Daeyoung Lim

Grad School

Year of 2013, late

1. (25점) Let X and Y be independent non-negative random variables with continuous density functions $f_X(x)$ and $f_Y(y)$ respectively on $(0,\infty)$. Show that

   (a) If, given $X+Y=u$, X is uniformly distributed on $(0,u)$ whatever the value of u, then

   $$f_Y(u-v)\,f_X(v) = \frac{1}{u}\int_0^u f_Y(u-y)\,f_X(y)\,dy.$$

   (b) If X and Y be independent exponential random variables with a common parameter λ, $X,Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, then the conditional distribution of X given $X+Y=u$ is a uniform distribution on $(0,u)$.

Solution:

(a) 처음 보고 풀기 조금 어려운 문제인 듯하다. 좌변을 먼저 보면, $X+Y=U$와 $X=V$의 결합분포를 구한 것이다. 즉,

$$\begin{cases} U = X+Y \\ V = X \end{cases} \implies \begin{cases} X = V \\ Y = U-V \end{cases} \tag{1}$$

$$|J| = 1 \tag{2}$$

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(v,u-v)\cdot 1 \tag{3}$$

$$= f_Y(u-v)\,f_X(v) \tag{4}$$

그리고 우변은 U,V의 분포를

$$f_{V|U}(v\,|\,u)\,f_U(u) \tag{5}$$

의 꼴로 구한 것이다. 문제에서 $V\,|\,U \sim \mathrm{Unif}(0,u)$라고 했고

$$f_U(u) = \int_0^u f_{U,V}(u,v)\,dv \tag{6}$$

$$= \int_0^u f_Y(u-v)\,f_X(v)\,dv \tag{7}$$

이므로

$$f_{V|U}(v|u)\,f_U(u) = \frac{1}{u}\int_0^u f_Y(u-v)\,f_X(v)\,dv \tag{8}$$

이다. 둘 모두 U,V의 결합분포이므로 문제에서 주어진 등식이 성립한다.

(b) (a)에서 한 것을 바탕으로 계산하면

$$f_{U,V}(u,v) = f_Y(u-v)\, f_X(v) \tag{9}$$
$$= \lambda e^{-\lambda(u-v)} \cdot \lambda e^{-\lambda v} \tag{10}$$
$$= \lambda^2 e^{-\lambda u} \tag{11}$$

따라서 $V\,|\,U$는 U, V의 결합분포에서 U의 주변분포를 나눠야 하므로

$$f_{V|U}(v|u) = f_{U,V}(u,v) \Big/ \int_0^u f_{U,V}(u,v)\, dv \tag{12}$$
$$= \frac{1}{u} \tag{13}$$

그러므로 $V\,|\,U \sim \text{Unif}(0,u)$이다.

2. (25점) $X_1, X_2, \ldots, X_n$을 $\text{Unif}(0,\theta)$로부터 얻은 랜덤표본이라고 하자.
   (a) 모수 θ의 최대가능도 추정량을 구하라.
   (b) 위의 (a)에서 구한 모수 θ의 최대가능도 추정량이 완비충분통계량임을 보여라.
   (c) 모수 θ에 대한 $(1-\alpha_1-\alpha_2)\times 100\%$ 신뢰구간을 구하라.

Solution:

(a) 이런 거 물어보지 마.

$$\widehat{\theta} = \max_{1\le i\le n} X_i \quad \left(= X_{(n)}\right) \tag{14}$$

(b)

3. (25점) $X_1, \ldots, X_n$이 다음의 확률밀도함수를 가지는 랜덤표본일 때,

$$f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 \le x \le 1,\, \theta > 0$$

다음의 가설을 검정하고자 한다.

$$H_0 : \theta = 3 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta \ne 3$$

이 가설에 대한 가능도비 검정을 θ에 대한 최대가능도 추정량(MLE)의 함수로 표현하시오. (즉, MLE의 값에 따라 언제 귀무가설을 기각할 수 있는지 표현하시오.)

Solution:

4. (25점) 선형회귀모형 $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_p X_p + \epsilon$을 고려하자. 여기서, Y는 독립변수를, $X_1, \ldots, X_p$는 설명변수들을, 그리고 $\beta_0, \ldots, \beta_p$는 회귀계수들을 의미하며 ϵ은 평균이 0, 분산이 σ^2인 오차항을 의미한다.

   (a) $p = 1$인 단순선형회귀모형에서 결정계수(coefficient of determination) R^2는 Y와 X_1 사이의 표본상관계수(correlation coefficient)의 제곱과 동일함을 보여라.

   (b) 결정계수는 설명변수 $X_1, \ldots, X_p$들의 측정단위에 의존하지 않음을 보여라.

Solution: