Daeyoung Lim
Grad School
Year of 2012, late

1. If X and Y are independent exponential random variables with respective means $1/\lambda_1$ and $1/\lambda_2$.

   (a) Compute the distribution of $Z = \min(X, Y)$.

   (b) What is the conditional distribution of Z given that $Z = X$?

   (c) Consider the function $\lambda_X(t)$ defined as follows:

   $$\exp\left[-\int_0^x \lambda_X(t)\, dt\right] = 1 - F_X(x), \tag{1}$$

   where $F_X(x) = \Pr(X \leq x)$. The function $\lambda_X(t)$ is called the failure rate function of X. Show that the failure rate function of X is constant for $t > 0$.

   (d) Show that

   $$\Pr(X < Y \mid Z = t) = \frac{\lambda_X(t)}{\lambda_X(t) + \lambda_Y(t)}, \tag{2}$$

   where $\lambda_X(t)$ and $\lambda_Y(t)$ are the failure rate functions of X and Y.

Solution: Rate parameter로 표기하면 $X \sim \text{Exp}(\lambda_1)$, $Y \sim \text{Exp}(\lambda_2)$이다.

(a) CDF부터 시작하면

$$\begin{aligned}
\Pr(\min(X, Y) \leq z) &= 1 - \Pr(X > z, Y > z) &(3)\\
&= 1 - \Pr(X > z)\Pr(Y > z) &(4)\\
&= 1 - \left(\int_z^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\, dx \int_z^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}\, dy\right) &(5)\\
&= 1 - \left(-1 + e^{-\lambda_1 z} - 1 + e^{-\lambda_2 z}\right) &(6)\\
&= 3 - e^{-\lambda_1 z} - e^{-\lambda_2 z} &(7)
\end{aligned}$$

2. One observation is taken on a discrete random variable Y with a probability mass function $f(y \mid \theta) = \Pr(Y = y \mid \theta)$, where $\theta \in \{-1, 0, 1\}$. Find the maximum likelihood estimate (MLE) of θ.

Y	$\Pr(Y = y \mid \theta = -1)$	$\Pr(Y = y \mid \theta = 0)$	$\Pr(Y = y \mid \theta = 1)$
1	1/3	1/4	0
2	1/3	1/4	0
3	0	1/4	1/2
4	1/6	1/4	1/2
5	1/6	0	1/4

Solution:

3. $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$이 포아송 분포 Poi$(\lambda)$로부터 추출한 랜덤 표본이라 하자. $H_0 : \lambda = \lambda_0$ vs $H_1 : \lambda = \lambda_1 (> \lambda_0)$에 대한 검정을 고려하자.

   (a) 균일최강력검정법(uniformly most powerful test)의 기각 영역을 구하시오.

   (b) (a)에서 구한 검정법의 검정력 함수(power function)를 구하시오.

   (c) 대립가설이 $H_1 : \lambda > \lambda_0$이라면 균일최강력검정법(uniformly most powerful test)이 존재하는지 보이시오.

Solution:

4. 단순선형회귀모형에 따르는 n개의 자료

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n \tag{8}$$

들을 고려하자.

   (a) 식 (1)을 행렬식

$$Y = \mathbf{X}\beta + \epsilon \tag{9}$$

   으로 표현하고자 한다. 이 경우 $Y, \mathbf{X}, \beta$ 및 ϵ을 행렬 또는 벡터로 표현하시오. (5점)

   (b) 모수 β에 대한 최소제곱추정량(least squares estimator) $\widehat{\beta}$을 행렬대수를 이용하여 정의하고, $\widehat{\beta}$이 정규방정식

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\widehat{\beta} = \mathbf{X}'Y \tag{10}$$

   을 만족함을 보이시오. (5점)

   (c) 행렬 $\mathbf{X}$가 full rank일 충분조건을 쓰고 이 경우 최소제곱추정량을 구체적으로 구하시오. (5점)

   (d) 행렬 $\mathbf{X}$가 full rank라는 가정 하에서 기울기 모수 β_1에 대한 95% 신뢰구간을 제시하되 신뢰수준이 95%가 될 조건을 나열하시오. (5점)

   (e) 위에서 제시한 신뢰구간의 신뢰수준이 95%가 됨을 증명하시오. (5점)

Solution: