

1. (25점) let X and Y be independent non-negative random variables with continuous density functions $f_X(x)$ and $f_Y(y)$ respectively on $(0, \infty)$. Show that

(a) If, given $X + Y = u$, X is uniformly distributed on $(0, u)$ whatever the value of u , then

$$f_Y(u-v)f_X(v) = \frac{1}{v} \int_0^u f_Y(u-y)f_X(y) dy.$$

(b) If X and Y be independent exponential random variables with a common parameter λ , $X, Y \sim \text{Exp}(\lambda)$, then the conditional distribution of X given $X + Y = u$ is a uniform distribution on $(0, u)$.

Solution:

2. (25점) X_1, X_2, \dots, X_n 을 $\text{Unif}(0, \theta)$ 로부터 얻은 랜덤포본이라고 하자.

(a) 모수 θ 의 최대가능도 추정량을 구하라.

(b) 위의 (a)에서 구한 모수 θ 의 최대가능도 추정량이 완비충분통계량임을 보여라.

(c) 모수 θ 에 대한 $(1 - \alpha_1 - \alpha_2) \times 100\%$ 신뢰구간을 구하라.

Solution:

3. (25점) X_1, \dots, X_n 이 다음의 확률밀도함수를 가지는 랜덤포본일 때,

$$f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 \leq x \leq 1, \theta > 0$$

다음의 가설을 검정하고자 한다.

$$H_0 : \theta = 3 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta \neq 3$$

이 가설에 대한 가능도비 검정을 θ 에 대한 최대가능도 추정량(MLE)의 함수로 표현하시오. (즉, MLE의 값에 따라 언제 귀무가설을 기각할 수 있는지 표현하시오.)

Solution:

4. (25점) 선형회귀모형 $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_p X_p + \epsilon$ 을 고려하자. 여기서, Y 는 독립변수를, X_1, \dots, X_p 는 설명변수들을, 그리고 β_0, \dots, β_p 는 회귀계수들을 의미하며 ϵ 은 평균이 0, 분산이 σ^2 인 오차항을 의미한다.

- (a) $p = 1$ 인 단순선형회귀모형에서 결정계수(coefficient of determination) R^2 는 Y 와 X_1 사이의 표본상관계수(correlation coefficient)의 제곱과 동일함을 보여라.
- (b) 결정계수는 설명변수 X_1, \dots, X_p 들의 측정단위에 의존하지 않음을 보여라.

Solution: