

π 에 관하여

임대영

고려대학교 통계학과

March 28, 2016

1 π 는 존재하지 않는다

통계를 조금 공부해보면 다음과 같은 질문이 자주 생기게 된다. ‘실제로 정규 분포를 따르는 것이 있을까?’ 통계 질문방에 가봐도 “아이비리그에 들어가는 것은 확률과정인가요?” 혹은 “학생들의 성적은 정규분포인가요?”와 같은 질문이 수도 없이 많다. 이런 질문이 올라올 때마다 나의 답변은 “이 세상에 존재하는 그 어떤 것도 확률과정이거나 정규분포를 따르는 것은 없습니다”이다. 수학을 공부하는 사람들이 가장 많이 하는 착각이 바로 이런 것이다. 수학 책에 나오는 모든 것들이 실재할 것이라는 착각. 물론 직관적으로 이해가 잘 되는 것은 있다. 자연수가 대표적이다. 이 때문에 레오폴트 크로네커(Leopold Kronecker)라는 과거 프로이센의 수학자는 다음과 같이 말하기도 했다.

“정수는 신이 만들었지만 나머지는 인간의 창작물이다.” (God made the integers, all else is the work of man.)

‘수’라는 것은 인간의 위대한 발명품이지만 실제로 존재하지는 않는다. 상당히 철학적이다. 숫자가 존재하지 않는다니! 하지만 잘 생각해보면 숫자라는 건 실재하는 것이 아니라 사람이 쓰기 좋게 만들어놓은 하나의 도구라는 것이 명료해질 것이다. 자꾸 이런 직관에 의존하려고 하다보니 어차피 다 실존하지 않는 창작물인데 유독 ‘허수’에만 허구라는 꼬리표를 달아놓는다. 하지만 허수를 포함한 복소수도 매우 직관적으로 이해할 수 있는 것들이며 그와 동시에 존재하지 않으면서도 많은 현상과 운동, 법칙을 설명할 수 있는 좋은 도구이다. 이러한 특성은 π 라고 예외일 수 없다. 매우 충격적인 사실은 물리적인 형체를 지니고 있는 이 세상의 그 어떤 원도 원주와 지름의 비율이 정확히 π 가 아니다. 모든 물리적인 측정에는 오차가 따른다. 다시 한 번 강조하지만 정확히 π 의 값을 지니는 것은 없다. 있다고 해도 우리는 무엇이 ‘정확히’ π 의 값을 지니는지 알 턱이 없다. π 는 없다.

2 π 가 원주율이 아니다

π 를 처음 배울 때 그 누구나 다 ‘원주율’이라고 배웠다. 반은 맞고 반은 틀렸다. 유클리드 기하에서는 원의 곡률이 0이고 원주와 지름의 비율이 π 라는 상수가 된다. 하지만 쌍곡 기하에서는 곡률이 음수가 되며 원이 커지면 커질수록 원주와 지름의 비율은 무한대로 증가한다. 따라서 어떤 상수로 정의될 수 없다. 타원 기하에서도 마찬가지로 곡률이 양수이며 원주와 지름의 비율이 원이 커짐에 따라 감소한다. 여기서도 상수가 아니다. 그러면 π 는 원주율이라고 정의할 때는 유클리드 기하를 전제하고 하는 말일 것이다. 무엇을 정의할 때 전제가 필요한 것과 전제가 필요없는 것이 있다면, 오클의 법칙(Occam's razor)에 따라 전제가 필요없는 것을 따라야 할 터이다. 그렇다면 이러한 정의는 어떻게 할 수 있을까?

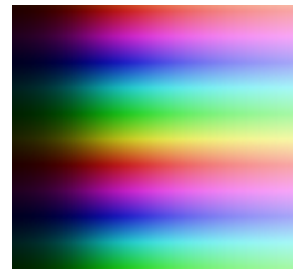


Figure 1: Mosaic image of $\exp(ix)$

오른쪽에 있는 것은 복소지수함수의 모자이크 이미지이다. 패턴이 보이는가? 그렇다면 π 의 흔적을 찾은 것이다. 조금 더 명확하게 보고 싶다면 아래의 그래프를 보자.

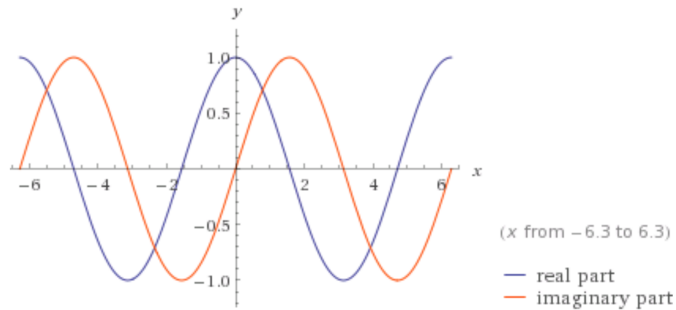


Figure 2: Graph of $\exp(ix)$

이 그래프에서 허수부가 움직이는 곡선을 잘 따라가다 보면 x축과의 교점이 3보다 약간 큰 수라는 것을 알 수 있다. 그리고 파동이 주기를 갖고 진동하고 있음을 볼 수 있다. 이 함수 하나가 π 를 정의하면서도 그 중요성을 설명해 줄 수 있다. 왜 여기서 느닷없이 π 가 등장하는 것일까?