π에 관하여

임대영
고려대학교 통계학과

March 24, 2016

1 도입부: 수학과 철학

단언컨대 대부분의 사람들은 수학이 절대적인 진리의 영역이라 생각할 것이다. 이 믿음은 시간을 거슬러 올라가 고대 피타고라스에서도 찾아볼 수 있다. 세상 삼라만상의 진리는 숫자로부터 나오며 수를 아는 것이 곧 진리를 아는 것이라 믿는 사람들. 만물의 근원, 즉 '아르케(arche)'를 찾으려는 노력은 그 대상이 바뀌어, 인간세계의 아르케, 즉 자아와 규범을 찾기에 이른다. 근대에 이르러서는 수학의 깊이가 더욱 깊어져 많은 것을 표현하는 하나의 체계가 구축된다. 하지만 여전히 의문은 남아있다. 인간은 진정한 '앎'에 도달할 수 있는가.

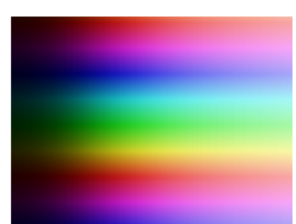
이 물음에 답하려 했던 사람 중 르네 데카르트가 있다. 근대 철학의 본질이 된 "나는 생각한다. 고로 존재한다."라는 선언은 아이러니하게도 근대 철학의 딜레마를 상징하게 되었다. 생각하는 내가 존재하는 것은 자명하지만 나를 제외한 나머지, 타자를 인식하는 것은 불가능한 세상이 되었다. 진리를 탐구하는 과학의 영역에서 확실한 게 없어지다니, 참담한 현실이다. 데카르트의 방법론처럼 이제는 진리에 가까이 가기 위해 끝없이 의심하고 철저한 불신으로 일관해야 했다. 그리고 마침내 프랑스의 철학자 미셸 푸코가 제시한 대로 '반박가능성(falsifiability)'가 없는 것은 과학적 탐구의 대상이 아닌 것이 되었다. 불확실성이 없는 것은 진리가 될 수 없다는 매우 역설적인 선언이었다.

이러한 세계에 우리는 살고 있다. 여기서 수학은 매우 중요한 도구가 된다. 흔히 과학을 하는 사람들은 '모델링'을 한다고 한다. 수학은 현실 세계를 매우 잘 '모델링'한 체계성을 갖춘 도구이다. 그 말은 수학이 현실이 아니라는 말이다. 수학은 사람들이 부여한 규칙 속에서 쌓아올려진 한 가지 시스템일 뿐이다. 그 규칙을 바꾸면 전체적인 시스템도 바뀌게 된다 — 척도이론(Measure Theory)에서 수학의 이러한 특징이 여실히 드러난다—. π도 역시 수학의 테두리 안에 있는 하나의 창조물이다. 우리가 흔히 말하는 '원주율'은 가상의 개념일 뿐이다. 그 어떤 물리적으로 존재하는 원과 물리적으로 존재하는 지름의 비도 정확히 π와 일치하지 않는다. 모든 물리적 측정에는 오차가 존재하기 마련이기 때문이다. 피타고라스는 인간이 만들어낸 도구를 신으로 추대했다. 그리고 그 믿음의 잔재가 여전히 이 사회 속 사람들에게 남아있다. 위와 같은 철학적 흐름과 근대사회에서 과학이 차지하는 위치가 어떤지, 그리고 그속에서 수학은 어떤 역할을 하는 것인지 이해하지 않으면 수학에 대한 절대적 믿음이 생기게 된다. 그 이해 속에서 π라는 숫자를 파헤쳐 보도록 하자.

2 π의 정의

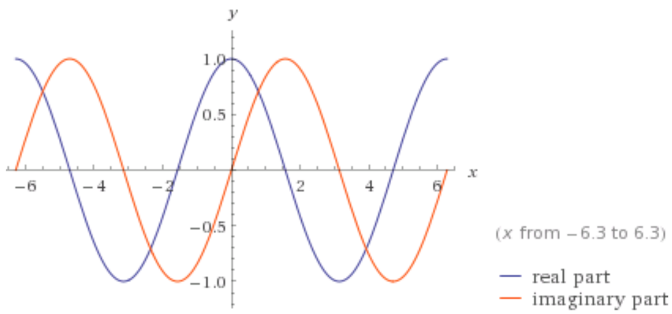
2.1 지금까지의 파이는 잘못됐다!

한국에서 고등 교육을 받은 사람이라면 π를 모르는 사람은 없을 것이다. 하지만 매일 π를 써서 계산을 해 내는 물리학자나 수학자도 π에 대해 설명하라고 하면 단박에 그 정수를 찔러 설명하지



못할 듯싶다. 그토록 이 숫자에는 아주 중요한 성질이 있고 그것은 한 마디로 표현하기에는 너무 중요하다.

π는 원주율이다. 분명 이 숫자는 원과 관련이 있다. 그러나 이러한 정의는 '틀렸다'고 할 수 있을 정도로 그 본질을 설명하지 못한다. π는 원이나 각도 따위를 알지 못한다. 예를 들어, 통계학에서 가장 중요한 정규 분포의 밀도 함수에 등장하는 $1/\sqrt{2\pi}$에서 원의 흔적을 발견할 수 있는가? 원의 성질과 연결시키지 않아도 우리는 충분히 정규 분포의 중요성을 설명할 수 있다. 왜냐하면 π는 원에서 나온 숫자가 아니기 때문이다. π는 원과 관련짓지 않고도 그 중요성을 명료하게 설명할 수 있는 숫자이다.



그렇다면 도대체 이 간단하고도 엄청나 보이는 숫자는 어떻게 해서 등장하게 된 것일까? 답은 바로 '지수 함수'에 있다. 복소 공간에서 지수 함수의 행적을 잘 살펴보면 π의 모습이 보일 것이다. 믿기지 않는가? 위의 그림을 보자. 이 그림은 $\exp(ix)$의 모자이크 이미지이다. 색깔이 반복되는 것을 보면 지수 함수가 어떠한 주기를 가지고 있음을 알 수 있다. 더 자세하게 보려면 복소 공간에서의 지수 함수를 실수부와 허수부를 따로 표현한 왼쪽의 그래프를 보아라. 예상했듯이 주기성을 보이고 있다. 지수 함수는 수학 문제를 풂에 있어서 도처에 나타나는데, 그 보편성은 다음의 미분방정식이 가장 기본이 모든 문제에서 가장 단순하고도 근간이 되기 때문이다.

$$f' = f$$

단순하기 그지없는 이 방정식이 만물의 움직임을 나타내는 미분 방적식의 기저에 깔려 있다니! 매우 놀라운 일이다. 이 방정식을 분석하다보면 자연스럽게 π와 e를 정의할 수 있게 된다.