

【計量ファイナンスA】

1. 時系列分析の基礎

中島 上智

(経済研究所)

時系列分析の基礎

- ▶ 定常性
- ▶ AR, MA, ARMA モデル

弱定常性

- ▶ y_t が以下の条件をすべて満たすとき, 弱定常 (weakly stationary, covariance stationary) であるという.

1. $E(y_t) = \mu < \infty$

2. $\text{Var}(y_t) = \sigma^2 < \infty$

3. $\text{Cov}(y_t, y_s) = f(|t - s|) < \infty$

ホワイト・ノイズ

- ▶ ϵ_t が以下の条件をすべて満たすとき, ホワイト・ノイズであるという.

1. $E(\epsilon_t) = 0$
2. $\text{Var}(\epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2 < \infty$
3. $\text{Cov}(\epsilon_t, \epsilon_s) = 0$ for all $t \neq s$.

時系列モデル

▶ AR(p) モデル

$$y_t = \mu' + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t$$

▶ MA(q) モデル

$$y_t = \mu + \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \epsilon_{t-q}$$

▶ ARMA(p, q) モデル

$$y_t = \mu' + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + y_{t-p} + \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \epsilon_{t-q}$$

ラグ多項式による表現

ラグ・オペレーター

▶ $Ly_t = y_{t-1}$

▶ $L^k y_t = y_{t-k}$

ラグ多項式による表現

AR(p) モデル

$$y_t = \mu' + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t$$

$$y_t - \phi_1 y_{t-1} - \cdots - \phi_p y_{t-p} = \mu' + \epsilon_t$$

$$y_t - \phi_1 L y_t - \cdots - \phi_p L^p y_t = \mu' + \epsilon_t$$

$$\underbrace{(1 - \phi_1 L - \cdots - \phi_p L^p)}_{\Phi_p(L)} y_t = \mu' + \epsilon_t$$

$$\Phi_p(L) y_t = \mu' + \epsilon_t$$

ラグ多項式による表現

MA(q) モデル

$$\begin{aligned}y_t &= \mu + \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \epsilon_{t-q} \\&= \mu + \epsilon_t - \theta_1 L \epsilon_t - \cdots - \theta_q L^q \epsilon_t \\&= \mu + \underbrace{(1 - \theta_1 L - \cdots - \theta_q L^q)}_{\Theta_q(L)} \epsilon_t\end{aligned}$$

$$y_t = \mu + \Theta_q(L) \epsilon_t$$

ラグ多項式による表現

ARMA(p, q) モデル

$$y_t = \mu' + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \epsilon_{t-q}$$

$$y_t - \phi_1 y_{t-1} - \cdots - \phi_p y_{t-p} = \mu' + \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \epsilon_{t-q}$$

$$y_t - \phi_1 L y_t - \cdots - \phi_p L^p y_t = \mu' + \epsilon_t - \theta_1 L \epsilon_t - \cdots - \theta_q L^q \epsilon_t$$

$$\underbrace{(1 - \phi_1 L - \cdots - \phi_p L^p)}_{\Phi_p(L)} y_t = \mu' + \underbrace{(1 - \theta_1 L - \cdots - \theta_q L^q)}_{\Theta_q(L)} \epsilon_t$$

$$\Phi_p(L) y_t = \mu' + \Theta_q(L) \epsilon_t$$

AR(p) モデルの定常性

AR(p) モデル

$$y_t = \mu' + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t$$
$$\underbrace{(1 - \phi_1 L - \cdots - \phi_p L^p)}_{\Phi_p(L)} y_t = \mu' + \epsilon_t$$

- ▶ $\Phi_p(x) = 1 - \phi_1 x - \cdots - \phi_p x^p = 0$ を特性方程式 (characteristic equation) と呼ぶ.
- ▶ 特性方程式のすべての根の絶対値が 1 を上回れば定常性を満たす.
- ▶ 定常性を満たせば, AR(p) モデルは MA(∞) モデルで表せる.

AR(1) モデルの定常性

▶ AR(1) モデル

$$y_t = \mu' + \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

の特性方程式は

$$\Phi_1(x) = 1 - \phi x = 0$$

- ▶ この根は $x = 1/\phi$ なので, AR(1) モデルの定常性の条件は, $|\phi| < 1$.

AR(1) モデルの定常性

▶ AR(1) モデル

$$y_t = \mu' + \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

の y_{t-1} に

$$y_{t-1} = \mu' + \phi y_{t-2} + \epsilon_{t-1}$$

を代入すると,

$$y_t = \mu'(1 + \phi) + \phi^2 y_{t-2} + \epsilon_t + \phi \epsilon_{t-1}$$

▶ 同様の操作を k 回繰り返すと,

$$y_t = \mu'(1 + \phi + \cdots + \phi^k) + \phi^{k+1} y_{t-k-1} + \epsilon_t + \phi \epsilon_{t-1} + \cdots + \phi^k \epsilon_{t-k}$$

AR(1) モデルの定常性

- ▶ $|\phi| < 1$ であれば, $k \rightarrow \infty$ とすると, 以下のような $MA(\infty)$ モデルになる.

$$y_t = \frac{\mu'}{1 - \phi} + \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k \epsilon_{t-k}$$

AR(1) モデルの定常性

ラグ・オペレーターによる展開

$$y_t = \mu' + \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

$$(1 - \phi L)y_t = \mu' + \epsilon_t$$

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{\mu'}{1 - \phi L} + \frac{\epsilon_t}{1 - \phi L} \\ &= (1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \cdots) \mu' + (1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \cdots) \epsilon_t \\ &= (1 + \phi + \phi^2 + \cdots) \mu' + \epsilon_t + \phi \epsilon_{t-1} + \phi^2 \epsilon_{t-2} + \cdots \\ &= \frac{\mu'}{1 - \phi} + \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k \epsilon_{t-k} \end{aligned}$$

AR(1) モデルの無条件期待値

- ▶ 定常性の条件 $|\phi| < 1$ を満たせば, AR(1) モデル

$$y_t = \mu' + \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

は, 以下の MA(∞) モデルで表せる.

$$y_t = \frac{\mu'}{1 - \phi} + \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k \epsilon_{t-k}$$

- ▶ したがって, 無条件期待値は,

$$\begin{aligned} E(y_t) &= E\left(\frac{\mu'}{1 - \phi} + \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k \epsilon_{t-k}\right) \\ &= \frac{\mu'}{1 - \phi} + \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k E(\epsilon_{t-k}) = \frac{\mu'}{1 - \phi} \end{aligned}$$

AR(1) モデルの無条件期待値

- ▶ AR(1) モデル

$$y_t = \mu' + \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

の両辺の無条件期待値をとると,

$$E(y_t) = \mu' + \phi E(y_{t-1})$$

- ▶ 定常性が満たされるなら, $E(y_t) = E(y_{t-1})$ なので,

$$E(y_t) = \mu' + \phi E(y_t)$$

- ▶ したがって,

$$E(y_t) = \frac{\mu'}{1 - \phi}$$

AR(1) モデルの無条件期待値

- ▶ AR(1) モデルを,

$$y_t = \mu + \phi(y_{t-1} - \mu) + \epsilon_t$$

と表すことがある.

- ▶ これは

$$y_t = \mu(1 - \phi) + \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

となるので,

$$y_t = \mu' + \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

と比べると,

$$\mu = \frac{\mu'}{1 - \phi}$$

- ▶ したがって, $\mu = E(y_t)$.

AR(1) モデルの無条件分散

▶ AR(1) モデル

$$y_t = \mu' + \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

は, $|\phi| < 1$ であれば,

$$y_t = \frac{\mu'}{1 - \phi} + \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k \epsilon_{t-k}$$

▶ したがって, 無条件分散は,

$$\begin{aligned} \text{Var}(y_t) &= \text{Var} \left(\frac{\mu'}{1 - \phi} + \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k \epsilon_{t-k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \phi^{2k} \text{Var}(\epsilon_{t-k}) = \frac{\sigma_{\epsilon}^2}{1 - \phi^2} \end{aligned}$$

AR(1) モデルの無条件分散

- ▶ AR(1) モデル

$$y_t = \mu' + \phi y_{t-1} + \epsilon_t$$

の両辺の無条件分散をとると,

$$\text{Var}(y_t) = \phi^2 \text{Var}(y_{t-1}) + \sigma_\epsilon^2$$

- ▶ 定常性が満たされるなら, $\text{Var}(y_t) = \text{Var}(y_{t-1})$ なので,

$$\text{Var}(y_t) = \phi^2 \text{Var}(y_t) + \sigma_\epsilon^2$$

- ▶ したがって,

$$\text{Var}(y_t) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - \phi^2}$$