1. 一系统的开环传递函数 $G(s)H(s)=\dfrac{\frac{1}{4}(s+a)}{s^2(s+1)}$

(1) 试绘制以a为参变量的系统根轨迹。

(2) 求使系统产生重根和纯虚根的a值。

(1). 令 $1+G(s)H(s)=0$, $1+\dfrac{\frac{1}{4}(s+a)}{s^2(s+1)}=0$

$$4s^3+4s^2+s+a=0$$

$$1+\frac{a}{4s^3+4s^2+s}=0$$

令 $G'(s)H'(s)=\dfrac{a}{4s^3+4s^2+s}=\dfrac{a}{4s(s+\frac{1}{2})^2}$

根轨迹起始于极点 $p_1=0$, $p_2=p_3=-\frac{1}{2}$处, 终止于无穷远处

实轴上 $(-\infty,0]$ 之间为根轨迹

渐近线与实轴的交点 $\sigma=\dfrac{-1}{3}=-0.33$, $\varphi=\pm\dfrac{(2k+1)180^\circ}{3}=\pm60^\circ$

$a=-4s^3-4s^2-s$, $\dfrac{da}{ds}=-12s^2-8s-1=0$时, 得分离点

$s_1=-\frac{1}{6}$, $s_2=-\frac{1}{2}$

劳斯表为

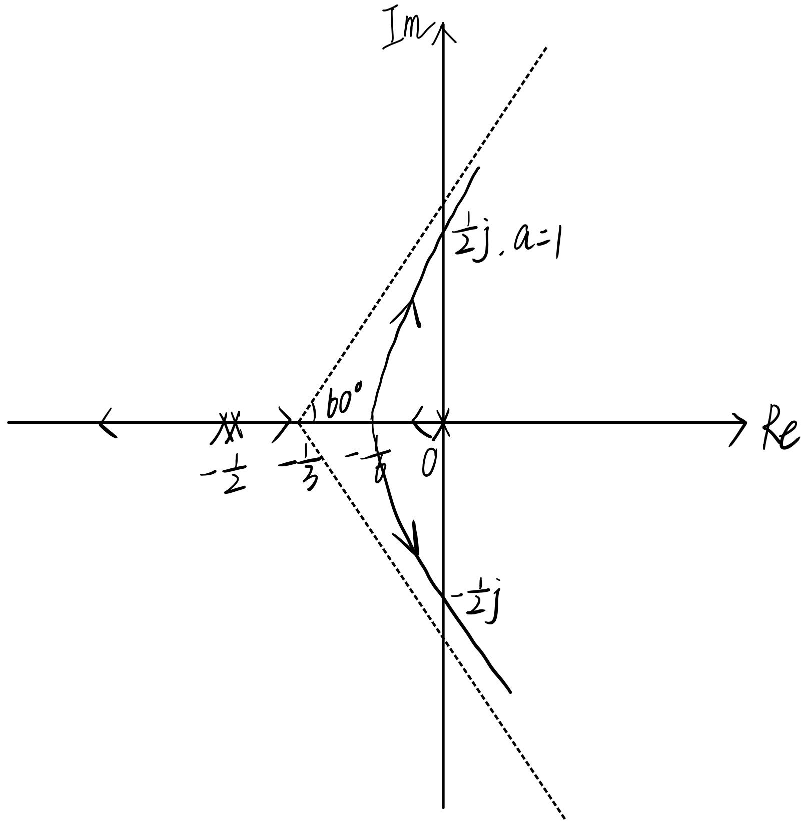
s^3	4	1
s^2	4	a
s	$1-a$	
s^0	a	

令 $1-a=0$, $a=1$

辅助方程 $4s^2+1=0$

$s_{1,2}=\pm\frac{1}{2}j$

根轨迹如图



(2)、$s_{1,2}=-\frac{1}{2}$时，$a=0$，$s_{1,2}=-\frac{1}{6}$时，$a=0.074$，系统产生重根

$a=1$时，系统产生纯虚根

2. 已知一系统的前向传递函数为 $G(s)=\dfrac{K_r}{s(s^2+s+1)}$ 当反馈通道的传递函数分别如下所示时，绘制其相应的根轨迹（K_r从$0\to\infty$）并分析开环零点位置对系统稳定性的影响。

(1) H(s)=1; (2) H(s)=s+1; (3) H(s)=s+2。

(1)、$G(s)H(s)=\dfrac{k_r}{s(s^2+s+1)}=\dfrac{k_r}{s(s+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j)(s+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j)}$

根轨迹起始于极点 $p_1=0$，$p_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j$，$p_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j$，终止于无穷远处，实轴上 $(-\infty,0]$ 之间为根轨迹

渐近线与实轴的交点 $\sigma=-\frac{1}{3}$，$\varphi=\pm\frac{(2k+1)180^\circ}{3}=\pm60^\circ$

系统特征方程为 $s^3+s^2+s+K_r=0$

劳斯表：

s^3	1	1
s^2	1	K_r
s	$1-K_r$	
s^0	K_r	

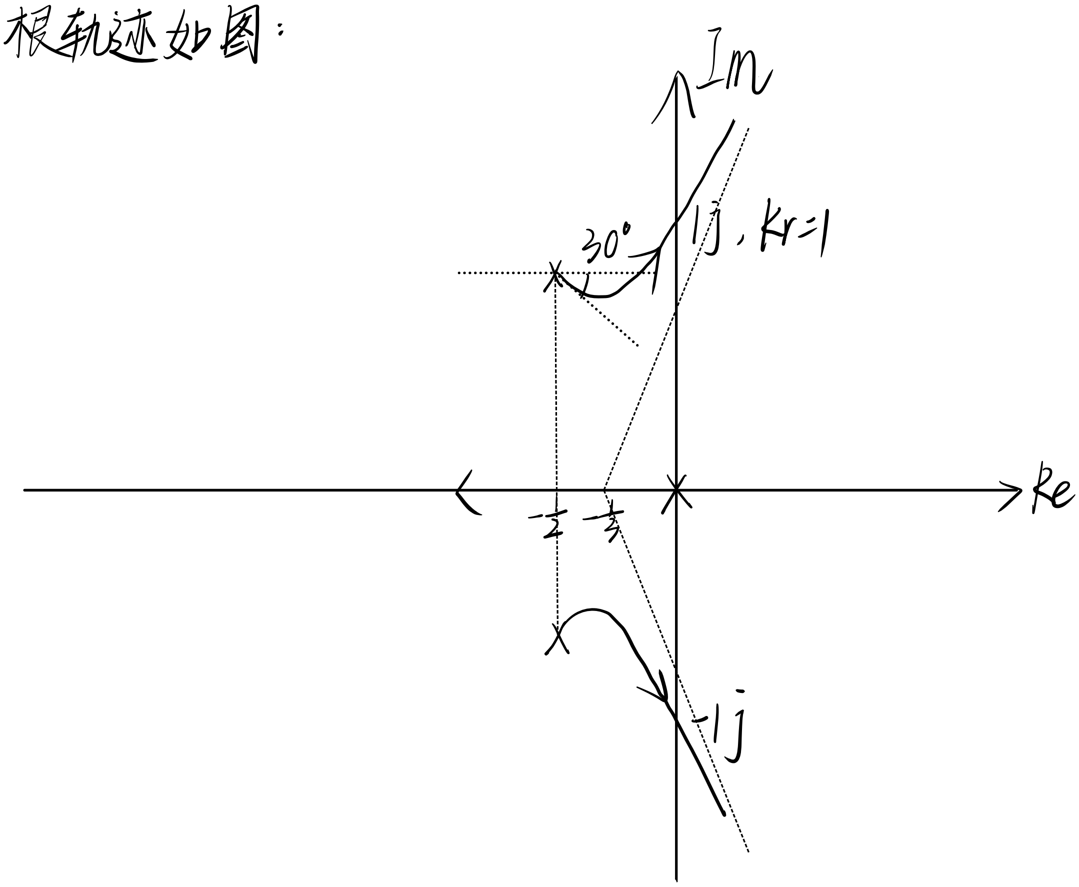
令 $1-K_r=0$，$K_r=1$

辅助方程 $s^2+1=0$

$s_{1,2}=\pm 1j$

出射角 $\theta_2=\pm 180^\circ(2k+1)-(90^\circ+120^\circ)=-30^\circ$

根轨迹如图：



(2)、$G(s)H(s)=\dfrac{K_r(s+1)}{s(s^2+s+1)}=\dfrac{K_r(s+1)}{s(s+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j)(s+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j)}$

根轨迹起始于极点$p_1=0$，$p_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j$，$p_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j$，终止于零点$z_1=-1$，实轴上$[-1,0]$之间为根轨迹

渐近线与实轴的交点$\sigma=0$，$\varphi=\pm\frac{(2k+1)180}{2}=\pm 90°$

系统特征方程为$s^3+s^2+(K_r+1)s+K_r=0$

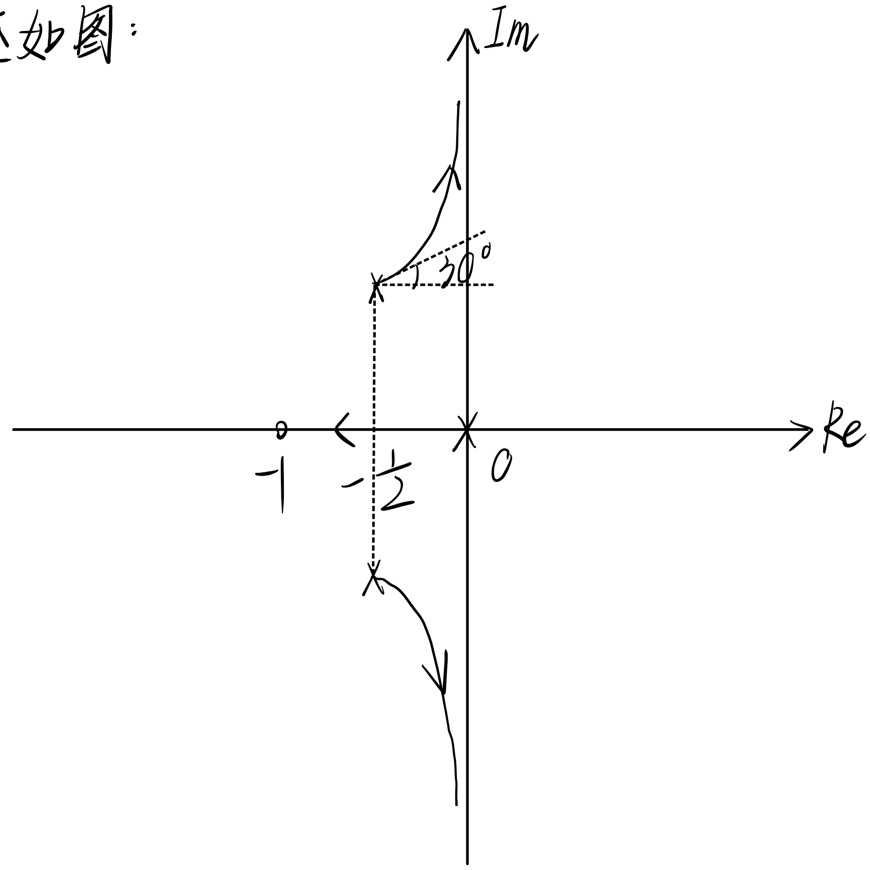
劳斯表：

s^3	1	K_r+1
s^2	1	K_r
s	1	
s^0	K_r	

$K_r>0$时，根轨迹与实轴没有交点

出射角$\varphi_2=\pm 180°(2k+1)-(90°+120°-60°)=30°$

根轨迹如图：



(3) $G(s)H(s)=\frac{K_r(s+2)}{s(s^2+s+1)}=\frac{K_r(s+2)}{s(s+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j)(s+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j)}$

根轨迹起始于根点 $p_1=0$, $p_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j$, $p_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j$, 终止于零点 $z_1=-2$, 实轴上 $[-2,0]$ 之间为根轨迹

渐近线与实轴的交点 $\sigma=\frac{1}{2}$, $\varphi=\pm\frac{(2k+1)180}{2}=\pm 90^\circ$

系统特征方程为 $s^3+s^2+(K_r+1)s+2K_r=0$

劳斯表：

s^3	1	K_r+2
s^2	1	$2K_r$
s	$1-K_r$	
s^0	K_r	

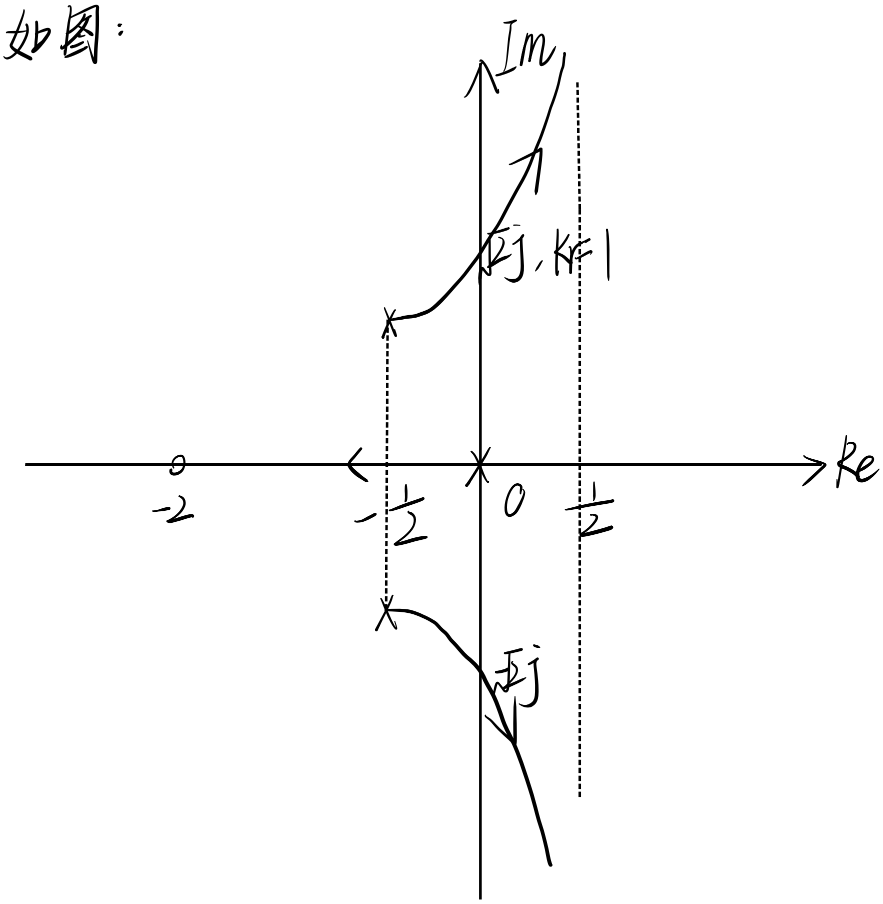
令 $1-K_r=0$, $K_r=1$

辅助方程 $s^2+2=0$

$s_{1,2}=\pm\sqrt{2}j$

出射角 $\varphi_2=\pm 180^\circ(2k+1)-(90^\circ+120^\circ-30^\circ)=0^\circ$

根轨迹如图：



把图3.1和图3.2比较，以及把图3.1和图3.3比较，我们可以得出结论：给系统增加零点，系统的根轨迹整体往左移动，系统稳定性变好。把图3.2和图3.3比较，可以得出结论：零点右移，系统的稳定性变好