega, \alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{\epsilon_t^2}{2\sigma_t^2}\right)$$

## GARCH モデルの最尤推定

- ▶ 以上の方法で計算される尤度を最大化するパラメータの値を求める.
- ▶ 実際に尤度の最大化を行うときには, 対数尤度

$$\begin{aligned}\log L = & \log f(\epsilon_1 | \sigma_0^2, \epsilon_0^2, \omega, \alpha, \beta) + \log f(\epsilon_2 | \epsilon_1, \sigma_0^2, \epsilon_0^2, \omega, \alpha, \beta) \\ & + \cdots + \log f(\epsilon_T | \epsilon_{T-1}, \dots, \epsilon_1, \sigma_0^2, \epsilon_0^2, \omega, \alpha, \beta)\end{aligned}$$

を用いる. ただし,

$$\begin{aligned}\log f(\epsilon_t | \epsilon_{t-1}, \dots, \epsilon_1, \sigma_0^2, \epsilon_0^2, \omega, \alpha, \beta) \\ = -\frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(\sigma_t^2) - \frac{\epsilon_t^2}{2\sigma_t^2}\end{aligned}$$

# GARCH モデルの最尤推定

## 最尤推定量の標準誤差

- ▶  $T \rightarrow \infty$  とすると,

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_T^{\text{ML}} - \theta) \sim N(0, A^{-1})$$

- ▶ ただし,

$$A = -\frac{1}{T} E \left( \frac{\partial^2 \log L(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right) \approx -\frac{1}{T} \frac{\partial^2 \log L(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \bigg|_{\theta = \hat{\theta}_T^{\text{ML}}}$$

- ▶ したがって,  $\hat{\theta}_T^{\text{ML}}$  の分散は,

$$\frac{1}{T} A^{-1} \approx - \left( \frac{\partial^2 \log L(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \bigg|_{\theta = \hat{\theta}_T^{\text{ML}}} \right)^{-1}$$

- ▶ AIC と SBIC は以下のように定義される.

$$\text{AIC} = -2 \log L + 2k$$

$$\text{SBIC} = -2 \log L + k \log(T)$$

ただし,  $k$  = 推定するパラメータの数.

## 資産価格収益率の計算

- ▶  $P_t$  を  $t$  期の資産価格とすると、収益率（リターン）は、

$$y_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \times 100$$

で計算される。または、

$$y_t = (\log P_t - \log P_{t-1}) \times 100$$

と計算される。