UNIVERZITET U NOVOM SADU

FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA

NOVI SAD

ИНТЕГРИСАНИ СИСТЕМ МЕНАЏМЕНТА СЕРТИФИКОВАН ОД:

ZBIRKA ZADATAKA SA PRIJEMNIH ISPITA NA FAKULTETU TEHNIČKIH NAUKA

(MATEMATIKA)

NOVI SAD, 201.

Izdavač:
Fakultet tehničkih nauka
Trg Dositeja Obradovića 6
21000 Novi Sad

Glavni i odgovorni urednik:
Prof. dr Ilija Ćosić, dekan

Uređivački odbor:
Prof. dr Ilija Ćosić
Prof. dr Ilija Kovačević
Prof. dr Janko Hodolič
Prof. dr Vladimir Katić
Prof. dr Srđan Kolaković

Tehnička obrada:
Mr Ranko Bojanić
Mr Nenad Simeunović
Gordana Bajčetić

Štampanje odobrio:
Savet za izdavačku delatnost Fakulteta tehničkih nauka

Predsednik Saveta za izdavačku delatnost:
Prof. dr Radomir Folić

Informacije:
Trg Dositeja Obradovića 6
Telefon: (021) 459-141
Fax: (021) 458-133
e-mail: *bojanicr@uns.ac.rs*
www.ftn.uns.a.crs

Tiraž:

Štampa:

OPŠTE INFORMACIJE O PRIJEMNOM ISPITU

1. Prijemni ispit

1a. Prijemni ispit iz **Matematike** polažu kandidati koji žele da upišu sledeće oblasti:

- **Elektrotehnika i računarstvo** (kandidati se upisuju na jedan od sledeća dva studijska programa: Energetika, elektronika i telekomunikacije; Računarstvo i automatika).
- **Saobraćaj** (kandidati se upisuju na jedan od sledeća dva studijska programa: Saobraćaj i transport; Poštanski saobraćaj i telekomunikacije).
- **Građevinarstvo** (kandidati se upisuju na studijski program: Građevinarstvo).
- **Mehatronika** (kandidati se upisuju na studijski program: Mehatronika).
- **Geodezija** (kandidati se upisuju na studijski program: Geodezija i geomatika).
- **Računarska grafika** (kandidati se upisuju na studijski program: Animacije u inženjerstvu).

1b. Prijemni ispit iz **Matematike sa proverom sklonosti** za studije odgovarajuće oblasti polažu kandidati koji žele da upišu sledeće oblasti:

- **Mašinstvo** – Matematika sa proverom sklonosti za studije mašinstva (kandidati se upisuju na jedan od sledeća četiri studijska programa: Proizvodno mašinstvo; Mehanizacija i konstrukciono mašinstvo; Energetika i procesna tehnika; Tehnička mehanika i dizajn u tehnici).
- **Industrijsko inženjerstvo i inženjerski menadžment** – Matematika sa proverom sklonosti za studije industrijskog inženjerstva i inženjerskog menadžmenta (kandidati se upisuju na jedan od sledeća dva studijska programa: Industrijsko inženjerstvo; Inženjerski menadžment).
- **Grafičko inženjerstvo i dizajn** – Matematika sa proverom sklonosti za studije grafičkog inženjerstva i dizajna (kandidati se upisuju na jedan studijski program: Grafičko inženjerstvo i dizajn).
- **Inženjerstvo zaštite životne sredine i zaštite na radu** – Matematika sa proverom sklonosti za studije inženjerstva zaštite životne sredine (kandidati se upisuju na jedan od sledeća dva studijska programa: Inženjerstvo zaštite životne sredine; Inženjerstvo zastite na radu).

1c. Prijemni ispit iz Geometrije sa arhitektonskom i opštom kulturom; Slobodoručno crtanje i Prostorna kompozicija polažu kandidati koji žele da upišu sledeću struku (oblast):

- **Arhitektura** (kandidati se upisuju na studijski program: Arhitektura i urbanizam).

2. Način bodovanja

Ukupan broj bodova na osnovu kojeg se vrši rangiranje kandidata za upis na Fakultet formira se kao zbir bodova ostvarenih po sledećem kriterijumu:

1. Opšti uspeh u srednjem obrazovanju - podrazumeva zbir prosečnih ocena iz svih predmeta u I, II, III i IV razredu, pomnožen sa brojem 2 (dva). Po ovom osnovu kandidat može steći najmanje 16, a najviše 40 bodova. Opšti uspeh u srednjem obrazovanju računa se zaokruživanjem na dve decimale.
2. Kandidat je položio prijemni ispit (i time stekao pravo na rangiranje radi upisa) ukoliko na prijemnom ispitu osvoji najmanje:
   - 14 bodova iz matematike za kandidate koji polažu samo matematiku,
   - 7 bodova iz matematike i 7 bodova iz testa provere sklonosti za kandidate koji polažu matematiku sa proverom sklonosti za studije odgovarajuće oblasti.
   - 6 bodova iz geometrije sa arhitektonskom i opštom kulturom, 4 boda iz prostorne kompozicije i 4 boda iz slobodoručnog crtanja za kandidate koji polažu prijemni ispit za Arhitekturu.
3. Uspeh na prijemnom ispitu iz matematike za upis na Elektrotehniku i računarstvo, Mehatroniku i Računarsku grafiku boduje se od 0 do 60 bodova.
4. Uspeh na prijemnom ispitu iz matematike za upis na Građevinarstvo, Saobraćaj i Geodeziju i geomatiku boduje se od 0 do 60 bodova.
5. Uspeh na prijemnom ispitu iz matematike sa proverom sklonosti za studije odgovarajuće oblasti za upis na Mašinstvo, Industrijsko inženjerstvo i inženjerski menadžment, Grafičko inženjerstvo i dizajn i Inženjerstvo zaštite životne sredine i zaštite na radu boduje se od 0 do 60 bodova:
   a) Matematika se boduje od 0 do 30 bodova,
   b) Provera sklonosti za studije odgovarajuće oblasti se boduje od 0 do 30 bodova.

6. Uspeh na prijemnom ispitu za upis na Arhitekturu i urbanizam boduje se od 0 do 60 bodova:
    a) Geometrija sa arhitektonskom i opštom kulturom boduje se od 0 do 30 bodova,
    b) Prostorna kompozicija boduje se od 0 do 15 boda,
    c) Slobodoručno crtanje boduje se od 0 do 15 boda.

Maksimalan broj bodova je 100.

Priprema za polaganje prijemnog ispita za upis arhitekture se izvodi na Fakultetu tokom cele godine. Informacije se mogu dobiti na telefon: 021 / 6350 – 293 и 021 / 485 – 2223.

Informacije za pripremnu nastavu iz matematike se mogu dobiti na telefon : 021/6350-770

PROGRAM PRIJEMNOG ISPITA IZ MATEMATIKE ZA UPIS ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA; GRAĐEVINARSTVA; SAOBRAĆAJA; MEHATRONIKE; GEODEZIJE I GEOMATIKE; RAČUNARSKE GRAFIKE

Na ispitu iz matematike polaže se gradivo predviđeno nastavnim planom i programom za srednje obrazovanje.

1. Osnovne logičke operacije, pojam funkcije.
2. Brojevi (prirodni, celi, racionalni, iracionalni, realni, kompleksni).
3. Proporcionalnost veličina i primene.
4. Racionalni algebarski izrazi. Polinomi.
5. Linearna funkcija. Linearne jednačine i nejednačine, sistemi linearnih jednačina i nejednačina.
6. Stepenovanje i korenovanje.
7. Kvadratna funkcija. Kvadratne jednačine i nejednačine. Sistemi kvadratnih jednačina.
8. Algebarske i iracionalne jednačine i nejednačine.
9. Pojam logaritma. Logaritamska i eksponencijalna funkcija. Logaritamske i eksponencijalne jednačine i nejednačine.
10. Trigonometrijske funkcije. Identiteti, jednačine i nejednačine. Primena trigonometrije.
11. Matematička indukcija i nizovi. Aritmetička i geometrijska progresija.
12. Kombinatorika i binomni obrazac.
13. Planimetrija (prvenstveno geometrija trougla, četvorougla i kruga).
14. Stereometrija (prizma, piramida, zarubljena piramida, valjak, kupa, zarubljena kupa, sfera i delovi sfere).
15. Vektori.
16. Analitička geometrija u ravni (prava, kružnica, elipsa, hiperbola i parabola).
17. Granične vrednosti nizova i funkcija. Izvod i primena

Literatura

1. Srednjoškolski udžbenici iz matematike
2. Zbirka zadataka sa prijemnih ispita, FTN, 2010.

PROGRAM PRIJEMNOG ISPITA ZA UPIS ARHITEKTURE

Prijemni ispit za upis Arhitektonske struke sastoji se od 3 (tri) dela i to:

- Slobodoručno crtanje,
- Prostorna kompozicija,
- Geometrija sa arhitektonskom i opštom kulturom.

Program prijemnog ispita iz Sloboručnog crtanja

Predviđene su četiri teme i likovna područja od kojih će kandidati raditi na dan ispita SAMO JEDNU. Odabir teme biće poznat samo i jedino rukovodiocu ispita i to neposredno pred ispit.

Teme:

1) **gradski prostor** (trg, ulica, tvrđava, grupa kuća ili neki drugi urbani ambijent Novog Sada).
2) **enterijer nekog objekta** (javna zgrada, banka, hram itd.).
3) **scenografska postavka** (plastična i artikulisana pozorišna scena ili televizijski dekor sa mnoštvom elemenata).
4) **prostorna kompozicija** koja se postavlja uoči ispita a čine je geometrijska tela, tkanina, drveni štapovi, skulptorski modeli i raznoliki predmeti svakodnevne upotrebe, kao i bilo koji drugi motivi mrtve prirode.

Program prijemnog ispita iz Prostorne kompozicije

Ovaj deo ispita za kandidate treba da pokaže njihovo osećanje za prostor, sposobnost slobodoručnog oblikovanja na osnovu zadatih elemenata i da otkrije njihovo osećanje za meru, poštujući maštu i čvrsto vezivanje za logiku materijala i oblika. Osećanje prostora, likovni izraz, radost kontrolisane igre i stvaralački dar treba da budu u osnovi ovoga ispita, koji se u tom smislu niti uči niti može naučiti. Organizatori prijemnog ispita neće do poslednjeg dana odrediti ni materijale ni elemente od kojih će ova ispitna kompozicija biti pravljena. Međutim, kompozicija će svakako biti rađena na bazi papira, kartona, drvenih lajsni, tekstila, žica, kanapa ili bilo kog drugog materijala ili upotrebnog predmeta za koji će se komisija odlučiti.

Program prijemnog ispita iz Geometrije sa arhitektonskom i opštom kulturom

Ispit se sastoji od 18 pitanja na koje je potrebno dati kratke odgovore. Pitanja su iz oblasti geometrije, arhitekture, književnosti, muzike, likovne umetnosti, pozorišta, filma, istorije, društva.

Literatura:

Arhitektonska kultura:

1. Ranko Radović, Nova anatologija kuća, 23 primera arhitekture i urbanizma sveta, Građevinska knjiga, Beograd, 2001.
2. Milan P. Rakočević, Uvod u arhitektonsko projektovanje, Arhitektonski fakultet Univerziteta u Beogradu, 1998. (24 časa arhitekture – naslov novog izdanja)
3. Jirgen Jedike (Jürgen Joedicke), Oblik i prostor u arhitekturi, Orion art, Beograd, 2009.
4. Zbirka zadataka sa prijemnih ispita na Fakultetu tehničkih nauka, FTN, 2010.

Opšta kultura:

1. Lj. Nikolić, B. Milić, Čitanka sa književno teoretskim pojmovima za III razred srednje škole, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2000.
2. Lj. Nikolić, B. Milić, Čitanka sa književno teoretskim pojmovima za IV razred srednje škole, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1999.
3. V. Galović, B. Karadžić, Likovna kultura, za gimnaziju i strednje stručne škole, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2000.
4. S. Marinković, Muzička kultura za gimnaziju i stručne škole, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2000.
5. K. Bogdanović, B. Burić, Teorija forme Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1999.
6. Zbirka zadataka sa prijemnih ispita na Fakultetu tehničkih nauka, FTN, 2010.

Geometrija:

1. Srednjoškolski udžbenici iz Matematike i Nacrtne geometrije.
2. Zbirka zadataka sa prijemnih ispita na Fakultetu tehničkih nauka, FTN, 2010.

PROGRAM PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE SA PROVEROM SKLONOSTI ZA STUDIJE ODGOVARAJUĆE OBLASTI ZA UPIS: MAŠINSTVA; INDUSTRIJSKOG INŽENJERSTVA I INŽENJERSKOG MENADžMENTA; GRAFIČKOG INŽENJERSTVA I DIZAJNA; INŽENJERSTVA ZAŠTITE ŽIVOTNE SREDINE I ZAŠTITE NA RADU

Ispit se sastoji iz dva dela i to:
- Matematika (pet zadataka)
- Provera sklonosti za studije odgovarajuće struke (deset pitanja).

Program dela prijemnog ispita: Matematika

1. Osnovne logičke operacije, pojam funkcije.
2. Brojevi (prirodni, celi, racionalni, iracionalni, realni), stepenovanje i korenovanje, racionalni algebarski izrazi i polinomi.
3. Proporcionalnost veličina i primene.
4. Linearna funkcija. Linearne jednačine i nejednačine, sistemi linearnih jednačina i nejednačina.
5. Kvadratna funkcija. Kvadratne jednačine i nejednačine.
   Sistemi kvadratnih jednačina.
6. Algebarske i iracionalne jednačine i nejednačine.
7. Pojam logaritma. Logaritamska i eksponencijalna funkcija. Logaritamske i eksponencijalne jednačine i nejednačine.
8. Trigonometrijske funkcije. Identiteti, jednačine i nejednačine. Primena trigonometrije.
9. Matematička indukcija i binomni obrazac.
10. Vektori.

Literatura

1. Srednjoškolski udžbenik iz matematike
2. Zbirka zadataka sa prijemnih ispita, FTN, 2010

jul 2001. godine

ELEKTROTEHNIKA I RAČUNARSTVO, SAOBRAĆAJ I GRAĐEVINARSTVO

(prijemni ispit u julu 2001 i septembru 2001. i 2002. godine je bio isti za ove tri struke)

1. U skupu realnih brojeva naći skup rešenja nejednačine
$$\frac{-x^2+2x-16}{x-6}\geq 3 .$$
2. Naći m tako da zbir korena (rešenja) jednačine
$$x^2+\left(2+m-m^2\right)x+m^2=0$$
bude jednak 0 , a da proizvod bude jednak 4 .
3. Dokazati da za svaki prirodan broj važi jednakost
$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 .$$
4. Zbir prva tri člana geometrijskog niza je 91. Ako se zbir prvog i trećeg člana pomnoži sa $\frac{30}{61}$, dobija se drugi član niza. Odrediti prva tri člana niza.
5. U skupu realnih brojeva rešiti jednačinu
$$\log_4\left(2\cdot 4^{x-2}-1\right)+4=2x.$$
6. U skupu realnih brojeva rešiti jednačinu
$$3\cos^2 x-\sin^2 x-\sin 2x=0.$$
7. Stranica romba je $a=5$, a zbir dijagonala $d_1+d_2=14.$ Izračunati površinu romba.
8. Koliko se petocifrenih brojeva može napisati od cifara $0,1,\cdots,9$, ako se cifre
   a. mogu ponavljati;
   b. ne mogu ponavljati.
9. Data je prava $2x+y-12=0$ i parabola $y^2=4x$. Naći jednačinu tangente na parabolu u presečnoj tački $M\left(x_0,y_0\right), y_0<0,$ prave i parabole.
10. Visina i izvodnica kupe odnose sa kao $1:2$, a njena zapremina je $1000\pi\ cm^3$. Izračunati površinu kupe.

Svaki zadatak nosi 6 bodova.

REŠENJA:

1. $x\in(-\infty,-2]\cup[1,6).$
2. Na osnovu Vietovih formula, iz $x_1+x_2=-\left(2+m-m^2\right)=0$ i $x_1x_2=m^2=4$ sledi da je $m=2.$
3. Da data jednakost važi za svaki prirodan broj *n* dokazaćemo koristeći princip matematičke indukcije. Za $n=1$ data jednakost važi, jer je
$$1^3=\left(\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right)^2 .$$
Pretpostavimo da data jednakost važi za $n=k$, tj.
$$1^3+2^3+\cdots+k^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 .$$
Dokazaćemo da data jednakost važi i za $n=k+1$
$$1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2 .$$
Dakle, na osnovu principa matematičke indukcije data jednakost važi za svaki prirodan broj *n.*

4. Označimo sa b_1, b_2 i b_3 prva tri člana geometrijskog niza. Iz $b_1+b_2+b_3=91, (b_1+b_3)\cdot\dfrac{30}{61}=b_2$, sledi da je $b_2=30$ i $b_1+b_3=61$.
Iz $b_1+b_3=61$ i $b_1\cdot b_3=900$ sledi da je $(b_1,b_2,b_3)\in\{(25,30,36),(36,30,25)\}$.

5. Iz $\log_4(2\cdot 4^{x-2}-1)+4=2x$ sledi da je $(4^x-16)^2=0$, tj. da je rešenje date jednačine realan broj $x=2$.

6. Deljenjem date jednačine sa $\cos x$ ($\cos x\neq 0$) dobija se jednačina $3-tg^2x-2tgx=0$ sa rešenjima $tgx=1$ ili $tgx=-3$.

Iz $tgx=1$ sledi da je skup rešenja ove jednačine $A=\left\{\dfrac{\pi}{4}+k_1\pi : k_1\in Z\right\}$. Iz $tgx=-3$ sledi da je skup rešenja ove jednačine $B=\{-arctg3+k_2\pi : k_2\in \mathbf{Z}\}$.

Skup svih rešenja date jednačine je skup $C=A\cup B$.

7. Iz $d_1+d_2=14$ i $a=5$ sledi da je $d_1\cdot d_2=48$. Kako je površina romba $P=\dfrac{1}{2}d_1\cdot d_2$ to je površina traženog romba $P=24$.

8. a) $V_5^{10}-V_4^{10}=10^5-10^4=9\cdot 10^4$.
b) $V_5^{10}-V_4^{10}=6\cdot 7\cdot 8\cdot 9^2$.

9. Iz $2x+y=12$ i $y^2=4x$ sledi da je $(x,y)=(4,4)$ ili $(x,y)=(9,-6)$. Dakle, tražena tačka je $M(9,-6)$. Jednačina tangente u datoj tački M na parabolu je prava $y=-\dfrac{1}{3}x-3$.

10. Kako je $H:s=1:2$, to je $s=2H$. Iz $r^2=s^2-H^2$ sledi da je $r=H\sqrt{3}$. Iz $V=\dfrac{1}{3}r^2\pi H=1000\pi\, cm^3$ sledi da je $H=10cm$, pa je $r=10\sqrt{3}cm, s=20cm$. Dakle, tražena površina kupe je $P=r^2\pi+r\pi s=100\pi(3+2\sqrt{3})cm^2$.

ELEKTROTEHNIKA I RAČUNARSTVO, SAOBRAĆAJ I GRAĐEVINARSTVO

septembar 2001

1. Izračunati $\left(\dfrac{3^x+3^{-x}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3^x-3^{-x}}{2}\right)^2.$

2. Rešiti nejednačinu $\dfrac{x^2+x-2}{x-3}\le 0.$

3. Dokazati da za svaki prirodan broj *n* važi $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}.$

4. U jednačini $x^2-(k+2)x+2(k+2)=0$ odredi realan parametar k tako da jedan koren (nula) jednačine bude dva puta veći od drugog korena.

5. Ako je zbir prva tri člana aritmetičkog niza 21, a zbir prvih šest članova 78, naći zbir prvih devet članova.

6. U skupu realnih brojeva rešiti jednačinu $9^x-24\cdot 3^{x-1}=9.$

7. U skupu realnih brojeva rešiti jednačinu $\sin^2 x+\cos x+1=0.$

8. U pravouglom trouglu date su katete $a=3cm$ i $b=4cm$. Odredi visinu koja odgovara hipotenuzi.

9. Odrediti presečne tačke kružnice $x^2+y^2+6x-4y=0$ i prave $x-y+4=0.$

10. Pravougli trougao čije su katete $a=3cm$ i $b=4cm$ rotira oko katete *b*. Naći zapreminu nastalog rotacionog tela.

Svaki zadatak nosi 6 bodova.

REŠENJA:

1) $$\left(\frac{3^x+3^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{3^x+3^{-x}}{2}\right)^2=\left(\frac{3^x+3^{-x}}{2}-\frac{3^x-3^{-x}}{2}\right)\cdot\left(\frac{3^x+3^{-x}}{2}+\frac{3^x-3^{-x}}{2}\right)=\frac{2\cdot 3^{-x}}{2}\cdot\frac{2\cdot 3^x}{2}=1.$$

2) $$\frac{x^2+x-2}{x-3}\le 0\Leftrightarrow\frac{(x+2)(x-1)}{x-3}\le 0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-2]\cup[1,3)$$

3) $n=1:\ \dfrac{1\cdot 2}{2}=1;$

Pretpostavka da tvrđenje važi za $n=k$: $1+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$. Dokaz da tvrđenje važi za $n=k+1$:

$$1+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

4) $$\begin{array}{llllll} x_1=2x_2 & & x_2=\dfrac{k+2}{3} & & & \\ x_1+x_2=k+2 & \Leftrightarrow & x_1=\dfrac{2k+4}{3} & \Leftrightarrow & & k+2=9 \\ x_1\cdot x_2=2(k+2) & & \dfrac{k+2}{3}\cdot\dfrac{2k+4}{3}=2k+4 & & & k=7 \end{array}$$

5) $S_3 = 21 \quad \wedge \quad S_6 = 78 \Leftrightarrow \frac{3}{2}(2a_1 + 2d) = 21 \quad \wedge \quad \frac{6}{2}(2a_1 + 5d) = 78$

Rešavanjem sistema jednačina $a_1 + d = 7 \quad \wedge \quad 2a_1 + 5d = 26$ dobijamo $a_1 = 3$ i $d = 4$ tako da je

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2 \cdot 3 + 9 \cdot 4) = 210$$

6) $\left(3^x\right)^2 - 8 \cdot 3^x - 9 = 0, \quad t = 3^x, \quad t^2 - 8t - 9 = 0, \quad t_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{2}$

$t_1 = 9, \quad t_2 = -1, \quad \Rightarrow \quad 3^x = 9, \ 3^x = -1; \ 3^x = 9 \Rightarrow x = 2 \qquad 3^x = -1$ nema rešenja.

Dakle, rešenje je samo realan broj $x = 2$

7) $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - \cos^2 x + \cos x + 1 = 0$

$-\cos^2 x - \cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \qquad x = (1 + 2k)\pi, \quad k \in Z$

$\cos x = 2$ nema rešenje

8) $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5 \qquad a \cdot b = c \cdot h_c \Rightarrow h_c = \frac{3 \cdot 4}{5} \qquad h_c = 2.4cm$

9) $(y-4)^2 + y^2 + 6(y-4) - 4y = 0 \qquad \wedge \qquad x = y - 4$

$y = 4 \Rightarrow x = 0 \qquad A(0,4)$

$y = -1 \Rightarrow x = -5 \qquad B(-5,-1)$

10) $V = \frac{1}{3} B \cdot H, \qquad B = r^2\pi = 9\pi$

$H = b = 4cm \qquad V = \frac{1}{3} 9\pi \cdot 4$

$r = a = 3cm \qquad V = 12\pi cm^3$

ELEKTROTEHNIKA I RAČUNARSTVO, MEHATRONIKA, SAOBRAĆAJ I GRAĐEVINARSTVO *septembar 2002*

1. Naći interval najmanje dužine kojem pripada realan broj k tako da rešenja x_1, x_2 kvadratne jednačine $(k-1)x^2+(k-5)x-(k+2)=0$ zadovoljava uslov $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>2.$

2. Cena nekog proizvoda povećana je za 40%. Za koliko procenata treba menjati dobijenu cenu, da bi se dobila prosečna cena?

3. Zbir tri uzastopna člana aritmetičke progresije je 54. Ako je najveći od njih dva puta veći od najmanjeg, naći proizvod ta tri broja.

4. Ako je $\cos x+\cos y=a,\ \sin x+\sin y=b, a\neq 0,$ pokazati da je $\frac{b}{a}=tg\frac{x+y}{2}.$ Naći $\cos(x+y)$ kao funkciju od a i b.

5. Rešiti jednačinu $\sqrt{\log_2 x}-\log_2 8x+5=0$.

6. Naći jednačinu kružnice koja spolja dodiruje krušnicu $x^2+y^2-4x-5=0$ a centar joj je u tački $C(5,4)$.

7. Dijagonale jednakokrakog trapeza su uzajamno normalne. Izračunati njegovu površinu ako je krak $c=2\sqrt{5}$, a odnos osnovica $3:1$.

8. Osnova prave pravilne šestostrane piramide je upisana u osnovu valjka a njen vrh leži u centru gornje osnove valjka. Ako je visina piramide *H=6 cm,* a njena zapremina $V=12\sqrt{3}cm^3$, naći površinu valjka.

9. Naći rešenje jednačine $2\cdot 3^{x+1}-4\cdot 3^{x-2}=450$.

10. Koeficijent četvrtog i šestog člana u razvijenom obliku binoma $\left(\frac{1}{a}+\sqrt{a}\right)^n$ odnose se kao 5:18. Naći vrednost člana koji ne sadrži *a.*

Svaki zadatak nosi 6 bodova.

REŠENJA:

1. $$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>2 \Leftrightarrow \frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}>2 \Leftrightarrow \frac{-\frac{k-5}{k-1}}{-\frac{k+2}{k-1}}>2 \Leftrightarrow \frac{k+9}{k+2}<0$$

$k\in(-9,-2)$.

2. *C*- prvobitna cena

nakon povećanja: $C+\frac{40}{100}C=\frac{7}{5}C$ smanjuje se za x procenata

$$\frac{7}{5}C-\frac{x}{100}\frac{7}{5}C=C \Leftrightarrow x=\frac{200}{7}=28.57\%$$

3.

$$a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 54$$
$$a_1 + d = 18 \Rightarrow a_2 = 18$$
$$a_1 + 2d = 2a_1$$
$$-a_1 + 2d = 0$$
$$a_1 = 12, a_3 = 24, d = 6$$
$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 12 \cdot 18 \cdot 24 = 5184$$

4.

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \frac{2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}}{2\cos\cdot\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x\cdot y}{2}} = tg\frac{x+y}{2}$$

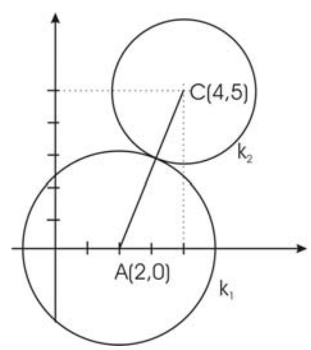
$$\cos(x+y) = \frac{1-tg^2\frac{x+y}{2}}{1+tg^2\frac{x+y}{2}} = \frac{1-\frac{b^2}{a^2}}{1+\frac{b^2}{a^2}} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

5.

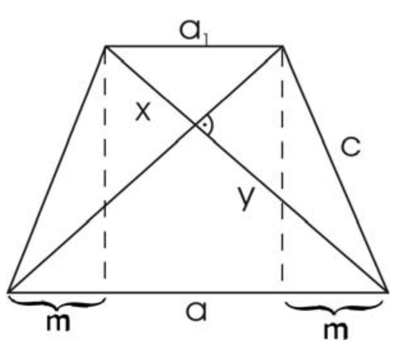
$$\sqrt{\log_2 x} - \log_2 8x + 5 = 0$$
$$\sqrt{\log_2 x} = t^2$$
$$t - t^2 - \log_2 8 + 5 = 0$$
$$-t^2 + t + 2 = 0$$
$$t_1 = -1$$
$$t_2 = 2$$
$$\log_2 x = 4 \Rightarrow x = 2^4 = 16$$

6.

$$k_1 : (x-2)^2 + y = 9$$
$$d(A,C) = \sqrt{(5-2)^2 + (4-0)^2} = 5$$
$$r_2 = d(A,C) - r_1 = 2$$
$$k_2 : (x-5)^2 + (y-4)^2 = 4$$



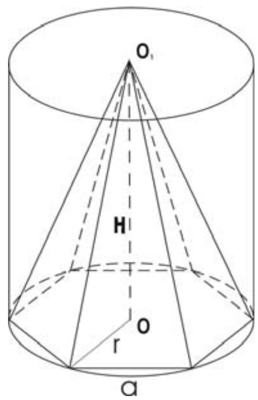
7.



$$2y^2 = a^2$$
$$2x^2 = a_1^2$$
$$a = 3a_1$$
$$x^2 + y^2 = 5a_1^2$$

$$x^2 + y^2 = c^2 = 20$$
$$5a_1^2 = 20$$
$$a_1 = 2$$
$$a = 6$$
$$m = \frac{a - a_1}{2} = 2$$
$$h^2 = c^2 - m^2 = 4$$
$$P = \frac{a + a_1}{2}\cdot h = 16$$

8.



$r = a$

$V = \frac{1}{3} B \cdot H = \frac{1}{3} 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6 = 12\sqrt{3} \Rightarrow a = 2$

$P_V = 2r\pi H + 2r^2\pi$

$P_V = 32\pi$

9.

$2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 450$

$3^x = t$

$6t - \frac{4}{9} t = 450$

$\left(6 - \frac{4}{9}\right) t = 450$

$t = 81$

$3^x = 81 \Rightarrow x = 4$

10.

$\binom{n}{3} : \binom{n}{5} = 5 : 18$

$18\binom{n}{3} = 5\binom{n}{5}$

$n^2 - 7n - 60 = 0 \Rightarrow n_1 = 12, n_2 = -5$

$\left(\frac{1}{a} + \sqrt{a}\right)^{12} \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} \left(\frac{1}{a}\right)^k \left(\sqrt{a}\right)^{12-k} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} a^{\frac{12-3k}{2}}$

$12 - 3k = 0 \Rightarrow k = 4$

Član koji ne sadrži a je $\binom{12}{4} = 495$.

1. Proizvod korena jednačine $-5x^2 + bx + c$ je 12. Parametri b i c su realni brojevi. Funkcija $f(x) = -5x^2 + bx + c$ ima maksimum za $x = 4$. Odrediti korene te jednačine.

2. Za koje vrednosti realnog parametra k će izraz: $kx^2 - 2k^2x + k^3 - 3k - 4$ biti negativan za svaki realan broj x?

3. U skupu realnih brojeva rešiti jednačinu: $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$.

4. Naći skup rešenja nejednačine : $\log_x(6-5x) < 2$.

5. Pravougaonik *ABCD* ispresecan je sa 6 pravih koje su paralelne sa stranicom *AB* i 8 pravih koje su paralelne sa stranicom *BC*. Koliko ukupno ima pravougaonika na dobijenoj slici?

6. Neka je $b_1, b_2, ..., b_n, ...$ geometrijska progresija sa količnikom q za koju važi da je zbir $b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = -4$ i da je $b_4 - b_1 = 7(q-1)^2$. Izračunati b_{2002}.

7. Rešiti nejednačinu: $\sin x - \sqrt{3}\sin 3x + \sin 5x < 0$ za $x \in (0, \pi)$.

8. Neka su $A(1,1,2), B(1,2,3)$ i $C(-1,1,2)$ temena paralelograma *ABCD*. Izračunati koordinate temena *D* i težišta *T* trougla *ABC.*

9. Neka je nad katetama *OA* i *OB* jednakokrako pravouglog trougla *OAB*, kao nad prečnicima konstruisane kružnice k_1 i k_2.

   a) Dokazati da tačka *C* pripada hipotenuzi *AB*, gde su *O* i *C* presečne tačke kružnica k_1 i k_2.

   b) Izračunati površinu preseka krugova koji su određeni kružnicama k_1 i k_2, ako je *OA*=4cm.

10. Izračunati zapreminu lopte upisane u pravilni oktaedar ivice *a*.
    (Pravilni oktaedar se sastoji od dve jednakoivične prave pravilne četvorostrane piramide koje imaju zajedničku kvadratnu osnovu, a vrhovi tih piramida su sa različitih strana te osnove.)

Svaki zadatak nosi 6 bodova.

REŠENJA:

1. $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{-5} = 12 \Rightarrow c = -60$. $f'(x) = -10x + b = 0 \Rightarrow x = \dfrac{b}{10} \Rightarrow 4 = \dfrac{b}{10} \Rightarrow b = 40.$
   $f''(x) = -10 < 0$. Dakle, za $x = 4$ funkcija $f(x)$ ima maksimum. Sledi da su koreni $x_1 = 2; x_2 = 6.$

2. Data jednačina je kvadratna ako je $k \neq 0$. Za $k = 0$ vrednost izraza $f(x) = kx^2 - 2k^2x + k^3 - 3k - 4$ je $f(x) = -4 < 0$ za svako $x \in R$. Za $k \neq 0$ dati izraz će biti negativan za svako $x \in R$ ako je $k < 0$ i $D = 4k^4 - 4k(k^3 + k^2 - 3k - 4) = -4k(k^2 - 3k - 4) < 0 \Rightarrow k \in (-1, 0)$. Dakle, $f(x) < 0$ za svako x ako $k \in (-1, 0]$.

3. $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810 \Leftrightarrow 9 \cdot 3^x + 9 \cdot (3^x)^2 = 810; \quad 3^x = t \Rightarrow t^2 + t - 90 = 0 \Rightarrow$
   $\Rightarrow t_1 = -10, t_2 = 9 \Rightarrow t \in \{-10.9\} \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow x = 2$ je rešenje jednačine.

4. Data nejednačina je definisana za $x > 0, x \neq 1$ i $6 - 5x > 0$ tj. za $x \in (0,1) \cup (1, \frac{6}{5})$. Za $x > 1$ logaritam je monotono rastuća funkcija pa je

$\log_x(6-5x) < 2 \Leftrightarrow 6 - 5x < x^2 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -6) \cup (1, \infty)$.

Dakle, rešenje je $x \in (1, \frac{6}{5})$.

Za $0 < x < 1$ logaritam je monotono opadajuća funkcija pa je

$\log_x(6-5x) < 2 \Leftrightarrow 6 - 5x > x^2 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 < 0 \Rightarrow x \in (-6, 1)$.

Dakle, rešenje je $x \in (0,1)$. Znači skup rešenja je $(0,1) \cup (1, \frac{6}{5})$.

5. Kako je proizvoljan pravougaonik određen izborom dve prave od horizontalnih (ima ih 8) i dve prave od vertikalnih (ima ih 6) to je broj svih pravougaonika jednak $\binom{8}{2}\binom{10}{2} = 1260.$

6. $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \dfrac{b_1}{1-q} = -4 \Rightarrow b_1 = -4(1-q).$

$b_4 - b_1 = b_1 q^3 - b_1 = b_1(q^3 - 1) = b_1(q-1)(q^2+q+1) = 7(q-1)^2 \Rightarrow b_1 = \dfrac{7(q-1)}{q^2+q+1}$. Sledi da je $b_1 = -2, q = \dfrac{1}{2}$ pa je $b_{2002} = b_1 q^{2001} = -2^{-2000}$.

7. $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\sin 3x + \sin 5x = (\sin x + \sin 5x) - \sqrt{3}\sin 3x =$
$= \sin 3x(2\cos 2x - \sqrt{3})$.

$x \quad 0 \quad \frac{\pi}{12} \quad \frac{\pi}{3} \quad \frac{2\pi}{3} \quad \frac{11\pi}{12} \quad \pi$

$\sin 3x$	+	+	-	+	+
$2\cos x - \sqrt{3}$	+	-	-	-	+
$f(x)$	+	-	+	-	+

Dakle, skup rešenja date nejednačine je $\left(\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{3}\right) \cup \left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{11\pi}{12}\right)$.

8. $\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OC} - \vec{OB} = (1,1,2) + (-1,1,2) - (1,2,3) = (-1,0,1)$;

$\vec{OT} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) = \frac{1}{3}(1,4,7)$. Dakle, koordinate su $D(-1,0,1); T(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3})$.

9. a) Kako su uglovi *OCA i OCB* svaki od 90^0 to su tačke A,C, i B kolinearne;
b) Ako je r poluprečnik datih krugova to je tražena površina
$P = \dfrac{r^2\pi}{2} - P_{\Delta OCA} = \dfrac{r^2\pi}{2} - \dfrac{1}{2} r \cdot 2r$. Kako je u našem slučaju $r = 2cm$ to je
$P = (2\pi - 4)cm^2$.

10. Neka je S centar upisane lopte u oktaedar $ABCDVV'$, tj. presek dijagonala AC i BD kvadrata $ABCD$ i neka je T normalna projekcija tačke S na ravan trougla BCV (kako je u pitanju pravilnui oktaedar to tačka T mora da bude baš težište trougla *BCV*). Sa r označimo poluprečnik upisane lopte Ako je *P* sredina ivice *BC* tada iz pravouglog trougla *STP* sledi da je $r^2 = ST^2 = SP^2 - PT^2 = \dfrac{a^2}{4} - (\dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2})^2$ tj. $r = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$, pa je zapremina tražene lopte $V = \dfrac{1}{27} a^3 \sqrt{6}\,\pi$.

1. U skupu realnih brojeva uprostiti izraz:

$$\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}, \text{ za } x=\frac{2tg\alpha}{tg^2\alpha+1}$$

a) $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ b) $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$. (8 bodova)

2. U skupu realnih brojeva rešiti nejednačinu

$$\frac{7}{x^2-5x+6}+\frac{9}{x-3}<-1$$ (5 bodova)

3. U skupu realnih brojeva rešiti sistem jednačina

$$3^{2x}-2^y=77\wedge 3^x-2^{\frac{y}{2}}=7.$$ (4 bodova)

4. Nači skup rešenja sistema jednačina

$$\log_2 x-\log_4 y=0\wedge 5x^2-y^2=4.$$ (5 bodova)

5. Na koliko različitih načina se od prvih 27 uzastopnih prirodnih brojeva, mogu odabrati tri broja, tako da njihov zbir bude deljiv sa 3?
(7 bodova)

6. Odrediti *x* tako da brojevi $\frac{1}{\log_3 5},\frac{1}{\log_6 5},\frac{1}{\log_x 5}$ obrazuju aritmetičku progresiju. (4 bodova)

7. U skupu realnih brojeva rešiti nejednačinu

$$tg^2x-(1+\sqrt{3})tgx+\sqrt{3}<0.$$ (6 bodova)

8. Neka su *P i Q* sredine redom stranica *BC* i *CD* paralelograma *ABCD*, neka je *R* presek duži *AP* i *BQ* i neka je $\vec{a}=\vec{AB}$, $\vec{b}=\vec{BC}$.

   a) Izračunati φ i ψ ako je $\varphi\vec{a}+\psi\vec{b}=0$; (2 bodova)

   b) Ako je $\vec{PR}=\alpha\vec{PA}$ i $\vec{RB}=\beta\vec{QB}$, tada izraziti vektore $\vec{BP}$, $\vec{PR}$ i $\vec{RB}$ u zavisnosti od vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i skalara (realnih brojeva) α i β; (2 bodova)

   c) Izračunati α i β i *AR:RP*, koristeći zbir $\vec{BP}+\vec{PR}+\vec{RB}$ (4 bodova)

9. Izračunati površinu trapeza *ABCD* čije osnovice su *AB*=8 i *CD*=4, a uglovi na osnovici su $\alpha=\frac{\pi}{4}$ i $\beta=\frac{\pi}{6}$. (6 bodova)

10. Izračunati zapreminu pravilnog tetraedra, ako mu je rastojanje između sredina dve naspramne ivice $\sqrt{2}$. (7 bodova)

REŠENJA:

1.
$$\frac{\sqrt{1+\frac{2tg\alpha}{tg^2\alpha+1}}-\sqrt{1-\frac{2tg\alpha}{tg^2\alpha+1}}}{\sqrt{1+\frac{2tg\alpha}{tg^2\alpha+1}}+\sqrt{1-\frac{2tg\alpha}{tg^2\alpha+1}}}=\frac{|tg\alpha+1|-|tg\alpha-1|}{|tg\alpha+1|+|tg\alpha-1|}.$$

Ako je $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$, tada je $tg\alpha\in[-1,1]$,pa je $\frac{|tg\alpha+1|-|tg\alpha-1|}{|tg\alpha+1|+|tg\alpha-1|}=tg\alpha$;

Ako je $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right]$, tada je $tg\alpha\in(-\infty,-1]$,pa je $\frac{|tg\alpha+1|-|tg\alpha-1|}{|tg\alpha+1|+|tg\alpha-1|}=\frac{1}{tg\alpha}$;

Ako je $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, tada je $tg\alpha \in [1, \infty)$,pa je $\frac{|tg\alpha + 1| - |tg\alpha - 1|}{|tg\alpha + 1| + |tg\alpha - 1|} = \frac{1}{tg\alpha}$.

2. $\frac{7}{x^2 - 5x + 6} + \frac{9}{x - 3} < -1 \Leftrightarrow \frac{(x+5)(x-1)}{(x-2)(x-3)} < 0 \Rightarrow x \in (-5,1) \cup (2,3)$.

3. Smenom $3^x = u,\ 2^{\frac{y}{2}} = v$ dati sistem se svodi na ekvivalentan sistem $u^2 - v^2 - 77 \wedge u - v = 7$. Deljenjem ovih jednačina dobija se $u + v = 11 \wedge u - v = 7$, pa je *(u,v)=(9,2)* odnosno *(x,y)=(2,2).*

4. $\log_2 x - \log_4 y = 0 \wedge 5x^2 - y^2 = 4 \Leftrightarrow \log_2 x - \log_{2^2} y = 0 \wedge 5x^2 - y^2 = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2 x - \frac{1}{2}\log_2 y = 0 \wedge 5x^2 - y^2 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt{y} \wedge 5x^2 - y^2 = 4 \Leftrightarrow (x, y) \in \{(1,1), (2,4)\}$.

5. Podelimo tih *27* brojeva u tri grupe po *9* brojeva tako da su u prvoj grupi svi brojevi koji su deljivi sa *3,* u drugoj grupi su brojevi koji pri deljenju sa *3* daju ostatak *1* i u trećoj grupi svi brojevi koji pri deljenju sa *3* daju ostatak *2* . Da bi zbir tri izabrana broja bio deljiv sa tri moraju ti brojevi da budu u istoj grupi ili sva tri broja treba da budu iz različitih grupa. U prvom slučaju ima ih ukupno $3 \cdot \binom{9}{3}$, a u drugom slučaju ima ih ukupno 9^3, te je rezultat da ih ima ukupno $3 \cdot \binom{9}{3} + 9^3 = 981$.

6. Kako važi $\frac{1}{\log_3 5} = \log_5 3, \frac{1}{\log_6 5} = \log_5 6, \frac{1}{\log_x 5} = \log_5 x$ to iz uslova da oni tim redom obrazuju aritmetičku progresiju sledi da je $2\log_5 6 = \log_5 3 + \log_5 x = \log_5 3x \Rightarrow x = 12$.

7. Kako je $tg^2 x - (1 + \sqrt{3})tgx + \sqrt{3} < 0 \Leftrightarrow (tgx - 1)(tgx - \sqrt{3}) < 0 \Leftrightarrow tgx \in (1, \sqrt{3})$ to je rešenje date nejednačine nad intervalom $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ interval $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$, a nad celim skupom realnih brojeva unije svih intervala oblika $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right)$, gde *k* prolazi kroz skup celih brojeva.

8. a) Kako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nekolinearni to važi

$\varphi \vec{a} + \psi \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0 \wedge \psi = 0$;

b) $\vec{BP} = \frac{1}{2}\vec{b}, \vec{PR} = \alpha(-\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}), \vec{RB} = \beta(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b})$;

c) $\vec{BP} + \vec{PR} + \vec{RB} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\vec{b} + \alpha(-\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}) + \beta(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-\alpha + \frac{1}{2}\beta)\vec{a} + (\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} - \beta)\vec{b} = 0 \Leftrightarrow -\alpha + \frac{1}{2}\beta = 0 \wedge \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{5} \wedge \beta = \frac{2}{5}$.

Sledi da je $AR : RP = 4 : 1$

9. Ako su *E* i *F* redom normalne projekcije tačaka *D* i *C* na osnovicu *AB* i ako je *DE=CF=h*, tada je *AB= AE+EF+FB=h+4+h*$\sqrt{3}$ *=8*, odakle sledi da je *h=* $2\sqrt{3} - 2$, te je tražena površina $P = \frac{8+4}{2} \cdot 2(\sqrt{3} - 1) = 12(\sqrt{3} - 1)$.

10. Ako sa *M* i *N* označimo redom sredine ivica *AB* i *CD* tetraedra *ABCD* a sa *a=AB* to iz pravouglog trougla *AMN* sledi da je

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (\sqrt{2})^2 = \left(\frac{1}{2}a\sqrt{3}\right)^2$ odnosno da je $a = 2$. Sledi da je zapremina tetraedra jednaka $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

1. U skupu realnih brojeva rešiti nejednačinu: $\dfrac{2x^2-2x-1}{2x+1} \leq 4$.

2. Za koje vrednosti realnih brojeva a i b jednačina $ax^2 - x + b = 0$ ima tačno jedno rešenje $x = x_0$ za koje važi $2x_0 = x_0^2$.

3. U skupu realnih brojeva rešiti jednačinu $tg\, x(2-\sin x) = \dfrac{3}{4\cos x}$.

4. U skupu realnih brojeva rešiti jednačinu $\log_2(x+1) = \log_4(x+3)$.

5. U skupu realnih brojeva rešiti sistem jednačina $2^x \cdot 3^{y-2} = 4;\ 2^x + \sqrt{3^{2y}} = 13$.

6. Data je kocka sa temenima $A(0,0,0)$; $B(1,0,0)$; $C(1,1,0)$; $D(0,1,0)$; $A_1(0,0,1)$; $B_1(1,0,1)$; $C_1(1,1,1)$; $D_1(0,1,1)$.

   a) Izračunati ugao između vektora $\overrightarrow{AB_1}$ i $\overrightarrow{A_1C_1}$;

   b) Izračunati skalarni prozvod vektora $\overrightarrow{AB_1}$ i $\overrightarrow{A_1C_1}$;

   c) Izračunati koordinate težišta T trougla ACB_1.

7. Date su tačke $A(1,1)$; $B(2,1)$; $C(2,1+\sqrt{3})$ i kružnica K čija je jednačina $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Odrediti jednačine onih tangenti kružnice K koje su paralelne sa simetralom unutrašnjeg ugla kod temena A trougla ABC.

8. Da li postoji geometrijski niz $\{b_n\}$ kod koga je $\dfrac{1}{3}(b_1+b_3+b_4) = \dfrac{1}{2}(b_2+b_4)$? Odgovor obrazložiti.

9. Dokazati da za svaki prirodan broj n, broj $10 \cdot 3^{2n+1} - 24n - 30$ deljiv sa 24.

10. Košarkaški klub A ima na raspolaganju *8* igrača, a košarkaški klub B ima na raspolaganju *9* igrača. Svaki od klubova za utakmicu bira prvu postavu od *5* košarkaša. Koliko ima različitih načina da *10* igrača izađe na parket? .

Svaki zadatak nosi 6 bodova

REŠENJA:

1. Data nejednačina je definisana za $x \neq -\dfrac{1}{2}$.

$$\frac{2x^2-2x-1}{2x+1} \leq 4 \Leftrightarrow \frac{2x^2-2x-1}{2x+1} - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-10x-5}{2x+1} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{35}}{2}, \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{35}}{2}\right].$$

2. Rešenja kvadratne jednačine $2x_0 = x_0^2$ su brojevi $x_{01} = 0; x_{02} = 2$. Uvrštavanjem $x_{01} = 0$ u jednačinu $ax^2 - x + b = 0$ dobija se da je $b = 0$ i tada je $ax^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(ax-1) = 0$, pa kako je $x_{01} = 0$ jedino rešenje te jednačine, sledi da mora da bude $a = 0$. Uvrštavanjem $x_{02} = 2$ u jednačinu $ax^2 - x + b = 0$ dobija se da je $4a - 2 + b = 0$ odnosno $b=2-4a$, pa data jednačina sada glasi $ax^2 - x + 2 - 4a = 0$. Kako je $x_{02} = 2$ jedino rešenje sledi da mora da bude ili $a = 0 \wedge b = 2$ ili

$a \neq 0; x_1 + x_2 = \frac{1}{a} = 4; x_1 \cdot x_2 = \frac{2-4a}{a} = 4$. Sledi da je u ovom slučaju $a = \frac{1}{4}; b = 1$. Dakle, rešenje je $a = b = 0 \vee (a = 0 \wedge b = 2) \vee (a = \frac{1}{4} \wedge b = 1)$.

3. Data jednačina definisana je za $x \notin \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in Z \right\}$.

$tg\, x(2 - \sin x) = \frac{3}{4\cos x} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}(2 - \sin x) = \frac{3}{4\cos x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2 x - 2\sin x + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \vee \sin x = \frac{3}{2}$. Skup rešenja jednačine $\sin x = \frac{1}{2}$ je $\left\{ \frac{\pi}{6} + 2l\pi : l \in Z \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2m\pi : m \in Z \right\}$, dok jednačina $\sin x = \frac{3}{2}$ nema rešenja. Dakle, skup rešenja polazne jednačine je $\left\{ \frac{\pi}{6} + 2l\pi : l \in Z \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2m\pi : m \in Z \right\}$.

4. Data jednačina je definisana za $x > -1$.

$\log_2(x+1) = \log_4(x+3) \Leftrightarrow \log_2(x+1) = \log_{2^2}(x+3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2(x+1) = \frac{1}{2}\log_2(x+3) \Leftrightarrow \log_2(x+1)^2 = \log_2(x+3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 = x + 3 \Rightarrow x = -2 \vee x = 1$. Rešenje polazne jednačine je samo realan broj $x=1$, dok realan broj $x = -2$ nije rešenje, jer data jednačina je definisana za $x > -1$.

5. Smenom $2^x = u, 3^y = v$ dati sistem se svodi na ekvivalentan sistem $u \cdot v = 36; u + v = 13$, sa rešenjima $(u,v) \in \{(4,9),(9,4)\}$, odnosno sa rešenjima $(x,y) \in \{(2,2),(\log_2 9, \log_3 4)\}$.

6. a) Ako sa α označimo ugao između vektora $\vec{AB_1} = \vec{OB_1} - \vec{OA} = (1,0,1) - (0,0,0) = (1,0,1)$ i $\vec{A_1C_1} = \vec{OC_1} - \vec{OA_1} = (1,1,1) - (0,0,1) = (1,1,0)$ to iz $\left|\vec{AB_1}\right| = \left|\vec{A_1C_1}\right| = \sqrt{2}$, sledi da si

$\cos\alpha = \frac{\vec{AB_1} \cdot \vec{A_1C_1}}{\left|\vec{AB_1}\right|\left|\vec{A_1C_1}\right|} = \frac{1}{2}$ odnosno $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

b) $\vec{AB_1} \cdot \vec{A_1C_1} = (1,0,1) \cdot (1,1,0) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1$.

c) $\vec{OT} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OB_1}) = \frac{1}{3}((0,0,0) + (1,1,1) + (1,0,1)) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

7. Kako prava *b=p(A,B)* čija je jednačina *y=1* zaklapa ugao *0* sa pozitivnim delom *x-ose*, a prava *c=p(A,C)* čija je jednačina $y = \sqrt{3}x + 1 - \sqrt{3}$ zaklapa ugao $\frac{\pi}{3}$ sa pozitivnim delom *x-ose* , to tangente treba sa pozitivnim delom *x-ose* da zaklapaju ugao $\frac{\pi}{6}$. Dakle , tangente treba da imaju koeficijent pravca $k = tg\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Da bi prava *p:y=kx+n* bila tangenta kružnice $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, treba da važi uslov dodira $r^2(1 + k^2) = (kx_0 - y_0 + n)^2$.Uvrštavajući $k = \frac{\sqrt{3}}{3}, x_0 = 1, y_0 = 0, r = 1$ u uslov dodira dobija se da je $n_1 = -\sqrt{3}, n_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Dakle, tražene tangente su prave $t_1 : y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$; $t_2 : y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$.

8. Pretpostavimo da postoji geometrijski niz $\{b_n\}$. Na osnovu uslova treba da važi $\frac{1}{3}(b_1+b_3+b_4)=\frac{1}{2}(b_2+b_4)\Leftrightarrow\frac{b_1}{3}(1+q+q^2)=\frac{b_1}{2}(q+q^2)$. Ako je $b_1=0$, to sledi da stacionaran niz $\{b_n : b_n=0, n\in N\}$ ispunjava dati uslov. Dalje, ako je $b_1\neq 0$ sledi iz $\frac{b_1}{3}(1+q+q^2)=\frac{b_1}{2}(q+q^2)\Leftrightarrow 0=(q-1)(q^2-q+2)\Rightarrow q=1$. Sledi da su jedini realni geometriski nizovi koji ispunjavaju dati uslov stacionarni nizovi, tj. nizovi oblika $\{b_n : b_n=b\in R, n\in N\}$.

9. Tvrđenje je tačno za $n=1$, jer je broj $10\cdot 3^2-24-30=24\cdot 9$ deljiv sa 24.
Pretpostavimo da tvrđenje važi za $n=k$, tj. da je broj $10\cdot 3^{2k+1}-24k-30$ deljiv sa 24. Potrebno je dokazati da tvrđenje važi i za $n=k+1$, tj. da je broj $10\cdot 3^{2k+3}-24(k+1)-30$ deljiv sa 24.
Kako je: $10\cdot 3^{2k+3}-24(k+1)-30=9\cdot 10\cdot 3^{2k+1}-9\cdot 24k+8\cdot 24k-9\cdot 30+216=$
$=9\cdot(10\cdot 3^{2k+1}-24k-30)+24\cdot(8k+9)$
i $10\cdot 3^{2k+1}-24k-30=24M$ po pretpostavci, to je
$10\cdot 3^{2k+3}-24(k+1)-30=24\cdot(9M+8k+9)$. Dakle, po principu matematičke indukcije, dati broj je deljiv sa 24 za svaki prirodan broj.

10. Klub *A* prvu postavu može izabrati na $\binom{8}{5}$ načina, a klub *B* prvu postavu može izabrati na $\binom{9}{5}$ načina. Dakle, utakmica može da započne na $\binom{8}{5}\cdot\binom{9}{5}=56\cdot 125=7056$ načina.

ELEKTROTEHNIKA I RAČUNARSTVO; MEHATRONIKA *jul 2005*

1. Odrediti oblast definisanosti i izračunati nulu funkcije $f(x)=\sqrt{\dfrac{\log_2\left(x^2-5x+5\right)}{x+2}}$.

2. Neka su x_1 i x_2 rešenja (koreni) u skupu kompleksnih brojeva kvadratne jednačine $x^2-px+q=0$. Izračunati realne brojeve p i q tako da važi

$$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}=p \quad \text{i} \quad \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=q.$$

3. Rešiti jednačinu $25^x-6\cdot 5^x-16=0.$

4. Data je jednačina $\Im:\left|tgx+ctg\right|=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}.$

   a) rešiti po x jednačinu $\Im$ na intervalu $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$;

   b) rešiti po x jednačinu $\Im$ na intervalu $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$.

5. Dati su vektori $\vec{a}=\vec{p}-3\vec{q}$ i $\vec{b}=\vec{p}+2\vec{q}$, gde je $|\vec{p}|=|\vec{q}|=2$ i $\angle\left(\vec{p},\vec{q}\right)=\dfrac{\pi}{3}$

   a) Izračunati površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$

   b) Izračunati intezitet vektora $\vec{a}$

   c) Ispitati da li su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ normalni.

6. Izračunati površinu romba čija je stranica $a=9,$ a razlika dijagonala $d_1-d_2=2.$

7. Za kompleksne brojeve $z=-1+i$ i $w=\sqrt{3}-i$ izračunati

   a) $z+w$ b) $z\cdot w$ c) $\dfrac{z}{w}$ d) $\arg(z)$ e) $|z|$ f) $\sqrt{z}$

8. Dat je binom $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^n$.

   a) da li postoji $n\in \mathrm{N}$ za koje prva tri binomna koeficijenta u razvijenom obliku binoma obrazuju tri uzastopna člana nekog aritmetičkog niza?

   b) Za $n=23$ odrediti binomni koeficijent uz x^4 u razvijenom obliku binoma.

9. Koliko ima različitih 5-cifrenih brojeva (prva cifra je različita od 0) koji među svojim ciframa sadrže bar jednu cifru 1?

10. Data je funkcija $f(x)=xe^{x^2}$.

    a) Izračunati y_0 za koju tačka $A(1,y_0)$ pripada grafiku date funkcije.

    b) Naći jednačinu tangente u tački $\mathrm{O}(0,0)$ grafika date funkcije.

    c) Ispitati monotoniju i ekstremne vrednosti date funkcije.

Svaki zadatak nosi 6 bodova

REŠENJA:

1. Argument logaritamske funkcije mora biti pozitivan, imenilac u razlomku mora biti različit od 0, a potkorena veličina mora biti negativna:

$$\left(x^2-5x+5>0 \quad \wedge \quad x+2\neq 0 \quad \wedge \quad \frac{\log_2\left(x^2-5x+5\right)}{x+2}\geq 0 \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} x\in\left(-\infty,\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\wedge x\neq -2 \quad \wedge \\ \left(\left(\log_2\left(x^2-5x+5\right)\geq 0>-2\right)\right)\vee\left(\log_2\left(x^2-5x+5\right)\leq 0 \;\wedge\; x<-2\right) \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x\in\left(-\infty,\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2},\infty\right)\wedge\; x\neq -2 \;\wedge\; \left(x\in\left(-2,1\right]\right)\cup\left[4,\infty\right) \quad \vee x\notin\varnothing \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x\in\left(-2,1\right]\right)\cup\left[4,\infty\right).$$

Dakle, domen funkcije je $D=\left(-2,1\right]\cup\left[4,\infty\right)$. Za $x\in D$ je

$$f=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\log_2\left(x^2-5x+5\right)}{x+2}=0\Leftrightarrow\; x^2-5x+5=1 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x^2-5x+4=0 \quad\Leftrightarrow\quad x\in\{1,4\}\subseteq D$$

Dakle, funkcija f ima dve nule: $x_1=1$ i $x_2=4$.

2. Za rešenja x_1 i x_2 kvadratne jednačine $J:\; x^2+px+q=0$ važe Vietove formule

$$[V1]: x_1+x_2=-p \qquad\qquad [V2]: x_1x_2=q.$$

Iz $[U2]: \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=q$ sledi da mora biti $x_1\neq 0$ i $x_2\neq 0$, te je I $q\overset{[V2]}{=}x_1x_2\neq 0$. Pri tome je

$q=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\overset{[V1],[V2]}{=}\frac{-p}{q}$, odakle sledi $p=-q^2\neq 0[*]$.

Dalje je

$$[U1]: p=\frac{x_1^{\;2}}{x_2}+\frac{x_2^{\;2}}{x_1}=\frac{x_1^{\;3}+x_2^{\;3}}{x_1x_2}=\frac{\left(x_1+x_2\right)\left(x_1^{\;2}-x_1x_2+x_2^{\;2}\right)}{q}=$$

$$=\frac{-p\left(x_1^{\;2}+2x_1x_2+x_2^{\;2}-3x_1x_2\right)}{q}=\frac{-p\left(\left(x_1+x_2\right)^2-3x_1x_2\right)}{q}=\frac{-p\left(p^2-3q\right)}{q},$$

odakle sledi

$$1=\frac{3q-p^2}{q}\overset{[*]}{=}\frac{3q-q^4}{q}=3-q^3\Leftrightarrow q^3=2\Leftrightarrow q=\sqrt[3]{2},$$

a uvrštavanjem zadnje jednakosti u $[*]$ dobijamo $p=-\sqrt[3]{4}$. Dakle, zadatak ima jedno rešenje: $p=-\sqrt[3]{4}\wedge q=\sqrt[3]{2}$.

3. Kako je $25^x = \left(5^x\right)^2$, smenom $t = 5^x$ dobijamo da je jednačina ekvivalentna sa

$$\left(t = 5^x \wedge t^2 - 6t - 16 = 0\right) \Leftrightarrow \left(t = 5^x \wedge t_{1,2} = \tfrac{6\pm 10}{2} = \{-2, 8\}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(5^x = -2 \vee 5^x = 8\right) \Leftrightarrow x = \log_5 8.$$

4. Funkcije $tg\,x$ i $ctg\,x$ su definisane za svako $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ i svako $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

(a) Na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ su pozitivne obe funkcije $\mathrm{tg}\,x$ i $\mathrm{ctg}\,x$, te je na $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pozitivna i funkcija $tg\,x + ctg\,x$. Stoga je za $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ jednačina $\Im$ ekvivalentna sa

$$tg\,x + \frac{1}{tg\,x} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \;/\cdot ctg\,x \Leftrightarrow \quad tg^2 x - \frac{4\sqrt{3}}{3} tg\,x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(t = tg\,x \wedge t^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3} t + 1 = 0\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(t = tg\,x \wedge \left(t = \sqrt{3} \vee t = \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(tg\,x = \sqrt{3} \vee tg\,x = \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{3} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \vee x = \frac{\pi}{6} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

(b) Na intervalu $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ su negativne obe funkcije $\mathrm{tg}\,x$ i $\mathrm{ctg}\,x$, te je na $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ negativna i funkcija $\mathrm{tg}\,x + \mathrm{ctg}\,x$. Stoga je za $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ jednačina J ekvivalentna sa

$$-\left(tg\,x + \frac{1}{tg\,x}\right) = -tg\,x - \frac{1}{ctg\,x} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \;/\cdot ctg\,x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow tg^2 x + \frac{4\sqrt{3}}{3} tg\,x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(t = tg\,x \wedge t^2 + \frac{4\sqrt{3}}{3} t + 1 = 0\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(t = tg\,x \wedge \left(t = -\sqrt{3} \vee t = \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(tg\,x = -\sqrt{3} \vee tg\,x = \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{2\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \vee x = \frac{5\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)\right).$$

5. a) Po definiciji vektorskog proizvoda, površina paralelograma je

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\left(\vec{p} - 3\vec{q}\right) \times \left(\vec{p} + 2\vec{q}\right)\right| = \left|\vec{p} \times \vec{p} + 2\vec{p} \times \vec{q} - 3\vec{q} \times \vec{p} - 6\vec{q} \times \vec{q}\right| =$$
$$= \left|\vec{0} + 2\vec{p} \times \vec{q} + 3\vec{p} \times \vec{q} - 6 \cdot \vec{0}\right| = \left|5\vec{p} \times \vec{q}\right| = 5\left|\vec{p}\right| \cdot \left|\vec{q}\right| \sin\left(\sphericalangle\left(\vec{p}, \vec{q}\right)\right) =$$
$$= 20 \cdot \sin\frac{\pi}{3} = 10\sqrt{3}.$$

b)

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{\left(\vec{p} - 3\vec{q}\right) \cdot \left(\vec{p} - 3\vec{q}\right)} = \sqrt{\vec{p} \cdot \vec{p} - 3\vec{p}\vec{q} - 3\vec{q}\vec{p} + 9\vec{q} \cdot \vec{q}} =$$
$$= \sqrt{\left|\vec{p}\right|^2 - 6\vec{p}\vec{q} + 9\left|\vec{q}\right|^2} = \sqrt{40 - 6\left|\vec{p}\right| \cdot \left|\vec{q}\right| \cdot \cos\left(\sphericalangle\left(\vec{p}, \vec{q}\right)\right)} = \sqrt{40 - 24 \cdot \cos\frac{\pi}{3}} =$$
$$= \sqrt{40 - 12} = 2\sqrt{7}.$$

c) Kako je

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(\vec{p}-3\vec{q}\right)\cdot\left(\vec{p}+2\vec{q}\right)=\vec{p}\cdot\vec{p}+2\vec{p}\cdot\vec{q}-3\vec{p}\cdot\vec{q}-6\vec{q}\cdot\vec{q}=\left|\vec{p}\right|^2-\vec{p}\cdot\vec{q}-6\left|\vec{q}\right|^2=$$

$$=4-\left|\vec{p}\right|\cdot\left|\vec{q}\right|\cdot\cos\left(\angle\left(\vec{p},\vec{q}\right)\right)-24=-22\neq 0,$$

sledi da vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu ortogonalni.

6. Dijagonale romba se seku pod pravim uglom, te na osnovu Pitagorine teoreme sledi

$$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2=a^2=81$$

$$\begin{aligned} d_1-d_2&=2\,/^2\\ \left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2&=81\end{aligned}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{aligned} d_1^{\,2}-2d_1d_2+d_2^{\,2}&=4\\ d_1^{\,2}+d_2^{\,2}&=324\end{aligned}$$

te uvrštavanjem druge jednakosti u prvu dobijamo

$2d_1d_2=320$, odakle sledi da je površina romba $P=\dfrac{d_1d_2}{2}=80$.

7. Za kompleksne brojeve $z=-1+i$ i $w=\sqrt{3}-i$ izračunati

a) $z+w=\sqrt{3}-1$

b) $z\cdot w=1-\sqrt{3}+i\left(1+\sqrt{3}\right)$

c) $\dfrac{z}{w}=-\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}+i\left(-\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$

d) $\arg(z)=\dfrac{3\pi}{4}$

e) $|z|=\sqrt{2}$

f) $\sqrt{z}=\left\{\sqrt[4]{2}e^{\frac{3\pi}{8}i},\sqrt[4]{2}e^{\frac{11\pi}{8}i}\right\}=\left\{\sqrt[4]{2}e^{\frac{3\pi}{8}i},\sqrt[4]{2}e^{-\frac{5\pi}{8}i}\right\}$

8. a) Binomni koeficijenti $\binom{n}{0}=1,\binom{n}{1}=n$ i $\binom{n}{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}$ obrazuju tri uzastopna člana nekog aritmetičkog niza ako i samo ako je srednji jednak aritmetičkoj sredini prvog i trećeg:

$$n=\frac{1+\frac{n(n-1)}{2}}{2}=\frac{n^2-n+2}{4}\Leftrightarrow n^2-5n+2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(n=\frac{5-\sqrt{17}}{2}\notin\mathbb{N}\ \vee n=\frac{5+\sqrt{17}}{2}\notin\mathbb{N}\right)$$

što znači da ne postoji takav prirodan broj n.

b) $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{23}=\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{4}}\right)^{23}==\displaystyle\sum_{k=0}^{23}\binom{23}{k}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{23-k}\left(x^{-\frac{1}{4}}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{23}\binom{23}{k}x^{\frac{23}{2}-\frac{3}{4}k}$ pri čemu je

$$x^{\frac{23}{2}-\frac{3}{4}k}=x^4\Leftrightarrow\frac{23}{2}-\frac{3}{4}k=4\Leftrightarrow k=10$$

Dakle, radi se o binomnom koeficijentu $\binom{23}{10}$. Polazeći od

$\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{4}}\right)^{23}=\sum_{k=0}^{23}\binom{23}{k}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{k}\left(x^{-\frac{1}{4}}\right)^{23-k}$ se na isti način dobija binomni koeficijent $\binom{23}{13}=\binom{23}{10}$.

9. Ukupno, različitih 5-cifrenih brojeva ima $9\cdot 10^4=90000$ (prva cifra ne može biti 0).
Različitih 5-cifrenih brojeva koji među svojim ciframa ***ne sadrže*** ni jednu cifru 1 ima $8\cdot 9^4=52488$ (prva cifra ne može biti ni 0 ni 1, a ostale su različite od 1).
Prema tome, različitih 5-cifrenih brojeva koji među svojim ciframa sadrže bar jednu cifru 1 ima $90000-52488=37512$.

10. (a) Iz $f(1)=1\cdot e^1=e$ sledi $y_0=e$.

(b) Na isti način kao pod (a) se proverava da $O(0,0)$ pripada grafiku date funkcije. Iz $f'(x)=e^{x^2}+xe^{x^2}2x=e^{x^2}(2x^2+1)$ sledi $f'(0)=1\cdot(0+1)=1$, te je koeficijent pravca tangente u tački O jednak 1, odnosno tangenta u tački O je oblika $y=x+n$. Kako tangenta treba da prolazi kroz koordinatni početak O, sledi $n=0$, te tražena tangenta ima jednačinu $y=x$.

(c) Za svako $x\in\mathbb{R}$ je $e^{x^2}>0$ i $2e^{x^2}+1>0$, te je $f'(x)>0$ za svako $x\in\mathbb{R}$.To znači da je funkcija f strogo monotono rastuća na celom skupu $\mathbb{R}$ i nema ni tačku minimuma ni tačku maksimuma

1. Ako su x_1 i x_2 koreni (rešenja) kvadratne jednačine $x^2+px+q=0$, za koje važi jednakost $x_1+x_2=x_1\cdot x_2$, odrediti skup uređenih parova realnih brojeva *(p,q)* za koje su koreni date jednačine realni brojevi.

2. *a)* Rešiti po *x* jednačinu $9^x-8\cdot 3^x=9$.

   b) Odrediti oblast definisanosti funkcije $y=f(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x^2+1}{x+3}}$.

3. *a)* Odrediti sva rešenja jednačine $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$.

   b) Rešiti nejednačinu $\sqrt{3}\sin x+\cos x<0$.

4. Date su funkcije $f_1(x)=2\log_2 x$, $f_2(x)=\log_2 x^2$, $f_3(x)=2\log_2|x|$, $f_4(x)=\dfrac{2}{\log_x 2}$.

   Ako među datim funkcijama ima jednakih, napisati koje su jednake. Odgovore obrazložiti.

5. *a)* Dat je pravilan šestougao *ABCDEF* stranice a sa centrom u tački O. Ako je $\overrightarrow{AO}=\vec{m}$ i $\overrightarrow{AB}=\vec{n}$, izraziti vektore $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AE}$ preko vektora $\vec{m}$ i $\vec{n}$.

   b) Ako je $\vec{a}=3\vec{p}+\vec{q}, \vec{b}=2\vec{p}-\vec{q}$, gde je $|\vec{p}|=2, |\vec{q}|=3, \sphericalangle(\vec{p},\vec{q})=\dfrac{\pi}{6}$,

   (1) odrediti površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

   (2) proveriti da li su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ normalni.

6. Površina romba je $P_r=18$, a jedan od njegovih uglova je $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$. Izračunati površinu omotača tela koje nastaje rotacijom romba oko njegove stranice.

7. Odrediti sve vrednosti za:

   a) $\sqrt[4]{1}$ u skupu realnih brojeva,

   b) $\sqrt[4]{1}$ u skupu kompleksnih brojeva,

   c) rešenja jednačine $x^4-1=0$ u skupu realnih brojeva,

   d) rešenja jednačine $x^4-1=0$ u skupu kompleksnih brojeva,

   e) rešenja jednačine $\dfrac{x^4-1}{x-1}=0$ u skupu realnih brojeva,

   f) rešenja jednačine $\dfrac{x^4-1}{x-1}=0$ u skupu kompleksnih brojeva.

8. *a)* Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)$.

   b) Dokazati da za binomne koeficijente (iz binomnog obrasca) za svaki prirodan broj *n* važi jednakost: $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$.

9. Data je funkcija $y=f(x)=x^3-3x-1$.

   a) Odrediti ekstremne vrednosti funkcije *f(x)*.

   b) Neka je *s* sečica koja prolazi kroz tačke $A(-1,y_1)$ i $B(2,y_2)$ grafika funkcije *f*. Odrediti jednačinu tangente *t* grafika funkcije *f* paralelne sa sečicom *s*. Odrediti jednačinu normale *n* u dodirnoj tački tangente *t*.

10. Koliko ima različitih 7-cifrenih brojeva čije su prve 3 cifre različiti neparni brojevi, a poslednje 4 cifre su parni brojevi?

REŠENJA:

1. Na osnovu Vietovih pravila je $x_1 \cdot x_2 = q$ i $x_1 + x_2 = -p$, te iz jednakosti $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$ sledi $q = -p$. Da bi rešenja kvadratne jednačine bila realna, diskriminanta te jednačine mora biti nenegativna:

$$p^2 - 4q \geq 0 \Leftrightarrow p^2 + 4p \geq 0 \Leftrightarrow p(p+4) \geq 0 \Leftrightarrow (p \leq -4 \vee 0 \leq p) \Leftrightarrow p \in (-\infty, -4] \cup [0, \infty)$$

<u>Zaključak</u>: rešenja kvadratne jednačine su realni brojevi za $(p,q) = \{(t,-t) \mid t \in (-\infty,-4] \cup [0,\infty)\}$.

2. *a)* Kako je $9^x = 3^{2x}$, uvođenjem smene $t = 3^x$ dobijamo kvadratnu jednačinu $t^2 - 8t - 9 = 0$, čija su rešenja $t_{1,2} = \dfrac{8 \pm \sqrt{64+36}}{2} = \{-1, 9\}$. Vraćanjem smene dobijamo da jednačina $3^x = -1$ nema rešenja, a rešenje jednačine $3^x = 9 = 3^2$ je $x = 2$.

<u>Zaključak</u>: rešenje jednačine je $x = 2$.

b) Oblast definisanosti funkcije *f* su oni $x \in R$ za koje je

$$x \neq -3 \wedge \frac{x^2+1}{x+3} > 0 \wedge \log_{\frac{1}{3}} \frac{x^2+1}{x+3} \geq 0,$$

odnosno

$$x \neq -3 \wedge \frac{x^2+1}{x+3} > 0 \wedge \frac{x^2+1}{x+3} \leq 1.$$

- Kvadratna funkcija $x^2 + 1$ je pozitivna za sve *x* te je $\dfrac{x^2+1}{x+3} > 0 \Leftrightarrow x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3.$

- Kako je $\dfrac{x^2+1}{x+3} \leq 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-x-2}{x+3} \leq 0$, a nule kvadratne funkcije $x^2 - x - 2$ su $x = -1$ i $x = 2$, sledi da je

	$(-\infty,-3)$	$(-3,-1)$	$(-1,2)$	$(2,\infty)$
x^2-x-2	+	+	−	+
$x+3$	−	+	+	+
$\frac{x^2-x-2}{x+3}$	−	+	−	+

te je $\dfrac{x^2-x-2}{x+3} \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-3) \cup [-1,2]$.

<u>Zaključak</u>: oblast definisanosti funkcije *f* su tačke $x \in [-1, 2]$.

3. *a)* Primenom trigonometrijskih identiteta $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ i $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ na prvi i treći sabirak dobijamo

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x + 2\sin 2x \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x(1 + 2\cos x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin 2x = 0 \vee \cos x = -\frac{1}{2}) \Leftrightarrow (2x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}).$$

<u>Zaključak</u>: rešenja jednačine su

$$x \in \left\{k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{2k\pi + \frac{2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{2k\pi - \frac{2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

b) Prvi način:

- Za $\cos x = 0$ tj. $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ uvrštavanjem dobijamo da $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ nisu, a $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ jesu rešenja nejednačine.
- Za $\cos x > 0$, tj. $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$, deljenjem nejednačine sa $\cos x$ dobijamo $\sqrt{3}\sin x + \cos x < 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}tgx + 1 < 0 \Leftrightarrow tgx < -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$,
 a za $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ je poslednja nejednakost tačna kada
 $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.
- Za $\cos x < 0$, tj. $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$, deljenjem nejednačine sa $\cos x$ dobijamo $\sqrt{3}\sin x + \cos x < 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}tgx + 1 < 0 \Leftrightarrow tgx < -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$,
 a za $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ je poslednja nejednakost tačna kada
 $x \in \left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$, odnosno $x \in \left(-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

Zaključak: rešenja nejednačine su $x \in \left(-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

(što je isto što i $x \in \left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$).

Drugi način: $\sqrt{3}\sin x + \cos x < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x < 0 \Leftrightarrow \sin(\frac{\pi}{6} + x) < 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + x \in (-\pi + 2k\pi, 2k\pi) \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$$

4. Ako domene funkcija f_1, f_2, f_3, f_4 obeležimo redom sa $D(f_1), D(f_2), D(f_3), D(f_4)$, tada je

$$D(f_1) = \mathbb{R}^+ = (0,\infty),\ D(f_2) = \mathbb{R}\setminus\{0\} = (-\infty,0)\cup(0,\infty),$$
$$D(f_3) = \mathbb{R}\setminus\{0\} = (-\infty,0)\cup(0,\infty),\ D(f_4) = \mathbb{R}^+\setminus\{1\} = (0,1)\cup(1,\infty).$$

Stoga, eventualno mogu biti jednake samo funkcije f_2 i f_3. Kako za $x > 0$ važi $\log_2 x^2 = 2\log_2|x| \Leftrightarrow \log_2 x^2 = 2\log_2 x$ i kako su funkcije f_2 i f_3 parne, sledi da su i jednake.

Zaključak: Od datih funkcija, jednake su samo f_2 i f_3.

5. *a)* $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AB} = \vec{m} + \vec{n}$,
 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO} = \vec{m}$,
 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AB} = 2\vec{m} - \vec{n}$.

Zaključak: $\overrightarrow{AC} = \vec{m} + \vec{n}, \overrightarrow{BC} = \vec{m}, \overrightarrow{AE} = 2\vec{m} - \vec{n}$.

b)

1. Po definiciji vektorskog proizvoda, površina paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je jednaka intenzitetu vektorskog proizvoda vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, te koristeći definiciju i osobine vektorskog proizvoda dobijamo

$$\vec{a}\times\vec{b} = (3\vec{p}+\vec{q})\times(2\vec{p}-\vec{q}) = 6\vec{p}\times\vec{p} - 3\vec{p}\times\vec{q} + 2\vec{q}\times\vec{p} - \vec{q}\times\vec{q} =$$
$$= 6\vec{0} - 3\vec{p}\times\vec{q} - 2\vec{p}\times\vec{q} - \vec{0} = -5\vec{p}\times\vec{q},$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|-5\vec{p}\times\vec{q}\right| = 5\left|\vec{p}\times\vec{q}\right| = 5\left|\vec{p}\right|\left|\vec{q}\right|\left|\sin(\sphericalangle(\vec{p},\vec{q}))\right| = 5\cdot2\cdot3\cdot\frac{1}{2} = 15.$$

Zaključak: površina paralelograma je 15.

2. Vektori su normalni ako i samo ako je njihov skalarni proizvod 0. Korišćenjem definicije i osobina skalarnog proizvoda dobijamo

$$\vec{a}\vec{b} = (3\vec{p}+\vec{q})(2\vec{p}-\vec{q}) = 6\vec{p}\vec{p} - 3\vec{p}\vec{q} + 2\vec{q}\vec{p} - \vec{q}\vec{q} = 6\left|\vec{p}\right|^2 - \vec{p}\vec{q} - \left|\vec{q}\right|^2 = 24 - \vec{p}\vec{q} - 9 =$$

$$= 15 - \left|\vec{p}\right|\left|\vec{q}\right|\left|\sin(\sphericalangle(\vec{p},\vec{q}))\right| = 15 - 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 15 - 3\sqrt{3} \neq 0.$$

Zaključak: Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu normalni.

6. Ako je a stranica romba i h visina romba koja je naspramna oštrom uglu, tada je $\frac{h}{a} = \sin\alpha = \frac{1}{2}$,

te je $h = \frac{1}{2}a$. Iz $18 = P_r = h\cdot a = \frac{1}{2}a^2$ dobijamo $a = 6$.

Površina P obrtnog tela sastoji se od površine P_{OV} omotača valjka visine a i poluprečnika osnove h, i dve površine P_{OK} omotača prave kupe sa izvodnicom a i poluprečnikom osnove h:

$$P_{OV} = a(2h\pi) = a^2\pi = 36\pi, \qquad P_{OK} = h\pi a = \frac{1}{2}a^2\pi = 18\pi,$$

<u>**Zaključak**</u>: $P = P_{OV} + 2P_{OK} = 72\pi$.

7.
- *a)* *1,*
- *b)* *–1, 1,* i, –i,
- *c)* *–1, 1,*
- *d)* *–1, 1,* i, –i,
- *e)* *–1,*
- *f)* *–1, i, –i.*

8.

a) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\frac{\sqrt{n^2+2n}+n}{\sqrt{n^2+2n}+n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n}\right) =.$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+2n}+n}\right) = 2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{n^2+2n}{n^2}}+1}\right) = 2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}\right) = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = 1$$

b) Korišćenjem binomnog obrasca dobijamo

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0}1^n1^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}1^1 + \binom{n}{2}1^{n-2}1^2 + \cdots + \binom{n}{n}1^01^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$$

9. *a)* Stacionarne tačke (tačke među kojima se nalaze tačke ekstremnih vrednosti) su nule prvog izvoda: $f^{'}(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow (x_1=-1 \vee x_2=1)$.

Kako je $f^{''}(x)=6x$ *i* $f^{''}(-1)=-6<0$ *i* $f^{''}(1)=6>0$, sledi da u tački $x_1=-1$ funkcija ***f ima lokalni maksimum****, a* u tački $x_2=1$ lokalni minimum.

b) Iz $A\in f$ *i* $B\in f$ sledi da je $y_1=f(-1)=1$ *i* $y_2=f(2)=1$. Kako tangenta treba da je paralelna sečici koja sadrži A *i* B, sledi da je koeficijent pravca *k* tražene tangente $t: y=kx+m$ jednak koeficijentu pravca prave AB, dakle

$k=\dfrac{1-1}{2-(-1)}=0$, tj. tangenta treba da je paralelna sa x-*osom.* Koeficijent pravca tangente u dodirnoj tački $M(x_0,y_0)$ je vrednost prvog izvoda $f^{'}(x)=3x^2-3$ funkcije *f* u tački x_0, te iz $f^{'}(x_0)=3x_0^2-3=0$ dobijamo $x_0=-1$ *ili* $x_0=1$ *(*postoje dve takve tangente*).* Za $x_0=1$ je $y_0=f(x_0)=-3$, te uvrštavanjem $M(1,-3)$ u jednačinu tangente dobijamo $-3=m$, odnosno tangentu $t: y=-3$. Normala grafika funkcije u tački $M(1,-3)$ je prava koja je normalna na tangentu u toj tački. Kako je tangenta paralelna sa *x*-osom, normala je paralelna sa *y*-osom, te je njena jednačina $x=1$. Na isti način za $x_0=-1$ i odgovarajuć*e* $y_0=1$ dobijamo tangentu $y=1$ i njenu normalu $x=-1$.

Zaključak: Jednačine traženih tangenti su redom $t_1: y=-3$ *i* $t_2: y=1$, a tražene normale su redom $n_1: x=1$ *i* $n_2: x=-1$.

10. Neparnih cifara ima *5 (1, 3, 5, 7 i 9),* kao i parnih *(0, 2, 4, 6 i 8),* te ke traženi broj je $(5\cdot 4\cdot 3)\cdot(5\cdot 5\cdot 5\cdot 5)=37500$

Svaki zadatak nosi 6 bodova

1. Neka je P_K površina a O_k obim kruga K i neka je ΔABC jednostraničan trougao upisan u krug *K*. Ako je količnik $\frac{P_k}{O_k}=10$, naći: a) poluprečnik *r* kruga *K,* b) obim trougla ΔABC, c) površinu trougla ΔABC

2. Neka je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definisana sa $f(x)=x^3-8x^2+5x+14=(x-7)(x^2-x-2)$. Naći:
   a) nule funkcije *f,*
   b) ekstremne vrednosti funkcije *f,*
   c) interval u kome funkcija *f* opada,
   d) tačku $A(x_1,y_1)$ grafika funkcije f sa celobrojnim koordinatama u kojoj je tangenta grafika paralelna sa pravom $y=-16x$.

3. Neka je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funkcija definisana sa $f(x)=\sqrt[3]{\log_{\frac{1}{4}}\frac{x^2-x-2}{x^2+x-12}}$.
   a) Rešiti jednačinu $f(x)=0$,
   b) Odrediti oblast definisanosti funkcije *f,*
   c) Ako je $g(x)=2^x$, odrediti funkciju $(f\circ g)(x)=f(g(x))$.

4. Neka je $\vec{a}=(1,4,-8)$ i $\vec{b}=(-8,4,1)$.
   a) Da li se tačka $A=(1,4,-8)$ i $B(-8,4,1)$ nalaze u istom oktantu? Odgovor obrazložiti
   b) Izračunati intenzitete vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i ugao između njih,
   c) Izračunati površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$,
   d) Izračunaj intenzitet vektora $\vec{a}$ x $\vec{b}$,
   e) Izračunati ugao između vektora $\vec{p}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ i $\vec{q}=|\vec{b}|\vec{a}-|\vec{a}|\vec{b}$.

5. Neka je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funkcija definisana sa $f(x)=2^x-4\cdot 3^{x-2}$.
   a) Rešiti jednačinu $f(x)=0$
   b) Naći skup svih rešenja nejednačine $f(x)>0$.
   c) Rešiti jednačinu $2f(x)=\left(\frac{4}{3}\right)^x-35\cdot 3^{x-2}$

6. *a)* Nad intervalom $[0,\pi]$ rešiti nejednačinu $2\cos(2x)>\sqrt{2}$.
   b) Nad intervalom $[0,\pi]$ rešiti jednačinu $2\sin x(\sin x+\cos x)=1$

7. Dokazati da je $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ za svaki prirodan broj *n*.

8. Sve bočne ivice prave, pravilne, trostrane piramide jednake 1 i neka su i uglovi između svake dve bočne ivice jednaki $\frac{\pi}{2}$.
   a) Izračunati zapreminu i površinu piramide.
   b) Izračunati visinu piramide.

9. Ako je $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, odrediti:

a) $\frac{z_1}{z_2}$, b) Skup $\left\{z^{2007} \middle| z \in A\right\}$, ako je $A = \{1, z_1, z_2\}$.

10. a) Na koliko načina se mogu smestiti 3 kuglice različite težine u 5 kutija različite veličine, tako da je u svakoj kutiji najviše jedna kuglica i da za svake dve kuglice važi da je teža kuglica u većoj kutiji?

b) Na koliko načina se mogu smestiti k kuglice različite težine u $n \geq k$ kutija različite veličine, tako da je u svakoj kutiji najviše jedna kuglica i da za svake dve kuglice važi da je traženakuglica u većoj kutiji?

Svaki zadatak nosi 6 bodova

REŠENJA:

1. Iz $\frac{P_{K7}}{O_K} = \frac{r^2\pi}{2r\pi} = 10$ sledi $\boxed{r = 20}$. Zatim iz $\frac{2}{3}h = r = 20$ i $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ sledi $a = 20\sqrt{3}$, pa je obim trougla ABC jednak $\boxed{60\sqrt{3}}$. Površina trougla ABC je $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \boxed{300\sqrt{3}}$.

2. *a)* Nule polinoma $x^2 - x - 2$ su -1 i 2, te su -1, 2, 7 sve nule funkcije f.

b) $f'(x) = 3x^2 - 16x + 5 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{3}, 5\right\}$. Kako je $f''(x) = 6x - 16$ i $f''(\frac{1}{3}) = -14 < 0$, $f''(5) = 14 > 0$, to je maksimum u tački $M(\frac{1}{3}, \frac{400}{27})$, a minimum u tački $N(5, -36)$.

c) Funkcija opada u intervalu $(\frac{1}{3}, 5)$.

d) Koeficijent pravca tangente je $-16 = f'(x) = 3x^2 - 16x + 5$ tj.

$3x^2 - 16x + 21 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{7}{3}, 3\right\}$. Dakle, zbog uslova zadataka zadovoljava samo tačka $\boxed{A(3, -16)}$.

3. *a)*

$$f(x) = 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{4}} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 12} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 12} = 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = x^2 + x - 12 \Rightarrow$$

$$2x = 10 \Rightarrow \boxed{x = 5}$$

b) $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 12} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{(x+4)(x-3)} > 0$

Dakle, oblast definisanosti funkcije f je $\boxed{(-\infty, -4) \cup (-1, 2) \cup (3, \infty)}$.

c) $(f \circ g)(x) = \sqrt[3]{\log_{\frac{1}{4}} \frac{2^{2x} - 2^x - 2}{2^{2x} + 2^x - 12}} = \boxed{\sqrt[3]{\log_{\frac{1}{4}} \frac{4^x - 2^x - 2}{4^x + 2^x - 12}}}$

4. *a)* Tačke se nalaze u istom oktantu ako su im sve odgovarajuće koordinate istog znaka. Kako su kod tačaka A i B već prve koordinate različitog znaka, sledi da tačke A i B nisu u istom oktantu.

b) $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = \sqrt{1^2+4^2+(-8)^2} = \sqrt{(-8)^2+4^2+1^2} = 9$ i ugao izmedju njih je $\dfrac{\pi}{2}$ zbog $\vec{a}\vec{b}=0$.

c) Kako je taj paralelogram kvadrat stranice 9, to je tražena površina 81.

d) Kako je intenzitet vektora $\vec{a}\times\vec{b}$ jednak površini paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ to je traženi intenzitet jednak $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \boxed{81}$.

e) $\overrightarrow{p}\overrightarrow{q} = (\dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}+\dfrac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|})(\left|\vec{b}\right|\vec{a}-\left|\vec{a}\right|\vec{b}) = (\dfrac{\vec{a}}{9}+\dfrac{\vec{b}}{9})(9\vec{a}-9\vec{b}) = (\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = a^2-b^2 = 0$,

pa je $\boxed{\angle(\overrightarrow{p},\overrightarrow{q}) = \dfrac{\pi}{2}}$.

5. *a)* $2^x - 4\cdot 3^{x-2} = 0/:3^x \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^x - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \boxed{x=2}$.

b) $2^x - 4\cdot 3^{x-2} > 0/:3^x > 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^x - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^x > \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \boxed{x=2}$.

c) $2(2^x - 4\cdot 3^{x-2}) = \left(\dfrac{4}{3}\right)^x - 35\cdot 3^{x-2} \Leftrightarrow 2^{x+1} - 8\cdot 3^{x-2} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^x - 35\cdot 3^{x-2} /:3^{x-2}$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{x+1}}{3^{x-2}} - 8 = \frac{2^{2x}}{3^{2x-2}} - 35 \Leftrightarrow 18\frac{2^x}{3^x} - 8 = 9\frac{2^{2x}}{3^{2x}} - 35 \Leftrightarrow 0 = 9\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)^2 - 18\left(\frac{2}{3}\right)^x - 27$$

$$\overset{t=2^x\cdot 3^{-x}}{\Leftrightarrow} t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = -1 \vee \left(\frac{2}{3}\right)^x = 3 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 3 \Leftrightarrow \boxed{x = \log_{\frac{2}{3}} 3}$$

6. *a)*

$$2\cos 2x > \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos 2x > \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (-\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{\pi}{4}+2k\pi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (-\frac{\pi}{8}+k\pi, \frac{\pi}{8}+k\pi) \Leftrightarrow x \in \ldots \cup (-\frac{\pi}{8}-\pi, \frac{\pi}{8}-\pi) \cup (-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}) \cup (\frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}) \cup \ldots$$

Presek ove unije intervala svih rešenja, sa skupom $\left[0,\pi\right]$, je traženi skup svih rešenja

$$\left[0, \frac{\pi}{8}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{8}, \pi\right]$$

b)

$2\sin x(\sin x + \cos x) = 1 \Leftrightarrow 2\sin x + 2\sin x\cos x = 1 \Leftrightarrow (1-\cos 2x) + \sin 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = \cos 2x \Leftrightarrow 2x \in \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\} \Leftrightarrow x \in \left\{\dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

što u preseku sa $\left[0,\pi\right]$ daje $x \in \left\{\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{5\pi}{8}\right\}$.

7. Dokaz izvodimo matematičkom indukcijom. Direktnom proverom utvrdjujemo da je jednakost tačna za $n=1$. Pretpostavimo da je tačna za: $1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3=\left(\dfrac{k(k+1)}{2}\right)^2$. Sledi dokaz za $k+1$:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}$$

$$=\frac{(k+1)^2(k^2+4(k+1))}{4}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}=\frac{(k+1)^2((k+1)+1)^2}{4}=\left(\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}\right)^2$$

8. a) Ako bočnu stranu piramide uzmemo za osnovu, tada je to piramida čija osnova je pravougli trougao čije katete su jednake 1, a visina piramide je takodje 1, pa je zapremina jednaka $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\boxed{\frac{1}{6}}$. Površina se sastoji od površine tri pravougla trougla i površine jednog jednakostraničnog trougla stranice $\sqrt{2}$, pa je površina jednaka $3\cdot\frac{1}{2}+\frac{(\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}=\boxed{\frac{1}{2}(3+\sqrt{3})}$.

b) Ako sada uzmemo da je osnova piramide jednakostranični trougao stranice $\sqrt{2}$, tada je zapremina piramide jednaka $\frac{1}{3}\frac{(\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}\cdot H=\frac{1}{6}$, odakle je $H=\frac{1}{\sqrt{3}}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$.

9. a) $$\frac{z_1}{z_2}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}}\cdot\frac{-1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}=\frac{-2-i2\sqrt{3}}{4}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) * $1^{2007}=1$

* $z_1^{2007}=(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})^{2007}=\cos(2007\cdot\frac{2\pi}{3})+i\sin(2007\cdot\frac{2\pi}{3})=$ $\cos 1338\pi+i\sin 1338\pi=1$

* analogno dobijamo $z_2^{2007}=1$.

Dakle, $\boxed{\{z^{2007}\mid z\in A\}=\{1\}}$.

10. a) Neka je {1, 2, 3} skup od tri kuglice od kojih su svake dve različite težine i neka je {1, 2, 3, 4, 5} skup od 5 kutija od kojih su svake dve različite veličine. Ako sada u prvoj vrsti napišemo kuglice po težini, a u drugoj vrsti ispod svake kuglice napišemo kutiju u koju je smeštena, tada će zbog uslova zadatka da je teža kuglica u većoj kutiji slediti da u drugoj vrsti su brojevi (kutije) poredjani po veličini tj. svi načini su:

$$\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}\begin{pmatrix}123\\124\end{pmatrix}\begin{pmatrix}123\\125\end{pmatrix}\begin{pmatrix}123\\134\end{pmatrix}\begin{pmatrix}123\\135\end{pmatrix}\begin{pmatrix}123\\145\end{pmatrix}\begin{pmatrix}123\\234\end{pmatrix}\begin{pmatrix}123\\235\end{pmatrix}\begin{pmatrix}123\\245\end{pmatrix}\begin{pmatrix}123\\345\end{pmatrix}$$

Primetimo da su to sve rastuće funkcije tročlanog skupa {1, 2, 3} u skup {1, 2, 3, 4, 5}, a takodje druga vrsta predstavlja sve tročlane podskupove petočlanog skupa {1, 2, 3, 4, 5}, a to jesu sve moguće KOMBINACIJE BEZ PONAVLJANJA OD 5 ELEMENATA TREĆE KLASE, kojih ima $\binom{5}{3}=10$

b) Na osnovu rešenja pod a) sledi da je rešenje $\binom{n}{k}$.

1. Neka je P_K površina a O_K obim kruga K i neka je $ABCD$ kvadrat upisan u krug K. Ako je $\frac{P_K}{O_K} = 10$, naći:
   a) poluprečnik r kruga K, **b)** obim kvadrata $ABCD$, **c)** površinu kvadrata $ABCD$.

2. Neka je ABC je jednakokrako pravougli trougao čija je hipotenuza $AB = 1cm$. Nad njegovom katetom, kao nad hipotenuzom, konstruisan je jednakokrako pravougli trougao i tako redom.
   a) Dokazati da je dobijeni niz hipotenuza geometrijski niz i naći količnik niza.
   b) Naći 2008. član geometrijskog niza, **c)** Naći sumu svih članova niza.

3. Poslastičarnica pravi pet vrsta kolača od različitog voća. Kupac kupuje tri kolača. Naći na koliko različitih načina mogu da se izaberu tri kolača **a)** ako su svi kupljeni kolači različiti,
   b) ako među kupljenim kolačima može da bude istih.

4. Od kocke ivice $2+\sqrt{2}$ odsečeno je 8 rogljeva (piramidica) tako da od svake strane kocke ostane pravilan osmougao. Naći zapreminu tako dobijenog tela.

5. Neka su $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ i $\vec{b} = \vec{m} - p\vec{n}$, vektori gde je $m = |\vec{m}| = 2$, $n = |\vec{n}| = 1$, $\measuredangle(\vec{m},\vec{n}) = \frac{\pi}{3}$, a p realan parametar.
   a) Odrediti p tako da vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ budu ortogonalni.
   b) Ako je $p = 2$ naći visinu h_a paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

6. **a)** Odrediti kompleksan broj z za koji važi $|z| - z = 1 + 2i$. **b)** Ako je $z = 1 + i\sqrt{3}$, naći z^{60} i $\frac{z}{\bar{z}}$.

7. Neka su x_1 i x_2 koreni kvadratne jednačine $x^2 + ax - 2 = 0$. Odrediti realan parametar a tako da za korene kvadratne jednačine x_1 i x_2 važi $x_1^2 + x_2^2 = x_1x_2 + 7$.

8. Neka je funkcija f definisana sa $f(x) = \log_3(9^x - 2\cdot 3^x - 4)$.
   a) Naći oblast definisanosti funkcije $f(x)$.
   b) Rešiti jednačinu $f(x) = x$,

9. Neka je funkcija f definisana sa $f(x) = \sin x + \sin 2x$.
   a) Naći nule funkcije $f(x)$ u intervalu $[-\pi, \pi]$.
   b) Rešiti nejednačinu $f(x) < 0$ u intervalu $[-\pi, \pi]$.

10. Neka je je funkcija f definisana sa $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-1}$.
    a) Naći $\lim_{x\to 1} f(x)$.
    b) Odrediti intervale monotonosti (rasta i opadanja) funkcije f
    c) Naći ekstremne vrednosti funkcije $f(x)$.
    d) Naći jednačinu tangente grafika funkcije $f(x)$ u tački $A(0, y_0)$.

Svaki zadatak nosi 6 bodova

REŠENJA:

1. Iz $\dfrac{P_K}{O_K}=\dfrac{r^2\pi}{2r\pi}=10$ sledi $r=20$. Kako je $AB=20\sqrt{2}$, to je obim kvadrata $80\sqrt{2}$, a površina 800.

2. Traženi niz a_n je $1,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{4},\frac{1}{4\sqrt{2}},\frac{1}{8},\frac{1}{8\sqrt{2}},\ldots$ odnosno $a_n=(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1}$, $\quad n\in\{1,2,3,\ldots\}$, pa je
   a) količnik $q=\frac{1}{\sqrt{2}}$
   b) $a_{2008}=(\frac{1}{\sqrt{2}})^{2007}$
   c) $\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=2+\sqrt{2}$

3. **a)** 123,124,125,134,135,145,234,235,245,345 tj. $\binom{5}{3}=10$. Kombinacije bez ponavljanja.
   b) 111,112,113,114,115,122,123,124,125,133,134,135,144,145,155,222,223,224,225,233,234,235, 244,245,255,333,334,335,344,345,355,444,445,455,555 tj. $\binom{5+3-1}{3}=35$. Kombinacije sa ponavljanjem.

4. Iz jednačine $\frac{x}{\sqrt{2}}+x+\frac{x}{\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}$ sledi da osnovna ivica x piramidice je $x=\sqrt{2}$, a bočne ivice su joj $y=\frac{x}{\sqrt{2}}=1$, pa je zapremina traženoga tela $V=(2+\sqrt{2})^3-8\cdot\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{2}\cdot y^2)\cdot y=(2+\sqrt{2})^3-\frac{4}{3}$.

5. **a)** $\vec{a}\vec{b}=(\vec{m}+2\vec{n})(\vec{m}-p\vec{n})=4-p\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}-2p\cdot 1^2=0\Leftrightarrow p=2.$
   b) $h_a=\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{a}=4\dfrac{|\vec{n}\times\vec{m}|}{\sqrt{\vec{a}\vec{a}}}=4\dfrac{n\cdot m\cdot\sin\frac{\pi}{3}}{\sqrt{m^2+4mn\cos\frac{\pi}{3}+4n^2}}=4\dfrac{1\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2^2+4\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}+4\cdot 1^2}}=2.$

6. **a)** $|z|-z=1+2i\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}-x-iy=1+2i\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}-x=1\ \wedge\ -y=2\Leftrightarrow\ x=\frac{3}{2}\ \wedge\ y=-2.$
   b) $(1+i\sqrt{3})^{60}=(2e^{i\frac{\pi}{3}})^{60}=2^{60}e^{i\frac{\pi}{3}\cdot 60}=2^{60}e^{20i\pi}=2^{60},\quad \dfrac{z}{\bar{z}}=\dfrac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}=e^{i\frac{2\pi}{3}}=\dfrac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}).$

---

7. $x_1^2+x_2^2=x_1x_2+7\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2=3x_1x_2+7\Leftrightarrow a^2=3\cdot(-2)+7\Leftrightarrow a=\pm 1.$

8. **a)** $x\in\mathcal{D}(f)\Leftrightarrow(3^x)^2-2\cdot 3^x-4>0\Leftrightarrow 3^x\in(-\infty,1-\sqrt{5})\cup(1+\sqrt{5},\infty)\Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow 3^x>1+\sqrt{5}\Leftrightarrow x>\log_3(1+\sqrt{5}).$
   b) $f(x)=x\Leftrightarrow 9^x-2\cdot 3^x-4=3^x\Leftrightarrow(3^x)^2-3\cdot 3^x-4=0\Leftrightarrow 3^x=-1\vee 3^x=4\Leftrightarrow x=\log_3 4.$

9. **a)** $\sin x+\sin 2x=0\Leftrightarrow\sin x(1+2\cos x)=0\Leftrightarrow\sin x=0\vee\cos x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=k\pi\vee x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi.$ Kako je k ceo broj tj. $k\in\{\ldots-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$, to od svih ovih rešenja intervalu $[-\pi,\pi]$ pripadaju samo elementi skupa $\{-\pi,-\frac{2\pi}{3},0,\frac{2\pi}{3},\pi\}$.
   b) Funkcija f neprekidna, te ona menja znak prolaskom kroz svaku svoju nulu. Funkcije f u tački $\frac{\pi}{3}$ je $f(\frac{\pi}{3})=\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}>0$, to sledi da je $f(x)<0\Leftrightarrow x\in(-\frac{2\pi}{3},0)\cup(\frac{2\pi}{3},\pi)$.

---

10. **a)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2+x+1}=\frac{2}{3}$,
   b) $f'(x)=(\frac{x^2-1}{x^3-1})'=\frac{2x(x^3-1)-3x^2(x^2-1)}{(x^3-1)^2}=\frac{x(2x^2+2x+2-3x^2-3x)}{(x-1)(x^2+x+1)^2}=\frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$. Odavde sledi f raste akko $f'(x)>0\Leftrightarrow x\in(-2,0)$ i f opada akko $f'(x)<0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(0,1)\cup(1,\infty)$.
   c) Kako je $f'(0)=f'(-2)=0$ i na osnovu intervala monotonosti funkcije f, sledi da je u tački $A(0,1)$ maksimum i tački $B(-2,-\frac{1}{3})$ minimum.
   d) U tački $A(0,1)$ je ekstrem grafika funkcije f, te je tangenta u tački $A(0,1)$ paralelna sa x osom tj. njena jednačina je $y=1$.

ELEKTROTEHNIKA I RAČUNARSTVO; MEHATRONIKA *jul 2009. godine*

1. **a)** Rešiti jednačinu $\log_4(12 \cdot 2^x + 64) = x$.
   b) Rešiti nejednačinu $\log_x(x^2 - 6) < 1$.

2. Pravougli trapez je opisan oko kruga poluprečnika 2, a jedna osnovica trapeza je za 50% veća od tog poluprečnika. Izračunati površinu P tog trapeza.

3. Na koliko različitih načina Vlada, Aca i Mila mogu podeliti 5 knjiga, pri čemu može da se desi da neko nije dobio nijednu knjigu ako se:
   a) knjige razlikuju
   b) knjige ne razlikuju.

4. Bočne ivice prave pravilne četvorostrane piramide su jednake 1, a ivica njene kvadratne osnove jednaka je x.
   a) Odrediti zapreminu $V(x)$ te piramide u zavisnosti od x.
   b) Odrediti za koje x_1 funkcija $W(x)$ ima maksimum, ako je $W(x) = 18V^2(x)$.
   c) Da li je i zapremina $V(x)$ maksimalna za tu istu vrednost x_1? Ako jeste izračunati $V_{max} = V(x_1)$.

5. Neka je $\vec{a} = 8\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 10\vec{j} + 11\vec{k}$ i $\vec{c} = 6\vec{i} - 9\vec{j} - 7\vec{k}$, gde su $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ jedinični međusobno normalni vektori.
   a) Izračunati intenzitete vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
   b) Izračunati kosinus ugla ψ između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i ispitati da li je $\psi < 60°$ ili je $\psi > 60°$ ili je $\psi = 60°$.
   c) razložiti vektor $\vec{c}$ u pravcu vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ tj. napisati ga u obliku $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, gde su α i β neki realni brojevi.

6. Neka je $z = 1 + i$ kompleksni broj. Izračunati:
   a) modul od z tj. $|z|$.
   b) argument od z tj. $\arg z$.
   c) realni i imaginarni deo broja z^{2009} tj. $R_e(z^{2009})$ i $I_m(z^{2009})$.

7. Najveće rešenje b_1 jednačine $\sqrt{\frac{x^2+1}{5x-5}} = 1$ je prvi član geometrijskoga niza, a $b_4 = 81$ je četvrti član toga istoga geometrijskoga niza.
   a) Izračunati zbir prvih n članova toga niza, $S_n = b_1 + \cdots + b_n$.
   b) Izračunati $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{3^n+1}$.

8. Naći sve realne vrednosti parametra m za koje je $mx^2 - 4x + 3m + 1 > 0$ za svaki realni broj x.

9. Neka je funkcija $f(x)$ definisana sa $f(x) = 5 - 6\sin 2x - \cos 4x$.
   a) Naći nule funkcije $f(x)$.
   b) Rešiti nejednačinu $f(x) \geq 0$.

10. Neka je funkcija $f(x)$ definisana sa $f(x) = \dfrac{x^2 + 7x + 10}{x + 1}$.
    a) Naći $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - x)$ i nule funkcije $f(x)$.
    b) Naći tačke u kojima je $f'(x) = 0$ i odrediti intervale u kojima funkcija $f(x)$ raste tj. gde je $f'(x) > 0$.
    c) Da li u svim tačkama u kojima je $f'(x) = 0$ funkcija $f(x)$ ima ekstremne vrednosti?
    d) Naći jednačinu tangente t grafika funkcije $f(x)$ u tački $A(-2, y_0)$.

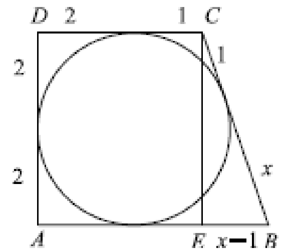
Svaki zadatak nosi 6 bodova

REŠENJA:

1. **a)** $\log_4(12\cdot 2^x+64)=x \Leftrightarrow 12\cdot 2^x+64=4^x \Leftrightarrow 4^x-12\cdot 2^x-64=0$. Uvođenjem smene $t=2^x$ dobija se $t^2-12t-64=0 \Leftrightarrow 2^x=16 \vee 2^x=-4 \Leftrightarrow 2^x=16 \Leftrightarrow x=4$.

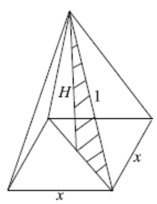
b) Nejednačina je definisana za $x\in(\sqrt{6},\infty)$. $\log_x(x^2-6)<1 \Leftrightarrow x^2-6<x$, tj. $x^2-x-6<0$ čije je rešenje $x\in(-2,3)$ što u preseku sa $x\in(\sqrt{6},\infty)$ daje $x\in(\sqrt{6},3)$.

2. Na slici je prikazan izgled zadatog trapeza. Iz trougla EBC primenom Pitagorine teoreme dobijamo $(x+1)^2=4^2+(x-1)^2 \Leftrightarrow 4x=16 \Leftrightarrow x=4$. Tražena površina je $P=\frac{a+b}{2}\cdot h=\frac{6+3}{2}\cdot 4=18$.



3. **a)** Broj načina na koji se knjige mogu podeliti ako se razlikuju predstavlja broj varijacija sa ponavljanjem pete klase od 3 elementa i iznosi $\overline{V}_5^3=3^5=243$.

b)  Broj načina na koji se knjige mogu podeliti ako se ne razlikuju predstavlja broj permutacija od 7 elemenata od kojih je 5 istih i 2 ista i iznosi $\overline{P}_{5,2}(7)=\frac{7!}{5!\cdot 2!}=21$.

4. 

a) Potrebno je odrediti visinu H zadate piramide. Primenom Pitagorine teoreme dobija se da je $H=\sqrt{1-\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}$, $x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$. Zapremina posmatrane piramide je $V=\frac{1}{3}BH=\frac{x^2}{3}\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}$, $x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

b) $W(x)=18V^2(x)=18\frac{x^4}{9}(1-\frac{x^2}{2})=2x^4-x^6$. $W'(x)=8x^3-6x^5$, pa je $W'(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3(4-3x^2)=0 \Leftrightarrow (x=0 \vee x=\frac{2\sqrt{3}}{3} \vee x=-\frac{2\sqrt{3}}{3})$. Kako je x ivica osnove piramide to mora biti $x>0$. $W''(x)=24x^2-30x^4$, pa je $W''(\frac{2\sqrt{3}}{3})<0$ i funkcija $W(x)$ ima maksimum u tački $x_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

c) Funkcija $V(x)$ je pozitivna, funkcije $V(x)$ i $W(x)$ su neprekidne te $V(x)$ i $W(x)$ istovremeno rastu i opadaju što znači da moraju imati ekstrem u istoj tački. Zapremina $V(x)$ je maksimalna za istu vrednost $x_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ i $V_{max}=V\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{27}$.

5. **a)** $|\vec{a}|=\sqrt{8^2+1^2+4^2}=\sqrt{81}=9$, $|\vec{b}|=\sqrt{2^2+10^2+11^2}=\sqrt{225}=15$.

b) Kako je $\vec{a}\cdot\vec{b}=70$, $|\vec{a}|=9$ i $|\vec{b}|=15$ to je $\cos\psi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{14}{27}>\frac{1}{2}$. Kako je $\cos 60^o=\frac{1}{2}$ i funkcija $\cos x$ je opadajuća na intervalu $(0,\pi)$ to je $\psi<60^o$.

c) $(6,-9,-7)=\alpha(8,1,4)+\beta(2,10,11) \Leftrightarrow (6=8\alpha+2\beta \wedge -9=\alpha+10\beta \wedge -7=4\alpha+11\beta \Leftrightarrow \alpha=1 \wedge \beta=-1$, tj. $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.

6. **a)** $|z|=\sqrt{2}$.

b) $\arg z=\frac{\pi}{4}$.

c) $z^{2009}=(1+i)^{2009}=((1+i)^2)^{1004}\cdot(1+i)=(2i)^{1004}\cdot(1+i)=2^{1004}\cdot i^{4\cdot 251}\cdot(1+i)=2^{1004}\cdot(1+i)$. $R_e(z^{2009})=I_m(z^{2009})=2^{1004}$.

7. **a)** Jednačina je definisana za $\frac{x^2+1}{5x-5}\geq 0$, tj. $x>1$. $\sqrt{\frac{x^2+1}{5x-5}}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{5x-5}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6}{5x-5}=0 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow (x=2 \vee x=3)$, pa je prvi član geometrijskoga niza b_n jednak $b_1=3$. Kako je $b_1=3$, a $b_4=81$ radi se o geometrijskom nizu $b_n=3^n, n\in\mathbb{N}$. Zbir prvih n članova niza geometrijskoga niza b_n je $S_n=3\frac{3^n-1}{3-1}=\frac{3}{2}(3^n-1)$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{3^n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{2}(3^n-1)}{3^n+1}=\frac{3}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n-1}{3^n+1}=\frac{3}{2}$.

8. Posmatrajmo funkciju $y=mx^2-4x+3m+1$. Da bi grafik ove funkcije bila parabola sa otvorom okrenutim nagore potrebno je da bude $m>0$. Kako je $D=(-4)^2-4m(3m+1)$ i s obzirom da je $D=0$ za $m_1=-\frac{4}{3}, m_2=1$, to je $D<0$ za $m\in(-\infty,-\frac{4}{3})\cup(1,\infty)$. Prema tome $y>0$ za svako $x\in\mathbb{R}$ ako je $m\in(1,\infty)$.

9. **a)** $f(x) = 5 - 6\sin 2x - \cos 4x = 5 - 6\sin 2x - (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 5 - 6\sin 2x - (1 - \sin^2 2x - \sin^2 2x) = 4 - 6\sin 2x + 2\sin^2 2x$, Uvođenjem smene $t = \sin 2x$ dobija se jednačina $2t^2 - 6t + 4 = 0$ tj. $t^2 - 3t + 2 = 0$ čija su rešenja $t = 1 \vee t = 2$, što daje $\sin 2x = 1 \vee \sin 2x = 2$. Jednačina $\sin 2x = 2$ nema rešenja, a $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Da bi nejednačina $f(x) \geq 0$ bila zadovoljena potrebno je da važi $\sin 2x \notin (1,2)$, a to važi za sve $x \in \mathbb{R}$.

10. **a)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+7x+10}{x^2+x} = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x+10}{x+1} = 6$,
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow (x = -2 \vee x = -5)$.

b) $f'(x) = \frac{(x^2+7x+10)'(x+1)-(x^2+7x+10)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x = -3 \vee x = 1)$.
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$,

c) Kako važi i $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-3,-1) \cup (-1,1)$, i kako je funkcija $f(x)$ neprekidna na celoj oblasti definisanosti $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ to funkcija $f(x)$ u tački $x_1 = -3$ ima maksimum a u tački $x_2 = 1$ ima minimum.

d) Za $x_0 = -2$ je $y_0 = f(x_0) = 0$ i $f'(-2) = -3$. Jednačina tangente t glasi $t : y - 0 = -3(x+2) \Leftrightarrow y = -3x - 6$.

ELEKTROTEHNIKA I RAČUNARSTVO; MEHATRONIKA

jul 2010. godine

1. Neka su $AB = a$ i $CD = b$ $(a > b)$ osnovice trapeza $ABCD$ i neka su mu kraci međusobno normalni. U zavisnosti od a i b odrediti dužinu duži MN, gde su M i N redom sredine njegovih osnovica AB i CD.

2. **a)** Naći oblast definisanosti (domen) i skup vrednosti (slika) funkcije $f(x) = \frac{x}{|x|}$.

   b) Da li je $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{za} \quad x < 0 \\ 0 & \text{za} \quad x = 0 \\ 1 & \text{za} \quad x > 0 \end{cases}$ za sve realne brojeve x? **c)** Dokazati da je $|x|\operatorname{sgn} x = x$.

3. Koliko ima šestocifrenih brojeva formiranih samo od cifara skupa $A = \{1, 2, 3, 4\}$, sa osobinom da svaka sledeća cifra (krećući se sleva na desno) nije manja od prethodne i

   a) svaka cifra skupa A se pojavljuje bar jednom. **b)** ne mora se pojavljivati svaka cifra skupa A.

4. Neka su P, Q i R tri temena kocke susedna temenu E te iste kocke. Izračunati odnos dužina telesne dijagonale kocke i visine piramide $EPQR$ čiji vrh je tačka E.

5. Neka su A, B, C i D četiri proizvoljne tačke.

   a) Ako je $\overrightarrow{OM} = \vec{r}_M$ i $\overrightarrow{ON} = \vec{r}_N$ ($\vec{r}_M$ i $\vec{r}_N$ su vektori položaja tačaka M i N), izraziti $\overrightarrow{MN}$ u zavisnosti od $\vec{r}_M$ i $\vec{r}_N$.

   b) Korišćenjem rezultata pod **a)** dokazati da je $2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CD}$.

   c) Izračunati ugao između dijagonala AC i BD četvorougla $ABCD$ ako je $AB = 11$, $BC = 13$, $CD = 8$ i $AD = 4$.

6. Neka je $z = -1 - i\sqrt{3}$ kompleksni broj. Izračunati:

   a) modul od z tj. $\rho = |z|$.

   b) argument od z tj. $\varphi = \arg z$ koji pripada intervalu $(-\pi, \pi]$.

   c) realni i imaginarni deo broja z^{2010} tj. $R_e(z^{2010})$ i $I_m(z^{2010})$.

7. Neka je razlika realnih brojeva a i b jednaka -1 i neka je njihov proizvod jednak 12.

   a) Odrediti sve uređene parove realnih brojeva (a, b).

   b) Odrediti normalizovani polinom drugog stepena (koeficijenat uz kvadratni član je 1), takav da $\max\{a, b\}$ $\big($najveći od brojeva a i $b\big)$ uvek jeste nula (koren) tog polinoma. Da li je traženi polinom jedini sa tom osobinom?

8. Neka je funkcija f definisana sa $f(x) = 2\log_{x+1} 5 - \log_5(x+1) + 1$.

   a) Naći nule (korene) funkcije f u skupu realnih brojeva.

   b) Rešiti nejednačinu $f(x) < 0$ u skupu realnih brojeva.

9. Neka je f funkcija definisana sa $f(x) = \sqrt{3} - \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}(\frac{\pi}{3} - x)$.

   a) Naći nule (korene) funkcije f u intervalu $(0, 2\pi)$. **b)** Rešiti nejednačinu $f(x) > 0$ u intervalu $(0, 2\pi)$.

10. Neka je funkcija f definisana sa $f(x) = (x+7)(x^2 + x - 2) = x^3 + 8x^2 + 5x - 14$.

    a) Naći nule funkcije f i rastaviti na proste (nesvodljive) činioce (faktore) polinom $f(x)$.

    b) Naći ekstremne tačke $A\big(\alpha, f(\alpha)\big)$ i $B\big(\beta, f(\beta)\big)$ funkcije f.

    c) Odrediti intervale u kojima funkcija f raste.

    d) Naći jednačine tangenti grafika funkcije f kojima pripada tačka $N(-7, 0)$.

REŠENJA:

1. **Rešenje:** Neka je E presek produžetaka njegovih krakova. Kako je trougao ABE pravougli, to je $ME = \frac{1}{2}a$. Kako je trougao DCE pravougli, to je $NE = \frac{1}{2}b$. Tačke M, N i E su na istoj pravoj (kolinearne) jer su trouglovi ABE i DCE slični, pa je $MN = ME - NE = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(a-b)$.

2. **Rešenje: a)** Domen funkcije $f(x)$ je $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, a skup slika je $\{-1,1\}$.
b) Kako funkcija $f(x)$ ima domen $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, a funkcija sgn ima domen $\mathbb{R}$, to sledi da one nisu jednake funkcije.
c) Za $x<0$ imamo $-x\cdot(-1)=x$, za $x=0$ sledi $0\cdot 0=0$ i za $x>0$ imamo $x\cdot 1 = x$.

3. **Rešenje: a)** Prvi način: Efektivno ispisano to su brojevi
111234, **1**1**2**234, **1**12**3**34, **1**123**4**4, 1**22**234, 1**2**2**3**34, 1**2**23**4**4, 12**33**34, 12**3**3**4**4, 123**44**4
Drugi način: Svaka od cifara $1,2,3,4$ se mora pojaviti bar jednom i preostaje samo još odabir dve cifre od četiri cifre pod uslovima zadatka pod **b)**, a to su kombinacije sa ponavljanjem od 4 elementa klase 2 tj. $\overline{C_2^4} = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = 10$ ili ispisano **11**, **12**, **13**, **14**, **22**, **23**, **24**, **33**, **34**, **44**. Primetimo da ako dodamo 1,2,3,4 svakoj od prethodnih 10 kombinacija, ali takođe u neopadajućem poretku, tada dobijamo ono ispisano na prvi način.
Treći način:
$ooo|o|o|o$, $oo|oo|o|o$, $oo|o|oo|o$, $oo|o|o|oo$, $o|ooo|o|o$, $o|oo|oo|o$, $o|oo|o|oo$, $o|o|ooo|o$, $o|o|oo|oo$, $o|o|o|ooo$,
jer broj kružića levo od prve pregrade je broj jedinica, broj kružića između prve i druge pregrade je broj dvojki, broj kružića između druge i treće pregrade je broj trojki i broj kružića desno od treće pregrade je broj četvorki. Jasno je da tačno jedna pregrada može da stoji između dva simbola ,,o" (kružića) i kako tih mesta između kružića ima 5, to od tih pet mesta biramo 3 na kojima će biti simboli | (pregrade), pa je rezultat broj kombinacija bez ponavljanja od 5 elemenata klase 3 tj. $C_3^5 = \binom{5}{3} = 10$.
b) $\overline{C_6^4} = \binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6} = \binom{9}{3} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = 84$, jer su to kombinacije od 4 elementa klase 6 sa ponavljanjem.
Rešenje se priznaje samo ako su ili ispisane sve mogućnosti ili napisane formule $\binom{4+2-1}{2}$ ili $\binom{5}{3}$ odnosno $\binom{4+6-1}{6}$. Ako je samo napisan rezultat 10 odnosno 84, tada se ne priznaje.

4. **Rešenje:** Neka je ivica kocke a i visina piramide h.
Prvi način: Ako je T težište $\triangle PQR$, tada je $TE^2 = EP^2 - TP^2 \Leftrightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{2}{3}\frac{(a\sqrt{2})\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$. $\frac{a\sqrt{3}}{h} = 3$.
Drugi način: Kako je zapremina piramide V_{EPQR} jednaka šestini zapremine kocke, to iz $V_{EPQR} = \frac{1}{3}B\cdot h$ sledi $\frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{3}\frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}\cdot h$ tj. $h = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$. Traženi odnos je $\frac{a\sqrt{3}}{\frac{1}{3}a\sqrt{3}} = 3$.
Treći način: Uglovi koje obrazuje dijagonala kocke iz temena E sa ivicama EP, EQ, ER su jednaki uglovima koje obrazuje visina piramide sa tim istim ivicama, pa visina pripada dijagonali. Kako je visina piramide normalna na $\triangle PQR$ (jer je pravilna), to je i telesna dijagonala normalna na $\triangle PQR$. Uočimo dijagonalni presek kocke, pravougaonik čije stranice su a i $a\sqrt{2}$. Dijagonala tog pravougaonika $a\sqrt{3}$, je telesna dijagonala kocke, a projekcija stranice a na tu dijagonalu je tražena visina h te piramide, jer je ravan trougla PQR normalna na telesnu dijagonalu kocke, pa se projekcije tačaka P,Q,R na telesnu dijagonalu poklapaju sa težištem $\triangle PQR$. Kateta a pravouglog trougla je geometrijska sredina njene projekcije h na hipotenuzu i hipotenuze $a\sqrt{3}$, pa je $a^2 = h\cdot a\sqrt{3}$ tj. $h = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$ i $\frac{a\sqrt{3}}{h} = 3$.
Četvrti način: Projekcije neke tri ivice kocke na telesnu dijagonalu te kocke prekrivaju celu dijagonalu, a bez krajnjih tačaka one su međusobno disjunktne. Kako te ivice kocke obrazuju iste uglove sa telesnom dijagonalom kocke, sledi da su te tri projekcije jednake, od kojih je jedna visina h piramide $EPQR$, pa je traženi odnos $3:1=3$.

5. **Rešenje: a)** $\overrightarrow{MN} = \vec{r}_N - \vec{r}_M$ **b)** $2(\vec{r}_C - \vec{r}_A)\cdot(\vec{r}_D - \vec{r}_B) = (\vec{r}_C - \vec{r}_B)^2 + (\vec{r}_D - \vec{r}_A)^2 - (\vec{r}_B - \vec{r}_A)^2 - (\vec{r}_D - \vec{r}_C)^2 \Leftrightarrow 0 = 0$.
c) Na osnovu rezultata pod **b)** sledi $2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = 13^2 + 4^2 - 11^2 - 8^2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$.

6. **Rešenje: a)** $\rho = |z| = 2$. **b)** $\varphi = \arg z = -\frac{2\pi}{3}$. **c)** Prvi način: $z^{2010} = (-1-i\sqrt{3})^{2010} = \left((-1-i\sqrt{3})^3\right)^{670} = \left((-1-i\sqrt{3})^2(-1-i\sqrt{3})\right)^{670} = \left((-2+2i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})\right)^{670} = 8^{670} = 2^{2010}$. $R_e(z^{2010}) = 2^{2010}, I_m(z^{2010}) = 0$.
Drugi način (Korišćenjem trigonometrijskog oblika kompleksnog broja $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$): $(-1-i\sqrt{3})^{2010} = 2^{2010}(\cos\frac{-2\pi}{3} + i\sin\frac{-2\pi}{3})^{2010} = 2^{2010}(\cos\frac{-4020\pi}{3} + i\sin\frac{-4020\pi}{3}) = 2^{2010}(\cos 1340\pi - i\sin 1340\pi) = 2^{2010}$.
Koristili smo formulu $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$.

7. **Rešenje: a)** Rešavanjem sistema $a-b=-1$, $ab=12$ dobijaju se rešenja $(a,b)\in\{(-4,-3),(3,4)\}$ **b)** Kako je $\max\{-4,-3\} = -3$ i $\max\{3,4\} = 4$, to normalizovani polinom drugog stepena čiji koreni su $x_1 = -3$ i $x_2 = 4$ jeste po Vietovim formulama $x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2 = x^2 - x - 12$ i on je jedini sa tom osobinom.

Rešenje: Smenom $t=\log_5(x+1)$ dobija se $f(x)=F(t)=\frac{2}{t}-t+1=\frac{-t^2+t+2}{t}=-\frac{t^2-t-2}{t}=-\frac{(t+1)(t-2)}{t}$.
a) $f(x)=F(t)=0 \Leftrightarrow t=-1 \vee t=2 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{5} \vee x=24$, jer je $x=5^t-1$ zbog $t=\log_5(x+1)$
b) $-\frac{(t+1)(t-2)}{t}<0 \Leftrightarrow \frac{(t+1)(t-2)}{t}>0 \Leftrightarrow t\in(-1,0)\cup(2,\infty) \Leftrightarrow x=5^t-1\in(-\frac{4}{5},0)\cup(24,\infty)$.

Rešenje: $f(x)=\sqrt{3}-\mathrm{tg}\,x-\mathrm{tg}(\frac{\pi}{3}-x)=\sqrt{3}-\mathrm{tg}\,x-\frac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}-\mathrm{tg}\,x}{1+\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}\mathrm{tg}\,x}=\sqrt{3}-\mathrm{tg}\,x-\frac{\sqrt{3}-\mathrm{tg}\,x}{1+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x}=\frac{-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x(\mathrm{tg}\,x-\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x}$.
a) $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x(\mathrm{tg}\,x-\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x}=0 \Leftrightarrow x=k\pi \vee x=\frac{\pi}{3}+k\pi$. Iz intervala $(0,2\pi)$ su samo nule $\frac{\pi}{3}$, π i $\frac{4\pi}{3}$.
b) $f(x)>0 \Leftrightarrow \frac{-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x(\mathrm{tg}\,x-\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x}>0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{tg}\,x(\mathrm{tg}\,x-\sqrt{3})}{\mathrm{tg}\,x+\frac{1}{\sqrt{3}}}<0 \Leftrightarrow$
$\mathrm{tg}\,x\in(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}})\cup(0,\sqrt{3}) \Leftrightarrow x\in(-\frac{\pi}{2}+k\pi,-\frac{\pi}{6}+k\pi)\cup(k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi)$.
Intervalu $(0,2\pi)$ pripada samo $(0,\frac{\pi}{3})\cup(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6})\cup(\pi,\frac{4\pi}{3})\cup(\frac{3\pi}{2},\frac{11\pi}{6})$.

$\mathrm{tg}\,x \quad -\infty \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad 0 \quad \sqrt{3} \quad \infty$

$\mathrm{tg}\,x$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\mathrm{tg}\,x-\sqrt{3}$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\mathrm{tg}\,x+\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\frac{\mathrm{tg}\,x(\mathrm{tg}\,x-\sqrt{3})}{\mathrm{tg}\,x+\frac{1}{\sqrt{3}}}$	$-$	$+$	$-$	$+$

Rešenje: a) Nule funkcije f su $-7,-2$ i 1, dok je $f(x)=(x+7)(x+2)(x-1)$.
b) Ekstremi slede iz $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2+16x+5=0 \Leftrightarrow x=-5 \vee x=-\frac{1}{3}$, pa je $A(-5,36)$ i $B(-\frac{1}{3},-\frac{400}{27})$. Tačka A je maksimum, a tačka B je minimum jer $f''(x)=6x+16$, $f''(-5)=-14<0$ i $f''(-\frac{1}{3})=14>0$.
c) Funkcija f raste za $f'(x)>0 \Leftrightarrow 3x^2+16x+5>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-5)\cup(-\frac{1}{3},\infty)$
d) Jednačina tangente na krivu $y=f(x)$ kroz tačku $(-7,0)$ je $y-0=f'(\gamma)(x+7)$, gde $P(\gamma,f(\gamma))$ pripada i grafiku funkcije f i grafiku tangente $y-0=f'(\gamma)(x+7)$, pa sledi da je $f(\gamma)=f'(\gamma)(\gamma+7) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\gamma+7)(\gamma+2)(\gamma-1)=(3\gamma^2+16\gamma+5)(\gamma+7) \Leftrightarrow \gamma=-7 \vee 2\gamma^2+15\gamma+7=0 \Leftrightarrow \gamma=-7 \vee \gamma=-\frac{1}{2}$,
pa su jednačine traženih tangenti $y-0=f'(\gamma)(x+7)$ za $\gamma\in\{-7,-\frac{1}{2}\}$ tj. $y=40(x+7)$ i $y=-\frac{9}{4}(x+7)$.

1. Rešiti nejednačinu: $\dfrac{1-2x}{x^2-5x+6} < \dfrac{2}{5}$.
2. Rešiti jednačinu: $\log_2(2^x+2) = 3-x$.
3. Rešiti jednačinu: $\cos x + \sin\dfrac{x}{2} + 2 = 0.$
4. Dokazati da za svako $n \in N$ važi:
$$\frac{1}{1\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 13} + \ldots + \frac{1}{(6n-5)\cdot(6n+1)} = \frac{n}{6n+1}.$$
5. Neka su x_1 i x_2 rešenja jednačine: $x^2+5(2m-3)x+6(m-1)=0$. Odrediti parametar m tako de je : $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{13}{6}$.
6. Dati su brojevi $a=-6$ i $b=48$. Odrediti brojeve x i y, $a<x<y<b$, tako da a,x,y čine aritmetičku a x,y,b geometrijsku progresiju.
7. Pun ugao je podeljen na tri dela (ugla) koji se odnose kao 2:3:4. Za koliko je stepeni drugi deo veći od prvog, a za koliko je treći veći od drugog? Za koliko procenata je drugi deo veći od prvog, a za koliko je treći veći od drugog?
8. Ako je površina kruga upisanog u romb jednaka 12π, a jedan ugao romba je 60^o, izračunati dijagonale romba.
9. Prava pravilna šestostrana piramida osnovne ivice $a=6$ i bočne ivice $s=10$ presečena je ravni koja prolazi kroz sredinu visine a paralelna je ravni osnove. Izračunati površinu dobijene zarubljene piramide.
10. Neka su P,Q,R,S redom sredine stranica AB,BC,CD i DA proizvoljnog četvorougla $ABCD$ i neka je $\vec{AB}=\vec{p}, \vec{BC}=\vec{q}$ i $\vec{CD}=\vec{r}$. Ako je $\{M\} = PR \cap QS$, izraziti vektor $\vec{AM}$ u zavisnosti od vektora $\vec{p}, \vec{q}$ i $\vec{r}$.

Svaki zadatak nosi 6 bodova.

REŠENJE

1. $$\frac{1-2x}{x^2-5x+6} < \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{5-10x}{x^2-5x+6} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2-7}{x^2-5x+6} < 0 \Rightarrow x \in (-\infty,2)\cup(3,\infty).$$
2. Data jednačina je definisana za svako x.
$\log_2(2^x+2) = 3-x \Leftrightarrow 2^x+2 = 2^{3-x} \Leftrightarrow (2^x)^2 + 2\cdot 2^x - 8 = 0 \Rightarrow x=1$ je rešenje date jednačine.
3. $$\cos x + \sin\frac{x}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(\sin\frac{x}{2} - \frac{3}{2})(\sin\frac{x}{2}+1) = 0 \Rightarrow x \in \{(4k-1)\pi : k \in \mathbf{Z}\}$$

4. Da data jednakost važi za svaki prirodan broj n dokazaćemo koristeći princip matematičke indukcije. Za $n=1$ data jednakost važi, jer je

$$\frac{1}{1\cdot 7}=\frac{1}{6+1}.$$

Pretpostavimo da data jednakost važi za $n=k$, tj.

$$\frac{1}{1\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(6k-5)\cdot(6k+1)}=\frac{k}{6k+1}.$$

Dokazaćemo da data jednakost važi i za $n=k+1$

$$\frac{1}{1\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(6k-5)\cdot(6k+1)}+\frac{1}{(6(k+1)-5)\cdot(6(k+1)+1)}=$$

$$=\frac{k}{6k+1}+\frac{1}{(6k+1)\cdot(6k+7)}=\frac{k+1}{6k+7}.$$

Dakle, na osnovu principa matematičke indukcije data jednakost važi za svaki prirodan broj n.

5. $$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{13}{6}\Leftrightarrow\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{13}{6}\Leftrightarrow\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}-2=\frac{13}{6}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\dfrac{(-5(2m-3))^2}{6(m-1)}=\dfrac{25}{6}\Leftrightarrow 4m^2-13m+10=0\Rightarrow m\in\left\{\dfrac{5}{4},2\right\}$ (Primetimo da je $m\neq 1$. Iz $m=1$ sledilo bi da su rešenja $x_1=0, x_2=5$, tj. da data jednakost nije definisana).

6. Iz činjenice da su a,x,b članovi aritmetičke progresije sledi da je $x=\dfrac{a+y}{2}=\dfrac{y-6}{2}$. Iz činjenice da su x,y,b članovi geometrijske progresije sledi da je $y^2=xb\Rightarrow x=\dfrac{y^2}{48}$. Rešavajući dati sistem jednačina dobija se da je $x=3; y=12$.

7. Označimo uglove sa α,β,γ. Iz uslova

$\alpha=2x;\ \beta=3x;\ \gamma=4x;\ \alpha+\beta+\gamma=2\pi\Rightarrow x=40^o\Rightarrow\alpha=80^o,\beta=120^o,\gamma=160^o\Rightarrow$

$\Rightarrow\beta-\alpha=40^o,\gamma-\beta=40^o$. Ugao β je veći od ugla α za 50% a ugao γ od ugla α za $\dfrac{100}{3}\%$.

8. Označimo sa r poluprečnik upisanog kruga, h visinu romba, a sa d_1, d_2 dijagonale romba. $r^2\pi=12\pi\Rightarrow r=2\sqrt{3}; h=2r=4\sqrt{3}; \alpha=\sphericalangle DAB=60^o$. Dakle, trougao ABD je jednakostraničan. Sledi da je $d_2=BD=AB=\dfrac{2h}{\sqrt{3}}=8; d_1=AC=2h=8\sqrt{3}$.

9. $VA_1:VA=A_1B_1:AB=VO_1:VO=1:2\Rightarrow a_1=A_1B_1=3\wedge s_1=5$.

$$l=\frac{a-a_1}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow h=\sqrt{s_1^2-l^2}=\frac{\sqrt{91}}{2}.$$

$$P=B+B_1+M=6\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+6\frac{a_1^2\sqrt{3}}{4}+6\frac{a+a_1}{2}h=\frac{3}{2}(45\sqrt{3}+9\sqrt{91}).$$

10. $\vec{AM}=\vec{AP}+\vec{PM}$. Kako je $PQRS$ paralelogram (PQ i RS su paralelne i podudarne kao srednje linije trouglova ABC i CDA) to sledi da je

$$\vec{AM}=\vec{AP}+\frac{1}{2}\vec{PR}=\frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{1}{2}(\vec{PB}+\vec{BC}+\vec{CR})=\frac{1}{2}(\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{AB}+\vec{BC}+\frac{1}{2}\vec{CD})=$$

$$=\frac{3}{4}(3\vec{p}+2\vec{q}+\vec{r}).$$

1. Rešiti nejednačinu: $\dfrac{x^2-|x|-12}{x-3} \geq 2x$.

2. U jednačini $mx^2+3x-(4m-6)=0$ odrediti parametar m tako da jednačina ima korene x_1 i x_2 različitog znaka za koje je $x_1^2+x_2^2=5$.

3. Rešiti nejednačinu : $4^{x-1}-5\cdot 2^{x-2}<6$.

4. Naći $x\in[0,\pi)$ tako da je $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x+\sin^2 4x=2$.

5. Dokazati da za svako $n\in N$ važi:
$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)}=\frac{n+1}{2n+3}.$$

6. Rešiti sistem: $\log_2 2x-2\log_4 y=1 \wedge (\log_4 x)\log_x(3y^2-x)=1$.

7. Prvi, treći i sedmi član aritmetičkog niza čine prva tri člana geometrijskog niza. Naći količnik geometrijskog niza. Koje mesto u aritmetičkom nizu zauzima četvrti član geometrijskog niza?

8. U krug poluprečnika 9 *cm* upisan je četvorougao *ABCD* sa normalnim dijagonalama, koje se seku u tački *S*. Rastojanja dijagonala od centra kruga *O* su 3*cm* i 7*cm*. Izračunati površinu četvorougla *ABCD* i odnos u kome tačka *S* deli dužu dijagonalu *BD*.

9. Poprečni presek kanala je jednakokraki trapez sa osnovicama *a=10cm* (gornji deo kanala), *b=4cm* (dno kanala) i krakom *c=5cm*. Kopanje kanala je trajalo *6* dana i svakog dana je iskopano *100m* dužine. Kolika je zapremina iskopane zemlje i koliko dana bi trajalo kopanje da je svakog dana iskopano *120m* dužine ?

10. Neka je S sredina stranice *CD* paralelograma *ABCD*, a *O* presek dijagonala *AC* i *BD*.
    a) Ako je $\vec{BO}=\vec{p}, \vec{BC}=\vec{q}$, izraziti vektor $\vec{AS}$ preko vektora $\vec{p}$ i $\vec{q}$;
    b) Ako je *A(1,0,-2), B(3,-1,5), C(0,2,0),* odrediti koordinate tačke S.

Svaki zadatak nosi 6 bodova.

REŠENJA:

1. Za $x\geq 0$ važi
$$\frac{x^2-|x|-12}{x-3}\geq 2x \Leftrightarrow \frac{x^2-x-12}{x-3}-2x\geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+5x-12}{x-3}\geq 0 \Rightarrow x\in[0,3);$$
Za $x<0$ važi
$$\frac{x^2-|x|-12}{x-3}\geq 2x \Leftrightarrow \frac{x^2+x-12}{x-3}-2x\geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+7x-12}{x-3}\geq 0 \Rightarrow x\in(-\infty,0);$$
Dakle, skup rešenja polazne jednačine je skup $(-\infty,3)$.

2. $x_1^2+x_2^2=5 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=5 \Leftrightarrow \left(-\dfrac{3}{m}\right)-2\dfrac{-(4m-6)}{m}-5 \Leftrightarrow m\in\{1,3\}$. Iz uslova $x_1x_2=-\dfrac{4m-6}{m}<0$ sledi da je rešenje $m=3$.

3. $4^{x-1}-5\cdot 2^{x-2}<6 \Leftrightarrow (2^x)^2-5\cdot 2^x-24<0 \Rightarrow 2^x\in(-3,8) \Rightarrow 2 \Rightarrow 2^x\in(0,8) \Leftrightarrow x\in(-\infty,3)$.

4. $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x+\sin^2 4x=2 \Leftrightarrow \dfrac{1-\cos 2x}{2}+\dfrac{1-\cos 4x}{2}+\dfrac{1-\cos 6x}{2}+$
$+\dfrac{1-\cos 8x}{2}=2 \Leftrightarrow 4\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 5x=0$. S obzirom da se traže rešenja nad intervalom $[0,\pi)$ to je skup rešenja daje jednačine $\left\{\dfrac{\pi}{10},\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{10},\dfrac{\pi}{2},\dfrac{7\pi}{10},\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{9\pi}{10}\right\}$.

5. Da data jednakost važi za svaki prirodan broj n dokazažemo koristeći princip matematičke indukcije. Za $n=1$ data jednakost važi, jer je

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}=\frac{1+1}{2\cdot 1+3}=\frac{2}{5}.$$

Pretpostavimo da data jednakost važi za $n=k$, tj. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2k+1)\cdot(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$.

Dokazaćemo da data jednakost važi i za $n=k+1$

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2k+1)\cdot(2k+3)}+\frac{1}{(2k+3)\cdot(2k+5)}=$$

$$=\frac{1}{(2k+3)\cdot(2k+5)}+\frac{k+1}{2k+3}=\frac{k+2}{2k+5}.$$

Dakle, na osnovu principa matematičke indukcije data jednakost važi za svaki prirodan broj *n*.

6. Dati sistem je definisan za $x\in(0,1)\cup(1,\infty);\ y\in(0,\infty)$.

$$\log_2 2x-2\log_4 y=1\Leftrightarrow \log_2 2x-\log_2 y=1\Leftrightarrow \frac{2x}{y}=2\Leftrightarrow x=y.$$

$(\log_4 x)\log_x(3y^2-x)=1\Leftrightarrow \log_x(3y^2-x)=\frac{1}{\log_4 x}=\log_x 4\Leftrightarrow 3y^2-x=4.$ Sledi da je rešenje sistema $(x,y)=\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$.

7. Za aritmetički niz $\{a_n\}$ imamo da je

$a_3^2=a_1\cdot a_7\Leftrightarrow(a_1+2d)^2=a_1\cdot(a_1+6d)\Leftrightarrow a_1=2d$ .Za geometrijski niz $\{b_n\}$ se dobija da je $q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{a_3}{a_1}=\frac{4d}{2d}=2$. $b_4=b_1q^3\Rightarrow a_1+(n-1)d=8a_1\Rightarrow n=1+\frac{7a_1}{d}=15$.

8. Neka je O_2 normalna projekcija centra kruga *O* na dijagonalu *BD* datog četvorougla, a O_1 normalna projekcija centra kruga *O* na dijagonalu *AC* datog četverougla. Sledi da je

$BD=2O_2B=2\sqrt{9^2-3^2}=6\sqrt{2}cm$,

$AC=2O_1A=\sqrt{9^2-7^2}=4\sqrt{2}cm$. Dakle, $P_{ABCD}=\frac{AC\cdot BD}{2}=96cm^2$, a

$DS:SB=(6\sqrt{2}-7)+:(6\sqrt{2}+7)$.

9. Označimo sa *h* dubinu kanala (visina jednakokrakog trapeza).

$$h=\sqrt{c^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}=4m;\ \ B=P_{ABCD}=\frac{a+b}{2}h=28m^2;\ \ H=6\cdot 100=600m;$$

Zapremina je $V=BH=28\cdot 600=16800m^3$; a traženi broj dana *n* je $n=\frac{H}{120}=5$.

10. a) $\vec{AS}=\vec{AD}+\vec{DS}=\vec{q}+\frac{1}{2}\vec{DC}=\vec{q}+\frac{1}{2}(\vec{DB}+\vec{BC})=\frac{1}{2}(3\vec{q}-2\vec{p})$.

b) $\vec{OS}=\frac{1}{2}(\vec{OC}+\vec{OD})=\frac{1}{2}(\vec{OA}+2\vec{OC}-\vec{OB})=$

$=(\frac{1+0-3}{2},\frac{0+4+1}{2},\frac{-2+0-5}{2})=(-1,\frac{5}{2},-\frac{7}{2})$. Dakle , tačka $S(-1,\frac{5}{2},-\frac{7}{2})$.

1. Naći rešenja nejednačine: $\dfrac{-2x^2+8x-2}{x-3} \le -3x$.
2. U jednačini $x^2-2(m+1)x+4m+2=0$ odrediti vrednost parametra m tako da zbir rešenja date jednačine bude jednak zbiru njihovih kvadrata.
3. Rešiti jednačinu : $9^{x-1}-2\cdot 3^{x-1}-3=0$.
4. Rešiti jednačinu $3\log_{x^3} 81-4\log_9 x=-2, x>0, x\ne 1$.
5. Rešiti jednačinu $2-3\cos(\dfrac{\pi}{2}+x)=\cos 2x$.
6. Date su tačke $A(3,1);\ B(5,5)$. Odrediti tačku C u kojoj simetrala duži AB seče y osu, a zatim napisati jednačinu kružnice sa centrom u tački C koja prolazi kroz tačke A i B.
7. Oko kruga poluprečnika $2cm$ opisan je jednakokraki trapez površine $20cm^2$. Naći stranice tog trapeza.
8. Data je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$ zapremine $64cm^2$. Ako je S sredina ivice A_1D_1 odrediti površinu piramide $ABCDS$.
9. Peti član aritmetičkog niza je *14*, a razlika osmog i trećeg člana je *15*. Odrediti prvi član niza i razliku. Koliko članova ovog niza treba sabrati da bi zbir iznosio *26*?
10. U razvoju binoma $\left(\dfrac{2}{x^2}+\sqrt{x}\right)^n$, zbir binomnih koeficijenata prva tri člana je *29*. Odrediti n i izračunati drugi član u razvoju binoma.

Svaki zadatak nosi 6 bodova.

REŠENJA:

1. Data nejednačina je definisana za $x\ne 3$;

$$\frac{-2x^2+8x-2}{x-3}\le -3x \Leftrightarrow \frac{-2x^2+8x-2+3x^2-9x}{x-3}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x-2}{x-3}\le 0 \Rightarrow x\in(-\infty,-1]\cup[2,3)$$

2. Neka su x_1 i x_2 rešenja date jednačine.

$$x_1+x_2=x_1^2+x_2^2 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=x_1+x_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(m+1)^2-2(4m+2)=2(m+1)\Leftrightarrow 2m^2-m-1=0\Leftrightarrow m\in\left\{-\frac{1}{2},1\right\}.$$

3. $9^{x-1}-2\cdot 3^{x-1}-3=0 \Leftrightarrow (3^x)^2-6\cdot 3^x-27=0.$ Ako stavimo $3^x=t$ dobijamo kvadratnu jednačinu $t^2-6t-27=0$ sa rešenjima $t_1=-3, t_2=9$. Jednačina $3^x=-3$ nema rešenja. $3^x=9\Leftrightarrow x=2$. Dakle, skup rešenja date jednačine je $\{2\}$.

4. $$3\log_{x^3} 81-4\log_9 x=-2 \Leftrightarrow 3\frac{1}{\log_{9^2} x^3}-4\log_9 x=-2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{1}{3\cdot\frac{1}{2}\log_9 x^3}-4\log_9 x=-2 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_9 x^3}-4\log_9 x=-2$$. Ako stavimo $\log_9 x=t$ dobijamo

kvadratnu jednačinu $2t^2-t-1=0$ sa rešenjima $t_1=-\dfrac{1}{2}, t_2=1$.

$\log_9 x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}; \log_9 x=1\Leftrightarrow x=9$. Dakle, skup rešenja date jednačine je $\left\{\dfrac{1}{3},9\right\}$.

5. $2-3\cos(\frac{\pi}{2}+x)=\cos 2x \Leftrightarrow 2+3\sin x=\cos 2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2+3\sin x=1-2\sin^2 x \Leftrightarrow 2\sin^2 x+3\sin x+1=0.$ Ako stavimo $\sin x=t$ dobijamo kvadratnu jednačinu $2t^2+3t+1=0$ sa rešenjima

$t_1=-\frac{1}{2}, t_2=-1.$ $\sin x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi : k\in Z\right\}\cup\left\{-\frac{5\pi}{6}+2l\pi : l\in Z\right\}.$

$\sin x=-1 \Leftrightarrow x\in\left\{\frac{3\pi}{2}+2m\pi : m\in Z\right\}.$

Dakle, skup rešenja date jednačine je

$\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi : k\in Z\right\}\cup\left\{-\frac{5\pi}{6}+2l\pi : l\in Z\right\}\cup\left\{\frac{3\pi}{2}+2m\pi : m\in Z\right\}.$

6. Označimo sa k_1 i k_2 koeficijente pravca prave AB i simetrale s duži AB, respektivno. Tada je $k_1=\frac{5-1}{5-3}2$ i $k_2=-\frac{1}{k_1}=-\frac{1}{2}$. Sredina S duži AB ima koordinate $S(4,3)$. Jednačina simetrale s je prava $y-3=-\frac{1}{2}(x-4)$, odnosno prava $y=-\frac{1}{2}x+5$. Kako tačka $C(0,y_0)$ pripada simetrali s sledi da je $y_0=5$, odnosno $C(0,5)$. Kako je $r=|AC|=\sqrt{(0-3)^2+(5-1)^2}=5$ poluprečnik date kružnice, sledi da je jednačina tražene kružnice $x^2+(y-5)^2=25$.

7. Iz $P=\frac{a+b}{2}h=20, h=2r=4$ sledi da je $a+b=10.$ Kako je četvorougao tangentni to je $a+b=2c \Rightarrow c=5$. Iz $c^2=h^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ sledi da je $a-b=6$. Sada iz $a+b=10$ i $a-b=6$ sledi da je $a=8$ i $b=2$.

8. $V=a^3=64 \Rightarrow a=4; B=a^2 \Rightarrow B=16$. $h_1=a=4 \Rightarrow P_{\Delta ADS}=\frac{ah_1}{2}=8.$

$h_2=AS=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=2\sqrt{5} \Rightarrow P_{\Delta ABS}=\frac{ah_2}{2}=4\sqrt{5}$

$h_3=SS_1=A_1B=4\sqrt{2} \Rightarrow P_{\Delta BCS}=\frac{ah_3}{2}=8\sqrt{2}$

$P=B+P_{\Delta ADS}+2P_{\Delta ABS}+P_{\Delta BCS}=8(3+\sqrt{5}+\sqrt{2})$

9. $a_5=a_1+4d=14; a_8-a_3=(a_1+7d)-(a_1+2d)=5d=15 \Rightarrow \Rightarrow d=3; a_1=14-4d=2.$

$S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)=24 \Rightarrow 3n^2+n-52=0 \Rightarrow n=4$

10. $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=1+n+\frac{n(n-1)}{2}=29 \Rightarrow n=7$.

$T_2=\binom{7}{1}\cdot\left(\frac{2}{x^2}\right)^{7-1}\cdot\left(\sqrt{x}\right)=7\cdot 2^6\cdot x^{-12+\frac{1}{2}}=448x^{-\frac{23}{2}}.$

1. Dat je racionalni algebarski izraz: $R(n)=\dfrac{n^3-27}{5n-15}\cdot\left(\dfrac{n+3}{n-3}+\dfrac{n-3}{n+3}-2\right),\ n\in N, n\neq 3.$

   a) Uprostiti dati izraz,
   b) Naći $\lim\limits_{n\to\infty} R(n)$

2. Rešiti nejednačine: $\dfrac{x^2+2x+9}{x-1}\leq -3$.

3. Rešiti jednačinu: $5^{x-1}-3\cdot 5^{2-x}=2$.

4. Rešiti sistem jednačina: $\log(x+5)^3+\dfrac{2}{\log_y 3}=-2,\quad \log_4(x+5)^2+\log_9\dfrac{1}{y}=4$.

5. Rešiti jednačinu: $3\cos x-2\sin^2 x=0$.

6. Dokazati da za svako $n\in N$ važi $1\cdot 1+2\cdot 3+...+\mathrm{n}(2\mathrm{n}\text{-}1)=\dfrac{n(n+1)(4n-1)}{6}$

7. Brojevi *a*<*b*<*c* su prva tri člana aritmetičkog niza. Ako broj *a* povećamo za 8, dobijamo prva tri člana geometrijskog niza. Ako je zbir ova tri člana dobijenog geometrijskog niza 26, odrediti brojeve *a, b* i *c*.

8. Neka su *a=3 i b=2* redom dužine ivica donje i gornje osnove prave pravilne četvorostrane zarubljene piramide $\mathrm{ABCDA}_1B_1C_1D_1$. Ako je α= 45° ugao između bočne ivice *s* i donje osnove *ABCD* naći površinu piramide.

9. Data su temena A(0,0,0), B(1,0,0), C(1,1,0), D(0,1,0), $\mathrm{A}_1(0{,}0{,}1)$, $B_1(1{,}0{,}1)$, $\mathrm{C}_1(1{,}1{,}1)$, $\mathrm{D}_1(0{,}1{,}1)$, kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$

   a) Ako je tačka *M* presek dijagonala kvadrata $A_1B_1C_1D_1$, a *N* presek dijagonala kvadrata $\mathrm{BCC_1B}$, pokazati da su vektori $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ i $\overrightarrow{\mathrm{A}_1B}$ kolinearni.
   b) Odrediti ugao između vektora $\overrightarrow{\mathrm{BA}_1}$ i $\overrightarrow{\mathrm{BC}_1}$

10. Naći jednačine tangente i normalne kružnice $\mathrm{x}^2+y^2+4y-21=0$ u tečki $(4,\mathrm{y}_0),\ \mathrm{y}_0>0$ koja joj pripada.

Svaki zadatak nosi 6 bodova.

REŠENJA:

1. $$R(n)=\frac{(n-3)(n^2+3n+9)}{5(n-3)}\cdot\frac{(n+3)^2+(n-3)^2-2(n^2-9)}{(n-3)(n+3)}$$

a) $$=\frac{1}{5}(n^2+3n+9)\cdot\frac{n^2+6n+9+n^2-6n+9-2n^2+18}{n^2-9}$$
$$=\frac{36}{5}\cdot\frac{n^2+3n+9}{n^2-9}.$$

b) $$\lim_{n\to\infty}R(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{36}{5}\cdot\frac{n^2+3n+9}{n^2-9}=\frac{36}{5}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1+3\frac{1}{n}+9\frac{1}{n^2}}{1-9\frac{1}{n^2}}=\frac{36}{5}\cdot\frac{1+3\cdot 0+9\cdot 0}{1-9\cdot 0}=\frac{36}{5}.$$

2. Polazna nejednakost je ekvivalentna sa

$$\frac{x^2+2x+9}{x-1}+3\le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+5x+6}{x-1}\le 0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{(x+2)(x+3)}{x-1}\le 0$$

	$(-\infty,-3)$	(-3,-2)	(-2,1)	$(1,+\infty)$
$x+2$	-	-	+	+
$x+3$	-	+	+	+
$x-1$	-	-	-	+
$f(x)$	-	+	-	+

Poslednju nejednakost rešavamo pomoću tabele i dobijama da je $x\in(-\infty,-3]\cup[-2,1)$

3. Uvođenjem smene $5^x=t$, $t>0$ eksponencijalna jednačina se svodi na je dnačinu $\frac{1}{5}t-75\frac{1}{t}=2$, tj. na $t^2-10t-375=0$ čija su rešenja $t_1=25$ $t_2=-15$. Zbog *t>0* rešenje t_2 se odbacuje, a iz $t_1=25=5^2=5^x$ sledi da je $x=2$ jedino rešenje polazne jednačine.

4. Rešenje mora da zadovolji uslov $x+5>0, y>0, y\ne 1$. Sistem se primenom pravila logaritmovanja svodi na ekvivalentni sistem

$3\log_2(x+5)+2\log_3 y=-2,\ \ \log_2(x+5)-\frac{1}{2}\log_3 y=4,$

koja se smenama $\log_2(x+5)=t, \log_3 y=s$ svodi na sistem linearnih jednčina

$$3t+2s=-2 \quad t-\frac{1}{2}s=4,$$

čije je rešenje $(t,s)=(2,-4)$. Dakle :

$t=2\Leftrightarrow \log_2(x+5)=2\Leftrightarrow x+5=2^2 \Leftrightarrow x=-1,\ \ s=-4\Leftrightarrow \log_3 y=-4\Leftrightarrow \log_3 y=3^{-4}=\frac{1}{81},$

pa je konačno rešenje sistema $(x,y)=\left(-1,\frac{1}{81}\right)$.

5. $3\cos x-2\sin^2 x=0\Leftrightarrow 3\cos x-2(1-\cos^2 x)=0\Leftrightarrow 2\cos^2 x+3\cos x-2=0$

$$\Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2} \quad\vee\quad \cos x=-2\Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2} \ \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\quad k\in\mathbf{Z}.$$

6. Označimo sa $T(n)$, $n \in N$ dato tvrđenje. Dokaz sprovodimo indukcijom. Za *n=1* je

$$1\cdot(2\cdot 1-1)=\frac{1(1+1)(4\cdot 1-1)}{6} \Leftrightarrow T$$

Predpostavimo da je

$$T(k): \quad 1\cdot 1+2\cdot 3+\ldots+k(2k-1)=\frac{k(k+1)(4k-1)}{6}$$

tačno i dokažimo

$$T(k+1): \quad 1\cdot 1+2\cdot 3+\ldots+k(2k-1)+(k+1)(2k+1)=\frac{(k+1)(k+2)(4k+3)}{6}.$$

Dodavanjem *(k+1)(2k+1)* i levoj i desnoj strani jednakosti *T(k),* dobija se:

$$1\cdot 1+2\cdot 3+\ldots k(2k-1)+(k+1)(2k+1)=\frac{k(k+1)(4k-1)}{6}+(k+1)(2k+1)=\frac{k+1}{6}\left[k(4k-1)+6(2k+1)\right]=$$

$$\frac{k+1}{6}\left(4k^2+11k+6\right)=\frac{k+1}{6}4(k+2)\left(k+\frac{3}{4}\right)=\frac{(k+1)(k+2)(4k+3)}{6},$$

čime je tvrđenje dokazano.

7. Brojevi *a,b,c* su uzastopni elementi aritmetičkog niza, pa možemo napisati da je *b=a+d* i *c=a+2d.* Brojevi *a+8, a+d* i *a+2d* su uzastopni elementi geometrijskog niza, odakle sledi da je

$$(a+d)^2=(a+8)(a+2d),$$

a njihov zbir je 26, te imamo

$$a+8+a+d+a+2d=26 \Leftrightarrow 3a+3d=18 \Leftrightarrow d=6-a$$

Uvrštavanjem ovog rezultata u predhodnu jednačinu dobija se:

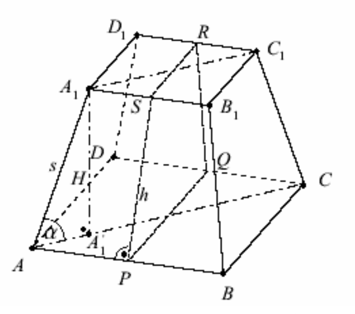
$$6^2=(a+12-2a)(a+8) \Leftrightarrow a^2-4a-60=0 \Leftrightarrow a=10 \quad \vee \quad a=-6$$

Rešenje *a=10* odbacujemo budući da iz njega sledi da je *d=-4* , što protivreči uslovu da brojevi *a,b* i *c* prestavljaju uzastopne elemente rastućeg aritmetičkog niza, tako da je jedino zadovoljavajuće rešenje *a=-6, d=12*, odakle su traženi brojevi *a=-6, b=6, c=18.*

8. Trougao $AA_1'A_1$ je jednakokrako pravougli, pa je $AA_1'=H$ te iz jednakokrakog trapeza ACC_1A_1 imamo

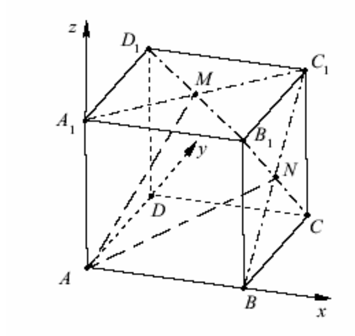
$$2H+b\sqrt{2}=a\sqrt{2} \Leftrightarrow H=\frac{\sqrt{2}}{2}\,(a-b)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Poprečni presek piramide je jednakokraki trapez *PQRS* čije su osnovice *a i b,* krak visina bočne strane *h, a* visina jednaka *H.* Stoga je $h=\sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+H^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$



Površina piramide je $P=B_1+B_2+M=a^2+b^2+4\cdot\frac{a+b}{2}h=13+5\sqrt{3}$

9. $a)$ M sredina $A_1C_1 \Rightarrow M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$ N sredina $BC_1 \Rightarrow N\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$



$\overrightarrow{MN}=\left(1-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-1\right)=\left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{A_1B}=(1-0,0-0,0-1)=(1,0,-1)$

Dakle , $\overrightarrow{A_1B}=2\overrightarrow{\mathrm{MN}}$, pa su $\overrightarrow{A_1B}$ i $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ kolinearni.

Napomena: Duž MN je srednja linija trougla C_1A_1B pa je $MN\|A_1B$,

odnosno vektori $\overrightarrow{\mathrm{A}_1B}$ i $\overrightarrow{MN}$ kolinearni

$$\angle\left(\overrightarrow{BA_1},\ \overrightarrow{BC_1}\right)=\arccos\frac{\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}}{|BA_1||BC_1|}=\arccos\frac{(-1)\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot 1}{\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}\sqrt{0^2+1^2+1^2}}=\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}.$$

10. **I način**. Jednačina kružnice se može napisati u obliku $x^2+(y+2)^2=25$ iz kog se vidi da na kružnici imamo dve tačke sa x-koordinatom 4: (4,1) i (4,-5), od kojih samo prva zadovoljava uslov $y_0>0$. Dakle, jednačinu tangente $y-y_0=k_t(x-x_0)$ i normale $y-y_0=k_n(x-x_0)$ tražimo u tački $(x_0,y_0)=(4,1)$.

Eksplicitni oblik jednačine date kružnice je $y=-2\pm\sqrt{25-x^2}$. Prvi izvod je $y'=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}$ pa je $k_t=y'(4)=-\frac{4}{3}$. Prema tome jednačina tangente je

$$y-1=-\frac{4}{3}(x-4)\Leftrightarrow y=-\frac{4}{3}x+\frac{19}{3}.$$

Kako je $k_n=-\frac{1}{k_t}$, jednačina normale je

$$y-1=\frac{3}{4}(x-4)\Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x-2.$$

II način. Jednačina prave koja prolazi kroz tačku (4,1) je $y=k(x-4)+1$. Zamenivši y u jednačinu kružnice dobijamo da je

$$x^2+(k(x-4)+1)^2+4(k(x-4)+1)-21=0\Leftrightarrow(1+k^2)x^2+(6k-8k^2)x+16k^2-24k-16=0$$

Da bi posmatrana prava bila tangenta kružnice dovoljno je da diskriminanta poslednje kvadratne jednačine po x bude jednaka nuli, tj.

$$D=(6k-8k^2)^2-4(1+k^2)(16k^2-24k-16)=0\Leftrightarrow(3k+4)^2=0\Leftrightarrow k=-\frac{4}{3}$$

Dakle, jednačina tražene tangente je

$$y=-\frac{4}{3}(x-4)+1\Leftrightarrow y=-\frac{4}{3}x+\frac{19}{3}$$

odnosno normale

$$y=\frac{3}{4}(x-4)+1\Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x-2$$

1. Dat je izraz $I(a,b)=\dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2}-\dfrac{a^2-b^2}{a-b}+a$

   a) Uprostiti dati izraz.
   b) Izračunati vrednosti datog izraza za $a=1-i$, $b=2$.

2. Data je funkcija $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+5}{x^2-1}$

   a) Rešiti nejednačinu $f(x)\le 1$.
   b) Naći $f'(x)$

3. Rešiti nejednačinu $4^{\sqrt{x-2}}-10\cdot 2^{\sqrt{x-2}}+16>0$.

4. Rešiti sistem jednačina: $\log_2 x+\log_9 y=5$.

$$\log_2 x^3-\frac{4}{\log_y 3}=4$$

5. Ako je $tg\alpha=\dfrac{4}{5}$, izračunati $\sin\left(\dfrac{13\pi}{2}-2\alpha\right)$.

6. Date su tačke $U(8,4)$, $V(6,-10)$ i $W(2,2)$.

   a) Pokazati da su vektori $\overrightarrow{WU}$ i $\overrightarrow{WV}$ ortogonalni
   b) Napisati jednačinu kružnice čiji je prečnik duž UV i jednačinu njene tangente u tački U.

7. Odrediti tri uzastopna člana opadajuće aritmetičke progresije,ako je njihov zbir 15, a zbir njihovih kubova 645.

8. Presek dijagonala jednakokrakog trapeza $PQRS$ sa osnovicama $PQ=a$ i $RS=b$ je tačka M .Ako je ugao $\sphericalangle RMS$ jednak 120^0, diagonala tog trapeza $d=6$, a $c=5$, izračunati površinu trapeza

9. Neka je kocku $ABCDA_1B_1C_1D_1$ stranice m upisana kupa čija je upisana u kvadrat $ABCD$, a vrh je u središtu kvadrata $A_1B_1C_1D_1$. Odrediti odnos $R:r$, gde je R poluprečnik sfere opisane oko te kupe, a r poluprečnik sfere upisane u kupu.

10. Ako se binomni koeficijent drugog člana prema binomnom koeficijentu trećeg člana u razvoju binoma $\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^n$ odnosi kao 2:17, odredi član u razvoju koji ne zavisi od x.

Svaki zadatak nosi 6 bodova.

REŠENJA:

1. *a)* Izraz je definisan za $a \neq \pm b$. Primenjujući obrasce za razliku kubova i razliku kvadrata, i svođenjem na zajednički imenilac dobijamo da je

$$I(a,b) = \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(a+b)} - \frac{(a-b)(a+b)}{a-b} + a = \frac{a^2+ab+b^2}{a+b} - (a+b) + a$$
$$= \frac{a^2+ab+b^2-ab-b^2}{a+b} = \frac{a^2}{a+b}.$$

b) Koristeći uprošćenu formu izraza dobijenog pod *a)*, uvrštavanjem vrednosti za a i b , dobijamo da je

$$I(1-i,2) = \frac{(1-i)^2}{1-i+2} = \frac{1-2i+i^2}{3-i} = \frac{-2i}{3-i}\cdot\frac{3+i}{3+i} = \frac{-6i+2}{10} = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i.$$

2. *a)* Prebacivanjem jedinice na levu stranu nejednačine i faktorisanjem polinoma u brojiocu i imeniocu, dobijamo da je

$$f(x) \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2-5x+6}{x^2-1} \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+1)} \le 0$$

Za određivanje znaka poslednje nejednakosti koristimo sledeću tabelu

	$(-\infty,-1)$	(-1,1)	(1,2)	(2,3)	$(3,+\infty)$
(x-2)(x-3)	+	+	+	-	+
(x-1)(x+1)	+	-	+	+	+
$\frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+1)}$	+	-	+	-	+

Koristeći rezultate iz tabele i imajući u vidu da funkcija nije definisana za $x=-1$ i $x=1$, zaključujemo da je polazna nejednačina zadovoljena za svako $x \in (-1,1) \cup [2,3]$.

b) $f'(x) = \dfrac{(4x-5)(x^2-1)-2x(2x^2-5x+5)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{5x^2-14x+5}{(x^2-1)^2}$

3. Rešenje nejednačine tražimo za x -2≥ 0, tj. Za $x \ge 2$. Uvođenjem smene $t = 2^{\sqrt{x-2}} \ge 1$ polazna nejednačina se svodi na kvadratnu nejednačinu $t^2 - 10t + 16 > 0$ čiji je skup rešenja $t \in (-\infty, 2) \cup (8, \infty)$. Dakle, $t \in [1,2) \cup (8,\infty)$. Vraćanjem smene dobijamo

$$1 \le t < 2 \Leftrightarrow 2^0 \le 2^{\sqrt{x-2}} < 2^1 \Leftrightarrow 0 \le \sqrt{x-2} < 1 \Leftrightarrow 0 \le x-2 < 1 \Leftrightarrow 2 \le x < 3$$

Analogno, $8 < t \Leftrightarrow 2^3 < 2^{\sqrt{x-2}} \Leftrightarrow 3 < \sqrt{x-2} \Leftrightarrow 9 < x-2 \Leftrightarrow 11 < x$

Dakle skup rešenja početne nejednačine je $x \in [2,3) \cup (11,\infty)$

4. Koristeći osobine logaritma transformišemo system na sledeći način:

$$\begin{aligned} &\log_2 x + \log_9 y = 5 \\ &\log_2 x^3 - \frac{4}{\log_y 3} = 4 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} &\log_2 x + \frac{1}{2}\log_3 y = 5 \\ &3\log_2 x - 4\log_3 y = 4 \end{aligned}$$

Zatim, prvu jednačinu predhodno pomnoženu sa –3 dodajemo drugoj jednačini i dobijamo da je

$$\begin{aligned} &\log_2 x + \frac{1}{2}\log_3 y = 5 \\ &-\frac{11}{2}\log_3 y = -11 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} &\log_3 y = 2 \\ &\log_2 x = 4 \end{aligned}$$

Dakle, $y = 3^2 = 9$ i $x = 2^4 = 16$

5. Ako je $tg\alpha = \frac{4}{5}$, izračunati $\sin\left(\frac{13\pi}{2} - 2\alpha\right)$. Svođenjem na osnovni ugao i primenom adicione formule sledi da je

$$\sin\left(\frac{13\pi}{2} - 2\alpha\right) = \sin\left(6\pi + \frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos 2\alpha - \cos\frac{\pi}{2} = 1\cdot\cos 2\alpha - 0\cdot\cos^2\alpha - 1$$

Iz $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1 + tg^2\alpha} = \frac{1}{1 + \frac{16}{25}} = \frac{25}{41}$

dobijamo $\sin\left(\frac{13\pi}{2} - 2\alpha\right) = 2\cdot\frac{25}{41} - 1 = \frac{9}{41}$

6. *a)* Odredimo skalarni proizvod vektora $\overrightarrow{WU}$ =(6,2) i $\overrightarrow{WV}$ =(4,-12).
$\overrightarrow{WU}\cdot\overrightarrow{WV} = (6,2)\cdot(4,-12) = 6\cdot 4 + 2\cdot(-12) = 0$, odnosno $\overrightarrow{WU} \perp \overrightarrow{WV}$.

b) Sredina duži UV, $S = (\frac{8+6}{2}, \frac{4-10}{2}) = (7,-3)$ je centar kružnice. Poluprečnik kružnice je duž $SU = \sqrt{(8-7)^2 + (4+3)^2} = \sqrt{50}$. Jednačina tražene kružnice je $(x-7)^2 + (y-3)^2 = 50$.

Koeficijent pravca prave $p(SU)$ je $k_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4+3}{8-7} = 7$. Koeficijent pravca tangente na kružnicu u tački U je $k_t = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{7}$. Jednačina tražene tangente kroz tačku $U(8,4)$ je $y - 4 = k_t(x-8)$, odnosno $y = -\frac{1}{7} + \frac{36}{7}$.

7. Tražene članove progresije možemo zapisati u obliku $a + d$, a i $a - d$, gde je razlika progresije $d > 0$. Iz uslova da je njihov zbir 15, tada dobijamo

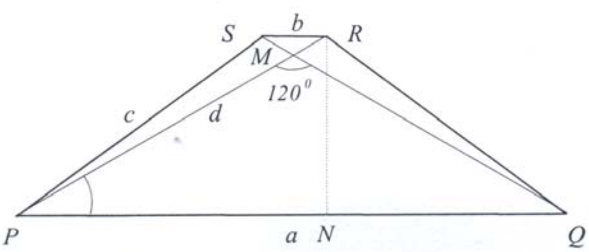
$$a + d + a + a - d = 15 \Leftrightarrow 3a = 15 \Leftrightarrow a = 5$$

Uvrštavanjem u uslov da je zbir kubova 645, tada dobijamo

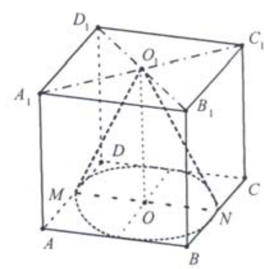
$$\left(a+d\right)^3 + a^3 + \left(a-d\right)^3 = 645 \Leftrightarrow 3a^3 + 6ad^2 = 645 \Rightarrow d = \sqrt{\frac{645 - 3\cdot 5^3}{6\cdot 5}} = 3$$

Dakle traženi članovi progresije su 8,5 i 2 .

8. Presek dijagonala jednakokrakog trapeza $PQRS$ sa osnovicama $PQ = a$ i $RS = b$ je tačka M .Ako je ugao $\sphericalangle RMS$ jednak 120^0, diagonala tog trapeza $d = 6$, a $c = 5$, izračunati površinu trapeza.
Pošto je trougao ΔPMQ jednakokrako sa uglom od 120^0 pri vrhu ,sledi da je $\sphericalangle RPQ = 30^0$ (slika 1).Neka je N podnožje visine h iz temena R na osnovicu a. Iz pravouglog trougla ΔRNP imamo da je $\sin 30^0 = \frac{h}{d}$,odnosno $h = \frac{6}{2} = 3$. Iz pravouglih trouglova ΔPNR i ΔRNQ na osnovu Pitagorine teoreme sledi da je $\overline{PN} = \sqrt{d^2 - h^2} = \sqrt{36-9} = 3\sqrt{3}$, odnosno $\overline{NQ} = \sqrt{c^2 - h^2} = \sqrt{25-9} = 4$, respektivno.Osnovica $a = \overline{PN} + \overline{NQ} = 3\sqrt{3} + 4$. Pošto je $\overline{NQ} = \frac{a-b}{2}$, drugu osnovicu možemo da dobijemo iz $a = 3\sqrt{3} + 4$ i $\frac{a-b}{2} = 4$, pa sledi da je $b = 3\sqrt{3} - 4$. Tražena površina trapeza je $P = \frac{a+b}{2}\cdot h = 9\sqrt{3}$



Slika 1.



Slika 2.

9. Neka je kocku $ABCDA_1B_1C_1D_1$ stranice m upisana kupa čija je upisana u kvadrat $ABCD$, a vrh je u središtu kvadrata $A_1B_1C_1D_1$.Odrediti odnos $R:r$, gde je R poluprečnik sfere opisane oko te kupe, a r poluprečnik sfere upisane u kupu.
Poluprečnik sfere opisane (i upisane) oko kupe odgovara poluprečniku kružnice opisane (i upsiane) oko njenog poprečnog preseka, tj. Jednokakrog trougla ΔMNO_1, čija je osnovica $MN = m$, a kraci su $MO_1 = NO_1 = \sqrt{m^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2} = \frac{m\sqrt{5}}{2}$ (slika 2).

Poluprečnik upisane kružnice nalazimo iz izraza

$$r=\frac{2P}{O}=\frac{2\frac{m\cdot m}{2}}{m+\frac{m\sqrt{5}}{2}+\frac{m\sqrt{5}}{2}}=\frac{m}{\sqrt{5}+1}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}=\frac{m\sqrt{5}-1}{4}.$$

Poluprečnik upisane kružnice dobijamo pomoću sinusne teoreme $R=\frac{b}{2\sin\beta}$, gde je b proizvoljna stranica trougla ΔMNO_1, a β je ugao koji se nalazi naspram te stranice.

Kako iz pravouglog trougla $\triangle ONO_1$ sledi da je $\sin\angle ONO_1=\frac{m}{\frac{m\sqrt{5}}{2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, primenom sinusne teoreme na stranici MO_1 i ugao kod temena N dobijamo da je $R=\frac{\frac{m\sqrt{5}}{2}}{2\frac{2\sqrt{5}}{5}}=\frac{5m}{8}$.

$$\frac{R}{r}=\frac{\frac{5m}{8}}{\frac{m\sqrt{5}-1}{4}}=\frac{5}{2\left(\sqrt{5}-1\right)}=\frac{5\left(\sqrt{5}-1\right)}{8}.$$

10. Ako se binomni koeficijent drugog člana prema binomnom koeficijentu trećeg člana u razvoju binoma $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^n$ odnosi kao 2:17, odredi član u razvoju koji ne zavisi od x.

Binimni koeficijent drugog i trećeg člana se odnose kao 2:17, odnosno

$$\binom{n}{1}:\binom{n}{2}=2:17\Leftrightarrow n:\frac{n\left(n-1\right)}{2}=2:17\Leftrightarrow 17n=n\left(n-1\right)\Leftrightarrow n=18.$$

Znamo da je $\left(k+1\right)$-vi član u razvoju binoma $\left(x-x^{-2}\right)^{18}$ jednak

$$\binom{18}{k}x^{18-k}\left(-x^{-2}\right)^k=\binom{18}{k}\left(-1\right)^k x^{18-3k} \text{ za } k=0,1,...,17.$$

Za član koji ne sadrži x mora da važi $18-3k=0$,odnosno $k=6$.Dakle, sedmi član zavisi od x i taj član je jednak

$$\binom{18}{6}\left(-1\right)^6=\binom{18}{6}.$$

1. Izračunati vrednost izraza $\left(\sqrt{\left(\frac{3}{2}-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)^3}\right)^{-3}$

2. Naći sve vrednosti $m \in R$ tako da funkcija $y = (2-m)x^2 + (2m-5)x + 2$ ima minimum i dve različite realne nule.

3. Data je funkcija $f(x) = x - \frac{x^2+x+19}{2x+5}$.
   a) Rešiti nejednačinu $f(x) \geq 1$.
   b) Naći $f'(x)$

4. Rešiti sistem jednačina
$$5 \cdot 2^x - 3^y = 133$$
$$3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^y = 150$$

5. Rešiti jednačinu $\log_2 \sqrt[3]{x} - \log_4 x^3 + 2\log_8 x = \frac{3}{2}$.

6. Rešiti jednačinu $2\cos^2 x + 7\sin x - 5 = 0$

7. Dati su kompleksni brojevi $b_1 = 1+2i, b_2 = 4+3i$ i $b_3 = 11+2i$.
   a) Naći količnik $q = \frac{b_2}{b_1}$.
   b) Pokazati da brojevi b_1, b_2, b_3, tim redom, čine prva tri člana geometrijskog niza i naći zbir prvih pet članova ovog niza.

8. Ako je *A* (-2, -2,0), $\overrightarrow{AB}$ = (6,-1,1) i $\overrightarrow{AD}$ =(2,3,1), odrediti temena *B,C* i *D* i presek dijagonala *T* paralelograma *ABCD.*

9. Oko kružnice prečnika *3cm* je opisan pravougli trapez površine *12cm*^{2}. Izračunati dužine osnovica.

10. Prva pravilna četvorostrana piramida osnovne ivice $a = 12\sqrt{2}cm$ i bočne ivice $s = 13cm$ presečena je ravni koja je paralelna osnovi, a koja visinu deli na dva jednaka dela. Izračunati površinu dobijene zarubljene piramide.

Svaki zadatak nosi 6 bodova.

REŠENJA:

1. Na osnovu osobina parnog i neparnog korena i primenom formule za kub binoma, dati izraz se transformiše na sledeći način:

$$\left(\sqrt{\left(\frac{3}{2}-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)^3}\right)^{-3}=\left(\left|\frac{3}{2}-\sqrt{3}\right|+\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)^{-3}=\left(\sqrt{3}-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)^{-3}=(-1)^{-3}=-1$$

2. Kvadratna funkcija ima minimum ako je $2-m>0$, a ima realne različite nule ako je $D>0$.
$D=(2m-5)^2-4\cdot(2-m)\cdot 2=4m^2-20m+25-16+8m=4m^2-12m+9=(2m-3)^2$,

Pa je $D>0 \Leftrightarrow m\in\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},\infty\right)$.

Dakle, $2-m>0\wedge D>0\Leftrightarrow m<2\wedge m\in\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},\infty\right)\Leftrightarrow m\in\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},2\right)$.

3. *a)* $f(x)\ge 1\Leftrightarrow f(x)-1\ge 0\Leftrightarrow \frac{2x^2+5x-x^2-x-19-2x-5}{2x+5}\ge 0\Leftrightarrow \frac{x^2+2x-24}{2x+5}\ge 0$.

Kako je $x^2+2x-24=0\Leftrightarrow x=-6\vee x=4$ i $2x+5=0\Leftrightarrow x=-\frac{5}{2}$, za rešavanje nejednačine koristimo tabelu

	$(-\infty,-6)$	$\left(-6,\frac{5}{2}\right)$	$\left(-\frac{5}{2},4\right)$	$(4,+\infty)$
$x^2+2x-24$	+	-	-	+
$2x+5$	-	-	+	+
$\frac{x^2+2x-24}{2x+5}$	-	+	-	+

Koristeći rezultate iz tabele i imajući u vidu da funkcija nije definisana za $x=-\frac{5}{2}$, zaključujemo da je polazna nejednačina tačna za svako $x\in\left[-6,-\frac{5}{2}\right)\cup[4,+\infty)$

b) Iz $f(x)=\frac{x^2+4x-19}{2x+5}$ je $f'(x)=\frac{(2x+4)(2x+5)-2\left(x^2+4x-19\right)}{(2x+5)^2}=\frac{2x^2+10x+58}{(2x+5)^2}$.

4. Nakon uvođenja smene $2^x=$ p i $3^y=$ q, dobija se:

$$\begin{matrix} 5p-q=133\backslash\ \cdot 2 \\ 3p+2q=150 \end{matrix}\Leftrightarrow \begin{matrix} 5p-q=133 \\ 13p=416 \end{matrix}\Leftrightarrow \begin{matrix} p=32 \\ q=5p-133 \end{matrix}\Leftrightarrow \begin{matrix} p=32 \\ q=27. \end{matrix}$$

Iz $2^x=2^5$ i $3^y=3^3$ sledi da je rešenje $(x,y)=(5,3)$.

5. Koristeći osobinu $\log_{a^n}x^m=\frac{m}{n}\log_a x$, za $x>0$, datu jednačinu transformišemo na sledeći način:
$\log_2\sqrt[3]{x}-\log_4 x^3+2\log_8 x=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{3}\log_2 x-\frac{3}{2}\log_2 x+\frac{2}{3}\log_2 x=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\log_2 x=-3\Leftrightarrow x=2^{-3}$

6. $2\left(1-\sin^2 x\right)+7\sin x-5=0\Leftrightarrow -2\sin^2+7\sin x-3=0\Leftrightarrow -2t^2+7t-3=0\wedge t=\sin x\Leftrightarrow$
$\left(t=3\vee t=\frac{1}{2}\right)\wedge t=\sin x$

Zbog $t\in[-1,1]$ ostaje samo rešenje za koje je $\sin x=\frac{1}{2}$, tj.
$x\in\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi\,\middle|\,k\in\mathbf{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{6}+2k\pi\,\middle|\,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

7. *a)* $q=\dfrac{b_2}{b_1}=\dfrac{4+3i}{1+2i}\cdot\dfrac{1-2i}{1-2i}=\dfrac{4+3i-8i-6i^2}{1-4i^2}=\dfrac{10-5i}{5}=2-i.$

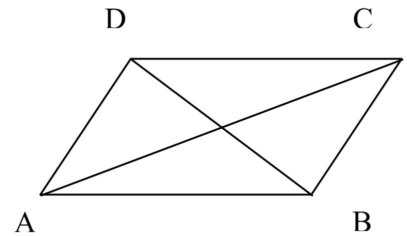
b) Iz $q\cdot b_2=(2-i)(4+3i)=11+2i=b_3$ sledi da brojevi b_1, b_2 i b_3 čine prva tri člana geometrijskog niza sa količnikom q. Četvrti i peti član ovog niza dobijamo iz $b_4=b_3\cdot q=(11+2i)(2-i)=24-7i$ i $b_5=b_4\cdot q=(24-7i)(2-i)=41-38i.$ Zbir prvih pet članova ovog niza je $S_5=b_1+b_2+b_3+b_4+b_5=81-38i.$

8. Neka su kordinate traženih temena
B(x_1,y_1,z_1), C(x_2,y_2,z_2) i D(x_3,y_3,z_3).

$\overrightarrow{AB}=(6,-1,1)\Leftrightarrow(x_1+2,y_1+2,z_1)=(6,-1,1)\Rightarrow B(4,-3,1).$

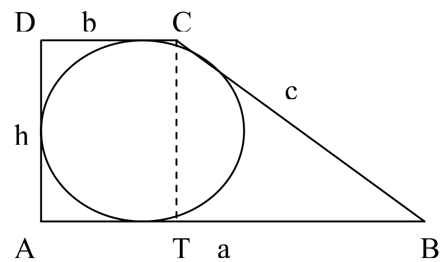
$\overrightarrow{AD}=(2,3,1)\Leftrightarrow(x_3+2,y_3+2,z_3)=(2,3,1)\Rightarrow D(0,1,1).$

$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow(x_2,y_2-1,z_2-1)=(6,-1,1)\Rightarrow C(6,0,2).$

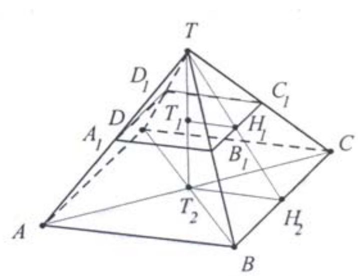


Presek dijagonala T je ujedno I središte duži AC, pa su njegove koordinate
$T\left(\frac{-2+6}{2},\frac{-2+0}{2},\frac{0+2}{2}\right)\Rightarrow T(2,-1,1).$

9. Očigledno je da je visina trapeza h jednaka prečniku upisane kružnice, tj. h=3. površina trapeza $P=\frac{a+b}{2}\cdot h$ je na osnovu zadatka jednaka 12, tj. $\frac{a+b}{2}\cdot 3=12$, odakle sledi $a+b=8$. Iz uslova o tangentnom četvorouglu, imamo da je $a+b=c+h$, odnosno $a+b=c+3$. Iz dobijenih veza sledi da je $8=c+3$, tj. $c=5$. Primenjujući Pitagorinu teoremu u pravouglom trouglu CTB dobijamo da je $c^2=h^2+(a-b)^2$ što zamenom c i h daje $a-b=4$. Sada, iz sistema jednačina $a+b=8$ i $a-b=4$ imamo da su osnovice trapeza a = 6 i b = 2.



10. Iz sličnosti trouglova ΔTT_1H_1 i ΔTT_2H_2 sledi da je $T_1H_1=\frac{1}{2}T_2H_2=\frac{a}{4}$ tj. $A_1B_1=6\sqrt{2}$. Iz pravouglog trougla □CTH_2 sledi da je visina bočne stranice $h=TH_2=\sqrt{s^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{169-36\cdot 2}=\sqrt{97}$, pa je iz sličnosti pomenutih trouglova $H_1H_2=\frac{1}{2}TH_2=\frac{\sqrt{97}}{2}$. Sada je:



$$P=B_1+B_2+M=\left(6\sqrt{2}\right)^2+\left(12\sqrt{2}\right)^2+4\cdot\frac{6\sqrt{2}+12\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{97}}{2}=360+18\sqrt{194}$$

SAOBRAĆAJ, GRAĐEVINARSTVO I GEODEZIJA I GEOMATIKA

jul 2008. godine

1. Odrediti realni parametar a tako da rešenja x_1 i x_2 jednačine $x_2 +(a-2)x-a+1= 0$ zadovoljavaju uslov $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{10}{3}$

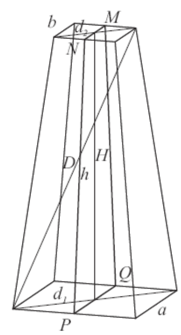
2. Rešiti nejednačinu $\frac{x^2 - 6x + 6}{x - 4} < 1$

3. Rešiti jednačinu $4^{x+1} - 15 \cdot 2^{x+1} = 16$

4. Rešiti jednačinu $\log_2^2(x+2) + \log_{\frac{1}{2}}(x+2)^2 = 3$

5. Rešiti jednačinu $\mathbf{(1+tg^2}\boldsymbol{x}\mathbf{)(2+sin2}\boldsymbol{x}\mathbf{) = 2}$.

6. Ako su $B_1 = 8$ i $B_2 = 2$ površine osnova prave pravilne zarubljene četvorostrane piramide zapremine $V = 28$, izračunati površinu njenog omotača M i dužinu prostorne dijagonale D.



7. Neka su $A(2,1,-2)$, $B(4,0,-1)$ i $C(4,3,2)$ tri uzastopna temena paralelograma $ABCD$. Izračunati koordinate temena D i površinu paralelograma $ABCD$.

8. Dužine stranica pravouglog trougla obrazuju aritmetički niz. Ako je površina trougla $P = \frac{3}{2}$ izračunati dužine stranica i poluprečnik upisane kružnice.

9. Odrediti jednačinu tangente na parabolu $\boldsymbol{y^2 = x}$ u onoj presečnoj tački sa pravom $\boldsymbol{y = -x+2}$ koja se nalazi u I kvadrantu.

10. Data je funkcija $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

    a) Izračunati vrednost funkcije f u tački $x = (1 - \sqrt{2})^2$
    b) Izračunati **f ′(4)**
    c) Izračunati $\lim_{x \to 1} f(x)$

Svaki zadatak nosi 6 bodova.

REŠENJA:

1. Iz Vijetovih formula imamo: $x_1x_2 = 1-a$, $x_1+x_2 = 2-a$. Odatle je

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{(2-a)^2-2(1-a)}{1-a}=$$

$$=\frac{a^2-2a+2}{1-a}=\frac{10}{3} \Leftrightarrow 3a^2-6a+6=10-10a \wedge a\neq 1 \Leftrightarrow 3a^2+4a-4=0 \Leftrightarrow a\in\{-2,\frac{2}{3}\}.$$

2. $$\frac{x^2-6x+6}{x-4}<1 \Leftrightarrow \frac{x^2-6x+6-x+4}{x-4}<0 \Leftrightarrow \frac{x^2-7x+10}{x-4}<0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-5)}{x-4}<0$$

Ispitivanjem znaka činilaca izraza sa leve strane dobijamo $x\in(-\infty,2)\cup(4,5)$.

3. Smenom $\mathbf{2^{x+1}=t}$ dobijamo $\mathbf{t^2-15t-16=0}$ $\quad$ $\mathbf{t_1=-1,\ t_2=16.}$
Prvo rešenje odbacujemo zbog $\mathbf{2^{x+1}>0}$, a iz drugog sledi $\mathbf{2^{x+1}=16=24} \Leftrightarrow \boldsymbol{x=3}.$

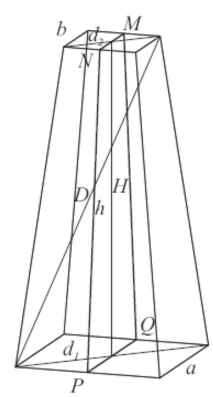
4. Data jednačina je definisana za $x>-2$. Koristeći pravila logaritmovanja dobijamo $\log_2^2(x+2)-2\log_2(x+2)=3$. Uvođenjem smene $\log_2(x+2)=t$ dobijamo jednačinu $t^2-2t-3=0$, čija su rešenja $t_1=-1$, $t_2=3$. Vraćanjem smene dobijamo: $\log_2(x+2)=-1 \Leftrightarrow x+2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$; $\log_2(x+2)=3 \Leftrightarrow x+2=8 \Leftrightarrow x=6$, tako da $x\in\{-\frac{3}{2},6\}$

5. $$(1+\mathrm{tg}^2x)(2+\sin 2x)=2 \Leftrightarrow \frac{\cos^2x+\sin^2x}{\cos^2x}\cdot(2+2\sin x\cos x)=2 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2x}\cdot(1+\sin x\cos x)=1$$

$$\Leftrightarrow 1+\sin x\cos x-\cos^2x=0 \Leftrightarrow \sin^2x+\sin x\cos x=0 \Leftrightarrow \sin x(\sin x+\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin x=0 \vee \sin x=-\cos x \Leftrightarrow \sin x=0\vee \mathrm{tg}x=-1 \Leftrightarrow x\in\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\frac{3\pi}{4}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\}.$$

6. Iz formule za zapreminu zarubljene piramide možemo izračunati njenu visinu: $28=\frac{1}{3}H(8+2+\sqrt{8\cdot 2}) \Leftrightarrow H=6$. Iz površina baza dobijamo dužine ivica i dijagonala osnova:
$a=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}$, $d_1=2\sqrt{2}\sqrt{2}=4$, $d_2=\sqrt{2}\sqrt{2}=2$.
Iz poprečnog preseka $MNPQ$ računamo visinu bočne strane
$h^2=H^2+(\frac{a-b}{2})^2=\frac{73}{2} \Rightarrow h=\sqrt{\frac{73}{2}}$.
Sada možemo izračunati površinu omotača:
$M=4\frac{a+b}{2}h=4\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{73}}{\sqrt{2}}=6\sqrt{73}$
i dužinu dijagonale piramide:
$D^2=H^2+(d_1-\frac{d_1-d_2}{2})^2=45 \Rightarrow D=3\sqrt{5}$.



7. Neka je $D(x,y,z)$. Iz jednakosti vektora $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ sledi $(2,-1,1)=(4-x,3-y,2-z) \Rightarrow D(2,4,1)$. Površina paralelograma predstavlja intenzitet vektorskog proizvoda vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}=(0,3,3)$:

$$P_{ABCD}=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 3 & 3\end{vmatrix}=|(-6,-6,6)|=\sqrt{(-6)^2+(-6)^2+6^2}=6\sqrt{3}.$$

8. Na osnovu odnosa veličina stranica pravouglog trougla označićemo katete sa $a-d$ i a a hipotenuzu sa $a+d$. Iz Pitagorine teoreme sledi

$$(a-d)^2+a^2=(a+d)^2 \Rightarrow a^2-2ad+d^2+a^2=a^2+2ad+d^2 \Rightarrow a(a-4d)=0 \Rightarrow d=\frac{a}{4}.$$

Površina trougla $P=\frac{1}{2}a(a-d)=\frac{1}{2}a(a-\frac{a}{4})=\frac{3}{2}$, odakle sledi $\frac{3a^2}{4}=3$, što daje $a=2$ i $d=\frac{1}{2}$.
Dužine stranica su $\frac{3}{2}$, 2 i $\frac{5}{2}$, a poluprečnik upisane kružnice r dobijamo iz formule za površinu

$$P=r\frac{O}{2} \Rightarrow r=\frac{2P}{O}=\frac{2\cdot\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}}=\frac{1}{2}.$$

9. Presečne tačke (x,y) se dobijaju rešavanjem sistema jednačina prave i parabole:

$$y=-x+2\wedge(-x+2)^2=x \Leftrightarrow y=-x+2\wedge x^2-5x+4=0$$

$$\Leftrightarrow (x=1\vee x=4)\wedge y=-x+2 \Leftrightarrow (x,y)\in\{(1,1),(4,-2)\}.$$

Samo tačka $(1,1)$ pripada prvom kvadrantu. Tangenta u toj tački ima oblik $t:\ y-1=k(x-1)$, gde je $k=f'(1)$. U prvom kvadrantu važi $y^2=x \Leftrightarrow y=\sqrt{x}$, pa je $f'(x)=(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1)=\dfrac{1}{2}$, što daje jednačinu tangente $t:\ y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$.

10.

a) $f\left((1-\sqrt{2})^2\right)=\dfrac{\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}-1}{(1-\sqrt{2})^2-1}=\dfrac{|1-\sqrt{2}|-1}{1-2\sqrt{2}+2-1}=\dfrac{\sqrt{2}-1-1}{2-2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-2)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

b) $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)-(\sqrt{x}-1)}{(x-1)^2}=\dfrac{-x+2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2} \Rightarrow f'(4)=-\dfrac{1}{36}.$

c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2}.$

SAOBRAĆAJ, GRAĐEVINARSTVO I GEODEZIJA I GEOMATIKA

jul 2009. godine

1. Neka su x_1 i x_2 rešenja jednačine $(x+1) : (5-x) = (x+m) : (x-1)$. Odrediti m tako da važi $x_1^2 + x_2^2 < 26$.

2. Data je funkcija $f(x) = \dfrac{2x^2-14}{x^2+x-12}$.
   (a) Rešiti nejednačinu $f(x) \geq 1$.
   (b) Izračunati $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. Rešiti jednačinu $5^{x-1} - 5^{2-x} = 4$.

4. Rešiti nejednačinu $2\log_2 \sqrt{x} + \log_{\frac{1}{2}}(4x^2) > 2$.

5. Rešiti jednačinu $2\sin^2 x - 2\sqrt{2}\cos x = 5$.

6. Koliko članova rastuće aritmetičke progresije treba sabrati da bi se dobio zbir 3, ako je $a_1 + a_6 = 1$ i $a_3^2 = 4$?

7. Dokazati da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $\dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \dfrac{n}{3n+1}$.

8. U četvorouglu $ABCD$ stranica $AD = 2$ i stranica $BC = 2\sqrt{6}$. Dijagonala BD je normalna na stranicu BC. Odrediti stranicu CD ako se zna da je $\measuredangle ABC = \measuredangle BAD = 120°$.

9. Odrediti jednačinu tangente parabole $y^2 = 2x$ u onoj tački preseka parabole sa pravom $x - 2y - 6 = 0$ koja se nalazi u IV kvadrantu.

10. Data je prava pravilna četvorostrana piramida kod koje je ivica osnove $a = 5\sqrt{2}$ i bočna ivica $s = 13$. Izračunati ivicu kocke koja je upisana u piramidu tako da se gornja temena kocke nalaze na bočnim ivicama piramide.

Svaki zadatak nosi 6 bodova.

REŠENJA:

1. Očigledno, za rešenja jednačine mora da važi $x \neq 5$ i $x \neq 1$. Kad se data jednačina pomnoži izrazom $(5-x)(x-1)$ i sredi, dobije se kvadratna jednačina

$$2x^2 + (m-5)x - 1 - 5m = 0\,.$$

Notacija kvadratnog trinoma $ax^2 + bx + c$ daje $a = 2$, $b = m - 5$, $c = -1 - 5m$.
Koristeći Vietove formule imamo

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} = \left(-\frac{m-5}{2}\right)^2 - 2\frac{-1-5m}{2} < 26\,.$$

Poslednja nejednakost je ekvivalentna

$$m^2 + 10m - 75 < 0\,.$$

Rešavajući ovu kvadratnu nejednačinu po m dobijamo

$$m_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 4 \cdot 75}}{2}, m_1 = -15, m_2 = 5, \text{ pa } m \in (-15, 5)\,.$$

Nedozvoljeno rešenje $x = 1$ u kvadratnoj jednačini (1) daje $-4 - 4m = 0$, odnosno $m = -1$, a $x = 5$ nije rešenje jednačine (1) ni za jednu vrednost parametra m. Isključivanjem vrednosti $m = -1$ iz dobijenog intervala za m dobijamo konačno rešenje

$$m \in (-15, -1) \cup (-1, 5)\,.$$

2.

(a)
$$f(x) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 14}{x^2 + x - 12} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 12} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+1)}{(x-3)(x+4)} \geq 0$$

	$(-\infty, -4)$	$(-4, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
$x + 4$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x + 1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x^2-x-2}{x^2+x-12}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Odgovor čitamo iz tabele: $x \in (-\infty, -4) \cup [-1, 2] \cup (3, +\infty)$.

(b)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 14}{x^2 + x - 12} \cdot \frac{x^{-2}}{x^{-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{14}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{12}{x^2}} = \frac{2 - 0}{1 + 0 - 0} = 2\,.$$

3. Uvodimo smenu $5^{x-1} = t$. Dobijamo

$$t - \frac{5}{t} = 4 \Leftrightarrow t^2 - 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \vee t = 5\,.$$

Negativno rešenje, zbog $5^{x-1} > 0$, odbacujemo, vraćamo smenu i dobijamo

$$t = 5^{x-1} = 5^1 \;\Leftrightarrow\; x - 1 = 1 \;\Leftrightarrow\; x = 2\,.$$

4. Data nejednačina je definisana za $x > 0$ i ekvivalentna nejednačini

$$\log_2 x - \log_2 4 - 2\log_2 x > 2 \;\Leftrightarrow\; -\log_2 x > 4 \;\Leftrightarrow\; \log_2 x < -4\,.$$

Odatle zaključujemo $x \in (0, 2^{-4}) = \left(0, \frac{1}{16}\right)$.

5. Primenom osnovnih algebarskih operacija i Pitagorine teoreme: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, dobijamo:

$$2\sin^2 x - 2\sqrt{2}\cos x - 5 = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\cos^2 x + 2\sqrt{2}\cos x + 3 = 0.$$

Smena $\cos x = t$ daje

$$2t^2 + 2\sqrt{2}t + 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; t_{1,2} = \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{8-24}}{2}.$$

Diskriminanta ove kvadratne jednačine je negativna: $8 - 24 = -16$ pa data jednačina nema rešenja u skupu realnih brojeva.

6. Prvo ćemo iz datih jednakosti naći prvi član niza a_1 i razliku d.

$$a_1 + a_1 + 5d = 1 \wedge (a_1 + 2d)^2 = 4 \;\Leftrightarrow\; a_1 = \frac{1-5d}{2} \wedge \left(\frac{1-5d}{2} + 2d\right)^2 = (\pm 2)^2$$

$$\Rightarrow\; \frac{1-5d+4d}{2} = 2 \vee \frac{1-5d+4d}{2} = -2 \;\Leftrightarrow\; d = -3 \vee d = 5\,.$$

Odbacujemo vrednost $d = -3$ jer daje opadajući niz. Dobijamo $a_1 = \frac{1-5\cdot 5}{2} = -12$. Suma n sabiraka aritmetičkog niza je $S_n = (a_1 + a_1 + (n-1)d)\frac{n}{2}$. Rešavamo jednačinu $S_n = 3$.

$$(-12 - 12 + (n-1)\cdot 5)\frac{n}{2} = 3 \;\Leftrightarrow\; 5n^2 - 29n - 6 = 0 \;\Rightarrow\; n = 6\,.$$

(Rešenje poslednje kvadratne jednačine $n = -\frac{1}{5}$ odbacujemo jer nije ceo broj.)

7. Dokazaćemo shemom matematičke indukcije po n.

$n = 1$ $\qquad \dfrac{1}{1\cdot 4} = \dfrac{1}{3+1}$.

$n \to n+1$

$$\overbrace{\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}}^{(*)} + \frac{1}{(3(n+1)-2)(3(n+1)+1)} =$$

$(*)$ - Koristimo indukcijsku pretpostavku:

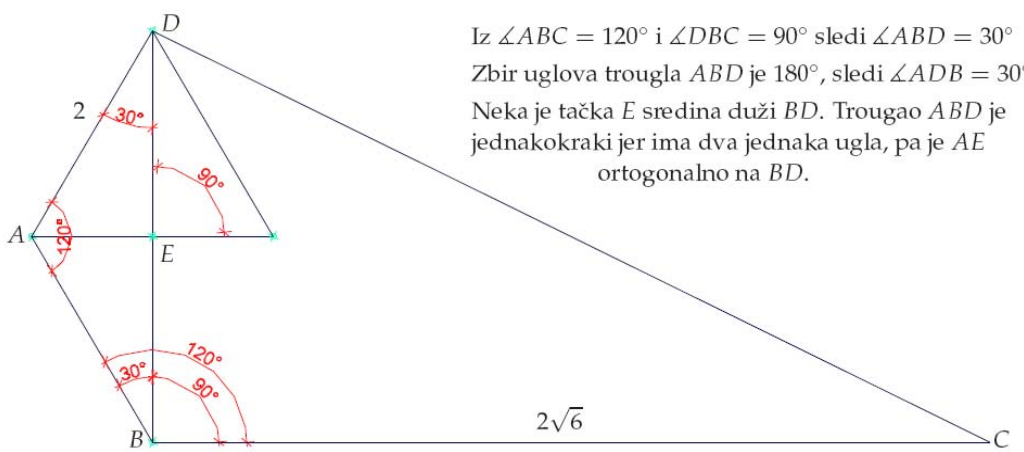
$$= \frac{n}{3n+1} + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{n(3n+4)+1}{(3n+1)(3n+4)} =$$

$$= \frac{3n^2+4n+1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{3n^2+n+3n+1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{n(3n+1)+3n+1}{(3n+1)(3n+4)} =$$

$$= \frac{(3n+1)(n+1)}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{n+1}{3n+4} = \frac{n+1}{3(n+1)+1}\,.$$

Time je dokaz shemom matematičke indukcije završen.

8.



Iz $\measuredangle ABC = 120°$ i $\measuredangle DBC = 90°$ sledi $\measuredangle ABD = 30°$

Zbir uglova trougla ABD je $180°$, sledi $\measuredangle ADB = 30°$.

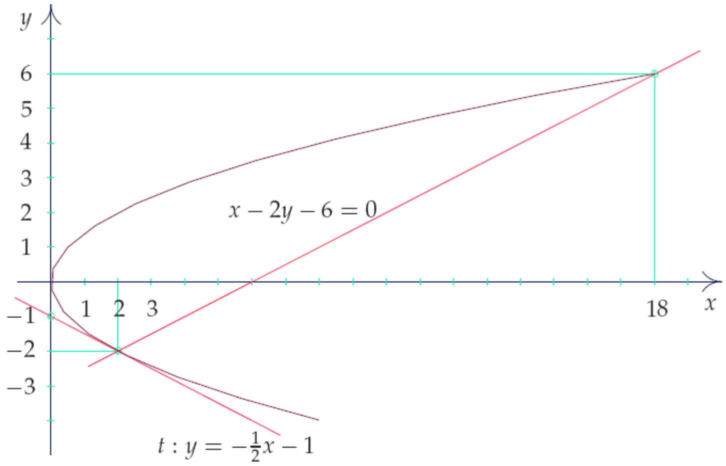
Neka je tačka E sredina duži BD. Trougao ABD je jednakokraki jer ima dva jednaka ugla, pa je AE ortogonalno na BD.

Vidi se da je trougao AED polovina jednakostraničnog trougla, pa je $ED = AD\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.
Onda je $BD = 2ED = 2\sqrt{3}$.
Iz pravouglog trougla DBC dobijamo $CD = \sqrt{BD^2 + BC^2} = \sqrt{4\cdot 3 + 4\cdot 6} = 6$.

9. Apscise presečnih tačaka dobijamo smenjivanjem ordinate $y = \frac{1}{2}x - 3$ iz jednačine prave u jednačinu parabole:

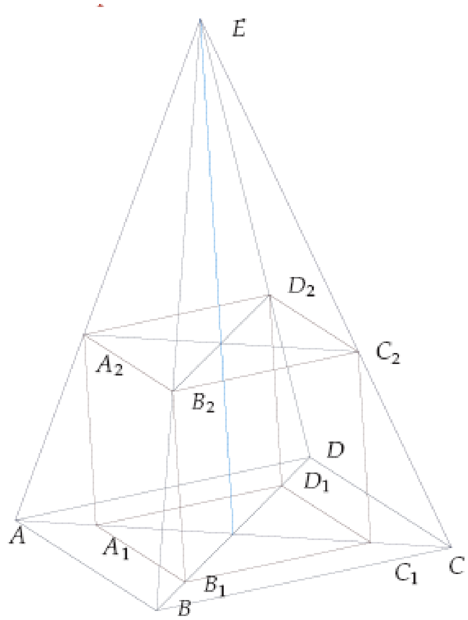
$$\frac{1}{4}x^2 - 3x + 9 = 2x \;\Leftrightarrow\; x^2 - 20x + 36 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 2 \vee x_2 = 18\,.$$

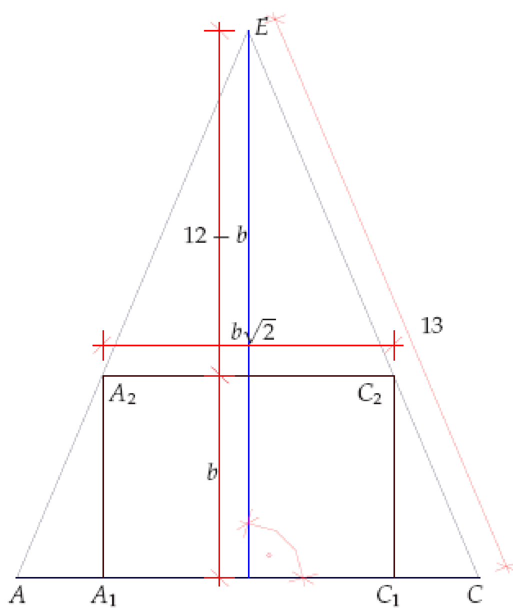
Ordinate dobijamo iz jednačine prave. Presečne tačke su $A(2,-2)$ i $B(18,6)$, tačka A je u IV kvadrantu.



U tački A jednačina parabole je $y = -\sqrt{2x}$, prvi izvod je $y' = -\frac{1}{\sqrt{2x}}$, koeficijent pravca tražene tangente je $k = y'(x_1) = -\frac{1}{\sqrt{2\cdot 2}} = -\frac{1}{2}$. Jednačina tangente je $t : y - (-2) = -\dfrac{1}{2}(x-2) \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{2}x - 1$.

10.





Neka su temena osnove piramide A, B, C i D, neka je vrh E. Neka su temena upisane kocke na osnovi piramide A_1, B_1, C_1, D_1, a na bočnim ivicama A_2, B_2, C_2 i D_2. Neka je $b = A_1B_1$ tražena ivica.
Dijagonala osnove piramide je $AC = 5\sqrt{2}\sqrt{2} = 10$, dijagonala osnove kocke je $A_2C_2 = b\sqrt{2}$.
Pitagorina teorema za polovinu jednakokrakog trougla ACE daje visinu piramide $H = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.
Iz sličnosti trouglova ACE i A_2C_2E sledi proporcija:

$$\frac{12-b}{12} = \frac{b\sqrt{2}}{10} \Leftrightarrow 120 - 10b = 12\sqrt{2}b \Leftrightarrow b = \frac{120}{12\sqrt{2}+10} = \frac{60}{6\sqrt{2}+5} = \frac{360\sqrt{2}-300}{47}\,.$$

GRAĐEVINARSTVO; SAOBRAĆAJ; GEODEZIJA I GEOMATIKA

jul 2010. godine

1. Odrediti realan parametar m za koji je jedan koren jednačine $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 3 = 0$ tri puta veći od drugog.

2. Rešiti nejednačinu
$$\frac{3x^2 - 2x - 17}{x^2 + x - 6} \geq 2.$$

3. Rešiti sistem jednačina
$$\begin{array}{rcrcl} 2^{2x} & - & 5^y & = & 39 \\ 2^x & + & 5^{\frac{y}{2}} & = & 13. \end{array}$$

4. Rešiti nejednačinu
$$\log^2_{\frac{1}{2}} x < 4 + \log_{\frac{1}{2}} x^3.$$

5. Rešiti jednačinu
$$4 + 5\sin x = 2\cos^2 x.$$

6. Ako je $z_1 = 2 + 2i$ i $z_2 = 3 - i$, izračunati
$$z_1^4 + z_1 \cdot z_2 - 5\frac{\bar{z}_1}{z_2}.$$

7. Napisati jednačine tangenti na kružnicu $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$ koje su paralelne simetrali II kvadranta.

8. Neka su $A(-2,0,1)$ i $B(4,-1,2)$ dva susedna temena, a $T(2,1,2)$ presek dijagonala paralelograma $ABCD$. Odrediti koordinate temena C i D i ugao između dijagonala AC i BD.

9. Dati su poluprečnik $R = 4$ donje osnove zarubljene kupe i izvodnica $s = 5$. Ako je površina te zarubljene kupe $P = 42\pi$, izračunati njenu zapreminu.

10. Zbir svih članova opadajućeg geometrijskog niza je $\frac{9}{2}$, a zbir prva dva člana je 4. Izračunati četvrti član.

REŠENJA:

1. Primenom Vietovih pravila i uslova zadatka $x_1 = 3x_2$ dobijamo:

$$x_1 + x_2 = -\tfrac{b}{a} \Leftrightarrow 4x_2 = 2(m+1) \Leftrightarrow x_2 = \tfrac{m+1}{2}\ (*)$$
$$x_1 \cdot x_2 = \tfrac{c}{a} \Leftrightarrow 3x_2^2 = m^2+3 \Leftrightarrow x_2^2 = \tfrac{m^2+3}{3}\ (**).$$

Kvadriranjem izraza $(*)$ i izjednačavanjem sa izrazom $(**)$ dobijamo:

$$\frac{(m+1)^2}{4} = \frac{m^2+3}{3} \Leftrightarrow m^2 - 6m + 9 = 0 \Leftrightarrow (m-3)^2 = 0 \Leftrightarrow \underline{m = 3}.$$

2. $$\frac{3x^2-2x-17}{x^2+x-6} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{3x^2-2x-17}{x^2+x-6} - 2 \geq \Leftrightarrow \frac{x^2-4x-5}{x^2+x-6} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-5)(x+1)}{(x-2)(x+3)} \geq 0.$$

Ispitivanjem znaka monoma koji čine ovu nejednačinu dolazimo do njenog rešenja

$$\underline{x \in (-\infty, -3) \cup [-1, 2) \cup [5, \infty).}$$

3. Uvođenjem smene $2^x = t,\ 5^{\frac{y}{2}} = s$ dobijamo sistem jednačina:

$$\begin{array}{rcl} t^2 - s^2 &=& 39 \\ t + s &=& 13 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} (t-s)(t+s) &=& 39 \\ t+s &=& 13 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} t - s &=& 3 \\ t + s &=& 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} t - s &=& 3 \\ 2t &=& 16 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} s &=& 5 \\ t &=& 8 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} 5^{\frac{y}{2}} &=& 5^1 \\ 2^x &=& 2^3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} y &=& 2 \\ x &=& 3. \end{array}$$

Dakle, rešenje sistema je $\underline{(x, y) = (3, 2)}$.

4. Nejednačina je definisana za $x > 0$. Primenom pravila logaritmovanja i smenom $\log_{\frac{1}{2}} x = t$ dobijamo

$$\log^2_{\frac{1}{2}} x < 4 + \log_{\frac{1}{2}} x^3 \Leftrightarrow \log^2_{\frac{1}{2}} x - 3\log_{\frac{1}{2}} x - 4 < 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 < 0 \Leftrightarrow t \in (-1, 4).$$

Iz $\log_{\frac{1}{2}} x < 4$ sledi $x > \left(\frac{1}{2}\right)^4$, a iz $\log_{\frac{1}{2}} x > -1$ sledi $x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, tako da $\underline{x \in \left(\frac{1}{16}, 2\right)}$.

5. Primenom jednakosti $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ i smenom $\sin x = t$ dobijamo

$$4 + 5\sin x = 2\cos^2 x \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \vee t = -\frac{1}{2}.$$

Nakon vraćanja smene vidimo da jednačina $\sin x = -2$ nema rešenje, a iz $\sin x = -\frac{1}{2}$ dobijamo

$$\underline{x \in \{\frac{-5\pi}{6} + 2k\pi | k \in Z\} \cup \{\frac{-\pi}{6} + 2k\pi | k \in Z\}.}$$

6. $$z_1^4 + z_1 \cdot z_2 - 5\frac{\overline{z}_1}{z_2} = (2+2i)^4 + (2+2i)(3-i) - 5\,\frac{2-2i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} =$$
$$= (4 + 8i - 4)^2 + (6 - 2i + 6i + 2) - 5\,\frac{6 + 2i - 6i + 2}{3^2 - i^2} =$$
$$= -64 + 8 + 4i - \frac{5}{10}(8 - 4i) = \underline{-60 + 6i}$$

7. Tangente su paralelne pravoj $y = -x$, pa je njihova jednačina oblika $y = -x + n$. Uvrštavanjem $y = -x + n$ u jednačinu kružnice dobijamo

$$x^2 - 4x + 4 + (-x+n)^2 - 2(-x+n) + 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + (-2n-2)x + n^2 - 2n + 3 = 0\,.$$

Da bi prava dodirivala kružnicu, diskriminanta D ove jednačine treba da je jednaka nuli.

$$D = (-2n-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (n^2 - 2n + 3) = -4(n^2 - 6n + 5) = 0 \Leftrightarrow n_1 = 1, n_2 = 5.$$

Jednačine tangenti su $\underline{t_1 : y = -x + 1\,,\ t_2 : y = -x + 5}$.

8.

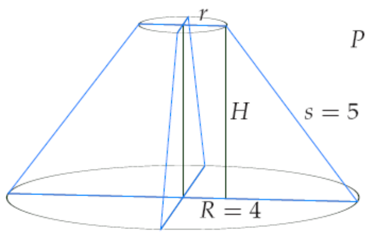
$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TC} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{AT} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OA} = 2(2,1,2) - (-2,0,1) = (6,2,3)$$

Slično $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OB} = 2(2,1,2) - (4,-1,2) = (0,3,2)$, pa je $\underline{C(6,2,3)\,,\ D(0,3,2)}$.

Ako je $\alpha = \measuredangle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})$ onda $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BD}|} = \frac{(8,2,2)\cdot(-4,4,0)}{\sqrt{8^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+4^2+0^2}} = \frac{8\cdot(-4)+2\cdot4+2\cdot0}{\sqrt{72}\sqrt{32}} = \frac{-24}{6\sqrt{2}\cdot4\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$.

Tup ugao između dijagonala je $\underline{\alpha = \frac{2\pi}{3}}$ (a oštar je $\underline{\frac{\pi}{3}}$).

9.



$$P = R^2\pi + r^2\pi + (R+r)s\pi = [16 + r^2 + (4+r)\cdot 5]\pi = 42\pi \Rightarrow$$

$$r^2 + 5r - 6 = 0 \Rightarrow r = 1 \text{ (odbacujemo } r = -6)$$

$$H = \sqrt{s^2 - (R-r)^2} = \sqrt{25-9} = 4$$

$$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + rR + r^2) = \frac{\pi}{3}\cdot 4\cdot(16+4+1) = \underline{28\pi}$$

10.

$$\frac{b_1}{1-q} = \frac{9}{2}, |q| < 1 \Leftrightarrow 1 - q = \frac{2b_1}{9} \Leftrightarrow q = 1 - \frac{2b_1}{9}$$

$$b_1 + b_2 = b_1 + b_1 q = b_1 + b_1\left(1 - \frac{2b_1}{9}\right) = 2b_1 - \frac{2b_1^2}{9} = 4 \Leftrightarrow$$

$$b_1^2 - 9b_1 + 18 = 0 \Leftrightarrow b_1' = 3, b_1'' = 6$$

Vrednosti b_1' odgovara $q' = \frac{1}{3}$ što daje opadajući niz, a vrednost $q'' = -\frac{1}{3}$ koja odgovara b_1'' se odbacuje zato što daje oscilatoran niz.

$$\underline{b_4 = b_1 q^3 = \frac{1}{9}}$$

MATEMATIKA za mašinstvo, industrijsko inženjerstvo i inženjerski menadžment, grafičko inženjerstvo i dizajn, inženjerstvo zaštite životne sredine

jul 2001. godine

1. a) Izračunati $\frac{2^{-3}}{3^2}\cdot\left(\frac{2^{-2}}{3}\right)^{-2}:2;$ 2 boda)

   b) Uprostiti izraz $\left(a-\frac{27}{a^2}\right):\frac{a^2+3a+9}{a^2}, a\neq 0.$ (2 boda)

2. Rešiti nejednačinu $\frac{(x+2)^2-(x+1)^2}{x^2-3x+2}\geq 0.$ (6 bodova)

3. Cena jednog proizvoda uvećana je za 20% , a potom je snižena za 20%. Za koliko procenata se krajnja cena razlikuje od prvobitne?

   (4 boda)

4. a) Izračunati $\frac{\cos 75^0}{\sin 45^0};$ (4 boda)

   b) Rešiti jednačinu $2\cdot\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=1.$ (6 bodova)

5. Rešiti jednačine

   a) $25^x-4\cdot 5^x-5=0$ (4 boda)

   b) $\log_6(x+1)+\log_6(2x+1)=1.$ (4 boda)

<u>REŠENJA:</u>

1. a) $\frac{2^{-3}}{3^2}\cdot\left(\frac{2^{-2}}{3}\right)^{-2}:2=1$

   b) $\left(a-\frac{27}{a^2}\right):\frac{a^2+3a+9}{a^2}=\frac{a^3-3^3}{a^2}\cdot\frac{a^2}{a^2+3a+9}=a-3$

2. $x\in\left[-\frac{3}{1},1\right)\cup(2,\infty)$

3. Neka je početna cena x dinara. Po uslovu zadatka, konačna cena je $x\cdot 1.2\cdot 0.8=0.96x$ dinara. Dakle, cena je smanjena za 4%

4. $\frac{\cos 75^0}{\sin 45^0}=\frac{\cos(30^0+45^0)}{\sin 45^0}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

   Iz $2\cdot\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=1$ sledi da je $2\cdot\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$ te je skup rešenja date jednačine $\left\{-\frac{\pi}{12}+k_1\pi : k_1\in Z\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{4}+k_2\pi : k_2\in Z\right\}.$

5. a) Iz $25^x-4\cdot 5^x-5=0$, sledi da je $(5^x)^2-4\cdot 5^x-5=0$, tj. da je rešenje date jednačine $x=1$;

   b) Data jednačina je definisana za $x>-\frac{1}{2}$. Iz $\log_6(x+1)+\log_6(2x+1)=1$ sledi da je $\log_6(x+1)\cdot(2x+1)=1$, tj. $(x+1)+(2x+1)=6$. Zbog oblasti definisanosti rešenje date jednačine je samo realan broj $x=1$.

MATEMATIKA *septembar 2001. godine*

1. a) Izračunati $\dfrac{2\sqrt{27}-\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$ (2 boda)

   b) Uprostiti izraz

$$\left(\frac{a^2+1}{3a-1}-\frac{a}{3}\right)\cdot\left(\frac{2+4a}{a+3}-1\right), \qquad a\notin\left\{\frac{1}{3},-3\right\}.$$ (2 boda)

2. Rešiti nejednačinu $\dfrac{2x+1}{x-2}\le 0$ (2 boda)

3. Cena jedne košulje je *500* dinara. Posle poskupljenja košulje za *5*% došlo je do pojeftinjenja za *10*%. Kolika je nova cena košulje? (4 boda)

4. Izračunati

   a) $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{2\sin\alpha-4\cos\alpha}$ ako je $tg\alpha=\dfrac{1}{2}$; b) $\sin\dfrac{81\pi}{4}$ (4 boda)

5. Rešiti jednačine

   a) $2^{x^2-5x+9}=8$; b) $\log_6 x+\log_6(x-3)=\log_6 4$ (4 boda)

<u>REŠENJA:</u>

1) a) $\dfrac{2\sqrt{27}-\sqrt{48}}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\cdot 3\sqrt{3}-4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=2$

b) $$\left(\frac{a^2+1}{3a-1}-\frac{a}{3}\right)\cdot\left(\frac{2+4a}{a+3}-1\right)=\frac{3a^2+3-3a^2+a}{3(3a-1)}\cdot\frac{2+4a-a-3}{a+3}=\frac{3+a}{3(3a-1)}\cdot\frac{3a-1}{a+3}=\frac{1}{3}$$

2) $\dfrac{2x+1}{x-2}\le 0 \Leftrightarrow x\in\left[-\dfrac{1}{2},2\right).$

3) 1: 500 din

2: $500+\dfrac{5}{100}\cdot 500=525$ din

3: $525-\dfrac{10}{100}\cdot 525=472.5$ din

4) a) $$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{2\sin\alpha-4\cos\alpha}=\frac{tg\alpha+1}{2tg\alpha-4}=\frac{\frac{1}{2}+1}{2\frac{1}{2}-4}=-\frac{1}{2}.$$

b) $$\sin\frac{81\pi}{4}=\sin\left(\frac{\pi}{4}+20\pi\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

5) a) $2^{x^2-5x+9}=8$

$2^{x^2-5x+9}=2^3$

$x^2-5x+9=3$

$x^2-5x+6=0$

$x_{1/2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\dfrac{5\pm 1}{2}$

$x\in\{2,3\}$

b) $\log_6 x+\log_6(x-3)=\log_6 4$

$\log_6 x(x-3)=\log_6 4$

$x\ (x-3)=4$

$x^2-3x-4=0$

$x_{1/2}=\dfrac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\dfrac{3\pm 5}{2}$

$x=4, x=-1$

Zbog definisanosti *log*. funkcije rešenje je samo *x=4*

1. Uprostiti izraz $\dfrac{\dfrac{a^2+b^2}{b}-a}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}} : \dfrac{a^3+b^3}{a^2-b^2}, ab \neq 0, a \neq \pm b$. (6 bodova)

2. Rešiti nejednačinu $\dfrac{3x+2}{4x-4} \leq 1$. (6 bodova)

3. Ako je $\dfrac{9\sin\alpha - 3\cos\alpha}{2\sin\alpha + \cos\alpha} = 2$ odrediti $tg\alpha$ i ugao α. (6 bodova)

4. Rešiti jednačinu $\log_3 x + \log_x 3^4 + 5 = 0$. (6 bodova)

5. Knjiga je prvo pojeftinila za 25%, a zatim je poskupela za 30%. Da li je sada knjiga jeftinija ili skuplja od prvobitne cene i za koliko procenata?
(6 bodova)

REŠENJA:

1. Izraz je definisan za $ab \neq 0$ i $a^2 \neq b^2$.
$$\frac{\dfrac{a^2+b^2}{b}-a}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}} : \frac{a^3+b^3}{a^2-b^2} = \frac{\dfrac{a^2+b^2}{b}-a}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}} \cdot \frac{a^2-b^2}{a^3+b^3} = \frac{a(a^2+b^2-ab)}{a-b} \cdot \frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)(a^2+b^2-ab)} = a.$$

2. Data nejednačina je definisana za $x \neq 1$.
$$\frac{3x+2}{4x-4} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{3x+2}{4x-4} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{6-x}{4x-4} \leq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 1) \cup [6, \infty).$$

3. $2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2(1-\cos^2 x) + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$, smena
$t = \cos x, \quad 2t^2 - l - 1 = 0 \Rightarrow l_1 = 1, \quad l_2 = -\dfrac{1}{2} \cdot l_1 = 1 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in Z,$
$t = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

4. Data jednačina je definisana za $x > 0$ i $x \neq 1$.
$\log_3 x + \log_x 3^4 = 5 = 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x + 5\log_3 x + 4 = 0$. Ako stavimo $\log_3 x = t$ dobijamo kvadratnu jednačinu $t^2 + 5t + 4 = 0$ sa rešenjima
$t_1 = -1, t_2 0 - 4$. $\log_3 x = -1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}; \log_3 x = -4 \Rightarrow x = \dfrac{1}{81}$. Skup rešenja je $\left\{\dfrac{1}{81}, \dfrac{1}{3}\right\}$.

5. Neka je početna cena x dinara. Po uslovu zadatka, konačna cena je $x \cdot 0{,}75 \cdot 1{,}3 = 0{,}975x$ dinara. Dakle, knjiga je jeftinija za 2,5%.

MATEMATIKA *septembar 2002*

1. Izračunati $(4\cdot(\frac{2}{x})^{-2})^3\cdot\sqrt{\frac{x}{16}}:\left(\frac{x^3}{4}\right)^2$, $x>0$. (6 bodova)

2. Naći $m(m\neq 0)$. za koje je jedan koren (nula) jednačine $x^2-4mx+m^3=0$. (6 bodova)

3. Rešiti jednačinu $2\sin^2 x+\cos x-1=0$. (6 bodova)

4. Rešiti jednačinu $9^x+3^x-2=0$. (6 bodova)

5. Koliko ljudi živi u gradu u kome je godišnji priraštaj stanovnika 3,5%, odnosno 1330 stanovnika.
(6 bodova)

REŠENJA:

1. Za $x>0$

$$(4\cdot(\frac{2}{x})^{-2})^3\cdot\sqrt{\frac{x}{16}}:\left(\frac{x^3}{4}\right)^2=\left(4\cdot\frac{x^2}{4}\right)^3\cdot\frac{\sqrt{x}}{4}\cdot\frac{16}{x^6}=x^6\cdot\frac{\sqrt{x}}{4}\cdot\frac{16}{x^6}=4\sqrt{x}\,.$$

2. Neka je $x_1=3x_2$. Tada je $x_1+x_2=4x_2=4m,\quad x_1\cdot x_2=3x_2^2=m^3$. Iz prve jednačine dobijamo da je $x_2=m$ i uvrštavajući u drugu jednačinu dobijamo $3m^2=m^3$. Kako je $m\neq 0$ dobijamo da je $m=3$.

3. $2\sin^2 x+\cos x-1=0\Leftrightarrow 2(1-\cos^2 x)+\cos x-1=0\Leftrightarrow 2\cos^2 x-\cos x-1=0,$ smena $t=\cos x,\quad 2t^2-t-1=0\Rightarrow 0\Rightarrow t_1=1,\ t_2=-\frac{1}{2}\cdot t_1=1\Rightarrow \cos x=1\Rightarrow x=2k\pi, k\in Z,$

$t_2=-\frac{1}{2}\Rightarrow \cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{2\pi}{3}+2k_1\pi\ \vee\ x=\frac{4\pi}{3}+2k_2\pi,\quad k_1,k_2\in\mathbf{Z}.$

4. $9^x+3^x-2=0\Leftrightarrow\left(3^x\right)^2+3^x-2=0.$ Uveđenjem smene $t=3^x$ i dobije se kvadratna jednačina $t^2+t-2=0$ čija su rešenja $t_1=-2$ i $t_2=1$. Rešenje $t_1=-2$ odbacujemo, pa ostaje $3^x=1\Leftrightarrow x=0$.

5. $G=\frac{P\cdot 100}{p}=\frac{1330\cdot 100}{3{,}5}=38000.$

MATEMATIKA *jul 2003. godine*

1. Rešiti nejednačinu $\dfrac{x^2+|x-1|}{x-3} \le x$. (6 bodova)

2. a) Rešiti jednačinu $\log_2^2 x = \log_2 x^6 - 8$; (4 boda)

   b) Rešiti nejednačinu $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{3-6x} > 9.$ (2 boda)

3. Rešiti sistem jednačina

$$2^{\sin x+\cos y} = 1$$
$$16^{\sin^2 x+\cos^2 y} = 4.$$

(6 bodova)

4. $A(3,2,-1), B(-1,2,2)$ i $C(7,0,1)$ su redom tri uzastopna temena paralelograma. Odrediti koordinate četvrtog temena D paralelograma, koordinate tačke S preseka njegovih dijagonala i dužinu stranice AB.

(6 bodova)

5. a) Biciklista pređe 10% razdaljine od mesta A do mesta B za 12 sati krećući se brzinom $25km/h$. Za koliko bi vremena biciklista prešao 30% razdaljine od mesta A do mesta B ako bi se kretao brzinom $20km/h$?

(3 boda)

   b) Petru, Aci i Marku je za urađeni posao isplaćeno 24420 dinara. Koliko novca će dobiti svaki od njih ako je Aca radio 11 dana po 6 časova na dan, Petar je radio 8 dana po 9 ćasova na dan a Marko je radio 21 dan po 4 časa na dan (vrednost rada po času je svakog od njih je ista)?

(3 boda)

REŠENJA:

1. Data nejednačina je definisana za $x \ne 3$

Za $x \ge 1$ važi $\dfrac{x^2+|x-1|}{x-3} \le x \Leftrightarrow \dfrac{x^2+x-1}{x-3} - x \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x-1}{x-3} \le 0 \Rightarrow x \in [1,3)$.

Za $x < 1$ važi $\dfrac{x^2+|x-1|}{x-3} \le x \Leftrightarrow \dfrac{x^2-x+1}{x-3} - x \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{x-3} \le 0 \Rightarrow x \in \left[-\dfrac{1}{2},1\right)$.

Dakle, skup rešenja polazne jednačine je skup $\left[-\dfrac{1}{2},3\right)$.

2. a) $\log_2^2 x = \log_2 x^6 - 8 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 6\log_2 x + 8 = 0$. Uzimajući da je $\log_2 x = t$ dobija se kvadratna jednačina $t^2 - 6t + 8 = 0$ sa rešenjima $t_1 = 2; t_2 = 4$. Iz $\log_2 x = 2$ sledi da je $x = 4$, a iz $\log_2 x = 4$ sledi da je $x = 16$. Dakle, skup rešenja date jednačine je $\{4,16\}$.

   b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{3-6x} > 9 \Leftrightarrow 3^{6x-3} > 3^2 \Leftrightarrow 6x-3 > 2 \Rightarrow x > \dfrac{5}{6}$.

3. $$\begin{array}{l} 2^{\sin x+\cos y} = 1 \\ 16^{\sin^2 x+\cos^2 y} = 4 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \sin x + \cos y = 0 \\ 2(\sin^2 x + \cos^2 y) = 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \sin x = -\cos y \\ \cos^2 y = \dfrac{1}{4} \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} \sin x = -\dfrac{1}{2} \\ \cos y = \dfrac{1}{2} \end{array} \vee \begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \cos y = -\dfrac{1}{2} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x \in \left\{(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6} + k\pi : k \in Z\right\} \\ y \in \left\{\pm\dfrac{\pi}{3} + 2l\pi : l \in Z\right\} \end{array} \vee \begin{array}{l} x \in \left\{(-1)^{k}\dfrac{\pi}{6} + k\pi : k \in Z\right\} \\ y \in \left\{\pm\dfrac{2\pi}{3} + 2l\pi : l \in Z\right\} \end{array}.$$

4. Obeležimo sa $D(x,y,z)$ četvrto teme paralelograma. Iz $\vec{BA}=\vec{CD}$ sledi $(-4,0,3)=(7-x,-y,1-z)$ odakle je $-4=7-x;\ \ 0=-y;\ \ 3=1-z$ odnosno $x=11;\ \ y=0;\ \ z=-2.$ Dakle, četvrto teme paralelograma je $D(11,0,-2)$.

Kako je $\vec{OS}=\vec{OA}+\frac{1}{2}\vec{AC}=(3,2,-1)+(2,-1,1)=(5,1,0)$, to je presek dijagonala tačka $S(5,1,0)$.

$\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{(3+1)^2+(2-2)^2+(-1-2)^2}=5$.

5. a) Neka je s razdaljina između mesta A i B. Kako je $10\%s=25\cdot12=300km$ to je $s=3000km$, odakle je $30\%s=900km.$ Ako je t vreme za koje biciklista pređe $30\%s$ krećući se brzinom $v=20km/h$, nalazi se da je $t=\frac{s}{v}=\frac{900}{20}=45h$.

b) Kako je Aca radio 66 sati, Petar 72 sata a Marko 84 sati to je ukupan broj utrošenih sati 222. Vrednost jednog sata je $\frac{24420}{222}=110$ dinara. Dakle, Aca je dobio $66\cdot110=7260$ dinara, Petar je dobio $72\cdot110=7920$ dinara a Marko $84\cdot110=9240$ dinara.

MATEMATIKA *jul 2004. godine*

1. Rešiti nejednačinu $\frac{|x+3|+x}{x+2}\geq 1$.

(6 bodova)

2. a) Rešiti jednačinu $\log_2 x+2\log_x 2=3$;

b) Rešiti nejednačinu $\frac{2^{2x-1}\cdot4^{x+1}}{8^{x-1}}=64$.

(3 boda)

3. Rešiti jednačinu $2+\sin^2 x=\cos^2 x+3\sin x$.

(3 boda)

4. Zbir prva tri binomna koeficijenta u razvoju binoma $\left(\frac{x}{\sqrt{y}}+y\right)^n$ je 46.

Odrediti član koji ne sadrži y.

(6 bodova)

5. a) U jednoj prodavnici artiklu od 12250 dinara cena je snižena za 40%. U drugoj prodavnici istom artiklu (sa istom cenom) cena je prvo snižena za 36%, a zatim je nova cena snižena za 4%. Za koliko se razlikuju cene artikla u ovim prodavnicama?

(4 boda)

b) Za 14 kilograma kajsija plaćeno je 980 dinara. Koliko kilograma kajsija se može kupiti za 4340 dinara?

(2 boda)

REŠENJA:

1. Data nejednačina je definisana za $x \neq -2$.

Za $x \geq -3$ važi $\frac{|x+3|+x}{x+2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x+3+x}{x+2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x+2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-3,-2) \cup [-1,\infty);$$

Za $x < -3$ važi $\frac{|x+3|+x}{x+2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{-x-3+x}{x+2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{-3}{x+2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{x+5}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-5,-3);$

Dakle, skup rešenja polazne jednačine je skup $[-5,-2) \cup [-1,\infty)$.

2. a) Data jednačina je definisana za $x \in (0,1) \cup (1,\infty)$.

$\log_2 x + 2\log_x 2 = 3 \Leftrightarrow \log_2 x + 2\frac{1}{\log_2 x} = 3 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$. Uzimajući da je $\log_2 x = t$ dobija se kvadratna jednačina $t^2 - 3t + 2 = 0$

sa rešenjima $t_1 = 2; t_2 = 1$. Iz $\log_2 x = 2$ sledi da je $x = 4$, a iz $\log_2 x = 1$ sledi da je $x = 2$.

Dakle, skup rešenja date jednačine je $\{1, 2\}$.

b) $\frac{2^{2x-1} \cdot 4^{x+1}}{8^{x-1}} = 64 \Leftrightarrow \frac{2^{2x-1} \cdot 2^{2x+2}}{2^{3x-3}} = 2^6 \Leftrightarrow x + 4 = 6 \Leftrightarrow x = 2.$

3. $2 + \sin^2 x = \cos^2 x + 3\sin \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0.$. Uzimajući da je $\sin x = t$ dobija se kvadratna jednačina $2t^2 - 3t + 1 = 0$ sa rešenjima $t_1 = 1, t_2 = \frac{1}{2}$. Iz $\sin x = 1$ sledi da je

$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$, a iz $\sin x = \frac{1}{2}$ sledi da $x \in \left\{\frac{\pi}{6} + 2l\pi : l \in Z\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2m\pi : m \in Z\right\}$.

Dakle, skup rešenja date jednačine je

$$\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in Z\right\} \cup . \left\{\frac{\pi}{6} + 2l\pi : l \in Z\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2m\pi : m \in Z\right\}.$$

4. Iz uslova da je zbir prva tri binomna koeficijenta 46 sledi da je

$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 46 \Leftrightarrow 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 46 \Rightarrow n = 9.$ Kako je

$\left(\frac{x}{\sqrt{y}} + y\right)^9 = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} \left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^k y^{9-k} = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} x^k y^{9-\frac{3k}{2}}$ to član koji ne sadrži y dobija se iz uslova

da je $9 - \frac{3k}{2} = 0 \Leftrightarrow k = 6$. Dakle, član koji ne sadrži y je $\binom{9}{6} x^6 = 84x^6$.

5. a) Ako sa x označimo novu cenu u prvoj prodavnici to je $x = 0,6 \cdot 12250 = 7350$ dinara. Ako sa y označimo novu cenu u drugoj prodavnici to je $y = 0,64 \cdot 0,96 \cdot 12250 = 7562,40$ dinara. Nove cene u ove dve prodvnice se razlikuju za $7562,40 - 7350 = 176,40$ dinara.

b) Ako sa x označimo količinu kajsija (u kilogramima) koja se može kupiti za 4340 dinara, to se iz proporcije $14 : 980 = x : 4340$ dobija da je $x=62$ kilograma.

MATEMATIKA *jul 2005. godine*

1. Rešiti nejednačinu
$$\frac{x^2+x-12}{|x|+2} \geq 0.$$ (6 bodova)

2. *a*) Rešiti jednačinu $\log_x 3 + \log_3 x = \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_3 \sqrt{x} + \frac{1}{2}, \quad x > 0 \wedge x \neq 1.$ (3 boda)

b) Rešiti nejednačinu $2^{\frac{x+1}{x-1}} < 8$. (3 boda)

3. Rešiti jednačinu $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$. (6 bodova)

4. Data su tačke $A(2,-3,4),\ B(1,2,-1)$ i $S(2,0,0)$
a) Izračunati dužinu duži AB. (2 boda)
b) Odrediti tačke *C* i *D* tako da su tačke *A, B, C* i *D* temena paralelograma čiji je prosek dijagonala *S*. (4 boda)

5. a) Košulja je koštala 1500 dinara, a zatim je poskupila za 25 %. Za koliko procenata bi trebalo sniziti novu cenu košulje da bi ona opet iznosila 1500 dinara? (3 boda)
b) Ako 8 radnika mogu da završe jedan posao za 5 dana radeći po 6 sati dnevno, koliko je radnika potrebno angažovati da bi se isti posao uradio za 4 dana radeći po 5 sati dnevno? (4 boda)

REŠENJA:

1. $$\frac{x^2+x-12}{|x|+2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+4)}{|x|+2} \geq 0 \Leftrightarrow \left(x<0 \wedge \frac{(x-3)\cdot(x+4)}{-x+2} \geq 0 \right) \vee$$
$$\vee \left(x \geq 0 \ \wedge \ \frac{(x-3)(x+4)}{x+2} \geq 0 \right)$$

$x \in$	$(-1, -4)$	$\{-4\}$	$(-4, 0)$
$x-3$	–	–	–
$x+4$	–	0	+
$-x+2$	+	+	+
$\frac{(x-3)(x+4)}{x+2}$	+	0	–

$x \in$	$[0,3)$	$\{3\}$	$(3, -\infty)$
$x-3$	–	0	+
$x+4$	+	+	+
$x+2$	+	+	+
$\frac{(x-3)(x+4)}{x+2}$	–	0	+

Prema tome $\frac{x^2+x-12}{|x|+2} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-4] \cup [3,\infty)$.

2. a)
$$\log_x 3 + \log_3 x = \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_3 \sqrt{x} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_3 x} + \log_3 x = \frac{2}{\log_3 x} + \frac{1}{2}\log_3 x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\log_3 x)^2 - \log_3 x - 2 = 0 \Leftrightarrow \log_3 x = -1 \vee \log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \vee x = 9$$

b) $$2^{\frac{x+1}{x-1}} < 8 \Leftrightarrow 2^{\frac{x+1}{x-1}} < 2^3 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} < 3 \Leftrightarrow \frac{4-2x}{x-1} < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,1) \cup (2,\infty).$$

3. $\cos 2x - \cos x + 1 = 0 \iff \cos^2 x - \sin^2 x - \cos x + 1 = 0 \iff \cos^2 x - 1 + \cos^2 x - \cos x + 1 = 0 \iff$
$\iff 2\cos^2 x - \cos x = 0 \iff \cos x(2\cos x - 1) = 0 \iff \cos x = 0 \vee \cos x = \frac{1}{2} \iff$
$\iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$

4. a) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(2-1)^2 + (-3-2)^2 + (4-(-1))^2} = \sqrt{51}$.

b)

$\vec{r_c} = 2\vec{r_s} - \vec{r_A} = (4,0,0) - (2,-3,4) = (2,3,-4)$

$\vec{r_D} = 2\vec{r_s} - \vec{r_B} = (4,0,0) - (1,2,-1) = (3,-2,1).$

5. a) Kako je $1.25 \cdot 1500 \cdot x = 1500$ odnosno $x = \frac{1}{1.25} = 0.80.$ Sledi da bi košulja trebalo da pojeftini za 20%

b) Osam radnika završi posao za 30 sati. Isti posao uradi *x* radnika za 20 sati. Iz obrnute proporcije sledi *8:x=20:30,* odnosno $x = \frac{8 \cdot 30}{20} = 12$ radnika.

MATEMATIKA ***jul 2006. godina***

1. Odrediti oblast definisanosti funkcije:

$f(x) = \sqrt{\frac{|x| + 3 + x}{x+2} - 1}$. (6 bodova)

2. a) Rešiti jednačinu $\log_2(x^2 - 1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) - \log_{\sqrt[3]{2}}(x-1) = 2, x > 1$ (4 boda)

b) Rešiti nejednačinu: $3^x > 2^{x-1} + 2^x$ (2 boda)

3. Rešiti jednačinu: $2tgx\sin^2 x = tgx$ (6 bodova)

4. U razvijenom obliku stepena binoma

$\left(4x - \frac{1}{\sqrt{2x}}\right)^n, \quad x > 0, \ x \in R,$

Binomni koeficijent trećeg člana je 105. Odredi koeficijent uz x^{-3}. (4 boda)

5. a) Benzin je poskupeo za 1,6%, tj. za 1,3 dinara po litru. Kolika je nova cena benzina? (3 boda)

b) Sa postojećim brojem mašina posao može da završi za 3 dana. Sa 3 mašine više posao bi se završio za 2 dana. Pod pretpostavkom da su sve mašine iste, koliko bi dana bilo potrebno jednoj mašini da završi taj posao? (3 boda)

REŠENJA:

1. Oblast definisanosti funkcije odredićemo rešavanjem nejednačine $\dfrac{|x|+3+x}{x+2}-1\geq 0.$ $Za\ x\neq -2$

$$\frac{|x|+3+x}{x+2}-1\geq 0 \Leftrightarrow \frac{|x|+1}{x+2}\geq 0 \Leftrightarrow x+2>0$$

jer je $|x|+1>0$ za svako $x\in R$. Oblast definisanost funkcije je $D(f)=(-2,+\infty)$.

2. a)

$$\log_2\left(x^2-1\right)+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)-\log_{\sqrt[3]{2}}(x-1)=2 \Leftrightarrow \log_2\left(x^2-1\right)-\log_2(x\ \ +1)-\log 2(x\ \ -1)^3=2 \Leftrightarrow$$

$$\log_2\frac{\left(x^2-1\right)}{(x+1)(x-1)^3}=\log_2 4 \Rightarrow \frac{1}{(x-1)^2}=4 \Leftrightarrow x-1=\pm\frac{1}{2}$$ Kako $x=\frac{3}{2}\in(1,+\infty)$, dok $x=\frac{1}{2}\notin(1,+\infty)$,

to je $x=\frac{3}{2}$, jedinstveno rešenje polazne jednačine.

b) $3^x>2^{2-1}+2^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x>\frac{1}{2}+1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x>\frac{3}{2} \Leftrightarrow x>1$

3. $2tgx\sin^2 \mathrm{x}=tgx \quad \Leftrightarrow \quad tgx\left(2\sin^2 x-1\right)=0 \Leftrightarrow \quad tgx\cos 2x=0 \quad \Leftrightarrow (thx=0 \quad \vee \quad \cos 2x=0) \Leftrightarrow$

$x=k_1\pi \quad \vee \quad x=\frac{\pi}{4}+k_2\frac{\pi}{2} \quad k_1,k_2\in\mathbf{Z}.$

4. $\binom{n}{2}=105 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2}=105 \Leftrightarrow n^2-n-210=0 \Leftrightarrow \left(n^2-n-210=0 \Leftrightarrow (n=15 \ \vee \ n=-14)\right)$

.

Kako je $n\in N$ то je traženi eksponent $n=15.$ $k+1-$vi član u razvoju stepena binoma je:

$$\binom{15}{k}\ (4x)^{15-k}(-1)^k(2x)^{-\frac{k}{2}}=\binom{15}{k}(-1)^k\,4^{15-k}2^{-\frac{k}{2}}x^{15-k-\frac{k}{2}}$$

Izjednačavanjem $x^{15-k-\frac{k}{2}}=x^{-3}$, dobijamo k=12, odnosno traženi koeficijent je

$\frac{15!}{12!3!}4^3 2^{-6}=455$. (Isti rezultat dobijamo ako posmatramo $x^{15-k-\frac{k}{2}}=x^{-3}$, kada je k=3)

5. a) Neka je stara cena benzina x. Kako je 1,6% stare cene iznosi 1,3 dinara po litru, to je $x=\frac{1.3\cdot 100}{1.6}=81.2$ dinara. Posle poskupljenja, nova cena litra benzina je 82,8.

b) Neka je na početku bilo x mašina. Za jedan dan ovih x mašina uradi $\frac{1}{3}$ posla. Međutim, $x+3$ mašine za jedan dan završe $\frac{1}{2}$ posla. Dakle, dodatne 3 mašine za jedan dan obave $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ posla. Odavde sledi da će jedna mašina posao završiti za 18 dana.

MATEMATIKA *jul 2007. godine*

1. Odrediti oblast definisanosti (domen) funkcije:
$\sqrt{\dfrac{x^2-5x+6}{x+1}}$. (6 bodova)

2. U funkciji $f(x)=ax^2+bx-7$ odrediti nepoznate koeficijente a i b, ako je $f(1)=-9$ i $f(-2)=15$.
(6 bodova)

3. Rešiti jednačine:
   a) $9\cdot 2^x = 3^{x+1}+3^x$.
   b) $\log_3|x-1|$, $x\neq 1$. (6 bodova)

4. Rešiti trigonometrijsku jednačinu $2\sin^2 x+3\cos x=0$.
(6 bodova)

5. a) U dve prodavnice cena košulje je 12250 dinara. U prvoj prodavnici cena je snižena za 40%, a u drugoj prodavnici sena je prvo snižena za 36%, a zatim za još 4%. Za koliko se razlikuju cene košulja u ovim prodavnicama nakon svih pojeftinjenja?

   b) Odrediti broj čiji je 12% jednako $4,2\%$ broja $\dfrac{3+4,2:0,1}{(1:0,3-\frac{7}{3})\cdot 0,125}$.
(6 bodova)

REŠENJA:

1. Funkcija je definisana za $\dfrac{x^2-5x+6}{x+1}\geq 0$ i $x\neq -1$. Iz $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ dobija se $\dfrac{(x-2)(x-3)}{x+1}\geq 0$, tako da je oblast definisanosti $D=(-1,2]\cup[3,\infty)$.

2. Iz $f(1)=a+b-7$ i $f(-2)=4a-2b-7=15$ dobija se sistem linearnih jednačina $a+b=-2\wedge 4a-2b=22$, čije je rešenje $(a,b)=(3,-5)$.

3.a $9\cdot 2^x=3^{x+1}+3^x \Leftrightarrow 9\cdot 2^x=3^x(3+1)\Leftrightarrow 9\cdot 2^x=4\cdot 3^x\Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^x=\dfrac{4}{9}\Leftrightarrow\left(\dfrac{2}{3}\right)^x=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\Leftrightarrow x=2.$

3.b $\log_3|x-1|=1\Leftrightarrow \log_3|x-1|=\log_3 3\Leftrightarrow |x-1|=3\Leftrightarrow x-1=\pm 3\Leftrightarrow x=4\vee x=-2$.

4. $2\sin^2 x+3\cos x=0\Leftrightarrow 2\left(1-\cos^2 x\right)+3\cos x=0\Leftrightarrow 2-2\cos^2 x+3\cos x=0\Leftrightarrow 2\cos^2 x-3\cos x-2=0$
Uvođenjem smene $t=\cos x$ dobija se kvadratna jednačina $2t^2-3t-2=0$ čija su rešenja $t=2$ i $t=-\dfrac{1}{2}$. Kako je $-1\leq\cos x\leq 1$, jednačina $\cos x=2$ nema rešenja, pa se iz $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ dobija $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$, $k\in Z$.

5.a Označimo sa C_1 cenu košulje u prvoj prodavnici nakon pojeftinjenja , i sa C_2 cenu košulje u drugoj prodavnici nakon oba pojeftinjenja. Iz uslova zadatka sledi

$C_1 = 0,6 \cdot 12250 = 7350$ i $C_2 = 0,96 \cdot 0,64 \cdot 12250 = 0,96 \cdot 7840 = 7526,4$.

Razlika u ceni košulja je $C_2 - C_1 = 7526,4 - 7350 = 176,4$ dinara (tj. u drugoj prodavnici košulja je skuplja za 176,4 dinara).

5.b Označimo sa x traženi broj. Na osnovu uslova zadatka dobija se

$$0,12x = 0,42\frac{3+4,2:0,1}{(1:0,3-\frac{7}{3})\cdot 0,125} \Leftrightarrow 0,12x = 0,042\cdot 360 \Leftrightarrow 0,12x = 15,12 \Leftrightarrow x = \frac{15,12}{0,12} = 126.$$

1. Data je jednačina $(2-m)x^2-2mx-2m-2=0,\quad m\neq 2$.

   a) Odrediti m tako da rešenja date jednačine budu realna i različita.

   b) Koristeći Vijetove formule izraziti x_1+x_2 i $x_1\cdot x_2$, gde su x_1 i x_2 rešenja date jednačine.

2. a) Rešiti jednačinu
$$16^x-6\cdot 4^x+8=0.$$
   b) Rešiti nejednačinu
$$\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x<7.$$

3. Rešiti trigonometrijsku jednačinu
$$\sin x+\cos 2x=1.$$

4. a) Dat je binom $(a+b)^n$. Odrediti n tako da zbir prva tri binomna koeficijenta bude 46.

   b) U razvoju binoma $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^9$ naći član koji ne sadrži x.

5. a) Sedam radnika mogu da utovare jabuke za 15 dana. Sedam radnika je radilo 5 dana, a onda su im se priključila još tri radnika. Za koliko dana su radnici utovarili jabuke?

   b) Zarada je ostvarena prodajom 3600 kilograma jabuka po ceni od 80 dinara po kilogramu. Za koliko procenata bi se smanjila zarada ako bi se količina jabuka smanjila za 30%, a cena jabuka smanjila za 20%?

Svaki zadatak nosi 6 bodova.

REŠENJA:

1. **Data je jednačina** $(2-m)x^2-2mx-2m-2=0,\quad m\neq 2$.

   a) **Odrediti m tako da rešenja date jednačine budu realna i različita.**
   Data kvadratna jednačina ima realna i različita rešenja za $(-2m)^2-4\cdot(2-m)\cdot(-2m-2)>0$, tj. za $-m^2+2m+4>0$. Skup rešenja je $m\in(1-\sqrt{5},1+\sqrt{5})$. Kako je $m\neq 2$ polazna jednačina ima realna i različita rešenja za $m\in(1-\sqrt{5},2)\cup(2,1+\sqrt{5})$.

   b) **Koristeći Vijetove formule izraziti x_1+x_2 i $x_1\cdot x_2$, gde su x_1 i x_2 rešenja date jednačine.**
   $x_1+x_2=\frac{2m}{2-m}$, $x_1x_2=\frac{-2(m+1)}{2-m}$.

2. a) **Rešiti jednačinu** $16^x-6\cdot 4^x+8=0$.
   $16^x-6\cdot 4^x+8=0\Leftrightarrow(4^x)^2-6\cdot 4^x+8=0$. Uvodjenjem smene $t=4^x$, dobija se kvadratna jednačina $t^2-6t+8=0$ čija su rešenja $t_1=4$ i $t_2=2$. $4^x=4\Rightarrow x=1$, a $4^x=2\Leftrightarrow 2^{2x}=2\Rightarrow x=\frac{1}{2}$, tako da je skup rešenja $x\in\{1,\frac{1}{2}\}$.

   b) **Rešiti nejednačinu** $\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x<7$.
   Za $x>0$ važi $\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x<7\Leftrightarrow\log_{2^4}x+\log_{2^2}x+\log_2 x<7\Leftrightarrow\frac{1}{4}\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x+\log_2 x<7\Leftrightarrow\frac{7}{4}\log_2 x<7\Leftrightarrow\log_2 x<4\cdot\log_2 2\Leftrightarrow\log_2 x<\log_2 16\Rightarrow x<16$, tako da je rešenje polazne nejednačine $x\in(0,16)$.

3. **Rešiti trigonometrijsku jednačinu** $\sin x+\cos 2x=1$.
   $\sin x+\cos 2x=1\Leftrightarrow\sin x+\cos^2 x-\sin^2 x=\sin^2 x+\cos^2 x\Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin x=0\Leftrightarrow\sin x(2\sin x-1)=0$. Iz uslova $\sin x=0$ dobija se $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, a iz uslova $\sin x=\frac{1}{2}$ dobija se $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ i $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Skup rešenja jednačine je $x\in\{k\pi:k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\frac{\pi}{6}+2k\pi:k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\frac{5\pi}{6}+2k\pi:k\in\mathbb{Z}\}$.

a) **Dat je binom $(a+b)^n$. Odrediti n tako da zbir prva tri binomna koeficijenta bude 46.**

Iz uslova $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=46$ dobija se $1+n+\frac{n(n-1)}{2}=46$, odnosno kvadratna jednačina $n^2+n-90=0$ čija su rešenja $n_1=9$ i $n_2=-10$. Kako $n\in\mathbb{N}$ traženo rešenje je $n=9$.

b) **U razvoju binoma $\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^9$ naći član koji ne sadrži x.**

$\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^9=\displaystyle\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}x^k(x^{-2})^{9-k}=\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}x^{3k-18}$. Iz uslova da član ne sadrži x dobija se $3k-18=0\Rightarrow k=6$, tako da je traženi član $\binom{9}{6}=84$.

a) **Sedam radnika mogu da utovare jabuke za 15 dana. Sedam radnika je radilo 5 dana, a onda su im se priključila još tri radnika. Za koliko dana su radnici utovarili jabuke?**

Neka je x broj dana koji je potreban za utovar jabuka nakon pet dana (kada su se priključila još tri radnika). Iz $7:10=x:10$ dobija se $10x=70$ odakle je $x=7$. Radnici će utovariti jabuke za $5+x=5+7=12$ dana.

b) **Zarada je ostvarena prodajom 3600 kilograma jabuka po ceni od 80 dinara po kilogramu. Za koliko procenata bi se smanjila zarada ako bi se količina jabuka smanjila za 30%, a cena jabuka smanjila za 20%?**

Označimo sa x početnu količinu jabuka, a sa y početnu cenu. Početna zarada je $z=xy$.

Količina jabuka se smanjuje za 30%, tako da je nova količina $x'=0.7x$, a cena se smanjuje za 20%, tako da je nova cena $y'=0.8y$.

Nova zarada je $z'=x'y'=0.7x\cdot 0.8y=0.56xy=0.56z$, tako da bi se zarada smanjila za 44%.

1. Rešiti nejednačinu $\frac{1}{x-2} \geq \frac{4}{x+3}$.

2. a) Rešiti eksponencijalnu jednačinu $9^x + 6 \cdot 3^x - 27 = 0$.
   b) Rešiti logaritamsku nejednačinu $\log_3(x-2) \leq 4$.

3. Rešiti trigonometrijsku jednačinu $\sqrt{2}\,\mathrm{ctg}\, x = 2\sin x \cdot \mathrm{ctg}\, x$.

4. a) Odrediti tačku S koja je sredina duži BC.
   b) Izračunati intenzitet vektora $\overrightarrow{BC}$, tj. dužinu duži BC.
   c) Izračunati koordinate tačke $D(x,y)$ tako da četvorougao $ABCD$ bude paralelogram.

5. a) Sa popustom od 20% knjiga košta 2628 dinara. Za koliko je dinara snižena cena knjige?
   b) Tri radnika dele zaradu od 30.000 dinara srazmerno uloženom radu. Koliko dinara dobija svaki od njih ako je radnik A radio 8 sati, radnik B radio 12 sati, a radnik C radio 20 sati?

Svaki zadatak nosi 6 bodova.

REŠENJA:

1. Data nejednačina je definisana za $x \in \mathcal{R} \backslash \{-3, 2\}$. Tada je: $\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x+3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{11-3x}{(x-2)(x+3)} \geq 0$
$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (2, \frac{11}{3}]$.

2. a) $9^x + 6 \cdot 3^x - 27 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 + 6 \cdot 3^x - 27 = 0$. Uvodjenjem smene $t = 3^x$, dobija se kvadratna jednačina $t^2 + 6t - 27 = 0$ čija su rešenja $t_1 = -9$ i $t_2 = 3$. Jednačina $3^x = -9$ nema rešenja, a rešnje jednačine $3^x = 3$ je $x = 1$.
   b) Data nejednačina je definisana za $x - 2 > 0$, tj. $x > 2$. Kako je osnova logaritma $a = 3 > 0$, važi $\log_3(x-2) \leq 4 \Leftrightarrow x - 2 \leq 3^4 \Leftrightarrow x \leq 83$, pa je rešenje $x \in (2, 83]$.

3. $\sqrt{2}\,\mathrm{ctg}\, x = 2\sin x \cdot \mathrm{ctg}\, x \Leftrightarrow \sqrt{2}\,\mathrm{ctg}\, x - 2\sin x \cdot \mathrm{ctg}\, x = 0 \Leftrightarrow \mathrm{ctg}\, x(\sqrt{2} - 2\sin x) = 0$. Za $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathcal{Z}$ je $\mathrm{ctg}\, x = 0$, a za $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathcal{Z}$ je $\sqrt{2} - 2\sin x = 0$, tj. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. a) Sredina duži BC je $S\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{0+5}{2}\right)$, tj. $S(1, \frac{5}{2})$.
   b) Vektor $\overrightarrow{BC} = (3,5) - (-1,0) = (4,5)$, a njegov intenzitet, tj. dužina duži BC je $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$.
   c) Kako je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, to je $(-2,-2) = (3-x, 5-y)$. Izjednačavanjem odgovarajućih koordinata dobijamo $3 - x = -2$ i $5 - y = -2$, tj. $x = 5$ i $y = 7$.

5. a) Bez popusta knjiga košta $2628 : 0.8 = 3285$ dinara. Cena knjige je snižena za $3285 - 2628 = 657$ dinara.
   b) Ukupno radno vreme je 8+12+20=40 sati. Cena jednog radnog sata je $30.000 : 40 = 750$ dinara. Radnik A dobija $8 \cdot 750 = 6.000$ dinara, B dobija $12 \cdot 750 = 9.000$ dinara, a C dobija $20 \cdot 750 = 15.000$ dinara.

MAŠINSTVO; INDUSTRIJSKO INŽENJERSTVO I INŽENJERSKI MENADŽMENT; INŽENJERSTVO ZAŠTITE ŽIVOTNE SREDINE I ZAŠTITE NA RADU ; GRAFIČKO INŽENJERSTVO I DIZAJN

jul 2010. godine

1. **Rešiti nejednačinu**

$$\frac{|x+2|}{x^2-3x+2}<1.$$

2. **Rešiti trigonometrijsku jednačinu**

$$\cos 2x+\sin 2x=-1.$$

3. a) **Rešiti eksponencijalnu jednačinu**

$$\frac{2^x\cdot 4^{x-1}}{8^{3x}}=1.$$

b) **Rešiti logaritamsku jednačinu**

$$\log_7 2+\log_{49} x=\log_{\frac{1}{7}}\sqrt{3}.$$

4. a) **U razvoju binoma $\left(a-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$, $a>0$ odrediti prirodan broj n tako da binomni koeficijent uz treći član bude 21.**

b) **U razvoju binoma $\left(a-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^7$ odrediti koeficijent uz $a^{-\frac{1}{2}}$.**

5. a) **Dve tone jabuka se prodaju po ceni od 100 dinara po kilogramu. Kada je prodato $\frac{2}{5}$ početne količine jabuka, cena po kilogramu je povećana za 15% i ostatak jabuka je prodat po toj ceni. Kolika je zarada ostvarena prodajom svih jabuka?**

b) **Za koliko procenata je tako ostvarena zarada veća od zarade koja bi se ostvarila da su sve jabuke prodate po početnoj ceni?**

REŠENJE:

1. Nejednačina je definisana za $x\in\mathbf{R}\setminus\{1,2\}$. Iz $|x+2|=\begin{cases}x+2, & x\geq -2\\ -x-2, & x<-2\end{cases}$ slede dva slučaja date nejednačine.

Za $x\geq -2$ dobija se nejednačina $\dfrac{x(4-x)}{(x-1)(x-2)}<0$ čije je rešenje $x\in[-2,0)\cup(1,2)\cup(4,\infty)$.

Za $x<-2$ dobija se nejdenačina $\dfrac{-x^2+2x-4}{(x-1)(x-2)}<0$ čije je rešenje $x\in(-\infty,-2)$.

Rešenje date nejednačine je $x\in(-\infty,0)\cup(1,2)\cup(4,\infty)$.

2. $\cos 2x+\sin 2x=-1\leftrightarrow 1+\cos 2x+\sin 2x=0\leftrightarrow 2\cos^2 x+2\sin x\cos x=0\leftrightarrow 2\cos x(\cos x+\sin x)=0$. Rešenja jednačine $\cos x=0$ su $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$. Rešenja jednačine $\sin x+\cos x=0\leftrightarrow \operatorname{tg} x=-1$ su $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

3. a) **Rešiti eksponencijalnu jednačinu** $\dfrac{2^x\cdot 4^{x-1}}{8^{3x}}=1$.

$$\frac{2^x\cdot 4^{x-1}}{8^{3x}}=1\leftrightarrow\frac{2^x\cdot 2^{2x-2}}{2^{9x}}=1\leftrightarrow 2^{-6x-2}=2^0\leftrightarrow -6x-2=0\leftrightarrow x=-\frac{1}{3}.$$

b) **Rešiti logaritamsku jednačinu $\log_7 2 + \log_{49} x = \log_{\frac{1}{7}} \sqrt{3}$.**

Data logaritamska jednačina je definisana za $x > 0$.

$\log_7 2 + \log_{49} x = \log_{\frac{1}{7}} \sqrt{3} \leftrightarrow \log_7 2 + \log_{7^2} x = \log_{7^{-1}} \sqrt{3} \leftrightarrow \log_7 2 + \dfrac{1}{2} \log_7 x = -\log_7 \sqrt{3} \leftrightarrow$
$\log_7 2\sqrt{x} = \log_7 \dfrac{1}{\sqrt{3}} \leftrightarrow 2\sqrt{x} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \leftrightarrow x = \dfrac{1}{12}$.

4. a) **U razvoju binoma $\left(a - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$, $a > 0$ odrediti prirodan broj n tako da binomni koeficijent uz treći član bude 21.**

Iz $\dbinom{n}{2} = 21$ dobija se kvadratna jednačina $n^2 - n - 42 = 0$ čija su rešenja $n_1 = 7$ i $n_2 = -6$. Iz $n \in \mathbf{N}$ sledi $n = 7$.

b) **U razvoju binoma $\left(a - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^7$ odrediti koeficijent uz $a^{-\frac{1}{2}}$.**

$\left(a - \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^7 = \sum\limits_{k=0}^{7} \dbinom{7}{k} a^k (-\dfrac{1}{\sqrt{a}})^{7-k} = \sum\limits_{k=0}^{7} \dbinom{7}{k} (-1)^{7-k} a^{\frac{3}{2}k - \frac{7}{2}}$. Kako se traži koeficijent uz član koji sadrži $a^{-\frac{1}{2}}$, dobija se jednačina $\frac{3}{2}k - \frac{7}{2} = -\frac{1}{2}$ čije je rešenje $k = 2$, te je traženi koeficijent $\binom{7}{2} \cdot (-1)^5 = -21$.

5. a) **Dve tone jabuka se prodaju po ceni od 100 dinara po kilogramu. Kada je prodato $\frac{2}{5}$ početne količine jabuka, cena po kilogramu je povećana za 15% i ostatak jabuka je prodat po toj ceni. Kolika je zarada ostvarena prodajom svih jabuka?**

Za $\frac{2}{5}$ jabuka je ostvarena zarada od $Z_1 = \frac{2}{5} \cdot 2000 \cdot 100 = 80000$ dinara. Nakon toga je cena kilograma jabuka povećana za 15%, tako da je nova cena $100 + 0,15 \cdot 100 = 115$ dinara po kilogramu i zarada za preostale jebuke je $Z_2 = \frac{3}{5} \cdot 2000 \cdot 115 = 138000$ dinara. Ukupna zarada je $Z = Z_1 + Z_2 = 218000$ dinara.

b) **Za koliko procenata je tako ostvarena zarada veća od zarade koja bi se ostvarila da su sve jabuke prodate po početnoj ceni?**

Da su sve jabuke prodate po ceni od 100 dinara po kilogramu zarada bi bila $G = 2000 \cdot 100 = 200000$. Iz $218000 : 200000 = 1,09$ sledi da je tako ostvarena zarada veća za 9%.