

1. (2015 late #2) X_1, \dots, X_n 이 평균이 θ 인 지수분포에서 뽑은 임의표본이라고 하자.

- (a) 이 지수분포의 분산에 대한 최대가능도 추정량(MLE)의 점근적 분산(asymptotic variance)을 구하시오.
- (b) $n = 30$ 이고 표본평균이 26.5라고 할 때, $\Pr(X > 10)$ 의 최대가능도 추정량(MLE)을 이용하여 95% 근사 신뢰구간을 구하시오.
- (c) 이 분포로부터 20에서 중도 절단된(right-censored) 크기 5인 표본 7, 12, 15, 20, 20이 주어졌다고 할 때, θ 의 최대가능도 추정치를 구하시오.

Solution:

- (a) MLE의 점근분포는 다음과 같다.

$$\hat{\theta} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\theta, \mathcal{I}(\theta)^{-1}) \quad (1)$$

따라서 정보량을 구하면

$$\mathcal{I}(\theta) = \theta^{-2} \quad (2)$$

따라서

$$\hat{\theta} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\theta, n\theta^{-2}) \quad (3)$$

- (b) 먼저 확률을 구하자.

$$\Pr(X > 10) = \int_{10}^{\infty} \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) \quad (4)$$

$$= \exp\left(-\frac{10}{\theta}\right) \quad (5)$$

$$\Pr(\widehat{X} > 10) = \exp\left(-\frac{10}{\hat{\theta}}\right), \quad (\text{By the invariance property}) \quad (6)$$

*Delta method*를 사용하면 다음과 같다.

$$\sqrt{n} \left(g(\hat{\theta}) - g(\theta) \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left(0, \sigma^2 [g'(\theta)]^2 \right) \quad (7)$$

따라서 $g(\hat{\theta}) = \Pr(\widehat{X} > 10)$ 이므로

$$\sqrt{n} \left(g(\hat{\theta}) - g(\theta) \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left(0, n\theta^{-2} \cdot \frac{10}{\theta^2} \exp\left(-\frac{10}{\theta}\right) \right) \quad (8)$$

2. (2016 #1)