【計量ファイナンスA】

13. マクロ計量モデル (時変パラメータモデル) への拡張

中島 上智

(経済研究所)

VAR モデル

- k 個のマクロ経済変数を $\boldsymbol{y}_t = y_{1:k,t}$ とする.
- 通常のベクトル自己回帰 (VAR) モデルの構造形は, 次式で表される.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{d} + \boldsymbol{F}_1\boldsymbol{y}_{t-1} + \boldsymbol{F}_p\boldsymbol{y}_{t-p} + \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{e}_t, \quad \boldsymbol{e}_t \sim N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})$$

ただし, $\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{diag}(\sigma_{1:k,t})$

VAR モデル

- これを誘導形にすると,

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{y}_{t-1} + \boldsymbol{B}_p \boldsymbol{y}_{t-p} + \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{e}_t, \quad \boldsymbol{e}_t \sim N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})$$

  ただし, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{B}_i = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{F}_i$.

- Sims (1980)

VAR モデル

- 識別のため, $\boldsymbol{A}$ に制約をおく. ここでは, リカーシブ制約である下三角行列とする.

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ a_{k1} & \cdots & a_{k,k-1} & 1 \end{pmatrix}
$$

- VAR モデルの推定は最小二乗法で行うことができる.

TVP-VAR モデル

- $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_p)$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{\Sigma}$ の各要素が時間を通じて変化すると仮定したモデルを, 時変パラメータ (TVP-)VAR モデルと呼ぶ.

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{c}_t + \boldsymbol{B}_{1t}\boldsymbol{y}_{t-1} + \boldsymbol{B}_{pt}\boldsymbol{y}_{t-p} + \boldsymbol{A}_t^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_t\boldsymbol{e}_t, \quad \boldsymbol{e}_t \sim N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})$$

- $\boldsymbol{\beta}_t$, $\boldsymbol{a}_t$ を $(\boldsymbol{c}_t, \boldsymbol{B}_{1t}, \ldots, \boldsymbol{B}_{pt})$, $\boldsymbol{A}_t$ の各要素を並べたベクトルとする.
- $h_{it} = \log \sigma_{it}^2$ とおき, $\boldsymbol{h} = h_{1:k,t}$ とする.

TVP-VAR モデル

- 通常, $\boldsymbol{\beta}_t$, $\boldsymbol{a}_t$, $\boldsymbol{h}_t$ は, それぞれランダム・ウォークにしたがうと仮定される.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_{t+1} &= \boldsymbol{\beta}_t + \boldsymbol{u}_{\beta t} \\
\boldsymbol{a}_{t+1} &= \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{u}_{at} \\
\boldsymbol{h}_{t+1} &= \boldsymbol{h}_t + \boldsymbol{u}_{ht}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_t \\ \boldsymbol{u}_{\beta t} \\ \boldsymbol{u}_{at} \\ \boldsymbol{u}_{ht} \end{pmatrix} \sim N\left(\mathbf{0}, \begin{pmatrix} I & O & O & O \\ O & \boldsymbol{\Sigma}_\beta & O & O \\ O & O & \boldsymbol{\Sigma}_a & O \\ O & O & O & \boldsymbol{\Sigma}_h \end{pmatrix} \right)
$$

TVP-VAR モデル

- Cogley and Sargent (2001) は, B のみを時変にするモデルを提案.
- Sims (2001) は, ショックの分散 (σ_i^2) も時変にしないと, B_t の推計値にバイアスが生じる可能性があると指摘.
- Cogley and Sargent (2005) は, B と $\boldsymbol{\Sigma}$ を時変にするモデルを提案.
- Primiceri (2005) は, 加えて A も時変にするモデルを提案.

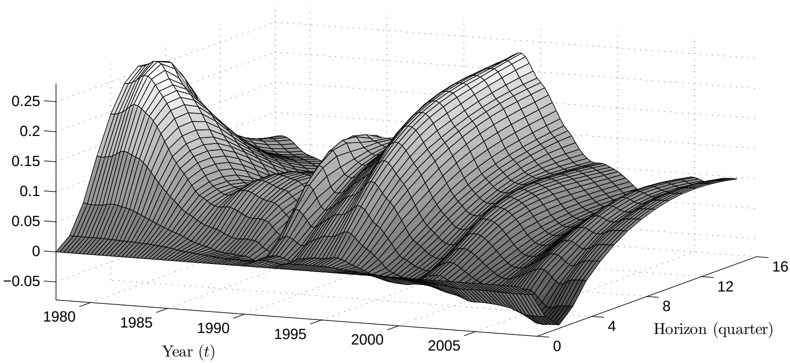
TVP-VAR モデルのベイズ推定

$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_{1:T}$, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_{1:T}$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{1:T}$, $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}_{1:T}$ $\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\Sigma}_\beta, \boldsymbol{\Sigma}_a, \boldsymbol{\Sigma}_h)$ と定義する. MCMC アルゴリズムは以下のとおりとなる.

1. $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{\omega})$ の初期値を設定する.
2. 次のサンプリングを順に繰り返す.
   - 2.1 $\boldsymbol{\beta}$ を Simulation smoother で発生させる.
   - 2.2 $\boldsymbol{a}$ を Simulation smoother で発生させる.
   - 2.3 $\boldsymbol{h}$ を Stochastic volatility の方法で発生させる.
   - 2.4 $\boldsymbol{\omega}$ を $\pi(\boldsymbol{\omega}|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{h})$ から発生させる.

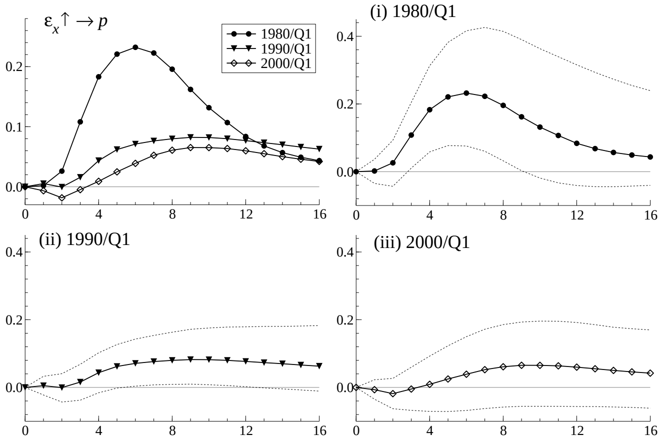
TVP-VAR モデルの実証分析例

- 日本の GDP ショックに対するインフレ率のインパルス応答関数



TVP-VAR モデルの実証分析例

- 日本の GDP ショックに対するインフレ率のインパルス応答関数



参考文献

- Cogley, T., and T. J. Sargent (2001) Evolving post-world war II US inflation dynamics, *NBER Macroeconomics Annual*, 16, 331-373.
- Cogley, T., and T. J. Sargent (2005) Drifts and volatilities: Monetary policies and outcomes in the post WWII US, *Review of Economic Dynamics*, 8(2), 262-302.
- Primiceri, G. E. (2005) Time varying structural vector autoregressions and monetary policy, *Review of Economic Studies*, 72(3), 821-852.

参考文献

- Sims, C. A. (1980) Macroeconomics and reality. *Econometrica*, 48(1), 1-48.
- Sims, C. A. (2001) Evolving post-world war II US inflation dynamics: Comment, *NBER Macroeconomics Annual*, 16, 373-379.