Zbirka rešenih testova iz matematike sa prijemnih ispita na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu

dr Ivica Stevanović

jul 2023.

Autor je svestan mogućnosti postojanja koncepcijskih i drugih nedostataka i propusta i sa zahvalnošću će primiti svaku sugestiju, primedbu i ispravku.

Ivica Stevanović (ivica.stevanovic@ieee.org)

Sadržaj

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE ZA UPIS NA ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET 2023

1. Vrednost izraza $3 \cdot \dfrac{\sqrt{8+2\sqrt{7}}}{\sqrt{8-2\sqrt{7}}} - \dfrac{\sqrt{3+\sqrt{7}}}{\sqrt{3-\sqrt{7}}} \cdot \sqrt{2}$ iznosi:

(A) 2 (B) $\sqrt{6}$ (C) $3 \cdot \sqrt{2}$ (D) $\sqrt{2}$ (E) 1 (N) Ne znam

2. Rastojanje tačke $A(3,4)$ od centra kružnice $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 6 = 0$ iznosi :

(A) 2 (B) $\sqrt{65}$ (C) $\sqrt{17}$ (D) $\sqrt{53}$ (E) 5 (N) Ne znam

3. Trapez je opisan oko kruga poluprečnika r. Ako je poznato da je površina trapeza (u cm^2) pet puta veća od obima tog trapeza (u cm), tada dužina poluprečnika r (u cm) iznosi:

(A) 5 (B) 30 (C) 10 (D) 20 (E) 40 (N) Ne znam

4. Skup svih realnih rešenja nejednačine $\sqrt{(2x+1)^4 - (2x+1)^2} + (2x+1)^2 \geq 0$ je oblika (za neke $a, b, c \in \mathbb{R}$, za koje važi $a < b < c$):

(A) $(-\infty, a] \cup \{b\} \cup [c, +\infty)$ (B) $[a, b) \cup (b, c]$ (C) $[a, b] \cup [c, +\infty)$

(D) $(-\infty, a] \cup [b, c]$ (E) $\{a, b, c\}$ (N) Ne znam

5. Neka je B tačka na kružnici poluprečnika r i BC tangentna duž dužine 8 cm. Ako je A tačka na istoj kružnici takva da je duž AC dužine 9 cm i da sadrži centar kružnice, onda obim kružnice (u cm) iznosi:

(A) $\dfrac{36}{17}\pi$ (B) 2π (C) $\dfrac{11}{9}\pi$ (D) $\dfrac{17}{9}\pi$ (E) $\dfrac{289}{324}\pi$ (N) Ne znam

6. Ako su x_1, x_2, x_3 koreni jednačine $x^3 + qx^2 + px + 1 = 0$, $(p, q \in \mathbb{R}$ i $p \neq 0)$, tada vrednost izraza $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3}$ iznosi:

(A) $-p/q$ (B) -1 (C) 1 (D) p (E) $-p$ (N) Ne znam

7. U kocku K_1 ivice 1 cm upisana je lopta L_1, zatim je u loptu L_1 upisana kocka K_2, zatim u nju lopta L_2 i zatim se postupak nastavlja na isti način. Zbir površina (u cm^2) svih kocki K_n, $n \in \mathbb{N}$, iznosi:

(A) 2 (B) 8 (C) 18 (D) 4 (E) 9 (N) Ne znam

8. Zbir svih rešenja jednačine $z^2 + z\bar{z} + i\bar{z} = 0$, $z \in \mathbb{C}$, iznosi:

(A) -1 (B) 0 (C) $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$ (D) $-i$ (E) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$ (N) Ne znam

9. Broj četvorocifrenih brojeva deljivih sa 5 čije su sve cifre različite jednak je:

(A) 1008 (B) 952 (C) 109 (D) 900 (E) 872 (N) Ne znam

10. Zapremina prave pravilne četvorostrane zarubljene piramide, dijagonale 18 cm i stranica osnove 14 cm i 10 cm, iznosi (u cm^3):

(A) 3 (B) 4 (C) 1 (D) 0 (E) 2 (N) Ne znam

11. Broj realnih i različitih rešenja jednačine $\cos 7x - \sin 5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 7x)$ na segmentu $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ je:

(A) veći od 4 (B) 2 (C) 4 (D) 1 (E) 3 (N) Ne znam

12. Date su funkcije $f_1(x) = \sqrt{x-1} \cdot \log_3 3^{x-1}$, $f_2(x) = \sqrt{3}^{3\log_3(x-1)}$, $f_3(x) = \sqrt{(x-1)^3}$, $f_4(x) = 10^{\log_{\frac{1}{10}} |x-1|^{-3/2}}$. Tačan je iskaz:

(A) među datim funkcijama nema jednakih
(B) $f_2 \neq f_1 = f_3 \neq f_4$
(C) $f_1 = f_2 = f_3 \neq f_4$
(D) $f_1 \neq f_2 = f_3 \neq f_4$
(E) $f_1 = f_2 = f_3 = f_4$
(N) Ne znam

13. Pri deljenju polinoma P_1 polinomom $x^2 - 1$ dobija se ostatak x, a pri deljenju polinoma P_2 polinomom $x^2 - 1$ dobija se ostatak $x + 2$. Tada je ostatak pri deljenju polinoma $P_1 \cdot P_2$ polinomom $x^2 - 1$ jednak:

(A) 1 (B) $x + 2$ (C) $2x$ (D) $2x + 1$ (E) $2x - 1$ (N) Ne znam

14. Razlika najvećeg i najmanjeg realnog rešenja nejednačine $\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x+1} - x) \leq 2$, iznosi:

(A) 9/4
(B) nijedan od ponuđenih odgovora
(C) 1/2
(D) 2
(E) 1
(N) Ne znam

15. Binomni koeficijent četvrtog člana u razvoju binoma $\left(\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, veći je 26 puta od binomnog koeficijenta trećeg člana. Broj racionalnih sabiraka u ovom razvoju iznosi:

(A) 9 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 13 (N) Ne znam

16. Broj realnih rešenja sistema jednačina $x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$, $\cos^2 x + \cos^2 y = 1$, za $x \in [-\pi, 0]$ i $y \in [0, \pi]$, je:

(A) 2 (B) 5 (C) veći od 5 (D) 4 (E) 3 (N) Ne znam

17. Skup svih realnih rešenja nejednačine $\dfrac{1}{4^{\sqrt{x-1}-1}} - \dfrac{5}{2^{\sqrt{x-1}}} + 1 \geq 0$ je oblika (za neke $a, b \in \mathbb{R}$, takve da je $a < b$):

(A) $[a, \infty)$ (B) $(-\infty, a] \cup \{b\}$ (C) $\{a\} \cup [b, \infty)$ (D) $[a, b)$ (E) $\{a, b\}$ (N) Ne znam

18. Broj različitih vrednosti parametra $p \in \mathbb{R}$ za koje jednačina $\dfrac{p^2}{x+1} - \dfrac{x(p+2)}{x^2-1} = \dfrac{2p}{1-x^2}$ nema rešenja iznosi:

(A) 1 (B) 2 (C) 0 (D) više od 3 (E) 3 (N) Ne znam

19. Polulopta poluprečnika r upisana je u pravu pravilnu četvorostranu piramidu tako da osnova polulopte pripada ravni osnove piramide i sve bočne strane piramide dodiruju poluloptu. Ako je površina takve piramide minimalna, onda njena osnovna ivica iznosi:

(A) $\dfrac{2\sqrt{3}r}{3}$ (B) $\dfrac{48r}{9}$ (C) $\dfrac{4\sqrt{3}r}{3}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}r}{4}$ (E) $\dfrac{16\sqrt{3}r}{9}$ (N) Ne znam

20. Skup svih vrednosti parametra $n \in \mathbb{R}$ za koje prava $y = x + n$ i kriva $y = x^3 - 2x^2 + x - 2$ imaju najveći broj presečnih tačaka je oblika (za neke $a, b \in \mathbb{R}$, takve da je $a < b$):

(A) $(-\infty, a] \cup \{b\}$
(B) $\{a\} \cup (b, \infty)$
(C) $(-\infty, a] \cup [b, \infty)$
(D) (a, b)
(E) $[a, b]$
(N) Ne znam

REŠENJA

1.Ⓔ Važi

$$\frac{1}{\sqrt{8-2\sqrt{7}}} = \frac{1}{\sqrt{8-2\sqrt{7}}} \cdot \frac{\sqrt{8+2\sqrt{7}}}{\sqrt{8+2\sqrt{7}}} = \frac{\sqrt{8+2\sqrt{7}}}{\sqrt{8^2-(2\sqrt{7})^2}} = \frac{1}{6}\sqrt{8+2\sqrt{7}}$$

i

$$\frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{7}}} = \frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{7}}} \cdot \frac{\sqrt{3+\sqrt{7}}}{\sqrt{3+\sqrt{7}}} = \frac{\sqrt{3+\sqrt{7}}}{\sqrt{3^2-(\sqrt{7})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{3+\sqrt{7}}$$

Zadati izraz sada postaje

$$3 \cdot \frac{\sqrt{8+2\sqrt{7}}}{\sqrt{8-2\sqrt{7}}} - \frac{\sqrt{3+\sqrt{7}}}{\sqrt{3-\sqrt{7}}} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{8+2\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{6}\sqrt{8+2\sqrt{7}} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3+\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{3+\sqrt{7}}$$
$$= \frac{1}{2}(8+2\sqrt{7}) - (3+\sqrt{7}) = 4+\sqrt{7}-3-\sqrt{7} = 1.$$

2.Ⓑ Za jednačinu kružnice imamo

$$x^2+y^2+2x+6y+6=0$$
$$x^2+2x+1+y^2+6y+9=4$$
$$(x+1)^2+(y+3)^2=2^2$$
$$(x-x_C)^2+(y-y_C)^2=r^2$$

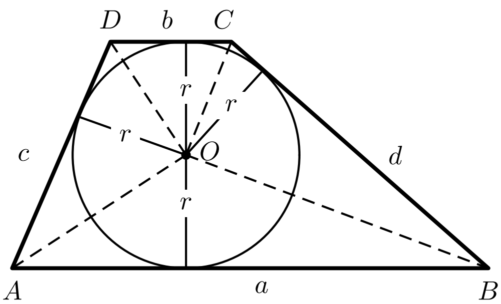
te je centar kružnice u tački $x_C=-1$, $y_C=-3$.

Sada se za rastojanje tačke $A(3,4)$ od centra kružnice $C(-1,-3)$ dobija

$$d_{AC} = \sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2} = \sqrt{(3+1)^2-(4+3)^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}.$$

3.Ⓒ

Na slici je prikazan trapez $ABCD$ opisan oko kruga poluprečnika r sa centrom u tački O. Površina trapeza jednaka je zbiru površina trouglova ABO, BCO, CDO, ADO, od kojih svaki ima visinu r nad odgovarajućom stranicom a, d, b, c:



$$P = P_{ABO}+P_{BCO}+P_{CDO}+P_{ADO}$$
$$P = \frac{1}{2}(ar+dr+br+cr) = \frac{1}{2}r(a+b+c+d) = \frac{1}{2}rO$$

gde je sa O označen obim trapeza. Iz uslova zadatka $P=5O$ za poluprečnik r dobijamo

$$r = 2\frac{P}{O} = 10.$$

4.Ⓐ

$$\sqrt{(2x+1)^4-(2x+1)^2}+(2x+1)^2 \geq 0$$

Uvođenjem smene $t=(2x+1)^2 \geq 0$, nejednačina postaje

$$\sqrt{t^2-t}+t \geq 0$$
$$\sqrt{t^2-t} \geq -t$$

Kako je $t \geq 0 \Rightarrow -t \leq 0$ i $\sqrt{t^2-t} \geq 0$ to je prethodna jednačina ispunjena za sve $t \geq 0$.

Za realne brojeve, izraz ispod kvadratnog korena mora biti veći ili jednak nuli

$$t^2-t \geq 0 \Leftrightarrow t(t-1) \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 0 \vee t \geq 1$$

što uz uslov $t \geq 0$ daje

$$t=0 \vee t \geq 1$$

Sada imamo dva slučaja

- $t = 0$:

$$(2x+1)^2 = 0 \Rightarrow 2x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

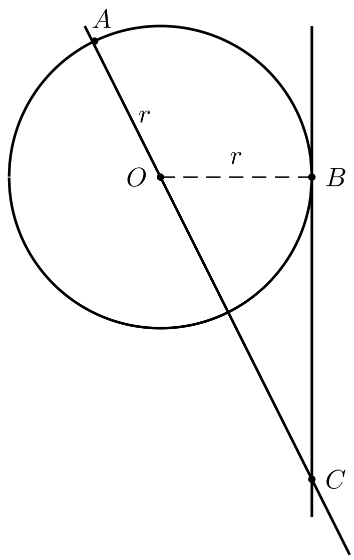
- $t \geq 1$:

$$(2x+1)^2 \geq 1 \Rightarrow (2x+1)^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow (2x+1-1)(2x+1+1) \geq 0 \Rightarrow x(x+1) \geq 0$$
$$x \leq -1 \vee x \geq 0$$

Odakle sledi da će zadata nejednačina biti ispunjena za

$$x \in (-\infty, -1] \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup [0, +\infty).$$

5.Ⓓ Na slici je prikazana tangenta na kružnicu u tački B i tačka C na toj tangenti takva da je $BC = 8$. Tačka A se nalazi na kružnici i duž $AC = 9$ je takva da prolazi kroz centar kružnice O kao na slici.



Primenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao OBC imamo

$$OC^2 = OB^2 + BC^2 = r^2 + 8^2 = r^2 + 64$$

Sa slike važi

$$OC = AC - AO = 9 - r$$

što smenom u prethodnoj jednakosti daje dužinu poluprečnika r:

$$(9-r)^2 = r^2 + 64$$

$$r^2 - 18r + 81 = r^2 + 64 \Rightarrow r = \frac{17}{18}$$

Sada se za obim kružnice dobija

$$O = 2\pi r = 2\pi\frac{17}{18} = \frac{17\pi}{9}.$$

6.Ⓔ Važi

$$px^3 + qx^2 + px + 1 = 0, \quad p, q \in \mathbb{R}, p \neq 0$$
$$x^3 + \frac{q}{p}x^2 + x + \frac{1}{p} = 0$$

Ako su x_1, x_2 i x_3 koreni ovog polinoma, tada važi

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 + \frac{q}{p}x^2 + x + \frac{1}{p}$$

$$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3 = x^3 + \frac{q}{p}x^2 + x + \frac{1}{p}$$

odakle izjednačavanjem izraza za koeficijente polinoma sa leve i desne strane prethodne jednačine dobijamo

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{q}{p}$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 1$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{1}{p}$$

Sada se za zadati izraz dobija

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = \frac{1}{-\frac{1}{p}} = -p.$$

7.Ⓔ Za poluprečnik r_1 lopte L_1 upisane u kocku K_1 dužine ivice $a_1 = 1$ važi

$$2r_1 = a_1$$

Za kocku K_2, dužine ivice a_2 upisanu u loptu L_1, važi da je prečnik lopte L_1 jednak dužini dijagonale kocke

$$a_2\sqrt{3} = 2r_1 = a_1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}a_1$$

Primenom ovih relacija, za dužinu ivice kocke K_3 dobijamo

$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}a_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 a_1$$

i indukcijom za dužinu ivice kocke K_n imamo

$$a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1} a_1$$

Za površine ovih kocki imamo redom

$$P_1 = 6a_1^2$$

$$P_2 = 6a_2^2 = 6a_1^2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 6a_1^2\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$P_3 = 6a_3^2 = 6a_1^2\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)^2 = 6a_1^2\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$P_n = 6a_n^2 = 6a_1^2\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}\right)^2 = 6a_1^2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

te se za zbir površina svih kocki ima

$$P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n + \cdots = 6a_1^2\left(1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \cdots\right)$$

$$= 6a_1^2\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 9a_1 = 9.$$

8.Ⓓ Neka je $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$ i $i = \sqrt{-1}$.
Sada važi

$$z^2 = a^2 - b^2 + 2iab$$

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

$$i\bar{z} = i(a - ib) = b + ia$$

te zadata jednačina

$$z^2 + z\bar{z} + i\bar{z} = 0$$

dobija oblik

$$a^2 - b^2 + 2iab + a^2 + b^2 + b + ia = 0$$
$$2a^2 + b + ia(2b + 1) = 0$$

Izjednačavanjem realnih i imaginarnih delova sa leve i desne strane prethodne jednačine dobijamo

$$2a^2 + b = 0 \wedge a(2b + 1) = 0$$

te imamo sledeća dva slučaja

$$a = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow z_1 = 0$$

i

$$2b + 1 = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$
$$2a^2 = -b = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \pm\frac{1}{2}$$

odakle imamo

$$z_{2,3} = a + ib = \pm\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$$

Sada se za zbir svih rešenja zadate jednačine dobija

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 - \frac{1}{2} - \frac{i}{2} + \frac{1}{2} - \frac{i}{2} = -i.$$

9.Ⓑ Označimo sve četvorocifrene brojeve sa

$$x = d_3d_2d_1d_0$$

gde $d_3 \in \{1, 2, \ldots 9\}$ i $d_2, d_1, d_0 \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Tražimo ukupan broj četvorocifrenih brojeva deljivih sa 5 čije su sve cifre različite.

Četvorocifreni brojevi deljivi sa pet na mestu jedinica mogu imati ili cifru 0 ili cifru 5 te razlikujemo dva slučaja:

- $d_0 = 5$

  d_3 može biti bilo koja od preostalih 8 cifara iz skupa $d_3 \in \{1, 2, \ldots 9\} \backslash \{5\}$

  d_2 može biti bilo koja od preostalih 8 cifara is skupa $d_2 \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\} \backslash \{5, d_3\}$

  d_1 može biti bilo koja od preostalih 7 cifara is skupa $d_1 \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\} \backslash \{5, d_3, d_2\}$

  Odavde sledi da je ukupan broj četvorocifrenih brojeva čije su sve cifre različite i na mestu jedinica imaju cifru 5:

  $$8 \cdot 8 \cdot 7$$

- $d_0 = 0$

  d_3 može biti bilo koja od 9 cifara iz skupa $d_3 \in \{1, 2, \ldots 9\}$

  d_2 može biti bilo koja od preostalih 8 cifara is skupa $d_2 \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\} \backslash \{0, d_3\}$

  d_1 može biti bilo koja od preostalih 7 cifara is skupa $d_1 \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\} \backslash \{0, d_3, d_2\}$

  Odavde sledi da je ukupan broj četvorocifrenih brojeva čije su sve cifre različite i na mestu jedinica imaju cifru 0:

  $$9 \cdot 8 \cdot 7$$

Konačno za ukupan broj četvorocifrenih brojeva deljivih sa 5 čije su sve cifre različite imamo

$$8 \cdot 8 \cdot 7 + 9 \cdot 8 \cdot 7 = (8 + 9) \cdot 8 \cdot 7 = 17 \cdot 56 = 952.$$

10.Ⓔ Na slici je prikazana pravilna prava četvorostrana zarubljena piramida $ABCDA'B'C'D'$ i trougao SAC koji odgovara preseku u ravni koja sadrži dijagonale osnova AC i $A'C'$.

Prema uslovu zadatka važi $AB = BC = CD = DA = a = 14$, $A'B' = B'C' = C'D' = D'A' = b = 10$ i $CA' = AC' = DB' = BD' = d = 18$

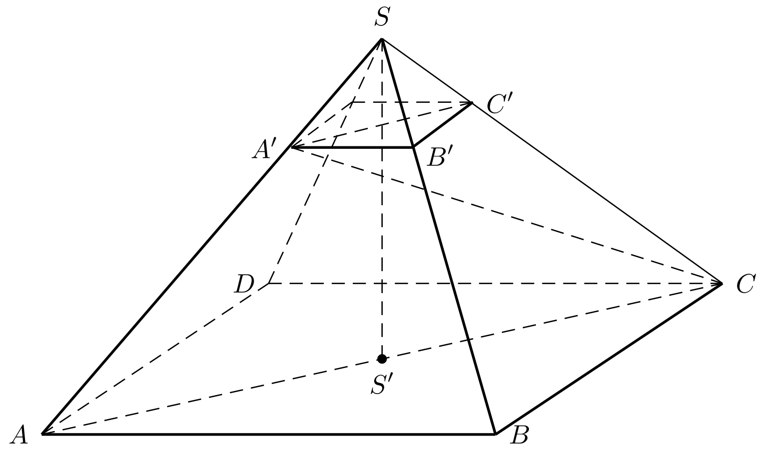
Kako je AC dijagonala kvadrata $ABCD$ u većoj osnovi i $A'C'$ dijagonala kvadrata u manjoj osnovi, to za njihove dužine važi

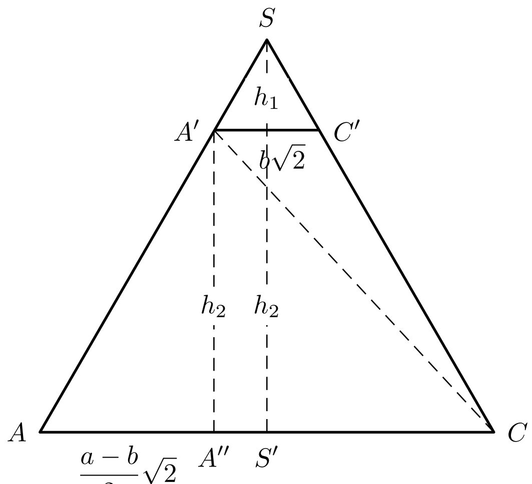
$$AC = a\sqrt{2} \quad A'C' = b\sqrt{2}$$

te je

$$AA'' = \frac{AC - A'C'}{2} = \frac{a-b}{2}\sqrt{2}$$

$$A''C = AC - AA'' = a\sqrt{2} - \frac{a-b}{2}\sqrt{2} = \frac{a+b}{2}\sqrt{2}$$





Primenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao $A'A''C$ imamo

$$A'C^2 = A'A''^2 + A''C^2$$

$$d^2 = h_2^2 + \left(\frac{a+b}{2}\sqrt{2}\right)^2 = h_2^2 + \frac{(a+b)^2}{2}$$

odakle sledi

$$h_2^2 = d^2 - \frac{(a+b)^2}{2} = 18^2 - \frac{(14+10)^2}{2} = 36 \Rightarrow h_2 = 6$$

Iz sličnosti trouglova SAC i $SA'C'$ imamo

$$\frac{h_1 + h_2}{a\sqrt{2}} = \frac{h_1}{b\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{h_2}{h_1} = \frac{a-b}{b}$$

$$h_1 = \frac{b}{a-b}h_2 = \frac{5}{2}h_2 = 15$$

Sada za zapreminu zarubljene piramide imamo

$$V = \frac{1}{3}B_2(h_1 + h_2) - \frac{1}{3}B_1 h_1 = \frac{1}{3}a^2(h_1 + h_2) - \frac{1}{3}b^2 h_1$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 14^2 \cdot 21 - \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 15 = 872$$

11.©

$$\cos 7x - \sin 5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 7x), \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Deljenjem zadate jednačine sa 2 i korišćenjem

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

dobijamo

$$\frac{1}{2}\left(\cos 7x - \sin 5x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos 5x - \sin 7x\right)$$

$$\cos\frac{\pi}{3}\left(\cos 7x - \sin 5x\right) = \sin\frac{\pi}{3}\left(\cos 5x - \sin 7x\right)$$

$$\cos 7x \cos\frac{\pi}{3} + \sin 7x \sin\frac{\pi}{3} = \cos 5x \sin\frac{\pi}{3} + \sin 5x \cos\frac{\pi}{3}$$

odakle korišćenjem identiteta

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\sin\beta$$

dobijamo

$$\cos\left(7x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right)$$

i kako je

$$\sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(5x + \frac{\pi}{3}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 5x\right) = \cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right)$$

to se zadata jednačina svodi na

$$\cos\left(7x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right)$$

i njena rešenja se mogu napisati u obliku

$$7x_k - \frac{\pi}{3} = \pm\left(5x_k - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$$

Sada razlikujemo dva slučaja:

- $7x_k - \dfrac{\pi}{3} = +\left(5x_k - \dfrac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$

  $$2x_k = +\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

  $$x_k = +\frac{\pi}{12} + k\pi$$

  gde jedino $x_0 = \dfrac{\pi}{12}$ pripada intervalu $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

- $7x_k - \dfrac{\pi}{3} = -\left(5x_k - \dfrac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$

  $$12x_k = +\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

  $$x_k = +\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{6}$$

  gde jedino $x_0 = \dfrac{\pi}{24}$, $x_1 = \dfrac{5\pi}{24}$, i $x_2 = \dfrac{9\pi}{24}$ pripadaju intervalu $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

Odavde sledi da jednačina ima 4 različitih realnih rešenja koja pripadaju zadatom intervalu.

12.Ⓑ Važi

$$f_1(x) = \sqrt{x-1} \cdot \log_3 3^{x-1} = \sqrt{x-1} \cdot (x-1)\log_3 3 = (x-1)^{\frac{3}{2}}$$

za

$$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$f_2(x) = \sqrt{3}^{3\log_3(x-1)} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_3(x-1)^3} = 3^{\frac{1}{2}\log_3(x-1)^3} = 3^{\log_3(x-1)^{\frac{3}{2}}} = (x-1)^{\frac{3}{2}}$$

za

$$x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Odavde važi $f_1(x) \neq f_2(x)$, jer iako funkcije imaju isti oblik, nisu definisane na istom domenu.
Dalje važi

$$f_3(x) = \sqrt{(x-1)^3} = (x-1)^{\frac{3}{2}}$$

za

$$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

odakle sledi

$$f_3(x) = f_1(x) \neq f_2(x).$$

Na kraju,

$$f_4(x) = 10^{\log_{\frac{1}{10}} |x-1|^{-3/2}} = 10^{\frac{\log_{10}|x-1|^{-3/2}}{\log_{10}\frac{1}{10}}} = 10^{-\log_{10}|x-1|^{-3/2}} = 10^{\log_{10}\left(|x-1|^{-3/2}\right)^{-1}} = 10^{\log_{10}|x-1|^{3/2}} = |x-1|^{3/2}$$

za

$$|x-1| > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Odavde konačno sledi

$$f_2(x) \neq f_1(x) = f_3(x) \neq f_4(x).$$

13.Ⓓ Pri deljenju polinoma P_1 polinomom $x^2 - 1$ dobija se ostatak x:

$$P_1(x) = Q_1(x)(x^2-1) + x$$

Pri deljenju polinoma P_2 polinomom $x^2 - 1$ dobija se ostatak $x + 2$:

$$P_2(x) = Q_2(x)(x^2-1) + x + 2$$

Sada za proizvod polinoma $P_1 \cdot P_2$ imamo

$$\begin{aligned}
P_1(x)P_2(x) &= \left(Q_1(x)(x^2-1) + x\right)\left(Q_2(x)(x^2-1) + x + 2\right) \\
&= (x^2-1)\left(Q_1(x)Q_2(x)(x^2-1) + (x+2)Q_1(x) + xQ_2(x)\right) + x^2 + 2x \\
&= (x^2-1)\left(Q_1(x)Q_2(x)(x^2-1) + (x+2)Q_1(x) + xQ_2(x)\right) + x^2 - 1 + 2x + 1 \\
&= (x^2-1)\left(Q_1(x)Q_2(x)(x^2-1) + (x+2)Q_1(x) + xQ_2(x) + 1\right) + 2x + 1
\end{aligned}$$

te je ostatak pri deljenju ovog polinoma polinomom $x^2 - 1$ jednak

$$2x + 1.$$

14.Ⓐ Važi

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{x+1} - x\right) \leq 2$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{x+1} - x\right) \leq 2\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{x+1}-x\right) \leq \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\sqrt{x+1}-x \geq \frac{1}{4}$$
$$4\sqrt{x+1} \geq 4x+1$$

gde mora važiti $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

Dalje razlikujemo dva slučaja:

- $4x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{4}$

  Kako je $4\sqrt{x+1} \geq 0$ i $4x+1 < 0$ to je gornja nejednačina uvek ispunjena za

  $$x \in \left[-1, -\frac{1}{4}\right)$$

- $4x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{4}$

  U ovom slučaju su i leva i desna strana jednačine veća ili jednaka nuli, pa njihovim kvadriranjem redom dobijamo

  $$4\sqrt{x+1} \geq 4x+1 \Big/^2$$
  $$16(x+1) \geq 16x^2+8x+1$$
  $$16x^2-8x-15 \leq 0$$

  gde za korene polinoma sa leve strane nejednačine dobijamo

  $$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64+4\cdot 16\cdot 15}}{32} = \frac{8 \pm 32}{32}$$
  $$x_1 = -\frac{3}{4} \vee x_2 = \frac{5}{4}$$

  te je rešenje poslednje nejednačine

  $$x \in \left[-\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$$

  što uz uslov $x \geq -\frac{1}{4}$ daje

  $$x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right]$$

Uzimanjem u obzir oba slučaja, za konačno rešenje zadate nejednačine se ima

$$x \in \left[-1, \frac{5}{4}\right]$$

te je razlika najvećeg i najmanjeg rešenja:

$$x_{\max} - x_{\min} = \frac{5}{4} - (-1) = \frac{5}{4} + 1 = \frac{9}{4}$$

15.Ⓑ Razvoj binoma $(a+b)^n$ dat je izrazom

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Prema uslovu zadatka, binomni koeficijent četvrtog člana $\binom{n}{3}$ je 26 puta veći od binomnog koeficijenta trećeg člana $\binom{n}{2}$:

$$\binom{n}{3} = 26 \cdot \binom{n}{2}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1} = 26\cdot\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}$$
$$n-2 = 13\cdot 6 \Rightarrow n = 80$$

Sada za $n = 80$, $a = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ i $b = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} = 2^{-\frac{1}{3}}$ za k-ti sabirak u razvoju binoma imamo

$$\begin{aligned} a^{80-k}b^k &= \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{80-k}\cdot\left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^k \\ &= 2^{\frac{80-k}{2}}\cdot 2^{-\frac{k}{3}} \\ &= 2^{40-\frac{5k}{6}}, \quad k = 0,1,2,\ldots 80 \end{aligned}$$

Da bi k-ti sabirak bio racionalan, $5k$ mora biti deljivo sa 6, odnosno k mora biti deljivo sa 6:

$$k = 0, 6, 12, 18, \ldots 78$$

$$k = 0\cdot 6, 1\cdot 6, 2\cdot 6, 3\cdot 6, \ldots, 13\cdot 6$$

što znači da takvih sabiraka ima ukupno 14.

---

16. Ⓓ

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$$
$$\cos^2 x + \cos^2 y = 1$$
$$x \in [-\pi, 0] \leq 0 \wedge y \in [0, \pi] \geq 0$$

Transformacijom prve jednačine dobijamo

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$$
$$x^2 + 2xy + y^2 + y^2 + xy = 0$$
$$(x+y)^2 + y(x+y) = 0$$
$$(x+y)(x+2y) = 0$$
$$x = -y \vee x = -2y$$

Sada razlikujemo dva slučaja

- $x = -y$

  U ovom slučaju druga jednačina dobija oblik

$$\cos^2 x + \cos^2 y = 1$$
$$\cos^2(-y) + \cos^2 y = 1$$
$$2\cos^2 y = 1$$
$$\cos y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow y = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\cos y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow y = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

  od ovih rešenja, samo

$$y = \frac{\pi}{4}$$

  i

$$y = \frac{3\pi}{4}$$

  pripadaju intervalu $[0, \pi]$ i za ove vrednosti imamo redom

$$x = -y = -\frac{\pi}{4}$$
$$x = -y = -\frac{3\pi}{4}$$

  od kojih oba ispunjavaju uslov $x \in [-\pi, 0]$. Dakle u ovom slučaju imamo dva realna rešenja.

- $x = -2y$

  U ovom slučaju druga jednačina dobija oblik

$$\cos^2 x + \cos^2 y = 1$$

$$\cos^2(-2y) + \cos^2 y = 1$$
$$(2\cos^2 y - 1)^2 + \cos^2 y = 1$$
$$4\cos^4 y - 4\cos^2 y + 1 + \cos^2 y = 1$$
$$\cos^2 y(4\cos^2 y - 3) = 0$$
$$\cos^2 y = 0 \vee \cos^2 y = \frac{3}{4}$$

  Sada imamo dva podslučaja:

  - $\cos^2 y = 0$

$$\cos y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

    od ovih rešenja samo $y = \frac{\pi}{2}$ pripada intervalu $[0, \pi]$. I kako je $x = -2x = -\pi \in [-\pi, 0]$ to ovo rešenje ispunjava uslov.

  - $\cos^2 y = \frac{3}{4}$

$$\cos y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow y = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

    od ovih rešenja samo $y = \frac{\pi}{6}$ pripada intervalu $[0, \pi]$. I kako je $x = -2x = -\frac{\pi}{3} \in [-\pi, 0]$ to ovo rešenje ispunjava uslov.

$$\cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow y = \pm\frac{5\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

    od ovih rešenja samo $y = \frac{5\pi}{6}$ pripada intervalu $[0, \pi]$. I kako je $x = -2x = -\frac{5\pi}{3} \notin [-\pi, 0]$ to ovo rešenje ne ispunjava uslov.

Dakle ukupan broj rešenja je 4:

$$\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right), \quad \left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right), \quad \left(-\pi, \frac{\pi}{2}\right) \quad \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$$

17.Ⓒ Tražimo rešenja nejednačine

$$\frac{1}{4^{\sqrt{x-1}-1}} - \frac{5}{2^{\sqrt{x-1}}} + 1 \geq 0$$
$$\frac{4}{4^{\sqrt{x-1}}} - \frac{5}{2^{\sqrt{x-1}}} + 1 \geq 0$$

gde mora biti ispunjeno

$$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

Uvođenjem smene $t = \frac{1}{2^{\sqrt{x-1}}} > 0$ gde važi

$$t^2 = \left(\frac{1}{2^{\sqrt{x-1}}}\right)^2 = \frac{1}{2^{2\sqrt{x-1}}} = \frac{1}{4^{\sqrt{x-1}}}$$

nejednačina dobija oblik

$$4t^2 - 5t + 1 \geq 0$$
$$(t-1)(4t-1) \geq 0$$
$$t \leq \frac{1}{4} \vee t \geq 1$$

Sada imamo dva slučaja:

- $t \leq \dfrac{1}{4}$

$$\frac{1}{t} \geq 4$$
$$2^{\sqrt{x-1}} \geq 2^2$$
$$\sqrt{x-1} \geq 2 \Big/^2$$
$$x-1 \geq 4$$
$$x \geq 5$$

- $t \geq 1$

$$\frac{1}{t} \leq 1$$
$$2^{\sqrt{x-1}} \leq 2^0$$
$$\sqrt{x-1} \leq 0$$

  čije je jedino rešenje

$$x = 1$$

Uzimanjem u obzir svih uslova za rešenje zadate nejednačine dobijamo

$$x \in \{1\} \cup [5, +\infty).$$

---

18. Ⓑ

$$\frac{p^2}{x+1} - \frac{x(p+2)}{x^2-1} = \frac{2p}{1-x^2}, \quad x \neq \pm 1$$

$$\frac{p^2}{x+1} - \frac{x(p+2)}{(x-1)(x+1)} + \frac{2p}{(x-1)(x+1)} = 0 \quad \Big/ \times (x-1)(x+1)$$
$$p^2(x-1) - x(p+2) + 2p = 0$$
$$x(p^2-p-2) = p^2 - p$$

Ova jednačina neće imati rešenja za

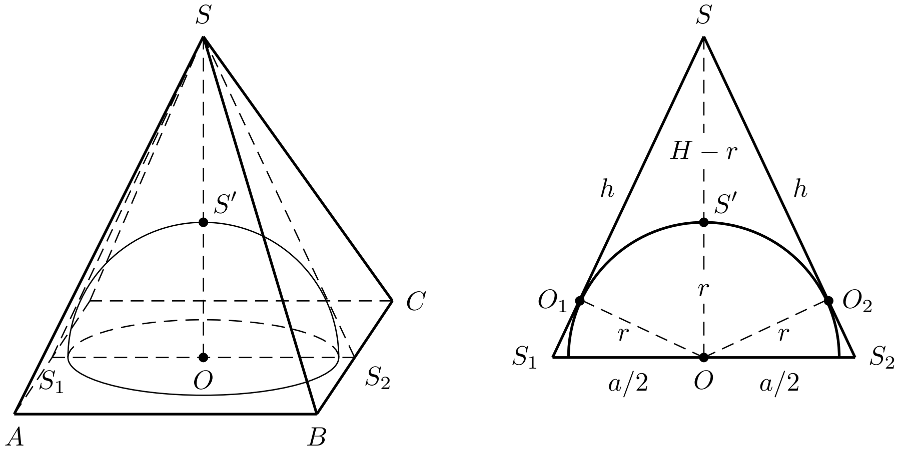
$$p^2 - p - 2 = 0$$
$$p_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$
$$p_1 = -1 \vee p_2 = 2$$

za sve ostale vrednosti $p \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 2\}$ rešenje je realno i dato izrazom

$$x = \frac{p(p-1)}{(p+1)(p-2)}.$$

---

19. Ⓒ Na slici je prikazana polulopta poluprečnika r upisana u pravu pravilnu četvorostranu piramidu tako da osnova polulopte pripada ravni osnove piramide i sve bočne strane piramide dodiruju poluloptu. Neka je visina priamide H, dužina stranica osnove a i visina bočnih strana h (videti sliku).



Iz pravouglog trougla SOS_1 imamo

$$SS_1^2 = SO^2 + S_1O^2$$

$$h^2 = H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = H^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$h = \sqrt{H^2 + \frac{a^2}{4}}$$

Za površinu piramide imamo

$$P = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} ah = a^2 + 2ah$$

$$P = a^2 + 2a\sqrt{H^2 + \frac{a^2}{4}} = a^2 + a\sqrt{a^2 + 4H^2}$$

Površina pravouglog trougla SOS_1 se može izraziti preko proizvoda kateta S_1O i SO ili preko proizvoda hipotenuze SS_1 i visine nad hipotenuzom OO_1

$$P_{SOS_1} = \frac{1}{2} S_1O \cdot SO = \frac{1}{2} SS_1 \cdot OO_1$$

$$S_1O \cdot SO = SS_1 \cdot OO_1$$

$$\frac{1}{2} aH = hr \Rightarrow 2hr = aH$$

gde korišćenjem izraza za h dalje dobijamo

$$r\sqrt{a^2 + 4H^2} = aH$$

$$r^2(a^2 + 4H^2) = a^2H^2$$

$$H^2 = \frac{a^2r^2}{a^2 - 4r^2}$$

i kako je sada

$$a^2 + 4H^2 = a^2 + \frac{4a^2r^2}{a^2 - 4r^2} = \frac{a^4}{a^2 - 4r^2}$$

$$\sqrt{a^2 + 4H^2} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - 4r^2}}$$

površinu piramide možemo izraziti u funkciji poluprečnika upisane polulopte r i dužine ivice osnove a

$$P = a^2 + a\sqrt{a^2 + 4H^2} = a^2 + \frac{a^3}{\sqrt{a^2 - 4r^2}}$$

Površina će biti minimalna kada je

$$P'(a) = 0$$

$$\left(a^2 + \frac{a^3}{\sqrt{a^2 - 4r^2}}\right)' = 0$$

$$2a + \frac{(a^3)'\sqrt{a^2 - 4r^2} - a^3\left(\sqrt{a^2 - 4r^2}\right)'}{(\sqrt{a^2 - 4r^2})^2} = 0$$

$$2a + \frac{3a^2\sqrt{a^2 - 4r^2} - a^3 \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 4r^2}}(a^2)'}{a^2 - 4r^2} = 0$$

$$2a + \frac{3a^2\sqrt{a^2 - 4r^2} - a^3 \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 4r^2}}(2a)}{a^2 - 4r^2} = 0$$

$$\frac{2a(a^2 - 4r^2) + 3a^2\sqrt{a^2 - 4r^2} - \frac{a^4}{\sqrt{a^2 - 4r^2}}}{a^2 - 4r^2} = 0$$

$$2a(a^2 - 4r^2) + 3a^2\sqrt{a^2 - 4r^2} - \frac{a^4}{\sqrt{a^2 - 4r^2}} = 0 \Big/ \cdot \sqrt{a^2 - 4r^2}$$

$$2(a^2 - 4r^2)^{3/2} + 3a\sqrt{a^2 - 4r^2} - a^3 = 0$$

$$(a^2-4r^2)^{3/2} = a(6r^2-a^2) \Big/^{2}$$
$$(a^2-4r^2)^3 = a^2(6r^2-a^2)^2$$
$$a^6-12a^4r^2+48a^2r^4-64r^6 = 36a^2r^4-12a^4r^2+a^6$$
$$64r^6 = 12a^2r^4 \Rightarrow 16r^2 = 3a^2$$
$$a^2 = \frac{16}{3}r^2 \Rightarrow a = \frac{4\sqrt{3}}{3}r.$$

20.Ⓓ Tražimo vrednosti parametra $n \in \mathbb{R}$ za koje prava $y = x + n$ i kriva $y = x^3 - 2x^2 + x - 2$ imaju najveći broj presečnih tačaka.

Smenom prve jednačine u drugoj, dobijamo kubnu jednačinu oblika

$$x + n = x^3 - 2x^2 + x - 2$$
$$x^3 - 2x^2 - (n+2) = 0$$

Najveći broj različitih rešenja koje ova jednačina može imati je 3, i ona odgovaraju najvećem broju presečnih tačaka ove dve krive.

Poslednju jednačinu možemo transformisati na sledeći način za neko $b \in \mathbb{R}$:

$$x^3 - \underbrace{(b+2)x^2 + bx^2}_{=2x^2} - \underbrace{b(b+2)x + b(b+2)x}_{=0} - \underbrace{b(b+2)^2}_{=n+2} = 0$$

gde smo označili

$$n + 2 = b(b+2)^2 \Rightarrow n = b(b+2)^2 - 2$$

odakle dalje sledi

$$x^2(x-(b+2)) + bx(x-(b+2)) + b(b+2)(x-(b+2)) = 0$$
$$(x-(b+2))\left(x^2 + bx + b(b+2)\right) = 0$$

Jedno rešenje je dato sa

$$x = b + 2$$

preostala dva moguća rešenja se dobijaju za

$$x^2 + bx + b(b+2) = 0$$

kada je diskriminanta ove kvadratne jednačine strogo veća od nule

$$D = b^2 - 4b(b+2) > 0$$
$$-3b^2 - 8b > 0$$
$$b(3b+8) < 0$$
$$b \in \left(-\frac{8}{3}, 0\right)$$

Dakle za b iz ovog intervala, kubna jednačina će imati maksimalni broj od 3 različita rešenja.

Kako je

$$n = b(b+2)^2 - 2$$

dalje tražimo vrednosti parametra n u intervalu $b \in \left(-\frac{8}{3}, 0\right)$.

Ekstremne vrednosti funkcije $n(b)$ dobijamo za

$$n'(b) = 0$$
$$\left(b(b+2)^2 - 2\right)' = 0$$
$$b'(b+2)^2 + b\left((b+2)^2\right)' = 0$$
$$(b+2)^2 + 2b(b+2) = 0$$

$$(b+2)(3b+2)=0$$

čija su rešenja

$$b_1=-2\in\left(-\frac{8}{3},0\right)$$

$$b_2=-\frac{2}{3}\in\left(-\frac{8}{3},0\right)$$

Sada imamo

$$n(b_1=-2)=b(b+2)^2-2=-2$$

$$n\left(b_2=-\frac{2}{3}\right)=b(b+2)^2-2=-\frac{2}{3}\left(2-\frac{2}{3}\right)^2-2=-\frac{32}{27}-2=-\frac{86}{27}$$

te je

$$n_{\max}=n(b_1=-2)=-2$$

i

$$n_{\min}=n\left(b_2=-\frac{2}{3}\right)=-\frac{86}{27}$$

Proverom vrednosti $n(b)$ u graničnim tačkama intervala $b\in\left(-\frac{8}{3},0\right)$ dobijamo

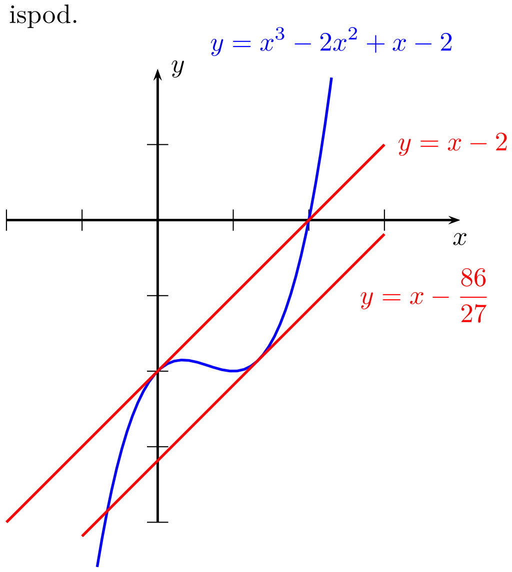
$$n(b_{\max}=0)=b(b+2)^2-2=-2=n_{\max}$$

$$n\left(b_{\min}=-\frac{8}{3}\right)=b(b+2)^2-2=-\frac{8}{3}\left(2-\frac{8}{3}\right)^2-2=-\frac{32}{27}-2=-\frac{86}{27}=n_{\min}$$

Dakle, najveći broj od tri presečne tačke zadate krive imaju za

$$n\in\left(-\frac{86}{27},-2\right)$$

što je grafički predstavljeno na slici ispod.



PROBNI PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE ZA UPIS NA ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET 2023

1. Vrednost izraza $\dfrac{\sqrt{1-2a+a^2}}{1+a}+\dfrac{\sqrt{1+2a+a^2}}{1-a}$ za $a=\sqrt{2}$ iznosi:

(A) 4 (B) $4-4\sqrt{2}$ (C) $2+4\sqrt{2}$ (D) -6 (E) $-4\sqrt{2}$ (N) Ne znam

2. Rastojanje tačke $A(1,1)$ od prave $x+2y=5$ iznosi :

(A) $3/\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{5}/5$ (C) $5/\sqrt{5}$ (D) $2\sqrt{5}/5$ (E) $2/5$ (N) Ne znam

3. Neka je za aritmetičku progresiju suma trećeg, sedmog, četrnaestog i osamnaestog člana jednaka 10. Tada suma prvih dvadeset članova iznosi:

(A) 150 (B) 75 (C) 50 (D) 100 (E) 200 (N) Ne znam

4. Vrednost $\sin(\operatorname{arctg} 2)$ iznosi:

(A) $5/\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{5}/2$ (C) $1/\sqrt{5}$ (D) $3/\sqrt{5}$ (E) $2/\sqrt{5}$ (N) Ne znam

5. U trouglu ABC ugao kod temena A je 60°, dužina stranice AB je 8 cm, a dužina težišne duži CD je 4 cm. Površina trougla ABC (u cm^2) je:

(A) $\sqrt{24}$ (B) $8\sqrt{3}$ (C) $4\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{3}+\sqrt{8}$ (E) $6\sqrt{2}$ (N) Ne znam

6. Vrednost izraza $A=\dfrac{\log_3 24}{\log_{72} 3}-\dfrac{\log_3 216}{\log_8 3}$ iznosi:

(A) 1.5 (B) 9 (C) 4 (D) 1 (E) 2 (N) Ne znam

7. Broj realnih rešenja jednačine $3\cdot x\cdot 5^{x+1}-25\cdot x\cdot 3^x-9\cdot 5^x+5\cdot 3^{x+1}=0$ iznosi:

(A) 2 (B) 3 (C) 0 (D) 1 (E) 4 (N) Ne znam

8. Dužina ivice kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$ je 4 cm. Na ivici C_1D_1, koja je paralelna ivici AB, nalazi se tačka M tako da je $C_1M=3MD_1$. Površina trougla ABM (u cm^2) je:

(A) 16 (B) $8\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{24}$ (D) 32 (E) $12\sqrt{2}$ (N) Ne znam

9. Skup realnih parametara m za koje jednačina $|x^2+2x+m|=2$ ima četiri raziličita realna rešenja je oblika (za neko $a\in\mathbb{R}$):

(A) $(a,+\infty)$ (B) $(-\infty,+\infty)$ (C) $(-\infty,a)$ (D) $\mathbb{R}\backslash\{a\}$ (E) $[a,+\infty)$ (N) Ne znam

10. Broj rešenja jednačine $2\cos^2 x-3\sin x-3=0$ na intervalu $[0,\pi]$ iznosi:

(A) 3 (B) 4 (C) 1 (D) 0 (E) 2 (N) Ne znam

11. Rešenje nejednačine $\dfrac{\sqrt{x-\frac{1}{2}}}{\log_3 x^2}\geq 0$ je oblika ($a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$):

(A) $\emptyset$ (B) $(a,b)\cup(b,+\infty)$ (C) $\{a\}\cup(b,+\infty)$

(D) (a,b) (E) $(-\infty,a)\cup\{b\}$ (N) Ne znam

12. Za jednačinu $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{x-1}-1$ tačan je iskaz:

(A) postoje tačno tri različita realna rešenja
(B) postoji tačno jedno negativno rešenje
(C) postoji tačno jedno pozitivno rešenje
(D) postoje tačno dva različita pozitivna rešenja
(E) ne postoji realno rešenje
(N) Ne znam

13. Za numeraciju stranica enciklopedijskog rečnika je upotrebljeno 6997 cifara, tako što se stranice numerišu počev od broja 1, pa redom nadalje. Broj stranica u rečniku iznosi:

(A) 1027 (B) 2022 (C) 2023 (D) 2024 (E) 2026 (N) Ne znam

14. Data je parabola $y=x^2+1$, tačka A parabole sa apscisom $x=a \quad (a\geq 1)$, tačka B koja je ortogonalna projekcija tačke A na x osu i tačka C koja je presek tangente parabole u tački A sa x osom. Vrednost parametra a za koju je površina trougla ABC jednaka 1 pripada intervalu:

(A) $[5,10)$ (B) $[10,+\infty)$ (C) $[3,5)$ (D) $[1,2)$ (E) $[2,3)$ (N) Ne znam

15. Ugao pod kojim se vidi elipsa $x^2+4y^2=4$ iz tačke $M(3,1)$ je:

(A) $\dfrac{\pi}{4}$ (B) $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}$ (C) $\dfrac{\pi}{3}$ (D) $\operatorname{arctg}\dfrac{6}{5}$ (E) $\dfrac{\pi}{2}$ (N) Ne znam

16. Ako je (z_1,z_2), $z_1,z_2\in\mathbb{C}$, rešenje sistema jednačina $\sqrt{3}z_1+z_2=2\sqrt{3}+2i$, $|z_1|+z_1=\sqrt{3}\bar{z}_2$, onda je iz_1z_2 jednako:

(A) $-2+2i\sqrt{3}$
(B) $4+2i\sqrt{3}$
(C) 4
(D) $2.8+0.56i\sqrt{3}$
(E) ništa od ponuđenog
(N) Ne znam

17. Broj rešenja jednačine $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}\right)\cdot x^{\frac{1}{2}\left(\log_2 x^2\right)^2-7}=\dfrac{x^6}{2^{11}}$ iznosi:

(A) 2 (B) 0 (C) 1 (D) 4 (E) 3 (N) Ne znam

18. Ako je $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x\operatorname{arctg}x-x}{1-\cos 3x}$, tada $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ iznosi:

(A) 2/9 (B) 2 (C) 1 (D) 1/9 (E) 1/3 (N) Ne znam

19. Zapremina kupe maksimalnog omotača koja je upisana u loptu poluprečnika 1 iznosi:

(A) $\dfrac{27\pi}{49}$ (B) $\dfrac{32\pi}{27}$ (C) $\dfrac{5\sqrt{3}\pi}{18}$ (D) $\dfrac{64\pi}{81}$ (E) $\dfrac{32\pi}{81}$ (N) Ne znam

20. Skup vrednosti parametra p za koje jednačina $px^2-(p+3)x+2p+1=0$ ima dva različita rešenja koja su oba veća od 1 je oblika $(a,b,c\in\mathbb{R}, a<b<c)$:

(A) $(a,b)\cup(b,c)$ (B) $\{a\}\cup(b,c)$ (C) $[a,b]$ (D) (a,b) (E) $\{a\}\cup[b,c]$ (N) Ne znam

REŠENJA

1. Ⓔ Važi

$$\sqrt{1-2a+a^2} = \sqrt{(1-a)^2} = |1-a| = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$$

i

$$\sqrt{1+2a+a^2} = \sqrt{(1+a)^2} = |1+a| = |1+\sqrt{2}| = \sqrt{2}+1$$

Zadati izraz sada postaje

$$\frac{\sqrt{1-2a+a^2}}{1+a} + \frac{\sqrt{1+2a+a^2}}{1-a} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}+1}{1-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$
$$= \frac{(\sqrt{2}-1)^2-(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{2-2\sqrt{2}+1-(2+2\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2})^2-1^2} = \frac{-4\sqrt{2}}{2-1} = -4\sqrt{2}$$

---

2. Ⓓ Prava $y = k_\perp x + n_\perp$ koja prolazi kroz tačku $A(1,1)$ i normalna je na pravu

$$x+2y=5 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} = kx + n$$

ima koeficijent nagiba koji zadovoljava uslov

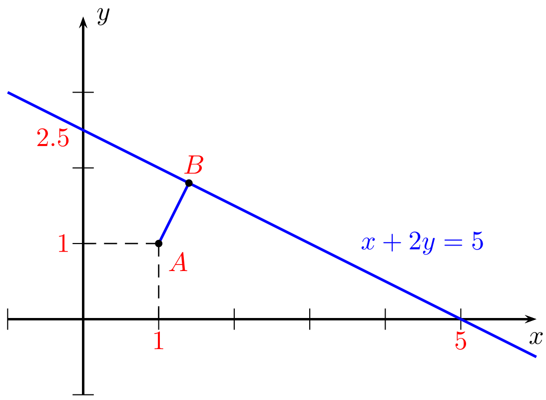
$$k_\perp = -\frac{1}{k} = 2$$

Iz uslova da tačka $A(1,1)$ pripada ovoj pravoj, dobijamo

$$1 = k_\perp + n_\perp \Rightarrow n_\perp = 1 - k_\perp = -1$$

te je jednačina normale

$$y = k_\perp x + n_\perp = 2x - 1$$



Tačka B se nalazi u preseku ovih dveju pravih

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$
$$y = 2x - 1$$

i dobija se kao rešenje gornjeg sistema jednačina

$$2x - 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \Rightarrow 4x - 2 = -x + 5 \Rightarrow 5x = 7$$

$$x_B = \frac{7}{5} \quad y_B = 2x_B - 1 = 2\cdot\frac{7}{5} - 1 = \frac{9}{5}$$

Sada se za rastojanje između tačaka A i B ima

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{5}-1\right)^2 + \left(\frac{9}{5}-1\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

3.Ⓒ Za zadatu aritmetičku progresiju

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

važi

$$a_3 + a_7 + a_{14} + a_{18} = 10$$

$$a_1 + 2d + a_1 + 6d + a_1 + 13d + a_1 + 17d = 4a_1 + 38d = 10 \Rightarrow 2a_1 + 19d = 5$$

Za sumu prvih dvadeset članova ove progresije se ima

$$S_{20} = a_1 + a_2 + \cdots a_{20} = 20a_1 + (1 + 2 + \cdots 19)d = 20a_1 + \frac{19 \cdot 20}{2}d = 20a_1 + 190d$$

$$S_{20} = 10(2a_1 + 19d) = 10 \cdot 5 = 50.$$

4.Ⓔ Tražimo vrednost

$$x = \sin(\operatorname{arctg} 2) > 0$$

Primenom arcsin na obe strane gornje jednačine dobijamo

$$\arcsin x = \arcsin(\sin(\operatorname{arctg} 2)) = \operatorname{arctg} 2$$

Označimo $y = \arcsin x = \operatorname{arctg} 2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Iz $y = \arcsin x$ dobijamo $x = \sin y$.

Iz $y = \operatorname{arctg} 2$ imamo $\operatorname{tg} y = 2$

Dalje sledi

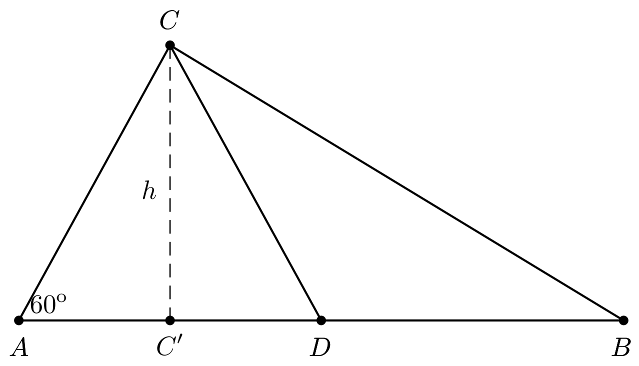
$$\operatorname{tg}^2 y = 4 \Rightarrow \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = 4 \Rightarrow \frac{\sin^2 y}{1 - \sin^2 y} = 4 \Rightarrow 5\sin^2 y = 4$$

$$\sin^2 y = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin y = \pm\sqrt{\frac{4}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Konačno imamo

$$x = \sin(\operatorname{arctg} 2) = \sin y = +\frac{2}{\sqrt{5}}$$

5.Ⓑ



Kako je $\angle CAD = 60^o$ i $AD = CD = 4$ to je trougao ACD jednakostraničan, dužine stranica $a = AD = AC = CD = 4$. Visina ovog jednakostraničnog trougla je

$$h = CC' = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

što je ujedno i visina trougla ABC nad stranicom $AB = 8$. Odavde se za površinu trougla ABC dobija

$$P_{ABC}\text{ă} = \frac{1}{2}AB \cdot h = \frac{8 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}.$$

6.Ⓔ

$$\begin{aligned}A &= \frac{\log_3 24}{\log_{72} 3} - \frac{\log_3 216}{\log_8 3} = \\ &= \frac{\log_3(3\cdot 8)}{\frac{\log_3 3}{\log_3(9\cdot 8)}} - \frac{\log_3(27\cdot 8)}{\frac{\log_3 3}{\log_3 8}} = \log_3(3\cdot 8)\cdot\log_3(9\cdot 8) - \log_3(27\cdot 8)\cdot \log_3 8 \\ &= \log_3(3\cdot 2^3)\cdot\log_3(3^2\cdot 2^3) - \log_3(3^3\cdot 2^3)\cdot\log_3 2^3 \\ &= \left(\log_3 3 + \log_3 2^3\right)\left(\log_3 3^2 + \log_3 2^3\right)\big) - \log_3 2^3 \cdot \left(\log_3 3^3 + \log_3 2^3\right)\big) \\ &= (1 + 3\log_3 2)\,(2 + 3\log_3 2) - 3\log_3 2\,(3 + 3\log_3 2) \\ &= 2 + 3\log_3 2 + 6\log_3 2 + 9\log_3^2 2 - 9\log_3 2 - 9\log_3^2 2 = 2.\end{aligned}$$

7.Ⓐ Leva strana zadate jednačine se može napisati u sledećem obliku

$$\begin{aligned}3x5^{x+1} - 25x3^x - 9\cdot 5^x + 5\cdot 3^{x+1} &= 15x5^x - 25x3^x - 9\cdot 5^x + 15\cdot 3^x \\ &= (5x-3)(3\cdot 5^x - 5\cdot 3^x)\end{aligned}$$

odakle sledi

$$(5x-3)(3\cdot 5^x - 5\cdot 3^x) = 0$$

Jedno rešenje ove jednačine se dobija iz

$$5x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{5}$$

Ostala moguća rešenja moraju zadovoljavati

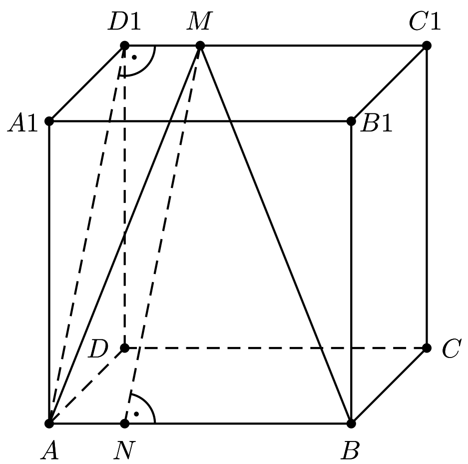
$$3\cdot 5^x - 5\cdot 3^x = 0 \Leftrightarrow 5^{x-1} = 3^{x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x-1} = 1 = \left(\frac{3}{5}\right)^0$$

odakle za drugo rešenje dobijamo

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1.$$

Dakle, zadata jednačina ima dva realna rešenja.

8.Ⓑ Na slici je prikazana zadata kocka, dužine ivica $a = 4$. Tačka M je na ivici C_1D_1 paralelnoj ivici AB tako da je $C_1M = 3MD_1$, odakle sledi $C_1M = 3$ i $MD_1 = 1$.



Označimo sa N tačku na ivici AB takvu da je $AN = MD_1 = 1$ i $BN = C_1M = 3$. Kako je $\angle AD_1M = 90^{\circ}$ i kako je $AD_1 \parallel MN$ to takođe važi $\angle ANM = 90^{\circ}$. To znači da je MN visina trougla ABM

AD_1 je dijagonala stranice kocke i njena dužina iznosi $AD_1 = a\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

Za visinu trougla ABM važi $MN = AD_1 = 4\sqrt{2}$.

Sada za površinu trougla ABM imamo

$$P = \frac{1}{2}AB \cdot MN = \frac{1}{2}4 \cdot 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}.$$

9.Ⓒ

$$|x^2 + 2x + m| = 2$$

Razlikujemo dva slučaja

1. $x^2 + 2x + m \geq 0$

   Tada je $|x^2 + 2x + m| = x^2 + 2x + m$ te zadata jednačina postaje

   $$x^2 + 2x + m = 2$$

   $$x^2 + 2x + (m - 2) = 0$$

   Ova kvadratna jednačina će imati dva realna rešenja za

   $$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(m - 2) = 12 - 4m > 0$$

   $$m < 3$$

2. $x^2 + 2x + m < 0$

   Tada je $|x^2 + 2x + m| = -(x^2 + 2x + m)$ te zadata jednačina postaje

   $$x^2 + 2x + m = -2$$

   $$x^2 + 2x + (m + 2) = 0$$

   Ova kvadratna jednačina će imati dva realna rešenja za

   $$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(m + 2) = -4 - 4m > 0$$

   $$m < -1$$

Dakle, za $m < -1$ jednačina ima četiri različita realna rešenja.

10.Ⓓ Tražimo realna rešenja jednačine

$$2\cos^2 x - 3\sin x - 3 = 0$$

na intervalu $x \in [0, \pi]$.

Jednačinu možemo izraziti u sledećem obliku

$$2(1 - \sin^2 x) - 3\sin x - 3 = 0$$

$$2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$$

Uvođenjem smene $t = \sin x$, gde je za $x \in [0, \pi]$, $t = \sin x \in [0, 1]$, dobijamo kvadratnu jednačinu po promenjivoj t

$$2t^2 + 3t + 1 = 0$$

čija su rešenja

$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

$$t_1 = -1 \vee t_2 = -\frac{1}{2}$$

Kako mora da bude ispunjeno $t_{1,2} \in [0, 1]$, to jednačina nema realnih rešenja na zadatom skupu.

11.Ⓒ Zadata nejednačina

$$\frac{\sqrt{x-\frac{1}{2}}}{\log_3 x^2} \geq 0$$

je definisana za one realne vrednosti promenljive x za koje je argument kvadratnog korena veći ili jednak nuli, i argument logaritamske funkcije pozitivan

$$x - \frac{1}{2} \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

i

$$x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0$$

odakle sledi da rešenja tražimo u skupu $x \geq \dfrac{1}{2}$.

Kako je brojilac leve strane nejednačine

$$\sqrt{x-\frac{1}{2}} \geq 0$$

gde je znak jednakosti ispunjen za $x = \dfrac{1}{2}$ pa je to ujedno i jedno rešenje nejednačine, da bi leva strana nejednačine bila veća ili jednaka nuli, za imenilac mora da važi

$$\log_3 x^2 > 0 \Leftrightarrow \log_3 x^2 > \log_3 1 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow x < -1 \lor x > 1$$

Poslednja nejednakost, uz uslov $x \geq \dfrac{1}{2}$ i sa rešenjem $x = \dfrac{1}{2}$ koje ispunjava jednakost, daje konačno rešenje

$$x \in \frac{1}{2} \cup (1, +\infty)\,.$$

12.Ⓒ Zadata jednačina

$$\sqrt{x - \sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x-1} - 1$$

je definisana na skupu realnih brojeva za koje važi redom

$$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$\sqrt{x-1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow (x-1) \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 2$$

i

$$x - \sqrt{x^2-1} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow x^2 \geq x^2 - 1 \Leftrightarrow 0 \geq -1\,(\top)$$

Dakle, mora važiti $x \geq 2$ i kako su tada leva i desna strana jednačine veće ili jednake nuli, to kvadriranjem dobijamo

$$\sqrt{x - \sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x-1} - 1 \Big/^2$$

$$x - \sqrt{x^2-1} = x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1$$

$$\sqrt{x^2-1} = 2\sqrt{x-1} \Big/^2$$

$$(x-1)(x+1) = 4(x-1) \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \lor x_2 = 3$$

Kako je $x \geq 2$, to samo $x_2 = 3$ ispunjava uslov te jednačina ima jedno pozitivno rešenje.

13.Ⓔ

- Jednocifrene stranice

  Za prvih devet stranica rečnika upotrebljavamo jednocifrene brojeve 1-9 i ukupan broj cifara

$$1 \cdot 9$$

- Dvocifrene stranice

  Za stranice označene dvocifrenim brojevima 10-99, ukupan broj cifara iznosi

  $$2 \cdot 90 = 2 \cdot (99 - 9)$$

  Ukupan broj cifara jednocifrenih i dvocifrenih stranica je: $9 + 2 \cdot 90 = 189 < 6997$
- Trocifrene stranice

  Za stranice označene trocifrenim brojevima 100-999, ukupan broj cifara iznosi

  $$3 \cdot 900 = 3 \cdot (999 - 99)$$

  Ukupan broj cifara za jednocifrene, dvocifrene i trocifrene stranice je: $189 + 3 \cdot 900 = 2889 < 6997$
- Četvorocifrene stranice

  Broj strana rečnika n mora biti veći od 999 i manji od 9999 (četvorocifren).

  Za stranice označene četvorocifrenim brojevima 1000-n, ukupan broj cifara iznosi

  $$4 \cdot (n - 999)$$

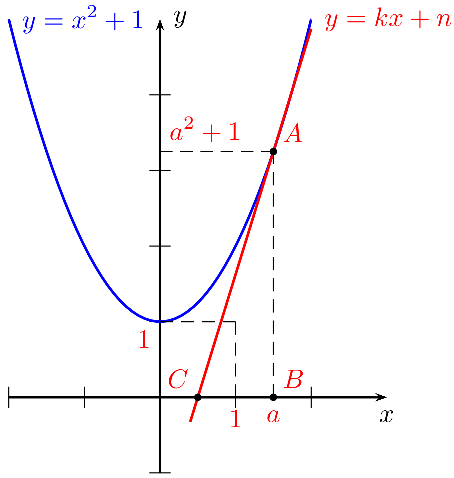
  Ukupan broj cifara za jednocifrene, dvocifrene, trocifrene i četvorocifrene stranice je:

  $$2889 + 4 \cdot (n - 999) = 6997$$

Rešavanjem ove jednačine, za broj stranica n dobijamo:

$$n - 999 = (6997 - 2889)/4 \Rightarrow n = 1027 + 999 = 2026.$$

14.Ⓓ



Neka je $y = kx + n$ jednačina tangente na parabolu $y = x^2 + 1$ u tački $A(a, a^2 + 1)$:

$$y_A = kx_A + n \Rightarrow a^2 + 1 = ka + n \Rightarrow n = a^2 - ka + 1$$

$$y = kx + a^2 - ka + 1$$

Tangenta $y = kx + a^2 - ka + 1$ i parabola $y = x^2 + 1$ imaju tačno jednu presečnu tačku (jedno rešenje):

$$x^2 + 1 = kx + a^2 - ka + 1 \Rightarrow x^2 - kx - (a^2 - ka) = 0$$

Kvadratna jednačina će imati tačno jedno rešenje kada je diskriminanta jednaka nuli

$$D = k^2 + 4(a^2 - ka) = k^2 - 4ka + 4a^2 = (k - 2a)^2$$

$$D = 0 \Rightarrow (k - 2a)^2 = 0 \Rightarrow k = 2a$$

i

$$n = a^2 - ka + 1 = a^2 - 2a^2 + 1 = -a^2 + 1$$

Sada jednačinu tangente možemo izraziti

$$y = kx + n = 2ax - a^2 + 1$$

x-koordinatu tačke $C(x_C, 0)$ dobijamo iz uslova

$$y_C = 2ax_c - a^2 + 1 = 0 \Rightarrow x_C = \frac{a^2 - 1}{2a}$$

Dužine kateta pravouglog troubla ABC su sada

$$AB = y_A - y_B = a^2 + 1$$

$$BC = x_B - x_C = a - \frac{a^2 - 1}{2a} = \frac{a^2 + 1}{2a}$$

te se površina ovog trougla može izraziti u obliku

$$P = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot (a^2 + 1) \cdot \frac{a^2 + 1}{2a} = \frac{(a^2 + 1)^2}{4a}$$

Iz uslova $P = 1$ imamo

$$(a^2 + 1)^2 = 4a \Rightarrow a^4 + 2a^2 + 1 = 4a$$

$$a^4 - a^3 + a^3 - a^2 + 3a^2 - 3a - a + 1 = 0$$

$$a^3(a - 1) + a^2(a - 1) + 3a(a - 1) - (a - 1) = 0$$

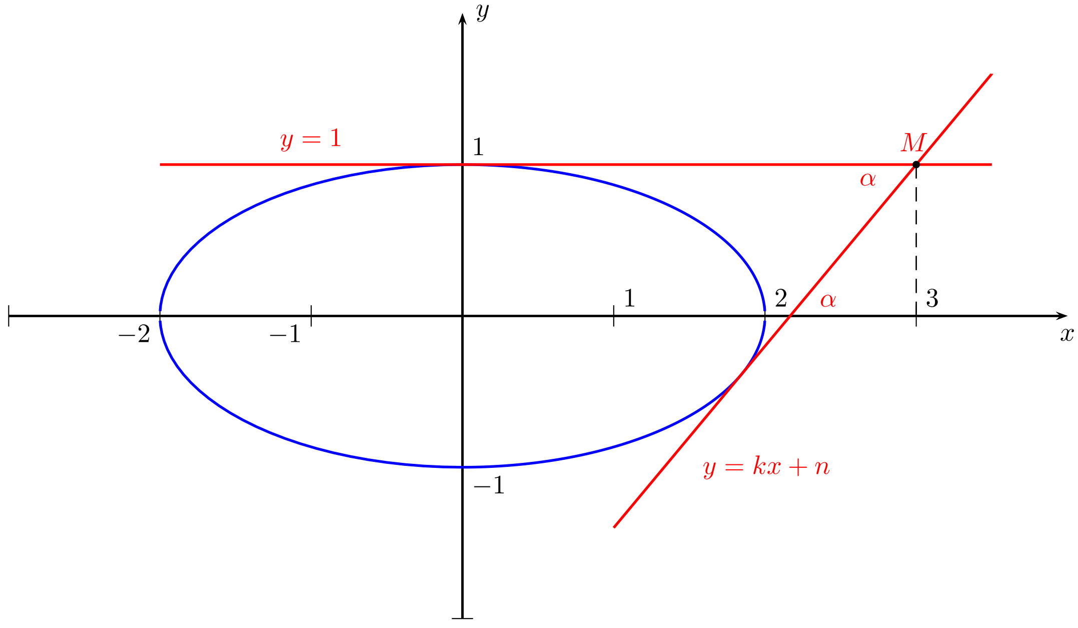
$$(a - 1)(a^3 + a^2 + 3a - 1) = 0$$

Jedno rešenje ove jednačine je $a = 1$. Kako je po uslovu zadatka $a \geq 1$, to za izraz u drugoj zagradi važi

$$a^3 + a^2 + 3a - 1 \geq 1 + 1 + 3 - 1 = 4$$

te je $a = 1$ jedino rešenje i ono pripada intervalu $[1, 2)$.

15.Ⓓ Tražimo ugao pod kojim se vidi elipsa $x^2 + 4y^2 = 4$ iz tačke $M(3, 1)$. Taj ugao odgovara uglu koje zaklapaju tangente na elipsu koje prolaze kroz tačku $M(3, 1)$. Kako elipsa prolazi kroz tačku $(1, 0)$, to je jedna tangenta iz tačke M horizontalna prava $y = 1$ (videti sliku).



Neka je jednačina druge tangente na elipsu:

$$y = kx + n$$

Iz uslova da ona prolazi kroz tačku $M(3,1)$ imamo

$$1 = 3k + n \Rightarrow n = -3k + 1$$

$$y = kx - 3k + 1$$

Iz uslova da tangenta ima samo jednu dodirnu tačku sa elipsom

$$x^2 + 4y^2 = 4 \wedge y = kx - 3k + 1 \Rightarrow x^2 + 4(kx - 3k + 1)^2 = 4$$

$$(4k^2 + 1)x^2 - 8k(3k - 1)x + 12k(3k - 2) = 0$$

imamo da ova kvadratna jednačina mora imati samo jedno rešenje, koje se dobija kada je diskriminanta jednaka nuli

$$D = 64k^2(3k-1)^2 - 48k(4k^2+1)(3k-2) = 0 \Rightarrow k\left(4k(3k-1)^2 - 3(4k^2+1)(3k-2)\right) = 0$$

što važi za

$$k = 0, n = 1 \Rightarrow y = 1$$

i to je tangenta koju smo već grafički pronašli.

Druga tangenta se dobija iz uslova

$$4k(3k-1)^2 - 3(4k^2+1)(3k-2) = 0 \Rightarrow 4k(3k-1)^2 = 3(4k^2+1)(3k-2)$$

$$36k^3 - 24k^2 + 4k = 36k^3 - 24k^2 - 6 \Rightarrow k = \frac{6}{5}$$

Kako je $y = 1$ paralelna x osi, to je ugao koji zaklapaju ove dve tangente jednak uglu nagiba druge tangente

$$\tan\alpha = k \Rightarrow \alpha = \arctan k = \arctan\frac{6}{5}.$$

16.Ⓐ Neka je $z_1 = x_1 + iy_1$ i $z_2 = x_2 + iy_2$. Zadati sistem jednačina

$$\sqrt{3}z_1 + z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$$

$$|z_1| + z_1 = \sqrt{3}\bar{z}_2$$

se može izraziti u sledećem obliku

$$\sqrt{3}(x_1 + iy_1) + x_2 + iy_2 = 2\sqrt{3} + 2i$$

odakle izjednačavanjem realnih i imaginarnih delova sa leve i desne strane jednačine imamo

$$\sqrt{3}x_1 + x_2 = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}y_1 + y_2 = 2$$

i

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + x_1 + iy_1 = \sqrt{3}(x_2 - iy_2)$$

odakle izjednačavanjem realnih i imaginarnih delova sa leve i desne strane jednačine dobijamo

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + x_1 = \sqrt{3}x_2$$

$$y_1 = -\sqrt{3}y_2$$

Dalje sledi

$$\sqrt{3}y_1 + y_2 = 2 \wedge \sqrt{3}y_1 + y_2 = 2 \Rightarrow -\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}y_2 + y_2 = 2 \Rightarrow -2y_2 = 2$$

$$y_2 = -1 \wedge y_1 = -\sqrt{3}y_2 = \sqrt{3}$$

Za x_1 i x_2 imamo

$$\sqrt{3}x_1 + x_2 = 2\sqrt{3} \Rightarrow 3x_1 + \sqrt{3}x_2 = 6$$

gde smenom

$$\sqrt{3}x_2 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + x_1 = \sqrt{x_1^2 + 3} + x_1$$

dobijamo

$$3x_1 + \sqrt{x_1^2 + 3} + x_1 = 6 \Rightarrow 4x_1 + \sqrt{x_1^2 + 3} = 6$$

$$\sqrt{x_1^2 + 3} = 6 - 4x_1$$

ova jednačina će imati realna rešenja za $6 - 4x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \dfrac{3}{2}$.

Kvadriranjem leve i desne strane poslednje jednačine imamo

$$x_1^2 + 3 = 36 - 48x_1 + 16x_1^2 \Rightarrow 15x_1^2 - 48x_1 + 33 = 0 \Rightarrow 5x_1^2 - 16x_1 + 11 = 0$$

Rešenja ove kvadratne jednačine data su sa

$$x_{1_{1,2}} = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 220}}{10} = \frac{16 \pm 6}{10} = \begin{cases} 1 \\ \dfrac{11}{5} \end{cases}$$

gde jedino rešenje $x_1 = 1$ ispunjava uslov $x \leq \dfrac{3}{2}$. Sada za x_2 imamo

$$x_2 = (2 - x_1)\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

Konačno, za vrednost traženog izraza imamo

$$iz_1z_2 = i(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = i(1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} - 1) = (i - \sqrt{3})(\sqrt{3} - i) = -(\sqrt{3} - i)^2$$

$$iz_1z_2 = -(3 - 1 - 2i\sqrt{3}) = -2 + 2i\sqrt{3}.$$

17.Ⓔ Tražimo rešenja jednačine

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x+1} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1}\right) \cdot x^{\frac{1}{2}\left(\log_2 x^2\right)^2 - 7} = \frac{x^6}{2^{11}}$$

Najpre moraju da budu ispunjeni sledeći uslovi

$$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

$$x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0$$

Kako važi

$$\frac{1}{\sqrt{x+1} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{\sqrt{x+1} + 1 - (\sqrt{x+1} - 1)}{(\sqrt{x+1})^2 - 1^2} =$$

$$= \frac{2}{|x+1| - 1} \underbrace{=}_{x \geq -1} \frac{2}{x + 1 - 1} = \frac{2}{x}$$

Zadata jednačina postaje

$$\frac{2}{x} \cdot x^{\frac{1}{2}\left(\log_2 x^2\right)^2 - 7} = \frac{x^6}{2^{11}} \Rightarrow x^{\frac{1}{2}\left(\log_2 x^2\right)^2 - 7} = \frac{x^7}{2^{12}}$$

Primenom $\log_2$ na levu i desnu stranu ove jednačine dobijamo

$$\log_2 \left(x^{\frac{1}{2}\left(\log_2 x^2\right)^2 - 7}\right) = \log_2 \frac{x^7}{2^{12}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\left(\log_2 x^2\right)^2 - 7\right) \log_2 x = \log_2 x^7 - \log_2 2^{12}$$

$$\left(\frac{1}{2}\left(2\log_2 x\right)^2 - 7\right) \log_2 x = 7\log_2 x - 12\log_2 2$$

$$\left(\frac{1}{2}\left(4\log_2^2 x\right)-7\right)\log_2 x = 7\log_2 x - 12$$

$$\left(2\log_2^2 x-7\right)\log_2 x = 7\log_2 x - 12$$

Uvođenjem smene $t=\log_2 x$, $x>0$, dobijamo

$$(2t^2-7)t = 7t-12$$

$$2t^3-14t+12=0$$
$$t^3-7t+6=0$$
$$t^3-t-6t+6=0$$
$$t(t^2-1)-6(t-1)=0$$
$$t(t-1)(t+1)-6(t-1)=0$$
$$(t-1)(t^2+t-6)=0$$

Odakle dobijamo

$$t-1=0 \Rightarrow t_1=1$$
$$t^2+t-6=0$$
$$t_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}$$
$$t_2=-3, \quad t_3=2$$

Dakle, jednačina ima tri realna rešenja

$$\log_2 x = 1 \Rightarrow x_1 = 2$$
$$\log_2 = -3 = \log_2 2^{-3} \Rightarrow x_2 = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$
$$\log_2 = 2 = \log_2 2^2 \Rightarrow x_3 = 2^2 = 4$$

18.Ⓐ Označimo

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x \operatorname{arctg} x - x}{1-\cos 3x}=\frac{g(x)}{h(x)}$$

Kako je $g(0)=\mathrm{e}^0\operatorname{arctg}0-0=0$ i $h(0)=1-\cos 0=0$ to je za $x\to 0$: $f(0)=\dfrac{0}{0}$ te možemo primeniti L'Hôpital-ovo pravilo

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{h'(x)}$$

Dalje sledi

$$g'(x)=(\mathrm{e}^x\operatorname{arctg}x-x)'=(\mathrm{e}^x\operatorname{arctg}x)'-x'=(\mathrm{e}^x)'\operatorname{arctg}x+\mathrm{e}^x\left(\operatorname{arctg}x\right)'-1$$

$$g'(x)=\mathrm{e}^x\operatorname{arctg}x+\mathrm{e}^x\frac{1}{1+x^2}-1=\mathrm{e}^x\left(\operatorname{arctg}x+\frac{1}{1+x^2}\right)-1$$

i

$$h'(x)=(1-\cos 3x)'=(1)'-(\cos 3x)'=-(3(-\sin 3x))=3\sin x$$

te imamo

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{h'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x\left(\operatorname{arctg}x+\frac{1}{1+x^2}\right)-1}{3\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{g_1(x)}{h_1(x)}$$

Kako je

$$g_1(0)=\mathrm{e}^0\left(\operatorname{arctg}0+\frac{1}{1+0^2}\right)-1=0$$
$$h_1(0)=3\sin 0=0$$

to je za $x\to 0$: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g_1(x)}{h_1(x)}=\dfrac{0}{0}$ te opet možemo primeniti L'Hôpital-ovo pravilo

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{g_1(x)}{h_1(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{g_1'(x)}{h_1'(x)}$$

Dalje sledi

$$g_1'(x) = \left(e^x\left(\operatorname{arctg} x + \frac{1}{1+x^2}\right) - 1\right)' = \left(e^x\left(\operatorname{arctg} x + \frac{1}{1+x^2}\right)\right)' - 0$$

$$g_1'(x) = (e^x)'\left(\operatorname{arctg} x + \frac{1}{1+x^2}\right) + e^x\left(\operatorname{arctg} x + \frac{1}{1+x^2}\right)' = e^x\left(\operatorname{arctg} x + \frac{1}{1+x^2}\right) + e^x\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2}\cdot(2x)\right)$$

$$g_1'(x) = e^x\left(\operatorname{arctg} x + \frac{2}{1+x^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)$$

i

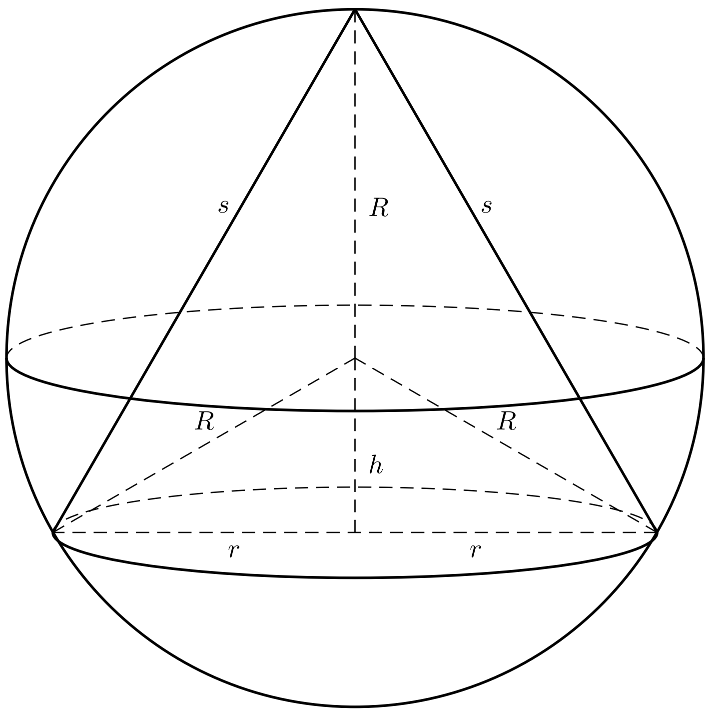
$$h_1'(x) = (3\sin 3x)' = 3(\sin 3x)' = 3(3\cos 3x) = 9\cos 3x$$

te imamo

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{g_1(x)}{h_1(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x\left(\operatorname{arctg} x + \frac{2}{1+x^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)}{9\cos 3x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{e^0\left(\operatorname{arctg} 0 + \frac{2}{1+0^2} - \frac{2\cdot 0}{(1+0^2)^2}\right)}{9\cos 0} = \frac{2}{9}.$$

19.Ⓔ Na slici je prikazana kupa upisana u loptu poluprečnika R. Neka je visina kupe $H = R + h$, poluprečnik njene osnove r i dužina izvodnice s (videti sliku).



Važi

$$h^2 = R^2 - r^2 = 1 - r^2 \Rightarrow h = \sqrt{1-r^2}$$

Sada visinu kupe možemo izraziti

$$H = R + h = 1 + \sqrt{1-r^2}$$

dok za dužinu izvodnice imamo

$$s^2 = r^2 + H^2 = r^2 + \left(1 + \sqrt{1-r^2}\right)^2 = 2 + 2\sqrt{1-r^2}$$

$$s = \sqrt{2}\sqrt{1 + \sqrt{1-r^2}}$$

Površina omotača kupe data je izrazom

$$M = r\pi s = \sqrt{2}\pi r\sqrt{1+\sqrt{1-r^2}}$$

Ekstremna vrednost ove površine se dobija za one vrednosti r za koje je prvi izvod funkcije jednak nuli

$$M' = \left(\sqrt{2}\pi r\sqrt{1+\sqrt{1-r^2}}\right)' = \sqrt{2}\pi\left(\sqrt{1+\sqrt{1-r^2}} + r\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{1-r^2}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-r^2}}\cdot(-2r)\right)$$

$$M' = \sqrt{2}\pi\left(\sqrt{1+\sqrt{1-r^2}} - \frac{r^2}{2\sqrt{1+\sqrt{1-r^2}}\sqrt{1-r^2}}\right) = 0$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1-r^2}} = \frac{r^2}{2\sqrt{1+\sqrt{1-r^2}}\sqrt{1-r^2}}$$

$$1+\sqrt{1-r^2} = \frac{r^2}{2\sqrt{1-r^2}}$$

$$2\sqrt{1-r^2} + 2(1-r^2) = r^2$$

$$2\sqrt{1-r^2} = 3r^2 - 2$$

gde važi

$$1 - r^2 \geq 0 \Rightarrow r \leq 1$$

i

$$3r^2 - 2 \geq 0 \Rightarrow r \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Kvadriranjem leve i desne strane prethodne jednačine dobijamo

$$4(1-r^2) = 9r^4 - 12r^2 + 3 \Rightarrow r^2(9r^2-8) = 0 \Rightarrow r = 0 \vee 9r^2 = 8$$

Jedino rešenje koje ispunjava $\sqrt{\frac{2}{3}} \leq r \leq 1$ je

$$r = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Sada za visinu kupe dobijamo

$$H = 1 + \sqrt{1-r^2} = 1 + \sqrt{1-\frac{8}{9}} = \frac{4}{3}$$

te je zapremina kupe

$$V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}r^2\pi H = \frac{1}{3}\frac{8}{9}\pi\frac{4}{3} = \frac{32}{81}\pi$$

---

20. (D) Kvadratna jednačina

$$px^2 - (p+3) + 2p + 1 = 0$$

će imati dva različita rešenja ako je njena diskriminanta pozitivna

$$D = (p+3)^2 - 4p(2p+1) = -7p^2 + 2p + 9 > 0$$

$$7p^2 - 2p - 9 < 0$$

Koreni dobijene nejednačine su

$$p_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+252}}{14} = \frac{2 \pm 16}{14}$$

$$p_1 = -1 \wedge p_2 = \frac{9}{7}$$

te je rešenje nejednačine

$$p \in \left(-1, \frac{9}{7}\right)$$

Rešenja zadate kvadratne jednačine se mogu napisati u obliku

$$x_1 = \frac{p+3-\sqrt{-7p^2+2p+9}}{2p}$$

$$x_2 = \frac{p+3+\sqrt{-7p^2+2p+9}}{2p}$$

Neka je $p > 0$. Tada je

$$x_1 < x_2$$

te ako je $x_1 > 1$ onda je i $x_2 > x_1 > 1$. Dakle uslov da su rešenja različita i oba veća od jedan se svodi na

$$\frac{p+3-\sqrt{-7p^2+2p+9}}{2p} > 1 \Big/ \times 2p > 0$$

$$p+3-\sqrt{-7p^2+2p+9} > 2p$$

$$3-p > \sqrt{-7p^2+2p+9} \Big/^2$$

$$9-6p+p^2 > -7p^2+2p+9$$

$$8p(p-1) > 0$$

i kako je $p > 0$, to mora važiti $p > 1$. Što u preseku sa uslovom $p \in \left(0, \frac{9}{7}\right)$ daje

$$p \in \left(1, \frac{9}{7}\right)$$

Neka je sada $p < 0$. U ovom slučaju je

$$x_1 > x_2$$

te ako je $x_2 > 1$ onda je i $x_1 > x_2 > 1$. Dakle, uslov da su rešenja različita i oba veća od jedan se svodi na

$$\frac{p+3+\sqrt{-7p^2+2p+9}}{2p} > 1 \Big/ \times 2p < 0$$

$$p+3+\sqrt{-7p^2+2p+9} < 2p$$

$$p-3 > \sqrt{-7p^2+2p+9}$$

Kako je $p < 0$ to je $p-3 < 0$. Međutim, $\sqrt{-7p^2+2p+9} > 0$ te poslednja nejednačina nema rešenja.

Konačno, za skup vrednosti parametra p za koje zadata jednačina ima dva različita realna rešenja koja su oba veća od jedan je

$$p \in \left(1, \frac{9}{7}\right).$$

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE ZA UPIS NA ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET 2022

1. Cena računara bila je 100000 dinara, pa je onda podignuta za 25 procenata. Zatim je ta nova cena na akciji snižena za 20 procenata i iznosi:

(A) 90000 (B) 96000 (C) 120000 (D) 105000 (E) 100000 (N) Ne znam

2. Jednačina simetrale duži MN, gde je $M(4,2)$ i $N(-2,0)$ je:

(A) $y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$ (B) $y=3x-2$ (C) $y=-3x+4$ (D) $y=-3x+10$ (E) $y=-x+2$ (N) Ne znam

3. Vrednost izraza $\left(3^{\frac{2-\log_{3\sqrt{3}}5+2\log_9 4}{4}}\right)^6$ je:

(A) 1 (B) $\frac{8}{9}$ (C) 2 (D) $\frac{25}{9}$ (E) $\frac{216}{5}$ (N) Ne znam

4. Skup vrenosti parametra $m\in\mathbb{R}$ za koje jednačina $(1-m)x^2+(m-2)x+1=0$ ima dva različita realna rešenja je oblika (za neke $a,b\in\mathbb{R}$ za koje je $-\infty<a<b<\infty$):

(A) $\mathbb{R}\backslash a$ (B) $(a,b)\cup(b,\infty)$ (C) $[a,\infty)$ (D) $\mathbb{R}\backslash\{a,b\}$ (E) (a,∞) (N) Ne znam

5. Ostatak pri deljenju polinoma $P(x)=x^{2022}-2x^{2021}+x^{2019}-x^2+2x+1$ polinomom $Q(x)=x^2+1$ iznosi:

(A) $-2x+1$ (B) 1 (C) $-x-1$ (D) $x-1$ (E) $-x+1$ (N) Ne znam

6. Neka su x i y kompleksni brojevi različiti od nule. Ako je $\frac{x}{y}+4\frac{y}{x}=2$ tada $\frac{x^3}{y^3}$ iznosi:

(A) -8 (B) 0 (C) 16 (D) 8 (E) -16 (N) Ne znam

7. Granična vrednost $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{ctg}^3 x-1}{2-\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}^3 x}$ iznosi:

(A) $3/2$ (B) $-3/4$ (C) 1 (D) $3/4$ (E) $-3/2$ (N) Ne znam

8. Broj različitih prirodnih brojeva napisanih pomoću cifara $1,2,3,4,5$ tako da se svaka cifra koristi najviše jednom je:

(A) 325 (B) 120 (C) 5 (D) 3125 (E) 450 (N) Ne znam

9. Broj različitih realnih rešenja sistema jednačina $4x^2-5xy+y^2=0$, $2x^2+y^2-4x-5y+6=0$ je:

(A) 0 (B) veći od 3 (C) 2 (D) 3 (E) 1 (N) Ne znam

10. Vrednost minimuma funkcije $f(x)=-\frac{8}{5}x^2+2x+2+\ln(1+4x^2)-\operatorname{arctg}2x$ na segmentu $[-3/8,1]$ iznosi:

(A) 2 (B) -1 (C) 1 (D) 0 (E) 3 (N) Ne znam

11. Broj različitih realnih rešenja jednačine $1+\log_x\frac{4-x}{10}=(\log_{10}x^2-1)\log_x 10$ je:

(A) 3 (B) 1 (C) 4 (D) 2 (E) 0 (N) Ne znam

12. U trouglu ABC je $AC = 3$ cm i $BC = 2$ cm, dok je ugao kod temena C jednak 60^{o}. Neka je D presečna tačka simetrale tog ugla sa stranicom AB, a tačka E na stranici BC takva da je duž DE paralelna sa AC. Površina trougla CDE (u cm^2) jednaka je:

(A) $\frac{9\sqrt{3}}{16}$ (B) $\frac{3\sqrt{3}}{16}$ (C) $\frac{9}{25}$ (D) $\frac{9}{16}$ (E) $\frac{9\sqrt{3}}{25}$ (N) Ne znam

13. Suma beskonačne opadajuće geometrijske progresije sa pozitivnim članovima iznosi $9/2$. Ako je suma kvadratnih korena članova progresije jednaka 3, tada količnik progresije iznosi:

(A) $1/9$ (B) $1/3$ (C) $2/9$ (D) $2/3$ (E) $4/9$ (N) Ne znam

14. Broj različitih realnih rešenja jednačine $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2} = \frac{5}{4}$ je:

(A) 0 (B) 1 (C) 4 (D) 2 (E) 3 (N) Ne znam

15. Zbir realnih rešenja jednačine $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{12}\right) \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{3}$ na segmentu $[0, 2\pi]$ iznosi:

(A) 3π (B) $\pi/4$ (C) $5\pi/4$ (D) 4π (E) $3\pi/2$ (N) Ne znam

16. Razlika najvećeg i najmanjeg rešenja nejednačine $\sqrt[4]{(\sqrt{2}+1)^x} + \sqrt[4]{(\sqrt{2}-1)^x} \leq 2\sqrt{2}$ je:

(A) 2 (B) 8 (C) 4 (D) 6 (E) 10 (N) Ne znam

17. Ako je odnos binomnih koeficijenata četvrtog i trećeg člana u razvoju binoma $\left(\sqrt[3]{5} - \sqrt[5]{3}\right)^n$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$ jednak 10, onda je broj racionalnih članova u ovom razvoju jednak:

(A) 2 (B) 1 (C) 4 (D) 3 (E) veći od 3 (N) Ne znam

18. U pravilnu četvorostranu zarubljenu piramidu upisana je lopta. Ako je visina bočne strane zarubljene piramide jednaka $\sqrt{3}$ cm, a ugao koji bočne ivice zaklapaju sa ivicama veće osnove jednak 60^{o}, onda je odnos zapremina zarubljene piramide i lopte:

(A) $10\sqrt{2} : \pi$ (B) $5 : 4\pi$ (C) $5 : 6\pi$ (D) $10 : \pi$ (E) $20 : \pi$ (N) Ne znam

19. Najveći broj realnih rešenja jednačine $\left|2 - \left|x - x^2\right|\right| = p$, gde je p realni parametar, je:

(A) 1 (B) 6 (C) 2 (D) 8 (E) 4 (N) Ne znam

20. Minimalna dužina odsečka između koordinatnih osa koji formira tangenta, koja dodiruje elipsu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a \geq b > 0)$ u tački koja je u prvom kvadrantu, iznosi:

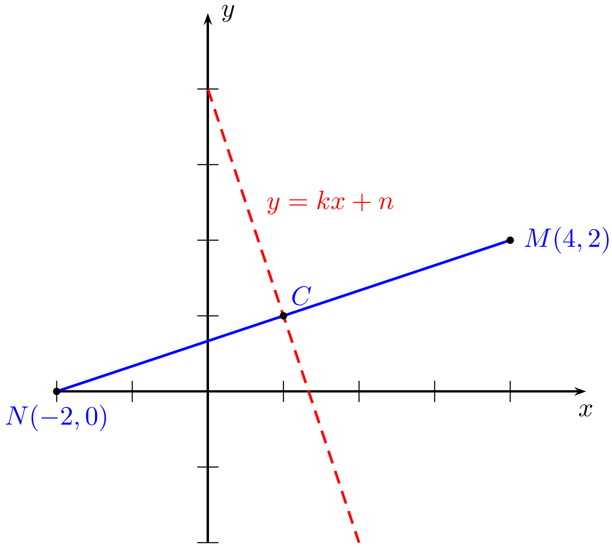
(A) $\sqrt{2(a^2+b^2)}$ (B) $\frac{ab}{a+b}$ (C) $\sqrt{a^2+b^2}$ (D) $\frac{b(a+b)}{a}$ (E) $a+b$ (N) Ne znam

REŠENJA

1.E Označimo početnu cenu sa $c_0 = 100000$. Nakon povećanja za 25% odnosno povećanja za 1.25 puta, nova cena iznosi $c_1 = 1.25c_0 = \frac{5}{4}c_0$. Nakon sniženja za 20% odnosno za $1 - 0.2 = 0.8$ puta, nova cena iznosi $c_2 = 0.8c_1 = \frac{4}{5}c_1$. Konačno, za cenu na akciji se dobija

$$c_2 = \frac{4}{5}c_1 = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4}c_0 = c_0 = 100000$$

2.C Neka je simatrala duži MN data jednačinom $y = kx + n$.



Izračunajmo najpre koeficijent nagiba duži MN:

$$k_{MN} = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{2-0}{4+2} = \frac{1}{3}$$

Simetrala duži je normalna na tu duž i za njen koeficijent nagiba važi

$$k = -\frac{1}{k_{MN}} = -3$$

Simetrala duži MN prolazi kroz središnju tačku C te duži, čije su koordinate:

$$x_C = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{4-2}{2} = 1, \quad y_C = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{2+0}{2} = 1$$

odakle dobijamo

$$y_C = kx_C + n$$

gde smenom $y_C = 1$, $x_C = 1$ i $k = -3$ dalje dobijamo

$$1 = -3 + n \Rightarrow n = 4$$

te se za jednačinu simetrale duži MN konačno ima

$$y = -3x + 4$$

3.E Označimo

$$A = 2 - \log_{3\sqrt{3}} 5 + 2\log_9 4$$

čime zadati izraz postaje

$$\left(3^{\frac{2-\log_{3\sqrt{3}} 5 + 2\log_9 4}{4}}\right)^6 = 3^{\frac{3A}{2}}$$

Dalje važi

$$
\begin{aligned}
A &= 2 - \log_{3\sqrt{3}} 5 + 2\log_9 4 = \log_3 3^2 - \frac{\log_3 5}{\log_3 3^{\frac{3}{2}}} + 2\frac{\log_3 4}{\log_3 9} \\
&= \log_3 9 - \frac{\log_3 5}{\frac{3}{2}} + 2\frac{\log_3 4}{2} = \log_3 9 - \frac{2}{3}\log_3 5 + \log_3 4 = \log_3 9 - \log_3 5^{\frac{2}{3}} + \log_3 4 \\
&= \log_3 \frac{9 \cdot 4}{5^{\frac{2}{3}}} = \log_3 \frac{36}{5^{\frac{2}{3}}}
\end{aligned}
$$

$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\log_3 \frac{36}{5^{\frac{2}{3}}} = \log_3 \left(\frac{36}{5^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \log_3 \frac{(36)^{\frac{1}{2}}}{\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \log_3 \frac{6}{5^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{3A}{2} = 3\log_3 \frac{6}{5^{\frac{1}{3}}} = \log_3 \left(\frac{6}{5^{\frac{1}{3}}}\right)^3 = \log_3 \frac{6^3}{\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^3} = \log_3 \frac{216}{5}$$

$$\left(3^{\frac{2 - \log_{3\sqrt{3}} 5 + 2\log_9 4}{4}}\right)^6 = 3^{\frac{3A}{2}} = 3^{\log_3 \frac{216}{5}} = \frac{216}{5}$$

4.Ⓓ Zadata kvadratna jednačina

$$(1-m)x^2 + (m-2)x + 1 = 0$$

će imati dva rešenja

$$x_{1,2} = \frac{-(m-2) \pm \sqrt{(m-2)^2 - 4(1-m)}}{2(1-m)}$$

ako je imenilac različit od nule

$$1 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$$

i ako je izraz pod kvadratnim korenom strogo pozitivan

$$(m-2)^2 - 4(1-m) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 4 - 4 + 4m > 0 \Leftrightarrow m^2 > 0$$

što je ispunjeno za sve realne vrednosti parametra m osim za $m = 0$.

Dakle, zadata jednačina će imati dva realna rešenja za sve vrednosti parametra m koje ispunjavaju uslov

$$m \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$$

5.Ⓔ Neka je $R(x) = ax + b$ ostatak deljenja polinoma $P(x) = x^{2022} - 2x^{2021} + x^{2019} - x^2 + 2x + 1$ polinomom $Q(x) = x^2 + 1$ (stepen polinoma $R(x)$ mora biti za jedan manji od stepena polinoma $Q(x)$)

$$P(x) = K(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

Koreni polinoma $Q(x)$ su

$$Q(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

Kako je $Q(x_{1,2}) = 0$, to se iz prethodne jednačine dobija

$$P(x_{1,2}) = R(x_{1,2})$$

Za $x_1 = i$ dobijamo

$$P(i) = i^{2022} - 2i^{2021} + i^{2019} - i^2 + 2i + 1$$

Kako je $i^2 = -1 \Rightarrow i^4 = 1$ i $2020 = 4 \cdot 505$, sledi redom

$$i^{2020} = i^{4\cdot 505} = (i^4)^{505} = 1$$

$$i^{2022} = i^{2020+2} = i^2 \cdot i^{2020} = -1$$

$$i^{2021} = i^{2020+1} = i \cdot i^{2020} = i$$
$$i^{2019} = i^{2020-1} = i^{-1} = -i$$

te dalje sledi

$$P(i) = -1 - 2i + (-i) - (-1) + 2i + 1 = -i + 1$$

S druge strane imamo

$$R(i) = ai + b$$

i iz uslova

$$P(i) = R(i) \Rightarrow -i + 1 = ai + b$$

izjednačavanjem realnih i imaginarnih delova leve i desne strane jednačine dobijamo

$$a = -1, \quad b = 1$$

te se za ostatak pri deljenju ova dva polinoma ima

$$Q(x) = ax + b = -x + 1$$

6.Ⓐ Smenom $t = \dfrac{x}{y} \neq 0$ zadata jednačina postaje

$$\frac{x}{y} + 4\frac{y}{x} = 2 \Rightarrow t + \frac{4}{t} = 2$$

Odakle množenjem obe strane jednačine sa t dobijamo kvadratnu jednačinu po promenljivoj t

$$t^2 - 2t + 4 = 0$$

za čija se rešenja ima

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{2 \pm i\sqrt{12}}{2} = 1 \pm i\sqrt{3}$$

Sada imamo

$$t_{1,2}^2 = (1 \pm i\sqrt{3})^2 = 1 \pm 2i\sqrt{3} - 3 = -2(1 \mp i\sqrt{3})$$
$$t_{1,2}^3 = t_{1,2}^2 \cdot t_{1,2} = -2(1 \mp i\sqrt{3}) \cdot (1 \pm i\sqrt{3}) = -2\left(1^2 - (i\sqrt{3})^2\right) = -2(1+3) = -8$$
$$\frac{x^3}{y^3} = -8$$

7.Ⓑ Tražimo graničnu vrednost

$$L = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{ctg}^3 x - 1}{2 - \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^3 x}$$

Kako je

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

to dalje sledi

$$L = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg}^3 x} - 1}{2 - \frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\operatorname{tg}^3 x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg}^3 x}{2\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x - 1}$$

i kako je $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1$ to je poslednji izraz oblika $\dfrac{0}{0}$ te možemo primeniti L'Hôpitalovo pravilo. Označimo $f(x) = 1 - \operatorname{tg}^3 x$ i $g(x) = 2\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x - 1$. Sada imamo

$$L = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

gde je

$$f'(x) = (1 - \operatorname{tg}^3 x)' = -3\operatorname{tg}^2 x(\operatorname{tg} x)' = -3\operatorname{tg}^2 x \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$g'(x) = (2\,\mathrm{tg}^3 x - \mathrm{tg}^2 x - 1)' = 6\,\mathrm{tg}^2 x(\mathrm{tg}\, x)' - 2\,\mathrm{tg}\, x(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}\left(6\,\mathrm{tg}^2 x - 2\,\mathrm{tg}\, x\right)$$

te dalje dobijamo

$$L = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-3\,\mathrm{tg}^2 x}{6\,\mathrm{tg}^2 x - 2\,\mathrm{tg}\, x} = \frac{-3}{6-2} = -\frac{3}{4}$$

8.Ⓐ Koristeći svaku od pet cifara $1, 2, 3, 4, 5$ najviše jednom, možemo formirati jednocifrene, dvocifrene, trocifrene, četvorocifrene i petocifrene prirodne brojeve a na sledeći način:

1. $a = d_1$

   d_1 može biti bilo koja od pet cifara.

   Broj različitih jednocifrenih brojeva je $n_1 = 5$.

2. $a = d_2 d_1$

   d_2 može biti bilo koja od pet cifara, dok d_1 može biti bilo koja od preostale četiri cifre.

   Broj različitih dvocifrenih brojeva je $n_2 = 5 \cdot 4 = 20$.

3. $a = d_3 d_2 d_1$

   d_3 može biti bilo koja od pet cifara, d_2 bilo koja od preostale četiri cifre i d_1 bilo koja od preostale tri cifre.

   Broj različitih trocifrenih brojeva je $n_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

4. $a = d_4 d_3 d_2 d_1$

   d_4 može biti bilo koja od pet cifara, d_3 bilo koja od preostale četiri cifre, d_2 bilo koja od preostale tri cifre i d_1 bilo koja od preostale dve cifre.

   Broj različitih četvorocifrenih brojeva je $n_4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

5. $a = d_5 d_4 d_3 d_2 d_1$

   d_5 može biti bilo koja od pet cifara, d_4 bilo koja od preostale četiri cifre, d_3 bilo koja od preostale tri cifre, d_2 bilo koja od preostale dve cifre i d_1 jedna preostala cifra.

   Broj različitih petocifrenih brojeva je $n_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Odavde sledi da je broj različitih prirodnih brojeva napisanih pomoću cifara $1, 2, 3, 4, 5$ tako da se svaka cifra koristi najviše jednom:

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 5 + 20 + 60 + 120 + 120 = 325.$$

9.Ⓑ Tražimo broj različitih realnih rešenja sistema jednačina

$$4x^2 - 5xy + y^2 = 0$$

$$2x^2 + y^2 - 4x - 5y + 6 = 0$$

Koristeći

$$4x^2 - 5xy + y^2 = 4x^2 - 4xy - xy + y^2 = 4x(x-y) - y(x-y) = (x-y)(4x-y)$$

za prvu jednačinu u sistemu se ima

$$(x-y)(4x-y) = 0$$

Odakle razlikujemo dva slučaja:

1. $x - y = 0 \Leftrightarrow y = x$

   čijom smenom u drugoj jednačini dobijamo

   $$2x^2 + x^2 - 4x - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 9x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1) = 0$$

   odakle se imaju dva rešenja

   $$x_1 = 1 \text{ i } y_1 = x_1 = 1$$

   $$x_2 = 2 \text{ i } y_2 = x_2 = 2$$

2. $4x - y = 0 \Leftrightarrow y = 4x$

   čijom smenom u drugoj jednačini dobijamo

   $$2x^2 + (4x)^2 - 4x - 5(4x) + 6 = 0 \Leftrightarrow 18x^2 - 24x + 6 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x-1) = 0$$

   odakle se imaju dva rešenja

   $$x_3 = \frac{1}{3} \text{ i } y_3 = 4x_3 = \frac{4}{3}$$
   $$x_4 = 1 \text{ i } y_4 = 4x_4 = 4$$

   Dakle, ukupan broj različitih rešenja je četiri.

10.Ⓐ Tražimo minimalnu vrednost funkcije $f(x)$ na segmentu $[-3/8, 1]$. Ekstremne vrednosti ove funkcije se dobijaju u tačkama u kojima je prvi izvod funkcije jednak nuli. Za prvi izvod redom dobijamo

$$f'(x) = \left(-\frac{8}{5}x^2 + 2x + 2 + \ln(1+4x^2) - \operatorname{arctg} 2x\right)' = \left(-\frac{8}{5}x^2 + 2x + 2\right)' + \left(\ln(1+4x^2)\right)' - (\operatorname{arctg} 2x)'$$

Uzimajući u obzir da važi

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

i

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

dalje se ima

$$\left(-\frac{8}{5}x^2 + 2x + 2\right)' = -\frac{8}{5}2x + 2 = -\frac{16}{5}x + 2$$
$$\left(\ln(1+4x^2)\right)' = \frac{1}{1+4x^2}(1+4x^2)' = \frac{8x}{1+4x^2}$$
$$(\operatorname{arctg} 2x)' = \frac{1}{1+(2x)^2}(2x)' = \frac{2}{1+4x^2}$$

te sledi

$$f'(x) = -\frac{16}{5}x + 2 + \frac{8x}{1+4x^2} - \frac{2}{1+4x^2}$$

Iz uslova

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{16}{5}x + 2 + \frac{8x}{1+4x^2} - \frac{2}{1+4x^2} = 0$$

gde množenjem leve i desne strane sa $5(1+4x^2)$ imamo

$$-16x(1+4x^2) + 10(1+4x^2) + 10(4x-1) = 0 \Leftrightarrow -64x^3 + 40x^2 + 24x = 0 \Leftrightarrow x(8x^2 - 5x - 3) = 0$$

te imamo sledeće mogućnosti:

1. $x_1 = 0 \in [-3/8, 1]$
2. $8x^2 - 5x - 3 = 0$

   Rešenja ove kvadratne jednačine su data sa

   $$x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4\cdot 3\cdot 8}}{16} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{16} = \frac{5 \pm 11}{16} = \begin{cases} -\dfrac{3}{8} \\ 1 \end{cases}$$

   i za oba rešenja važi $x_{2,3} \in [-3/8, 1]$

Dakle, ekstremne vrednosti funkcije $f(x)$ se dobijaju za $x = -\dfrac{3}{8}, 0, 1$. Znak drugog izvoda funkcije u ovim tačkama određuje da li je u pitanju minimum ili maksimum funkcije. U tački minimuma drugi izvod funkcije je pozitivan, a u tački maksimuma drugi izvod funkcije je negativan.

Za drugi izvod funkcije $f(x)$ imamo

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(-\frac{16}{5}x + 2 + 2\frac{4x-1}{4x^2+1}\right)' = -\frac{16}{5} + 2\frac{(4x-1)'(4x^2+1) - (4x-1)(4x^2+1)}{(4x^2+1)^2}$$
$$= -\frac{16}{5} - 8\frac{4x^2 - 2x - 1}{(4x^2+1)^2}$$

Sada imamo
$$f''(0) = -\frac{16}{5} - 8\frac{-1}{1} = \frac{24}{5} > 0$$
što znači da u ovoj tački funkcija ima minimum.

Za preostale dve tačke dobijamo da je izvod funkcije negativan, što znači da u tim tačkama funkcija dostiže maksimum:
$$f''\left(-\frac{3}{8}\right) = -\frac{16}{5} - \frac{1}{\left(4\left(\frac{3}{8}\right)^2+1\right)^2} < 0$$
$$f''(1) = -\frac{16}{5} - \frac{8}{25} < 0$$
Konačno za minimalnu vrednost funkcije imamo
$$f_{\min} = f(0) = -\frac{8}{5}0^2 + 2\cdot 0 + 2 + \ln(1+4\cdot 0^2) - \operatorname{arctg}(0) = 2$$

11.Ⓑ Jednačina
$$1 + \log_x \frac{4-x}{10} = (\log_{10} x^2 - 1)\log_x 10$$
je definisana u skupu realnih brojeva x koji ispunjavaju sledeće uslove:

- Osnova logaritamske funkcije mora biti pozitivna i različita od jedan:
$$x > 0 \wedge x \neq 1$$
- Argument logaritamske funkcije mora biti pozitivan
$$4 - x > 0 \Leftrightarrow x < 4$$
$$x > 0 \Rightarrow x^2 > 0 \quad (\top)$$

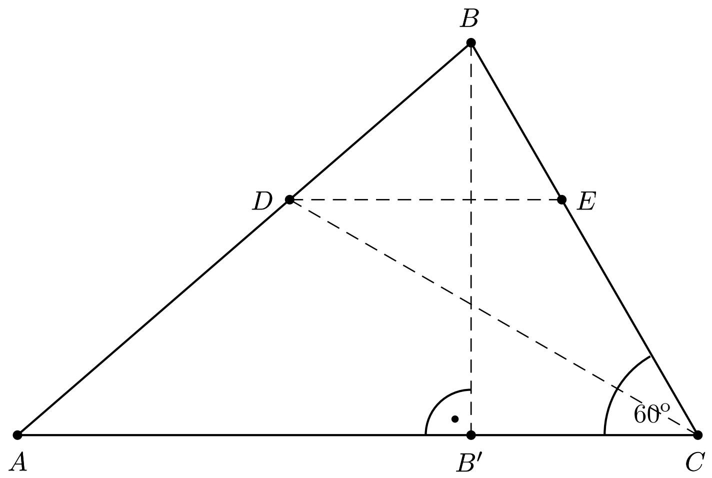
Dakle, rešenja tražimo u skupu realnih brojeva
$$x \in (0,1) \cup (1,4)$$
Levu stranu jednačine možemo transformisati na sledeći način
$$L = 1 + \log_x \frac{4-x}{10} = \log_x x + \log_x \frac{4-x}{10} = \log_x \frac{x(4-x)}{10}$$
Za desnu stranu imamo
$$R = \left(\log_{10} x^2 - 1\right)\log_x 10 = (2\log_{10} x - 1)\log_x 10 = \left(\frac{2}{\log_x 10} - 1\right)\log_x 10 = 2 - \log_x 10$$
$$R = 2 - \log_x 10 = 2\log_x x - \log_x 10 = \log_x x^2 - \log_x 10 = \log_x \frac{x^2}{10}$$
Dalje dobijamo
$$L = R \Leftrightarrow \log_x \frac{x(4-x)}{10} = \log_x \frac{x^2}{10} \Rightarrow \frac{x(4-x)}{10} = \frac{x^2}{10} \Leftrightarrow x(4-x) = x^2 \Leftrightarrow x(x-2) = 0$$
odakle se imaju dva moguća rešenja
$$x_1 = 0 \vee x_2 = 2$$
od kojih jedino rešenje $x_2 = 2$ pripada skupu realnih brojeva $x \in (0,1) \cup (1,4)$. Dakle, jednačina ima samo jedno rešenje.

12.Ⓔ Na slici je prikazan trougao ABC u kome je $AC = 3$ cm i $BC = 2$ cm, dok je ugao kod temena C jednak 60^{o}. D je presečna tačka simetrale tog ugla sa stranicom AB, a tačka E na stranici BC je takva da je duž DE paralelna sa AC. Tražimo površinu trougla CDE.

Za dužine kateta pravouglog trougla $BB'C$ imamo

$$B'C = BC \cdot \cos 60^{\circ} = \frac{1}{2}BC = 1$$

$$BB' = BC \cdot \sin 60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = \sqrt{3}$$



Kako je $DE||AC$ to je $\angle DEB = \angle ACB = 60^{\circ}$ te je $\angle DEC = 180^{\circ} - \angle DEB = 120^{\circ}$. CD je simetrala ugla ACB te je $\angle DCE = \angle ACB/2 = 30^{\circ}$. Sada se za ugao $\angle CDE$ ovog trougla ima

$$\angle CDE = 180^{\circ} - \angle DEC - \angle DCE = 30^{\circ}$$

te je trougao DEC jednakokraki. Označimo $EC = DE = x$. Sada je $BE = BC - EC = 2 - x$.

Iz sličnosti trouglova DBE i ABC dobijamo

$$DE : AC = BE : BC \Rightarrow x : 3 = (2-x) : 2 \Rightarrow 2x = 3(2-x) \Rightarrow 5x = 6$$

te sledi

$$DE = EC = x = \frac{6}{5}$$

Sada se za površinu trougla CDE dobija

$$P_{CDE} = \frac{1}{2}DE \cdot EC \cdot \sin \angle DEC = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \sin 120^{\circ} = \frac{36}{50} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{25}$$

13.Ⓐ Neka je geometrijska progresija data sa

$$a_n = q^n a_0$$

gde važi $q < 1$ (jer je progresija opadajuća) i $a_0 > 0$ i $q > 0$ jer su svi njeni članovi pozitivni.

Za sumu ove beskonačne opadajuće geometrijske progresije se ima

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 \left(1 + q + q^2 + \cdots q^n + \cdots\right) = \frac{a_0}{1-q}$$

Iz uslova zadatka je

$$\frac{a_0}{1-q} = \frac{9}{2}$$

Kvadratni koreni ove geometrijske progresije su

$$b_n = \sqrt{q^n a_0} = (\sqrt{q})^n \sqrt{a_0} = s^n b_0$$

gde je količnik progresije $s = \sqrt{q} \in (0,1)$ i $b_0 = \sqrt{a_0}$.

Za sumu ove beskonačne geometrijske progresije se ima

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b_0 \left(1 + s + s^2 + \cdots s^n + \cdots\right) = \frac{b_0}{1-s} = \frac{\sqrt{a_0}}{1-s}$$

Iz uslova zadatka je

$$\frac{\sqrt{a_0}}{1-s} = 3$$

Uzimajući u obzir da je $q = s^2$, iz ovih dveju suma dobijamo sistem jednačina

$$\frac{a_0}{1-s^2} = \frac{9}{2}$$

$$\frac{\sqrt{a_0}}{1-s} = 3$$

Kvadriranjem druge jednačine

$$\frac{a_0}{(1-s)^2} = 9$$

i deljenjem sa prvom

$$\frac{a_0}{1-s^2} = \frac{9}{2}$$

dobijamo kvadratnu jednačinu po promenjivoj s

$$\frac{1-s^2}{1-2s+s^2} = 2 \Leftrightarrow 3s^2 - 4s + 1 = 0$$

čija su rešenja

$$s_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3}}{6} = \begin{cases} \frac{1}{3} \\ 1 \end{cases}$$

Samo rešenje $s_1 = \dfrac{1}{3}$ pripada skupu $(0,1)$. Odavde se za količnik geometrijske progresije konačno ima

$$q = s_1^2 = \frac{1}{9}$$

14.Ⓓ Najpre odredimo domen u polju realnih brojeva na kome je definisana zadata jednačina

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2} = \frac{5}{4}$$

Izrazi pod kvadratnim korenom moraju biti veći ili jednaki nuli

$$1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$$

$$1 + x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$$

$$1 - x \geq 0 \wedge 1 + x \geq 0 \Rightarrow 1 - x^2 = (1-x)(1+x) \geq 0$$

Dakle, moguća rešenja ove jednačine su u intervalu $x \in [-1, 1]$.
Zadata jednačina se može predstaviti u sledećem ekvivalentnom obliku

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = \frac{5}{4} + \sqrt{1-x^2}$$

Kako su obe strane jednačine pozitivne, kvadriranjem dobijamo redom

$$1 - x + 1 + x + 2\sqrt{1-x^2} = \frac{25}{16} + \frac{5}{2}\sqrt{1-x^2} + 1 - x^2$$

smenom $t = \sqrt{1-x^2} \in [0,1]$ imamo kvadratnu jednačinu po promenljivoj t

$$2 + 2t = \frac{25}{16} + \frac{5}{2}t + t^2 \Leftrightarrow 16t^2 + 8t - 7 = 0$$

čija su rešenja

$$t_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 16 \cdot 28}}{32} = \frac{-1 \pm 2\sqrt{2}}{4}$$

Jedino rešenje $t_1 = \dfrac{-1+2\sqrt{2}}{4}$ zadovoljava uslov $t_1 \in [0,1]$.
Dalje sledi

$$1 - x^2 = t^2 = \left(\frac{2\sqrt{2}-1}{4}\right)^2 \Rightarrow x^2 = 1 - \left(\frac{2\sqrt{2}-1}{4}\right)^2$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{2}-1}{4}\right)^2}$$

te zadata jednačina ima dva realna rešenja.

15.Ⓔ Tražimo realna rešenja jednačine

$$\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{3}$$

na segmentu $[0, 2\pi]$.

Zadata jednačina se može predstaviti u ekvivalentnom obliku

$$\frac{\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{12}\right)}{\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=3\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$$

Uvođenjem smene $t = x - \dfrac{\pi}{12} \Rightarrow x + \dfrac{\pi}{12} = t + \dfrac{\pi}{6}$, jednačina dobija oblik

$$\operatorname{tg}\left(t+\frac{\pi}{6}\right)=3\operatorname{tg}t$$

Korišćenjem trigonometrijskog identiteta

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

za levu stranu prethodne jednačine imamo

$$\operatorname{tg}\left(t+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\operatorname{tg}t+\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}{1-\operatorname{tg}t\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}$$

i kako je $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ to dalje sledi

$$\operatorname{tg}\left(t+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\operatorname{tg}t+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}t}=3\operatorname{tg}t\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 t-\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}t+\frac{1}{3}=0$$

$$\operatorname{tg}^2 t-2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\operatorname{tg}t+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=0$$

$$\left(\operatorname{tg}t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=0$$

$$\operatorname{tg}t=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Odavde se za t dobija

$$t=\frac{\pi}{6}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$$

odnosno,

$$x=t+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}+k\pi=\frac{\pi}{4}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$$

Jedina dva rešenja koja se nalaze na segmentu $[0, 2\pi]$ se dobijaju za $k = 0, 1$:

$$x_1=\frac{\pi}{4},\quad x_2=\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{5\pi}{4}$$

Sada se za zbir realnih rešenja zadate jednačine dobija

$$x_1+x_2=\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$$

16.Ⓑ Tražimo razliku najvećeg i najmanjeg rešenja nejednačine

$$\sqrt[4]{(\sqrt{2}+1)^x}+\sqrt[4]{(\sqrt{2}-1)^x}\le 2\sqrt{2}$$

Kako važi

$$\sqrt{2}-1=(\sqrt{2}-1)\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=\frac{2-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

to se zadata nejednačina može napisati u sledećem ekvivalentnom obliku

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{x}{4}}+\left(\sqrt{2}-1\right)^{\frac{x}{4}} \leq 2\sqrt{2}$$

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{x}{4}}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^{\frac{x}{4}} \leq 2\sqrt{2}$$

gde uvođenjem smene $t=\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{x}{4}}>0$ dobijamo

$$t+\frac{1}{t} \leq 2\sqrt{2}$$

te množenjem leve i desne strane nejednačine sa $t>0$ dalje dobijamo ekvivalentnu kvadratnu nejednačinu

$$t^2-2\sqrt{2}+1 \leq 0$$

Koreni kvadratne jednačine $t^2-2\sqrt{2}+1=0$ su dati sa

$$t_{1,2}=\frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{8-4}}{2}=\sqrt{2}\pm 1>0$$

te su rešenja kvadratne nejednačine data sa

$$t \in [\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1]$$

Sada vraćanjem nazad smene $t=\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{x}{4}}$ imamo

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{x}{4}} \geq (\sqrt{2}-1)=(\sqrt{2}+1)^{-1}$$

i kako je $\sqrt{2}+1>1$ to se dobija

$$\frac{x}{4} \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -4$$

S druge strane imamo

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{x}{4}} \leq (\sqrt{2}+1)=(\sqrt{2}+1)^{1}$$

$$\frac{x}{4} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 4$$

te se konačno dobija

$$-4 \leq x \leq 4$$

Sada za razliku najvećeg i najmanjeg rešenja ove nejednačine dobijamo

$$x_{\max}-x_{\min}=4-(-4)=8.$$

17.Ⓐ Korišćenjem izraza za razvoj binoma

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

za $a=5^{\frac{1}{3}}$ i $b=-3^{\frac{1}{5}}$ dobijamo

$$\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[5]{3}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}5^{\frac{n-k}{3}}(-3)^{\frac{k}{5}}$$

Iz uslova zadatka da je odnos binomnih koeficijenata četvrtog i trećeg člana u razvoju binoma jednak 10 dobijamo

$$\frac{\binom{n}{3}}{\binom{n}{2}}=\frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}}{\frac{n(n-1)}{2}}=\frac{n-2}{3}=10 \Rightarrow n=32$$

Racionalni članovi u razvoju se dobijaju za one vrednosti $k=0,1,2,\ldots,32$ za koje je k deljivo sa 5 i $32-k$ deljivo sa 3.

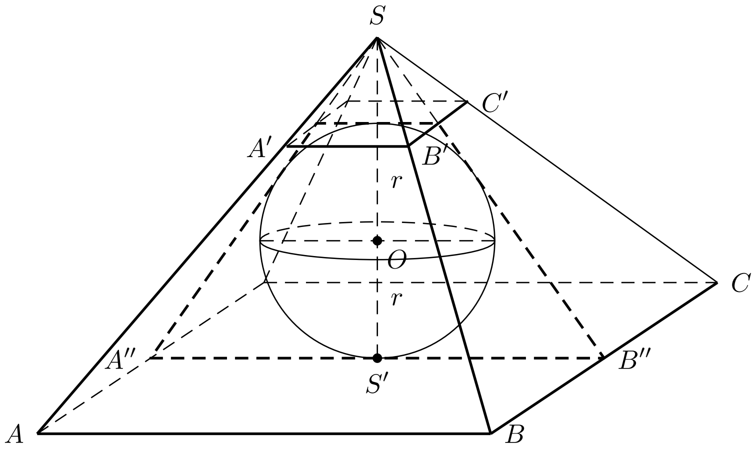
$k =$	0	5	10	15	20	25	30
$32-k=$	32	27	22	17	12	7	2

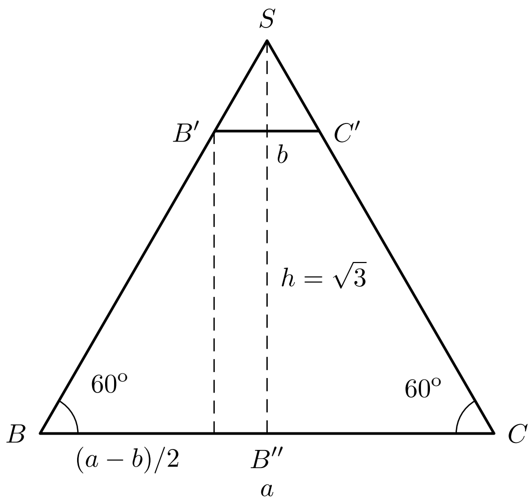
Odavde imamo da su uslovi zadovoljeni samo za $k = 5, 20$.

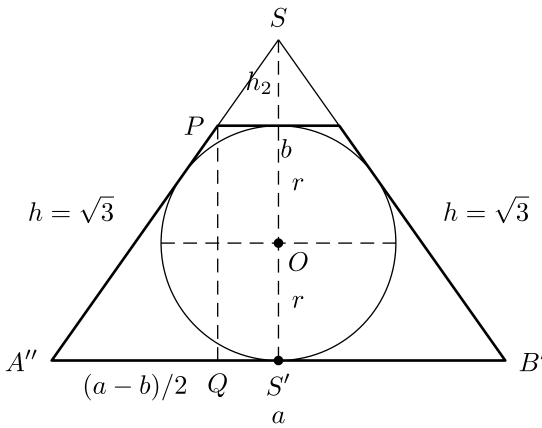
18.Ⓓ Na slici je prikazana pravilna četvorostrana zarubljena piramida sa upisanom loptom i trouglovi koji odgovaraju stanici zarubljene piramide i centralnom preseku kroz piramidu. Visina bočne strane zarubljene piramide jednaka $h = \sqrt{3}$ cm, a ugao koji bočne ivice zaklapaju sa ivicama veće osnove jednak 60^{o}. Strana $BCB'C'$ je trapez visine $h = \sqrt{3}$ i sa uglovima $\angle CBB' = \angle BCC' = 60^{\text{o}}$. To znači da je ugao $\angle BSC = 180^{\text{o}} - \angle CBB' - \angle BCC' = 60^{\text{o}}$ te je trougao BCS jednakostraničan. Označimo $a = BC = SB = SA$ i $B'C' = b$. Najpre važi

$$h = BB' \sin 60^{\text{o}} = BB'\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BB' = \frac{2}{\sqrt{3}}h = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{3} = 2$$

$$\frac{a-b}{2} = BB' \cos 60^{\text{o}} = \frac{1}{2}BB' = 1 \Rightarrow a - b = 2$$







Trapez u centralnom preseku takođe ima osnovice dužina $A''B'' = a$ i b a bočne stranice su mu dužine $h = \sqrt{3}$, dok mu visina odgovara prečniku upisane lopte $H = PQ = 2r$. Primenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao $A''PQ$ koji osnuju visina i bočna stranica trapeza, dobijamo

$$PQ^2 = PA''^2 - A''Q^2 \Rightarrow H^2 = h^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = (\sqrt{3})^2 - 1^2 = 2 \Rightarrow H = \sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Površina ovog trapeza može se izraziti na dva načina, preko osnovica a, b i visine $H = 2r$:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot H = (a+b)r$$

ili preko zbira trouglova koji grade njegove stranice sa centrom upisanog kruga O:

$$P = \frac{1}{2}(ar + br + hr + hr) = \frac{1}{2}(a + b + 2h)r$$

Iz prethodna dva izraza dobijamo

$$a + b + 2h = 2(a + b) \Rightarrow a + b = 2h = 2\sqrt{3}$$

gde smenom $a = b + 2$ za dužine osnovica dobijamo

$$a = \sqrt{3} + 1, \quad b = \sqrt{3} - 1$$

Sa slike vidimo da se visina trougla $SA''B''$ može izraziti sa

$$SS' = H + h_2$$

gde je $H = 2r$ i h_2 visina trougla nad trapezom. Iz sličnosti trouglova imamo

$$\frac{h_2}{b} = \frac{H + h_2}{a}$$

odakle sledi

$$h_2 = \frac{b}{a - b} H$$

Zapreminu zarubljene piramide sada možemo izraziti u funkciji a, b i H

$$V_P = \frac{1}{3}\left(a^2(H + h_2) - b^2 h_2\right) = \frac{1}{3}\left(a^2 H\left(1 + \frac{b}{a - b}\right) - b^2\frac{b}{a - b}H\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{a^3}{a - b}H - \frac{b^3}{a - b}H\right)$$

$$V_P = \frac{1}{3}\frac{a^3 - b^3}{a - b} = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + ab\right) H$$

Smenom vrednosti za a, b i H dobijamo

$$V_P = \frac{1}{3}\left((\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 + (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)\right)\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(3 + 2\sqrt{3} + 1 + 3 - 2\sqrt{3} + 1 + 3 - 1\right) = \frac{10\sqrt{2}}{3}$$

Za zapreminu upisane lopte poluprečnika $r = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ imamo

$$V_L = \frac{4\pi}{3}r^3 = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{\pi\sqrt{2}}{3}$$

te se za odnos zapremina zarubljene piramide i lopte ima

$$\frac{V_P}{V_L} = \frac{\frac{10\sqrt{2}}{3}}{\frac{\pi\sqrt{2}}{3}} = \frac{10}{\pi}$$

19.Ⓑ Tražimo najveći broj rešenja jednačine :

$$\left|2 - \left|x - x^2\right|\right| = p$$

gde mora da važi $p \geq 0$.

Koristimo definiciju apsolutne vrednosti

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

te dobijamo

$$\left|x - x^2\right| = \begin{cases} x - x^2, & x - x^2 \geq 0 \\ -(x - x^2), & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x(1 - x), & x \in [0, 1] \\ x(x - 1), & x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \end{cases}$$

Sada razlikujemo dva slučaja

1. $x \in [0,1]$

   U ovom slučaju je
   $$\left|x - x^2\right| = x - x^2$$
   i zadata jednačina oblika
   $$\left|2 - (x - x^2)\right| = p$$
   $$\left|x^2 - x + 2\right| = p$$
   Kako je diskriminanta kvadratne jednačine $x^2 - x + 2 = 0$ jednaka $D = 1 - 4 \cdot 2 = -8 < 0$, to je funkcija $x^2 - x + 2$ uvek pozitivna i važi
   $$\left|x^2 - x + 2\right| = x^2 - x + 2 = p$$
   Rešenja dobijene kvadratne jednačine
   $$x^2 - x + 2 - p = 0$$
   su
   $$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(2-p)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{4p - 7}}{2}$$
   i ima ih dva za $4p - 7 > 0 \Rightarrow p > \dfrac{7}{4}$. Takođe u ovom slučaju mora važiti početni uslov $0 \le x_{1,2} \le 1$ odakle dobijamo
   $$0 \le \frac{1 \pm \sqrt{4p-7}}{2} \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 1 \pm \sqrt{4p - 7} \le 2 \Leftrightarrow -1 \le \pm\sqrt{4p-7} \le 1$$
   $$\sqrt{4p-7} \le 1 \Leftrightarrow 4p - 7 \le 1 \Leftrightarrow p \le 2$$
   što u preseku sa uslovom $p > \dfrac{7}{4}$ daje
   $$p \in \left(\frac{7}{4}, 2\right]$$
   Dakle, u ovom slučaju jednačina ima dva realna rešenja.

2. $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

   U ovom slučaju je
   $$\left|x - x^2\right| = x^2 - x$$
   i zadata jednačina oblika
   $$\left|2 - (x^2 - x)\right| = p$$
   $$\left|-x^2 + x + 2\right| = p$$
   Tražimo znak funkcije $-x^2 + x + 2$. Kako su rešenja jednačine $-x^2 + x + 2 = 0$ data sa
   $$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{-2} = \frac{1 \mp \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$
   to dobijamo
   $$-x^2 + x + 2 \ge 0, \quad x \in [-1, 2]$$
   $$-x^2 + x + 2 < 0, \quad x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$$
   te dalje razlikujemo dva podslučaja

   a) $x \in [-1, 0) \cup (1, 2]$

      U ovom slučaju je $-x^2 + x + 2 \ge 0$ odakle važi $|-x^2 + x + 2| = -x^2 + x + 2$ te zadata jednačina dobija oblik
      $$-x^2 + x + 2 = p \Leftrightarrow x^2 - x + p - 2 = 0$$
      i njena rešenja su
      $$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(p-2)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9 - 4p}}{2}$$
      Da bi rešenja bila realna i različita, mora da važi
      $$9 - 4p > 0 \Leftrightarrow p < \frac{9}{4}$$

Iz početnog uslova $x \in [-1, 0) \cup (1, 2]$ sada sledi

$$\begin{array}{rcl} -1 \le \dfrac{1-\sqrt{9-4p}}{2} < 0 & & 1 \le \dfrac{1+\sqrt{9-4p}}{2} \le 2 \\ -2 \le 1-\sqrt{9-4p} < 0 & & 2 < 1+\sqrt{9-4p} \le 4 \\ -3 \le -\sqrt{9-4p} < -1 & & 1 < \sqrt{9-4p} \le 3 \\ 1 < \sqrt{9-4p} \le 3 & & 1 < \sqrt{9-4p} \le 3 \end{array}$$

$$1 < \sqrt{9-4p} \le 3 \Rightarrow 1 < 9-4p \le 9 \Rightarrow 8 > 4p \le 0 \Rightarrow p \in [0, 2)$$

što u preseku sa $p < \dfrac{9}{4}$ daje da za $p \in [0, 2)$ imamo dva različita realna rešenja.

b) $x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$

U ovom slučaju je $-x^2 + x + 2 < 0$ odakle važi

$$|-x^2 + x + 2| = -(-x^2 + x + 2) = x^2 - x - 2$$

te zadata jednačina dobija oblik

$$x^2 - x - 2 = p \Leftrightarrow x^2 - x - (p+2) = 0$$

i njena rešenja su

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4(p+2)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{4p+9}}{2}$$

Da bi rešenja bila realna i različita, mora da važi

$$4p + 9 > 0 \Leftrightarrow p > -\frac{9}{4}$$

i kako je $p \ge 0$ poslednja nejednakost je ispunjena.

Iz početnog uslova $x < -1 \vee x > 2$ sada sledi

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1-\sqrt{4p+9}}{2} < -1 & & \dfrac{1+\sqrt{4p+9}}{2} > 2 \\ 1-\sqrt{4p+9} < -2 & & 1+\sqrt{4p+9} > 4 \\ -\sqrt{4p+9} < -3 & & \sqrt{4p+9} > 3 \\ \sqrt{4p+9} > 3 & & \sqrt{4p+9} > 3 \end{array}$$

$$4p + 9 > 9 \Rightarrow p > 0$$

što je ispunjeno. Dakle u ovom slučaju za $p > 0$ imamo dva različita realna rešenja.

Iz svih analiziranih slučajeva dobijamo sledeća rešenja:

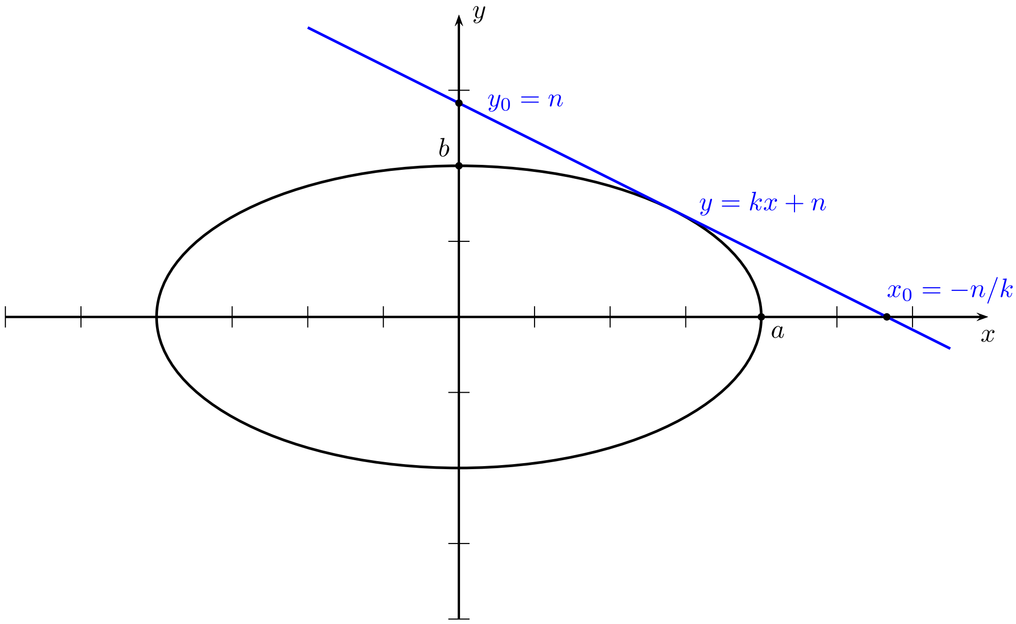
- $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{4p-7}}{2}$ za $p \in \left(\dfrac{7}{4}, 2\right]$
- $x_{3,4} = \dfrac{1 \pm \sqrt{9-4p}}{2}$ za $p \in [0, 2)$
- $x_{5,6} = \dfrac{1 \pm \sqrt{4p+9}}{2}$ za $p > 0$

Dakle za vrednosti parametra $p \in \left(\dfrac{7}{4}, 2\right)$ jednačina ima 6 različitih realnih rešenja.

20.Ⓔ Na slici su grafički prikazane elipsa $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ i tangenta ove elipse u prvom kvadrantu koordinatnog sistema $y = kx + n$.

Tražimo uslove pod kojima je dužina odsečka d minimalna

$$d^2 = x_0^2 + y_0^2 = n^2 + \frac{n^2}{k^2}$$



Smenom jednačine tangente u jednačinu elipse dobijamo kvadratnu jednačinu po promenljivoj x

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(kx+n)^2}{b^2} = 1$$

$$(b^2 + a^2k^2)x^2 + 2a^2knx + a^2n^2 - a^2b^2 = 0$$

Kako sistem jednačina elipse i tangente ima tačno jedno rešenje (tangenta dodiruje elipsu u jednoj tački), to ova kvadratna jednačina mora imati tačno jedno rešenje koje se dobija za uslov da je njena diskriminanta jednaka nuli:

$$D = (2a^2kn)^2 - 4(b^2 + a^2k^2)(a^2n^2 - a^2b^2) = 4a^2b^2(b^2 + a^2k^2 - n^2) = 0$$

odakle sledi

$$n^2 = a^2k^2 + b^2$$

Sada se dužina odsečka može izraziti u funkciji promenjive k i parametara elipse a i b

$$f(k) = d^2 = n^2 + \frac{n^2}{k^2} = (a^2k^2 + b^2)\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) = a^2k^2 + a^2 + b^2 + b^2k^{-2}$$

Ekstremne vrednosti funkcije $f(k)$ dobijamo za one vrednosti koeficijenta nagiba tangente k za koje je izvod ove funkcije jednak nuli. Najpre, za izvod dobijamo

$$f'(k) = \left(a^2k^2 + a^2 + b^2 + b^2k^{-2}\right)' = 2a^2k - 2b^2k^{-3} = 2\frac{a^2k^4 - b^2}{k^3}$$

te iz uslova

$$f'(k) = 0$$

imamo

$$\frac{a^2k^4 - b^2}{k^3} = 0 \Rightarrow a^2k^4 - b^2 = 0 \Rightarrow k^4 = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow k^2 = \frac{b}{a}$$

Odavde za ekstremnu (minimalnu) vrednost dužine odsečka imamo

$$d_{\min}^2 = a^2k^2 + a^2 + b^2 + b^2k^{-2} = a^2\left(\frac{b}{a}\right) + a^2 + b^2 + b^2\left(\frac{b}{a}\right)^{-1}$$

$$d_{\min}^2 = ab + a^2 + b^2 + ab = (a+b)^2$$

$$d_{\min} = a + b$$

PROBNI PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE ZA UPIS NA ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET 2022

1. Ako je $f(1-x) = x^2 + |x|$, $x \in \mathbb{R}$, onda je $f(1+x)$ jednako:

(A) $x^2 - |-x|$ (B) $x^2 + 5x$ (C) $4x^2 + 2|x|$ (D) $x^2 + x$ (E) $x^2 + |x|$ (N) Ne znam

2. Vrednost izraza $\sqrt{\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}}$ iznosi :

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{2}/2$ (C) $1/2$ (D) 1 (E) 2 (N) Ne znam

3. Vrednost c za koju se rešenje jednačine $11^{x+11} = 7^x$ može prikazati u obliku $x = \log_c 11^{11}$ iznosi:

(A) $\dfrac{5}{7}$ (B) 7 (C) $\dfrac{9}{7}$ (D) $\dfrac{11}{7}$ (E) $\dfrac{7}{11}$ (N) Ne znam

4. Broj različitih vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ za koje jednačina $\dfrac{ax-4}{x-a} = 1$ nema rešenja je:

(A) 3 (B) 1 (C) 2 (D) 0 (E) veći od 3 (N) Ne znam

5. Trougao ABC je pravougli, sa katetama $AC = 6$ cm i $BC = 8$ cm. Neka su CD i CE redom težišna duž i visina koje odgovaraju hipotenuzi AB. Površina trougla CDE (u cm^2) je:

(A) 6 (B) 42/25 (C) 24/25 (D) 7/5 (E) 84/25 (N) Ne znam

6. Skup svih realnih rešenja nejednačine $\dfrac{x^2-6x-7}{x^2+2x-8} \geq 0$ je oblika (za neke $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, takve da je $-\infty < a < b < c < d < +\infty$):

(A) $(-\infty, a) \cup (b, c] \cup [d, +\infty)$ (B) $(-\infty, a) \cup (b, c) \cup (d, +\infty)$ (C) $(-\infty, a] \cup [b, c] \cup [d, +\infty)$

(D) $(-\infty, a) \cup [b, c] \cup (d, +\infty)$ (E) $(-\infty, a) \cup [b, c) \cup [d, +\infty)$ (N) Ne znam

7. Granična vrednost $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin x - \sqrt{3}\cos x}{x - \pi/3}$ iznosi:

(A) 1 (B) 0 (C) π (D) 2 (E) 1/2 (N) Ne znam

8. U razvoju binoma $\left(x^{12} + \dfrac{1}{x^8}\right)^{15}$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, član koji ne sadrži x je:

(A) 6435 (B) 455 (C) 3003 (D) 105 (E) 5005 (N) Ne znam

9. Proizvod rešenja jednačine $\left(1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^n\right) = 16\left(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n\right) - 155$ gde je $n \in \mathbb{N}$, je jednak:

(A) 12 (B) 6 (C) 15 (D) 9 (E) 24 (N) Ne znam

10. Skup vrednosti realnog parametra m za koje je funkcija $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(m+1)x^2 + 2mx + m - 2}}$ definisana za svako $x \in \mathbb{R}$ je:

(A) $\{-1\}$ (B) $\mathbb{R}$ (C) $(-1, 2)$ (D) $\emptyset$ (E) $(-1, \infty)$ (N) Ne znam

11. Najveće realno rešenje jednačine $\left|e^{2x} - 9\right| + e^{2x} - 4 = 5$ je:

(A) $\dfrac{1}{\log_3 e}$ (B) 1 (C) $\dfrac{1}{2}\ln 3$ (D) $\dfrac{\log_{10} e}{\log_{10} 3}$ (E) $\dfrac{1}{2}\dfrac{\log_6 4}{\log_6 e}$ (N) Ne znam

12. Broj $z = (1 + i\sqrt{3})e^{5i\pi/12}$, predstavljen u trigonometrijskom obliku, glasi:

(A) $2(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)$ (B) $4(\cos 3\pi/4 + i \sin 3\pi/4)$ (C) $2(\cos 5\pi/6 + i \sin 5\pi/6)$
(D) $2(\cos 3\pi/4 + i \sin 3\pi/4)$ (E) $\sqrt{2}(\cos 3\pi/8 + i \sin 3\pi/8)$ (N) Ne znam

13. Neka su x_1, x_2, x_3 koreni jednačine $x + \dfrac{10x}{x^2+1} = 6$. Tada $(x_1 + x_2 + x_3) - x_1x_2x_3$ iznosi:

(A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) 0 (E) 4 (N) Ne znam

14. Površina četvorougla određenog zajedničkim tangentama krivih $9x^2 + 12y^2 = 108$ i $9x^2 - 20y^2 = 180$ iznosi:

(A) 64 (B) 96 (C) 48 (D) 24 (E) 128 (N) Ne znam

15. Oko lopte poluprečnika r opisana je zarubljena kupa. Izvodnice kupe sa ravni osnove kupe grade ugao od 60^o. Odnos zapremina zarubljene kupe i lopte je:

(A) $\dfrac{19}{6}$ (B) 3 (C) $\dfrac{19r}{18}$ (D) $\dfrac{5}{2}$ (E) $\dfrac{13}{6}$ (N) Ne znam

16. Skup svih realnih rešenja nejednačine $\log_{x+1}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) \leq \log_{x-\frac{1}{2}}(x+1)$ je oblika (za neke $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, takve da je $-\infty < a < b < c < d < +\infty$):

(A) $(a, b) \cup (b, +\infty)$ (B) $(a, b] \cup (c, d)$ (C) $(a, b] \cup (c, \infty)$
(D) $(-\infty, a] \cup (b, c]$ (E) $(a, b] \cup (c, d) \cup (d, +\infty)$ (N) Ne znam

17. Broj načina na koje možemo grupu od 10 studenata podeliti na dve grupe, tako da je u svakoj grupi neparan broj studenata, je:

(A) 382 (B) 352 (C) 512 (D) 55 (E) 210 (N) Ne znam

18. Broj različitih rešenja jednačine $z^3 = \bar{z}, z \in \mathbb{C}$, je:

(A) 3 (B) 2 (C) 5 (D) 4 (E) 6 (N) Ne znam

19. Broj rešenja jednačine $\sin x + \cos x + \pi \sin x \cos x = 1$ na segmentu $[0, 2\pi]$ iznosi:

(A) 1 (B) 3 (C) 2 (D) 4 (E) 0 (N) Ne znam

20. U kužnici prečnika d upisan je trapez, tako da je veća osnovica trapeza prečnik kružnice. Maksimalna površina takvog trapeza iznosi:

(A) $d^2\pi$ (B) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}d^2$ (C) $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{16}d^2$ (D) $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{4}d^2$ (E) $\dfrac{3\sqrt{3}}{16}d^2$ (N) Ne znam

REŠENJA

1.Ⓔ Uvođenjem smene $t = 1 - x \in \mathbb{R}$ za zadatu funkciju $f(1-x) = x^2 + |x|$, $x \in \mathbb{R}$ dobijamo

$$f(t) = (1-t)^2 + |1-t|,\ t \in \mathbb{R}$$

Uvođenjem nove smene $t = 1 + x \Leftrightarrow 1 - t = -x$ u prethodnoj funkciji, dalje dobijamo

$$f(1+x) = (-x)^2 + |-x| = x^2 + |x| = f(1-x).$$

2.Ⓐ Kako važi:

$$3 \pm 2\sqrt{2} = 2 \pm 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2})^2 \pm 2\sqrt{2} + 1 = \left(\sqrt{2} \pm 1\right)^2$$

to sledi

$$\sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}} = \sqrt{\left(\sqrt{2} \pm 1\right)^2} = \sqrt{2} \pm 1 > 0$$

te se za vrednost zadatog izraza dobija

$$\sqrt{\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt{2} + 1 - (\sqrt{2} - 1)} = \sqrt{2}.$$

3.Ⓔ Primenom $\log_7$ na obe strane zadate jednačine redom dobijamo

$$\log_7\left(11^{x+11}\right) = \log_7\left(7^x\right)$$

$$(x+11)\log_7 11 = x\log_7 7 = x \Leftrightarrow x(1 - \log_7 11) = 11\log_7 11 = \log_7 11^{11}$$

$$x(\log_7 7 - \log_7 11) = \log_7 11^{11} \Leftrightarrow x\log_7 \frac{7}{11} = \log_7 11^{11} \Leftrightarrow x = \frac{\log_7 11^{11}}{\log_7 \frac{7}{11}} = \log_{\frac{7}{11}} 11^{11}$$

odakle sledi $c = \dfrac{7}{11}$.

4.Ⓑ Množenjem leve i desne strane zadate jednačine $\dfrac{ax-4}{x-a} = 1$ sa $x - a \neq 0$ imamo

$$ax - 4 = x - a \Leftrightarrow x(a-1) = 4 - a$$

Za $a = 1$ ova jednačina nema rešenja jer se u tom slučaju svodi na $0 = 4$ što je netačno. U svim ostalim slučajevima $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ jednačina ima rešenje dato sa

$$x = \frac{4-a}{a-1}$$

Dakle, broj različitih vrednosti parametra a za koji zadata jednačina nema rešenja je jedan.

5.Ⓔ

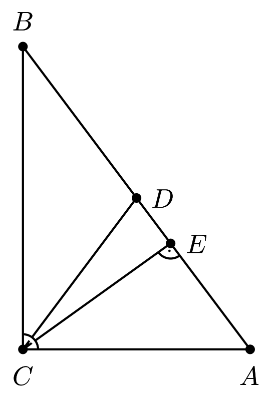
Primenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao ACB za dužinu hipotenuze dobijamo

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow AB = 10$$

Visinu CE nad hipotenuzom nalazimo iz izraza za površinu pravouglog trougla ACB

$$P_{ACB} = \frac{1}{2}AC \cdot BC$$

$$P_{ACB} = \frac{1}{2}AB \cdot CE$$



odakle sledi

$$AB \cdot CE = AC \cdot BC \Rightarrow CE = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{6 \cdot 8}{10} = \frac{24}{5}$$

Primenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao AEC dobijamo

$$AE^2 = AC^2 - CE^2 = 6^2 - \left(\frac{24}{5}\right)^2 = \left(\frac{18}{5}\right)^2 \Rightarrow AE = \frac{18}{5}$$

Kako težišna duž CD deli hipotenuzu na dva jednaka segmenta, to važi

$$AD = \frac{1}{2}AB = 5$$

i za duž DE dobijamo

$$DE = AD - AE = 5 - \frac{18}{5} = \frac{7}{5}$$

i konačno za površinu pravouglog trougla CED imamo

$$P_{CED} = \frac{1}{2}CE \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{5} \cdot \frac{7}{5} = \frac{84}{25}.$$

6.Ⓔ

$$\frac{x^2 - 6x - 7}{x^2 + 2x - 8} \geq 0$$

Kako je $x^2 - 6x - 7 = (x-7)(x+1)$ i $x^2 + 2x - 8 = (x-2)(x+4)$, to se zadata nejednačina svodi na

$$\frac{(x-7)(x+1)}{(x-2)(x+4)} \geq 0,\ x \neq -4,\ x \neq 2$$

Za znake članova u brojiocu i imeniocu na intervalima $x \in (-\infty, -4) \cup (-4, -1] \cup [-1, 2) \cup (2, 7] \cup [7, +\infty)$ imamo:

$x \in$	$(-\infty, -4)$	$(-4, -1]$	$[-1, 2)$	$(2, 7]$	$[7, +\infty)$
$x-7$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{(x-7)(x+1)}{(x-2)(x+4)}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

odnosno, skup svih realnih rešenja ove nejednačine je

$$x \in (-\infty, -4) \cup [-1, 2) \cup [7, +\infty).$$

7.Ⓓ Neka je

$$L = \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sqrt{3}\cos x}{x - \pi/3}$$

Kako je

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\left(\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin x - \sin\frac{\pi}{3}\cos x\right) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

to dalje sledi

$$L = 2\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}}$$

Dalje uvođenjem smene $t = x - \dfrac{\pi}{3}$, gde za $x \to \dfrac{\pi}{3}$ važi $t \to 0$ imamo

$$L = 2\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 2$$

jer je

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

što se može dokazati primenom L'Hôpital-ovog pravila

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{(\sin t)'}{t'}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t}{1}=\cos 0=1.$$

8.Ⓔ Koristeći izraz za razvoj binoma

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

i smenom $a=x^{12}$, $b=x^{-8}$ i $n=15$, za zadati binom dobijamo

$$\left(x^{12}+\frac{1}{x^8}\right)^{15}=\sum_{k=0}^{15}\binom{15}{k}x^{12(15-k)}x^{-8k}=\sum_{k=0}^{15}\binom{15}{k}x^{180-20k}$$

Za član u razvoju koji ne sadrži x mora da važi

$$180-20k=0\Rightarrow k=9$$

i za taj član dobijamo

$$\binom{15}{9}=\binom{15}{6}=\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=5005.$$

9.Ⓐ Koristeći identitet

$$1+x+x^2+\ldots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

dobijamo

$$1+4+4^2+\ldots+4^n=\frac{4^{n+1}-1}{4-1}=\frac{1}{3}\left(4\cdot 2^{2n}-1\right)$$

$$1+2+2^2+\ldots+2^n=\frac{2^{n+1}-1}{2-1}=2\cdot 2^n-1$$

te se za zadatu jednačinu

$$\left(1+4+4^2+\ldots+4^n\right)=16\left(1+2+2^2+\ldots+2^n\right)-155$$

ima

$$\frac{1}{3}\left(4\cdot 2^{2n}-1\right)=32\cdot 2^n-16-155$$

$$2^{2n}-24\cdot 2^n+128=0$$

Uvođenjem smene $t=2^n>0$, dalje dobijamo kvadratnu jednačinu

$$t^2-24t+128=0$$

čija su rešenja

$$t_{1,2}=\frac{24\pm\sqrt{24^2-4\cdot 128}}{2}=\begin{cases}8\\16\end{cases}$$

Odavde sledi

$$2^{n_1}=t_1=8=2^3\Rightarrow n_1=3$$

$$2^{n_2}=t_2=16=2^4\Rightarrow n_2=4$$

te je proizvod rešenja ove jednačine

$$n_1n_2=3\cdot 4=12.$$

10.Ⓓ Zadata funkcija je definisana za svako $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{(m+1)x^2+2mx+m-2}}=\frac{1}{\sqrt{g(x)}}$$

ako je izraz u imeniocu pod kvadratnim korenom uvek pozitivan

$$g(x) = (m+1)x^2 + 2mx + m - 2 > 0$$

što će biti ispunjeno za one vrednosti realnog parametra m za koje je diskriminanta kvadratne funkcije sa leve strane nejednakosti manja od nule i koeficijent uz x^2 pozitivan

$$D = (2m)^2 - 4(m+1)(m-2) < 0 \wedge m + 1 > 0$$

Iz prvog uslova imamo

$$D = 4m^2 - 4m^2 + 4m + 8 = 4m + 8 < 0 \Leftrightarrow m < -2$$

iz drugog uslova imamo

$$m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$$

te je presek ova dva uslova prazan skup $m \in \emptyset$.

U specijalnom slučaju $m = -1$, kvadratna funkcija se svodi na linearnu funkciju oblika

$$g(x) = -2x - 3$$

koja nije pozitivna za sve $x \in \mathbb{R}$.

Dakle, ne postoje realne vrednosti parametra m za koje je funkcija $f(x)$ definisana za sve realne vrednosti promenljive x.

11.Ⓐ Uvođenjem smene $t = e^{2x} > 0$, zadata jednačina

$$\left|e^{2x} - 9\right| + e^{2x} - 4 = 5$$

dobija oblik

$$|t - 9| + t - 4 = 5 \Leftrightarrow |t - 9| = 9 - t$$

Kako je

$$|t - 9| = \begin{cases} t - 9, & t > 9 \\ 9 - t, & t \le 9 \end{cases}$$

Sada imamo dve mogućnosti

- $0 < t \le 9$

  $$|t - 9| = 9 - t \Rightarrow 9 - t = 9 - t \Leftrightarrow \top$$

  što je ispunjeno za

  $$e^{2x} \le 9 \Leftrightarrow 2x \le \ln 9 \Leftrightarrow x \le \frac{1}{2}\ln 9 = \ln 3$$

  $$x \le \ln 3 = \frac{1}{\log_3 e}$$

- $t > 9$

  $$|t - 9| = 9 - t \Rightarrow t - 9 = 9 - t \Leftrightarrow t = 9$$

  što nije rešenje u zadatom skupu $t > 9$

Dakle, najveće realno rešenje zadate jednačine je

$$x_{\max} = \frac{1}{\log_3 e}.$$

12.Ⓓ $z = (1 + i\sqrt{3})e^{5i\pi/12}$

Kako je

$$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

to se zadati kompleksni broj može predstaviti u sledećem obliku

$$z = (1 + i\sqrt{3})e^{5i\frac{\pi}{12}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}e^{5i\frac{\pi}{12}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{12}\right)} = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

13.Ⓓ Zadata jednačina se za $x^2 \neq -1$ može predstaviti u sledećem ekvivalentnom obliku

$$x + \frac{10x}{x^2+1} = 6 \Leftrightarrow x(x^2+1) + 10x = 6(x^2+1)$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

Ako su x_1, x_2, x_3 koreni gornje jednačine, to se leva strana jednačine može predstaviti u sledećem obliku

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2(x_1+x_2+x_3) + x(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1) - x_1x_2x_3 = 0$$

Izjednačavanjem koeficijenata sa leve i desne strane izraza

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = x^3 - x^2(x_1+x_2+x_3) + x(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1) - x_1x_2x_3$$

dobijamo

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1x_2x_3 = 6$$

te konačno dobijamo

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_1x_2x_3 = 6 - 6 = 0.$$

14.Ⓒ Neka su tangente date jednačinom $y = kx + n$. Tražimo sve vrednosti k i n za koje su ove krive zajedničke tangente zadatih krivih

$$9x^2 + 12y^2 = 108$$

$$9x^2 - 20y^2 = 180$$

Kako tangente imaju tačno jednu dodirnu tačku sa svakom od dveju krivih, to svaki od sistema jednačina

$$\begin{cases} 9x^2 + 12y^2 = 108 \\ y = kx + n \end{cases}$$

i

$$\begin{cases} 9x^2 - 20y^2 = 180 \\ y = kx + n \end{cases}$$

mora imati tačno jedno rešenje.

Iz prvog sistema jednačina dobijamo kvadratnu jednačinu po promenljivoj x

$$9x^2 + 12(kx+n)^2 = 108 \Leftrightarrow (9+12k^2)x^2 + 24knx + 12(n^2-9) = 0$$

koja će imati tačno jedno rešenje ako je njena diskriminanta jednaka nuli

$$D = (24kn)^2 - 48(9+12k^2)(n^2-9) = 0 \Rightarrow n^2 - 12k^2 - 9 = 0$$

Slično, iz drugog sistema jednačina dobijamo kvadratnu jednačinu po promenljivoj x

$$9x^2 - 20(kx+n)^2 = 180 \Leftrightarrow n^2 - 12k^2 - 9 = 0$$

koja će imati tačno jedno rešenje ako je njena diskriminanta jednaka nuli

$$D = (40kn)^2 + 80(9-20k^2)(n^2+9) = 0 \Rightarrow n^2 - 20k^2 + 9 = 0$$

Sada imamo sistem kvadratnih jednačina po promenljivim k i n:

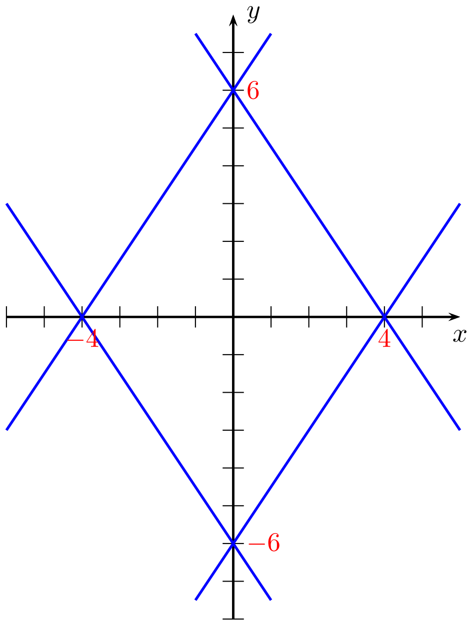
$$\begin{cases} n^2 - 12k^2 - 9 = 0 \\ n^2 - 20k^2 + 9 = 0 \end{cases}$$

Oduzimanjem ovih jednačina se ima

$$8k^2 = 18 \Rightarrow k^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow k = \pm\frac{3}{2}$$

i smenom vrednosti za k u prvoj jednačini imamo

$$n^2 = 12k^2 + 9 = 12 \cdot \frac{9}{4} + 9 = 36 \Rightarrow n = \pm 6$$



Dakle, postoje četiri zajedničke tangente zadatih krivih koje se mogu predstaviti u obliku

$$y = kx + n = \pm\frac{3}{2}x \pm 6$$

i grafički se mogu predstaviti kao na slici.

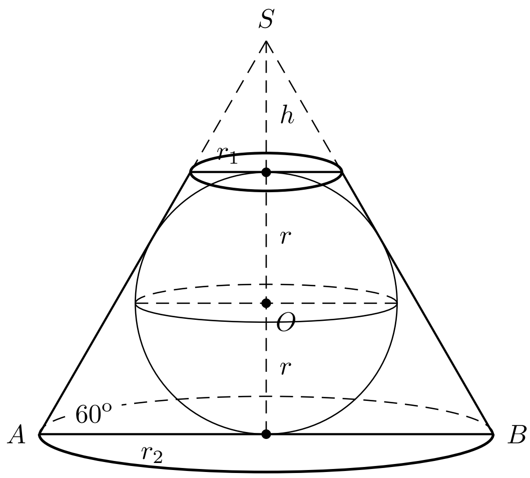
Površina četvorougla koji grade ove četiri tangente se može izračunati kao suma četiri pravougla trougla, čije su dužine kateta 6 i 4 (videti sliku) :

$$P = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4\right) = 48.$$

---

15. Ⓔ

Kako izvodnice kupe sa ravni osnove kupe grade ugao od 60°, to je trougao ABS (u preseku kupe) jednakostranični dužine stranica $a = 2r_2$ gde je r_2 poluprečnik osnove kupe. Centar upisane lopte O je težište trougla ABS koje deli visinu $H = a\frac{\sqrt{3}}{2} = r_2\sqrt{3}$ u srazmeri $1 : 2$. Odavde dobijamo $h + r = 2r$ odakle sledi $h = r$, gde je r poluprečnik upisane lopte. I kako je $H = h + 2r = 3r \Rightarrow 3r = r_2\sqrt{3} \Rightarrow r_2 = r\sqrt{3}$. Iz sličnosti jednakostraničnih trouglova koje grade velika i mala osnova zarubljene kupe imamo



$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{h}{H} = \frac{1}{3} \Rightarrow r_1 = \frac{1}{3}r_2 = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

Zapremina zarubljene kupe se sada može izraziti na sledeći način

$$V_1 = \frac{1}{3}(B_2H - B_1h) = \frac{1}{3}(r_2^2\pi H - r_1^2\pi h)$$

gde smenom $r_2 = r\sqrt{3}$, $r_1 = \frac{r}{\sqrt{3}}$, $H = 3r$ i $h = r$, dobijamo

$$V_1 = \frac{\pi}{3}\left((r\sqrt{3})^2 \cdot 3r - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}r\right)^2 \cdot r\right) = \frac{26}{9}r^3\pi$$

Zapremina upisane lopte je

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

te se za odnos zapremina zarubljene kupe i lopte dobija

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{26}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{13}{6}.$$

16.Ⓒ

$$\log_{x+1}\left(x-\frac{1}{2}\right) \leq \log_{x-\frac{1}{2}}(x+1)$$

Kako argument logaritamske funkcije mora biti pozitivan a osnova pozitivna i različita od jedan, to se rešenja mogu naći u skupu brojeva koji zadovoljavaju sledeće uslove

$$x-\frac{1}{2}>0 \Rightarrow x>\frac{1}{2}$$

$$x+1>0 \Rightarrow x>-1$$

$$x-\frac{1}{2}\neq 1 \Rightarrow x\neq\frac{3}{2}$$

$$x+1\neq 1 \Rightarrow x\neq 0$$

što u preseku daje

$$x\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$$

Zadatu nejednačinu možemo predstaviti u sledećem obliku

$$\frac{\log(x+1)}{\log\left(x-\frac{1}{2}\right)} \leq \frac{\log\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\log(x+1)}$$

Razlikujemo sledeća dva slučaja

- $x\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

  U ovom slučaju važi

$$x+1>1 \Rightarrow \log(x+1)>0$$

$$x-\frac{1}{2}<1 \Rightarrow \log\left(x-\frac{1}{2}\right)<0$$

  te množenjem leve i desne strane poslednje nejednačine sa $\log(x+1)\log\left(x-\frac{1}{2}\right)<0$ dobijamo

$$\left(\log\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2 \geq (\log(x+1))^2$$

$$\left(\log\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2 - (\log(x+1))^2 \geq 0$$

$$\underbrace{\left(\log\left(x-\frac{1}{2}\right)-\log(x+1)\right)}_{<0}\left(\log\left(x-\frac{1}{2}\right)+\log(x+1)\right) \geq 0$$

$$\log\left(x-\frac{1}{2}\right)+\log(x+1) \leq 0$$

$$\log\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)\right) \leq \log 1$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1) \leq 1 \Leftrightarrow x^2+\frac{x}{2}-\frac{3}{2} \leq 0$$

  Rešenje poslednje kvadratne nejednačine je

$$x\in\left[-\frac{3}{2},1\right]$$

  što u preseku sa $x\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ daje

$$x\in\left(\frac{1}{2},1\right].$$

- $x \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$

  U ovom slučaju važi

$$x+1>1 \Rightarrow \log(x+1)>0$$

$$x-\frac{1}{2}>1 \Rightarrow \log\left(x-\frac{1}{2}\right)>0$$

te množenjem leve i desne strane poslednje nejednačine sa $\log(x+1)\log\left(x-\frac{1}{2}\right)>0$ dobijamo

$$\left(\log\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2 \leq (\log(x+1))^2$$

$$\left(\log\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2 - (\log(x+1))^2 \leq 0$$

$$\left(\log\left(x-\frac{1}{2}\right)-\log(x+1)\right)\underbrace{\left(\log\left(x-\frac{1}{2}\right)+\log(x+1)\right)}_{>0} \leq 0$$

$$\log\left(x-\frac{1}{2}\right)-\log(x+1) \leq 0$$

$$\log\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{x+1}\right) \leq \log 1$$

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow x-\frac{1}{2} \leq x+1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow \top$$

Dakle poslednja nejednačina je ispunjena za sve

$$x \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

Konačno, sva rešenja zadate nejednačine su data sa

$$x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

17.Ⓒ Označimo grupe sa A i B. 10 studenata delimo u ove dve grupe tako da je u svakoj grupi neparan broj studenata:

grupa A	grupa B	broj načina
1	9	$\binom{10}{1}$
3	7	$\binom{10}{3}$
5	5	$\binom{10}{5}$
7	5	$\binom{10}{7}=\binom{10}{3}$
9	1	$\binom{10}{9}=\binom{10}{1}$

Sada je ukupan broj načina jednak

$$2\binom{10}{1}+2\binom{10}{3}+\binom{10}{5}=20+240+252=512.$$

18.Ⓒ

$$z^3 = \bar{z}, z \in \mathbb{C}$$

Predstavimo kompleksni broj z u polarnom obliku

$$z = re^{i\varphi}, \quad r, \varphi \in \mathbb{R}, \quad r > 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

Kako je

$$z^3 = \left(re^{i\varphi}\right)^3 = r^3 e^{3i\varphi}$$

i kako za kompleksno konjugovani broj imamo

$$\bar{z} = \overline{re^{i\varphi}} = re^{-i\varphi}$$

to se zadata jednačina može predstaviti u sledećem ekvivalentnom obliku

$$r^3 e^{3i\varphi} = re^{-i\varphi} \Leftrightarrow r^3 e^{4i\varphi} - r = 0$$
$$r\left(\left(re^{2i\varphi}\right)^2 - 1\right) = 0$$
$$r\left(re^{2i\varphi} - 1\right)\left(re^{2i\varphi} + 1\right) = 0$$

odakle dobijamo tri mogućnosti

- $r = 0 \Rightarrow z = 0$
- $re^{2i\varphi} - 1 = 0 \Leftrightarrow re^{2i\varphi} = 1 \cdot e^{i2k\pi}, k \in \mathbb{Z}$ odakle sledi

$$r = 1$$
$$\varphi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

i kako je $\varphi \in [0, 2\pi)$ to imamo dva moguća rešenja za $k = 0, 1$

$$\varphi = 0 \Rightarrow z = 1e^{i \cdot 0} = 1$$
$$\varphi = \pi \Rightarrow z = 1e^{i \cdot \pi} = -1$$

- $re^{2i\varphi} + 1 = 0 \Leftrightarrow re^{2i\varphi} = 1 \cdot e^{i(2k+1)\pi}, k \in \mathbb{Z}$ odakle sledi

$$r = 1$$
$$\varphi = \frac{2k+1}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}$$

i kako je $\varphi \in [0, 2\pi)$ to imamo dva moguća rešenja za $k = 0, 1$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z = 1e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$
$$\varphi = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow z = 1e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$$

Odakle je ukupan broj rešenja zadate jednačine jednak 5:

$$z = 0, \pm 1, \pm i.$$

19.Ⓑ Tražimo rešenja sledeće jednačine na skupu $x \in [0, 2\pi]$:

$$\sin x + \cos x + \pi \sin x \cos x = 1$$

Kvadriranjem leve i desne strane transformisane jednačine

$$\sin x + \cos x = 1 - \pi \sin x \cos x$$

dobijamo

$$\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=1} + \underbrace{2\sin x \cos x}_{=\sin 2x} = 1 - \underbrace{2\pi \sin x \cos x}_{=\pi \sin 2x} + \pi^2 \underbrace{\sin^2 x \cos^2 x}_{=\frac{1}{4}\sin^2(2x)}$$
$$\sin 2x = \frac{\pi^2}{4}\sin^2 2x - \pi \sin 2x$$
$$\pi^2 \sin^2 2x - 4 \sin 2x(\pi + 1) = 0$$
$$\sin 2x\left(\pi^2 \sin 2x - 4(\pi + 1)\right) = 0$$

Odakle imamo dve mogućnosti

- $\sin 2x = 0$

$$\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

  Kako je $x \in [0, 2\pi]$ to su moguća rešenja za $k = 0, 1, 2, 3, 4$:

$$x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$$

  Proverom u početnoj jednačini dobijamo da jedino

$$x = 0, \frac{\pi}{2}, 2\pi$$

  zadovoljavaju jednačinu, dok za preostala dva rešenja

$$x = \pi, \frac{3\pi}{2}$$

  imamo

$$\sin x + \cos x + \pi \sin x \cos x = -1$$

  (što je posledica kvadriranja jednačine, kojim se ne dobija ekvivalentna jednačina i zato je provera mogućih rešenja bila neophodna).

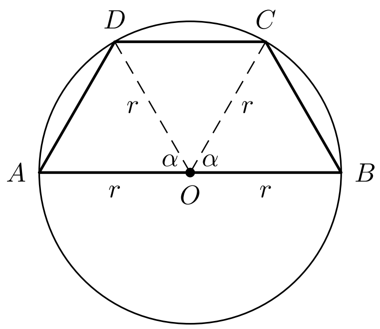
- $\sin 2x = \dfrac{4(\pi + 1)}{\pi^2}$

  Kako je $-1 \leq \sin 2x \leq 1$ i $\dfrac{4(\pi + 1)}{\pi^2} > 1$, to ova jednačina nema rešenja.

Konačno, ukupan broj rešenja na segmentu $x \in [0, 2\pi]$ je tri.

20.Ⓔ Na slici je prikazan trapez $ABCD$ upisan u kružnicu poluprečnika $r = d/2$ tako da je veća osnova trapeza prečnik kružnice. Neka je ugao $\angle AOD = \angle BOC = \alpha$. Za ugao $\angle COD$ dobijamo

$$\angle COD = \pi - 2\alpha$$



Površina trapeza $ABCD$ se može izraziti kao suma površina trouglova AOD, BOC i COD za koje važi

$$P_{AOD} = \frac{1}{2} AO \cdot DO \sin \angle AOD = \frac{1}{2} r^2 \sin \alpha$$

$$P_{BOC} = \frac{1}{2} BO \cdot CO \sin \angle BOC = \frac{1}{2} r^2 \sin \alpha$$

$$P_{COD} = \frac{1}{2} CO \cdot DO \sin \angle COD = \frac{1}{2} r^2 \sin(\pi - 2\alpha) = \frac{1}{2} r^2 \sin(2\alpha)$$

Sada za površinu trapeza kao funkciju ugla α imamo

$$P = P_{AOD} + P_{BOC} + P_{COD} = r^2 \sin \alpha + \frac{1}{2} r^2 \sin(2\alpha)$$

Tražimo ugao α za koji je površina trapeza maksimalna. Ona se dobija za uslov da je izvod izraza za površinu po promenljivoj α jednak nuli.

Najpre, za izvod izraza za površinu dobijamo

$$P' = \left(r^2 \sin\alpha + \frac{1}{2}r^2\sin(2\alpha)\right)' = r^2\left((\sin\alpha)' + \frac{1}{2}(\sin(2\alpha))'\right) = r^2\left(\cos\alpha + \frac{1}{2}\cdot\cos(2\alpha)\cdot 2\right) = r^2(\cos\alpha+\cos(2\alpha))$$

Dalje iz

$$P' = 0$$

dobijamo jednačinu

$$\cos\alpha + \cos(2\alpha) = 0$$

Uzimajući u obzir da važi

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\sin^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$$

jednačina postaje

$$2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0$$

Uvođenjem smene $t = \cos\alpha, \quad \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [0,1]$, dobijamo kvadratnu jednačinu po promenljivoj t

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

čija su rešenja

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

odakle se ima da je jedino moguće rešenje

$$t_0 = \cos\alpha_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_0 = \frac{\pi}{3}$$

Za ugao $\alpha = \alpha_0 = \frac{\pi}{3}$ imamo

$$\sin\alpha_0 = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2\alpha_0 = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

i površina trapeza je maksimalna i iznosi

$$P_{\max} = r^2\sin\alpha_0 + \frac{1}{2}r^2\sin(2\alpha_0) = r^2\frac{\sqrt{3}}{2} + r^2\frac{\sqrt{3}}{4} = r^2\frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{16}d^2.$$

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE ZA UPIS NA ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET 2021

1. Učenik je pročitao knjigu za 20 dana, tako što je svakog dana čitao 45 minuta. Za koliko dana bi pročitao istu knjigu da je dnevno čitao jedan sat?

(A) 18 (B) 26 (C) 14 (D) 12 (E) 15 (N) Ne znam

2. Koje od sledećih nejednakosti su tačne?

(i) $\sqrt[3]{3} < \sqrt{2}$ (ii) $\sqrt[3]{3+\sqrt{3}} < \sqrt{2+\sqrt{2}}$ (iii) $3\sqrt{5} < 5\sqrt{3}$

(iv) $\sqrt{12} + 3\sqrt{75} < 2\sqrt{48} + 5\sqrt{3}$ (v) $\sqrt{9+4\sqrt{5}} < \sqrt{19-8\sqrt{3}}$

(A) Samo (iii) (B) (ii) i (iii) (C) (ii), (iii) i (iv)

(D) (ii), (iii) i (v) (E) (i), (ii) i (v) (N) Ne znam

3. Neka je data funkcija $f(x) = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$. Koja od sledećih tvrđenja su tačna?

(i) Važi da je $f(0) = 0$.

(ii) Funkcija f je neparna.

(iii) Funkcija f je definisana na skupu $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, gde je $\mathbb{R}$ skup realnih brojeva.

(iv) Za svako $x \neq 0$ koje pripada domenu funkcije f važi da je $f(2x+1) + f(2x-1) = f(x)$.

(v) Za svako x takvo da x, $2x$ i $3x$ pripadaju domenu funkcije f važi da je $f(3x) - f(2x) = f(x)$.

(A) (i), (ii) i (iii) (B) (i), (ii) i (iv) (C) (i), (ii) i (v)

(D) (i), (iii) i (iv) (E) (ii) i (v) (N) Ne znam

4. Broj sabiraka u razvijenom obliku izraza $(a+b+c)^{10}$ jeste:

(A) 11 (B) 33 (C) 55 (D) 66 (E) 132 (N) Ne znam

5. Ako su površine strana kvadra 12 cm^2, 8 cm^2 i 6 cm^2, onda je njegova zapremina:

(A) 24 cm^3 (B) 96 cm^3 (C) 48 cm^3 (D) 56 cm^3 (E) 36 cm^3 (N) Ne znam

6. Broj svih realnih rešenja jednačine $x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$ jeste:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4 (N) Ne znam

7. Skup svih realnih rešenja nejednačine $\ln(x+1) > x^2 + 3x + 3$ je oblika (za neke realne brojeve a, b takve da je $-1 < a < b < +\infty$):

(A) $(-1, a) \cup (b, +\infty)$ (B) $(-1, a)$

(C) (a, b) (D) $(a, +\infty)$

(E) Nijedan od prethodno ponuđenih odgovora (N) Ne znam

8. Koliko jednakih članova imaju aritmetičke progresije $2, 7, 12, 17, \ldots$ i $2, 5, 8, 11, \ldots$ ako svaka od njih ima 121 član?

(A) 15 (B) 17 (C) 24 (D) 25 (E) 40 (N) Ne znam

9. Vrednost izraza $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}$ jeste:

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{1}{4}$ (E) 0 (N) Ne znam

10. Skup svih realnih rešenja nejednačine $\frac{\arccos(x^2-3x+1)}{8x^2-10x+3} > 0$ je oblika (za neke realne brojeve a, b, c, d, e, f takve da je $-\infty < a < b < c < d < e < f < +\infty$):

(A) $(a,b) \cup [c,d) \cup (d,e]$ (B) $(a,b]$ (C) (a,b)

(D) $(a,b] \cup [c,d)$ (E) $(a,b) \cup (c,d] \cup [e,f)$ (N) Ne znam

11. Tačke $A(-2,2)$ i $B(2,-2)$ su temena trougla ABC, a $N(1,2)$ je presek visina tog trougla. Zbir koordinata temena C jednak je:

(A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) 9 (E) 11 (N) Ne znam

12. Dat je konveksan četvorougao $ABCD$ u kojem je $\angle ABD = 50^o$, $\angle ADB = 80^o$, $\angle ACB = 40^o$ i $\angle DBC = \angle BDC + 30^o$. Tada je $\angle DBC$ jednak:

(A) 40^o (B) 45^o (C) 55^o (D) 65^o (E) 70^o (N) Ne znam

13. Skup svih realnih rešenja nejednačine $4^x \leq 3 \cdot 2^{\sqrt{x}+x} + 4^{1+\sqrt{x}}$ je oblika (za neke realne brojeve a, b, c takve da je $-\infty < a < b < c < +\infty$):

(A) $(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$ (B) $(a,b]$ (C) $[a,b]$

(D) $[a,b] \cup [c,+\infty)$ (E) $(a,b] \cup [c,+\infty]$ (N) Ne znam

14. Na koliko načina dve osobe, A i B, mogu da podele 8 različitih knjiga, ukoliko ne moraju sve knjige biti podeljene, osoba A mora da dobije bar jednu knjigu, dok osoba B ne mora da dobije nijednu knjigu?

(A) 6305 (B) 6561 (C) 6732 (D) 6552 (E) 6256 (N) Ne znam

15. Neka je dat pravougli trougao čije su katete dužina a i b. Neka je nad svakom od stranica ovog pravouglog trougla konstruisan kvadrat. Ako spojimo temena ova tri kvadrata koja ne pripadaju trouglu dobijamo šestougao. Površina ovog šestougla jednaka je:

(A) $ab + \frac{5}{2}(a^2+b^2)$ (B) $2ab + \frac{3}{2}(a^2+b^2)$ (C) $5ab + (a^2+b^2)$

(D) $\frac{3}{2}ab + 2(a^2+b^2)$ (E) $2(a^2+ab+b^2)$ (N) Ne znam

16. Broj svih rešenja sistema jednačina $\sin^2 x + \sin^2 y = \frac{3}{4}$, $x + y = \frac{5\pi}{12}$ takvih da je $x \in (-\pi, 2\pi)$ i $y \in (-2\pi, \pi)$, jeste:

(A) 9 (B) 7 (C) 3 (D) 4 (E) 5 (N) Ne znam

17. Dvocifreni broj koji je jednak proizvodu zbira svojih cifara i apsolutne vrednosti razlike pripada intervalu:

(A) $[10,30]$ (B) $[31,50]$ (C) $[51,70]$ (D) $[71,80]$ (E) $[81,99]$ (N) Ne znam

18. Ostatak pri deljenju polinoma $P(x) = x^{2024}+x^{2023}+x^{2022}+x^{2021}+x^{20}+1$ polinomom $Q(x) = x^3+x^2+x+1$ jeste:

(A) x^2+1 (B) 2 (C) 0 (D) 1 (E) x^2-1 (N) Ne znam

19. Neka je data kvadratna jednačina $p^2x^2 + p^3x + 1 = 0$, p je pozitivan realan broj, i naka su x_1 i x_2 realna rešenja (realni koreni) date jednačine. Za koju vrednost parametra p izraz $x_1^4 + x_2^4$ dostiže svoju minimalnu vrednost?

(A) $\sqrt[8]{2}$ (B) $\sqrt[4]{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}$ (E) $\sqrt[4]{2-\sqrt{2}}$ (N) Ne znam

20. Granična vrednost $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x\cos(2x)\cos(3x)}{1-\cos x}$ jednaka je:

(A) 0 (B) 14 (C) 12 (D) 2 (E) 10 (N) Ne znam

REŠENJA

1. Ⓔ Ukupno vreme koje je učeniku neophodno da bi pročitao knigu je (u toku 20 dana, svakog dana čita knjigu 45 minuta, odnosno 3/4 h):

$$20 \cdot \frac{3}{4}\,\mathrm{h} = 15\,\mathrm{h}$$

Kad bi knjigu čitao jedan čas svakog dana, bilo bi mu neophodno 15 dana da je pročita.

---

2. Ⓑ

(i) $\sqrt[3]{3} < \sqrt{2}$

$$\sqrt[3]{3} < \sqrt{2} \Big/^{6} \Leftrightarrow 3^2 < 2^3 \Leftrightarrow 9 < 8 \Leftrightarrow \perp$$

(ii) $\sqrt[3]{3+\sqrt{3}} < \sqrt{2+\sqrt{2}}$

$$\sqrt[3]{3+\sqrt{3}} < \sqrt{2+\sqrt{2}} \Big/^{6} \Leftrightarrow (3+\sqrt{3})^2 < (2+\sqrt{2})^3 \Leftrightarrow 3\sqrt{3} < 4 + 7\sqrt{2} \Leftrightarrow \top$$

(iii) $3\sqrt{5} < 5\sqrt{3}$

$$3\sqrt{5} < 5\sqrt{3} \Big/^{2} \Leftrightarrow 9 \cdot 5 < 25 \cdot 3 \Leftrightarrow 3 < 5 \Leftrightarrow \top$$

(iv) $\sqrt{12} + 3\sqrt{75} < 2\sqrt{48} + 5\sqrt{3}$

$$\sqrt{12} + 3\sqrt{75} < 2\sqrt{48} + 5\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3 \cdot 2^2} + 3\sqrt{3 \cdot 5^2} < 2\sqrt{3 \cdot 4^2} + 5\sqrt{3} \Leftrightarrow 17\sqrt{3} < 13\sqrt{3} \Leftrightarrow \perp$$

(v) $\sqrt{9+4\sqrt{5}} < \sqrt{19-8\sqrt{3}}$

$$\sqrt{9+4\sqrt{5}} < \sqrt{19-8\sqrt{3}} \Big/^{2} \Leftrightarrow 9 + 4\sqrt{5} < 19 - 8\sqrt{3} \Leftrightarrow \underbrace{4\sqrt{5}}_{>0} < \underbrace{10 - 8\sqrt{3}}_{<0} \Leftrightarrow \perp$$

---

3. Ⓑ

$$f(x) = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

(i) $f(0) = 0$

$$f(0) = \ln\left|\frac{0-1}{0+1}\right| = \ln 1 = 0 \quad (\top)$$

(ii) Funkcija f je neparna: $f(-x) = f(x)$

$$f(-x) = \ln\left|\frac{-x-1}{-x+1}\right| = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = -\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = -f(x) \quad (\top)$$

(iii) Funkcija f je definisana na skupu $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, gde je $\mathbb{R}$ skup realnih brojeva.

Izraz u imeniocu mora biti različit od nule:

$$x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$$

Argument logaritamske funkcije mora biti veći od nule. Kako je apsolutna vrednost uvek veća ili jednaka nuli, prethodni uslov se svodi na

$$x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

Dakle funkcija je definisana za $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, +1\}$.

Sledi da je tvrđenje (iii) netačno.

(iv) Za svako $x \neq 0$ koje pripada domenu funkcije f važi da je $f(2x+1) + f(2x-1) = f(x)$.

$$f(2x+1)+f(2x-1) = \ln\left|\frac{2x+1-1}{2x+1+1}\right| + \ln\left|\frac{2x-1-1}{2x-1+1}\right| = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = f(x) \quad \top$$

(v) Za svako x takvo da x, $2x$ i $3x$ pripadaju domenu funkcije f važi da je $f(3x) - f(2x) = f(x)$.

$$f(3x) + f(2x) = \ln\left|\frac{3x-1}{3x+1}\right| - \ln\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right| = \ln\left|\frac{3x-1}{3x+1}\frac{2x+1}{2x-1}\right| \neq f(x)$$

4.Ⓓ Pogledajmo najpre razvijeni oblik prostijeg izraza $(a+b)^3$:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Sabirci u razvoju odgovaraju sledećim kombinacijama

$$a \cdot a \cdot a \qquad a \cdot a \cdot b \qquad a \cdot b \cdot b \qquad b \cdot b \cdot b$$

Dakle raspoređujemo dva elementa a i b na tri različite pozicije, gde redosled nije važan.

Ovo odgovara kombinacijama od $n = 2$ elementa (a i b), treće klase ($r = 3$) sa ponavljanjima, čiji je ukupan broj dat izrazom

$$K_n^r = \binom{n+r-1}{r}$$

$$K_2^3 = \binom{4}{3} = \binom{4}{1} = 4.$$

Za zadati izraz, imamo kombinacije od $n = 3$ elementa (a, b, i c), $r = 10$ klase sa ponavljanjima, čiji je ukupan broj dat izrazom

$$K_3^{10} = \binom{12}{10} = \binom{12}{2} = 66.$$

5.Ⓐ Označimo dužine stranica kvadra sa a, b i c. Površine strana kvadra se mogu izraziti u obliku

$$P_1 = ab, \quad P_2 = bc, \quad P_3 = ac$$

dok je njegova zapremina data izrazom

$$V = abc$$

Kako je

$$P_1P_2P_3 = (abc)^2 = V^2$$

to se za zapreminu dobija

$$V = \sqrt{P_1P_2P_3} = \sqrt{12 \cdot 8 \cdot 6} = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24\,\mathrm{cm}^3$$

6.Ⓑ

$$x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$$

Izraz sa desne strane je definisan u skupu realnih brojeva pod sledećim uslovima:

$$1 - \frac{1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$$

$$x - \frac{1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup [1, +\infty)$$

Što u preseku daje

$$x \in (-1, 0) \cup [1, +\infty)$$

Kako je desna strana jednačine uvek veća ili jednaka nuli, to i leva strana jednačine mora da zadovoljava uslov

$$x \geq 0$$

Odavde sledi da se rešenja zadate jednačine mogu naći u sledećem skupu realnih brojeva

$$x \in [1, +\infty)$$

Označimo $a = \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$. Sada je

$$\sqrt{x - \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x}} = \sqrt{(x+1)\frac{x-1}{x}} = \sqrt{(x+1)\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = a\sqrt{x+1}$$

te jednačina dobija oblik

$$x = a + a\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x - a = a\sqrt{x+1} \Rightarrow (x-a)^2 = a^2(x+1) \Leftrightarrow x(x - a(a+1)) = 0$$

Poslednja jednačina ima dva rešenja: $x = 0$ koje ne pripada domenu jednačine $x \geq 1$, i

$$x = a(a+2) = 1 - \frac{1}{x} + 2\sqrt{1 - \frac{1}{x}}$$

$$x + \frac{1}{x} - 1 = 2\sqrt{1 - \frac{1}{x}} \Big/^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\left(x - \frac{1}{x}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 - 2\left(x - \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x - \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$

$$\left(\left(x - \frac{1}{x}\right) - 1\right)^2 = 0$$

što se konačno svodi na

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Od dva rešenja ove jednačine

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

samo rešenje sa pozitivnim znakom $x_2 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} > 1$ pripada domenu jednačine. Dakle ova jednačina ima samo jedno rešenje u skupu realnih brojeva.

7.Ⓔ

Kako je za sve $x \in \mathbb{R}$ ispunjeno

$$\mathrm{e}^x > x$$

to sledi

$$\mathrm{e}^{x^2+3x+3} > x^2 + 3x + 3 = (x+1)^2 + 2(x+1) > x + 1, \quad x > -1$$

Uzimanjem logaritma leve i desne strane nejednakosti (koje su pozitivne za $x > -1$) dobijamo

$$\ln\left(\mathrm{e}^{x^2+3x+3}\right) > \ln(x+1)$$

odnosno

$$x^2 + 3x + 3 > \ln(x+1)$$

Što znači da zadata nejednačina

$$\ln(x+1) > x^2 + 3x + 3$$

nema rešenja.

8.Ⓓ Zadate aritmetičke progresije se mogu izraziti u sledećem obliku

$$2, 7, 12, 17, ... \Rightarrow a_m = 2 + 5m, m = 0, 1, 2, \ldots, 120$$

$$2, 5, 8, 11, ... \Rightarrow b_n = 2 + 3n, n = 0, 1, 2, \ldots, 120$$

Tražimo koliko je članova ove dve progresije jednako

$$a_m = b_n \Leftrightarrow 5m = 3n \Leftrightarrow m = \frac{3n}{5}$$

Odakle sledi da n mora biti deljivo sa 5 (i m mora biti deljivo sa 3). Označimo $n = 5k, k \in \mathbb{N}_0$.
Kako je $n \leq 120$, to je $k \leq 120/5 = 24$, to ukupno ima 25 članova koji zadovoljavaju zadati uslov

$$a_m = b_n = 2 + 15k, k = 0, 1, 2, \ldots, 24$$

9.Ⓑ

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = ?$$

Koristićemo sledeće trigonometrijske identitete

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

Sada imamo

$$\cos\frac{3\pi}{7} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{7}\right) = \sin\frac{\pi}{14}$$

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} = 2\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{\pi}{14}$$

$$\sin\frac{3\pi}{14} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{14}\right) = \cos\frac{2\pi}{7}$$

te se dobija

$$\begin{aligned}
\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} &= \sin\frac{\pi}{14}\left(2\cos\frac{2\pi}{7} + 1\right) = \sin\frac{\pi}{14}\left(\underbrace{\cos\frac{2\pi}{7} + 1}_{2\cos^2\frac{\pi}{7}} + \cos\frac{2\pi}{7}\right) \\
&= 2\sin\frac{\pi}{14}\cos^2\frac{\pi}{7} + \sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{2\pi}{7} = \frac{2\sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14}\cos^2\frac{\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{14}} + \frac{\sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{2\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{14}} \\
&= \frac{\sin\frac{\pi}{7}\cos^2\frac{\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{14}} + \frac{\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}}{2\cos\frac{\pi}{14}} = \frac{\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}{2\cos\frac{\pi}{14}} + \frac{\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}}{2\cos\frac{\pi}{14}} \\
&= \frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{2\cos\frac{\pi}{14}} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{7}\right)}{2\cos\frac{\pi}{14}} = \frac{\cos\frac{\pi}{14}}{2\cos\frac{\pi}{14}} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

---

10. Ⓔ

$$\frac{\arccos(x^2-3x+1)}{8x^2-10x+3}>0$$

Funkcija $\alpha = \arccos x$ preslikava skup realnih brojeva $x \in [-1,1]$ na skup $\alpha \in [0,\pi]$.

Dakle, $\arccos x \geq 0, \quad x \in [-1,1]$ gde znak jednakosti važi za $x = 1$.

Iz uslova $-1 \leq x^2 - 3x + 1 < 1$ dobijamo

$$x^2-3x+1 \geq -1 \Leftrightarrow x^2-3x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,1] \cup [2,+\infty)$$

$$x^2-3x+1 < 1 \Leftrightarrow x^2-3x < 0 \Leftrightarrow x \in (0,3)$$

što u preseku daje

$$x \in (0,1] \cup [2,3)$$

Kako je brojilac na levoj strani zadate nejednačine uvek pozitivan, to isto mora važiti za imenilac

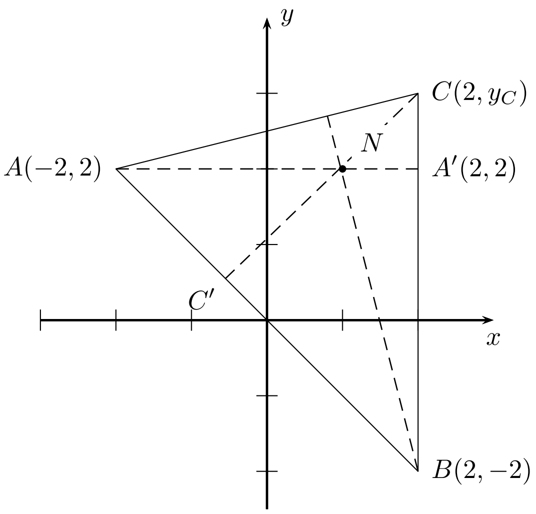
$$8x^2-10x+3>0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty,\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{4},+\infty\right)$$

odakle se iz prethodnog uslova dobija da je rešenje zadate nejednačine oblika

$$x \in \left(0,\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{4},1\right] \cup [2,3)$$

---

11. Ⓑ Na slici je prikazan trougao ABC sa temenima u tačkama $A(-2,2)$ i $B(2,-2)$ i sa tačkom $N(1,2)$ koja je presek visina tog trougla.



Kako je duž AA' paralelna x-osi i istovremeno (kao visina nad stranicom BC) normalna na stranicu BC, to je stranica BC paralelna y osi i mora da važi $A'(2,2)$ i $C(2,y_C)$.

Trougao $AA'B$ je jednakokraki pravougli trougao sa sa katetama čije su dužine $AA' = BA' = 4$ i uglom $\angle BAA' = \angle ABA' = 45^\circ$. Dalje sledi da je trougao $AC'N$ takođe jednakokraki pravougli trougao sa uglom $\angle ANC' = 45^\circ$. Odavde dobijamo da je trougao CNA' jednakokraki pravougli trougao jer je $\angle CNA' = \angle ANC' = 45^\circ$.

Sada sledi

$$CA' = NA' = 1$$

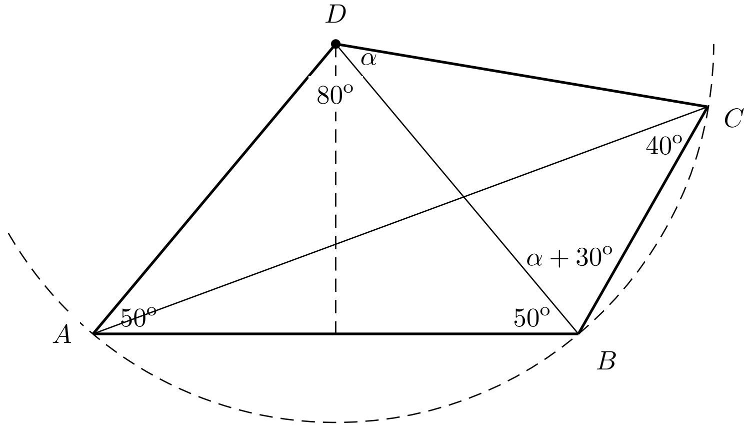
i

$$BC = BA' + CA' = 4 + 1 = 5$$

odakle se za y-koordinatu temena C dobija: $y_C = y_B + BC = -2 + 5 = 3$ te je zbir koordinata temena C:

$$x_C + y_C = 2 + 3 = 5.$$

12.Ⓔ



Na slici je prikazan konveksni četvorougao $ABCD$ za čije uglove po uslovu zadatka važi $\angle ABD = 50^{\circ}, \angle ADB = 80^{\circ}, \angle ACB = 40^{\circ}, \angle BDC = \alpha, \angle DBC = \alpha + 30^{\circ}$.

Iz trougla DAB za ugao $\angle DAB$ dobijamo

$$\angle DAB = 180^{\circ} - \angle ABD - \angle ADB = 180^{\circ} - 50^{\circ} - 80^{\circ} = 50^{\circ}$$

odakle sledi da je trougao DAB jednakokrak. Označimo dužinu kraka ovog trougla $DA = DB = R$.

Opišimo kružnicu poluprečnika R sa centrom u temenu D. Kako je DAB jednakokraki trougao, to će AB biti tetiva ove kružnice. Centralni ugao nad ovom tetivom je $\angle ADB = 80^{\circ}$. Kako je $\angle ACB$ ugao nad ovom tetivom i $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle ADB = 40^{\circ}$, to je ugao $\angle ACB$ periferni ugao nad tetivom AB i sledi da teme C takođe pripada ovoj kružnici. To ujedno znači da su dužine stranica DB i DC jednake R te je trougao DBC jednakokraki, odnosno $\angle DBC = \angle DCB = \alpha + 30^{\circ}$.

Za uglove trougla DBC dalje imamo

$$\angle DBC + \angle DCB + \angle BDC = 180^{\circ}$$

$$2(\alpha + 30^{\circ}) + \alpha = 180^{\circ} \Leftrightarrow 3\alpha = 120^{\circ} \Leftrightarrow \alpha = 40^{\circ}.$$

$$\angle DBC = \alpha + 30^{\circ} = 70^{\circ}.$$

13.Ⓒ Za $x \geq 0$ transformacijom zadate nejednačine redom dobijamo

$$4^{x} \leq 3 \cdot 2^{\sqrt{x}+x} + 4^{1+\sqrt{x}}$$

$$2^{2x} \leq 3 \cdot 2^{x} \cdot 2^{\sqrt{x}} + 4 \cdot 2^{2\sqrt{x}}$$

$$2^{2x} + 2^{x} \cdot 2^{\sqrt{x}} \leq 4 \cdot 2^{x} \cdot 2^{\sqrt{x}} + 4 \cdot 2^{2\sqrt{x}}$$

$$2^{x}\left(2^{x} + 2^{\sqrt{x}}\right) \leq 4 \cdot 2^{\sqrt{x}}\left(2^{x} + 2^{\sqrt{x}}\right)$$

Kako je $2^{x} + 2^{\sqrt{x}} > 0$ to se poslednja nejednačina svodi na

$$2^{x} \leq 4 \cdot 2^{\sqrt{x}}$$

Primenom logaritma osnove 2 na levu i desnu stranu ove nejednačine (od kojih je svaka pozitivna) dalje dobijamo

$$\log_2 2^{x} \leq \log_2\left(4 \cdot 2^{\sqrt{x}}\right) = \log_2 2^{2} + \log_2 2^{\sqrt{x}}$$

$$x \leq 2 + \sqrt{x}$$

Uvođenjem smene $t = \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow t^{2} = x$ dalje dobijamo

$$t^{2} \leq 2 + t \Leftrightarrow t^{2} - t - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (t-2)(t+1) \leq 0 \Leftrightarrow t \in [-1, 2]$$

Kako je $t \geq 0$ to sledi da je rešenje dato izrazom $t \in [0, 2]$.

Vraćanjem nazad smene $x = t^{2}$ dobijamo $x \in [0, 4]$.

14.Ⓐ Osam knjiga delimo osobama A i B tako da osoba A mora da dobije bar jednu knjigu, dok osoba B ne mora da dobije nijednu knjigu.

Izračunajmo najpre na koliko različitih načina možemo podeliti osam knjiga tako da ni osoba A ni osoba B ne moraju da dobiju nijednu knjigu. U ovom slučaju svaku knjigu možemo dodeliti ili osobi A, ili osobi B, ili nijednoj osobi 0. Dakle imamo osam pozicija koje odgovaraju osam različitih knjiga, i svakoj poziciji možemo dodeliti ili A ili B ili 0. Ovo odgovara varijacijama sa ponavljanjem od $n = 3$ elementa (A, B, 0) klase $r = 8$, čiji je ukupni broj dat sa

$$V_n^r = n^r \Rightarrow V_3^8 = 3^8 = 6561$$

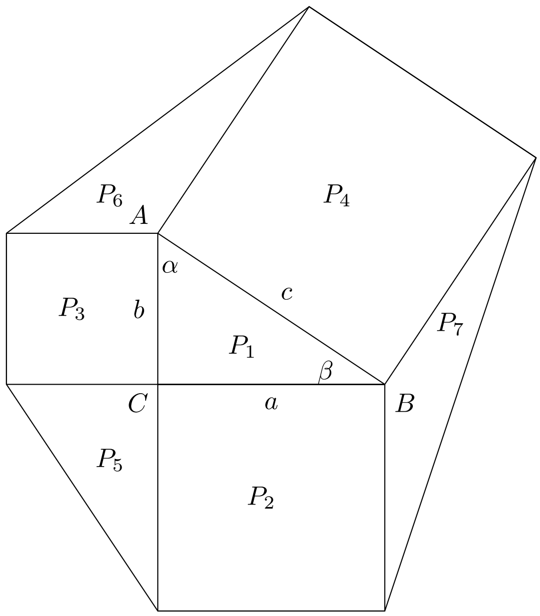
Odavde treba oduzeti broj svih mogućnosti u kojima osoba A nije dobila nijednu knjigu (jer po uslovima zadatka A mora dobiti bar jednu knjigu) uključujući i mogućnost da ni osoba B nije dobila nijednu knjigu. U ovom slučaju svaku od osam knjiga dodeljujemo ili osobi B ili nijednoj osobi 0. Ovo odgovara varijacijama sa ponavljanjem od $n = 2$ elementa (B, 0) klase $r = 8$, čiji je ukupni broj dat sa

$$V_2^8 = 2^8 = 256$$

Konačno za ukupan broj načina dobijamo

$$3^8 - 2^8 = 6561 - 256 = 6305$$

15.Ⓔ Označimo kao na slici površinu trougla ABC sa katetama dužine a i b i hipotenuzom dužine c, i sa uglovima nad osnovicom α i β sa P_1. Neka su površine kvadrata nad katetama a, b i hipotenuzom c redom P_2, P_3 i P_4. I neka su površine preostalih trouglova sa temenima u C, A i B redom P_5, P_6 i P_7.



Ukupna površina šestougla sa slike data je zbirom ovih površina

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7$$

gde je

$$P_1 = \frac{1}{2}ab$$

$$P_2 = a^2$$

$$P_3 = b^2$$

$$P_4 = c^2 = a^2 + b^2$$

$$P_5 = \frac{1}{2}ab$$

Kako je u trouglu P_6 ugao kod temena A jednak $180^{\circ} - \alpha$ i stranice su dužine b i c, za njegovu površinu dobijamo

$$P_6 = \frac{1}{2} bc \sin(180^{\circ} - \alpha) = \frac{1}{2} b \underbrace{c \sin(\alpha)}_{=a} = \frac{1}{2} ab$$

Slično za trougao P_7 u kome je ugao kod temena B jednak $180^{\circ} - \beta$ i stranice su dužine a i c, dobijamo

$$P_7 = \frac{1}{2} ac \sin(180^{\circ} - \beta) = \frac{1}{2} a \underbrace{c \sin(\beta)}_{=b} = \frac{1}{2} ab$$

Sada konačno dobijamo

$$P = \frac{1}{2}ab + a^2 + b^2 + (a^2 + b^2) + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab = 2(a^2 + b^2 + ab).$$

---

16. D

$$\sin^2 x + \sin^2 y = \frac{3}{4}, \qquad x + y = \frac{5\pi}{12}$$

$x \in (-\pi, 2\pi)$ i $y \in (-2\pi, \pi)$

Iz druge jednačine zadatog sistema dobijamo

$$y = \frac{5\pi}{12} - x$$

Kako je $-2\pi < y < \pi$ to dalje sledi

$$\frac{5\pi}{12} - x > -2\pi \Leftrightarrow x < 2\pi + \frac{5\pi}{12}$$

$$\frac{5\pi}{12} - x < \pi \Leftrightarrow x > -\frac{7\pi}{12}$$

što u preseku sa $x \in (-\pi, 2\pi)$ daje

$$-\frac{7\pi}{12} < x < 2\pi$$

Zamenom y u prvoj jednačini dobijamo

$$\sin^2 x + \sin^2 \left(\frac{5\pi}{12} - x\right) = \frac{3}{4}$$

Kako je $\frac{\pi}{2} - \left(\frac{5\pi}{12} - x\right) = x + \frac{\pi}{12}$ i $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$ to se dalje dobija

$$\sin^2 x + \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{3}{4}$$

Korišćenjem identiteta

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

dalje dobijamo

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

Koristeći identitet

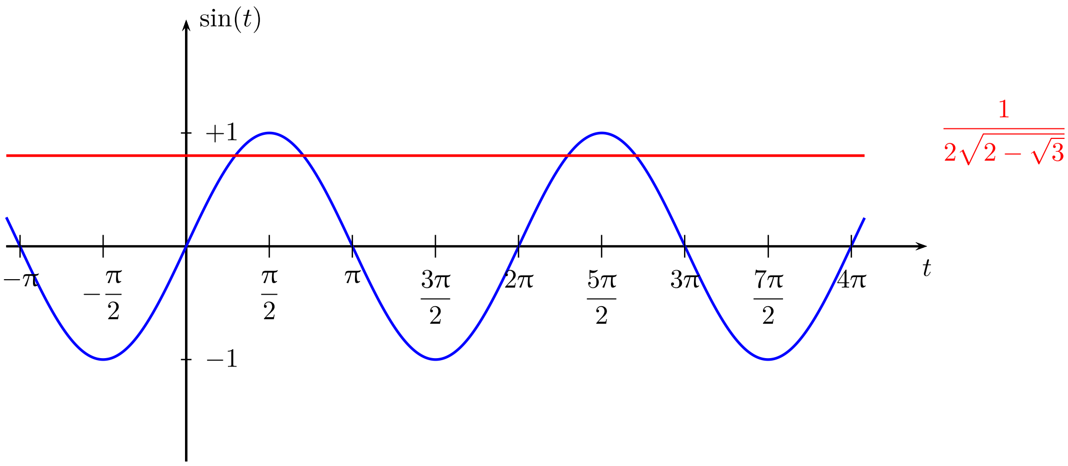
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \sin\frac{\alpha + \beta}{2} \frac{\alpha - \beta}{2}$$

za levu stranu poslednje jednačine važi

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos 2x = -2 \sin\frac{\pi}{12} \sin\left(2x + \frac{\pi}{12}\right)$$

i kako je

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 - \cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$



dobijamo

$$2\sin\frac{\pi}{12}\sin\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}$$
$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

Uvođenjem smene $t=2x+\frac{\pi}{12}$, gde za $-\frac{7\pi}{12}<x<2\pi$ važi $-\pi-\frac{\pi}{12}<t<4\pi+\frac{\pi}{12}$ imamo jednačinu

$$\sin t=\frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

Kako je $0<\frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}<1$ to se sa grafika vidi da ova jednačina ima četiri rešenja za promenljivu t na intervalu$-\pi-\frac{\pi}{12}<t<4\pi+\frac{\pi}{12}$. Toliki je i broj rešenja zadatog sistema jednačina po promenljivim x i y.

17.Ⓑ Označimo traženi dvocifreni broj sa $10a+b$ gde je $a=1,2,\ldots,9$ i $b=0,1,2,\ldots,9$.
Prema uslovima zadatka važi

$$10a+b=(a+b)|a-b|$$

Razlikujemo dva slučaja:

1. $a>b\Rightarrow|a-b|=a-b$

   Gornja jednačina postaje

   $$10a+b=a^2-b^2\Leftrightarrow a^2-10a=b^2+b\Leftrightarrow a(a-10)=b(b+1)$$

   Kako je $1\le a\le 9$, sledi $a(a-10)<0$. Za $0\le b\le 9$ sledi $b(b+1)\ge 0$. Dakle, u ovom slučaju nema rešenja jer je leva strana jednačine uvek negativna a desna strana veća ili jednaka nuli.

2. $a\le b\Rightarrow|a-b|=b-a$

   Gornja jednačina postaje

   $$10a+b=b^2-a^2\Leftrightarrow a^2+10a=b^2-b\Leftrightarrow a(a+10)=b(b-1)$$

   Kako je leva strana poslednje jednačine pozitivna za sve $1\le a\le 9$, to i desna strana mora biti pozitivna, što znači $b\ge 2$, odnosno $2\le b\le 9$.

   Desna strana je proizvod dva uzastopna prirodna broja te mora biti paran broj. Leva strana takođe mora biti paran broj, odakle sledi da je a paran broj.

Kako je $2\le b\le 9$ to sledi

$$2\le b(b-1)\le 72$$

odnosno kako je a paran broj na intervalu $2\le a\le 8$ to važi

$$24\le a(a+10)\le 144$$

Dalje sledi

$$24 \leq a(a+10) = b(b-1) \leq 72$$

Uslov $a(a+10) \leq 72$ je ispunjen za $a \leq 4$ te imamo samo dve mogućnosti

- $a = 2 \Rightarrow a(a+10) = 24 = 6 \cdot 4 \neq b(b-1)$
- $a = 4 \Rightarrow a(a+10) = 56 = 8 \cdot 7 = b(b-1) \Rightarrow b = 8$

Dakle jedini dvocifreni broj koji ima zadatu osobinu je broj

$$48 = (4+8)(8-4) = 12 \cdot 4$$

18.Ⓑ Neka je $R(x)$ ostatak pri deljenju polinoma $P(x) = x^{2024} + x^{2023} + x^{2022} + x^{2021} + x^{20} + 1$ polinomom $Q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$:

$$P(x) = K(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

gde red polinoma $R(x)$ mora biti za jedan manji od reda polinoma $Q(x)$

$$R(x) = ax^2 + bx + c$$

Koreni polinoma $Q(x)$ su

$$Q(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2+1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-i)(x+i) = 0$$

$$x_1 = -1, x_{2,3} = \pm i$$

Kako je $Q(x_i) = 0, i = 1,2,3$, to važi

$$P(x_i) = R(x_i), i = 1,2,3$$

Takođe imamo

$$P(x) = x^{2024} + x^{2023} + x^{2022} + x^{2021} + x^{20} + 1 = x^{2021}(x^3 + x^2 + x + 1) + x^{20} + 1 = x^{2021}Q(x) + x^{20} + 1$$

Odavde sledi

- $x_1 = -1$

$$R(-1) = a - b + c$$
$$Q(-1) = 0$$
$$P(-1) = (-1)^{20} + 1 = 2$$
$$P(-1) = R(-1) \Rightarrow a - b + c = 2$$

- $x_2 = i$

$$R(i) = -a + ib + c$$
$$Q(i) = 0$$
$$P(i) = (i)^{20} + 1 = 2$$
$$P(i) = R(i) \Rightarrow -a + ib + c = 2$$

- $x_3 = -i$

$$R(-i) = -a - ib + c$$
$$Q(-i) = 0$$
$$P(-i) = (-i)^{20} + 1 = 2$$
$$P(-i) = R(-i) \Rightarrow -a - ib + c = 2$$

Izjednačavanjem realnih i imaginarnih delova sa leve i desne strane jednačina

$$-a + ib + c = 2$$

$$-a - ib + c = 2$$

dobijamo $b = 0$ i $c - a = 2$

Smenom $b = 0$ u prvoj jednačini $a - b + c = 2$ dobijamo

$$a + c = 2$$

Sada konačno rešavanjem sistema

$$a + c = 2$$

$$c - a = 2$$

imamo $c = 2$ i $a = 0$.

Dakle, ostatak pri deljenju polinoma $P(x)$ polinomom $Q(x)$ jednak je

$$R(x) = ax^2 + bx + c = 2.$$

19.Ⓒ Za korene kvadratne jednačine

$$p^2x^2 + p^3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + px + \frac{1}{p^2} = 0, \quad p > 0$$

važi

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1x_2 = \frac{1}{p^2}$$

Koreni su realni, ako i samo ako je diskriminanta ove kvadratne jednačine veća ili jednaka nuli

$$D = p^6 - 4p^2 \geq 0 \Leftrightarrow p^2(p^4 - 4) \geq 0 \Leftrightarrow p^2 > 0 \wedge p^4 - 4 > 0 \Leftrightarrow p \leq -\sqrt{2} \vee p \geq \sqrt{2}$$

Pošto je prema uslovu zadatka $p > 0$, odavde sledi

$$p \geq \sqrt{2}$$

Kako je

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$
$$(x_1^2 + x_2^2)^2 = x_1^4 + x_2^4 + 2(x_1x_2)^2 \Rightarrow x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1x_2)^2$$

to dobijamo

$$x_1^4 + x_2^4 = \left((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right)^2 - 2(x_1x_2)^2 = \left(p^2 - \frac{2}{p^2}\right)^2 - \frac{2}{p^2}$$

$$f(p) = x_1^4 + x_2^4 = p^4 + \frac{2}{p^4} - 4$$

Ekstremne vrednosti funkcije $f(p)$ dobijamo u tačkama p u kojima je prvi izvod ove funkcije jednak nuli

$$f'(p) = 4p^3 + 2 \cdot \frac{-4}{p^5} = 4\frac{p^8 - 2}{p^5}$$

$$f'(p) = 0 \Leftrightarrow 4\frac{p^8 - 2}{p^5} = 0 \Leftrightarrow p_{1,2} = \pm\sqrt[8]{2}$$

Međutim kako je $p \geq \sqrt{2}$ to $p_{1,2}$ ne pripadaju ovom domenu i nisu rešenja za koje su koreni $x_{1,2}$ realni.

Za izvod funkcije $f(p)$ važi

$$f'(p) = 4\frac{p^8 - 2}{p^5} > 0, \quad p > \sqrt[8]{2}$$

što znači da je funkcija monotono rastuća na domenu na kome je definisana $p \geq \sqrt{2} > \sqrt[8]{2}$. To ujedno znači da funkcija $f(p)$ ima minimalnu vrednost u početnoj tački domena na kome je definisana:

$$p = \sqrt{2}.$$

20.Ⓑ Označimo

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos(2x)\cos(3x)}{1-\cos x}$$

gde je $f(x) = 1-\cos x\cos(2x)\cos(3x)$ i $g(x) = 1-\cos x$.

Funkcija $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ je oblika $\dfrac{0}{0}$ za $x\to 0$, te se njena granična vrednost može naći primenom l'Hôpitalovog pravila

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Sada imamo

$$g'(x) = (1-\cos x)' = \sin x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1-\cos x\cos(2x)\cos(3x))' = -(\cos x\cos(2x)\cos(3x))' \\ &= -\underbrace{(\cos x)'}_{-\sin x}\cos(2x)\cos(3x) - \cos x\underbrace{(\cos(2x))'}_{-2\sin(2x)}\cos(3x) - \cos x\cos(2x)\underbrace{(\cos(3x))'}_{-3\sin(3x)} \\ &= \sin x\cos(2x)\cos(3x) + 2\cos x\sin(2x)\cos(3x) + 3\cos x\cos(2x)\sin(3x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \frac{\sin x\cos(2x)\cos(3x) + 2\cos x\sin(2x)\cos(3x) + 3\cos x\cos(2x)\sin(3x)}{\sin x} \\ &= \cos(2x)\cos(3x) + 2\cos x\cos(3x)\frac{\sin(2x)}{\sin x} + 3\cos x\cos(2x)\frac{\sin(3x)}{\sin x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x\to 0}\cos(2x)\cos(3x) + 2\lim_{x\to 0}\cos x\cos(3x)\frac{\sin(2x)}{\sin x} + 3\lim_{x\to 0}\cos x\cos(2x)\frac{\sin(3x)}{\sin x} \\ &= \cos(0)\cos(0) + 2\cos(0)\cos(0)\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\sin x} + 3\cos(0)\cos(0)\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin x} \\ &= 1 + 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\sin x} + 3\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin x} \end{aligned}$$

Ponovnom primenom l'Hôpitalovog pravila nalazimo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin(2x))'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)}{\cos x} = \frac{2\cos(0)}{\cos 0} = 2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin(3x))'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{3\cos(3x)}{\cos x} = \frac{3\cos(0)}{\cos 0} = 3$$

te konačno dobijamo

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} &= 1 + 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\sin x} + 3\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin x} \\ &= 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 3 = 14 \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos(2x)\cos(3x)}{1-\cos x} = 14.$$

PROBNI PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE ZA UPIS NA ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET 2021

1. Morska voda sadrži 5% soli. Koliko litara čiste vode treba dodati u 40 litara morske vode da se dobije rastvor koji sadrži 1% soli?

(A) 158 (B) 200 (C) 162 (D) 160 (E) 198 (N) Ne znam

2. Ako je $S = \{\, z \in \mathbb{C} |\, z^5 = 1, |z| \leq 1\}$, onda je broj elemenata skupa S jednak:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5 (N) Ne znam

3. Inverzna funkcija funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ date sa $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ jeste funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koju važi:

(A) $g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ (B) $g(x) = \ln\left|x - \sqrt{x^2+1}\right|$

(C) $g(x) = \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$ (D) $g(x) = \ln\left(x + \sqrt{|x^2-1|}\right)$

(E) $g(x) = x - \sqrt{x^2+1}$ (N) Ne znam

4. Zbir numeričkih koeficijenata svih članova u razvoju binoma $(x - 2y)^{18}$ jednak je:

(A) 0 (B) 1 (C) 19 (D) -1 (E) -19 (N) Ne znam

5. Rastojanje tačke T od svakog temena jednakostraničnog trougla je $\sqrt{13}$ cm, a od svake njegove stranice je 2 cm. Rastojanje tačke T od ravni trougla jeste:

(A) $2\sqrt{13}$ cm (B) 2 cm (C) 1 cm (D) 3 cm (E) 4 cm (N) Ne znam

6. Zbir svih realnih rešenja jednačine $\sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(7+x)^2} - \sqrt[3]{(2-x)(7+x)} = 3$ jeste:

(A) 7 (B) 6 (C) -7 (D) -5 (E) 1 (N) Ne znam

7. Skup svih realnih rešenja nejednačine $\log_{15}(5^x + x - 20) > x - \dfrac{x}{1 + \log_3 5}$ je oblika (za neke realne brojeve a, b takve da je $-\infty < a < b < +\infty$):

(A) $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ (B) (a, b) (C) $(-\infty, a)$

(D) $(a, +\infty)$ (E) $(-\infty, a) \cup (a, +\infty)$ (N) Ne znam

8. Zbir svih vrednosti $x \in \mathbb{R}$ za koje brojevi $\log_2(3^x - 1)$, $\log_4(9 + 9^x - 7 \cdot 3^x)$ i $\log_2(3 - 3^x)$ obrazuju aritmetičku progresiju jeste:

(A) $1 + \log_3 2$ (B) $\log_2 3$ (C) $\log_3 2$ (D) $1 - \log_3 2$ (E) $2 + \log_2 3$ (N) Ne znam

9. Vrednost izraza $\operatorname{tg} 9^{\circ} - \operatorname{tg} 27^{\circ} - \operatorname{tg} 63^{\circ} + \operatorname{tg} 81^{\circ}$ jednaka je:

(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 2 (E) 0 (N) Ne znam

10. Vrednost izraza $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3$ jednaka je:

(A) $\dfrac{3\pi}{2}$ (B) $\dfrac{4\pi}{3}$ (C) $\dfrac{3\pi}{4}$ (D) π (E) $\dfrac{11\pi}{12}$ (N) Ne znam

11. Prava $-x + y = 5$ je paralelna sa tangentom parabole $y^2 = 12x$. Zbir koordinata dodirne tačke te tangente i parabole jednak je:

(A) 9 (B) 24 (C) -3 (D) $1 + 2\sqrt{3}$ (E) $2(1 + \sqrt{6})$ (N) Ne znam

12. Ako su dužine osnovica trapeza 9 cm i 3 cm, a njegovi kraci dužine 6 cm i 4 cm, tada je zbir kvadrata dužine njegovih dijagonala jednak:

(A) $324\,\text{cm}^2$ (B) $162\,\text{cm}^2$ (C) $648\,\text{cm}^2$ (D) $142\,\text{cm}^2$ (E) $106\,\text{cm}^2$ (N) Ne znam

13. Skup svih realnih rešenja nejednačine $8 \cdot 3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} + 9^{\sqrt[4]{x}+1} \geq 9^{\sqrt{x}}$ je oblika (za neke realne brojeve a, b, c takve da je $-\infty < a < b < c < +\infty$):

(A) $(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$ (B) $(a, b]$ (C) $[a, b]$

(D) $[a, b] \cup [c, +\infty)$ (E) $(a, b] \cup [c, +\infty)$ (N) Ne znam

14. Na koliko načina se broj 14 može napisati u obliku sume (zbira), ne obavezno različitih, prirodnih brojeva, čiji je raspored u toj sumi bitan (npr. sume $3+3+8$ i $3+8+3$ smatramo različitim; takođe sam broj 14 smatramo sumom od samo jednog sabirka)?

(A) 8281 (B) 4096 (C) 8192 (D) 16384 (E) 16562 (N) Ne znam

15. U trouglu ABC razlika dužina stranica BC i AC jednaka je 3 cm, ugao $\angle ACB$ jednak je 60°, a poluprečnik opisanog kruga tog trougla je dužine $\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$ cm. Obim ovog trougla jeste:

(A) 10 cm (B) 20 cm (C) 13 cm (D) 15 cm (E) $13\sqrt{3}$ cm (N) Ne znam

16. Broj svih rešenja jednačine $\cos^2 x + \cos^2(2x) + \cos^2(3x) = 1$ na intervalu $\left(-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{13\pi}{6}\right)$ je:

(A) 12 (B) 6 (C) 7 (D) 14 (E) 13 (N) Ne znam

17. Koliko ima dvocifrenih brojeva x takvih da su $2x+1$ i $3x+1$ potpuni kvadrati?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0 (E) više od 3 (N) Ne znam

18. Ostatak pri deljenju polinoma $P(x) = (1+x)^{2021} + x^{1012}$ polinomom $Q(x) = x^2 + x + 1$ jeste:

(A) x (B) $-x$ (C) 0 (D) 1 (E) $x+1$ (N) Ne znam

19. Neka su x_1 i x_2 realna rešenja (realni koreni) kvadratne jednačine $x^2 + px + 1 = 0$. Važiće da je $-2 < x_1(1-x_1) < 1$ i $-2 < x_2(1-x_2) < 1$ ako i samo ako parameter p pripada intervalu:

(A) $(-3, -2]$ (B) $(-3, -2)$ (C) $(-1, 0)$ (D) $[-2, 2]$ (E) $\left(-\dfrac{5}{2}, -2\right]$ (N) Ne znam

20. Granična vrednost $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2(3^x - 1)}{\operatorname{tg} x - \sin x}$ jednaka je:

(A) 1 (B) $\ln^3 3$ (C) $\ln 6$ (D) $\ln 9$ (E) $\ln 3$ (N) Ne znam

REŠENJA

1.Ⓓ Kako morska voda sadrži 5% soli, to u 40 litara morske vode ima

$$\frac{5}{100} \cdot 40 \text{ l} = 2 \text{ l soli.}$$

Neka je x zapremina rastvora dobijenog dodavanjem čiste vode u 40 litara morske vode. Kako ovaj rastvor sadrži 2 l soli odnosno 1% soli, to važi:

$$\frac{1}{100} \cdot x = 2 \text{ l} \Rightarrow x = 200 \text{ l.}$$

Odavde sledi da u morsku vodu treba dodati sledeću količinu čiste vode

$$200 \text{ l} - 40 \text{ l} = 60 \text{ l.}$$

2.Ⓔ Kako važi:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}2k\pi} = 1, \; k \in \mathbb{Z}$$

to se za rešenja jednačine

$$z^5 = 1$$

dobija:

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{5}k}, \; k \in \mathbb{Z}$$

i važi

$$|z| = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{5}k}\right| = 1 \leq 1$$

Za $k = 0, \pm 1, \pm 2$ dobijamo pet različitih rešenja

$$z_0 = 1, z_{1,2} = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\frac{2\pi}{5}}, z_{3,4} = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\frac{4\pi}{5}}$$

Za $|k| > 2$ se ova rešenja ponavljaju. Tako da je ukupan broj elemenata skupa S jednak 5.

3.Ⓐ Tražimo inverznu funkciju $g(x)$ funkcije

$$y = f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

Rešavanjem gornje jednačine po x, dobijamo

$$2y = \mathrm{e}^x - \frac{1}{\mathrm{e}^x} = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^x}$$

Uvođenjem smene $t = \mathrm{e}^x > 0$, dobijamo

$$2y = \frac{t^2 - 1}{t} \Leftrightarrow t^2 - 2yt - 1 = 0$$

Rešenja ove kvadratne jednačine su data sa

$$t_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

Jedino pozitivno rešenje je

$$t = t_1 = y + \sqrt{y^2 + 1} > 0$$

Dalje imamo

$$\mathrm{e}^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \Leftrightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$$

te je inverzna funkcija $g(x)$ oblika

$$g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

---

4. B Korišćenjem izraza za razvoj binoma n-tog stepena

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

za $a = x, b = -2y$ i $n = 18$ dobijamo

$$(x-2y)^{18} = \sum_{k=0}^{18} \binom{18}{k} x^{18-k}(-2y)^k = \sum_{k=0}^{18} \binom{18}{k} (-2)^k x^{18-k} y^k$$

odakle se zbir numeričkih koeficijenata svih članova u ovom razvoju dobija za $x = y = 1$

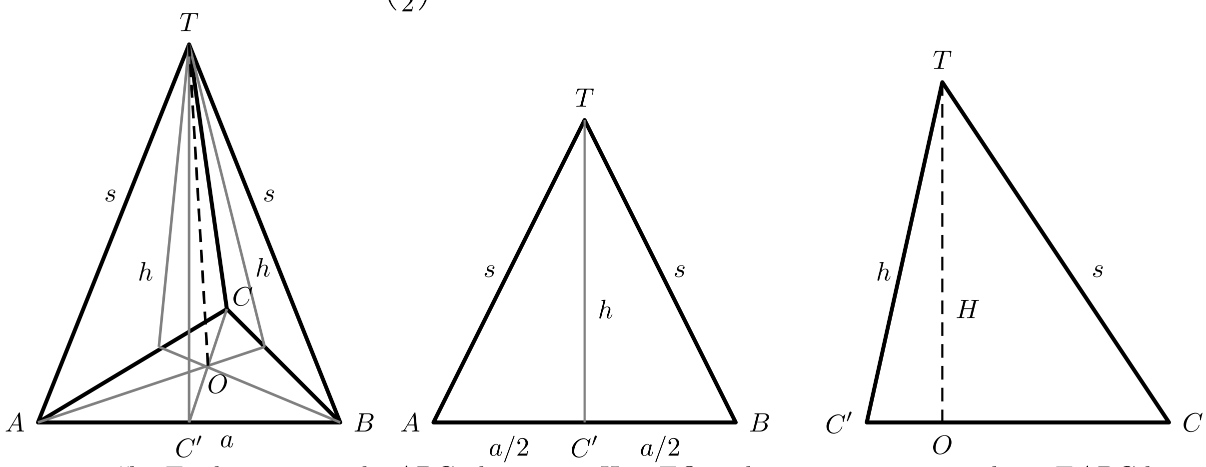
$$(1-2)^{18} = \sum_{k=0}^{18} \binom{18}{k} (-2)^k 1^{18-k} 1^k \Rightarrow \sum_{k=0}^{18} \binom{18}{k} (-2)^k = 1$$

---

5. C Na slici levo je prikazana tačka T koja je od svake stranice jednakostraničnog trougla ABC, dužine a, udaljena za $h = 2$, a od svakog temena za $s = \sqrt{13}$.

Trougao ABT je jednakostraničan, sa osnovicom dužine a, kracima dužine s i visinom nad osnovicom dužine h. Primenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao ATC' imamo

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2 - h^2 = 13 - 4 = 9 \Rightarrow a = 6$$



Rastojanje tačke T od ravni trougla ABC, dato je sa $H = TO$ i odgovara visini piramide sa $TABC$ koja ima jednakostranični trougao ABC u osnovi. Tačka O je težište ovog jednakostraničnog trougla koja deli svaku visinu u razmeri 1 : 2.

Za visinu CC' jednakostraničnog trougla ABC imamo

$$CC' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Pa se za duži $C'O$ i OC dobija

$$C'O = \frac{1}{3}CC' = \frac{a\sqrt{3}}{6} \qquad OC = \frac{2}{3}CC' = \sqrt{3}$$

Konačno, visinu H dobijamo primenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao TOC'

$$H^2 = h^2 - C'O^2 = h^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = 4 - 3 = 1$$

---

6. D

Smenom $a = \sqrt[3]{2-x}$ i $b = \sqrt[3]{7+x}$, zadata jednačina

$$\sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(7+x)^2} - \sqrt[3]{(2-x)(7+x)} = 3$$

se može napisati u obliku

$$a^2 + b^2 - ab = 3$$

i takođe važi

$$a^3 + b^3 = 2 - x + 7 + x = 9$$

Smenom ovih vrednosti u identitetu

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

imamo

$$9 = 3(a + b) \Rightarrow a + b = 3$$

odakle dalje dobijamo

$$(a + b)^3 = 3^3 \Rightarrow a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = \underbrace{a^3 + b^3}_{9} + 3ab\underbrace{(a + b)}_{3} = 9(1 + ab) \Rightarrow 1 + ab = 3 \Rightarrow ab = 2$$

Vraćanjem nazad smene za a i b poslednja jednačina postaje

$$\sqrt[3]{(2 - x)(7 + x)} = 2$$

$$\left(\sqrt[3]{(2 - x)(7 + x)}\right)^3 = 2^3 \Rightarrow (2 - x)(7 + x) = 8 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 6) = 0$$

za čija rešenja se dobija

$$x_1 = 1, x_2 = -6 \Rightarrow x_1 + x_2 = -5.$$

7.Ⓓ Transformacijom desne strane zadate nejednačine

$$\log_{15}(5^x + x - 20) > x - \frac{x}{1 + \log_3 5}$$

redom dobijamo

$$1 + \log_3 5 = \log_3 3 + \log_3 5 = \log_3 15$$

$$\frac{1}{1 + \log_3 5} = \frac{1}{\log_3 15} = \log_{15} 3$$

$$x - \frac{x}{1 + \log_3 5} = x - x \log_{15} 3 = x(1 - \log_{15} 3) = x(\log_{15} 15 - \log_{15} 3) = x \log_{15} \frac{15}{3} = x \log_{15} 5 = \log_{15} 5^x$$

te se zadata nejednačina svodi na

$$\log_{15}(5^x + x - 20) > \log_{15} 5^x$$

$$5^x + x - 20 > 5^x \Rightarrow x > 20$$

Još treba proveriti uslov da u skupu realnih brojeva argument logaritamske funkcije mora biti pozitivan

$$5^x > 20 - x$$

Kako je za $x > 20$ desna strana ove nejednakosti negativna a $5^x > 0, x \in \mathbb{R}$, to je zadati uslov ispunjen, te su sva realna rešenja zadate nejednačine data sa

$$x \in (20, +\infty)$$

8.Ⓓ Označimo tri zadata broja aritmetičke progresije sa $a_{k-1} = \log_2(3^x - 1)$, $a_k = \log_4(9 + 9^x - 7 \cdot 3^x)$ i $a_{k+1} = \log_2(3 - 3^x)$. Za članove aritmetičke progresije važi

$$a_{k+1} - a_k = a_k - a_{k-1} \Rightarrow a_{k+1} + a_{k-1} = 2a_k$$

odakle sledi

$$\log_2(3 - 3^x) + \log_2(3^x - 1) = 2 \log_4(9 + 9^x - 7 \cdot 3^x)$$

gde uvođenjem smene $t = 3^x > 0$ dobijamo

$$\log_2(3 - t) + \log_2(t - 1) = 2 \log_4(t^2 - 7t + 9)$$

Argumenti logaritamske funkcije u skupu realnih brojeva moraju biti pozitivni

$$t-1>0 \Rightarrow t>1$$

$$3-t>0 \Rightarrow t<3$$

$$t^2-7t+9>0, \quad t_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{13}}{2} \Rightarrow t<\frac{7-\sqrt{13}}{2} \vee t>\frac{7+\sqrt{13}}{2}$$

Kako važi

$$1<\frac{7-\sqrt{13}}{2}<3<\frac{7+\sqrt{13}}{2}$$

to se realna rešenja nalaze u skupu

$$t \in \left(1, \frac{7-\sqrt{13}}{2}\right)$$

Sada jednačinu po promenljivoj t možemo redom transformisati

$$\log_2(3-t)+\log_2(t-1)=2\log_4(t^2-7t+9)$$

$$\log_2(3-t)(t-1)=2\frac{\log_2(t^2-7t+9)}{\log_2 4}=2\frac{\log_2(t^2-7t+9)}{\log_2 2^2}=\log_2(t^2-7t+9)$$

$$(3-t)(t-1)=t^2-7t+9 \Leftrightarrow 2t^2-11t+12=0$$

Rešenja poslednje kvadratne jednačine po promenljivoj t su

$$t_1=\frac{3}{2}, \quad t_2=4$$

gde samo $t_1 \in \left(1, \frac{7-\sqrt{13}}{2}\right)$. Vraćanjem nazad smene $t=3^x$ imamo

$$3^x=\frac{3}{2} \Rightarrow x=\log_3\left(\frac{3}{2}\right)=1-\log_3 2$$

i kako je to jedino rešenje, to je ujedno i zbir svih vrednosti $x \in \mathbb{R}$ za koje važi zadati uslov.

9.Ⓒ Redom važi

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 9^{\circ}+\operatorname{tg} 81^{\circ} &=\frac{\sin 9}{\cos 9}+\frac{\sin 81}{\cos 81}=\frac{\sin 9}{\cos 9}+\frac{\cos(90-81)}{\sin(90-81)}=\frac{\sin 9}{\cos 9}+\frac{\cos 9}{\sin 9}=\frac{\sin^2 9+\cos^2 9}{\sin 9\cos 9}\\ &=\frac{1}{\frac{1}{2}(2\sin(2\cdot 9))}=\frac{2}{\sin 18}\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} 27^{\circ}+\operatorname{tg} 63^{\circ}=\frac{\sin 27}{\cos 27}+\frac{\sin 63}{\cos 63}=\frac{\sin 27}{\cos 27}+\frac{\cos(90-27)}{\sin(90-27)}=\frac{\sin 27}{\cos 27}+\frac{\cos 27}{\sin 27}=\frac{2}{\sin 54}$$

Zadati izraz postaje

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 9^{\circ}-\operatorname{tg} 27^{\circ}-\operatorname{tg} 63^{\circ}+\operatorname{tg} 81^{\circ} &=2\left(\frac{1}{\sin 18}-\frac{2}{\sin 54}\right)=2\frac{\sin 54-\sin 18}{\sin 18\sin 54}=2\frac{\sin(36+18)-\sin(36-18)}{\sin 18\cos(90-54)}\\ &=2\frac{\sin 36\cos 18+\sin 18\cos 36-(\sin 36\cos 18-\sin 18\cos 36)}{\sin 18\cos 36}\\ &=2\frac{2\sin 18\cos 36}{\sin 18\cos 36}=4.\end{aligned}$$

10.Ⓓ Označimo

$$\alpha=\operatorname{arctg} 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha=1, \quad \beta=\operatorname{arctg} 2 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha=2, \quad \gamma=\operatorname{arctg} 3 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha=3$$

gde $\alpha,\beta,\gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Tražimo vrednost izraza

$$\alpha+\beta+\gamma = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3$$

Kako je $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1$ to se ima $\alpha = \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$.

Dalje sledi

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) &= \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(\beta+\gamma)}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(\beta+\gamma)} = \frac{1+\operatorname{tg}(\beta+\gamma)}{1-\operatorname{tg}(\beta+\gamma)} \\
&= \frac{1+\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}}{1-\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}} = \frac{1+\frac{2+3}{1-2\cdot 3}}{1-\frac{2+3}{1-2\cdot 3}} \\
&= \frac{1-1}{1+1} = 0
\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = 0$$

odakle sledi

$$\alpha+\beta+\gamma = \pi$$

---

11. Ⓐ Tangenta parabole koja je paralelna sa pravom $y = x+5$ mora biti oblika

$$y = x + b$$

Ova tangenta i parabola $y^2 = 12x$ imaju tačno jednu dodirnu tačku. Tražimo koeficijenat b za koji sistem ovih dveju jednačina ima tačno jedno rešenje:

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 12x \\ y = x+b \end{array}\right\} \Rightarrow (x+b)^2 = 12x$$

$$x^2 + 2(b-6)x + b^2 = 0$$

što je ispunjeno ako je diskriminanta ove jednačine jednaka nuli

$$D = 4(b-6)^2 - 4b^2 = 0 \Rightarrow b^2 - 12b + 36 - b^2 = 0 \Rightarrow 12b = 36 \Rightarrow b = 3$$

Dakle, tangenta parabole je data jednačinom

$$y = x + 3$$

Dodirna tačka je rešenje gornje kvadratne jednačine za $b = 3$

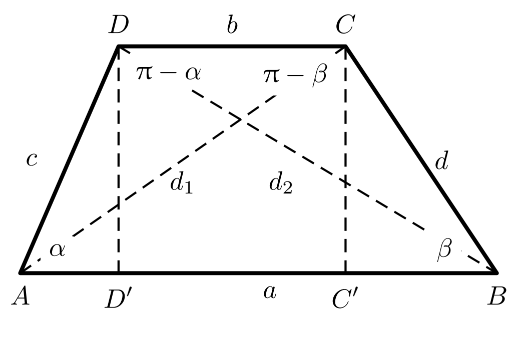
$$x^2 + 2(b-6)x + b^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 6b + 9 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 3, y_0 = x_0 + 3 = 6$$

te se za zbir koordinata dodirne tačke dobija $x_0 + y_0 = 9$.

---

12. Ⓓ

Na slici je prikazan trapez $ABCD$ sa stranicama dužine $a = AB = 9, b = CD = 3, c = AD = 4, d = BC = 6$. Označimo dužine dijagonala $d_1 = AC, d_2 = BD$, visinu $h = DD' = CC'$ i uglove $\alpha = \angle BAD, \beta = \angle ABC$. Važi $\angle ADC = \pi - \alpha, \angle BCD = \pi - \beta$.



Sa slike se vidi da važi

$$AB = AD' + D'C' + C'B = AD' + DC + CB$$

Iz pravouglih trouglova $AD'D$ i $BC'C$ dobijamo

$$AD' = c\cos\alpha, \quad C'D = d\cos\beta$$

i kako je $a = AB, b = DC$ to sledi

$$a = b + c\cos\alpha + d\cos\beta \Leftrightarrow c\cos\alpha + d\cos\beta = a - b$$

Primenom kosinusne teoreme na trouglove ABD, ACD, BCD i ABC redom dobijamo

$$d_2^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\alpha$$

$$d_1^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\pi - \alpha) = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha$$

$$d_2^2 = b^2 + d^2 - 2bd\cos\beta$$

$$d_1^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos(\pi - \beta) = a^2 + d^2 + 2bc\cos\beta$$

Sabiranjem poslednje četiri jednačine dobijamo

$$2(d_1^2 + d_2^2) = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 2(a-b)\underbrace{(c\cos\alpha + d\cos\beta)}_{a-b}$$

$$d_1^2 + d_2^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - (a-b)^2$$

$$d_1^2 + d_2^2 = 9^2 + 3^2 + 4^2 + 6^2 + (9-3)^2 = 106.$$

13.Ⓒ Uvođenjem smene $t = \sqrt[4]{x} \geq 0 \Rightarrow t^2 = \sqrt{x}$ zadata nejednačina

$$8 \cdot 3^{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} + 9^{\sqrt[4]{x}+1} \geq 9^{\sqrt{x}}, x \geq 0$$

postaje

$$8 \cdot 3^{t^2} \cdot 3^t + 9 \cdot 3^{2t} \geq 3^{2t^2}$$

Dalje dobijamo

$$9 \cdot 3^{t^2} \cdot 3^t + 9 \cdot 3^{2t} \geq 3^{2t^2} + 3^{t^2} \cdot 3^t$$

$$9 \cdot 3^t \left(3^{t^2} + 3^t\right) \geq 3^{t^2}\left(3^{t^2} + 3^t\right)$$

i kako je $3^{t^2} + 3^t > 0$

$$9 \cdot 3^t \geq 3^{t^2}$$

Primenom logaritma osnove 3 na levu i desnu stranu nejednačine dalje se dobija

$$\log_3 9 + \log_3 3^t \geq \log_3 3^{t^2}$$

$$2 + t \geq t^2 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-2) \leq 0$$

čije je rešenje

$$t \in [-1, 2]$$

odnosno kako mora važiti $t \geq 0$, sledi

$$t \in [0, 2]$$

Vraćanjem nazad smene $t = \sqrt[4]{x}$ dobijamo

$$0 \leq t \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \sqrt[4]{x} \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x \leq 16$$

$$x \in [0, 16].$$

14.Ⓒ Zadatak ćemo najpre rešiti na primeru broja 4. Broj 4 se može napisati u obliku sume na sledećih osam načina:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & = & 4 \\
1 & + & 1 & + & 1 & \oplus & 1 & = & 3 \oplus 1 \\
1 & + & 1 & \oplus & 1 & + & 1 & = & 2 \oplus 2 \\
1 & + & 1 & \oplus & 1 & \oplus & 1 & = & 2 \oplus 1 \oplus 1 \\
1 & \oplus & 1 & + & 1 & + & 1 & = & 1 \oplus 3 \\
1 & \oplus & 1 & + & 1 & \oplus & 1 & = & 1 \oplus 2 \oplus 1 \\
1 & \oplus & 1 & \oplus & 1 & + & 1 & = & 1 \oplus 1 \oplus 2 \\
1 & \oplus & 1 & \oplus & 1 & \oplus & 1 & = & 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1
\end{array}$$

gde smo simbol $\oplus$ koristili da označimo da se jedinice levo i desno od tog simbola grupišu u sabirak.

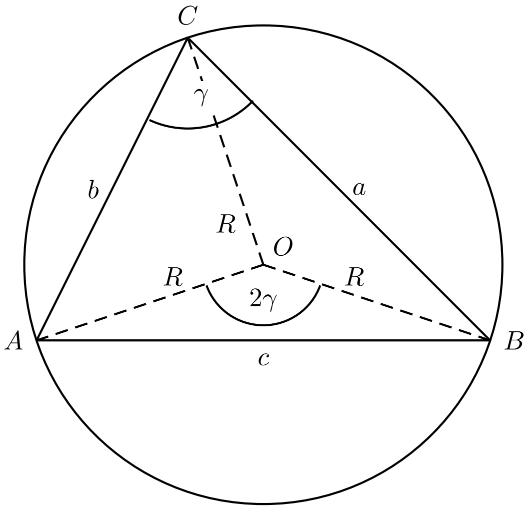
U izrazu za broj 4 predstavljenog u obliku zbira četiri jedinice, imamo tri pozicije na koje možemo staviti bilo simbol + (operacija koja sabira jedinice) bilo simbol $\oplus$ (koja ostaje u konačnom izrazu sa desne strane). Dakle imamo dva elementa koja raspoređujemo na $4 - 1 = 3$ pozicije, što odgovara varijacijama od dva elementa 3. klase sa ponavljanjem. Takvih mogućnosti ima $2^3 = 8$.

Za broj 14 istim rezonovanjem dobijamo da se može napisati u obliku sume na $2^{14-1} = 2^{13} = 8192$ načina.

---

15. Ⓑ

Na slici je prikazan zadati trougao ABC sa opisanim krugom sa centrom u tački O i poluprečnikom R. Iz uslova zadatka imamo $a - b = 3$, $\gamma = 60^{\circ}$ i $r = \frac{7\sqrt{3}}{3}$. Kako je centralni ugao dva puta veći od periferijskog ugla nad istom tetivom, to imamo da važi $\angle AOB = 2\angle ACB = 2\gamma$.



Primenom kosinusne teoreme na jednakostranični trougao ABO sada dobijamo

$$c^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos 2\gamma = 2R^2(1 - \cos 2\gamma)$$

$$c^2 = 2\frac{7^2}{3}(1 - \cos 120^{\circ}) = 2\frac{7^2}{3}(1 + \underbrace{\cos 60^{\circ}}_{=1/2}) = 7^2$$

$$c = 7$$

Primenom kosinusne teoreme na trougao ABC i korišćenjem $a - b = 3 \Rightarrow a = b + 3$ dalje se dobija

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$7^2 = (b+3)^2 + b^2 - 2b(b+3)\cos 60^{\circ} = b^2 + 3b + 9$$

$$b^2 + 3b - 40 = 0$$

Rešenja ove kvadratne jednačine su

$$b_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 160}}{2}$$

$$b_1 = -8, \quad b_2 = 5$$

Jedino pozitivno rešenje ima fizičkog smisla $b = b_2 = 5$. Konačno dobijamo $a = b + 3 = 8$ i obim trougla ABC iznosi:

$$O = a + b + c = 8 + 5 + 7 = 20.$$

---

16. Ⓐ

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{13\pi}{6}\right)$$

Važi redom

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos^2 2x = \left(2\cos^2 x - 1\right)^2 = 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1$$

$$\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \underbrace{\sin 2x}_{2\sin x\cos x} \sin x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x} \cos x = \cos x(4\cos^2 x - 3)$$

$$\cos^2 3x = (\cos x(4\cos^2 x - 3))^2 = \cos^2 x(16\cos^4 x - 24\cos^2 x + 9)$$

Ako uvrstimo gornje izraze u zadatu jednačinu, dobijamo

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$$

$$4\cos^4 x - 3\cos^2 x + 1 + \cos^2 x(16\cos^4 x - 24\cos^2 x + 9) = 1$$

$$\cos^2 x\left(8\cos^4 x - 10\cos^2 x + 3\right) = 0$$

$$\cos^2 x = 0 \vee 8\cos^4 x - 10\cos^2 x + 3 = 0$$

Rešenja jednačine

$$\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$$

su data izrazom

$$x = \pm\frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{2k \pm 1}{\pi}, k \in \mathbb{Z}$$

od kojih sledeća rešenja pripadaju zadatom skupu $x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{13\pi}{6}\right)$

$$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

Smenom $t = \cos^2 x \in [0,1]$ jednačina $8\cos^4 x - 10\cos^2 x + 3 = 0$ postaje

$$8t^2 - 10t + 3 = 0$$

i oba njena rešenja pripadaju intervalu $[0,1]$:

$$t_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 8\cdot 12}}{16} = \frac{10 \pm 2}{16} = \begin{cases} 1/2 \\ 3/4 \end{cases}$$

Dalje imamo dva slučaja:

1.
$$t = \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} = \frac{2k+1}{4}\pi, k \in \mathbb{Z}$$

   od kojih sledeća rešenja pripadaju zadatom skupu $x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{13\pi}{6}\right)$

$$-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

2.
$$t = \cos^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi = \frac{6k \pm 1}{6}\pi, k \in \mathbb{Z}$$

   od kojih sledeća rešenja pripadaju zadatom skupu $x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{13\pi}{6}\right)$

$$-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

Ukupan broj rešenja jednačine koja pripada zadatom skupu je

$$5 + 5 + 2 = 12.$$

17.Ⓐ

Označimo

$$a^2 = 2x + 1, \quad b^2 = 3x + 1$$

gde $x, a, b \in \mathbb{N}$.

Kako je x dvocifreni broj, to važi

$$10 \le x \le 99$$

odakle sledi

$$21 \le \underbrace{2x+1}_{=a^2} \le 199, \quad 31 \le \underbrace{3x+1}_{=b^2} \le 298$$

$$21 \le a^2 \le 199, \quad 31 \le b^2 \le 298$$

$$25 = 5^2 \le a^2 \le 14^2 = 196, \quad 36 = 6^2 \le b^2 \le 17^2 = 289$$

$$5 \le a \le 14, \quad 6 \le b \le 17$$

Iz početnih izraza za a^2 i b^2 dobijamo

$$x = \frac{a^2 - 1}{2}, \quad x = \frac{b^2 - 1}{3} \Rightarrow b^2 = \frac{3a^2 - 1}{2}$$

Kako je b^2 prirodni broj, to brojilac $3a^2 - 1$ mora biti paran broj, odnosno $3a^2$ mora biti neparan broj. Odavde dalje sledi da a^2 i a moraju biti neparni.

Za sve neparne brojeve iz skupa $5 \leq a \leq 14$ imamo

$$\begin{array}{c|ccccc} a & 5, & 7, & 9, & 11, & 13 \\ a^2 & 25, & 49, & 81, & 121, & 169 \\ b^2 = \dfrac{3a^2-1}{2} & 37, & 73, & 121, & 181, & 253 \end{array}$$

Jedino za $a^2 = 81 = 9^2$ dobijamo da je $b^2 = 121 = 11^2$ kvadrat prirodnog broja.

Jedini dvocifreni broj koji ispunjava zadate uslove je

$$x = b^2 - a^2 = 11^2 - 9^2 = 40$$

$$11^2 = 3x + 1 = 3 \cdot 40 + 1$$

$$9^2 = 2x + 1 = 2 \cdot 40 + 1$$

18.Ⓒ

$$P(x) = (1+x)^{2021} + x^{1012}, \quad Q(x) = x^2 + x + 1$$

$$P(x) = Q(x)K(x) + R(x)$$

gde ostatak pri deljenju polinomom $Q(x)$ stepena 2 mora biti za jedan stepen manji

$$R(x) = ax + b$$

Za korene polinoma $Q(x)$ dobijamo

$$Q(x) = 0 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \mathrm{j}\sqrt{3}}{2} = -\left(\cos\frac{\pi}{3} \mp \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{3}\right) = -\mathrm{e}^{\mp \mathrm{j}\frac{\pi}{3}}$$

Kako je $Q(x_{1,2}) = 0$, to se iz gornje jednačine dalje dobija

$$P(x_{1,2}) = Q(x_{1,2})K(x_{1,2}) + R(x_{1,2}) \Rightarrow P(x_{1,2}) = R(x_{1,2})$$

U narednim koracima posmatramo samo rešenje $x = x_2 = -\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}$. Redom važi

$$1 + x_2 = 1 - \frac{1}{2} - \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}$$

$$P(x_2) = (1+x_2)^{2021} + x_2^{1012} = \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}\right)^{2021} + \left(-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}\right)^{1012} = \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}\right)^{2021} + \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}\right)^{1012}$$

$$P(x_2) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{-1+3\cdot 674}{3}\pi} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{-2+3\cdot 338}{3}\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}\underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{j}674\pi}}_{=1} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}}\underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{j}338\pi}}_{=1}$$

$$P(x_2) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} - \mathrm{j}\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$P(x_2) = \frac{1}{2} + \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

Kako je $R(x_2) = P(x_2) = 0$ to dalje dobijamo

$$R(x_2) = ax_2 + b = a\left(-\frac{1}{2} - \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + b$$

$$R(x_2) = -\frac{a}{2} + b - \mathrm{j}\frac{a\sqrt{3}}{2} = 0$$

Realni i imaginarni deo ostatka $R(x_2)$ mora biti jednak nuli:

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow a = 0 \qquad -\frac{a}{2} + b \Rightarrow b = \frac{a}{2} = 0$$

dakle

$$R(x) = ax + b = 0$$

19. Ⓔ Rešenja kvadratne jednačine

$$x^2 + px + 1 = 0$$

su data sa

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2-4}}{2}, \quad x_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2-4}}{2}$$

Ova rešenja su realna ako i samo ako je diskriminanta ove jednačine veća ili jednaka nuli

$$D = p^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (p-2)(p+2) \geq 0 \Leftrightarrow p \leq -2 \vee p \geq 2$$

i pritom važi

$$x_2 - x_1 = \sqrt{p^2-4} \geq 0$$

Za ova rešenja važi

$$-2 < x_i(1-x_i) < 1, \quad i = 1,2$$

odakle se dobijaju ekvivalentne nejednakosti

$$-2 < x_i(1-x_i) \Leftrightarrow x_i^2 - x_i - 2 < 0 \Leftrightarrow (x_i+1)(x_i-2) < 0 \Leftrightarrow x_i \in (-1,2)$$

i

$$x_i(1-x_i) < 1 \Leftrightarrow x_i^2 - x_i + 1 > 0$$

gde je diskriminanta $D = 1^2 - 4 < 0$ te je poslednja nejednakost ispunjena za sve $x_i \in \mathbb{R}$. Presek rešenja ove dve nejednakosti daje

$$x_i \in (-1,2), i = 1,2$$

i kako je $x_2 > x_1$ to imamo

$$-1 < x_1 < x_2 < 2$$

Zamenom izraza za rešenje x_1 dobijamo sledeće ekvivalentne nejednakosti

$$x_1 > -1 \Leftrightarrow \frac{-p - \sqrt{p^2-4}}{2} > -1 \Leftrightarrow \sqrt{p^2-4} < 2 - p$$

Za $p \geq 2$ ova nejednačina nema rešenja, jer je leva strana veća ili jednaka nuli, a desna strana manja ili jednaka nuli. Za $p \leq -2$ obe strane nejednačine su veće ili jednake nuli, pa njihovim kvadriranjem dobijamo ekvivalentnu nejednačinu

$$p^2 - 4 < p^2 - 4p + 4 \Leftrightarrow p < 2$$

Presek svih rešenja za p u ovom slučaju daje $p \leq -2$

Druga ekvivalentna nejednakost se dobija zamenom rešenja za x_2

$$x_2 < 2 \Leftrightarrow \frac{-p + \sqrt{p^2-4}}{2} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{p^2-4} < p + 4$$

Za $p \leq -4$ ova nejednačina nema rešenja, jer je leva strana veća ili jednaka nuli, a desna strana manja ili jednaka nuli. Za $p \geq -4$ obe strane nejednačine su veće ili jednake nuli, pa njihovim kvadriranjem dobijamo ekvivalentnu nejednačinu

$$p^2 - 4 < p^2 + 8p + 16 \Leftrightarrow 8p > -20 \Leftrightarrow p > -\frac{5}{2}$$

Presek svih rešenja za p u ovom slučaju daje $p > -\frac{5}{2}$

Konačno dobijamo da je uslov zadatka ekvivalentan izrazu

$$p \in \left(-\frac{5}{2}, -2\right]$$

---

20. Ⓓ Važi redom

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2(3^x-1)}{\operatorname{tg} x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(3^x-1)}{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \frac{3^x - 1}{x} \frac{x^2}{1-\cos x} \cos x$$

Svaki od prva tri faktora u poslednjem izrazu je oblika $\dfrac{0}{0}$ za $x \to 0$. Primenom L'Hôpitalovog pravila na svaki od njih, imamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos 0} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(3^x - 1)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{3^x \ln 3}{1} = 3^0 \ln 3 = \ln 3$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2)'}{(1-\cos x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin x} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 2$$

Korišćenjem ovih rezultata konačno dobijamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2(3^x - 1)}{\operatorname{tg} x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \frac{3^x - 1}{x} \frac{x^2}{1-\cos x} \cos x = 1 \cdot \ln 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2\ln 3 = \ln 9.$$

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE ZA UPIS NA ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET 2020

1. Vrednost izraza $\log_4 3 \log_5 4 \log_6 5 \log_7 6 \log_8 7 \log_9 8$, jednaka je:

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) 2 (D) 3 (E) $\frac{2}{3}\log_2 3$ (N) Ne znam

2. Ako je površina kružnog isečka jednaka 15% površine kruga, koliki je ugao tog kružnog isečka?

(A) 15° (B) 30° (C) 45° (D) 54° (E) 60° (N) Ne znam

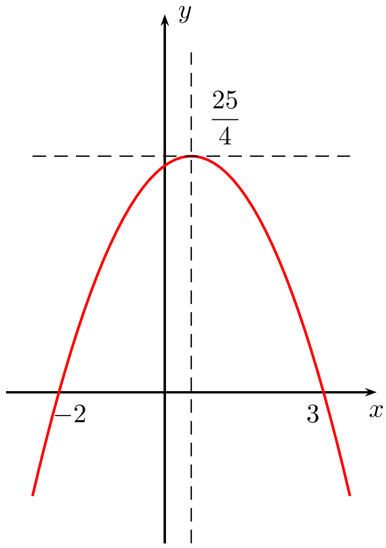
3. Vrednost izraza $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})(\sqrt{4-\sqrt{15}})$ jednaka je:

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) 2 (D) $\sqrt{2}$ (E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (N) Ne znam

4. Inverzna funkcija funkcije $f:[3,+\infty)\to[3,+\infty)$ date sa $f(x)=3\sqrt{x-3}+3$ jeste funkcija $g:[3,+\infty)\to[3,+\infty)$ za koju važi:

(A) $g(x)=\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{3}x+4$ (B) $g(x)=\frac{1}{9}x^2+\frac{2}{3}x+4$ (C) $g(x)=\frac{1}{9}x^2+\frac{2}{3}x-2$
(D) $g(x)=\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{3}x+2$ (E) $g(x)=9\left(x^2-6x+\frac{28}{3}\right)$ (N) Ne znam

5. Grafik funkcije $f(x)=ax^2+bx+c$, $\quad a,b,c\in\mathbb{R}$, $\quad x\in\mathbb{R}$, dat je na slici. Vrednost izraza $a(b+c)$ jednaka je:



(A) -1 (B) 5 (C) 7 (D) -7 (E) 6 (N) Ne znam

6. Proizvod najmanjeg i najvećeg korena polinoma $P(x)=x^4-9x^2+18$ jeste:

(A) 3 (B) -3 (C) 6 (D) -6 (E) $-\sqrt{18}$ (N) Ne znam

7. Realni deo kompleksnog broja $(z-z^2+2z^3)(2-z+z^2)$, za $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $i^2=-1$, jednak je

(A) $4\left(1+\mathrm{Im}^2 z\right)$ (B) 0 (C) 4
(D) $-\frac{1}{2}$ (E) $-\mathrm{Re}\, z+1$ (N) Ne znam

8. Neka je definisan niz funkcija $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa $f_1(x) = 2x + 2020$, $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $f_{2020}(-2020)$ jednako:

(A) 2^{2020} (B) -2^{2020} (C) 2020 (D) -2020 (E) 0 (N) Ne znam

9. Figura F_1 dobijena je tako što je iz jednakostraničnog trougla čija je površina P izbačen trougao čija su temena središta stranica polaznog trougla. Figura F_1 se sastoji iz 3 trougla. Figura F_2 dobijena je tako što su iz figure F_1 izbačena tri trougla čija su temena središta stranica tri trougla koji čine figuru F_1. Figura F_2 se sastoji iz 9 trouglova. Figura F_{n+1} dobijena je tako što je iz figure F_n izbačeno 3^n trouglova čija su temena središta stranica 3^n trouglova koji čine figuru F_n. Zbir površina svih figura F_n, $n \in \mathbb{N}$, dobijenih na opisani način, jednak je:

(A) $\frac{3}{2}P$ (B) $\frac{4}{3}P$ (C) $3P$ (D) $+\infty$ (E) $\sqrt{3}$ (N) Ne znam

10. Broj svih realnih rešenja jednačine $2x^2 - 6x + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 0$ jeste:

(A) 2 (B) 1 (C) 3 (D) 4 (E) veći od 4 (N) Ne znam

11. Realno rešenje jednačine $x + \log_{21}(3^x + 1) = x \log_{21} 7 + \log_{21} 756$ pripada intervalu:

(A) $(-\infty, -21]$ (B) $(-12, 0]$ (C) $(0, 21)$ (D) $[21, 42)$ (E) $[42, +\infty)$ (N) Ne znam

12. Dužina stranice kvadrata $ABCD$ jednaka je 8 cm. Kružnica prolazi kroz temena A i D i dodiruje stranicu BC. Površina kruga koji određuje ta kružnica jeste:

(A) $16\pi\,\mathrm{cm}^2$ (B) $25\pi\,\mathrm{cm}^2$ (C) $\frac{64}{25}\pi\,\mathrm{cm}^2$ (D) $64\pi\,\mathrm{cm}^2$ (E) $\frac{25}{64}\pi\,\mathrm{cm}^2$ (N) Ne znam

13. Koliko ima celobrojnih rešenja nejednačine $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{\cos x} + \left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^{\cos x} \leq 4$ koja pripadaju intervalu $[-2\pi, \sqrt{3} + \sqrt{5}]$?

(A) 3 (B) 4 (C) 11

(D) 10 (E) beskonačno mnogo (N) Ne znam

14. Skup rešenja nejednačine $12\,\mathrm{arctg}^2 x + \pi\,\mathrm{arctg}\, x - \pi^2 \leq 0$ je oblika (za neke realne brojeve a i b takve da je $-\infty < a < b < \infty$):

(A) $(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$ (B) $[a, b]$

(C) $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [a + 2k\pi, b + 2k\pi]$ (D) $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [a + k\pi, b + k\pi]$

(E) $\left(-\frac{\pi}{2}, a\right] \cup \left[b, +\frac{\pi}{2}\right)$ (N) Ne znam

15. Broj svih realnih rešenja jednačine $\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} = \sin x$ jeste:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) > 3 (N) Ne znam

16. Ako su tačke M, N, P i Q središta ivica DA, AB, BC i CD pravilnog tetraedra $ABCD$ ivice dužine a onda je površina četvorougla $MNPQ$ jednaka:

(A) $\frac{a^2}{4}$ (B) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (C) $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{a^2}{2}$ (E) $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$ (N) Ne znam

17. Skup rešenja jednačine $(\log_{\sin x})\left(\log_{\sin^2 x}\frac{4}{3}\right) = 2\log_{\frac{4}{3}} 2$ ima tačno tri zajednička elementa sa skupom S, ako je:

(A) $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}\right\}$ (B) $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

(C) $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$ (D) $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}, \frac{19\pi}{3}, \frac{25\pi}{3}, \frac{31\pi}{3}\right\}$

(E) $S = \left\{\frac{2\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$ (N) Ne znam

18. U tetivnom četvorouglu $ABCD$ dijagonala BD je normalna na stranicu BC, uglovi $\angle ABC$ i $\angle BAD$ su jednaki 120°, a dužina stranice AD jeste $1\,\mathrm{cm}$. Proizvod dužine dijagonale BD i dužine stranice CD jednak je:

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{cm}^2$ (B) $\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$ (C) $2\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$ (D) $6\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$ (E) $2\,\mathrm{cm}^2$ (N) Ne znam

19. Date su tačke $A(2,2), A'(-2,-2), B(4,-4)$ i $B'(-4,4)$. Duži AA' i BB' su ose elipse ε. Ako je $Y(0,y_0)$, $y_0 > 0$, tačka preseka y-ose i elipse ε, onda je y_0 jednako:

(A) $\dfrac{8}{\sqrt{5}}$ (B) $\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ (C) $\dfrac{8\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ (D) $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$ (E) $\dfrac{32}{\sqrt{5}}$ (N) Ne znam

20. Vrednost izraza $\operatorname{tg} 10^{\circ} - \operatorname{tg} 50^{\circ} + \operatorname{tg} 70^{\circ}$ jeste:

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (B) $3\sqrt{3}$ (C) 3 (D) -1 (E) $\sqrt{3}$ (N) Ne znam

REŠENJA

1.Ⓐ Koristeći

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

za vrednost zadatog izraza dobijamo

$$\log_4 3 \log_5 4 \log_6 5 \log_7 6 \log_8 7 \log_9 8 = \frac{\log_3 3}{\log_3 4} \cdot \frac{\log_3 4}{\log_3 5} \cdot \frac{\log_3 5}{\log_3 6} \cdot \frac{\log_3 6}{\log_3 7} \cdot \frac{\log_3 7}{\log_3 8} \cdot \frac{\log_3 8}{\log_3 9} = \frac{\log_3 3}{\log_3 9} = \frac{\log_3 3}{\log_3 3^2} = \frac{\log_3 3}{2\log_3 3} = \frac{1}{2}$$

2.Ⓓ Površina kružnog isečka poluprečnika r i ugla α data je izrazom

$$P_1 = \frac{1}{2} r^2 \alpha$$

dok je ukupna površina kruga

$$P = r^2 \pi$$

odakle je

$$\frac{P_1}{P} = \frac{\alpha}{2\pi}$$

Prema uslovu zadatka važi

$$\frac{P_1}{P} = 0.15 = \frac{3}{20} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{10}\pi = \frac{3}{10} \cdot 180^{\circ} = 54^{\circ}.$$

3.Ⓒ Primetimo da važi

$$4 - \sqrt{15} = \left(4 - \sqrt{15}\right) \cdot \frac{4 + \sqrt{15}}{4 + \sqrt{15}} = \frac{4^2 - 15}{4 + \sqrt{15}} = \frac{1}{4 + \sqrt{15}}$$

$$\sqrt{10} - \sqrt{6} = \sqrt{2}\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{4 + \sqrt{15}} = \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} = \sqrt{5 + 2\sqrt{15} + 3} = \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$$

odakle za zadati izraz dobijamo

$$\begin{aligned}
(4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})(\sqrt{4 - \sqrt{15}}) &= (4 + \sqrt{15}) \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{4 + \sqrt{15}}} \\
&= \sqrt{2} \cdot \sqrt{4 + \sqrt{15}} \left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right) \\
&= \left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right) \\
&= 5 - 3 = 2.
\end{aligned}$$

4.Ⓑ Tražimo inverznu funkciju $g(x)$ funkcije

$$y = f(x) = 3 \cdot \sqrt{x - 3} + 3$$

Rešavanjem gornje jednačine po x, dobijamo

$$x = \left(\frac{y - 3}{3}\right)^2 + 3 = \frac{1}{9}y^2 - \frac{2}{3}y + 4$$

te je inverzna funkcije $g(x)$ oblika

$$g(x) = \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 4.$$

5.Ⓓ Sa grafika se vidi da parabola $y = ax^2 + bx + c$ seče x-osu u tačkama $x_1 = -2$ i $x_2 = 3$, dok je maksimum ove krive $y_0 = \dfrac{25}{4}$ u tački $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = 0.5$. Sada važi

$$\begin{array}{l} y(-2) = 0 \\ y(3) = 0 \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4a - 2b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0 = 0 \end{array}\right\} \ominus \Rightarrow 5(a+b) = 0 \Rightarrow b = -a \Rightarrow c = 2b - 4a = -6a$$

$$y = ax^2 - ax - 6a$$

Sada se iz tačke maksimuma krive dobija

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{25}{4} \Rightarrow \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}a - 6a = \frac{25}{4} \Rightarrow -\frac{25}{4}a = \frac{25}{4} \Rightarrow a = -1, b = 1, c = 6$$

$$y = -x^2 + x + 6$$

Na kraju dobijamo

$$a(b + c) = -1(1 + 6) = -7.$$

6.Ⓓ Kako je

$$P(x) = x^4 - 9x^2 + 18 = (x^2 - 3)(x^2 - 6)$$

to se za korene polinoma dobija

$$P(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \vee x^2 = 6 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{3} \vee x_{3,4} = \pm\sqrt{6}$$

Kako je $x_{\min} = -\sqrt{6}$ i $x_{\max} = +\sqrt{6}$ to se za traženi proizvod najmanjeg i najvećeg korena ovog polinoma dobija

$$x_{\min} \cdot x_{\max} = -6.$$

7.Ⓐ Razvijanjem zadatog izraza dobijamo

$$f = \left(z - z^2 + 2z^3\right)\left(2 - z + z^2\right) = 2z - 3z^2 + 6z^3 - 3z^4 + 2z^5$$

Kako je

$$z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$$

to dalje sledi

$$z^2 = \left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 = \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}} = \mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)} = -\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z^3 = \left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = \mathrm{e}^{i2\pi} = \mathrm{e}^{i0} = 1$$

$$z^4 = z \cdot z^3 = z$$

$$z^5 = z^2 \cdot z^3 = z^2$$

te imamo

$$f(z) = 2z - 3z^2 + 6z^3 - 3z^4 + 2z^5 = 2z - 3z^2 + 6 - 3z + 2z^2 = 6 - z - z^2$$

$$f = 6 - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 7$$

i takođe važi

$$\operatorname{Im} z = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \operatorname{Im}^2 z = \frac{3}{4} \Rightarrow 1 + \operatorname{Im}^2 z = \frac{7}{4} \Rightarrow 4\left(1 + \operatorname{Im}^2 z\right) = 7.$$

8. Ⓒ

$$f_1(x) = 2x + 2020, \qquad f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x)), \quad n \in \mathbb{N}$$

Važi

$$\begin{aligned}
n = 1: &\quad f_2(x) = f_1(f_1(x)) = f_1\,(2x + 2020) = 2(2x + 2020) + 2020 = 4x + 3 \cdot 2020 \\
n = 2: &\quad f_3(x) = f_1(f_2(x)) = f_1\,(4x + 3 \cdot 2020) = 2(4x + 3 \cdot 2020) + 2020 = 8x + 7 \cdot 2020 \\
n = 3: &\quad f_4(x) = f_1(f_3(x)) = f_1\,(8x + 7 \cdot 2020) = 2(8x + 7 \cdot 2020) + 2020 = 16x + 15 \cdot 2020 \\
n = 4: &\quad f_5(x) = f_1(f_4(x)) = f_1\,(16x + 15 \cdot 2020) = 2(16x + 15 \cdot 2020) + 2020 = 32x + 31 \cdot 2020 \\
\vdots &\quad \vdots
\end{aligned}$$

Funkcija $f_n(x)$ se sada može napisati u sledećem generalnom obliku

$$f_n(x) = 2^n x + (2^n - 1) \cdot 2020 \quad n \in \mathbb{N}_0$$

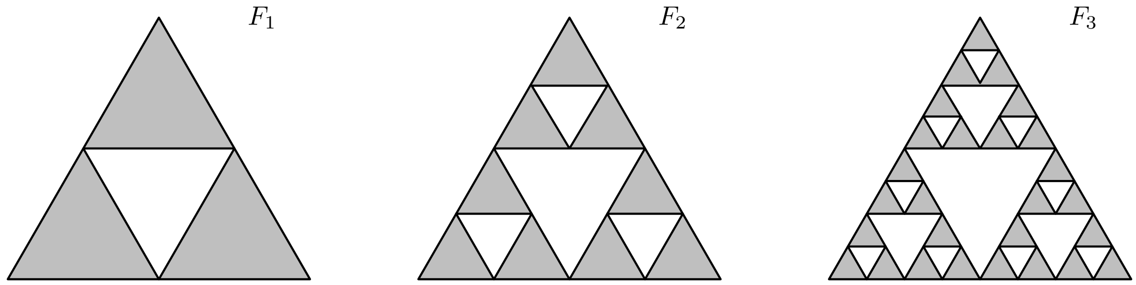
Sada imamo

$$f_{2020}(x) = 2^{2020} x + \left(2^{2020} - 1\right) \cdot 2020$$

$$f_{2020}(-2020) = 2^{2020}(-2020) + \left(2^{2020} - 1\right) \cdot 2020 = -2020.$$

---

9. Ⓓ



Neka je površina zadatog jednakostraničnog trougla P. Figuru F_1 formiraju četiri identična jednakostranična trougla (svaki površine $\frac{1}{4}P$ bez centralnog trougla). Površina figure F_1 se može predstaviti izrazom

$$P_1 = P - \frac{1}{4}P = \frac{3}{4}P$$

U Figuri F_2 imamo tri figure koje imaju isti oblik kao figura F_1 svaka površine četiri puta manje od površine figure F_1

$$P_2 = 3 \cdot \frac{1}{4}P_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 P$$

U Figuri F_3 imamo tri figure koje imaju isti oblik kao figura F_2 svaka površine četiri puta manje od površine figure F_2

$$P_3 = 3 \cdot \frac{1}{4}P_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 P$$

Generalizacijom za površinu figure F_n možemo napisati

$$P_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n P$$

Sada se za zbir površina svih figura F_n, $n \in \mathbb{N}$ dobija

$$\begin{aligned} P_\infty &= P_1 + P_2 + \cdots + P_n + \cdots = \frac{3}{4}P + \left(\frac{3}{4}\right)^2 P + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^n P + \cdots \\ &= \frac{3}{4}P\left(1 + \frac{3}{4} + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + \cdots\right) \\ &= \frac{3}{4}P\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 3P \end{aligned}$$

gde smo u poslednjem koraku iskoristili jednakost

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q},\ |q| < 1.$$

10.Ⓐ Rešenja jednačine

$$2x^2 - 6x + \sqrt{x^2 - 3x + 6} + 2 = 0$$

nalazimo u skupu realnih brojeva za koje je argument pod kvadratnim korenom ne-negativan:

$$x^2 - 3x + 6 \geq 0$$

Kako je discriminanta kvadratne jednačine $x^2 - 3x + 6 = 0$, $D = -15 < 0$ to je gornji izraz ispunjen za svako $x \in \mathbb{R}$.

Dalje sledi

$$\sqrt{x^2 - 3x + 6} > -2x^2 + 6x - 2 = -2(x^2 - 3x + 1)$$

Kako je leva strana poslednje nejednačine uvek pozitivna, to mora da važi

$$x^2 - 3x + 1 < 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

te rešenja koja tražimo moraju pripadati ovom intervalu.

Za $x \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ obe strane nejednačine su pozitivne, te kvadriranjem dalje dobijamo

$$x^2 - 3x + 6 = 4(x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1) \Rightarrow 4x^4 - 24x^3 + 43x^2 - 21x - 2 = 0$$

$$4x^4 - 8x^3 - 16x^3 + 32x^2 + 11x^2 - 22x + x - 2 = 0 \Rightarrow 4x^3(x-2) - 16x^2(x-2) + 11x(x-2) + x - 2 = 0$$

$$(x-2)(4x^3 - 16x^2 + 11x + 1) = 0 \Rightarrow (x-2)(4x^3 - 4x^2 - 12x^2 + 12x - x + 1) = 0$$

$$(x-2)(4x^2(x-1) - 12x(x-1) - (x-1)) = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2)(4x^2 - 12x - 1) = 0$$

čija su rešenja

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$$

$$4x^2 - 12x - 1 = 0 \Rightarrow x_{3,4} = \frac{12 \pm \sqrt{160}}{8} \notin \mathbb{Z}$$

Dakle jedina dva celobrojna rešenja zadate jednačine su $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$.

11.Ⓒ U zadatoj jednačini najpre predstavimo sve članove preko logaritma osnove 21

$$x + \log_{21}(3^x + 1) = x\log_{21} 7 + \log_{21} 756$$

$$\log_{21} 21^x + \log_{21}(3^x + 1) - \log_{21} 7^x - \log_{21} 756 = 0$$

$$\log_{21} \frac{21^x\,(3^x + 1)}{756 \cdot 7^x} = 0$$

$$\frac{3^x \cdot 7^x\,(3^x + 1)}{756 \cdot 7^x} = 1$$

$$3^x(3^x+1)-756=0$$

Uvođenjem smene $t=3^x \geq 0$ dobijamo sledeću kvadratnu jednačinu

$$t^2+t-756=0$$

čija su rešenja

$$t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1\pm 4\cdot 756}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1\pm 55}}{2}=\begin{cases}-28\\ 27\end{cases}$$

Jedino rešenje koje ispunjava uslov $t\geq 0$ je

$$t=27=3^3 \Rightarrow 3^x=x^3 \Rightarrow x=3.$$

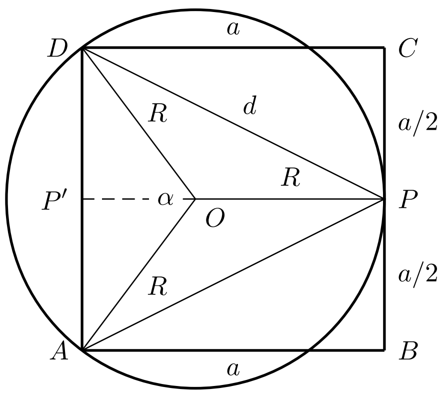
12.Ⓑ Neka je a dužina stranice kvadrata $ABCD$ i R poluprečnik kružnice koja prolazi kroz temena A i D i dodiruje naspramnu stanicu BC u tački P. Označimo takođe $\alpha=\angle AOD$.

Zbog simetrije

$$\overline{PB}=\overline{PC}=\frac{a}{2}$$

i

$$\angle AOP=\angle POD=\pi-\frac{\alpha}{2}$$



Primenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao $PP'D$ imamo

$$d^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2=\frac{5}{4}a^2$$

Primenom kosinusne teoreme na trouglove AOD i POD dobijamo

$$a^2=R^2+R^2-2R^2\cos\alpha=2R^2(1-\cos\alpha)$$

$$d^2=R^2+R^2-2R^2\cos\left(\pi-\frac{\alpha}{2}\right)=2R^2\left(1+\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

Iz prethodnih jednačina imamo da važi

$$\frac{5}{4}a^2=2R^2\left(1+\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$a^2=2R^2(1-\cos\alpha)$$

odakle sledi

$$\frac{5}{4}(1-\cos\alpha)=1+\cos\frac{\alpha}{2}$$

Korišćenjem jednakosti

$$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$$

dalje dobijamo

$$\frac{5}{2}\left(1-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right) = 1+\cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow 5\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\cos\frac{\alpha}{2} - 3 = 0$$

gde uvođenjem smene $t = \cos\frac{\alpha}{2}$ dobijamo kvadratnu jednačinu

$$5t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{10} = \frac{-1 \pm 4}{5}$$

$$t_1 = -1 \vee t_2 = \frac{3}{5}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \pi \Rightarrow \alpha = 2\pi$$

što ne može biti rešenje i

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}$$

što smenom u

$$\frac{5}{4}a^2 = 2R^2\left(1+\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

daje

$$\frac{5}{4}a^2 = 2R^2\left(1+\frac{3}{5}\right) \Rightarrow R^2 = \frac{25}{64}a^2$$

Sada za površinu kruga imamo

$$P = R^2\pi = \frac{25}{64}a^2\pi = \frac{25}{64}8^2\pi = 25\pi.$$

13.Ⓓ Kako važi

$$7 \pm 4\sqrt{3} = 4 \pm 2\cdot 2\sqrt{3} + 3 = 2^2 \pm 2\cdot 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = \left(2 \pm \sqrt{3}\right)^2$$

to imamo

$$\sqrt{7 \pm 4\sqrt{3}} = \sqrt{\left(2 \pm \sqrt{3}\right)^2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

Takođe primećujemo da važi

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3}$$

Sada se zadata nejednačina može uprostiti na sledeći način

$$\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{\cos x} + \left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^{\cos x} \le 4$$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{\cos x} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{\cos x} \le 4$$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{\cos x} + \left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^{\cos x} \le 4$$

Uvođenjem smene $t = \left(2+\sqrt{3}\right)^{\cos x} > 0$ nejednačina dobija oblik

$$t + \frac{1}{t} \le 4$$

$$t^2 - 4t + 1 \le 0$$

Kako su rešenja kvadratne jednačine

$$t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} > 0$$

dalje sledi

$$2-\sqrt{3} \le t \le 2+\sqrt{3}$$

$$(2+\sqrt{3})^{-1} \le t \le 2+\sqrt{3}$$

$$(2+\sqrt{3})^{-1} \leq \left(2+\sqrt{3}\right)^{\cos x} \leq 2+\sqrt{3}$$

Kako je $2+\sqrt{3} > 1$ to se poslednja nejednakost svodi na

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

što je ispunjeno za svako $x \in \mathbb{R}$.

Odavde sledi da svi brojevi iz zadatog intervala $x \in [-2\pi, \sqrt{3}+\sqrt{5}]$ zadovoljavaju zadatu nejednačinu. Ukupan broj celih brojeva u ovom intervalu ($x_1 = -2\pi \approx -6.28$, $x_2 = \sqrt{3}+\sqrt{5} \approx 3.96$) je 10:

$$x = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

14.Ⓑ Uvođnjem smene $t = \operatorname{arctg} x \Rightarrow x = \operatorname{tg} t$ zadata jednačina

$$12 \operatorname{arctg}^2 x + \pi \operatorname{arctg} x - \pi^2 \leq 0$$

postaje

$$12t^2 + \pi t - \pi^2 \leq 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 48\pi}}{24} = \frac{-\pi \pm 7\pi}{24}$$

$$t_1 = -\frac{\pi}{3} \vee t_2 = \frac{\pi}{4}$$

te su rešenja ove kvadratne nejednačine

$$-\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$$

odnosno

$$-\frac{\pi}{3} \leq \operatorname{arctg} x \leq \frac{\pi}{4}$$

Kako je $\operatorname{arctg} x$ strogo rastuća funkcija to dalje imamo

$$-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} \leq x \leq \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$$

15.Ⓐ

$$\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} = \sin x$$

Uvođenjem smene $t = \sin x \in [-1, 1]$, $t \neq 0$ prethodna jednačina postaje

$$t^2 + \frac{1}{t^2} = t \Rightarrow t^4 + 1 = t^3$$

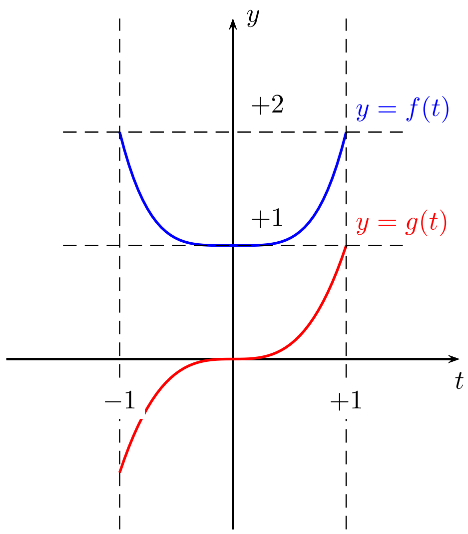
Označimo levu i desnu stranu poslednje jednačine sa

$$f(t) = t^4 + 1$$

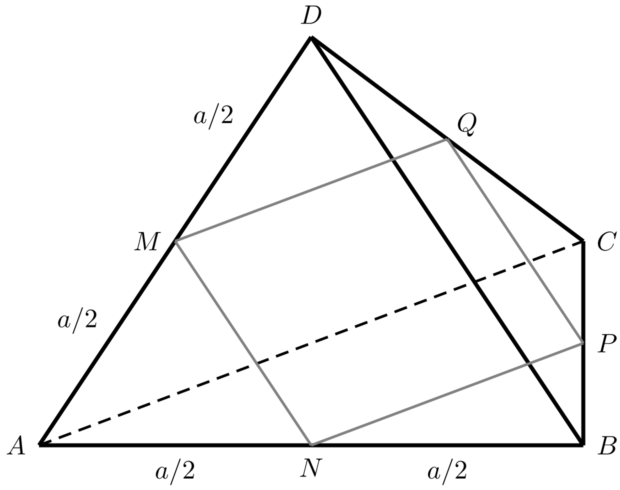
$$g(t) = t^3$$

Tražimo presečne tačke funkcija $f(t) = g(t)$ na intervalu $t \in [-1, 0) \cup (0, 1]$.

Sa grafika se vidi da ove dve funkcije nemaju presečnih tačaka na zadatom intervalu i stoga zadata jednačina nema realnih rešenja.



16.Ⓐ Na slici je prikazan pravilni tetraedar $ABCD$ i četvorougao $MNPQ$ čija temena su središta stranica AD, AB, BC i CD.



Posmatramo trougao AMN. U ovom trouglu je $\angle MAN = 60^o$ i važi $AM = AN = a/2$. To znači da je trougao AMN jednakostranični te da je $MN = a/2$.

Sličnom analizom primenjenom na trouglove NBP, PCQ i QMD dobijamo da su dužine stranica

$$NP = PQ = QM = \frac{a}{2}$$

Kako je $ABCD$ pravilan tetraedar, to mora da važi $MP = NQ$ te su dijagonale četvorougla $MNPQ$ jednake. Odavde sledi da je četvorougao $MNPQ$ zapravo kvadrat čija je površina data izrazom

$$P = \frac{a}{2}\frac{a}{2} = \frac{a^4}{4}.$$

17.Ⓔ U zadatoj jednačini za osnovu logaritamske funkcije mora važiti

$$0 < \sin x < 1$$

Izrazimo levu i desnu stranu zadate jednačine preko logaritamske funkcije osnove 2:

$$(\log_{\sin x})\left(\log_{\sin^2 x}\frac{4}{3}\right) = 2\log_{\frac{4}{3}} 2$$

$$\frac{1}{\log_2 \sin x}\cdot\frac{\log_2 \frac{4}{3}}{\log_2 \sin^2 x} = \frac{2}{\log_2 \frac{4}{3}}$$

$$\frac{1}{\log_2 \sin x}\cdot\frac{\log_2 \frac{4}{3}}{2\log_2 \sin x} = \frac{2}{\log_2 \frac{4}{3}}$$

$$\frac{1}{(\log_2 \sin x)^2} = \frac{2^2}{\left(\log_2 \frac{4}{3}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\log_2 \frac{4}{3}\right)^2} = \frac{1}{\left(\log_2 \sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2}$$

odakle sledi

$$\frac{1}{\log_2 \sin x} = \pm\frac{1}{\log_2 \sqrt{\frac{4}{3}}} \Rightarrow \log_2 \sin x = \pm\log_2 \sqrt{\frac{4}{3}}$$

Sada imamo dve mogućnosti

$$\log_2 \sin x = \log_2 \sqrt{\frac{4}{3}} \Rightarrow \sin x = \sqrt{\frac{4}{3}} > 0$$

što nema rešenja i

$$\log_2 \sin x = -\log_2 \sqrt{\frac{4}{3}} = \log_2 \sqrt{\frac{3}{4}} \Rightarrow \sin x = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

čija su rešenja data izrazima

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

za $k \in [-2, 5]$ dobijamo sledeće vrednosti

$$x = \left\{-\frac{11\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}, \frac{19\pi}{3}, \frac{25\pi}{3}, \frac{31\pi}{3}\right\}$$

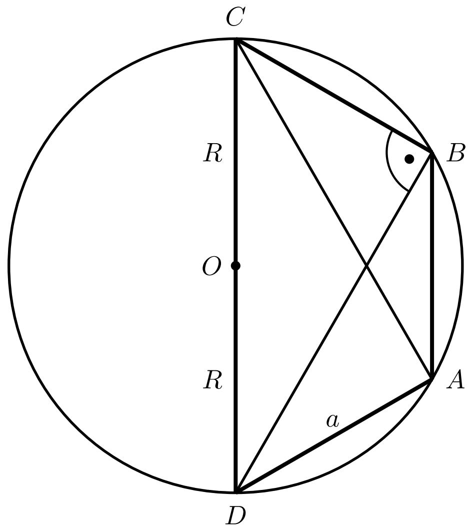
$$x = \left\{-\frac{10\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \frac{14\pi}{3}, \frac{20\pi}{3}, \frac{26\pi}{3}, \frac{32\pi}{3}\right\}$$

Dakle skup rešenja zadate jednačine ima tačno tri zajednička elementa sa skupom

$$S = \left\{\frac{2\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$$

18.Ⓒ Na slici je prikazan zadati tetivni četvorougao $ABCD$ u kružnici poluprečnika R sa centrom u tački O. Kako je prema uslovu zadatka stranica BD normalna na stranicu BC, to je $\angle CBD = 90^o$. U kružnici su samo uglovi nad prečnikom (kao tetivom) jednaki 90^o, pa sledi da je stranica CD prečnik kružnice, prolazi kroz centar O i važi

$$CD = 2R$$



Kako je $\angle CAD$ takođe ugao nad prečnikom kružnice to važi $\angle CAD = 90^o$. Dalje iz uslova zadatka imamo da je $\angle ABC = \angle BAD = 120^o$ odakle se dobija

$$\angle BAC = \angle BAD - 90^o = 30^o$$

$$\angle ABD = \angle ABC - 90^o = 30^o$$

I iz zbira uglova u trouglovima ABC i BAD za preostale uglove imamo

$$\angle ACB = 180^o - 120^o - 30^o = 30^o$$

$$\angle ADB = 180^o - 120^o - 30^o = 30^o$$

što znači da su trouglovi ABC i BAD jednakokraki, te je $BC = AB = AD = a = 1$.

Primenom kosinusne teoreme na trougao BAD imamo

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos\angle BAD = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos 120^o = 3a^2 = 3 \Rightarrow BD = \sqrt{3}$$

Primenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao CBD imamo

$$CD^2 = BC^2 + BD^2 = 1 + 3 = 4 \Rightarrow CD = 2$$

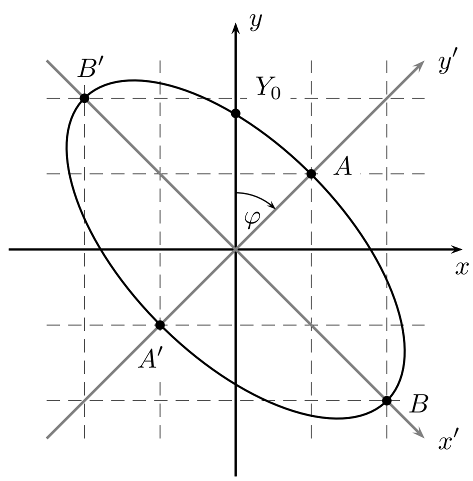
Konačno se za traženi proizvod dužina stranica BD i CD dobija

$$BD \cdot CD = 2\sqrt{3}.$$

19.Ⓐ Na slici je prikazana elipsa koja prolazi kroz zadate tačke $A(2, 2), A'(-2, -2), B(4, -4)$ i $B'(-4, 4)$, tako da duži AA' i BB' formiraju ose elipse. Dužine poluosa su date izrazima

$$a = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

$$b = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$



Elipsa je zarotirana oko centra koordinatnog sistema xOy za ugao $\varphi = -45^o$. U koordinatnom sistemu $x'Oy'$ koji je takođe zarotiran za ugao $\varphi = -45^o$, ose elipse se poklapaju sa osama koordinatnog sistema i centar elipse sa centrom koordinatnog sistema. U ovom koordinatnom sistemu $x'Oy'$ jednačina elipse data je izrazom

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x'^2}{32} + \frac{y'^2}{8} = 1$$

Transformacija koja nam daje koordinate (x', y') u koordinatnom sistemu $x'Oy'$ zarotiranom za ugao φ u odnosu na koordinatni sistem xOy kao funkciju koordinata (x, y) i ugla rotacije φ je data izrazima

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi$$

$$y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi$$

Za ugao rotacije $\varphi = -45^{\mathrm{o}} \Rightarrow \cos(-45^{\mathrm{o}}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin(-45^{\mathrm{o}}) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ dobijamo

$$x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)$$

$$y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$$

Smenom ovih relacija u jednačini elipse datoj u koordinatnom sistemu $x'Oy'$

$$\frac{x'^2}{32} + \frac{y'^2}{8} = 1$$

dobijamo jednačinu elipse u koordinatnom sistemy xOy:

$$\frac{(x-y)^2}{64} + \frac{(x+y)^2}{16} = 1$$

Sada se za koordinatu y_0 tačke preseka elipse sa y-osom, $Y_0(0, y_0)$, dobija

$$x_0 = 0 \Rightarrow \frac{{y_0}^2}{64} + \frac{{y_0}^2}{16} = 1 \Rightarrow y_0^2 = \frac{64}{5} \Rightarrow y_0 = \frac{8}{\sqrt{5}}.$$

20.Ⓔ U rešavanju ovog zadatka koristićemo sledeće trigonometrijske identitete

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha+\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{tg}(3\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha+2\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(2\alpha)}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(2\alpha)} = \operatorname{tg}\alpha \frac{3 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{tg}30^{\mathrm{o}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg}60^{\mathrm{o}} = \sqrt{3}$$

Važi redom

$$\operatorname{tg}70^{\mathrm{o}} = \operatorname{tg}(60^{\mathrm{o}} + 10^{\mathrm{o}}) = \frac{\operatorname{tg}60^{\mathrm{o}} + \operatorname{tg}10^{\mathrm{o}}}{1 - \operatorname{tg}60^{\mathrm{o}} \operatorname{tg}10^{\mathrm{o}}} = \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg}10^{\mathrm{o}}}{1 - \sqrt{3}\operatorname{tg}10^{\mathrm{o}}}$$

$$\operatorname{tg}50^{\mathrm{o}} = \operatorname{tg}(60^{\mathrm{o}} - 10^{\mathrm{o}}) = \frac{\operatorname{tg}60^{\mathrm{o}} - \operatorname{tg}10^{\mathrm{o}}}{1 + \operatorname{tg}60^{\mathrm{o}} \operatorname{tg}10^{\mathrm{o}}} = \frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg}10^{\mathrm{o}}}{1 + \sqrt{3}\operatorname{tg}10^{\mathrm{o}}}$$

$$\operatorname{tg}70^{\mathrm{o}} - \operatorname{tg}50^{\mathrm{o}} = \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg}10^{\mathrm{o}}}{1 - \sqrt{3}\operatorname{tg}10^{\mathrm{o}}} - \frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg}10^{\mathrm{o}}}{1 + \sqrt{3}\operatorname{tg}10^{\mathrm{o}}} = \frac{(\sqrt{3} + \operatorname{tg}10^{\mathrm{o}})^2 - (\sqrt{3} - \operatorname{tg}10^{\mathrm{o}})^2}{1 - (\sqrt{3}\operatorname{tg}10^{\mathrm{o}})^2} = \frac{8\operatorname{tg}10^{\mathrm{o}}}{1 - 3\operatorname{tg}^2 10^{\mathrm{o}}}$$

Sada se zadati izraz može prikazati u sledećem obliku

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}10^{\mathrm{o}} - \operatorname{tg}50^{\mathrm{o}} + \operatorname{tg}70^{\mathrm{o}} &= \operatorname{tg}10^{\mathrm{o}} + \frac{8\operatorname{tg}10^{\mathrm{o}}}{1 - 3\operatorname{tg}^2 10^{\mathrm{o}}} \\ &= \operatorname{tg}10^{\mathrm{o}}\left(1 + \frac{8}{1 - 3\operatorname{tg}^2 10^{\mathrm{o}}}\right) = \operatorname{tg}10^{\mathrm{o}} \frac{9 - 3\operatorname{tg}^2 10^{\mathrm{o}}}{1 - 3\operatorname{tg}^2 10^{\mathrm{o}}} \\ &= 3\operatorname{tg}10^{\mathrm{o}} \frac{3 - \operatorname{tg}^2 10^{\mathrm{o}}}{1 - 3\operatorname{tg}^2 10^{\mathrm{o}}} \end{aligned}$$

Sa druge strane važi

$$\operatorname{tg}30^{\mathrm{o}} = \operatorname{tg}(3 \cdot 10^{\mathrm{o}}) = \operatorname{tg}10^{\mathrm{o}} \frac{3 - \operatorname{tg}^2 10^{\mathrm{o}}}{1 - 3\operatorname{tg}^2 10^{\mathrm{o}}}$$

što smenom u prethodnom izrazu dalje daje

$$\operatorname{tg}10^{\mathrm{o}} - \operatorname{tg}50^{\mathrm{o}} + \operatorname{tg}70 = 3\operatorname{tg}30^{\mathrm{o}} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}.$$

PROBNI PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE ZA UPIS NA ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET 2020

1. Vrednost izraza $\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{4}{1+x^4}+\dfrac{8}{1+x^8}$, za $x\in\mathbb{R}$, $x\neq\pm1$, jednaka je:

(A) $\dfrac{16}{1-x^{16}}$ (B) $\dfrac{8}{1-x^{8}}$ (C) $\dfrac{16}{1+x^{16}}$ (D) $\dfrac{16}{x^{16}-1}$ (E) $\dfrac{8}{1-x^{16}}$ (N) Ne znam

2. Cena ulaznice za bioskop povećana je za 40%, ali je zarada od prodaje ulaznica povećana samo za 26%. Za koliko je smanjen broj posetilaca?

(A) 10% (B) 12% (C) 14% (D) 24% (E) 38% (N) Ne znam

3. Vrednost izraza $\sqrt{4-\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$ jednaka je:

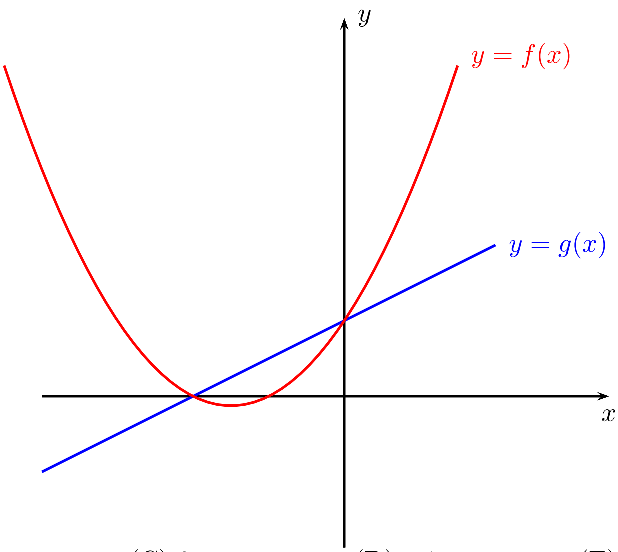
(A) $1+\sqrt{3}$ (B) $1-\sqrt{3}$ (C) $-1+\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{2}$ (E) $\sqrt{6}$ (N) Ne znam

4. Inverzna funkcija funkcije $f:\mathbb{R}\to(2,+\infty)$ date sa $f(x)=2\cdot3^{x-2}+2$ jeste funkcija $g:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$ za koju važi:

(A) $g(x)=\log_3\dfrac{x-2}{18}$ (B) $g(x)=\log_3\dfrac{x-2}{3}+\log_3\dfrac{27}{2}$ (C) $g(x)=\log_3\dfrac{2}{9}+\log_3(x-2)$

(D) $g(x)=2\left(\log_3(x-2)-1\right)$ (E) $g(x)=\log_3\dfrac{x-2}{3}-2$ (N) Ne znam

5. Grafici funkcija $f(x)=ax^2+3x+c$ i $g(x)=\dfrac{c}{2}x+2$, $a,c\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$ dati su na slici. Vrednost izraza $a+c$ jednaka je:



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) -1 (E) -3 (N) Ne znam

6. Ako je $x=i$ jedan koren realnog polinoma $P(x)=4x^4+ax^3-bx^2-5x+c$, $i^2=1$ onda je $a+b+c$ jednako:

(A) -5 (B) -4 (C) -9 (D) -1 (E) 9 (N) Ne znam

7. Koji od kompleksnih brojeva $z_1=-1-i$, $z_2=-\sqrt{3}+i$, $z_3=1-i\sqrt{3}$, $z_4=1+i$ ili $z_5=i$, $i^2=-1$, ima najveću glavnu vrednost argumenta φ, $-\pi<\varphi\leq\pi$:

(A) z_1 (B) z_2 (C) z_3 (D) z_4 (E) z_5 (N) Ne znam

8. Neka je definisan niz funkcija $f_n : \mathbb{R}\backslash\{0,1\} \to \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ sa $f_1(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $f_{2020}\left(\dfrac{2019}{2020}\right)$ jednako:

(A) $\dfrac{2019}{2020}$ (B) $\dfrac{1}{2019}$ (C) 2020 (D) -2020 (E) $-\dfrac{1}{2019}$ (N) Ne znam

9. Neka je data geometrijska progresija sa opštim članom a_n, $n \in \mathbb{N}$, $a_1 > 0$ i količnikom $q > 1$, i neka je data aritmetička progresija sa opštim članom b_n, $n \in \mathbb{N}$, $b_1 > 0$ i razlikom $d > 0, d \neq 1$. Ako je $\log_x a_8 - b_8 = \log_x a_1 - b_1$, $x > 0, x \neq 1$, onda je x jednako:

(A) $\sqrt[3]{2}$ (B) q^d (C) $\sqrt[d]{q}$ (D) 2^3 (E) $\sqrt{3}$ (N) Ne znam

10. Broj realnih rešenja jednačine $6x^2 + 7x\sqrt{x+1} = 24(x+1)$ jeste:

(A) 1 (B) 4 (C) 2 (D) 3 (E) veći od 4 (N) Ne znam

11. Zbir svih realnih rešenja jednačine $\sqrt{\log_{10}(-x-1)} = \log_{10}\sqrt{x^2+2x+1}$ jeste:

(A) -13 (B) -11 (C) -10 (D) -2 (E) 2 (N) Ne znam

12. Proizvod svih realnih rešenja jednačine $\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^x = 4\left(\sqrt{2}\right)^x$ jeste:

(A) -4 (B) -2 (C) -1 (D) 1 (E) 2 (N) Ne znam

13. Dat je paralelogram $ABCD$ i tačka M na njegovoj dijagonali AC. Prava koja sadrži tačku M i paralelna je stranici AB seče stranicu AD u tački N, a stranicu BC u tački Q. Ako je površina trougla AMN jednaka P, a površina trougla CMQ jednaka $4P$, onda je površina paralelograma $ABCD$ jednaka:

(A) $12P$ (B) $15P$ (C) $18P$ (D) $20P$ (E) $16P$ (N) Ne znam

14. Sva rešenja jednačine $3\arccos\left(x^2 - 4x + \dfrac{5}{2}\right) = 2\pi$ pripadaju intervalu:

(A) $(-\infty, -2\pi)$ (B) $[-2\pi, -\pi]$ (C) $[0, \pi]$ (D) $(-\pi, 0)$ (E) $(\pi, +\infty)$ (N) Ne znam

15. Broj realnih rešenja jednačine $\dfrac{4}{x + \frac{5}{x - \frac{7}{x}}} = 3$ jeste:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) > 3 (N) Ne znam

16. Kružnice $(x-1)^2 + y^2 = 25$ i $(x-1)^2 + (y-13)^2 = 144$ seku se pod uglom:

(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 90° (E) 15° (N) Ne znam

17. Zbir kvadrata dužina stranica a i b paralelograma, čije dijagonale d_1 i d_2 imaju dužine 4 cm i 6 cm, jeste:

(A) 13 cm^2 (B) 24 cm^2 (C) 20 cm^2 (D) 26 cm^2 (E) 22 cm^2 (N) Ne znam

18. Neka je dat pravilan tetraedar čija je ivica dužine a. Površina trougla koji je dobijen kao presek datog tetraedra i ravni koja sadrži jednu ivicu tetraedra, a njoj naspramnu ivicu deli u odnosu $2:1$, jeste:

(A) $\dfrac{a^2\sqrt{17}}{12}$ (B) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$ (C) $\dfrac{a^2\sqrt{19}}{12}$ (D) $\dfrac{a^2\sqrt{7}}{6}$ (E) $\dfrac{a^2\sqrt{17}}{13}$ (N) Ne znam

19. Skup rešenja nejednačine $\sqrt{8 + 2^{\sqrt{3-x}+1} - 4^{\sqrt{3-x}}} + 2^{\sqrt{3-x}+1} > 5$ jeste oblika (za neke realne brojeve a o b takve da je $-\infty < a < b < \infty$):

(A) $(a, b]$ (B) $[a, b]$ (C) $[a, b)$ (D) $(-\infty, b)$ (E) $(-\infty, b]$ (N) Ne znam

20. Vrednost izraza $\dfrac{\sin 80^\circ + \sin 50^\circ \cos 70^\circ}{\sin 50^\circ \sin 70^\circ}$ jeste:

(A) $1/2$ (B) 1 (C) $\sqrt{3}/2$ (D) $\sqrt{3}$ (E) $\sqrt{3}/3$ (N) Ne znam

REŠENJA

1.Ⓐ Imamo redom:

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}=\frac{1+x+1-x}{(1-x)(1+x)}=\frac{2}{1-x^2}$$

$$\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}=2\frac{1+x^2+1-x^2}{(1-x^2)(1+x^2)}=\frac{4}{1-x^4}$$

$$\frac{4}{1-x^4}+\frac{4}{1+x^4}=4\frac{1+x^4+1-x^4}{(1-x^4)(1+x^4)}=\frac{8}{1-x^8}$$

$$\frac{8}{1-x^8}+\frac{8}{1+x^8}=8\frac{1+x^8+1-x^8}{(1-x^8)(1+x^8)}=\frac{16}{1-x^{16}}.$$

2.Ⓐ Neka su c_0, p_0 i z_0 cena ulaznice, broj posetilaca i zarada od prodaja pre poskupljenja:

$$z_0=p_0\cdot c_0$$

Neka su c_1, p_1 i z_1 cena ulaznice, broj posetilaca i zarada od prodaja nakon poskupljenja:

$$z_1=p_1\cdot c_1$$

gde je cena ulaznica je povećana za 40%:

$$c_1=c_0+\frac{40}{100}c_0=1.4c_0$$

a zarada povećana za 26%:

$$z_1=z_0+\frac{26}{100}z_0=1.26z_0$$

Odavde se za broj posetilaca nakon poskupljenja dobija

$$p_1=\frac{z_1}{c_1}=\frac{1.26}{1.4}\frac{z_0}{c_0}=0.9p_0=p_0-\frac{10}{100}p_0$$

što znači da je broj posetilaca smanjen za 10%.

3.Ⓒ Primetimo da važi

$$4\pm2\sqrt{3}=3\pm2\sqrt{3}+1=(\sqrt{3})^2\pm2\sqrt{3}+1^2=\left(\sqrt{3}\pm1\right)^2$$

odakle sledi

$$\sqrt{4\pm2\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\pm1\right)^2}=\sqrt{3}\pm1$$

te za zadati izraz dobijamo

$$\sqrt{4-\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}=\sqrt{4-(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)}=\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$$

4.Ⓑ Tražimo inverznu funkciju $g(x)$ funkcije

$$y=f(x)=2\cdot3^{x-3}+2$$

Rešavanjem gornje jednačine po x, dobijamo

$$y=f(x)=2\cdot3^{x-3}+2\Leftrightarrow3^{x-2}=\frac{y-2}{2}\Leftrightarrow\log_3 3^{x-2}=\log_3\frac{y-2}{2}\Leftrightarrow x-2=\log_3\frac{y-2}{2}\Leftrightarrow x=2+\log_3\frac{y-2}{2}$$

te je inverzna funkcije $g(x)$ oblika

$$g(x)=2+\log_3\frac{x-2}{2}$$

Ovaj izraz se dalje može transformisati u oblik koji odgovara rešenju B:

$$g(x) = 2 + \log_3 \frac{x-2}{2} = 2 \cdot \log_3 3 + \log_3 \left(\frac{x-2}{3} \cdot \frac{3}{2}\right) = \log_3 3^2 + \log_3 \frac{x-2}{3} + \log_3 \frac{3}{2}$$
$$= \log_2 \frac{x-2}{3} + \log_3 \left(3^2 \cdot \frac{3}{2}\right) = \log_2 \frac{x-2}{3} + \log_3 \frac{27}{2}$$

5.Ⓒ Sa grafika se vidi da su dve presečne tačke funkcija $f(x) = ax^2 + 3x + c$ i $g(x) = \frac{c}{2}x + 2$

- $P_1(x_1, y_1)$ na y-osi: $x_1 = 0, y_1 = f(0) = g(0)$
- $P_2(x_2, y_2)$ na x-osi: $y_2 = f(x_2) = g(x_2) = 0$

Iz prve presečne tačke sledi

$$f(0) = g(0) \Rightarrow c = 2$$

Sada imamo

$$f(x) = ax^2 + 3x + 2 \wedge g(x) = x + 2$$

Iz druge presečne tačke dobijamo

$$g(x_2) = 0 \Rightarrow x_2 + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$$

i

$$f(-2) = 0 \Rightarrow a(-2)^2 + 3(-2) + 2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

te važi

$$a + c = 3.$$

6.Ⓒ Ako je $x = i$ koren realnog polinoma $P(x)$, tada važi $P(i) = 0$

$$P(x) = 4x^4 + ax^3 - bx^2 - 5x + c$$

$$P(i) = 4i^4 + ai^3 - bi^2 - 5i + c = 4 - ia + b - 5i + c = (4 + b + c) - i(a + 5) = 0$$

Izjednačavanjem realnih i imaginarnih delova sa leve i desne strane prethodne jednačine imamo

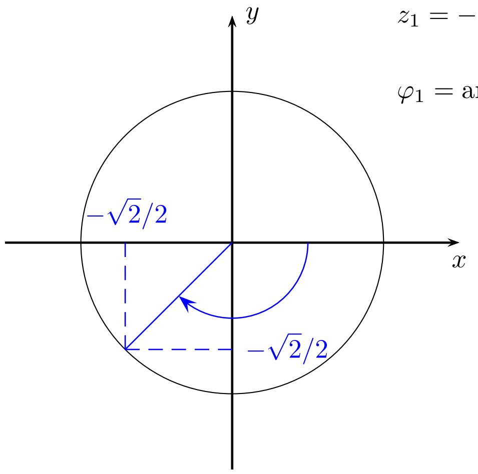
$$4 + b + c = 0 \Rightarrow b + c = -4$$

$$a + 5 = 0 \Rightarrow a = -5$$

te važi

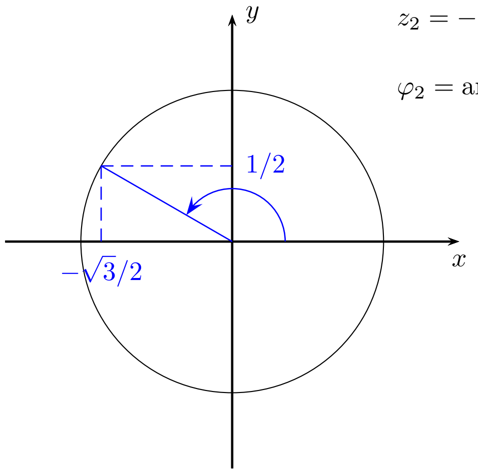
$$a + b + c = -9.$$

7.Ⓑ Kompleksni broj sa najvećom glavnom vrednosti argumenta φ $(-\pi < \varphi \leq \pi)$ je $z_2 = -\sqrt{3} + i$.



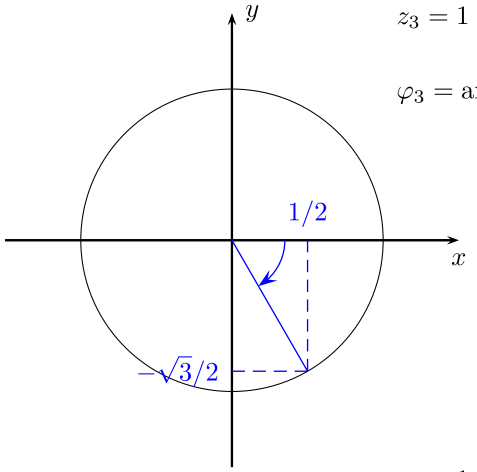
$$z_1 = -1 - i$$

$$\varphi_1 = \arctan \frac{-1}{-1} = \arctan \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{3\pi}{4}$$



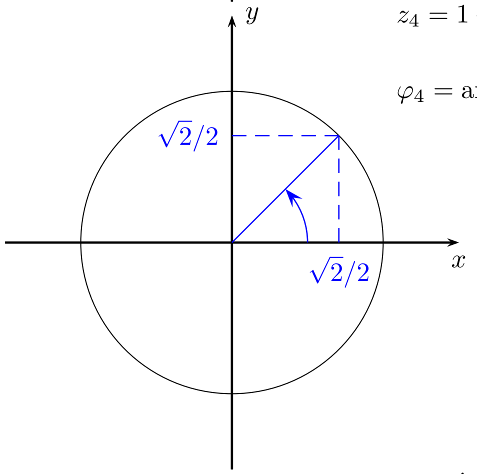
$$z_2 = -\sqrt{3} + i$$

$$\varphi_2 = \arctan\frac{1}{-\sqrt{3}} = \arctan\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5\pi}{6}$$



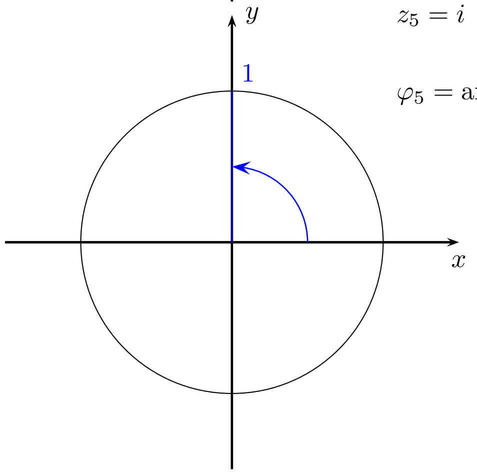
$$z_3 = 1 - i\sqrt{3}$$

$$\varphi_3 = \arctan\frac{-\sqrt{3}}{1} = \arctan\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\frac{\pi}{3}$$



$$z_4 = 1 + i$$

$$\varphi_4 = \arctan\frac{1}{1} = \arctan\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\pi}{4}$$



$$z_5 = i$$

$$\varphi_5 = \arctan\frac{1}{0} = \frac{\pi}{2}$$

8.Ⓒ

$$f_1(x) = \frac{1}{1-x}, \qquad f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x)), \quad n \in \mathbb{N}$$

Važi

$$\begin{aligned}
n=1: \quad & f_2(x) = f_1(f_1(x)) = f_1\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = 1 - \frac{1}{x} \\
n=2: \quad & f_3(x) = f_1(f_2(x)) = f_1\left(1-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)} = x \\
n=3: \quad & f_4(x) = f_1(f_3(x)) = f_1(x) \\
n=4: \quad & f_5(x) = f_1(f_4(x)) = f_1(f_1(x)) = f_2(x) \\
n=5: \quad & f_6(x) = f_1(f_5(x)) = f_1(f_2(x)) = f_3(x) \\
n=6: \quad & f_7(x) = f_1(f_6(x)) = f_1(f_3(x)) = f_1(x) \\
\vdots \quad & \vdots
\end{aligned}$$

Funkcija $f_n(x)$ se sada može napisati u sledećem obliku

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & n = 3k+1 \\ 1 - \dfrac{1}{x}, & n = 3k+2 \\ x, & n = 3k+3 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

Kako je $n = 2020 = 3 \cdot 673 + 1$ to važi

$$f_{2020}(x) = \frac{1}{1-x}$$

te se dalje dobija

$$f_{2020}\left(\frac{2019}{2020}\right) = \frac{1}{1-\frac{2019}{2020}} = 2020.$$

9.Ⓒ Prema uslovima zadatka imamo:

$$a_n = q^{n-1}a_1, \quad b_n = b_1 + (n-1)d, \quad n \in \mathbb{N}, a_1 > 0, b_1 > 0, d > 0, d \neq 1, q > 1$$

Zadata jednačina

$$\log_x a_8 - b_8 = \log_x a_1 - b_1, \quad x > 0, x \neq 1$$

se može transformisati u sledeći oblik

$$\log_x a_8 - \log_x a_1 = b_8 - b_1 \Leftrightarrow \log_x \frac{a_8}{a_1} = b_8 - b_1$$

Kako je $a_8 = q^7 a_1$ i $b_8 = b_1 + 7d$ to dalje sledi

$$\log_x \frac{a_8}{a_1} = b_8 - b_1 \Rightarrow \log_x q^7 = 7d \Rightarrow 7\log_x q = 7d \Rightarrow \log_x q = d$$

$$\log_x q = d \Leftrightarrow \log_q x = \frac{1}{d} = \log_q q^{1/d} \Rightarrow x = q^{1/d} = \sqrt[d]{q}.$$

10.Ⓒ Rešenja jednačine

$$6x^2 + 7x\sqrt{x+1} = 24(x+1)$$

nalazimo u skupu realnih brojeva za koje je argument pod kvadratnim korenom ne-negativan:

$$x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

Proverom se može utvrditi da $x = -1$ nije rešenje zadate jednačine tako da je rešenje u skupu $x > -1$. Kako $x \neq -1$, to jednačinu možemo podeliti sa $x + 1$ te dalje dobijamo

$$6\frac{x^2}{x+1} + 7\frac{x}{\sqrt{x+1}} - 24 = 0$$

Smenom $t = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ ova jednačina postaje kvadratna jednačina po promenljivoj t:

$$6t^2 + 7t - 24 = 0$$

čija su rešenja

$$t_{1/2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 4 \cdot 6 \cdot 24}}{12} = \frac{-7 \pm \sqrt{625}}{12} = \frac{-7 \pm 25}{12}$$

$$t_{1/2} = \begin{cases} -\dfrac{8}{3} \\ \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Vraćanjem smene $t = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ imamo dva slučaja:

- $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}} = -\dfrac{8}{3}$

$$\frac{x^2}{x+1} = \frac{64}{9} \wedge x < 0$$

$$9x^2 - 64x - 64 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{64 \pm \sqrt{64^2 + 4 \cdot 9 \cdot 64}}{2 \cdot 9} = \frac{64 \pm 80}{18} = \begin{cases} -\dfrac{8}{9} \\ 8 \end{cases}$$

  gde jedino rešenje $x_1 = -\dfrac{8}{9}$ zadovoljava uslov $x \in (-1, 0)$.

- $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{3}{2}$

$$\frac{x^2}{x+1} = \frac{9}{4} \wedge x > 0$$

$$4x^2 - 9x - 9 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 + 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4} = \frac{9 \pm 15}{8} = \begin{cases} -\dfrac{3}{4} \\ 3 \end{cases}$$

  gde jedino rešenje $x_2 = 3$ zadovoljava uslov $x > 0$.

Dakle zadata jednačina ima dva realna rešenja $x_1 = -\dfrac{8}{9}$ i $x_2 = 3$

11.Ⓐ U skupu realnih brojeva, u zadatoj jednačini:

$$\sqrt{\log_{10}(-x-1)} = \log_{10}\sqrt{x^2 + 2x + 1}$$

argumenti pod kvadratnim korenom moraju biti ne-negativni

$$\log_{10}(-x-1) \geq 0 \Rightarrow -x - 1 \geq 1 \Rightarrow x \leq -2$$

$$x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow (x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

i argumenti logaritamske funkcije moraju biti pozitivni

$$-x - 1 > 0 \Rightarrow x < -1$$

$$\sqrt{x^2 + 2x + 1} > 0 \Rightarrow |x + 1| > 0 \Rightarrow x \neq -1$$

Iz preseka svih prethodnih uslova dobijamo da rešenja moraju da zadovoljavaju

$$x \leq -2$$

Kako je leva strana jednačine ne-negativna, to isto mora važiti i za desnu stranu jednačine, što je u ovom intervalu ispunjeno jer važi

$$\log_{10}\sqrt{x^2+2x+1} \geq 0 \Rightarrow |x+1| \geq 1 \Rightarrow -x-1 \geq 1 \Rightarrow x \leq -2$$

gde je $|x+1| = -x-1$ za $x \leq -2$.

Zadatu jednačinu u ovom skupu možemo napisati u obliku

$$\sqrt{\log_{10}(-x-1)} = \log_{10}(-x-1)$$

Smenom $t = \log_{10}(-x-1)$ ova jednačina postaje

$$\sqrt{t} = t \Rightarrow t = t^2 \Rightarrow t(t-1) = 0 \Rightarrow t_1 = 0 \vee t_2 = 1$$

Sada imamo dva slučaja

$$\log_{10}(-x-1) = 0 = \log_{10} 1 \Rightarrow -x-1 = 1 \Rightarrow x = -2$$

$$\log_{10}(-x-1) = 1 = \log_{10} 10 \Rightarrow -x-1 = 10 \Rightarrow x = -11$$

oba rešenja pripadaju intervalu $x \leq -2$. Za zbir svih realnih rešenja zadate jednačine se dobija

$$x_1 + x_2 = -13.$$

12.Ⓐ Kako je (videti zadatak 1)

$$4 \pm 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} \pm 1)^2 \Rightarrow \sqrt{4 \pm 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} \pm 1$$

to se zadata jednačina

$$\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^x = 4\left(\sqrt{2}\right)^x$$

može napisati u sledećem obliku

$$\left(\sqrt{3}+1\right)^x + \left(\sqrt{3}-1\right)^x = 4\left(\sqrt{2}\right)^x$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)^x + 1 = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}\right)^x$$

Kako je

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)^2} = \frac{2}{(\sqrt{3}-1)^2}$$

to dalje imamo

$$\left(\frac{2}{(\sqrt{3}-1)^2}\right)^x + 1 = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}\right)^x \Leftrightarrow \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}\right)^x\right)^2 - 4\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}\right)^x + 1 = 0$$

Uvođenjem smene $t = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}\right)^x$ dobijamo sledeću kvadratnu jednačinu

$$t^2 - 4t + 1 = 0$$

čija su dva rešenja

$$t_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2-4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

te dobijamo

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}\right)^x = 2 \pm \sqrt{3}$$

Kako važi

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}\right)^2 = \frac{2}{4-2\sqrt{3}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}$$

i

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}\right)^{-2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$$

to iz prethodne dve jednakosti imamo

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}\right)^{\pm 2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

što direktnim poređenjem sa

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}\right)^{x} = 2 \pm \sqrt{3}$$

daje dva moguća realna rešenja zadate jednačine

$$x_{1,2} = \pm 2$$

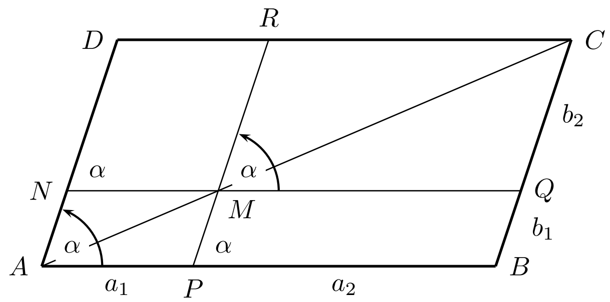
pa se za njihov proizvod dobija $x_1 x_2 = -4$.

13.Ⓒ Prema uslovima zadatka važi

$$P_{AMN} = P$$

$$P_{CMQ} = 4P$$

Sa slike vidimo da se površine ovih trouglova mogu izraziti



$$P_{AMN} = \frac{1}{2}a_1 b_1 \sin(\pi - \alpha) = \frac{1}{2}a_1 b_1 \sin\alpha = P \Rightarrow a_1 b_1 \sin\alpha = 2P$$

$$P_{CMQ} = \frac{1}{2}a_2 b_2 \sin(\pi - \alpha) = \frac{1}{2}a_2 b_2 \sin\alpha = 4P \Rightarrow a_2 b_2 \sin\alpha = 8P$$

odakle sledi

$$\frac{P_{CMQ}}{P_{AMN}} = \frac{a_2 b_2}{a_1 b_1} = 4$$

Iz sličnosti trouglova ABC i CMQ se ima

$$\frac{a_2}{a} = \frac{b_2}{b} \Rightarrow \frac{a-a_1}{a} = \frac{b-b_1}{b} \Rightarrow \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b}$$

$$b_2 = a_2\frac{b}{a} \wedge b_1 = a_1\frac{b}{a}$$

te sledi

$$\frac{a_2 b_2}{a_1 b_1} = \frac{a_2^2}{a_1^2} = 4 \Rightarrow a_2 = 2a_1 \Rightarrow b_2 = 2b_1$$

Površinu paralelograma $ABCD$ možemo izraziti kao zbir površina paralelograma $APMN$, $PBQM$, $NMRD$ i $MQCR$

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= a_1 b_1 \sin\alpha + a_2 b_1 \sin\alpha + a_1 b_2 \sin\alpha + a_2 b_2 \sin\alpha \\ &= 2P + 2a_1 b_1 \sin\alpha + 2a_1 b_1 \sin\alpha + 8P \\ &= 2P + 4P + 4P + 8P = 18P. \end{aligned}$$

14.Ⓒ

$$3\arccos\left(x^2-4x+\frac{5}{2}\right)=2\pi$$

$$\arccos\left(x^2-4x+\frac{5}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$$

$$x^2-4x+\frac{5}{2}=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$x^2-4x+\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow(x-3)(x-1)=0$$

Rešenja poslednje jednačine su

$$x_1=1,\, x_2=3.$$

15.Ⓑ Kako važi redom

$$x-\frac{7}{x}=\frac{x^2-7}{x}$$

$$\frac{5}{x-\frac{7}{x}}=\frac{5x}{x^2-7}$$

$$x+\frac{5}{x-\frac{7}{x}}=x+\frac{5x}{x^2-7}=\frac{x(x^2-7)+5x}{x^2-7}$$

to se zadata jednačina

$$\frac{4}{x+\frac{5}{x-\frac{7}{x}}}=3$$

može napisati u ekvivalentnom obliku

$$\frac{4(x^2-7)}{x(x^2-7)+5x}=3$$

odnosno

$$4(x^2-7)=3x(x^2-7)+15x\Leftrightarrow 3x^3-4x^2-6x+28=0$$

$$3x^3+6x^2-10x^2-20x+14x+28=0\Leftrightarrow 3x^2(x+2)-10x(x+2)+14(x+2)=0$$

$$(x+2)(3x^2-10x+14)=0$$

Jedno realno rešenje ove jednačine je

$$x+2=0\Leftrightarrow x=-2$$

Preostala rešenja zadovoljavaju kvadratnu jednačinu

$$3x^2-10x+14=0$$

međutim, kako je diskriminanta ove jednačine negativna

$$D=10^2-4\cdot 3\cdot 14=-68<0$$

to ona nema realnih rešenja.

Dakle, broj realnih rešenja zadate jednačine je 1.

16.Ⓓ Presečne tačke dveju zadatih kružnica nalazimo rešavanjem sistema jednačina

$$(x-1)^2+y^2=25$$

$$(x-1)^2+(y-13)^2=144$$

Oduzimanjem prve jednačine od druge imamo

$$(y-13)^2-y^2=119\Rightarrow y^2-26y+169-y^2=119\Rightarrow y=y_0=\frac{25}{13}$$

Sada se smenom dobijene vrednosti $y = y_0$ u prvoj jednačini ima

$$(x-1)^2 + \frac{625}{169} = 25 \Rightarrow (x-1)^2 = \frac{3600}{169} \Rightarrow x = 1 \pm \frac{60}{13} = \begin{cases} -\dfrac{47}{13} \\ \dfrac{73}{13} \end{cases}$$

Ugao pod kojim se seku dve kružnice jednak je uglu koji obrazuju tangente ovih kružnica u jednoj od presečnih tačaka. Proizvoljno biramo presečnu tačku $P(x_0, y_0)$ gde je $y_0 = \dfrac{25}{13}$ i $x_0 = \dfrac{73}{13}$.
Primenom izvoda po promenljivoj x na levu i desnu stranu jednačine prve kružnice imamo

$$2(x-1) + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x-1}{y}$$

Za koeficijent nagiba tangente ove kružnice u presečnoj tački P se dobija

$$k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 = y'|_{x=x0,y=y0} = -\frac{x_0-1}{y_0} = -\frac{\frac{60}{13}}{\frac{25}{13}} = -\frac{12}{5}$$

Na isti način dobijamo keoficijent nagiba tangente na drugu kružnicu u presečnoj tački P

$$2(x-1) + 2(y-13)y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x-1}{y-13}$$

$$k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2 = y'|_{x=x0,y=y0} = -\frac{x_0-1}{y_0-13} = -\frac{\frac{60}{13}}{\frac{25}{13}-13} = \frac{5}{12}$$

Dalje koristimo sledeći trigonometrijski identitet

$$\operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}$$

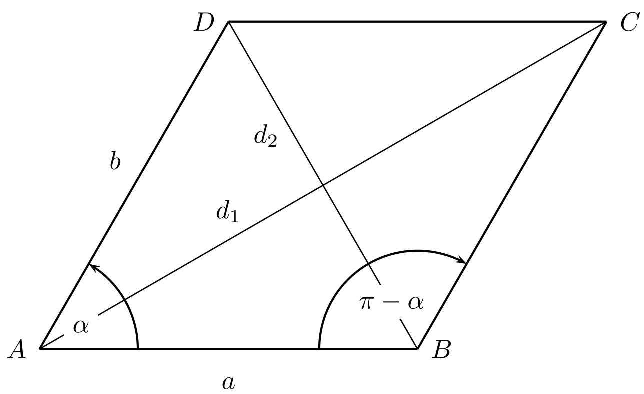
gde zamenom dobijenih vrednosti za nagibe dveju tangenti imamo

$$\operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\frac{5}{12} + \frac{12}{5}}{1 - \frac{5}{12}\frac{12}{5}} = +\infty$$

te se za ugao pod kojim se seku zadate kružnice dobija

$$\alpha_2 - \alpha_1 = 90^{\circ}.$$

17.Ⓓ Primenom kosinusne teoreme na trouglove ABC i ABD imamo (videti sliku):



$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$$

$$d_2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$

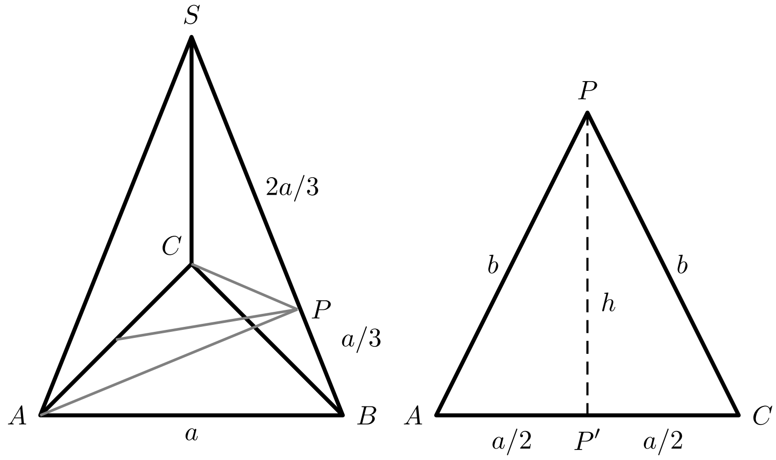
Sabiranjem ovih dveju jednačina se dobija

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$a_1^2 + a_2^2 = \frac{1}{2}\left(d_1^2 + d_2^2\right) = 26\,\mathrm{cm}^2.$$

18.© Stranice pravilnog tetraedra su jednakostranični trouglovi stranica dužine a. Trougao ACP sadrži ivicu tetraedra AC i tačku P koja deli naspramnu ivicu SB tako da je $\overline{SP} = 2\overline{PB}$. Kako je $\overline{SB} = a$ to važi $\overline{SP} = 2a/3$ i $\overline{PB} = a/3$. Primenom kosinusne teoreme na trougao ABP imamo

$$\begin{aligned} b^2 = \overline{AP}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BP}^2 - 2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BP}\cos\angle ABP \\ &= a^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2 - 2\cdot a\cdot\frac{a}{3}\cos\frac{\pi}{3} \\ &= a^2 + \frac{a^2}{9} - \frac{2a^2}{3}\frac{1}{2} = \frac{7}{9}a^2 \end{aligned}$$



Dalje, primenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao APP' za visinu jednakostraničnog trougla ACP se dobija

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{7}{9}a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{19}{36}a^2 \Rightarrow h = \frac{a}{6}\sqrt{19}$$

Konačno, tražena površina jednakostraničnog trougla ACP je

$$P_{ACP} = \frac{1}{2}ah = \frac{a^2\sqrt{19}}{12}.$$

19.© U zadatoj jednačini definisanoj u skupu realnih brojeva

$$\sqrt{8 + 2^{\sqrt{3-x}+1} - 4^{\sqrt{3-x}}} + 2^{\sqrt{3-x}+1} > 5$$

argumenti pod kvadratnim korenom moraju biti ne-negativni. Odavde imamo najpre

$$3 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$$

Uvođenjem smene $t = 2^{\sqrt{3-x}} \geq 1$, zadata nejednačina se može napisati u obliku

$$\sqrt{8 + 2t - t^2} + 2t > 5$$

i pri tome mora biti ispunjen sledeći uslov

$$8 + 2t - t^2 \geq 0 \Rightarrow t^2 - 2t - 8 \leq 0$$

gde je

$$t_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \cdot 8}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} -2 \\ 4 \end{cases}$$

te su rešenja prethodne nejednačine

$$t \in [-2, 4]$$

što uz uslov $t \geq 1$ daje da se rešenja zadate nejednačine moraju nalaziti u intervalu $t \in [1, 4]$.

Dalje rešavamo nejednačinu po promenljivoj t u skupu realnih brojeva $t \in [1, 4]$:

$$\sqrt{8 + 2t - t^2} > 5 - 2t$$

Kako je $\sqrt{8 + 2t - t^2} \geq 0$, to razlikujemo dva slučaja:

$$5 - 2t < 0 \Rightarrow t > \frac{5}{2} \text{ i } 5 - 2t \geq 0 \Rightarrow t \leq \frac{5}{2}$$

- $t \in \left(\frac{5}{2}, 4\right]$

  Nejednačina

  $$\sqrt{8 + 2t - t^2} > 5 - 2t$$

  je ispunjena za sve t iz ovog intervala jer je leva strana uvek ne-negativna a desna strana je uvek negativna.

- $t \in \left[1, \frac{5}{2}\right]$

  Obe strane zadate nejednačine su pozitivne u ovom intervalu. Kvadriranjem leve i desne strane zadate nejednačine dobijamo:

  $$\sqrt{8 + 2t - t^2} > 5 - 2t \Big/^2 \Rightarrow 8 + 2t - t^2 > 25 - 20t + 4t^2$$

  $$5t^2 - 22t + 17 < 0$$

  gde je

  $$t_{1/2} = \frac{22 \pm \sqrt{22^2 + 4 \cdot 5 \cdot 17}}{10} = \frac{22 \pm 12}{10} = \begin{cases} 1 \\ \frac{17}{5} \end{cases}$$

  te su rešenja data sa

  $$t \in \left(1, \frac{17}{5}\right)$$

  što u preseku sa traženim intervalom $t \in \left[1, \frac{5}{2}\right]$ daje rešenje

  $$t \in \left(1, \frac{5}{2}\right]$$

Ukupno rešenje zadate nejednačine je unija prethodna dva intervala

$$t \in \left(1, \frac{5}{2}\right] \cup \left(\frac{5}{2}, 4\right]$$

$$t \in (1, 4]$$

Vraćanjem nazad smene $t = 2^{\sqrt{3-x}}$ dobijamo

$$t > 1 \Rightarrow 2^{\sqrt{3-x}} > 1 \Rightarrow \sqrt{3 - x} > 0 \Rightarrow x < 3$$

$$t \leq 4 \Rightarrow 2^{\sqrt{3-x}} \leq 4 \Rightarrow \sqrt{3 - x} \leq 2 \Rightarrow 3 - x \leq 4 \Rightarrow x \geq -1$$

što najzad daje rešenja zadate nejednačine po promenljivoj x:

$$x \in [-1, 3).$$

20.Ⓓ U rešavanju ovog zadatka koristićemo sledeće trigonometrijske identitete

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos 60^{\circ} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Važi redom

$$\sin 50^{\circ}\cos 70^{\circ} = \frac{1}{2}\left(\sin(50^{\circ}+70^{\circ})+\cos(50^{\circ}-70^{\circ})\right) = \frac{1}{2}\left(\sin 120^{\circ}+\sin(-20^{\circ})\right) = \frac{1}{2}\left(\sin 60^{\circ}-\sin 20^{\circ}\right)$$

$$\sin 50^{\circ}\sin 70^{\circ} = \frac{1}{2}\left(\cos(50^{\circ}-70^{\circ})-\cos(50^{\circ}+70^{\circ})\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(-20^{\circ})-\cos 120^{\circ}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos 20^{\circ}+\cos 60^{\circ}\right)$$

$$\sin 80^{\circ} = \sin(60^{\circ}+20^{\circ}) = \sin 60^{\circ}\cos 20^{\circ}+\sin 20^{\circ}\cos 60^{\circ}$$

Za izraz u brojiocu sada imamo

$$\begin{aligned} B &= \sin 80^{\circ}+\sin 50^{\circ}\cos 70^{\circ} \\ &= \sin 60^{\circ}\cos 20^{\circ}+\sin 20^{\circ}\cos 60^{\circ}+\frac{1}{2}\sin 60^{\circ}-\frac{1}{2}\sin 20^{\circ} \\ &= \sin 60^{\circ}\cos 20^{\circ}+\sin 20^{\circ}\cos 60^{\circ}+\cos 60^{\circ}\sin 60^{\circ}-\cos 60^{\circ}\sin 20^{\circ} \\ &= \sin 60^{\circ}(\cos 20^{\circ}+\cos 60^{\circ}) \end{aligned}$$

Korišćenjem gornjih rezultata za zadati izraz se dobija

$$\frac{\sin 80^{\circ}+\sin 50^{\circ}\cos 70^{\circ}}{\sin 50^{\circ}\sin 70^{\circ}} = \frac{\sin 60^{\circ}(\cos 20^{\circ}+\cos 60^{\circ})}{\frac{1}{2}\left(\cos 20^{\circ}+\cos 60^{\circ}\right)} = 2\sin 60^{\circ} = \sqrt{3}.$$

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE ZA UPIS NA ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

1. Ako je $a = 2 + \sqrt{3}$ i $b = 2 - \sqrt{3}$, onda je vrednost izraza $((a + a^{-1}) + (b + b^{-1}))^{\frac{1}{2}}$ jednaka:

(A) 1 (B) $2\sqrt{2}$ (C) $2\sqrt{3}$ (D) 2 (E) $3\sqrt{2}$ (N) Ne znam

2. Ako su x i y realni brojevi za koje važi $2x - 3y = 7$, onda je vrednost izraza $\dfrac{4^x}{8^y}$ jednaka:

(A) 2^7 (B) $\dfrac{1}{2^7}$
(C) 4^4 (D) 8^2
(E) Ne može se odrediti na osnovu datog podatka (N) Ne znam

3. Kolika je dužina zajedničke tetive dva podudarna kruga čiji su poluprečnici 6 cm i čiji su centri na rastojanju 8 cm?

(A) 5 cm (B) $2\sqrt{5}$ cm (C) 10 cm (D) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ cm (E) $4\sqrt{5}$ cm (N) Ne znam

4. Ako je $f(x) = x(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)$, onda je $f'(-2)$ jednako:

(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 4 (E) -4 (N) Ne znam

5. Ako je $\sin\alpha = -\dfrac{5}{13}$ i $\alpha \in \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, onda je $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$ jednak:

(A) $\dfrac{17}{7}$ (B) $\dfrac{7}{12}$ (C) $\dfrac{17}{13}$ (D) $\dfrac{7}{17}$ (E) $\dfrac{12}{7}$ (N) Ne znam

6. Neka su x_1, x_2 i x_3 rešenja jednačine $x^3 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$, $q \neq 0$. Tada je vrednost izraza $\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} - x_1x_2(1 + x_3) - (x_1 + x_2)x_3$ jednaka:

(A) $p \cdot q$ (B) $p + q$ (C) $p - q$ (D) $q - p$ (E) $\dfrac{p}{q}$ (N) Ne znam

7. Neka su x i y, $x \neq 0$, $y \neq 0$, realni brojevi koji zadovoljavaju nejednakost $|x| < |y|$. Koja od sledećih tvrđenja su uvek tačna? (i) $\dfrac{x}{y} < 1$ (ii) $x^2 < y^2$ (iii) $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$ (iv) $\dfrac{1}{x^2} < \dfrac{1}{y^2}$ (v) $x < y$

(A) Samo (i) (B) (i) i (ii) (C) (ii), (iii) i (v) (D) (i) i (iv) (E) (i), (ii) i (v) (N) Ne znam

8. Granična vrednost $\lim\limits_{x \to 3}\left(\dfrac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 6x + 9} \cdot \dfrac{\sin(x - 3)}{\ln(2x - 5) + \cos\frac{\pi}{x}}\right)$ jednaka je:

(A) $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ (B) 0 (C) 4 (D) $\dfrac{1}{2}$ (E) $+\infty$ (N) Ne znam

9. Obim trougla čije stranice obrazuju aritmetičku progresiju sa razlikom 4 cm i čiji je jedan ugao 120° jednak je:

(A) 14 cm (B) 20 cm (C) 16 cm (D) 30 cm (E) 10 cm (N) Ne znam

10. Zbir svih realnih rešenja jednačine $\sqrt{4x^2 + 9x + 5} - \sqrt{2x^2 + x - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$ jeste:

(A) 4 (B) 6 (C) $\dfrac{26}{7}$ (D) $\dfrac{44}{7}$ (E) $-\dfrac{16}{7}$ (N) Ne znam

11. Neka je $x \in \mathbb{R}$ pozitivan broj i neka je $n \in \mathbb{N}$ paran broj. Zbir svih binomnih koeficienata u razvoju binoma $\left(x^{2019} + \dfrac{1}{x^{2019}}\right)^n$ četiri puta je veći od zbira svih binomnih koeficijenata u razvoju binoma $\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{n}{2}}$. Zbir onih članova ova dva razvoja binoma koji ne sadrže x jeste:

(A) 2 (B) 6 (C) 8 (D) 4 (E) 10 (N) Ne znam

12. Rotacijom pravouglog trougla, koji nije jednakokraki, oko hipotenuze formirano je obrtno telo T_1, a rotacijom oko duže katete obrtno telo T_2. Ako je α najmanji ugao datog trougla, onda je odnos zapremina tela T_1 i T_2 jednak:

(A) $\sin\alpha$ (B) $\cos\alpha$ (C) $\operatorname{ctg}\alpha$ (D) $\dfrac{1}{\cos\alpha}$ (E) $\dfrac{1}{\sin\alpha}$ (N) Ne znam

13. Jednačina kružnice čiji je centar na x-osi i koja sa parabolom $y^2 = 12x$ u tački $A(3,6)$ ima zajedničku tangentu jeste

(A) $(x-3)^2 + y^2 = 9$ (B) $(x-6)^2 + y^2 = 36$ (C) $(x-9)^2 + y^2 = 81$
(D) $(x-9)^2 + y^2 = 72$ (E) $(x-6)^2 + y^2 = 72$ (N) Ne znam

14. Zbir svih vrednosti parametra $\alpha \in \mathbb{R}$ za koje grafici funkcija $y = (a+2)x^2 - ax - 3$ i $y = ax - 4$ imaju tačno jednu zajedničku tačku jeste:

(A) 0 (B) 2 (C) -1 (D) 1 (E) -2 (N) Ne znam

15. Broj realnih rešenja jednačine $3^x + 4^x = 5^x$ jeste:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) > 3 (N) Ne znam

16. Dat je skup $S = \left\{ \left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2019}, \operatorname{Im}\left(\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2019}\right), 0.3333333, \dfrac{\pi}{3}, \sin\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{22}{7} \right\}$ i skup racionalnih brojeva $Q = \left\{ \dfrac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N} \right\}$, $i^2 = -1$. Broj elemenata skupa $S \cap Q$ jeste:

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6 (N) Ne znam

17. Skup rešenja nejednačine $\log_{\sin x}\cos x + \log_{\cos x}\sin x > 2$ na segmentu $[0, 2\pi]$ je oblika (za neke realne brojeve a, b, c, d takve da je $0 \le a < b < c < d \le 2\pi$):

(A) $(a,b) \cup (b,c)$ (B) $(a,b) \cup (c,d)$ (C) (a,b)
(D) $[a,b) \cup (c,d]$ (E) $\emptyset$ (N) Ne znam

18. Ako su α, β i γ, $\alpha \ge \beta \ge \gamma$, uglovi trougla i ako je $\sin\alpha - \sin\beta + \sin\gamma = 1$, onda je ugao γ jednak:

(A) 60^o (B) 20^o (C) 15^o (D) 30^o (E) 45^o (N) Ne znam

19. Neka je $A = \{1, 2, \ldots, 2019\}$ i $B = \{(x,y) \in A \times A \mid |x-y| \ge 2\}$. Broj elemenata skupa B jeste:

(A) 2019^2 (B) 2^{2019} (C) $2018 \cdot 2017$ (D) $2018!$ (E) $\dbinom{2018}{2}$ (N) Ne znam

20. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu date su tačke $A(2,1)$ i $B(4,3)$. Ako je C tačka na x-osi za koju je zbir dužina duži AC i BC minimalan, tada je taj zbir jednak:

(A) $2\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{2}(1+\sqrt{5})$ (C) $4\sqrt{2}$ (D) $\dfrac{5}{2}$ (E) 1 (N) Ne znam

REŠENJA

1.Ⓑ Za $a = 2 + \sqrt{3}$ i $b = 2 - \sqrt{3}$ se ima

$$a^{-1} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2 - \sqrt{3} = b$$

i

$$b^{-1} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2 + \sqrt{3} = a$$

te se za vrednost zadatog izraza dobija

$$\left(\left(a + a^{-1}\right) + \left(b + b^{-1}\right)\right)^{1/2} = \sqrt{2(a+b)} = \sqrt{2(2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3})} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

2.Ⓐ

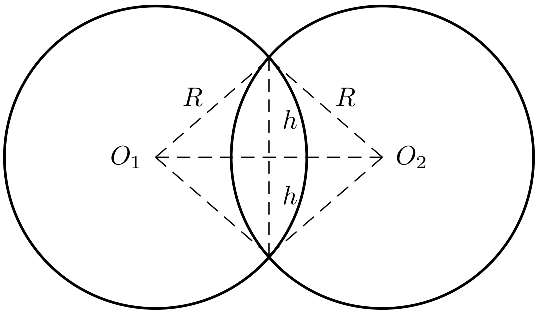
$$\frac{4^x}{8^y} = \frac{\left(2^2\right)^x}{\left(2^3\right)^y} = \frac{2^{2x}}{2^{3y}} = 2^{2x-3y} = 2^7$$

3.Ⓔ Zadato rastojanje d između centara O_1 i O_2 dva podudarna kruga poluprečnika $R = 6$ iznosi $d = 8$. Dužina zajedničke tetive ova dva kruga je $t = 2h$, gde je na osnovu Pitagorine teoreme (videti sliku)

$$h^2 = R^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 36 - 16 = 20$$

$$h = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$t = 2h = 4\sqrt{5}$$



4.Ⓓ Označimo

$$f(x) = f_1(x)f_2(x)f_3(x)f_4(x)f_5(x)$$

gde je

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = x+1,\ f_3(x) = x+2,\ f_4(x) = x+3,\ f_5(x) = x+4$$

Za izvod ove funkcije (pravilo proizvoda) važi

$$\begin{aligned} f'(x) = {} & f_1'(x)f_2(x)f_3(x)f_4(x)f_5(x)+ \\ & + f_1(x)f_2'(x)f_3(x)f_4(x)f_5(x)+ \\ & + f_1(x)f_2(x)f_3'(x)f_4(x)f_5(x)+ \\ & + f_1(x)f_2(x)f_3(x)f_4'(x)f_5(x)+ \\ & + f_1(x)f_2(x)f_3(x)f_4(x)f_5'(x) \end{aligned}$$

Kako je

$$f_1'(x) = f_2'(x) = f_3'(x) = f_4'(x) = f_5'(x) = 1$$

to se dalje dobija

$$\begin{aligned} f'(x) = &(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+ \\ &+x(x+2)(x+3)(x+4)+ \\ &+x(x+1)(x+3)(x+4)+ \\ &+x(x+1)(x+2)(x+4)+ \\ &+x(x+1)(x+2)(x+3) \end{aligned}$$

odakle se za traženu vrednost izvoda u tački $x = -2$ dobija

$$f'(-2) = -2 \cdot (-2+1) \cdot (-2+3) \cdot (-2+4) = -2 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 2 = 4$$

5.Ⓓ

$$\sin\alpha = -\frac{5}{13},\ \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

Za traženu vrednost izraza se dobija

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha}$$

i kako je $\sin\dfrac{\pi}{4} = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, dalje se dobija

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$$

Sada za $\cos\alpha$ imamo

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\frac{25}{169}} = \pm\sqrt{\frac{144}{169}} = \pm\frac{12}{13}$$

Kako za uglove $\alpha \in \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ važi $\sin\alpha < 0$ i $\cos\alpha > 0$, to iz prethodnog izraza sledi

$$\cos\alpha = +\frac{12}{13}$$

te se za traženi izraz konačno dobija

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{-\frac{5}{13}+\frac{12}{13}}{\frac{12}{13}+\frac{5}{13}} = \frac{7}{13}$$

6.Ⓓ Ako su x_1, x_2 i x_3 rešenja jednačine $x^3+px+q=0$, $p,q \in \mathbb{R}$, $p,q \neq 0$ tada važi

$$x^3+px+q = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x - x_1x_2x_3$$

Izjednačavanjem koeficijenata polinoma sa leve i desne strane gornje jednakosti dobijamo sledeće izraze

$$x_1+x_2+x_3 = 0$$

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 = p$$

$$x_1x_2x_3 = -q$$

Sada se za vrednost zadatog izraza dobija

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{x_1^2+x_2^2+x_3^2} - x_1x_2(1+x_3) - (x_1+x_2)x_3 = -x_1x_2x_3 - (x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1) = q-p$$

7.Ⓑ x i y su realni brojevi $x \neq 0$, $y \neq 0$ koji zadovoljavaju nejednakost $|x| < |y|$.

(i) Najpre ispitujemo da li je tada tvrđenje $\frac{x}{y} < 1$ uvek tačno.

Koristimo definiciju apsolutne vrednosti i uzimamo u obzir da je $x \neq 0$, $y \neq 0$.

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

$$|y| = \begin{cases} -y, & x < 0 \\ y, & y > 0 \end{cases}$$

Sada razlikujemo sledeća četiri moguća slučaja:

a) $x < 0$, $y < 0$

$$|x| < |y| \iff -x < -y \iff x > y, \text{ odakle deljenjem negativnim brojem } y < 0 \text{ dobijamo } \frac{x}{y} < 1$$

b) $x > 0$, $y > 0$

$$|x| < |y| \iff x < y, \text{ odakle deljenjem pozitivnim brojem } y > 0 \text{ dobijamo } \frac{x}{y} < 1$$

c) $x > 0$, $y < 0$

$$\frac{x}{y} < 0 \Rightarrow \frac{x}{y} < 1$$

d) $x < 0$, $y > 0$

$$\frac{x}{y} < 0 \Rightarrow \frac{x}{y} < 1$$

Odakle sledi da je pod zadatim uslovima tvrđenje (i) uvek tačno.

(ii) Za tvrđenje (ii) dobijamo da je uvek tačno jer važi

$$|x| < |y| \iff |x|^2 < |y|^2 \iff x^2 < y^2$$

(iii) Tvrđenje $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ nije ispunjeno za $x < 0$ i $y > 0$

(iv) Tvrđenje $\frac{1}{x^2} < \frac{1}{y^2} \iff x^2 > y^2$ nije ispunjeno jer suprotno tvrđenju (ii) koje je uvek tačno.

(v) Tvrđenje $x < y$ nije ispunjeno za $x > 0$ i $y < 0$.

Dakle samo su tvrđenja (i) i (ii) uvek tačna pod zadatim uslovima.

8.Ⓒ

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-6x+9}\cdot\frac{\sin(x-3)}{\ln(2x-5)+\cos\frac{\pi}{x}}\right) &= \lim_{x\to 3}\left(\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-3)^2}\cdot\frac{\sin(x-3)}{\ln(2x-5)+\cos\frac{\pi}{x}}\right)\\
&= \lim_{x\to 3}\left(\frac{(x-1)(x-2)}{\ln(2x-5)+\cos\frac{\pi}{x}}\cdot\frac{\sin(x-3)}{(x-3)}\right)\\
&= \frac{(3-1)(3-2)}{\ln(2\cdot 3-5)+\cos\frac{\pi}{3}}\cdot\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sin(x-3)}{(x-3)}\right)\\
&= 4\cdot\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sin(x-3)}{(x-3)}\right)
\end{aligned}$$

Poslednja granična vrednost je oblika $\frac{0}{0}$ i može se naći primenom L'Hôpital-ovog pravila

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sin(x-3)}{(x-3)}\right) = \lim_{x\to 3}\left(\frac{(\sin(x-3))'}{(x-3)'}\right) = \lim_{x\to 3}\left(\frac{\cos(x-3)}{1}\right) = \cos 0 = 1$$

Odakle sledi

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-6x+9}\cdot\frac{\sin(x-3)}{\ln(2x-5)+\cos\frac{\pi}{x}}\right) = 4$$

9.Ⓓ Neka su a, b i c dužine stranica trougla i neka je γ ugao između stranica a i b. Prema uslovima zadatka $\gamma = 120^{\circ}$, odakle sledi $c > a$, b. Stranice obrazuju aritmetičku progresiju sa razlikom 4. Neka je $c > b > a$, tada važi

$$b = a + 4,\ c = b + 4 = a + 8$$

Na osnovu kosinusne teoreme za zadati trougao imamo

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

odakle zamenom gornjih izraza dobijamo

$$(a+8)^2 = a^2 + (a+4)^2 - 2a(a+4)\cos 120^{\circ}$$

te uzimajući u obzir $\cos 120^{\circ} = -\cos 60^{\circ} = -\dfrac{1}{2}$ dobijamo sledeću kvadratnu jednačinu

$$a^2+16a+64 = a^2+a^2+8a+16+a^2+4a \iff 2a^2-4a-48=0 \iff a^2-2a-24=0 \iff (a-6)(a+4)=0$$

čija su rešenja $a_1 = -4 \vee a_2 = 6$. Za pozitivno rešenje, $a = a_2 = 6$, obim ovog trougla iznosi

$$O = a + b + c = a + a + 4 + a + 8 = 3a + 12 = 30$$

10.Ⓐ Rešenja jednačine

$$\sqrt{4x^2+9x+5} - \sqrt{2x^2+x-1} = \sqrt{x^2-1} \iff \sqrt{(4x+5)(x+1)} - \sqrt{(2x-1)(x+1)} = \sqrt{(x-1)(x+1)}$$

nalazimo u skupu realnih brojeva za koje su argumenti pod kvadratnim korenom ne-negativni:

1. $(4x+5)(x+1) \geq 0 \iff x \leq -\dfrac{5}{4} \vee x \geq -1$
2. $(2x-1)(x+1) \geq 0 \iff x \leq -1 \vee x \geq \dfrac{1}{2}$
3. $(x-1)(x+1) \geq 0 \iff x \leq -1 \vee x \geq 1$

odnosno u sledećem intervalu $x \in \left(-\infty, \dfrac{5}{4}\right] \cup \{-1\} \cup [1, +\infty)$. Jedno rešenje jednačine se očigledno dobija za

$$x + 1 = 0 \iff x = x_1 = -1$$

Za $x \neq -1$ jednačina postaje

$$\sqrt{(4x+5)} = \sqrt{(2x-1)} + \sqrt{(x-1)}$$

koja ima rešenja u skupu realnih brojeva za

1. $4x+5 \geq 0 \iff x \geq -\dfrac{5}{4}$
2. $2x-1 \geq 0 \iff x \geq \dfrac{1}{2}$
3. $x-1 \geq 0 \iff x \geq 1$

odnosno za $x \geq 1$.

Kvadriranjem leve i desne strane ove jednačine dobijamo

$$4x+5 = 2x-1+x-1+2\sqrt{(2x-1)(x-1)} \iff x+7 = 2\sqrt{(2x-1)(x-1)}$$

odakle jos jednim kvadriranjem leve i desne strane dobijene jednačine dalje imamo

$$x^2+14x+49 = 4(2x-1)(x-1) = 8x^2-12x+4 \iff 7x^2-26x-45=0$$

Rešenja ove kvadratne jednačine su oblika

$$x_{2/3} = \frac{26 \pm \sqrt{26^2+4\cdot 7\cdot 45}}{2\cdot 7} = \frac{26\pm\sqrt{1936}}{14} = \frac{26\pm 44}{14} = \begin{cases} -\dfrac{9}{7} \\ 5 \end{cases}$$

od kojih jedino $x_3 = 5$ zadovoljava gornje dobijeni uslov $x \geq 1$. Dakle zadata jednačina ima dva realna rešenja $x_1 = -1$ i $x_3 = 5$ te sledi da je zbir svih realnih rešenja ove jednačine jednak $x_1 + x_3 = -1 + 5 = 4$

11.Ⓒ Polazimo od izraza za razvoj binoma n-tog stepena

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

odakle za $a = b = 1$ dobijamo da je suma svih binomnih koeficijenata u tom razvoju jednaka

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Na osnovu ove formule, suma svih binomnih koeficijenata u razvoju binoma $\left(x^{2019} + \frac{1}{x^{2019}}\right)^n$ jednaka 2^n, dok je suma svih binomnih koeficijenata u razvoju binoma $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{n}{2}}$ jednaka $2^{\frac{n}{2}}$ i prema uslovu zadatka važi

$$2^n = 4 \cdot 2^{\frac{n}{2}} = 2^2 \cdot 2^{\frac{n}{2}} = 2^{\frac{n}{2}+2}$$

Rešenje poslednje jednačine se dobija za

$$n = \frac{n}{2} + 2 \iff \frac{n}{2} = 2 \iff n = 4$$

Sada se za razvoj prvog binoma ima

$$\left(x^{2019} + \frac{1}{x^{2019}}\right)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} \left(x^{2019}\right)^{4-k} \left(x^{-2019}\right)^k = \sum_{k=0}^{4} x^{2019(4-2k)}$$

Jedini član u ovom razvoju koji ne sadrži x se dobija za

$$4 - 2k = 0 \iff k = 2$$

i binomni koeficijent uz ovaj član jednak je

$$\binom{4}{2}$$

Za razvoj drugog binoma imamo

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{4}{2}} = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x + \frac{1}{x} + 2$$

i binomni koeficijent uz jedini član koji ne sadrži x jednak je 2. Konačno za zbir binomnih koeficijenata uz članove koji ne sadrže x se dobija

$$2 + \binom{4}{2} = 2 + \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 8$$

12.Ⓑ Na slici levo je prikazan pravougli trougao kateta dužine a i b i hipotenuze dužine c sa najmanjim uglom α između duže katete b i hipotenuze c i visinom h nad hipotenuzom c. Rotacijom ovog trougla oko hipotenuze formirano je obrtno telo T_1 koje se sastoji od dve kupe poluprečnika osnove h i visina c_1 i c_2 kao na slici desno. Zapremina tela T_1 data je izrazom

$$V_{T_1} = \frac{1}{3} B_1 H_1 + \frac{1}{3} B_2 H_2$$

gde su površine osnova dve formirane kupe date izrazom

$$B_1 = B_2 = h^2 \pi$$

i gde su visine

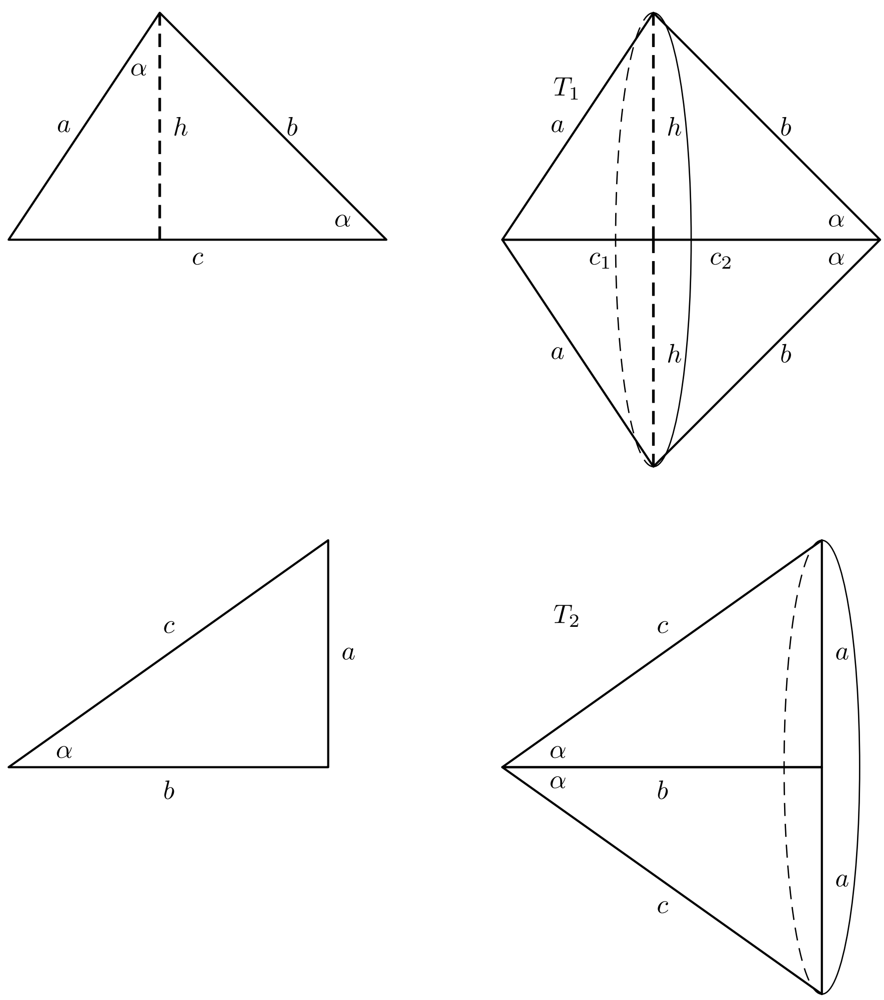
$$H_1 = c_1,\ H_2 = c_2$$

i pritom važi

$$c_1 + c_2 = c$$

Dalje sledi

$$V_{T_1} = \frac{1}{3} h^2 \pi c_1 + \frac{1}{3} h^2 \pi c_2 = \frac{1}{3} h^2 \pi (c_1 + c_2) = \frac{1}{3} h^2 \pi c$$



Rotacijom istog trougla oko duže katete b formira se obrtno telo T_2 koje je kupa poluprečnika osnove a i visine b kao na slici iznad. Zapremina tela T_2 data je izrazom

$$V_{T_2} = \frac{1}{3}BH$$

gde je

$$B = a^2\pi$$

i

$$H = b$$

te dalje sledi

$$V_{T_2} = \frac{1}{3}a^2\pi b$$

Za odnos zapremina tela T_1 i T_2 se odavde dobija

$$\frac{V_{T_1}}{V_{T_2}} = \frac{\frac{1}{3}h^2\pi c}{\frac{1}{3}a^2\pi b} = \frac{h^2 c}{a^2 b}$$

Iz izraza za površinu pravouglog trougla kateta a i b, hipotenuze c i visine h nad hipotenuzom imamo

$$P = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch \Rightarrow ab = ch$$

te se gornji izraz može uprostiti

$$\frac{V_{T_1}}{V_{T_2}} = \frac{h \cdot h \cdot c}{a \cdot a \cdot b} = \frac{h}{a}$$

Kako takođe važi (videti sliku pravouglog trougla uz telo T_1)

$$h = a\cos\alpha$$

to se konačno dobija

$$\frac{V_{T_1}}{V_{T_2}} = \frac{h}{a} = \cos\alpha$$

13.Ⓓ Jednačina kružnice poluprečnika R sa centrom na x osi u tački $(x_0, 0)$ je

$$(x - x_0)^2 + y^2 = R^2$$

Ova kružnica ima zajedničku tangentu sa parabolom $y^2 = 12x$ u tački $A(3,6)$. To znači da se ove dve krive dodiruju u toj tački i da su izvodi ovih dveju krivih u toj tački jednaki.

Iz prvog uslova imamo

$$(x - x_0)^2 + y^2 = R^2 \wedge y^2 = 12x \Rightarrow (x - x_0)^2 + 12x = R^2$$

$$A(3,6): \; x = 3, \; y = 6 \;\Rightarrow (3 - x_0)^2 + 12 \cdot 3 = R^2 \Rightarrow R^2 = (x_0 - 3)^2 + 6^2$$

Primenjujući izvod po promenljivoj x na levu i desnu stranu jednačine kružnice, dobijamo:

$$(x - x_0)^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow 2(x - x_0) + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x - x_0}{y}$$

Za izvod u tački $A(3,6)$ dobijamo

$$y' = -\frac{3 - x_0}{6}$$

Slično, primenjujući izvod po promenljivoj x na levu i desnu stranu jednačine parabole imamo

$$y^2 = 12x \Rightarrow 2yy' = 12 \Rightarrow y' = \frac{6}{y}$$

Za izvod u tački $A(3,6)$ dobijamo

$$y' = \frac{6}{6} = 1$$

Kako su izvodi ove dve krive po promenljivoj x u tački A jednaki, sledi

$$-\frac{3 - x_0}{6} = 1 \Rightarrow x_0 - 3 = 6 \Rightarrow x_0 = 9$$

Za poluprečnik kruga se sada dobija

$$R^2 = (x_0 - 3)^2 + 6^2 = (9 - 3)^2 + 6^2 = 72$$

Konačno, jednačina kružnice data je izrazom

$$(x - 9)^2 + y^2 = 72$$

14.Ⓒ Razlikujemo dva slučaja:

1. $a \neq -2$

   U ovom slučaju zajedničke tačke parabole $y = (a+2)x^2 - ax - 3$ i prave $y = ax - 4$ nalazimo rešavanjem sistema jednačina

   $$\begin{aligned} y &= (a+2)x^2 - ax - 3 \\ y &= ax - 4 \end{aligned}$$

   $$ax - 4 = (a+2)x^2 - ax - 3 \iff (a+2)x^2 - 2ax + 1 = 0$$

   Dobijena kvadratna jednačina će imati samo jedno rešenje za x ako je diskriminanta ove jednačine jednaka nuli

   $$D = (2a)^2 - 4 \cdot (a+2) = 4a^2 - 4a - 8 = 0 \iff a^2 - a - 2 = 0 \iff (a+1)(a-2) = 0$$

   čija su rešenja

   $$a_1 = -1 \text{ i } a_2 = 2$$

2. $a = -2$

   U ovom slučaju imamo dve prave: $y = 2x - 3$ i $y = -2x - 4$ koje se seku u tački

$$2x - 3 = -2x - 4 \iff 4x = -1 \iff x = -\frac{1}{4} \Rightarrow y = -2x - 4 = -\frac{7}{2}$$

   tako da se za $a = a_3 = -2$ grafici takođe seku u jednoj tački

Konačno se za traženi zbir svih vrednosti parametra a za koje grafici imaju tačno jednu zajedničku tačku dobija

$$a_1 + a_2 + a_3 = -1 + 2 - 2 = -1$$

15.Ⓑ Označimo levu stranu zadate jednačine funkcijom $f(x)$ a desnu stranu zadate jednačine funkcijom $g(x)$. Sada se zadata jednačina može napisati u obliku

$$f(x) = g(x)$$

gde je

$$f(x) = 3^x + 4^x$$

i

$$g(x) = 5^x$$

Za ove dve exponencijalne funkcije važi

$$f(x) > 0,\ \ g(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Kako za izvode ovih funkcija takođe važi

$$f'(x) = 3^x \cdot \ln(3) + 4^x \cdot \ln(4) > 0$$

$$g'(x) = 5^x \cdot \ln(5) > 0$$

to su ove funkcije monotono rastuće.

Za $x = 1$ imamo

$$f(1) = 7 \wedge g(1) = 5 \Rightarrow f(0) > g(0)$$

Za $x = 2$ imamo

$$f(2) = 3^2 + 4^2 = 25 \wedge g(2) = 5^2 = 25 \Rightarrow f(2) = g(2)$$

dakle, jedno rešenje jednačine $f(x) = g(x)$ je $x = x_1 = 2$

Za $x = 3$ imamo

$$f(3) = 3^3 + 4^3 = 27 + 64 = 91 \wedge g(3) = 5^3 = 125 \Rightarrow f(3) < g(3)$$

Ova dva grafika se seku u tački $x = 2$, i kako su $f(x)$ i $g(x)$ monotono rastuće eksponencijalne funkcije to im je $x = 2$ jedina zajednička tačka i ujedno jedino realno rešenje zadate jednačine.

16.Ⓑ Tražimo ukupan broj racionalnih brojeva u skupu

$$S = \left\{ \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^{2019}, \mathrm{Im}\left(\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2019}\right), 0.3333333,\ \frac{\pi}{3},\ \sin\frac{\pi}{3},\ \frac{22}{7} \right\}$$

Najpre $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \notin Q$ je iracionalni broj.

Takođe $\frac{\pi}{3} \notin Q$ nije racionalan broj.

S druge strane $\frac{22}{7} \in Q$ je racionalan broj, kao i $0.3333333 = \frac{3333333}{10000000} \in Q$.

Preostaje da se ispita jesu li $\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^{2019}$ i $\mathrm{Im}\left(\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2019}\right)$ racionalni brojevi.

Kako je
$$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$$
to dalje sledi
$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2019}=\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{2019}=e^{i\frac{2\cdot 2019\pi}{3}}=e^{i673\cdot 2\pi}=e^{i\cdot 0}=1$$
te je ovaj broj racionalan.

Kako je
$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=e^{i\frac{\pi}{4}}$$
to dalje sledi
$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2019}=\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2019}=e^{i2019\frac{\pi}{4}}=e^{i(3+2016)\frac{\pi}{4}}=e^{i\frac{3\pi}{4}+i504\pi}=e^{i\frac{3\pi}{4}}=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$
te konačno dobijamo
$$\operatorname{Im}\left(\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2019}\right)=\operatorname{Im}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
što ne pripada skupu racionalnih brojeva.

Dakle, ukupan broj racionalnih brojeva u skupu S je 3.

---

17. Ⓐ
$$\log_{\sin x}\cos x+\log_{\cos x}\sin x>2,\qquad x\in[0,2\pi]$$
U skupu realnih brojeva, argument logaritamske funkcije mora biti veći od nule
$$\cos x>0\Rightarrow x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$$
$$\sin x>0\Rightarrow x\in(0,\pi)$$
Odakle sledi
$$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$
Istovremeno, osnova logaritamske funkcije mora biti pozitivna i različita od 1
$$0<\sin x<1\wedge 0<\cos x<1$$
što je u traženom skupu $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ uvek ispunjeno.

Uvedimo sada smenu $t=\log_{\sin x}\cos x$. Zadata nejednačina u tom slučaju dobija oblik
$$\log_{\sin x}\cos x+\log_{\cos x}\sin x>2\iff\log_{\sin x}\cos x+\frac{1}{\log_{\sin x}\cos x}>2\iff t+\frac{1}{t}>2\iff\frac{(t-1)^2}{t}>0$$
Kako je $(t-1)^2\geq 0$ to se poslednja nejednačina svodi na
$$t\neq 1\wedge t>0$$
Iz prvog uslova imamo
$$t\neq 1\Rightarrow\log_{\sin x}\cos x\neq 1\Rightarrow\log_{\sin x}\cos x\neq\log_{\sin x}\sin x\Rightarrow\cos x\neq\sin x\Rightarrow\operatorname{tg}x\neq 1\Rightarrow x\neq\frac{\pi}{4}$$
Iz drugog uslova sledi
$$t>0\Rightarrow\log_{\sin x}\cos x>0\Rightarrow\log_{\sin x}\cos x>\log_{\sin x}1\Rightarrow\cos x<1$$
što je već ispunjeno u traženom skupu $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Uzimajući u obzir gornja rešenja, za konačno rešenje zadate nejednačine se dobija

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$$

18.Ⓔ Za uglove trougla α, β i γ, $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ važi

$$\sin\alpha - \sin\beta + \sin\gamma = 1$$

odakle sledi

$$\sin\alpha - \sin\beta = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\gamma$$

Izjednačavanjem odgovarajućih argumenata sinusnih funkcija sa leve i desne strane gornje jednačine dobijamo jedno rešenje

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \wedge \beta = \gamma$$

Kako za uglove trougla važi

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

sledi

$$\beta = \gamma = \frac{\pi}{4}$$

i ovo rešenje ispunjava uslov $\alpha \geq \beta \geq \gamma$.

19.Ⓒ Treba pronaći ukupan broj uređenih parova (x, y) tako da $x, y \in A$ i $|x-y| \geq 2$, gde je $A = \{1, 2, \ldots, 2019\}$.

$$\begin{array}{ccccc}
x = 1 & \to & y = 3, 4, 5 \ldots, 2019 & \to & 2017 \text{ uređenih parova} \\
x = 2 & \to & y = 4, 5, 6, \ldots, 2019 & \to & 2016 \text{ uređenih parova} \\
x = 3 & \to & y = 1, 5, 7, \ldots, 2019 & \to & 2016 \text{ uređenih parova} \\
x = 4 & \to & y = 1, 2, 6, \ldots, 2019 & \to & 2016 \text{ uređenih parova} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
x = 2016 & \to & y = 1, 2, \ldots, 2013, 2014, 2018, 2019 & \to & 2016 \text{ uređenih parova} \\
x = 2017 & \to & y = 1, 2, \ldots, 2013, 2014, 2015, 2019 & \to & 2016 \text{ uređenih parova} \\
x = 2018 & \to & y = 1, 2, \ldots, 2013, 2014, 2015, 2016 & \to & 2016 \text{ uređenih parova} \\
x = 2019 & \to & y = 1, 2, \ldots, 2014, 2015, 2016, 2017 & \to & 2017 \text{ uređenih parova}
\end{array}$$

Za $x = 1$ i $x = 2019$ imamo po 2017 mogućih uređenih parova. Za sve preostale $1 < x < 2019$ imamo po 2016 uređenih parova. Dakle, ukupan broj uređenih parova je

$$2 \cdot 2017 + 2017 \cdot 2016 = 2017(2 + 2016) = 2017 \cdot 2018$$

20.Ⓐ Kako se tačka C nalazi na x osi to su njene koordinate u Dekartovom koordinatnom sistemu $C(x, 0)$.

Sada se za rastojanje tačke C od tačke $A(2, 1)$ ima

$$d_{AC} = \sqrt{(x-2)^2 + 1^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$$

dok se za rastojanje tačke C od tačke $B(4, 3)$ ima

$$d_{BC} = \sqrt{(x-4)^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 - 8x + 25}$$

Treba pronaći koordinatu x tako da je zbir duži $d(x) = d_{AC} + d_{BC}$ minimalan.

Tražimo minimalnu vrednost sledeće funkcije

$$d(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5} + \sqrt{x^2 - 8x + 25}$$

Izvod ove funkcije po promenljivoj x je

$$d'(x) = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+5}} + \frac{2x-8}{2\sqrt{x^2-8x+25}} = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}} + \frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+25}}$$

Ekstremne frednosti funkcije $d(x)$ se dobijaju iz uslova

$$d'(x) = 0$$

Sledi

$$(x-2)\sqrt{x^2-8x+25}+(x-4)\sqrt{x^2-4x+5}=0 \Rightarrow (x-2)\sqrt{x^2-8x+25}=-(x-4)\sqrt{x^2-4x+5}$$

U prethodnoj jednačini (uzimajući u obzir da su vrednosti kvadratnih korena veće ili jednake nuli) mora važiti

$$(x-2)(x-4) \leq 0 \iff x \in [2,4]$$

Kvadriranjem leve i desne strane prethodne jednačine dalje dobijamo

$$(x^2-4x+4)(x^2-8x+25)=(x^2-8x+16)(x^2-4x+5) \Rightarrow 2x^2-7x+5=0$$

Rešenja poslednje kvadratne jednačine su

$$x_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{7^2-4\cdot 2\cdot 5}}{2\cdot 2} = \frac{7\pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ \frac{5}{2} \end{cases}$$

Jedino rešenje $x_2 = \dfrac{5}{2}$ pripada intervalu $[2,4]$.

Sada se za minimalni zbir dužina dobija

$$d_{\min} = d\left(x=\frac{5}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4\cdot\frac{5}{2}+5} + \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 8\cdot\frac{5}{2}+25} = \sqrt{\frac{5}{4}} + \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$$

PROBNI PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE ZA UPIS NA ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET 2019

1. Ako je $\log_9 \frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\log_3(9y)$, $x > 0$ i $y > 0$, onda je 8^{6xy} jednako:

(A) 2 (B) $2\sqrt{2}$
(C) 8 (D) 64
(E) ne može se odrediti na osnovu datog podatka (N) Ne znam

2. Vrednost izraza $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2}$ za $a > b > 0$, jednaka je:

(A) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ (B) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (C) 2 (D) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ (E) 0 (N) Ne znam

3. Vrednost izraza $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{12}$ jednaka je:

(A) $1 - \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ (B) $\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - 1$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$
(D) $\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ (E) $\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \sqrt{2} - 1$ (N) Ne znam

4. Neka su $x > 2$ i $y < -2$ realni brojevi. Koja od sledećih tvrđenja su uvek tačna?

(i) $\frac{x}{y} > 1$ (ii) $|x|^2 > |y|^2$ (iii) $x + \frac{3}{4} > 2y + \frac{1}{2}$ (iv) $x^2 - 1 > y^2 - 2$ (v) $\frac{1}{x^2} > \frac{1}{y^2}$

(A) (iii) i (iv) (B) Samo (iv) (C) (i), (ii), i (iv) (D) Samo (iii) (E) (ii) i (iii) (N) Ne znam

5. Ostatak pri deljenju polinoma $P(x) = x^{2019} + 2019$ polinomom $Q(x) = x^2 + 1$ jeste polinom:

(A) 2018 (B) $2019x - 1$ (C) $x + 2019$ (D) $-x + 2019$ (E) 2020 (N) Ne znam

6. Ako je $f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$, onda je $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ jednako:

(A) -2 (B) -4 (C) 2 (D) 4 (E) 0 (N) Ne znam

7. Ako su k_1 i k_2 koncentrični krugovi, pri čemu je tetiva dužine 6 cm veećeg kruga istovremeno tangenta manjeg, kolika je površina kružnog prstena koji oni obrazuju?

(A) 12π cm^2 (B) 3π cm^2 (C) 4π cm^2 (D) 36π cm^2 (E) 9π cm^2 (N) Ne znam

8. Neka su a, b i c dužine ivica kvadra, čija je zapremina 8 cm^3, a površina 32 cm^2. Ako dužine ivica kvadra obrazuju geometrijsku progresiju, onda je $a + b + c$ jednako:

(A) 6 cm (B) $5 + \sqrt{5}$ cm (C) 8 cm (D) $5 - \sqrt{5}$ cm (E) $3 + \sqrt{5}$ cm (N) Ne znam

9. Prava kupa upisana je u valjak tako da se njena osnova poklapa sa jednom osnovom valjka, a njen vrh je centar druge osnove valjka. Ako je izvodnica kupe nagnuta prema ravni osnove pod uglom od 60°, onda je odnos površine kupe i valjka jednak:

(A) $\frac{3(\sqrt{3}+1)}{4}$ (B) $\frac{2}{2+\sqrt{3}}$ (C) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (D) $\frac{3(\sqrt{3}-1)}{4}$ (E) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (N) Ne znam

10. Ako je $z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2019}$, $i^2 = -1$, onda je izraz $\mathbf{Re}\, z + \mathbf{Im}\, z$ jednak:

(A) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (C) -1 (D) 1 (E) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ (N) Ne znam

11. Grafici funkcija $y = (a-3)x^2 - 2ax - 4$ i $y = ax + 5$, $a \in \mathbb{R}$, nemaju zajedničkih tačaka ako i samo ako parametar a pripada skupu:

(A) $(-4, 2)$ (B) $(-5, 2)$ (C) $(-3, 2)$ (D) $(-7, 2)$ (E) $(-6, 2)$ (N) Ne znam

12. Celobrojnih rešenja jednačine $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = 1$ ima:

(A) 4 (B) 3 (C) 2
(D) 1 (E) Beskonačno mnogo (N) Ne znam

13. Granična vrednost $\lim\limits_{x\to 8}\left(\operatorname{tg}\frac{2\pi}{x}\cdot\frac{x^2-16x+64}{x^2-9x+8}\cdot\frac{\sqrt{x^2-7x+1}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}-2}\right)$ jednaka je:

(A) $\frac{12}{7}$ (B) 0 (C) 12 (D) $\frac{7}{12}$ (E) 7 (N) Ne znam

14. Ako je m najmanja vrednost funkcije $f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + \cdots + (x-2019)^2$, onda m pripada skupu:

(A) $\left(10^3, 10^5\right]$ (B) $\left(10^6, 10^7\right]$ (C) $\left(10^5, 10^6\right]$ (D) $\left(10^7, +\infty\right)$ (E) $\left(0, 10^3\right]$ (N) Ne znam

15. Prave t i p seku se u centru kružnice k. Ugao između njih je α. Ako prava t seče kružnicu k u tačkama T i S, a prava p seče kružnicu k u tačkama P i Q, površina četvorougla $TPSQ$ maksimalna je ukoliko je ugao α jednak:

(A) 60° (B) 45° (C) 30° (D) 15° (E) 90° (N) Ne znam

16. U binomnom razvoju $\left(\sqrt[3]{7}+\sqrt[7]{3}\right)^{2019}$ broj članova koji su celi brojevi jednak je:

(A) 289 (B) 97 (C) 288 (D) 674 (E) 96 (N) Ne znam

17. Broj realnih rešenja jednačine $x = 3\pi\cos x$ jeste::

(A) 5 (B) 7 (C) 3 (D) 4 (E) 2 (N) Ne znam

18. Od svih tačaka koje pripadaju krivoj $2x^2 + y^2 - 24(x-y) + 208 = 0$ tačka $M(x_0, y_0)$ ima najveću apsolutnu vrednost ordinate. Tada je $2x_0 + y_0$ jednako:

(A) $-12+\sqrt{8}$ (B) $-2\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{8}$ (D) $24+\sqrt{8}$ (E) -2 (N) Ne znam

19. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 2019 čije su cifre u strogo rastućem poretku?

(A) 205 (B) 195 (C) 185 (D) 182 (E) 213 (N) Ne znam

20. Skup rešenja nejednačine $5\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^{\sin^2 x} + 4\cdot 5^{\cos(2x)} > 25^{\sin x\cos x}$ na segmentu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ jeste oblika (za neke realne brojeve a, b, c, d takve da je $-\frac{\pi}{2} \le a < b < c < d \le \frac{3\pi}{2}$) :

(A) $(a,b)\cup(b,c)$ (B) $[a,b)\cup(b,c]$ (C) $(a,b)\cup[c,d)$ (D) $[a,b)\cup(c,d]$ (E) $(a,b)\cup(c,d)$ (N) Ne znam

REŠENJA

1. Ⓓ

$$\log_9 \frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\log_3(9y),\ x, y > 0$$

Važi

$$\log_9 \frac{1}{x} = \log_9 x^{-1} = -\log_9 x = -\frac{\log_3 x}{\log_3 9} = -\frac{1}{2}\log_3 x$$

te dalje sledi

$$-\frac{1}{2}\log_3 x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\log_3(9y) \Rightarrow \log_3 x + \log_3(9y) = 1 \Rightarrow \log_3 9xy = \log_3 3 \Rightarrow 9xy = 3 \Rightarrow xy = \frac{1}{3}$$

odnosno

$$8^{6xy} = 8^2 = 64.$$

---

2. Ⓒ Ima se

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 + (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{a+b+2\sqrt{ab}+a+b-2\sqrt{ab}}{a-b} = 2\frac{a+b}{a-b}$$

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 - (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{a+b+2\sqrt{ab}-(a+b-2\sqrt{ab})}{a-b} = 2\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}$$

te se za vrednost zadatog izraza dobija

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2} &= \sqrt{4\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 - 4\frac{4ab}{(a-b)^2}} \\ &= 2\sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab-4ab}{(a-b)^2}} = 2\sqrt{\frac{(a-b)^2}{(a-b)^2}} = 2.\end{aligned}$$

---

3. Ⓑ Koristeći sledeći trigonometrijske identitet

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

dobijamo

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}-1$$

Slično, iz sledećeg identiteta

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

dobijamo

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

gde smo uzeli pozitivan znak ispred kvadratnog korena jer su vrednosti sinusne i kosinusne funkcije za pozitivne uglove manje od $\frac{\pi}{2}$ pozitivne.

Sada imamo

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{2}-1+\frac{2-\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}+2\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}+4}{2\sqrt{2}} - 1$$

Kako je

$$4-2\sqrt{3} = 3-2\sqrt{3}+1 = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1^2 = (\sqrt{3}-1)^2$$

to se prethodni izraz može dalje uprostiti

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1+4}{2\sqrt{2}}-1=\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}-1.$$

---

4. Ⓓ Razmotrimo svaki od predloženih tvrđenja ponaosob za $x>2$ i $y<-2$:

(i) $\frac{x}{y}>1$

Kako je $x>2\Rightarrow x>0$ i $y<-2\Rightarrow y<0$, to sledi $\frac{x}{y}<0$. Tvrđenje $\frac{x}{y}>1$ je netačno.

(ii) $|x|^2>|y|^2$

Imamo $x>2\Rightarrow |x|>2\Rightarrow |x|^2>4$ i $y<-2\Rightarrow |y|>2\Rightarrow |y|^2>4$ odakle sledi da zadato tvrđenje nije ispunjeno za sve x i y iz zadatog skupa.

(iii) $x+\frac{3}{4}>2y+\frac{1}{2}$

Zadato tvrđenje je ekvivalentno sledećem $2x>4y-\frac{1}{2}$. Sada imamo $x>2\Rightarrow 2x>4$. $y<-2\Rightarrow 4y-\frac{1}{2}<-8-\frac{1}{2}$. Dakle leva strana nejednačine je uvek pozitivna a desna uvek negativna, što znači da je zadata nejednačina ispunjena.

(iv) $x^2-1>y^2-2$

Zadato tvrđenje je ekvivalentno sledećem $x^2>y^2-1$. Slično kao i u tvrđenju (ii) imamo $x^2>4$ i $y^2>4$ što znači da $x^2>y^2-1$ nije ispunjeno za sve x i y iz zadatog skupa.

(iv) $\frac{1}{x^2}<\frac{1}{y^2}$

Slično kao i u prethodnom tvrđenju imamo $\frac{1}{x^2}<4$ i $\frac{1}{y^2}<4$ što znači da $\frac{1}{x^2}<\frac{1}{y^2}$ nije ispunjeno za sve x i y iz zadatog skupa.

---

5. Ⓓ Ostatak pri deljenju polinoma

$$P(x)=x^{2019}+2019$$

polinomom

$$Q(x)=x^2+1$$

je polinom oblika

$$R(x)=ax+b$$

tako da važi

$$P(x)=Q(x)S(x)+R(x)$$

Kako je za $x=i$, $Q(i)=0$, to iz prethodnog izraza imamo

$$P(i)=R(i)$$

odnosno

$$i^{2019}+2019=ai+b$$

Kako je $2019=4\cdot 504+3$ to sledi

$$i^{2019}=i^{3+4\cdot 504}=i^3\cdot\left(i^4\right)^{504}=-i$$

i iz prethodne jednačine se dobija

$$-i+2019=ai+b$$

Izjednačavanjem realnih i imaginarnih delova sa leve i desne strane u poslednjoj jednačini nalazimo

$$a=-1,\ b=2019$$

te je

$$R(x) = -x + 2019.$$

6.Ⓓ Kako je

$$\operatorname{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

i

$$\operatorname{ctg}'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

to imamo

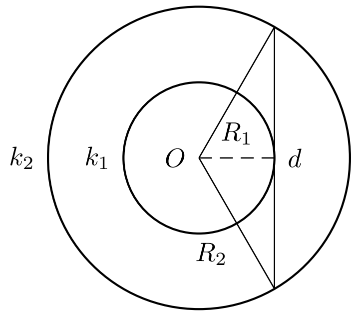
$$f'(x) = (\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)' = \operatorname{tg}'(x) - \operatorname{ctg}'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$$

Kako je $\sin^2 \frac{\pi}{4} = \cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$ konačno dobijamo

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 + 2 = 4.$$

7.Ⓔ Na slici su prikazane koncentrične kružnice k_1, poluprečnika R_1 i k_2 poluprečnika $R_2 > R_1$. Neka je d dužina tetive kružnice k_2 koja je ujedno i tangenta kružnice k_1. Primenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao kateta R_1 i $d/2$ i hipotenuze R_1 dobijamo:

$$R_2^2 = R_1^1 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow R_2^2 - R_1^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 9.$$



Za površinu prstena koji obrazuju kružnice k_1 i k_2 se sada dobija

$$P = (R_2^2 - R_1^2)\pi = 9\pi\,\text{cm}^2.$$

8.Ⓒ Označimo stranice kvadra a, b, i c, tako da je $c > b > a$. Ako ove stranice obrazuju geometrijsku progresiju, onda ih možemo predstaviti u sledećem obliku

$$a = a_0,\ b = qa_0,\ c = q^2 a_0$$

Za zapreminu ovog kvadra imamo

$$V = abc = (qa_0)^3 \Rightarrow qa_0 = \sqrt[3]{V}$$

a za njegovu površinu

$$P = 2(ab + bc + ca) = 2qa_0^2(1 + q + q^2)$$

Tražen je zbir stranica ovog kvadra

$$S = a + b + c = a_0(1 + q + q^2)$$

Iz poslednje tri jednačine se dobija izraz

$$P = 2qa_0 S = 2\sqrt[3]{V} S$$

odakle imamo

$$S = \frac{P}{2\sqrt[3]{V}} = \frac{32}{2\sqrt[3]{8}} = 8.$$

9.Ⓓ Površina valjka poluprečnika osnove R i visine H je data formulom

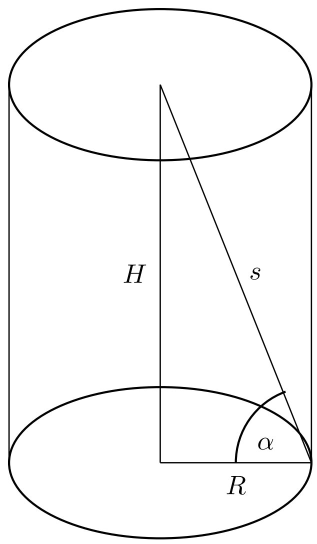
$$P_{\mathrm{v}} = 2R\pi(R+H)$$

dok se za površinu kupe iste osnove i visine H i izvodnice s ima

$$P_{\mathrm{k}} = R\pi(R+s)$$

te se za odnos ovih dveju površina dobija

$$\frac{P_{\mathrm{k}}}{P_{\mathrm{v}}} = \frac{R+s}{2(R+H)}$$



Kako je ugao između izvodnice s i osnove kupe $\alpha = 60^{\mathrm{o}}$ to dalje imamo

$$R = s\cos\alpha = s\cos 60^{\mathrm{o}} = \frac{1}{2}s$$

$$H = s\sin\alpha = s\sin 60^{\mathrm{o}} = \frac{\sqrt{3}}{2}s$$

te se za količnik površina kupe i valjka konačno dobija

$$\frac{P_{\mathrm{k}}}{P_{\mathrm{v}}} = \frac{R+S}{2(R+H)} = \frac{\frac{1}{2}+1}{2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{3}{2(1+\sqrt{3})} = \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{3}+1}\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{4}.$$

10.Ⓒ

$$z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2019}, \; i^2 = -1$$

Korišćenjem Euler-ove formule $\cos\alpha + i\sin\alpha = \mathrm{e}^{i\alpha}$ dobijamo

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$$

te se za zadati izraz dobija

$$z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2019} = \left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2019} = \mathrm{e}^{i\pi\frac{2019}{3}} = \mathrm{e}^{i\pi 673} = \mathrm{e}^{i\pi}\mathrm{e}^{i672\pi} = \mathrm{e}^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

11.Ⓔ Presečne tačke funkcija tražimo rešavanjem sistema jednačina

$$y = (a-3)x^2 - 2ax - 4$$

$$y = ax + 5$$

Razlikujemo sledeća tri slučaja

1. $a = 0$

   U ovom slučaju sistem jednačina postaje
   $$y = -3x^2 - 4$$
   $$y = 5$$
   Oduzimanjem druge jednačine od prve dobijamo kvadratnu jednačinu po promenljivoj x
   $$x^2 + 3 = 0$$
   koja nema rešenja u skupu realnih brojeva. Dakle za $a = 0$, grafici nemaju zajedničkih tačaka.

2. $a = 3$

   U ovom slučaju sistem jednačina postaje
   $$y = -6x - 4$$
   $$y = 3x + 5$$
   Oduzimanjem druge jednačine od prve dobijamo sledeću jednačinu po promenljivoj x
   $$9x + 9 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 2$$
   dakle, za $a = 3$, grafici imaju jednu presečnu tačku

3. $a \neq 0, 3$

   $$y = (a-3)x^2 - 2ax - 4$$
   $$y = ax + 5$$
   Oduzimanjem druge jednačine od prve dobijamo sledeću kvadratnu jednačinu po promenljivoj x
   $$(a-3)x^2 - 2ax - 4 - ax - 5 = 0 \Rightarrow (a-3)x^2 - 3ax - 9 = 0$$
   Diskriminanta ove kvadratne jednačine je data izrazom
   $$D = (-3a)^2 - 4 \cdot (a-3) \cdot (-9) = 9a^2 + 36a - 108$$
   Kvadratna jednačina nema rešenja u skupu realnih brojeva ako je diskriminanta negativna
   $$D < 0 \Rightarrow 9a^2 + 36a - 108 < 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 < 0$$
   Sledi
   $$a_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 + 4 \cdot 12}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-4 \pm 8}{2}$$
   $$a_1 = -6 \vee a_2 = 2$$
   Za $a \in (-6, 2)$ grafici nemaju zajedničkih tačaka.

Kako $a = 0 \in (-6, 2)$ i $a = 3 \notin (-6, 2)$, to je konačno rešenje $a \in (-6, 2)$.

12.Ⓐ Tražimo sva celobrojna rešenja jednačine

$$\sqrt{x + 5 - 4\sqrt{x+1}} + \sqrt{x + 2 - 2\sqrt{x+1}} = 1$$

Izraz pod kvadratnim korenom ne sme biti negativan

$$x + 1 \geq 0 \Rightarrow x > -1$$

dakle rešenja tražimo u skupu realnih brojeva $x > -1$.

Uvođenjem smene $t = \sqrt{x+1} \geq 0 \Rightarrow t^2 = x + 1$ dobijamo

$$x + 5 - 4\sqrt{x+1} = t^2 + 1 - 4t = (t-2)^2 \geq 0$$

$$x + 2 - 2\sqrt{x+1} = t^2 + 1 - 2t = (t-1)^2 \geq 0$$

te zadata jednačina postaje

$$\sqrt{(t-2)^2} + \sqrt{(t-1)^2} = 1 \Leftrightarrow |t-2| + |t-1| = 1$$

Prema definiciji apsolutne vrednosti važi

$$|t-2| = \begin{cases} t-2, & t > 2 \\ -t+2, & t \leq 2 \end{cases}$$

$$|t-1| = \begin{cases} t-1, & t > 1 \\ -t+1, & t \leq 1 \end{cases}$$

Sada razlikujemo sledeća tri slučaja

1. $t \in [0, 1]$

   U ovom slučaju važi

   $$|t-2| + |t-1| = 1 \Leftrightarrow -t + 2 - t + 1 = 1 \Leftrightarrow t = 1$$

   Kako $t = 1 \in [0, 1]$, to je $t = 1$ jedino (celobrojno) rešenje jednačine u ovom intervalu.
2. $t \in (1, 2]$

   U ovom slučaju važi

   $$|t-2| + |t-1| = 1 \Leftrightarrow t - 2 - t + 1 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$$

   Poslednja jednakost je uvek ispunjena u intervalu $t \in (1, 2]$
3. $t \in (2, +\infty)$

   U ovom slučaju važi

   $$|t-2| + |t-1| = 1 \Leftrightarrow t - 2 + t - 1 = 1 \Leftrightarrow t = 2$$

   Kako $t \notin (2, +\infty)$, jednačina nema rešenja u ovom intervalu.

Uzimajući u obzir sva tri slučaja, dobijamo da su rešenja zadate jednačine

$$t \in [1, 2]$$

Vraćanjem nazad smene za $t = \sqrt{x+1}$ imamo

$$t \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x+1} \geq 1 \Rightarrow x + 1 \geq 1 \Rightarrow x \geq 0$$

i

$$t \leq 2 \Rightarrow \sqrt{x+1} \leq 2 \Rightarrow x + 1 \leq 4 \Rightarrow x \leq 3$$

Konačno se dobija da je ukupan broj celobrojnih rešenja u intervalu $x \in [0, 3]$ jednak 4.

13.Ⓒ Kako važi

$$x^2 - 16x + 64 = (x-8)^2$$

$$x^2 - 9x + 8 = (x-1)(x-8)$$

$$x - 8 = (\sqrt[3]{x})^3 - 2^3 = (\sqrt[3]{x} - 2)((\sqrt[3]{x})^2 + 2 \cdot \sqrt[3]{x} + 4)$$

gde smo u poslednjem izrazu iskoristili identitet

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

to imamo

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 - 16x + 64}{x^2 - 9x + 8} \frac{1}{\sqrt[3]{x} - 2} &= \frac{(x-8)^2}{(x-1)(x-8)} \frac{1}{\sqrt[3]{x} - 2} \\
&= \frac{x-8}{x-1} \frac{1}{\sqrt[3]{x} - 2} = \frac{(\sqrt[3]{x} - 2)((\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{x-1} \frac{1}{\sqrt[3]{x} - 2} \\
&= \frac{(\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4}{x-1}
\end{aligned}$$

te sledi

$$\lim_{x\to 8}\left(\operatorname{tg}\frac{2\pi}{x}\cdot\frac{x^2-16x+64}{x^2-9x+8}\cdot\frac{\sqrt{x^2-7x+1}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}-2}\right)=\lim_{x\to 8}\left(\operatorname{tg}\frac{2\pi}{x}\cdot\frac{(\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+4}{x-1}\cdot\left(\sqrt{x^2-7x+1}+\sqrt[3]{x^2}\right)\right)$$
$$=\operatorname{tg}\frac{2\pi}{8}\cdot\frac{(\sqrt[3]{8})^2+2\sqrt[3]{8}+4}{8-1}\cdot\left(\sqrt{8^2-7\cdot 8+1}+\sqrt[3]{8^2}\right)$$
$$=1\cdot\frac{4+4+4}{7}\cdot(3+4)=12.$$

---

14. Ⓓ Izvod zadate funkcije

$$f(x)=(x-1)^2+(x-2)^2+(x-3)^2\cdots+(x-2019)^2$$

dat je sledećim izrazom

$$\begin{aligned}f'(x)&=2(x-1)+2(x-2)+2(x-3)+\cdots+2(x-2019)\\&=2\cdot 2019x-2(1+2+3+\cdot+2019)\\&=2\cdot 2019x-2\cdot\frac{2019(2019+1)}{2}\\&=2019(2x-2020)\end{aligned}$$

Ekstremne vrednosti zadate funkcije nalazimo za one vrednosti promenljive x za koje je izvod ove funkcije jednak nuli

$$f'(x_0)=0\Rightarrow x_0=\frac{2020}{2}$$

Kako je

$$f''(x)=(2019(2x-2020))'=2\cdot 2019x$$

i

$$f''\left(\frac{2020}{2}\right)=2019\cdot 2020>0$$

to funkcija u tački $x=x_0=\dfrac{2020}{2}$ ima minimum.

Za vrednost minimuma funkcije se sada dobija

$$\begin{aligned}m&=f\left(\frac{2020}{2}\right)\\&=\left(\frac{2020}{2}-1\right)^2+\left(\frac{2020}{2}-2\right)^2+\left(\frac{2020}{2}-3\right)^2+\cdots+\left(\frac{2020}{2}-2017\right)^2+\left(\frac{2020}{2}-2018\right)^2+\left(\frac{2020}{2}-2019\right)^2\\&=\left(\frac{2020}{2}-1\right)^2+\left(\frac{2020}{2}-2\right)^2+\left(\frac{2020}{2}-3\right)^2+\cdots+\left(-\frac{2020}{2}+3\right)^2+\left(-\frac{2020}{2}+2\right)^2+\left(-\frac{2020}{2}+1\right)^2\\&=\left(\frac{2020}{2}-1\right)^2+\left(\frac{2020}{2}-2\right)^2+\left(\frac{2020}{2}-3\right)^2+\cdots+\left(\frac{2020}{2}-3\right)^2+\left(\frac{2020}{2}-2\right)^2+\left(\frac{2020}{2}-1\right)^2\\&=2\left(\left(\frac{2020}{2}-1\right)^2+\left(\frac{2020}{2}-2\right)^2+\left(\frac{2020}{2}-3\right)^2+\cdots++\left(\frac{2020}{2}-1009\right)^2\right)+0\\&=2\left((1010-1)^2+(1010-2)^2+(1010-3)^2+\cdots++(1010-1009)^2\right)\\&=2\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+1009^2\right)\end{aligned}$$

Pošto važi

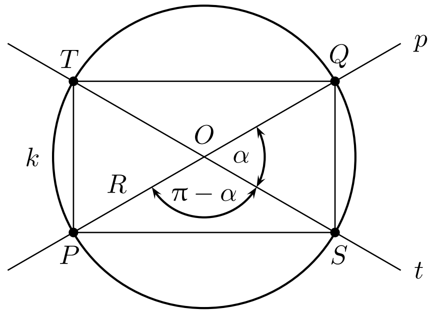
$$1000^2+1001^2+\cdots+1009^2>1000^2+1000^2+\cdots+1000^2=10\cdot 1000^2=10^7$$

to je $m>10^7$, odnosno $m\in\left(10^7,+\infty\right)$.

---

15. Ⓔ Neka je R poluprečnik kružnice k. Za površinu četvorougla $TPSQ$ se ima (videti sliku)

$$\begin{aligned}P_{TPSQ}&=P_{TOP}+P_{POS}+P_{SOQ}+P_{QOT}\\&=\frac{1}{2}R^2\sin\alpha+\frac{1}{2}R^2\sin(\pi-\alpha)+\frac{1}{2}R^2\sin\alpha+\frac{1}{2}R^2\sin(\pi-\alpha)\\&=2R^2\sin\alpha\end{aligned}$$



Kako je $\sin\alpha \le 1$ to je $P_{TPSQ} \le 2R^2$. Maksimalna površina $P_{TPSQ} = 2R^2$ se dobija za $\sin\alpha = 1$, odnosno za $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

16.Ⓑ Tražimo ukupan broj članova koji su celi brojevi u binomnom razvoju:

$$\left(\sqrt[3]{7} + \sqrt[7]{3}\right)^{2019}$$

Koristimo izraz za binomni razvoj

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

gde je

$$a = 7^{\frac{1}{3}}, \quad b = 3^{\frac{1}{7}}, \quad n = 2019$$

pa se članovi binomnog razvoja mogu predstaviti u sledećem obliku

$$a^{n-k}b^k = 7^{\frac{2019-k}{3}} \cdot 3^{\frac{k}{7}}$$

$3^{\frac{k}{7}}$ je celi broj za sve $k = 0, \ldots, 2019$ koji su deljivi brojem 7.

Slično, $7^{\frac{2019-k}{3}} = 7^{673} \cdot 7^{-\frac{k}{3}}$ je ceo broj za sve $k = 0, \ldots, 2019$ koji su deljivi brojem 3.

Kako k mora biti istovremeno deljiv brojem 3 i 7, to k mora biti deljiv brojem 21:

$$k = 21p, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, 96$$

a takvih brojeva je 97.

17.Ⓑ Broj rešenja jednačine

$$x = 3\pi\cos x \Leftrightarrow \frac{x}{3\pi} = \cos x$$

nalazimo grafičkom metodom.

Neka je

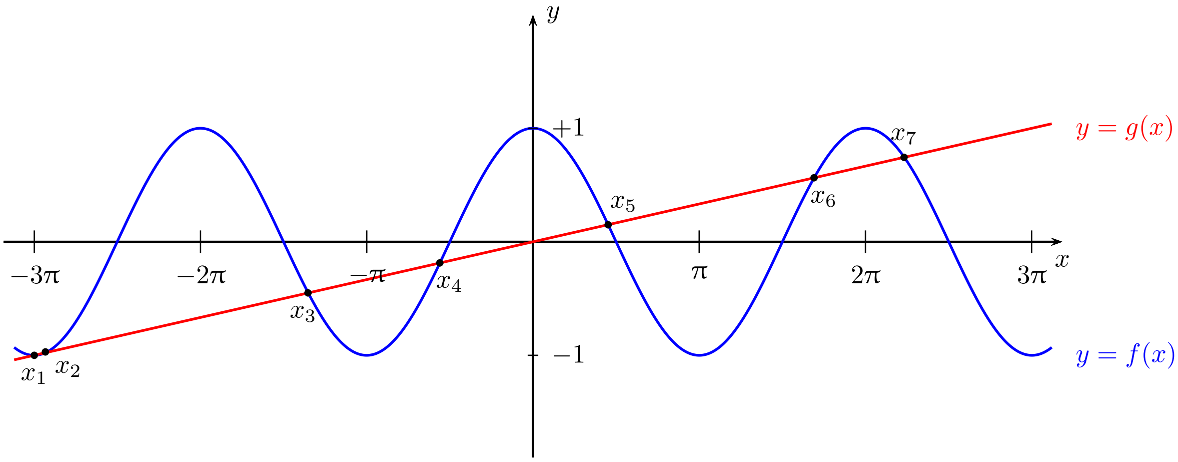
$$f(x) = \cos x \text{ i } g(x) = \frac{1}{3\pi}x$$

Kako je $-1 \le \cos x \le 1$, to mora važiti

$$-1 \le \frac{1}{3\pi}x \le 1 \Rightarrow -3\pi \le x \le 3\pi$$

Sa slike se vidi, da funkcije $f(x)$ i $g(x)$ imaju sedam rešenja.

Primećujemo da su rešenja x_1 i x_2 vrlo blizu jedno drugome. Kada bi kriva $g(x)$ bila tangenta na krivu $f(x)$, tj. kad bi $g(x) = -1$, imali bismo $x_1 = x_2$. Kako to nije slučaj, važi $x_1 \neq x_2$.



18.Ⓑ Primenom izvoda na zadatu jednačinu krive dobijamo

$$2x^2 + y^2 - 24(x - y) + 208 = 0/'$$

$$4x + 2yy' - 24 + 24y' = 0 \Rightarrow 2x + y'(y + 12) - 12 = 0$$

U tački x_0 u kojoj kriva ima ekstremnu vrednost (minimalnu ili maksimalnu) važi

$$y'(x_0) = 0$$

što zamenom u poslednjoj jednačini daje

$$2x_0 - 12 = 0 \Rightarrow x_0 = 6$$

U ovoj tački se za vrednost funkcije (ordinate $y = y_0$) dobija

$$2 \cdot 6^2 + y_0^2 - 24(6 - y_0) + 208 = 0 \Rightarrow y_0^2 + 24y_0 + 136 = 0$$

Rešenja poslednje kvadratne jednačine su

$$y_{0_{1,2}} = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot 136}}{2} = \frac{-24 \pm \sqrt{16 \cdot 2}}{2} = -12 \pm 2\sqrt{2}$$

Kako je

$$|y_{0_1}| = |-12 - \sqrt{2}| = 12 + 2\sqrt{2}$$
$$|y_{0_2}| = |-12 + \sqrt{2}| = 12 - 2\sqrt{2}$$

sledi $|y_{0_1}| > |y_{0_2}|$ te je tačka sa najvećom apsolutnom vrednošću ordinate

$$M(x_0 = 6, y_0 = -12 - 2\sqrt{2})$$

Konačno dobijamo

$$2x_0 + y_0 = 12 - 12 - \sqrt{2} = -2\sqrt{2}.$$

19.Ⓒ Treba pronaći ukupan broj prirodnih brojeva $n \in \mathbb{N}, n < 2019$ čije su cifre u strogo rastućem poretku. Razmatramo posebno jednocifrene, dvocifrene, trocifrene i četvorocifrene brojeve i označimo broj onih koji ispunjavaju zadati uslov sa, redom, $b_0, b_1, b_2 i b_3$..

- $n = d_0$: Svi jednocifreni brojevi ispunjavaju ovaj uslov. Dakle $b_0 = 9$.

- $n = d_1 d_0$

$$\begin{array}{ccc} d_1 & d_0 & b \\ 1 & 2,3,\ldots 9 & 8 \\ 2 & 3,4,\ldots 9 & 7 \\ 3 & 4,5,\ldots 9 & 6 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 8 & 9 & 1 \end{array}$$

Iz prethodne tabele imamo da je ukupan broj dvocifrenih brojeva koji zadovoljavaju zadati uslov:

$$b_1 = 8 + 7 + 6 + \cdots + 1 = \frac{8(8+1)}{2} = 36.$$

- $n = d_2 d_1 d_0$

$$\begin{array}{cccc} d_2 & d_1 & d_0 & b \\ 1 & 2 & 3,4,\ldots 9 & 7 \\ 1 & 3 & 4,5,\ldots 9 & 6 \\ 1 & 4 & 5,6,\ldots 9 & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 8 & 9 & 1 \\ & & & \\ 2 & 3 & 4,5,\ldots 9 & 6 \\ 2 & 4 & 5,6,\ldots 9 & 5 \\ 2 & 5 & 6,7,\ldots 9 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 8 & 9 & 1 \\ & & & \\ 3 & 4 & 5,6,\ldots 9 & 5 \\ 3 & 5 & 6,7,\ldots 9 & 4 \\ 3 & 6 & 7,8,\ldots 9 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 3 & 8 & 9 & 1 \\ & & & \\ 4 & 5 & 6,7,8,9 & 4 \\ 4 & 6 & 7,8,9 & 3 \\ 4 & 7 & 8,9 & 2 \\ 4 & 8 & 9 & 1 \\ & & & \\ 5 & 6 & 7,8,9 & 3 \\ 5 & 7 & 8,9 & 2 \\ 5 & 8 & 9 & 1 \\ & & & \\ 6 & 7 & 8,9 & 2 \\ 6 & 8 & 9 & 1 \\ & & & \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{array}$$

Iz prethodne tabele imamo da je ukupan broj dvocifrenih brojeva koji zadovoljavaju zadati uslov:

$$\begin{aligned} b_2 &= (7+6+\cdots+1) + (6+5+\cdots+1) + (5+4+\cdots+1) + (4+3+\cdots+1) + (3+2+1) + (2+1) + 1 \\ &= \frac{7(7+1)}{2} + \frac{6(6+1)}{2} + \frac{5(5+1)}{2} + \frac{4(4+1)}{2} + \frac{3(3+1)}{2} + 3 + 1 \\ &= 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 84 \end{aligned}$$

- $n = d_3d_2d_1d_0$

d_3	d_2	d_1	d_0	b
1	2	3	$4,5,\ldots 9$	6
1	2	4	$5,6,\ldots 9$	5
1	2	5	$6,7,\ldots 9$	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	2	8	9	1
1	3	4	$5,6,\ldots 9$	5
1	3	5	$6,7,\ldots 9$	4
1	3	6	$7,8,\ldots 9$	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	3	8	9	1
1	4	5	$6,7,8,9$	4
1	4	6	$7,8,9$	3
1	4	7	$8,9$	2
1	4	8	9	1
1	5	6	$7,8,9$	3
1	5	7	$8,9$	2
1	5	8	9	1
1	6	7	$8,9$	2
1	6	8	9	1
1	7	8	9	1

Iz prethodne tabele imamo da je ukupan broj trocifrenih brojeva koji zadovoljavaju zadati uslov:

$$\begin{aligned} b_3 &= (6+5+\cdots+1)+(5+4+\cdots+1)+(4+3+\cdots+1)+(3+2+1)+(2+1)+1 \\ &= \frac{6(6+1)}{2}+\frac{5(5+1)}{2}+\frac{4(4+1)}{2}+\frac{3(3+1)}{2}+3+1 \\ &= 21+15+10+6+3+1=56 \end{aligned}$$

Iz prethodnog se za ukupni traženi broj prirodnih brojeva koji zadovoljavaju zadati uslov dobija:

$$9+36+84+56=185.$$

20.Ⓔ Koristeći sledeće trigonometrijske identitete

$$1-2\sin^2 x = \sin^2 x+\cos^2 x-2\sin^2 x = \cos^2 x-\sin^2 x = \cos 2x$$

$$2\sin x\cos x = \sin 2x$$

zadata jednačina

$$5\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^{\sin^2 x}+4\cdot 5^{\cos(2x)} > 25^{\sin x\cos x}$$

se može izraziti u sledećem obliku

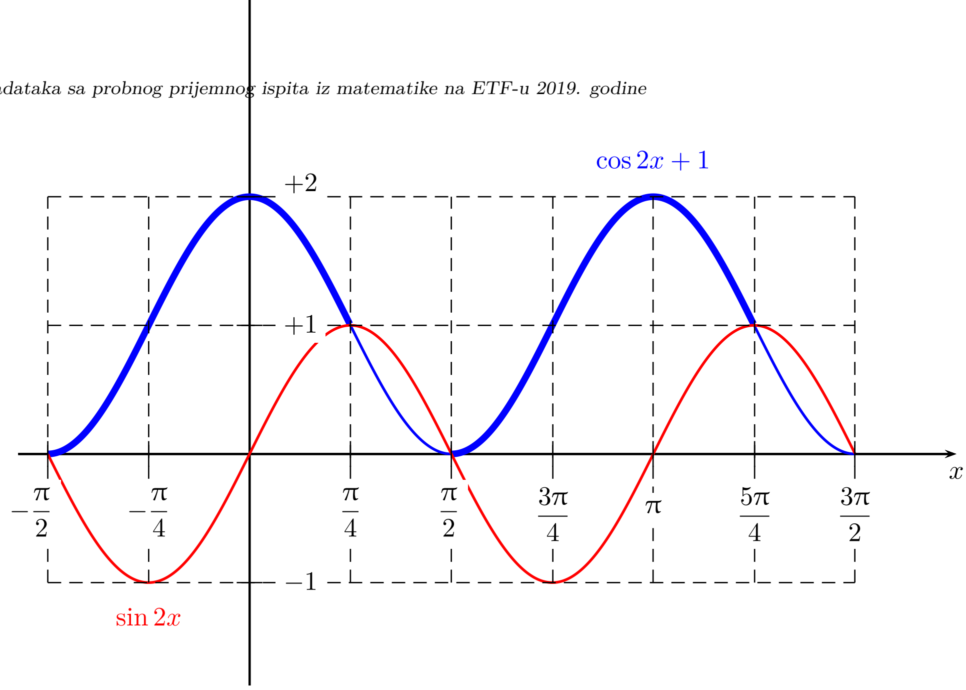
$$5\cdot 5^{-2\sin^2 x}+4\cdot 5^{\cos 2x} > 5^{\sin 2x}$$

$$5^{1-2\sin^2 x}+4\cdot 5^{\cos 2x} > 5^{\sin 2x}$$

$$5^{\cos 2x}+4\cdot 5^{\cos 2x} > 5^{\sin 2x}$$

$$5\cdot 5^{\cos 2x} > 5^{\sin 2x}$$

$$5^{\cos 2x+1} > 5^{\sin 2x}$$



$\cos 2x + 1 > \sin 2x$

Poslednju nejednačinu možemo rešiti grafički na intervalu $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Sa slike se vidi da rešenja pripadaju intervalu

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right).$$

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE ZA UPIS NA ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

1. Vrednost izraza $\cos^2 2190^{\circ} + \frac{\sqrt{(-3)^2}}{i^{2020}} + \log_5 \frac{1}{125}$ jednaka je:

(A) $\frac{3}{4}$ (B) $1+i$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}+3(i-1)$ (D) 0 (E) 1 (N) Ne znam

2. Cena knjige se najpre povećala za 20%, a zatim se nova cena povećala za 35%. Ukupno povećanje cene knjige je:

(A) 55% (B) 60% (C) 62% (D) 65% (E) 70% (N) Ne znam

3. Ako za kompleksan broj z važi $2z + 3\bar{z} = 10 + 3i$, gde je $\bar{z}$ kompleksan broj konjugovan broju z, tada je moduo kompleksnog broja z jednak:

(A) 0 (B) $\sqrt{5}$ (C) $\sqrt{13}$ (D) $\sqrt{30}$ (E) 10 (N) Ne znam

4. Izraz $\left(\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \sqrt{xy}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}\right)^{-2}$, za sve vrednosti $x, y \in \mathbb{R}$ za koje je definisan, identički je jednak izrazu:

(A) 1 (B) $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ (C) $\sqrt{xy}$ (D) $x\sqrt{x}-y\sqrt{y}$ (E) $x-y$ (N) Ne znam

5. Trougao je presečen na dva dela jednakih površina pravom koja je paralelna osnovici. Ako je a osnovica trougla, tada je osnovica manjeg trougla koja leži na datoj pravoj jednaka:

(A) $\frac{a}{2}$ (B) $\frac{a}{4}$ (C) $a-2$ (D) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (E) $\frac{a}{8}$ (N) Ne znam

6. Date su funkcije: $f_1(x) = \ln((x+3)^5 \cdot (x-1)^2)$, $f_2(x) = 5\ln(x+3) + \ln(x-1)^2$, $f_3(x) = \ln(x+3)^5 + 2\ln(x-1)$ i $f_4(x) = 5\ln(x+3) + 2\ln(x-1)$. Tačan iskaz je:

(A) Sve funkcije su međusobno jednake (B) Među datim funkcijama nema jednakih
(C) $f_1 = f_2 \neq f_3 = f_4$ (D) $f_1 = f_4 \neq f_2 = f_3$
(E) Nijedan od ponuđenih odgovora (N) Ne znam

7. Skup tačaka u ravni xOy za koje je rastojanje do tačke $A(1,0)$ dva puta veće od rastojanja do tačke $B(-2,0)$ predstavlja:

(A) pravu (B) kružnicu (C) elipsu (D) parabolu (E) hiperbolu (N) Ne znam

8. Granična vrednost $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\operatorname{tg}\frac{3\pi x}{8} \cdot (\log(5x-9)+1) \cdot (\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2})}{(x-2)\cdot(\sqrt{2x^3-x-5}-\sqrt{2x})}$ jednaka je:

(A) $-\infty$ (B) $-\frac{1}{3\cdot 2^{2/3}}$ (C) 0 (D) 1 (E) $+\infty$ (N) Ne znam

9. Ako je $f(x) = \frac{4}{x-5} + (3x+1)\mathrm{e}^{-(x-1)^2} + \sqrt{-2x+3}$, tada je $f'(1)$ jednako:

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{7}{4}$ (N) Ne znam

10. Vrednost realnog parametra α za koju sistem jednačina $2x-5y=0$, $3x-\alpha y=0$ ima više od jednog rešenja je:

(A) svako $\alpha \in \mathbb{R}$ (B) svako $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{15}{2}\right\}$ (C) $\frac{3}{4}$
(D) $\frac{3}{2}$ (E) $\frac{15}{2}$ (N) Ne znam

11. Skup svih vrednosti realnog parametra k za koje rešenja x_1 i x_2 jednačine $x^2 - (k-5)x + k - 6 = 0$ zadovoljavaju relacije $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < \frac{1}{2}$ i $x_1^2 + x_2^2 \geq 2$ je oblika (za neke realne brojeve a, b, c, d takve da je $-\infty < a < b < c < d < +\infty$):

(A) $(a, b]$ (B) $(a, b) \cup (c, d)$ (C) $(a, b) \cup [c, +\infty)$
(D) $(-\infty, b] \cup [c, +\infty)$ (E) $(a, b) \cup \{c, d\}$ (N) Ne znam

12. Skup rešenja nejednačine $x + 2 < \sqrt{x + 44}$ je oblika (za neke realne brojeve a, b, c, d takve da je $-\infty < a < b < c < d < +\infty$):

(A) $[a, b)$ (B) $(a, b) \cup (c, d)$ (C) $(a, b) \cup [c, +\infty)$
(D) $(-\infty, b] \cup [c, +\infty)$ (E) $[d, +\infty)$ (N) Ne znam

13. Osnovna ivica pravilne četvorostrane piramide je 8 cm, a središte osnove je od bočne strane na rastojanju 2 cm. Tada je visina piramide jednaka:

(A) 10 cm (B) $4\sqrt{3}$ cm (C) 8 cm (D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm (E) $6\sqrt{3}$ cm (N) Ne znam

14. Prva dva člana rastuće geometrijske progresije su rešenja jednačine $\frac{2^{2\sin x}}{1 + 2^{2\sin x}} = 1 - \frac{3 - 2^{2\sin x}}{5 - 2^{2\sin x}}$ na intervalu $(0, \pi)$. Ako je zbir ove progresije 651π, tada je ukupan broj njenih članova jednak:

(A) 4 (B) 6 (C) 7 (D) 10 (E) 15 (N) Ne znam

15. Data je funkcija $f(x) = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + 2\alpha - 8$, gde je $\alpha \in \mathbb{R}$. Neka je S skup svih vrednosti realnog parametra α takvih da funkcija f ima bar jednu realnu nulu i za koje važi $f(x) \geq 0$ za svako $x \in [0, 3]$. Tada je skup S jednak:

(A) $(-\infty, -4]$ (B) $(-\infty, -4] \cup [2 + \sqrt{3}, 4]$ (C) $[4, +\infty)$
(D) $(-\infty, -4] \cup [3, 4]$ (E) Nijedan ponuđeni odgovor (N) Ne znam

16. Ako je zbir svih binomnih koeficijenata u razvoju binoma $\left(\sqrt[5]{3} + \sqrt[3]{5}\right)^n$ za neko $n \in \mathbb{N}$ jednak 4^{52}, tada je broj racionalnih članova u razvoju ovog binoma jednak:

(A) 7 (B) 10 (C) 15 (D) 26 (E) 52 (N) Ne znam

17. Zbir svih rešenja jednačine $\left(\sqrt{\log_7(-2x - 1)} - \log_7 \sqrt{4x^2 + 4x + 1} - 1\right) \cdot \log_7 |x + 7| = -3 \log_7 \sqrt[3]{x + 7}$ iznosi:

(A) -11 (B) -10 (C) -5
(D) 0 (E) Nijedan ponuđeni odgovor (N) Ne znam

18. Oblast definisanosti funkcije $f(x) = \frac{\sqrt{\cos^2 x + \sin x \cos x - 1}}{\log_{\frac{1}{7}}(9 - x^2)}$ je oblika (za neke realne brojeve a, b, c, d, e takve da je $-\infty < a < b < c < d < e < +\infty$):

(A) $(a, b) \cup (c, d)$ (B) $(a, c) \backslash \{b\}$ (C) $(a, d) \backslash \{b, c\}$
(D) $[d, e] \cup (a, c] \backslash \{b\}$ (E) Nijedan ponuđeni odgovor (N) Ne znam

19. Ukupan broj realnih rešenja sistema $50 \left(\frac{2}{5}\right)^{2x+3y-10} + 20 \left(\frac{5}{2}\right)^{2x+3y-10} = 133$, $(x + 3)(y - 1) = 6$ jednak je:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4 (N) Ne znam

20. Dat je skup $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{11}\}$. Koliko ima uređenih parova (X, Y) takvih da je $X \subset A, Y \subset A$, a broj elemenata u skupovima je $|X| = 8$, $|Y| = 7$ i $|X \cap Y| = 5$?

(A) 1024 (B) 3245 (C) 27720
(D) 87512 (E) Nijedan ponuđeni odgovor (N) Ne znam

REŠENJA

1.Ⓐ Važi redom:

$$2190^{\circ} = 30^{\circ} + 6 \cdot 360^{\circ} \Rightarrow \cos^2 2190^{\circ} = \cos^2(30^{\circ} + 6 \cdot 360^{\circ}) = \cos^2(30^{\circ}) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$i^{2020} = (i^2)^{1010} = (-1)^{1010} = 1$$

$$\log_5 \frac{1}{125} = \log_5 5^{-3} = -3\log_5 5 = -3$$

$$\cos^2 2109^{\circ} + \frac{(-3)^2}{i^{2020}} + \log_5 \frac{1}{125} = \frac{3}{4} + 3 - 3 = \frac{3}{4}$$

2.Ⓒ Neka je x početna cena knjige. Nakon prvog poskupljenja za 20%, cena knjige je

$$y = x + \frac{20}{100}x = 1.2x$$

Nakon drugog poskupljenja za dodatnih 35%, cena knjige postaje

$$z = y + \frac{35}{100}y = 1.35y = 1.35 \cdot 1.2x = 1.62x = x + \frac{62}{100}x$$

Ukupno povećanje cene knjige je 62%.

3.Ⓒ Označimo

$$z = x + iy$$

Sada sledi

$$2z + 3\bar{z} = 2(x + iy) + 3(x - iy) = 5x - iy = 10 - 3i$$

Izjednačavanjem realnih i imaginarnih delova sa leve i desne strane prethodne jednačine dobijamo

$$5x = 10 \Rightarrow x = 2$$

$$y = 3$$

te se za moduo kompleksnog broja z dobija

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

4.Ⓐ Kako je

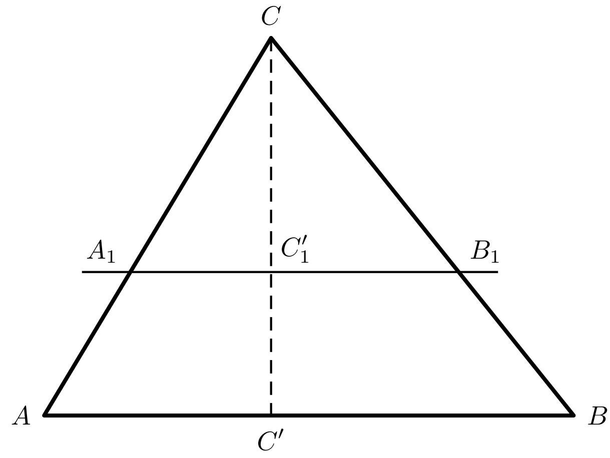
$$\frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \sqrt{xy} = \frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y} + x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{(x-y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

to sledi

$$\left(\frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \sqrt{xy}\right) : \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y}\right)^{-2} = \frac{(x-y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \cdot \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y}\right)^2 = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{x - y}$$

$$= \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2}{x - y} = \frac{x - y}{x - y} = 1$$

5.Ⓓ Na slici je prikazan trougao ABC koji je pravom koja prolazi kroz tačke A_1B_1 i paralelna je osnovici AB presečen na dva dela jednakih površina. Označimo $a = \overline{AB}$, $a_1 = \overline{A_1B_1}$, $h = \overline{CC'}$ i $h_1 = \overline{CC_1'}$. Prema uslovu zadatka važi



$$P_{\Delta A_1B_1C} = \frac{1}{2}P_{\Delta ABC}$$

Kako je

$$P_{\Delta A_1B_1C} = \frac{1}{2}\overline{A_1B_1} \cdot \overline{CC_1'} = \frac{1}{2}a_1h_1$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CC'} = \frac{1}{2}ah$$

sledi

$$\frac{1}{2}a_1h_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}ah \Rightarrow h_1 = \frac{1}{2}h\frac{a}{a_1}$$

Iz sličnosti trouglova ΔA_1B_1C i ΔABC imamo

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{CC_1'}} \Rightarrow \frac{a}{a_1} = \frac{h}{h_1} \Rightarrow h_1 = h\frac{a_1}{a}$$

Iz prethodna dva izraza za h_1 dobijamo

$$\frac{1}{2}h\frac{a}{a_1} = h\frac{a_1}{a} \Rightarrow a_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

6.Ⓒ Za zadate funkcije važi:

$$f_1(x) = \ln((x+3)^5(x-1)^2) = \ln(x+3)^5 + \ln(x-1)^2 = 5\ln(x+3) + 2\ln|x-1|$$

koja je definisana je za $x + 3 > 0$ i $x \neq 1 \Rightarrow x \in (-3, +\infty)\backslash\{1\}$

$$f_2(x) = 5\ln(x+3) + \ln(x-1)^2 = 5\ln(x+3) + 2\ln|x-1|$$

koja je takođe definisana za $x + 3 > 0$ i $x \neq 1 \Rightarrow x \in (-3, +\infty)\backslash\{1\}$

$$f_3(x) = \ln(x+3)^5 + 2\ln(x-1) = 5\ln(x+3) + 2\ln(x-1)$$

koja je definisana za $x + 3 > 0$ i $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$

$$f_4(x) = 5\ln(x+3) + 2\ln(x-1)$$

koja je takođe definisana za $x + 3 > 0$ i $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$

Iz prethodnog sledi $f_1 = f_2 \neq f_3 = f_4$

7.Ⓑ Prema uslovu zadatka, rastojanje tačke $P(x, y)$ do tačke $A(1, 0)$ je dva puta veće od rastojanja do tačke $B(-2, 0)$

$$d\left(P(x,y), A(1,0)\right) = 2d\left(P(x,y), B(-2,0)\right)$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x+2)^2 + y^2} \quad \Big/^2$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 4\left((x+2)^2 + y^2\right) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4x^2 + 16x + 16 + 4y^2 \Leftrightarrow x^2 + 6x + y^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 + y^2 = 2^2$$

što je jednačina kružnice poluprečnika 2 sa centrom u tački $(-3, 0)$.

---

8. Ⓑ

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{tg}\frac{3\pi x}{8}\cdot(\log(5x-9)+1)\cdot(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2})}{(x-2)\cdot(\sqrt{2x^3-x-5}-\sqrt{2x})} &= \operatorname{tg}\frac{3\pi\cdot 2}{8}\cdot\frac{\log(5\cdot 2-9)+1}{\sqrt{2\cdot 2^3-2-5}-\sqrt{2\cdot 2}}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2} \\
&= \underbrace{\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}}_{=-1}\cdot\underbrace{\frac{\log(1)+1}{\sqrt{16-7}-\sqrt{4}}}_{=1}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2} \\
&= -\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}
\end{aligned}
$$

Poslednja granična vrednost je oblika $\frac{0}{0}$ i može se naći primenom L'Hôpital-ovog pravila

$$
\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}\right)'}{(x-2)'}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}}{1}=\frac{1}{3}\cdot 2^{-2/3}=\frac{1}{3\cdot 2^{2/3}}
$$

---

9. Ⓔ Zadata funkcija je oblika

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)$$

gde je

$$f_1(x)=\frac{4}{x-5}$$

$$f_2(x)=(3x+1)\mathrm{e}^{-(x-1)^2}$$

$$f_3(x)=\sqrt{-2x+3}$$

Za izvod ove funkcije se dalje dobija

$$f'(x)=f_1'(x)+f_2'(x)+f_3'(x)$$

gde je

$$f_1'(x)=\left(\frac{4}{x-5}\right)'=4\left((x-5)^{-1}\right)'=-4(x-5)^{-2}=-\frac{4}{(x-5)^2}$$

$$f_1'(1)=-\frac{1}{4}$$

$$
\begin{aligned}
f_2'(x) &= \left((3x+1)\mathrm{e}^{-(x-1)^2}\right)'=(3x+1)'\cdot\mathrm{e}^{-(x-1)^2}+(3x+1)\cdot\left(\mathrm{e}^{-(x-1)^2}\right)' \\
&= 3\mathrm{e}^{-(x-1)^2}+(3x+1)\left(\mathrm{e}^{-(x-1)^2}\cdot\left(-(x-1)^2\right)'\right) \\
&= 3\mathrm{e}^{-(x-1)^2}-2(x-1)(3x+1)\mathrm{e}^{-(x-1)^2}
\end{aligned}
$$

$$f_2'(1)=\left(3-2(1-1)\cdot(3+1)\right)\mathrm{e}^0=3$$

$$f_3'(x)=\left(\sqrt{-2x+3}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{-2x+3}}\left(-2x+3\right)'=-\frac{1}{\sqrt{-2x+3}}$$

$$f_3'(1)=-\frac{1}{-2\cdot 1+3}=-1$$

Konačno dobijamo

$$f'(1)=f_1'(1)+f_2'(1)+f_3'(1)=-\frac{1}{4}+3-1=\frac{7}{4}$$

---

10. Ⓔ

Rešenje A:

$$2x-5y=0 \quad / \times 3 \quad \Rightarrow \quad 6x-15y=0$$

$$3x-\alpha y=0 \quad / \times 2 \quad \Rightarrow \quad 6x-2\alpha y=0$$

Oduzimanjem poslednjih dveju jednačina dobijamo

$$(2\alpha-15)y=0$$

Poslednja jednačina ima jedno rešenje ($y = 0$) za $2\alpha - 15 \neq 0$. Jednačina važi za svako $y \in \mathbb{R}$ kada je $2\alpha - 15 = 0$. Dakle, zadati sistem jednačina će imati više od jednog realnog rešenja za

$$2\alpha - 15 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{15}{2}.$$

Rešenje B:

Zadati sistem jednačina će imati više od jednog rešenja ako je determinanta ovog sistema jednačina jednaka nuli

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -\alpha \end{vmatrix} = -2\alpha + 15 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{15}{2}$$

11.Ⓐ Ako su x_1 i x_2 koreni zadate jednačine, tada važi

$$x^2 - (k-5)x + k - 6 = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2$$

Izjednačavanjem koeficijenata polinoma sa leve i desne strane prethodne jednačine dobijamo

$$x_1 + x_2 = k - 5, \quad x_1 x_2 = k - 6$$

Iz prvog uslova

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < \frac{1}{2}$$

imamo

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{k-5}{k-6} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{k-5}{k-6} - \frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow \frac{2(k-5) - (k-6)}{2(k-6)} < 0 \Leftrightarrow \frac{k-4}{k-6} < 0$$

Rešenja poslednje nejednačine su data izrazima

- $k - 4 < 0 \wedge k - 6 > 0 \Rightarrow k < 4 \wedge k > 6 \Rightarrow k \in \emptyset$
- $k - 4 > 0 \wedge k - 6 < 0 \Rightarrow k > 4 \wedge k < 6 \Rightarrow k \in (4, 6)$

Iz drugog uslova

$$x_1^2 + x_2^2 \geq 2$$

imamo

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (k-5)^2 - 2(k-6) = k^2 - 12k + 37$$

što se svodi na sledeću nejednačinu

$$k^2 - 12k + 37 \geq 2 \Leftrightarrow k^2 - 12k + 35 \geq 0 \Leftrightarrow (k-5)(k-7) \geq 0$$

i ona je ispunjena za

$$k \leq 5 \vee k \geq 7$$

Kombinacijom gornje dobijenih rešenja, za skup svih vrednosti realnog parametra k koji ispunjavaju uslove zadatka se dobija

$$k \in (4, 5]$$

12.Ⓐ Zadata nejednačina

$$x + 2 < \sqrt{x + 44}$$

definisana je za realne vrednosti x za koje važi

$$x + 44 \geq 0 \iff x \geq -44$$

Razlikujemo dva slučaja

1. $x + 2 < 0 \iff x < -2$

   U ovom slučaju je zadata nejednačina uvek ispunjena jer važi

$$\sqrt{x + 44} \geq 0 > x + 2$$

2. $x+2 \geq 0 \iff x \geq -2$

   U ovom slučaju su obe strane nejednačine pozitivne, te kvadriranjem leve i desne strane dobijamo

$$(x+2)^2 < x+44 \iff x^2+4x+4 < x+44 \iff x^2+3x-40<0 \iff (x-5)(x+8)<0$$

   čija su rešenja

$$x \in (-8,5)$$

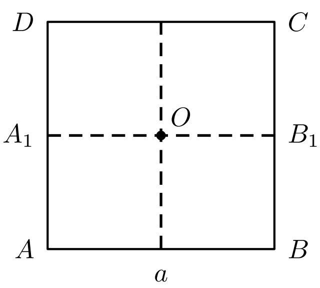
   i kako je $x \geq -2$

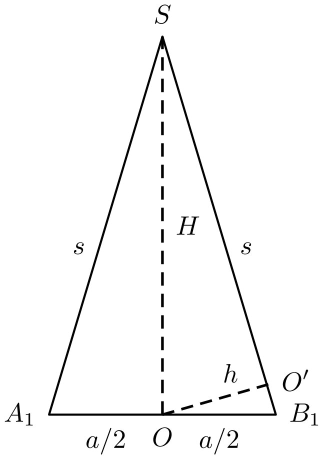
$$x \in [-2,5)$$

Iz prethodnog sledi da je rešenje zadate nejednačine

$$x \in [-44,5)$$

13.Ⓓ Na slici levo je prikazana osnova pravilne četvorostrane piramide (kvadrat $ABCD$, dužine stranice $a = 8\,\mathrm{cm}$) sa središtem u tački O. Na slici desno je prikazan trougao A_1B_1S koji obrazuju dve bočne strane piramide sa ravni osnove. Udaljenost središta osnove piramide O od bočne strane je $h = \overline{OO'} = 2\,\mathrm{cm}$.





Površina P pravouglog trougla SOB_1 se može izraziti preko proizvoda dve katete $\overline{SO} = H$ i $\overline{OB_1} = a/2$ (gde je H visina piramide):

$$P = \frac{1}{2}\frac{a}{2}H$$

Površina ovog trougla se takođe može izraziti preko proizvoda hipotenuze $\overline{SB_1} = s$ i visine nad hipotenuzom $\overline{OO'} = h$:

$$P = \frac{1}{2}sh$$

Odavde sledi

$$sh = \frac{1}{2}aH$$

Na osnovu Pitagorine teoreme primenjene na pravougli trougao SOB_1 sledi

$$s = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + H^2}$$

te iz prethodne jednačine dobijamo

$$\frac{a}{2}H = h\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+H^2} \Rightarrow \frac{a^2H^2}{4} = h^2\left(\frac{a^2}{4}+H^2\right) \iff \frac{a^2}{4h^2}H^2 = \frac{a^2}{4}+H^2 \iff \left(\frac{a^2}{4h^2}-1\right)H^2 = \frac{a^2}{4}$$

Odakle se za traženu visinu piramide dobija

$$H^2 = \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{a^2}{4h^2}-1} \Rightarrow H = \frac{a}{2}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{2h}\right)^2-1}}$$

Smenom zadatih vrednosti za a i h, dobijamo

$$H = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

14.Ⓑ Uvođenjem smene

$$t = 2^{2\sin x} > 0$$

zadata jednačina

$$\frac{2^{2\sin x}}{1+2^{2\sin x}} = 1 - \frac{3-2^{2\sin x}}{5-2^{2\sin x}}$$

postaje

$$\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{3-t}{5-t} \quad \Big/ \times (1+t)(5-t)$$

$$t(5-t) + (1+t)(5-t) - (3-t)(1+t) = 0 \iff t^2 - 3t + 2 = 0 \iff (t-1)(t-2) = 0$$

Rešenja dobijene kvadratne jednačine su $t_1 = 1$ i $t_2 = 2$ te razlikujemo dva slučaja

1. $t_1 = 1 \Rightarrow 2^{2\sin x} = 2^0 \iff 2\sin x = 0$

   Ova trigonometrijska jednačina nema rešenja na zadatom intervalu $x \in (0, \pi)$

2. $t_2 = 2 \Rightarrow 2^{2\sin x} = 2^1 \iff 2\sin x = 1 \iff \sin x = \frac{1}{2}$

   Ova trigonometrijska jednačina ima dva rešenja na zadatom intervalu $x \in (0, \pi)$:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} \text{ i } x_2 = \frac{5\pi}{6}$$

Prema uslovu zadatka, ova dva rešenja su prva dva člana rastuće geometrijske progresije $a_n = a_0 q^n$

$$a_0 = x_1 = \frac{\pi}{6}$$

$$a_1 = x_2 = \frac{5\pi}{6} = q a_0 \Rightarrow q = 5$$

Ako je N broj članova ove progresije, onda se za zbir članova dobija sledeći izraz

$$S_N = a_0 + a_1 + \cdots + a_{N-1} = a_0\left(1 + q + \cdots + q^{N-1}\right) = a_0 \frac{q^N - 1}{q - 1}$$

$$S_N = \frac{\pi}{6} \frac{5^N - 1}{5 - 1} = \frac{5^N - 1}{24}\pi$$

Prema uslovu zadatka je $S_N = 651\pi$ te sledi

$$\frac{5^N - 1}{24}\pi = 651\pi \iff 5^N = 15625 = 5^6 \iff N = 6$$

15.Ⓑ Kvadratna funkcija $f(x) = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + 2\alpha - 8$ je konveksna i imaće bar jednu realnu nulu ako je diskriminanta ove kvadratne funkcije veća ili jednaka nuli:

$$D = b^2 - 4ac = (-2\alpha)^2 - 4(\alpha^2 + 2\alpha - 8) = 4\alpha^2 - 4\alpha^2 - 8\alpha + 32 = -8(\alpha - 4)$$

$$D \geq 0 \Rightarrow -8(\alpha - 4) \geq 0 \iff \alpha \leq 4$$

Ako je funkcija $f(x) \geq 0$ u ekstremnim tačkama intervala $x \in [0, 3]$ i ako se minimum funkcije ne nalazi u ovom intervalu, onda će vrednost funkcije biti veća ili jednaka nuli na čitavom intervalu $x \in [0, 3]$.

Iz prvog uslova $f(0) \geq 0$ dobijamo

$$\alpha^2 + 2\alpha - 8 \geq 0 \iff (\alpha + 4)(\alpha - 2) \geq 0 \iff \alpha \in (-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$$

Iz drugog uslova $f(3) \geq 0$ dobijamo

$$9 - 6\alpha + \alpha^2 + 2\alpha - 8 \geq 0 \iff \alpha^2 - 4\alpha + 1 \geq 0$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

te su rešenja ove kvadratne nejednačine

$$\alpha \in (-\infty, 2-\sqrt{3}] \cup [2+\sqrt{3}, +\infty)$$

Uzimajući u obzir sve prethodne izraze za α, i kako je $2 < 2+\sqrt{3} < 4$, za skup realnih vrednosti parametra α dobijamo

$$\alpha \in (-\infty, -4] \cup [2+\sqrt{3}, 4]$$

Prvi izvod funkcije $f(x)$ dat je izrazom

$$f'(x) = 2(x-\alpha)$$

Minimum funkcije se dobija u tački x_0 za koju je

$$f'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 - \alpha = 0 \iff x_0 = \alpha$$

Kako je za $x_0 = \alpha \in (-\infty, -4] \cup [2+\sqrt{3}, 4]$ uvek ispunjeno $x_0 \le -4 < 0$ i $x_0 \ge 2+\sqrt{3} > 3$, to se minimum funkcije ne nalazi u intervalu $x \in [0,3]$ te je funkcija na ovom intervalu za gornje navedene vrednosti parametra α uvek pozitivna.

16.Ⓐ Zbir svih binomnih koeficijenata u razvoju binoma

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

dobijamo za $a = b = 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = (1+1)^n \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Prema uslovu zadatka važi

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 4^{52} = 2^{104}$$

odakle sledi

$$2^n = 2^{104} \iff n = 104$$

Sada za razvoj zadatog binoma ($a = \sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}}$, $b = \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$) imamo

$$\left(3^{\frac{1}{5}} + 5^{\frac{1}{3}}\right)^{104} = \sum_{k=0}^{104} \binom{n}{k} 3^{\frac{104-k}{5}} \cdot 5^{\frac{k}{3}}$$

Tražimo one vrednosti indeksa $k = 0, 1, 2, \ldots, 104$ za koje su članovi u razvoju racionalni brojevi, odnosno, za je koje sledeći proizvod racionalan broj

$$3^{\frac{104-k}{5}} \cdot 5^{\frac{k}{3}} = 3^{21-\frac{k+1}{5}} \cdot 5^{\frac{k}{3}} = 3^{21} \cdot 3^{-\frac{k+1}{5}} \cdot 5^{\frac{k}{3}}$$

k mora biti deljiv sa 3 i istovremeno $k+1$ mora biti deljiv sa 5. $k+1$ je deljivo sa 5 za sledeće vrednosti iz skupa $k = 0, 1, \ldots, 104$:

$$k = 4, 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39, 44, 49, 54, 59, 64, 69, 74, 79, 84, 89, 94, 99, 104$$

Iz ovog skupa, sledećih sedam članova su deljivi sa 3

$$k = 9, 24, 39, 54, 69, 84, 99$$

te je broj racionalnih članova u razvoju zadatog binoma jednak 7.

17.Ⓐ U skupu realnih brojeva, logaritamska funkcija je definisana za pozitivne argumente te važe sledeći uslovi

$$-2x - 1 > 0 \iff x < -\frac{1}{2}$$

$$\sqrt[3]{x+7} > 0 \iff x+7>0 \iff x>-7$$

Dok je kvadratni koren definisan za argumente koji su veći ili jednaki nuli, te sledi

$$\log_7(-2x-1) \geq 0 \iff \log_7(-2x-1) \geq \log_7 1 \iff -2x-1 \geq 1 \iff 2x \leq -2 \iff x \leq -1$$

Dakle, rešenja tražimo u skupu

$$x \in \left(-7, -\frac{1}{2}\right)$$

Za $-2x-1>0$ važi $|2x+1| = -(2x+1)$.

Za $x+7>0$ važi $|x+7| = x+7$.

Dalje važi

$$\sqrt{\log_7(-2x-1)} = \sqrt{\log_7|2x+1|}$$
$$\log_7\sqrt{4x^2+4x+1} = \log_7\sqrt{(2x+1)^2} = \log_7|2x+1|$$
$$\log_7\sqrt[3]{x+7} = \log_7(x+7)^{1/3} = \frac{1}{3}\log_7(x+7)$$

te zadata jednačina

$$\left(\sqrt{\log_7(-2x-1)} - \log_7\sqrt{4x^2+4x+1} - 1\right)\cdot\log_7|x+7| = -3\log_7\sqrt[3]{x+7}$$

postaje

$$\left(\sqrt{\log_7|2x+1|} - \log_7|2x+1| - 1\right)\cdot\log_7(x+7) = -3\frac{1}{3}\log_7(x+7)$$
$$\log_7(x+7)\left(1+\sqrt{\log_7|2x+1|} - \log_7|2x+1| - 1\right) = 0$$
$$\log_7(x+7)\left(\sqrt{\log_7|2x+1|} - \log_7|2x+1|\right) = 0$$

Sada imamo dve mogućnosti

1. $$\log_7(x+7) = 0 \iff \log_7(x+7) = \log_7 1 \iff x+7=1 \iff x=-6 \in \left(-7,-\frac{1}{2}\right)$$

   Dakle, jedno rešenje zadate jednačine je $x_1 = -6$.

2. $$\sqrt{\log_7|2x+1|} - \log_7|2x+1| \iff \sqrt{\log_7|2x+1|} = \log_7|2x+1|$$

   i kako su obe strane jednačine pozitivne na datom intervalu, to kvadriranjem leve i desne strane jednačine dobijamo

   $$\log_7|2x+1| = \log_7^2|2x+1| \iff \log_7|2x+1|(\log_7|2x+1|-1) = 0$$

   Sada imamo sledeće mogućnosti

   a) $$\log_7|2x+1| = 0 \iff \log_7|2x+1| = \log_7 1 \iff |2x+1| = 1 \Rightarrow -2x-1=1 \iff x=-1 \in \left(-7,-\frac{1}{2}\right)$$

      te je još jedno rešenje zadate jednačine $x_2 = -1$.

   b) $$\log_7|2x+1| = 1 \iff \log_7|2x+1| = \log_7 7 \iff |2x+1| = 7 \Rightarrow -2x-1=7 \iff x=-4 \in \left(-7,-\frac{1}{2}\right)$$

      te je treće rešenje zadate jednačine $x_3 = -4$

Za zbir svih rešenja zadate jednačine konačno dobijamo

$$x_1+x_2+x_3 = -6-1-4 = -11$$

18.Ⓓ Tražimo oblast definisanosti funkcije

$$f(x) = \frac{\sqrt{\cos^2 x + \sin x\cos x - 1}}{\log_{\frac{1}{7}}(9-x^2)}$$

1. Iz uslova da argument logaritamske funkcije mora biti pozitivan u skupu realnih brojeva, dobijamo

$$9-x^2>0 \iff (x-3)(x+3)<0 \iff x\in(-3,3)$$

2. Iz uslova da imenilac racionalne funkcije mora biti različit od nule, dobijamo

$$\log_{\frac{1}{7}}(9-x^2)\neq 0 \iff \log_{\frac{1}{7}}(9-x^2)\neq \log_{\frac{1}{7}}1 \iff 9-x^2\neq 1 \iff x^2\neq 8 \iff x\neq \pm 2\sqrt{2}$$

3. Poslednji uslov je da argument kvadratnog korena mora biti veći ili jednak nuli

$$\cos^2 x+\sin x\cos x-1\geq 0 \iff \cos^2 x+\sin x\cos x-(\cos^2 x+\sin^2 x)\geq 0 \iff \sin x\cos x-\sin^2 x\geq 0$$

Ova nejednačina je ispunjena za $\sin x=0 \iff x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, odnosno za $x=0$.
Za $\sin x\neq 0$ dalje imamo

$$\sin^2 x\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}-1\right)\geq 0$$

Kako je $\sin^2 x>0$, to je poslednja nejednačina ekvivalentna sledećoj

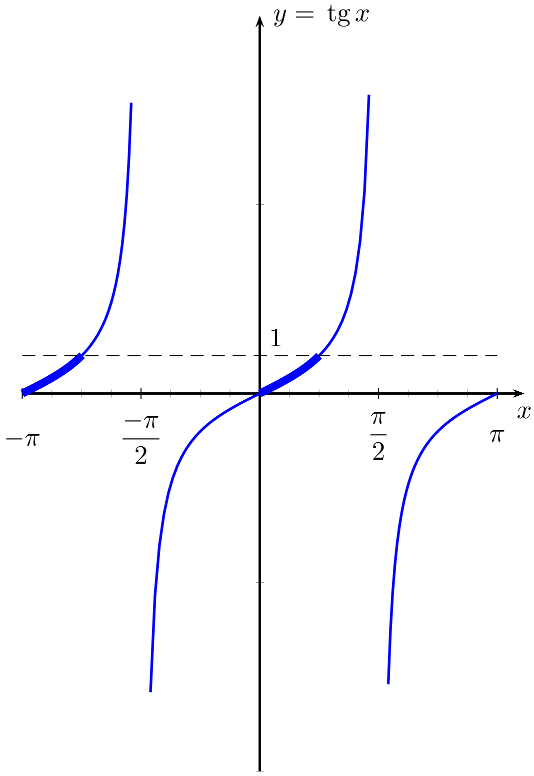
$$\frac{1}{\operatorname{tg} x}-1\geq 0 \iff \frac{\operatorname{tg} x-1}{\operatorname{tg} x}\leq 0$$

te imamo dve mogućnosti

a) $\operatorname{tg} x>0 \wedge \operatorname{tg} x\leq 1$, čija su rešenja na skupu $x\in[-\pi,\pi]$ data izrazom (videti grafik)

$$x\in\left(-\pi,-\frac{3\pi}{4}\right]\cup\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$$

b) $\operatorname{tg} x<0 \wedge \operatorname{tg} x\geq 1 \Rightarrow x\in\emptyset$



Uzimajući u obzir da važi $-\pi<-3<-2\sqrt{2}<-\frac{3\pi}{4}$ i $\frac{\pi}{4}<2\sqrt{2}$ iz preseka skupova dobijenih iz uslova 1), 2) i 3) konačno dobijamo

$$x\in\left(-3,-2\sqrt{2}\right)\cup\left(-2\sqrt{2},-\frac{3\pi}{4}\right]\cup\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$$

ili u ekvivalentnom obliku

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left(-3, -\frac{3\pi}{4}\right] \setminus \{-2\sqrt{2}\}$$

19.Ⓓ Uvođenjem smene $t = \left(\frac{2}{5}\right)^{2x+3y-10} > 0$ jednačina

$$50\left(\frac{2}{5}\right)^{2x+3y-10} + 20\left(\frac{5}{2}\right)^{2x+3y-10} = 133$$

dobija sledeći oblik

$$50t + \frac{20}{t} = 133 \iff 50t^2 - 133t + 20 = 0$$

čija su rešenja

$$t_{1/2} = \frac{133 \pm \sqrt{133^2 - 4 \cdot 50 \cdot 20}}{100} = \frac{133 \pm \sqrt{13689}}{100} = \frac{133 \pm 117}{100} = \begin{cases} 4/25 \\ 5/2 \end{cases}$$

Za oba rešenja je ispunjen uslov $t_1, t_2 > 0$.

Sada razlikujemo dva slučaja:

1.
$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x+3y-10} = \frac{4}{25} = \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

   odakle sledi

$$2x + 3y - 10 = 2 \iff 2x + 3y = 12$$

2.
$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x+3y-10} = \frac{5}{2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$$

   odakle sledi

$$2x + 3y - 10 = -1 \iff 2x + 3y = 9$$

U prvom slučaju imamo sledeći sistem jednačina

$$2x + 3y = 12 \land (x+3)(y-1) = 6$$

Iz prve jednačine imamo $x = \frac{12-3y}{2}$ čijom smenom u drugoj jednačini sledi

$$\left(\frac{12-3y}{2} + 3\right)(y-1) = 6 \iff y^2 - 7y + 10 = 0 \iff (y-2)(y-5) = 0$$

$$y_1 = 2, x_1 = \frac{12 - 3y_1}{2} = 3$$
$$y_2 = 5, x_2 = \frac{12 - 3y_2}{2} = -\frac{3}{2}$$

U drugom slučaju imamo sledeći sistem jednačina

$$2x + 3y = 9 \land (x+3)(y-1) = 6$$

Iz prve jednačine imamo $x = \frac{9-3y}{2}$ čijom smenom u drugoj jednačini sledi

$$\left(\frac{9-3y}{2} + 3\right)(y-1) = 6 \iff y^2 - 6y + 9 = 0 \iff (y-3)^2 = 0$$

$$y_3 = 3, x_3 = \frac{9 - 3y_3}{2} = 0$$

Dakle, ukupan broj rešenja zadatog sistema jednačina je tri.

20.Ⓒ Dat je skup $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{11}\}$ sa 11 elemenata. Različitih podskupova $X \subset A$ sa osam elemenata izabranih iz 11 elemenata skupa A ima

$$\binom{11}{8} = \binom{11}{3}$$

Podskup $Y \subset A$ ima 5 istih elemenata kao i podskup X, koje iz 8 elemenata podskupa X možemo izabrati na

$$\binom{8}{5} = \binom{8}{3}$$

načina, dok preostala $7 - 5 = 2$ elementa podskupa Y biramo iz preostala $11 - 8 = 3$ elementa skupa A na

$$\binom{3}{2} = \binom{3}{1} = 3$$

načina. Dakle ukupan broj različitih podskupova Y je

$$3 \cdot \binom{8}{3}$$

Sada je ukupan broj uređenih parova (X, Y) dat izrazom

$$\binom{11}{3} \cdot \left(3 \cdot \binom{8}{3}\right) = 3 \cdot \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 27720$$

PROBNI PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE ZA UPIS NA ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

1. Tri knjige ukupno imaju 364 strane. Knjiga A ima 25% manje strana od knjige B, a knjiga C ima 50% više strana od knjige B. Koliko strana ima knjiga C?

(A) 224 (B) 168 (C) 180

(D) 223 (E) Nijedan ponuđeni odgovor (N) Ne znam

2. Izraz $\dfrac{a+b}{a^{1/3}+b^{1/3}}-(b-a)\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^{-1}-4a^{1/3}b^{1/3}$, za sve vrednosti $a,b\in\mathbb{R}$ za koje je definisan, identički je jednak izrazu:

(A) $a-b$ (B) $\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^2$ (C) $\dfrac{2}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^{-2}}$

(D) 0 (E) $a+b$ (N) Ne znam

3. Data je funkcija $f(x)=\begin{cases}2x+3, & \text{ako je } x \text{ paran broj,}\\ x^2-1, & \text{ako je } x \text{ neparan broj.}\end{cases}$ Vrednost izraza $f(f(1+f(3))-2)$ jednaka je:

(A) 169 (B) 159 (C) 10 (D) 179 (E) 189 (N) Ne znam

4. Neka je α proizvod četvtog i desetog člana rastuće geometrijske progresije sa pozitivnim članovima. Tada je proizvod prvih trinaest članova te progresije jednak:

(A) α^{11} (B) $\alpha^5\cdot\sqrt{\alpha}$ (C) α^{12} (D) $\alpha^4\cdot\sqrt{\alpha}$ (E) $\alpha^6\cdot\sqrt{\alpha}$ (N) Ne znam

5. Dat je polinom $P(x)=x^{2018}+x^{523}+x-1$. Ostatak pri deljenju polinoma $P(x)$ polinomom x^2+1 jednak je:

(A) $x+2$ (B) $x-2$ (C) -2 (D) $x+i$ (E) $x-i$ (N) Ne znam

6. Dat je zbir $1+i+i^2+i^3+\ldots+i^n$, gde je $n>2018$ i $n\in\mathbb{N}$. Najmanja vrednost broja n za koju je vrednost zbira jednaka i iznosi:

(A) 2019 (B) 2020 (C) 2021 (D) 2022 (E) 2023 (N) Ne znam

7. Dati su krugovi $x^2+y^2+4x=7$ i $x^2+y^2-6x+5=0$. Dužina zajedničke tetive iznosi:

(A) $2\dfrac{\sqrt{19}}{5}$ (B) 2 (C) $5\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ (D) 1 (E) $\dfrac{1}{2}$ (N) Ne znam

8. Broj iracionalnih članova u razvoju binoma $\left(\sqrt[3]{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2018}$ jednak je:

(A) 1683 (B) 337 (C) 1009

(D) 1682 (E) Nijedan ponuđeni odgovor (N) Ne znam

9. U paralelogramu $ABCD$ dijagonale BD i AC se seku u tački O. Ako je dijagonala BD dužine 5 cm, $\angle DBA=\dfrac{\pi}{4}$ i $\angle DOC=\dfrac{7\pi}{12}$, tada je površina paralelograma $ABCD$ jednaka:

(A) $\dfrac{25(\sqrt{3}+1)}{4}$ (B) $\dfrac{25\sqrt{2}}{2}$ (C) $25(\sqrt{3}+1)$

(D) $25\sqrt{3}$ (E) Nijedan ponuđeni odgovor (N) Ne znam

10. Granična vrednost $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{4\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{8}x\right)\cdot\cos(2\pi x)\cdot(\sqrt{x}-2)}{(x-4)\cdot\left(\ln(x-3)+\sqrt{2\pi}+\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{\lceil 8-2x\rceil}}\right)\cdot\left(\sqrt{2x^3-x-3}-\sqrt{4x}\right)}$ jednaka je:

(A) $-\infty$ (B) 0 (C) $+\infty$

(D) $-\dfrac{1}{7\sqrt{2\pi}}$ (E) Nijedan ponuđeni odgovor (N) Ne znam

11. Data je funkcija $f(x) = \dfrac{3x^2}{x+1} + \dfrac{x}{\pi}\sin(2\pi x) + e\ln^2(x+e-1)$. Tada je vrednost $f'(1)$ jednaka:

(A) 1 (B) 0 (C) $\dfrac{25}{4}$ (D) $\dfrac{13}{2}$ (E) 5 (N) Ne znam

12. Broj svih celobrojnih rešenja nejednačine $\dfrac{-x^2+4x+21}{10^{-3x} + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \geq 0$ jednak je:

(A) 5 (B) 8 (C) 10 (D) 11 (E) 6 (N) Ne znam

13. Skup svih rešenja nejednačine: $\log_{x-5}(4x-20) \leq \log_{x-5}(5-x)^2$ je oblika (za neke realne brojeve a, b, c, d takve da je $a < b < c < d$):

(A) (a, b) (B) $(a, b) \cup (c, d)$ (C) $(a, b) \cup [c, +\infty)$

(D) $(-\infty, b] \cup [c, +\infty)$ (E) Nijedan ponuđeni odgovor (N) Ne znam

14. Broj realnih rešenja jednačine $\log_{\sqrt{7-\operatorname{tg} x}} \sqrt{\sin x} \cdot \log_{\frac{1}{\sin x}} \cos^2 x = 1$ na segmentu $[-\pi, \pi]$ je:

(A) 1 (B) 2 (C) 3

(D) 4 (E) Nijedan ponuđeni odgovor (N) Ne znam

15. Ako su m i M redom najmanja i najveća vrednost funkcije $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\cos^2 x - \sin x - 1}$, tada je proizvod $m \cdot M$ jednak:

(A) 1 (B) 9 (C) $3^{7/4}$

(D) $3^{1/4}$ (E) Nijedan ponuđeni odgovor (N) Ne znam

16. Broj svih mogućih vrednosti realnog parametra $\alpha \in (-9, 9)$ za koje jednačina $\log_3(4x-4x^2) = \left|\sin(\pi x + \alpha) - \dfrac{1}{2}\right|$ ima tačno jedno rešenje jednak je:

(A) 0 (B) 2 (C) 4

(D) 6 (E) Nijedan ponuđeni odgovor (N) Ne znam

17. Skup rešenja nejednačine $\sqrt{48} + \dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}-1} \geq \dfrac{\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}$ je oblika (za neke $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b < c < d$):

(A) $(a, b) \cup (c, +\infty)$ (B) $(a, b) \cup (c, d)$ (C) $(-\infty, b) \cup (c, d)$

(D) $(-\infty, b) \cup [c, d]$ (E) Nijedan ponuđeni odgovor (N) Ne znam

18. Ako su (x_1, y_1) i (x_2, y_2) dva realna rešenja sistema $3^{x-y+2} \cdot 2^{y-x+2} - 2^{x-y+2} \cdot 3^{y-x+2} - 65 = 0$, $(x+1) \cdot (y-1) = 117$, tada je $x_1 x_2 + y_1 y_2$ jednako:

(A) 100 (B) 10 (C) -144 (D) 0 (E) -240 (N) Ne znam

19. Dati su skupovi $X = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ i $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Ukupan broj preslikavanja $f : X \to Y$ takvih da važi: $f(9) < 4$ i postoje tačno dva elementa $x \in X$ za koje važi $f(x) = x$, jednak je:

(A) 1152 (B) 882 (C) 588

(D) 1100 (E) Nijedan ponuđeni odgovor (N) Ne znam

20. Prava trostrana prizma ima u osnovi trougao ABC čije su dužine stranica $AB = AC = 4$ i $BC = 3$. Visina prizme je $H = AA_1 = BB_1 = CC_1 = 3$. Rastojanje tačke A_1 od duži BC_1 jednako je:

(A) $\sqrt{\dfrac{238}{8}}$ (B) $\sqrt{\dfrac{238}{4}}$ (C) $\sqrt{\dfrac{119}{16}}$ (D) $\sqrt{119}$ (E) $\sqrt{\dfrac{119}{8}}$ (N) Ne znam

REŠENJA

1.Ⓑ Neka knjige A, B i C imaju redom a, b i c strana. Prema uslovima zadatka važe sledeće relacije

$$c = (1+0.5)b = 1.5b = \frac{3}{2}b \Rightarrow b = \frac{2}{3}c$$

$$a = (1-0.25)b = 0.75b = \frac{3}{4}b = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}c = \frac{1}{2}c$$

što smenom u jednačini

$$a + b + c = 364$$

daje broj strana knjige C

$$\frac{1}{2}c + \frac{2}{3}c + c = 364 \Leftrightarrow \frac{3+4+6}{6}c = 364 \Leftrightarrow c = \frac{6}{13}\cdot 364 = 168$$

2.Ⓒ Koristimo sledeće identitete

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$
$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

odakle smenom $x = \sqrt[3]{a}$, $y = \sqrt[3]{b}$ dobijamo

$$a + b = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})$$

$$a - b = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})$$

Odavde sledi

$$\frac{a+b}{a^{1/3}+b^{1/3}} = \frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$$

$$(b-a)\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)^{-1} = -\frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} = -\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{b^2}$$

te se zadati izraz može predstaviti u sledećem obliku

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{a^{1/3}+b^{1/3}} - (b-a)\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)^{-1} - 4a^{1/3}b^{1/3} &= \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2} - 4a^{1/3}b^{1/3}\\ &= 2\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} - 2\sqrt[3]{ab}\right) = 2\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)^2\\ &= \frac{2}{\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)^{-2}}\end{aligned}$$

3.Ⓑ Važi redom

$$f(3) = 3^2 - 1 = 8$$
$$f(1 + f(3)) = f(1+8) = f(9) = 9^2 - 1 = 80$$
$$f(f(1+f(3)) - 2) = f(80-2) = f(78) = 2\cdot 78 + 3 = 159$$

4.Ⓔ Označimo članove rastuće geometrijske progresije $a_n = q^{n-1}a_1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, gde je $q > 1$ i $a_1 > 0$. Za četvrti i deseti član važe relacije

$$a_4 = q^3 a_1$$

$$a_{10} = q^9 a_1$$

a prema uslovu zadatka, za njihov proizvod važi

$$a_4 \cdot a_{10} = \alpha \Rightarrow q^{12}a_1^2 = \alpha$$

Sada za proizvod prvih trinaest članova dobijamo

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{13} a_n &= a_1 \cdot (qa_1) \cdot (q^2 a_1) \cdots (q^{12} a_1) \\ &= a_1^{13} \cdot q^{1+2+\cdots+12} = a_1^{13} \cdot q^{\frac{12\cdot(12+1)}{2}} = a_1^{13}(q^6)^{13} = (q^6 a_1)^{13} = (q^{12} a_1^2)^{\frac{13}{2}} \\ &= \alpha^{\frac{13}{2}} = \alpha^6 \cdot \alpha^{\frac{1}{2}} = \alpha^6 \sqrt{\alpha}\end{aligned}$$

5.Ⓒ Neka je $Q(x)$ količnik, a $R(x)$ ostatak pri deljenju polinoma $P(x) = x^{2018} + x^{523} + x - 1$ polinomom $x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$:

$$P(x) = (x+i)(x-i)Q(x) + R(x)$$

gde je stepen polinoma $R(x)$ najviše 1 (mora biti manji od stepena polinoma delioca $x^2 + 1$):

$$R(x) = ax + b$$

Sada važi

$$P(i) = R(i) = ai + b$$

$$P(-i) = R(-i) = -ai + b$$

odakle dobijamo

$$a = \frac{1}{2}(P(i) - P(-i))$$

$$b = \frac{1}{2}(P(i) + P(-i))$$

Kako je

$$P(-i) = (-i)^{2018} + (-i)^{523} - i - 1 = (-1)^{2018} i^{2018} + (-1)^{523} i^{523} - i - 1 = i^{2018} - i^{523} - i - 1$$

to dalje sledi

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{2}(P(i) - P(-i)) = \frac{1}{2}\left(i^{2018} + i^{523} + i - 1 - (i^{2018} - i^{523} - i - 1)\right) \\ &= i^{523} + i = i \cdot i^{522} + i = i \cdot (i^2)^{261} + i = i \cdot (-1)^{261} + i = -i + i = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b &= \frac{1}{2}(P(i) + P(-i)) = \frac{1}{2}\left(i^{2018} + i^{523} + i - 1 + (i^{2018} - i^{523} - i - 1)\right) \\ &= i^{2018} - 1 = (i^2)^{1009} - 1 = (-1)^{1009} - 1 = -1 - 1 = -2\end{aligned}$$

te za ostatak $R(x)$ konačno dobijamo

$$R(x) = ax + b = -2$$

6.Ⓓ **Rešenje A:**

Za zadatu sumu S_n, $n > 2018$ važi:

$$\begin{aligned}S_n &= 1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^n \\ &= 1 + i + i^2 + i^3 + i^4(1 + i + i^2 + i^3) + i^8(1 + i + i^2 + i^3) + \cdots \\ &\quad + i^{2016}(1 + i + i^2 + i^3) + i^{2020}(1 + i + i^2 + i^3) + \cdots + i^n\end{aligned}$$

Kako je

$$1 + i + i^2 + i^3 = 1 + i - 1 - i = 0$$

to za $n > 2018$ imamo

$$S_{2019} = 0$$

$$S_{2020} = 1$$

$$S_{2021} = 1 + i$$

$$S_{2022} = 1 + i + i^2 = i$$

Dakle, najmanja vrednost broja $n > 2018$ za koju je $S_n = i$ je $n = 2022$.

Rešenje B:

Koristimo jednakost

$$x^{n+1} - 1 = (x-1)\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^n\right)$$

gde smenom $x = i$ dobijamo

$$i^{n+1} - 1 = (i-1)\left(1 + i + i^2 + \cdots + i^n\right)$$

odnosno

$$1 + i + i^2 + \cdots + i^n = \frac{i^{n+1} - 1}{i - 1}$$

Tražimo $n > 2018$ za koje važi

$$\frac{i^{n+1} - 1}{i - 1} = i \Rightarrow i^{n+1} - 1 = i^2 - i \iff i^{n+1} = -i \iff i^n = -1$$

Kako je za $n > 2018$

$$i^{2019} = i \cdot i^{2018} = i \cdot (i^2)^{1009} = -i$$

$$i^{2020} = i \cdot i^{2019} = 1$$

$$i^{2021} = i \cdot i^{2020} = i$$

$$i^{2022} = i \cdot i^{2021} = -1$$

to je traženo rešenje $n = 2022$.

7.Ⓐ Presečne tačke dveju kružnica koje definišu zajedničku tetivu nalazimo rešavanjem sistema jednačina

$$x^2 + y^2 + 4x = 7$$

$$x^2 + y^2 - 6x = -5$$

Oduzimanjem ovih dveju jednačina dobijamo

$$10x = 12 \Rightarrow x = \frac{6}{5}$$

Smenom u prvoj jednačini dalje imamo

$$y^2 = 7 - x^2 - 4x = 7 - \frac{36}{25} - \frac{24}{5} = \frac{19}{25}$$

$$y_{1/2} = \pm\frac{\sqrt{19}}{5}$$

Dakle, zajednička tetiva je definisana tačkama $A = \left(\frac{6}{5}, -\frac{\sqrt{19}}{5}\right)$ i $B = \left(\frac{6}{5}, +\frac{\sqrt{19}}{5}\right)$ te je njena dužina

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \frac{2\sqrt{19}}{5}$$

8.Ⓓ Iz izraza za binomni razvoj

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

smenom $a = \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$, $b = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -2^{-\frac{1}{2}}$, $n = 2018$ imamo

$$\left(\sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \sum_{k=0}^{2018} (-1)^k \binom{2018}{k} 2^{\frac{2018-k}{3}} 2^{-\frac{k}{2}} = \sum_{k=0}^{2018} (-1)^k \binom{2018}{k} 2^{\frac{2019-1}{3}} 2^{-\frac{5k}{6}} = 2^{673} \sum_{k=0}^{2018} (-1)^k \binom{2018}{k} 2^{-\frac{5k+2}{6}}$$

$$\left(\sqrt[3]{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 2^{673}\sum_{k=0}^{2018}(-1)^k\binom{2018}{k}2^{-\frac{6k-(k-2)}{6}} = 2^{673}\sum_{k=0}^{2018}(-1)^k\binom{2018}{k}2^{-k}2^{\frac{k-2}{6}}$$

Tražimo sve $k = 0, 1, 2, \ldots, 2018$ za koje je $2^{\frac{k-2}{6}}$ iracionalan broj, odnosno za koje $k-2$ nije deljivo brojem 6.

U skupu od 2019 elemenata: $k-2 = -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, 2016$, svaki šesti član počev od broja 1 je deljiv sa 6. Ukupan broj elemenata deljivih sa šest, počev od broja 1 je

$$\left\lfloor \frac{2016}{6} \right\rfloor = 336$$

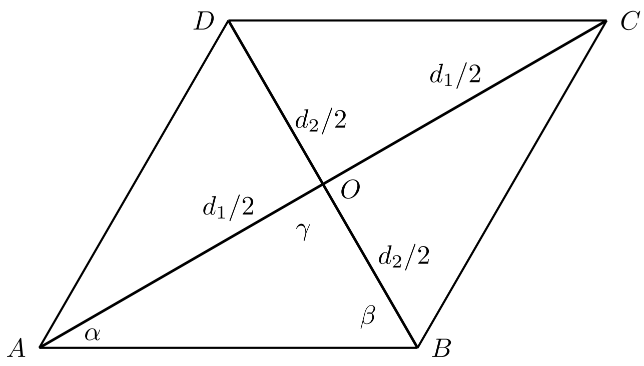
Među elementima manjih od broja 1: $k-2 = -2, -1, 0$, samo je broj 0 deljiv brojem 6. Dakle, ukupan broj elemenata deljivih brojem šest je:

$$336 + 1 = 337$$

Preostali elementi nisu deljivi brojem 6 i odgovarajući članovi u binomnom razvoju su iracionalni brojevi. Takvih članova ima

$$2019 - 337 = 1682$$

9.Ⓐ Označimo dijagonale i uglove paralelograma kao na slici: $d_1 = AC, d_2 = BD, \beta = \angle DBA, \alpha = \angle CAB, \gamma = \angle AOB = \angle DOC$. Prema uslovima zadatka važi $d_2 = 5 \Rightarrow OA = d_1/2 = \frac{5}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$ i $\gamma = \frac{7\pi}{12}$.



Za uglove trougla AOB važi

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \Rightarrow \alpha = \pi - \beta - \gamma = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{7\pi}{12} = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

Primenom sinusne teoreme na trougao AOB dobijamo

$$\frac{OA}{\sin\beta} = \frac{OB}{\sin\alpha} \Rightarrow OA = OB\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$\frac{d_1}{2} = \frac{d_2}{2}\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{6}} \Rightarrow d_1 = d_2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

Kako je površina paralelograma $ABCD$ jednaka zbiru površina trouglova $AOB, BOC, CODiDOA$ to se površina paralelograma može izraziti preko dužina dijagonala d_1 i d_2 na sledeći način

$$\begin{aligned}P_{ABCD} &= P_{AOB} + P_{BOC} + P_{COD} + P_{DOA} = 2(P_{AOB} + P_{BOC}) = OA \cdot OB \sin\angle AOB + OB \cdot OC \sin\angle BOC \\ &= \frac{d_1}{2}\frac{d_2}{2}\sin\gamma + \frac{d_2}{2}\frac{d_1}{2}\sin(\pi-\gamma) = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\gamma\end{aligned}$$

Kako je

$$\sin\gamma = \sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$$

to koristeći trigonometrijski identitet

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

i

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

za sinus ugla γ dobijamo

$$\sin\gamma = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$$

pa se konačno za površinu paralelograma $ABCD$ dobija

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\gamma = \frac{1}{2}5\cdot 5\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3}) = \frac{25}{4}(1+\sqrt{3})$$

---

10. Ⓓ

$$\lim_{x\to 4}\frac{4\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{8}x\right)\cdot\cos(2\pi x)\cdot(\sqrt{x}-2)}{(x-4)\cdot\left(\ln(x-3)+\sqrt{2\pi}+\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{|8-2x|}}\right)\cdot\left(\sqrt{2x^3-x-3}-\sqrt{4x}\right)} =$$

$$= \frac{4\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{8}4\right)\cdot\cos(2\pi 4)}{\left(\ln(4-3)+\sqrt{2\pi}+\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{|8-2\cdot x|}}\right)\cdot\left(\sqrt{2\cdot 4^3-4-3}-\sqrt{4\cdot 4}\right)}\cdot\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)}{(x-4)} =$$

$$= \frac{4\cdot\underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}_{=-1}\cdot\underbrace{\cos(8\pi)}_{=1}}{\left(0+\sqrt{2\pi}+\underbrace{\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{1}{7}\right)^{\underbrace{\frac{1}{|8-2\cdot x|}}_{=+\infty}}}_{=0}\right)\cdot(11-4)}\cdot\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)}{(x-4)} =$$

$$= \frac{-4}{7\sqrt{2\pi}}\cdot\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)}{(x-4)}$$

Poslednji granični izraz je oblika 0/0 i može se rešiti primenom L'Hôpitalovog pravila

$$\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)}{(x-4)} = \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)'}{(x-4)'} = \lim_{x\to 4}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \frac{1}{4}$$

te je zadata granična vrednost jednaka

$$\frac{-4}{7\sqrt{2\pi}}\cdot\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)}{(x-4)} = -\frac{1}{7\sqrt{2\pi}}$$

---

11. Ⓒ Zadata funkcija se može predstaviti u sledećem obliku

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$$

gde je

$$f_1(x) = \frac{3x^2}{x+1}$$
$$f_2(x) = \frac{x}{\pi}\sin 2\pi x$$
$$f_3(x) = e\ln^2(x+e-1)$$

Dalje sledi

$$f_1'(x) = \left(\frac{3x^2}{x+1}\right) = \frac{6x(x+1) - 3x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{3x(x+2)}{(x+1)^2}$$

$$f_1'(1) = \frac{9}{4}$$

$$f_2'(x) = \left(\frac{x}{\pi}\sin 2\pi x\right)' = \frac{1}{\pi}\left(1 \cdot \sin 2\pi x + x \cdot \cos 2\pi x \cdot 2\pi\right) = \frac{1}{\pi}\sin 2\pi x + 2x\cos 2\pi x$$

$$f_2'(1) = \frac{1}{\pi}\underbrace{\sin 2\pi}_{=0} + 2\underbrace{\cos 2\pi}_{=1} = 2$$

$$f_3'(x) = \left(e\ln^2(x+e-1)\right)' = e \cdot 2\ln(x+e-1) \cdot \frac{1}{x+e-1}$$

$$f_3'(1) = 2e\frac{\ln(e)}{e} = 2\ln e = 2$$

Konačno

$$f'(1) = f_1'(1) + f_2'(1) + f_3'(1) = \frac{9}{4} + 2 + 2 = \frac{25}{4}$$

12.Ⓐ

$$\frac{-x^2 + 4x + 21}{10^{-3x} + \operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{2}} \geq 0$$

Izraz 10^{-3x} je definisan za $x \in \mathbb{R}$.

Kako funkcija $\operatorname{tg} x$ nije definisana za $x = \pm\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ to imamo uslov

$$\frac{\pi x}{2} \neq \pm\frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \pm 1 + 2k,\ k \in \mathbb{Z}$$

što znači da neparni celi brojevi ne mogu biti rešenja nejednačine jer u tim tačkama zadata tangens funkcija nije definisana.

Kako je $10^{-3x} > 0$ i $\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{2} \geq 0$ to važi

$$10^{-3x} + \operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{2} > 0$$

to se zadata nejednačina svodi na

$$-x^2 + 4x + 21 \geq 0 \iff x^2 - 4x - 21 \leq 0 \iff (x-7)(x+3) \leq 0$$

te se za njena rešenja dobija

$$x \in [-3, 7]$$

Skup svih mogućih celobrojnih rešenja iz ovog intervala je

$$\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Kako neparni brojevi ne mogu biti rešenja zadate nejednačine, to je ukupan broj celobrojnih (parnih) rešenja iz gornjeg skupa jednak 5:

$$x \in \{-2, 0, 2, 4, 6\}$$

13.Ⓒ Rešenja zadate nejednačine u skupu realnih brojeva $x \in \mathbb{R}$

$$\log_{x-5}(4x-20) \leq \log_{x-5}(5-x)^2$$

moraju da ispunjavaju sledeće uslove

$$x - 5 > 0 \iff x > 5 \wedge x - 5 \neq 1 \iff x \neq 6$$

$$4x - 20 > 0 \iff x > 5$$

Dakle, rešenja tražimo u intervalu

$$x \in (5, 6) \cup (6, +\infty)$$

$$\log_{x-5}(4x-20) \leq \log_{x-5}(5-x)^2 \iff$$
$$\log_{x-5}(5-x)^2 - \log_{x-5}(4x-20) \geq 0 \iff$$
$$\log_{x-5}\frac{(x-5)^2}{4(x-5)} \geq 0 \wedge x > 5 \Rightarrow$$
$$\log_{x-5}\frac{x-5}{4} \geq 0 \iff$$
$$\log_{x-5}\frac{x-5}{4} \geq \log_{x-5} 1$$

Sada razlikujemo dva slučaja

1. $x \in (5,6) \iff x-5 \in (0,1)$

$$\log_{x-5}\frac{x-5}{4} \geq \log_{x-5} 1 \Rightarrow$$
$$\frac{x-5}{4} \leq 1 \iff x-5 \leq 4 \iff x \leq 9$$

   odakle sledi da je rešenje u ovom slučaju u intervalu $x \in (5,6)$

2. $x > 6 \iff x-5 > 1$

$$\log_{x-5}\frac{x-5}{4} \geq \log_{x-5} 1 \Rightarrow$$
$$\frac{x-5}{4} \geq 1 \iff x-5 \geq 4 \iff x \geq 9$$

   odakle sledi da je rešenje u ovom slučaju u intervalu $x \in [9,+\infty)$

Konačno, rešenje zadate nejednačine je oblika

$$x \in (5,6) \cup [9,+\infty)$$

14.Ⓑ Rešenja zadate jednačine

$$\log_{\sqrt{7-\operatorname{tg} x}} \sqrt{\sin x} \cdot \log_{\frac{1}{\sin x}} \cos^2 x = 1,$$

na intervalu $x \in [-\pi, \pi]$ moraju da ispunjavaju sledeće uslove:

1.

$$\sin x > 0 \Rightarrow x \in (0,\pi)$$
$$\sin x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2}$$

   odakle sledi da rešenja tražimo na intervalu $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

2.

$$7 - \operatorname{tg} x > 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x < 7 \wedge 7 - \operatorname{tg} x \neq 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x \neq 6$$

   odakle sledi da rešenja tražimo na intervalu (videti sliku)

$$x \in [-\pi, \operatorname{arctg}(6) - \pi) \cup (\operatorname{arctg}(6) - \pi, \operatorname{arctg}(7) - \pi) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \operatorname{arctg}(6)\right) \cup (\operatorname{arctg}(6), \operatorname{arctg}(7)) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

Uzimajući u obzir sve gornje uslove, oblast definisanosti zadate jednačine je

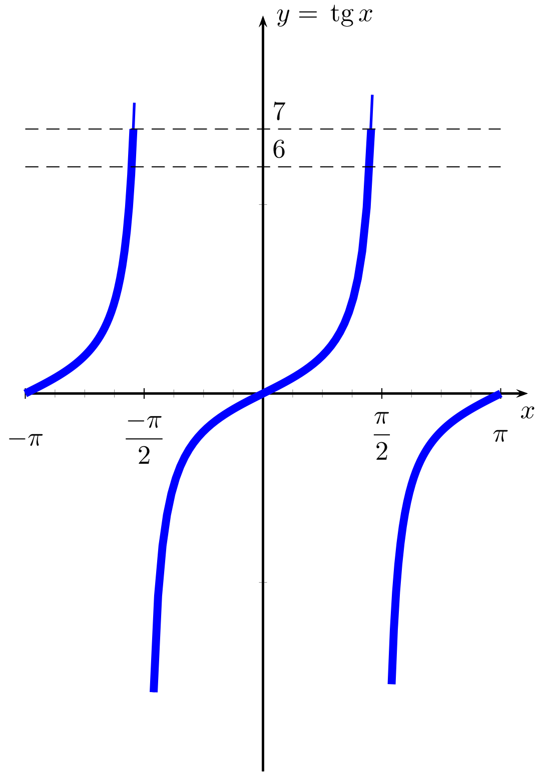
$$x \in (0, \operatorname{arctg}(6)) \cup (\operatorname{arctg}(6), \operatorname{arctg}(7)) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

Koristeći identitete

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$
$$\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$$

imamo

$$\log_{\sqrt{7-\operatorname{tg} x}} \sqrt{\sin x} = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{7-\operatorname{tg} x}}(\sin x) = \frac{1}{2\log_{\sin x}\sqrt{7-\operatorname{tg} x}} = \frac{1}{\log_{\sin x}(7-\operatorname{tg} x)}$$



$$\log_{\frac{1}{\sin x}} \cos^2 x = -\log_{\sin x} \cos^2 x = \log_{\sin x} \cos^{-2} x$$

te zadata jednačina dobija sledeći ekvivalentni oblik

$$\frac{\log_{\sin x} \cos^{-2} x}{\log_{\sin x} (7 - \operatorname{tg} x)} = 1$$

$$\log_{\sin x} \cos^{-2} x = \log_{\sin x} (7 - \operatorname{tg} x) \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = 7 - \operatorname{tg} x$$

Uzimajući u obzir $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ dobijamo

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = 7 - \operatorname{tg} x \iff \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 6 = 0$$

Smenom $t = \operatorname{tg} x$ u prethodnoj jednačini imamo sledeću kvadratnu jednačinu po promenljivoj t

$$t^2 + t - 6 = 0 \iff (t-2)(t+3) = 0 \Rightarrow t_1 = 2 \wedge t_2 = -3$$

Vraćanjem nazad smene $t = \operatorname{tg} x \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ dobijamo sledeća rešenja na intervalu $x \in [-\pi, \pi]$

$$x_1 = \operatorname{arctg} 2,\ x_2 = \operatorname{arctg} 2 - \pi,\ x_3 = -\operatorname{arctg} 3, x_3 = -\operatorname{arctg} 3 + \pi$$

od kojih samo x_1 i x_3 pripadaju dobijenoj oblasti definisanosti $x \in (0, \operatorname{arctg}(6)) \cup (\operatorname{arctg}(6), \operatorname{arctg}(7)) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

15.Ⓒ Zadata eksponencijalna funkcija se može predstaviti u sledećem obliku

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\cos^2 x - \sin x - 1} = 3^{-\cos^2 x + \sin x + 1} = 3^{g(x)}$$

gde je

$$g(x) = -\cos^2 x + \sin x + 1$$

Ekstremne vrednosti funkcije $f(x)$ nalazimo u onim tačkama x_i u kojima je izvod ove funkcije jednak nuli

$$f'(x_i) = 0$$

Kako je

$$f'(x) = \left(3^{g(x)}\right)' = (3^g)' \cdot g'(x)$$

i važi

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

to je

$$(3^g)' = 3^{g(x)} \ln 3 = 3^{-\cos^2 x + \sin x + 1} \ln 3$$

$$g'(x) = (-\cos^2 x + \sin x + 1)' = -2\cos x(-\sin x) + \cos x = \cos x(2\sin x + 1)$$

i za izvod funkcije $f(x)$ dobijamo

$$f'(x) = 3^{-\cos^2 x + \sin x + 1} \ln 3 \cos x(2\sin x + 1)$$

Sada tražimo rešenja x_i jednačine

$$f'(x_i) = 0 \iff 3^{-\cos^2 x_i + \sin x_i + 1} \ln 3 \cos x_i(2\sin x_i + 1) = 0$$

koja se zato što je $3^{-\cos^2 x_i + \sin x_i + 1} > 0$, $\forall x_i \in \mathbb{R}$ svodi na

$$\cos x_i(2\sin x_i + 1) = 0$$

Sada razlikujemo dva slučaja

1. $\cos x_1 = 0 \Rightarrow \sin x_1 = \pm 1$

   i vrednost funkcije je

$$f(x_1) = 3^{-\cos^2 x_1 + \sin x_1 + 1} = 3^{0 \pm 1 + 1} = \begin{cases} 3^2 = 9 \\ 3^0 = 1 \end{cases}$$

2. $\sin x_2 = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos x_2 = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ i vrednost funkcije je

$$f(x_2) = 3^{-\cos^2 x_2 + \sin x_2 + 1} = 3^{-\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + 1} = 3^{-\frac{1}{4}}$$

Iz prethodnog sledi da je maksimum funkcije $M = f(x_1) = 9$ i minumum $m = f(x_2) = 3^{-\frac{1}{4}}$ te se za proizvod minimuma i maksimuma sada ima

$$m \cdot M = 3^{-\frac{1}{4}} \cdot 9 = 3^{2-\frac{1}{4}} = 3^{\frac{7}{4}}$$

16.Ⓓ Zadata jednačina

$$\log_3(4x - 4x^2) = \left|\sin(\pi x + \alpha) - \frac{1}{2}\right|$$

je u skupu realnih brojeve $x \in \mathbb{R}$ definisana za

$$4x - 4x^2 > 0 \iff x(x-1) < 0 \iff x \in (0, 1)$$

i na tom intervalu se može predstaviti u sledećem ekvivalentnom obliku

$$4x - 4x^2 = 3^{\left|\sin(\pi x + \alpha) - \frac{1}{2}\right|}$$

$$4x^2 - 4x + 3^{\left|\sin(\pi x + \alpha) - \frac{1}{2}\right|} = 0$$

Označimo $\beta = 3^{\left|\sin(\pi x + \alpha) - \frac{1}{2}\right|} \geq 1$. Sada važi

$$4x^2 - 4x + \beta = 0$$

Ova kvadratna jednačina će imati samo jedno rešenje za x, ako je njena diskriminanta jednaka nuli

$$D = 4^2 - 4 \cdot 4\beta = 16 - 16\beta = 0 \Rightarrow \beta = 1$$

i tada je

$$4x^2 - 4x + 1 = 0 \iff (2x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \in (0, 1)$$

Sada važi

$$\beta = 3^{\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\frac{1}{2}\right|} = 1 = 3^0$$

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\frac{1}{2}\right| = 0 \iff \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{1}{2}$$

odakle sledi

$$\frac{\pi}{2}+\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{6}+2k\pi, \\ \frac{5\pi}{6}+2k\pi, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ \frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases} = \begin{cases} -\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ \frac{\pi}{3}+2k\pi \end{cases}$$

Od svih mogućih rešenja za α, samo se sledećih šest nalazi u zadatom intervalu $\alpha \in (-9, 9)$:

$$\alpha = \left\{-\frac{\pi}{3}-2\pi, \frac{\pi}{3}-2\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}+2\pi, \frac{\pi}{3}+2\pi\right\}$$

17.Ⓓ Zadata nejednačina

$$\sqrt{48}+\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}-1} \geq \frac{\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}$$

je definisana na skupu realnih brojeva $x \in \mathbb{R}$ za koje važi

$$1-x \geq 0 \iff x \leq 1$$

$$\sqrt{1-x} \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$$

Uvođenjem smene $t = \sqrt{1-x}$, $t \geq 0, t \neq 1$, nejednačina dobija sledeći oblik

$$\sqrt{48}+\frac{t}{t-1} \geq \frac{t}{1+t} \iff \sqrt{48}+\frac{t}{t-1}-\frac{t}{t+1} \geq 0 \iff \frac{(t^2-1)\sqrt{48}+t(t+1)-t(t-1)}{t^2-1} \geq 0$$

$$\frac{\sqrt{12}t^2+t-\sqrt{12}}{t^2-1} \geq 0$$

te razlikujemo dva slučaja

1. $\sqrt{12}t^2+t-\sqrt{12} \geq 0 \wedge t^2-1 > 0$
2. $\sqrt{12}t^2+t-\sqrt{12} \leq 0 \wedge t^2-1 < 0$

Kako su rešenja kvadratne jednačine $\sqrt{12}t^2+t-\sqrt{12} = 0$ data sa

$$t_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\cdot 12}}{2\sqrt{12}} = \frac{-1 \pm 7}{2\sqrt{12}} = \begin{cases} -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

to se za gornja dva slučaja dalje dobija

1. $\left(t \leq -\frac{2}{\sqrt{3}} \vee t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \wedge (t < -1 \vee t > 1)$
2. $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \wedge (-1 < t < 1)$

Uzimajući u obzir da mora da važi $t > 0$, $t \neq 1$, konačna rešenja za t su

1. $t > 1$
2. $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

Vraćanjem nazad smene $t = \sqrt{1-x}$ dalje sledi

1. $\sqrt{1-x} > 1 \Rightarrow 1-x > 1 \iff x < 0$

2. $0 \leq \sqrt{1-x} \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   a) $0 \leq \sqrt{1-x} \Rightarrow 1-x \geq 0 \iff x \leq 1$

   b) $\sqrt{1-x} \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 1-x \leq \dfrac{3}{4} \iff x \geq \dfrac{1}{4}$

Odavde se za skup realnih brojeva kome pripada x konačno dobija

$$x \in (-\infty, 0) \cup \left[\frac{1}{4}, 1\right]$$

18.Ⓔ Za jednačinu

$$3^{x-y+2} \cdot 2^{y-x+2} - 2^{x-y+2} \cdot 3^{y-x+2} - 65 = 0$$

važi

$$3^2 \cdot 3^{x-y} \cdot 2^2 \cdot 2^{y-x} - 2^2 \cdot 2^{x-y} \cdot 3^2 \cdot 3^{y-x} - 65 = 0$$

$$36\left(\frac{3}{2}\right)^{x-y} - 36\left(\frac{3}{2}\right)^{-(x-y)} - 65 = 0$$

Uvođenjem smene $t = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{x-y} > 0$ dobijamo sledeću kvadratnu jednačinu

$$36t - \frac{36}{t} - 65 = 0 \Rightarrow 36t^2 - 65t - 36 = 0$$

čija su rešenja

$$t_{1/2} = \frac{65 \pm \sqrt{65^2 + 4 \cdot 36 \cdot 36}}{2 \cdot 36} = \frac{65 \pm 97}{72} = \begin{cases} -\dfrac{4}{9} \\ \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

Kako je $t > 0$, to je jedino rešenje ove jednačine $t_2 = \dfrac{9}{4} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$.

Vraćanjem nazad smene $t = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{x-y}$ imamo

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x-y} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \iff x - y = 2$$

Smenom dobijene jednačine $y = x - 2$ u drugu jednačinu zadatog sistema dalje sledi

$$(x+1)(y-1) = 117 \Rightarrow (x+1)(x-3) = 117 \iff x^2 - 2x - 120 = 0$$

Za rešenja poslednje kvadratne jednačine se ima

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 480}}{2} = \frac{2 \pm 22}{2} = \begin{cases} -10 \\ 12 \end{cases}$$

Sada za rešenja zadatog sistema jednačina konačno dobijamo

$$x_1 = -10,\ y_1 = x_1 - 2 = -12$$

$$x_2 = 12,\ y_2 = x_2 - 2 = 10$$

te je vrednost traženog izraza

$$x_1x_2 + y_1y_2 = -10 \cdot 12 + (-12) \cdot 10 = -240$$

19.Ⓑ Dati su skupovi $X = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ i $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Tražimo ukupan broj preslikavanja $f : X \to Y$ takvih da važi: $f(9) < 4$ i postoje tačno dva elementa $x \in X$ za koje važi $f(x) = x$.

Primećujemo da skup Y ima 8 elemenata i sadrži sve elemente skupa X osim elementa 9.

Kako je $f(9) < 4$ to se element 9 iz skupa X može preslikati u tri različita elementa skupa Y: $\{1, 2, 3\}$. Dakle, ukupan broj različitih preslikavanja elementa 9 jednak je *tri*.

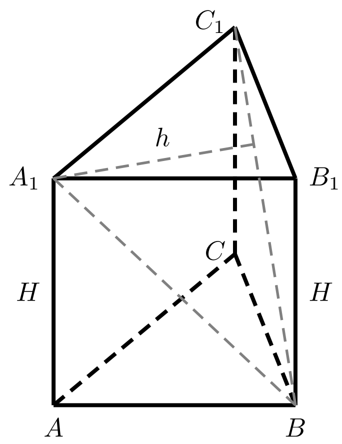
Tačno dva elementa $x \in X$ se preslikavaju u same sebe $f(x) = x$. To ne može važiti za element 9 jer je $f(9) < 4$. Dva elementa za koje važi ovo svojstvo iz preostala četiri elementa skupa X: $\{1, 3, 5, 7\}$ možemo izabrati na $\binom{4}{2} = 6$ načina. Dakle, ukupan broj mogućih preslikavanja dva elementa skupa X u same sebe je *šest*.

Preostala dva elementa skupa X se mogu preslikati u bilo koji element skupa Y osim u same sebe. Kako skup Y ima osam elemenata, to je se svaki od ova dva elementa skupa X može preslikati u bilo koji od $8 - 1 = 7$ elemenata skupa Y (u svaki od osam elemenata osim u samog sebe). Dakle, ukupan broj preslikavanja ova dva elementa skupa X je $7 \cdot 7 = 49$.

Sada se za ukupan broj preslikavanja koja zadovoljavaju zadate uslove dobija

$$3 \cdot 6 \cdot 49 = 882$$

20.Ⓔ Na slici je prikazana prava trostrana prizma $ABCA_1B_1C_1$. Poznate su sledeće dužine $AB = AC = 4$, $BC = 3$, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = 3$. Traži se rastojanje tačke A_1 od duži BC_1 što odgovara visini h iznad stranice BC_1 u trouglu A_1BC_1.



Označimo dužine stranica trougla A_1BC_1 sa $a = BC_1$, $b = A_1C_1 = 4$, $c = A_1B$.

Na osnovu Pitagorine teoreme za pravougli trougao BCC_1, za dužinu stranice $a = BC_1$ dobijamo

$$BC_1^2 = BC^2 + CC_1^2 = 3^2 + 3^2 = 18 \Rightarrow a = BC_1 = 3\sqrt{2}$$

Na osnovu Pitagorine teoreme za pravougli trougao BAA_1, za dužinu stranice $c = A_1B$ dobijamo

$$A_1B^2 = AB^2 + AA_1^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow c = A_1B = 5$$

Površina trougla A_1BC_1 se može izraziti korišćenjem poluobima trougla $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ kao

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

gde je

$$s = \frac{3\sqrt{2} + 4 + 5}{2}$$
$$s - a = \frac{-3\sqrt{2} + 4 + 5}{2}$$
$$s - b = \frac{3\sqrt{2} - 4 + 5}{2}$$
$$s - c = \frac{3\sqrt{2} + 4 - 5}{2}$$

odakle sledi

$$s(s-a) = \frac{3\sqrt{2} + 4 + 5}{2} \cdot \frac{-3\sqrt{2} + 4 + 5}{2} = \frac{9 + 3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{9 - 3\sqrt{2}}{2} = \frac{81 - 18}{4} = \frac{63}{4}$$

$$(s-b)(s-c) = \frac{3\sqrt{2} - 4 + 5}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2} + 4 - 5}{2} = \frac{3\sqrt{2} + 1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2} - 1}{2} = \frac{18 - 1}{4} = \frac{17}{4}$$

te se za površinu trougla A_1BC_1 dobija

$$P = \sqrt{\frac{63}{4} \cdot \frac{17}{4}} = \frac{3}{4}\sqrt{119}$$

Površina ovog trougla se može izraziti kao proizvod stranice $a = BC_1$ i visine nad tom stranicom h

$$P = \frac{1}{2}ah$$

Iz prethodne dve jednačine, za visinu h dobijamo

$$h = \frac{2P}{a} = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}\sqrt{119}}{3\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{119}{8}}$$

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE ZA UPIS NA ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

1. Vrednost izraza $\sqrt[3]{-89}$ nalazi se između brojeva:

(A) -10 i -9 (B) -9 i -8 (C) -5 i -4 (D) -4 i -3 (E) -3 i -2 (N) Ne znam

2. Ako je V zapremina lopte, tada je njena površina jednaka:

(A) $\sqrt[3]{36\pi V^2}$ (B) $\sqrt[3]{\pi V^2}$ (C) $\sqrt[3]{\dfrac{\pi V^2}{2}}$ (D) $\sqrt[3]{\dfrac{3\pi V^2}{4}}$ (E) $\sqrt[3]{2\pi V^2}$ (N) Ne znam

3. Ako je $x + \dfrac{1}{x} = 3$, $(x \in \mathbb{R}^+)$, tada je $\sqrt[4]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$ jednako:

(A) $\sqrt{2+\sqrt{5}}$ (B) $\sqrt[4]{5}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $\sqrt[4]{3}$ (E) $\sqrt{1+\sqrt{3}}$ (N) Ne znam

4. Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 2017 + 2018i$, $z_2 = 2018 + 2019i$ i $w = (z_2 - z_1)^{-2020} \cdot \left(\dfrac{\bar{z}_1 + 1}{2018}\right)^{2021}$, (gde je $\bar{z}_1$ konjugovano kompleksni broj broja z_1 i $i^2 = -1$). Tada je $|w|$ jednak:

(A) $\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{2017}$ (C) $\sqrt{2020}$ (D) $\sqrt{2}$ (E) $\sqrt{10}$ (N) Ne znam

5. Neka je $P(x)$ polinom najmanjeg stepena čiji su koeficijenti realni brojevi, a koreni -1 i $2i$. Ako je $P(0) = -12$, tada je $P(-2)$ jednako:

(A) -12 (B) 24 (C) -30 (D) -36 (E) 72 (N) Ne znam

6. Data je funkcija $f(x) = x - \sin \pi x \cdot \cos \pi x + \dfrac{\ln 2x}{x} + e^{\operatorname{tg} 2\pi x}$. Tada je vrednost $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ jednaka:

(A) 0 (B) $5 + 3\pi$ (C) 3π (D) 5 (E) e (N) Ne znam

7. Granična vrednost $\lim\limits_{x \to 5\pi} \dfrac{\left(e^{-\frac{1}{(5\pi - x)^2}} + \sqrt{3\pi}\right) \cdot \log_2 \frac{x+3\pi}{2\pi}}{\left(\sqrt{6x - 5\pi} - 2\sqrt{\pi}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{x}{5} - \frac{4\pi}{3}\right)}$ jednaka je:

(A) $\dfrac{\pi}{3}$ (B) 0 (C) $+\infty$ (D) $-\infty$ (E) $-\dfrac{2}{3}$ (N) Ne znam

8. Ako se razvije izraz $2x\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)^{10} + x^4\left(x^2 + \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\right)^{12} + 5x^2\left(\sqrt[6]{x} - \dfrac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)^{18}$, $\left(x \in \mathbb{R}^+\right)$ i jedan od sabiraka je $A \cdot x^4$, tada je A jednako :

(A) -3994 (B) 2122 (C) -2451 (D) 1326 (E) -1452 (N) Ne znam

9. Data je funkcija $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ je paran broj} \\ \dfrac{1}{2}(x-3), & x \text{ je neparan broj} \end{cases}$. Vrednost izraza $f\Big(f\big(f(17)+1\big)+1\Big)$ jednaka je:

(A) 17 (B) 23 (C) 31 (D) 42 (E) 101 (N) Ne znam

10. U trouglu ABC je $|BC| = 3 \cdot |AB|$ i $\angle ABC = 60^\circ$. Tada je zbir $\cos\angle BAC + \cos\angle ACB$ jednak:

(A) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ (B) $\frac{2}{\sqrt{7}}$ (C) $\frac{3}{\sqrt{7}}$ (D) $\frac{4}{\sqrt{7}}$ (E) $\frac{5}{\sqrt{7}}$ (N) Ne znam

11. U aritmetičkoj progresiji poznati su članovi $a_{54} = \alpha$ i $a_{70} = \beta$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha \neq \beta)$. Tada je zbir prvih 160 članova te progresije jednak:

(A) $85\alpha + 75\beta$ (B) $5(-19\alpha + 51\beta + 32)$ (C) $\frac{3(37\alpha-62\beta)}{5}$

(D) $5(-21\alpha + 53\beta)$ (E) $\frac{75(-11\alpha+43\beta)}{16}$ (N) Ne znam

12. Ukupan broj realnih rešenja jednačine $\sin 3|x| + \sqrt{3}\cos 3x = \sqrt{2}$ na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ jednak je:

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6 (N) Ne znam

13. Oštar ugao pod kojim se seku tangenta krive $2x^2 + 3y^2 = 5$ u njenoj tački $(1,1)$ i tangenta krive $x^2 - 4x + y^2 + 6y = 3$ u njenoj tački $(2,1)$ jednak je:

(A) arctg $\frac{1}{2}$ (B) arctg $\frac{3}{2}$ (C) arctg $\frac{2}{3}$ (D) arctg $\frac{1}{6}$ (E) arctg $\frac{3}{5}$ (N) Ne znam

14. Skup svih realnih rešenja nejednačine $\dfrac{|3^x - 1| - |3 - 3^x| - 2}{\sqrt{4^x - 2^{x+3} + 16}} \geq 0$ je oblika (za neke realne brojeve a, b, c i d takve da je $-\infty < a < b < c < d < +\infty$):

(A) (a, b) (B) $[a, b) \cup (b, +\infty)$ (C) $[a, +\infty)$

(D) $(a, b) \cup [c, d)$ (E) $(-\infty, a] \cup [b, c]$ (N) Ne znam

15. Ukupan broj realnih rešenja sistema jednačina $y \cdot (|x|-2)^{\log_y(|x|-2)} = (|x|-2)^{\frac{5}{2}}$, $\log_4 y \cdot \log_y(y - 3x + 6) = 1$, jednak je:

(A) 0 (B) 2 (C) 1 (D) 4 (E) 3 (N) Ne znam

16. Zbir svih realnih rešenja jednačine $\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + x - 2} = \sqrt[4]{x^2 - 2x + 1}$ nalazi se u intervalu:

(A) $[-3, 0)$ (B) $[0, 3)$

(C) $[3, 6)$ (D) $[-6, 3)$

(E) nijedan od prethodno ponuđenih odgovora (N) Ne znam

17. Vrednost izraza $\dfrac{\sin 2^\circ + \sin 4^\circ + \sin 6^\circ - \sin 12^\circ}{\sin 3^\circ \sin 4^\circ \sin 5^\circ}$, jednaka je:

(A) -6 (B) -1 (C) 6 (D) 4 (E) -4 (N) Ne znam

18. Maksimalna zapremina pravilne trostrane prizme, čiji je obim jedne bočne strane S, jednaka je:

(A) $\frac{S^3 \cdot \sqrt{3}}{216}$ (B) $\frac{S^3 \cdot \sqrt{3}}{196}$

(C) $S^3 \cdot \sqrt{3}$ (D) $\frac{S^3 \cdot \sqrt{3}}{21}$

(E) nijedan od prethodno ponuđenih odgovora (N) Ne znam

19. Skup svih vrednosti realnog parametra m za koje koreni x_1 i x_2 kvadratne jednačine $x^2 + (2+m)x - 6m^2 + 11m = 3$ zadovoljavaju nejednačinu $\dfrac{2x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{2x_1} \leq 2$, je oblika (za neke realne brojeve a, b, c i d takve da je $-\infty < a < b < c < d < +\infty$):

(A) $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ (B) $(-\infty, a) \cup \{b, c\} \cup (d, +\infty)$

(C) $(a, b] \cup (c, d) \cup (d, +\infty)$ (D) $(-\infty, a) \cup \{b\}$

(E) $(-\infty, a) \cup \{b\} \cup (c, d) \cup (d, +\infty)$ (N) Ne znam

20. Dat je skup $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Ukupan broj preslikavanja $f\colon A \to A$ takvih da važi

$$(\forall k \in A)\big(f(k) \neq \min\{k, 3\} \ \wedge \ (k > 3 \implies f(k) < k - 2)\big),$$

gde je $\min\{a, b\} = \begin{cases} a, & a \leq b \\ b, & a > b \end{cases}$, jednak je:

(A) 2592 (B) 1722

(C) 3421 (D) 1628

(E) nijedan od prethodno ponuđenih odgovora (N) Ne znam

REŠENJA

1.Ⓒ Važi redom:

$$-64 > -89 > -125 \Leftrightarrow (-4)^3 > -89 > (-5)^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(-4)^3} > \sqrt[3]{-89} > \sqrt[3]{(-5)^3} \Leftrightarrow -4 > \sqrt[3]{-89} > -5.$$

2.Ⓐ Zapremina lopte poluprečnika r je

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Odavde se za površinu lopte dalje dobija

$$S = 4\pi r^2 = 4\pi\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} = \left((4\pi)^3\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^2\right)^{\frac{1}{3}} = \left(4\pi 9V^2\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{36\pi V^2}.$$

3.Ⓐ Označimo

$$A = \sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$$

Sada sledi

$$A^2 = \left(\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 2$$

$$A^2 - 2 = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \left(A^2 - 2\right)^2 = x + \frac{1}{x} + 2 \Rightarrow A^2 - 2 = \sqrt{x + \frac{1}{x} + 2} \Rightarrow A^2 = \sqrt{x + \frac{1}{x} + 2} + 2$$

odakle se dobija

$$A = \sqrt{\sqrt{x + \frac{1}{x} + 2} + 2} = \sqrt{\sqrt{3+2} + 2} = \sqrt{2 + \sqrt{5}}$$

gde smo iz uslova zadatka iskoristili $x + \dfrac{1}{x} = 3$, $x \in \mathbb{R}^+$.

4.Ⓓ Kako je

$$z_1 = 2017 + 2018i,\ z_2 = 2018 + 2019i$$

$$z_2 - z_1 = 1 + i$$

$$\bar{z}_1 + 1 = \overline{2017 + 2018i} + 1 = 2017 - 2018i + 1 = 2018(1-i) \Rightarrow \frac{\bar{z}_1 + 1}{2018} = 1 - i$$

to važi

$$w = (z_2 - z_1)^{-2020} \cdot \left(\frac{\bar{z}_1 + 1}{2018}\right)^{2021} = (1+i)^{-2020} \cdot (1-i)^{2021} = (1-i) \cdot \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2020}$$

Pošto je

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1 - 2i + i^2}{1 - i^2} = \frac{-2i}{2} = -i$$

to sledi

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2020} = (-i)^{2020} = (i^2)^{1010} = (-1)^{1010} = 1$$

te se za w konačno dobija

$$w = (1-i) \cdot \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2020} = 1 - i \Rightarrow |w| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

5.Ⓑ Kako su koeficijenti polinoma $P(x)$ realni brojevi, to su njegovi koreni realni brojevi ili kompleksni brojevi koji se se javljaju u konjugovano-kompleksnim parovima. Ako je $x_2 = 2i$ koren ovog polinoma, to znači da će $x_3 = \bar{x}_2 = -2i$ takođe biti koren ovog polinoma. Najmanji stepen polinoma koji ima korene $x_1 = -1$, $x_2 = 2i$ i $x_3 = -2i$ je 3 i može se predstaviti u sledećem obliku

$$\begin{aligned} P(x) &= a_3(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\ &= a_3(x+1)(x-2i)(x+2i) = a_3(x+1)(x^2-(2i)^2) = a_3(x+1)(x^2+4) \end{aligned}$$

Prema uslovu zadatka važi

$$P(0) = -12 \Rightarrow a_3 \cdot 1 \cdot 4 = -12 \Rightarrow a_3 = -3$$

odakle sledi

$$P(x) = -3(x+1)(x^2+4)$$

Sada se za traženu vrednost dobija

$$P(-2) = -3(-2+1)((-2)^2+4) = -3 \cdot (-1) \cdot 8 = 24.$$

6.Ⓑ Zadata funkcija se može predstaviti u sledećem obliku

$$f(x) = x - \sin\pi x \cdot \cos\pi x + \frac{\ln 2x}{x} + e^{\operatorname{tg} 2\pi x} = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x)$$

te se za izvod funkcije dobija

$$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + f_3'(x) + f_4'(x)$$

gde je

$$f_1'(x) = x' = 1$$

$$f_2'(x) = (-\sin\pi x \cdot \cos\pi x)' = -\frac{1}{2}(\sin 2\pi x)' = -\frac{1}{2}\cos 2\pi x \cdot (2\pi x)' = -\frac{1}{2}\cos 2\pi x \cdot 2\pi = -\pi\cos 2\pi x$$

$$f_3'(x) = \left(\frac{\ln 2x}{x}\right)' = \frac{(\ln 2x)' \cdot x - \ln 2x \cdot x'}{x^2} = \frac{\frac{1}{2x} \cdot (2x)' \cdot x - \ln 2x}{x^2} = \frac{1 - \ln 2x}{x^2}$$

$$f_4'(x) = \left(e^{\operatorname{tg} 2\pi x}\right)' = e^{\operatorname{tg} 2\pi x} \cdot (\operatorname{tg} 2\pi x)' = e^{\operatorname{tg} 2\pi x} \cdot \frac{1}{\cos^2(2\pi x)} \cdot (2\pi x)' = 2\pi \frac{e^{\operatorname{tg} 2\pi x}}{\cos^2(2\pi x)}$$

Sada za $x = \dfrac{1}{2}$ dobijamo

$$f_1'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$f_2'\left(\frac{1}{2}\right) = -\pi\cos\left(2\pi\frac{1}{2}\right) = -\pi\cos\pi = \pi$$

$$f_3'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1 - \ln\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4$$

$$f_4'\left(\frac{1}{2}\right) = 2\pi\frac{e^{\operatorname{tg}\left(2\pi\frac{1}{2}\right)}}{\cos^2\left(2\pi\frac{1}{2}\right)} = 2\pi\frac{e^{\operatorname{tg}\pi}}{\cos^2\pi} = 2\pi\frac{e^0}{1} = 2\pi$$

te se konačno ima

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = f_1'\left(\frac{1}{2}\right) + f_2'\left(\frac{1}{2}\right) + f_3'\left(\frac{1}{2}\right) + f_4'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \pi + 4 + 2\pi = 5 + 3\pi.$$

7.Ⓔ Važe sledeći izrazi

$$\lim_{x\to 5\pi} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{5} - \frac{4\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{5} - \frac{4\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

$$\lim_{x\to 5\pi}\left(\sqrt{6x - 5\pi} - 2\sqrt{\pi}\right) = \sqrt{30\pi - 5\pi} - 2\sqrt{\pi} = \sqrt{25\pi} - 2\sqrt{\pi} = 5\sqrt{\pi} - 2\sqrt{\pi} = 3\sqrt{\pi}$$

$$\lim_{x\to 5\pi}\left(\log_2\frac{x+3\pi}{2\pi}\right)=\log_2\frac{5\pi+3\pi}{2\pi}=\log_2 4=\log_2 2^2=2$$

$$\lim_{x\to 5\pi}\left(e^{-\frac{1}{(5\pi-x)^2}}+\sqrt{3\pi}\right)=\lim_{x\to 5\pi}e^{-\frac{1}{(5\pi-x)^2}}+\sqrt{3\pi}=e^{-\infty}+\sqrt{3\pi}=\sqrt{3\pi}$$

te se za zadatu graničnu vrednost dobija

$$\lim_{x\to 5\pi}\frac{\left(e^{-\frac{1}{(5\pi-x)^2}}+\sqrt{3\pi}\right)\cdot\log_2\frac{x+3\pi}{2\pi}}{\left(\sqrt{6x-5\pi}-2\sqrt{\pi}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{x}{5}-\frac{4\pi}{3}\right)}=\frac{\sqrt{3\pi}\cdot 2}{3\sqrt{\pi}\cdot(-\sqrt{3})}=-\frac{2}{3}.$$

8.Ⓐ Koristimo izraz za razvoj binoma n-tog stepena

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

na svaki od binoma u zadatom izrazu

$$2x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{10}+x^4\left(x^2+\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\right)^{12}+5x^2\left(\sqrt[6]{x}-\frac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)^{18}\qquad(x\in\mathbb{R}^+)$$

(i)

$$2x(1+\sqrt[3]{x})^{10}=2x\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{10}=2x\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}1^{n-k}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^k=2\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}x\cdot x^{\frac{k}{3}}=\sum_{k=0}^{10}2\cdot\binom{10}{k}x^{\frac{k+3}{3}}$$

Sabirak koji sadrži x^4 se dobija za k koje zadovoljava uslov

$$\frac{k+3}{3}=4\Rightarrow k+3=12\Rightarrow k=9$$

odakle se ima

$$A_1=2\cdot\binom{10}{9}=2\binom{10}{1}=20$$

(ii)

$$x^4\left(x^2+\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\right)^{12}=x^4\left(x^2+x^{-\frac{2}{5}}\right)^{12}=x^4\left(x^2\left(1+x^{-\frac{12}{5}}\right)\right)^{12}=x^4\cdot x^{24}\left(1+x^{-\frac{12}{5}}\right)^{12}=$$

$$=x^{28}\sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}1^{n-k}\left(x^{-\frac{12}{5}}\right)^k=\sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}x^{28-\frac{12k}{5}}$$

Sabirak koji sadrži x^4 se dobija za k koje zadovoljava uslov

$$28-\frac{12k}{5}=4\Rightarrow\frac{12k}{5}=24\Rightarrow k=10$$

odakle se ima

$$A_2=\binom{12}{10}=\binom{12}{2}=\frac{12\cdot 11}{2\cdot 1}=66$$

(iii)

$$5x^2\left(\sqrt[6]{x}-\frac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)^{18}=5x^2\left(x^{\frac{1}{6}}+x^{-\frac{1}{6}}\right)^{18}=5x^2\left(x^{\frac{1}{6}}\left(1-x^{-\frac{1}{3}}\right)\right)^{18}=5x^2\cdot x^{\frac{18}{6}}\left(1-x^{-\frac{1}{3}}\right)^{18}=$$

$$=5x^5\sum_{k=0}^{18}\binom{18}{k}1^{n-k}\left(-x^{-\frac{1}{3}}\right)^k=\sum_{k=0}^{18}(-1)^k\cdot 5\cdot\binom{18}{k}x^{5-\frac{k}{3}}$$

Sabirak koji sadrži x^4 se dobija za k koje zadovoljava uslov

$$5-\frac{k}{3}=4\Rightarrow\frac{k}{3}=1\Rightarrow k=3$$

odakle se ima

$$A_3=(-1)^3\cdot 5\cdot\binom{18}{3}=-5\cdot\frac{18\cdot 17\cdot 16}{3\cdot 2\cdot 1}=-4080$$

Konačno, za vrednost promenljive A se dobija

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 20 + 66 - 4080 = -3994.$$

9.Ⓒ Kako je

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ je paran broj} \\ \frac{1}{2}(x-3), & x \text{ je neparan broj} \end{cases}$$

to imamo redom

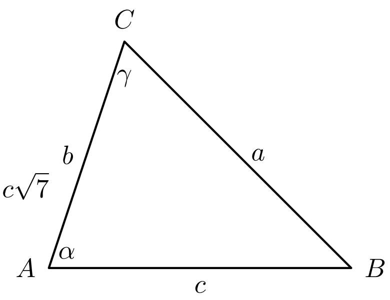
$$f(17) = \frac{1}{2}(17-3) = 7$$

$$f(f(17)+1) = f(7+1) = f(8) = 8^2 = 64$$

$$f(f(f(17)+1)+1) = f(64+1) = f(65) = \frac{1}{2}(65-3) = \frac{1}{2}\cdot 62 = 31.$$

10.Ⓑ

Označimo stranice i uglove kao na slici $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$, $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$ i $\gamma = \angle ACB$. Prema uslovima zadatka je



$$\beta = 60^{\circ}, a = 3c$$

Primenom kosinusne teoreme na trougao ABC dobijamo sledeće izraze

$$b^2 = a^2+c^2-2ac\cos\beta = (3c)^2+c^2-2\cdot 3\cdot c\cdot c\cdot\cos 60^{\circ} = 10c^2-6c^2\cdot\frac{1}{2} = 7c^2 \Rightarrow b = c\sqrt{7}$$

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma = (3c)^2+7c^2-2\cdot 3c\cdot c\sqrt{7}\cos\gamma = 16c^2-6\sqrt{7}c^2\cos\gamma$$

$$\cos\gamma = \frac{15\sqrt{7}}{6\cdot 7}$$

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\alpha = 7c^2+c^2-2\cdot c\sqrt{7}\cdot c\cos\alpha = 16c^2-6\sqrt{7}c^2\cos\alpha$$

$$9c^2 = 8c^2-2\sqrt{7}c^2\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{2\cdot 7}$$

Odavde sledi da je traženi izraz $\cos\angle BAC + \cos\angle ACB = \cos\alpha + \cos\gamma$ jednak

$$\cos\alpha+\cos\gamma = -\frac{\sqrt{7}}{2\cdot 7}+\frac{15\sqrt{7}}{6\cdot 7} = \frac{15\sqrt{7}-3\sqrt{7}}{6\cdot 7} = \frac{12\sqrt{7}}{6\cdot 7} = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

11.Ⓓ Zadata je aritmetička progresija

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

za koju važi

$$\alpha = a_{54} = a_1 + 53d$$

i

$$\beta = a_{70} = a_1 + 69d$$

Rešavanjem sistema koji čine prethodne dve jednačine za promenljive d i a_1 se dobija

$$\beta - \alpha = 16d \Rightarrow d = \frac{\beta-\alpha}{16}$$

$$a_1 = \alpha - 53d = \frac{69\alpha - 53\beta}{16}$$

Sada za zbir prvih 160 članova dobijamo

$$\begin{aligned} S_{160} &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{160} = a_1 + (a_1+d) + \cdots + (a_1+159d) \\ &= 160a_1 + d(1+2+\cdots+159) = 160a_1 + d\frac{160\cdot 159}{2} \\ &= 160\left(a_1 + \frac{159}{2}\cdot d\right) = 160\left(\frac{69\alpha-53\beta}{16} + \frac{159}{2}\cdot\frac{\beta-\alpha}{16}\right) \\ &= 6(138\alpha - 106\beta + 159\beta - 159\alpha) = 5(-21\alpha + 53\beta). \end{aligned}$$

12.Ⓒ Rešenja zadate jednačine

$$\sin 3|x| + \sqrt{3}\cos 3x = \sqrt{2}$$

tražimo na segmentu $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Prema definiciji apsolutne vrednosti važi

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

te razlikujemo dva slučaja

(i) $x \in [0, \pi]$: $\sin 3|x| = \sin 3x$

$$\sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x = \sqrt{2}$$
$$\frac{1}{2}\sin 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

gde smo iskoristili identitete

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Rešenja dobijene jednačine se mogu predstaviti u sledećem obliku

$$3x - \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$x = \begin{cases} -\frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \\ \frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

od kojih se samo tri nalaze u intervalu $x \in [0, \pi]$:

$$x_1 = -\frac{\pi}{36} + \frac{2\pi}{3} = \frac{23}{36}\pi$$
$$x_2 = \frac{5\pi}{36}$$
$$x_3 = \frac{5\pi}{36} + \frac{2\pi}{3} = \frac{29}{36}\pi$$

(i) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$: $\sin 3|x| = -\sin 3x$

$$-\sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x = \sqrt{2}$$
$$-\frac{1}{2}\sin 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

gde smo iskoristili identitete

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Rešenja dobijene jednačine se mogu predstaviti u sledećem obliku

$$3x + \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$x = \begin{cases} -\frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \\ \frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

od kojih se samo jedno nalazi u intervalu $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$:

$$x_4 = -\frac{5\pi}{36}$$

Dakle, ukupan broj realnih rešenja jednačine na zadatom intervalu je 4.

13.Ⓒ Tangenta proizvoljne krive $y = f(x)$ u tački (x_0, y_0) ima koeficijent nagiba k koji je dat izrazom

$$k = f'(x)|_{x=x_0}$$

Nalazimo tangentu krive $2x^2 + 3y^2 = 5$ u tački $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Primenom izvoda po promenljivoj x na levu i desnu stranu jednačine krive, dobijamo

$$(2x^2)' + (3y^2)' = 0 \Rightarrow 4x + 6y \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2}{3} \cdot \frac{x}{y}$$

te se za koeficijent nagiba tangente dobija

$$k_1 = y'|_{(x,y)=(1,1)} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{x}{y}\Big|_{(x,y)=(1,1)} = -\frac{2}{3}$$

Ugao ϕ_1 koji ova prava zaklapa sa x-osom je dat jednačinom

$$k_1 = \operatorname{tg}\phi_1 \Rightarrow \phi_1 = -\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$$

Na sličan način se za tangentu krive $x^2 - 4x + y^2 + 6y = 3$ u tački $(x_0, y_0) = (2, 1)$ imaju sledeći izrazi. Primenom izvoda po promenljivoj x na levu i desnu stranu jednačine krive, dobijamo

$$(x^2 - 4x)' + (y^2 + 6y)' = 0 \Rightarrow 2x - 4 + 2y \cdot y' + 6y' = 0 \Rightarrow y'(2y + 6) = 4 - 2x \Rightarrow y' = -\frac{2 - x}{y + 3}$$

te se za koeficijent nagiba tangente dobija

$$k_2 = y'|_{(x,y)=(2,1)} = -\frac{2 - x}{y + 3}\Big|_{(x,y)=(2,1)} = 0$$

Ugao ϕ_2 koji ova prava zaklapa sa x-osom je dat jednačinom

$$k_2 = \operatorname{tg}\phi_2 \Rightarrow \phi_2 = -\operatorname{arctg} 0 = 0$$

Odavde je oštar ugao pod kojim se seku ove dve tangente dat izrazom

$$\phi = \phi_2 - \phi_1 = \operatorname{arctg}\frac{2}{3}.$$

14.Ⓑ

$$\frac{|3^x - 1| - |3 - 3^x| - 2}{\sqrt{4^x - 2^{x+3} + 16}} \geq 0$$

Kako je

$$4^x - 2^{x+3} + 16 = (2^2)^x - 8 \cdot 2^x + 16 = (2^x)^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2^x + 4^2 = (2^x - 4)^2$$

to važi

$$\sqrt{4^x - 2^{x+3} + 16} = \sqrt{(2^x - 4)^2} = |2^x - 4| \geq 0$$

Za realna rešenja zadate nejednačine je potrebno da izraz u imeniocu bude različit od nule

$$|2^x - 4| \neq 0 \iff 2^x - 4 \neq 0 \iff 2^x \neq 2^2 \iff x \neq 2$$

Dakle, rešenja tražimo u skupu $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$, za koje je imenilac u izrazu sa leve strane nejednačine uvek pozitivan

$$|2^x - 4| > 0$$

te se nejednačina svodi na

$$\frac{|3^x - 1| - |3 - 3^x| - 2}{\sqrt{4^x - 2^{x+3} + 16}} \geq 0 \iff \frac{|3^x - 1| - |3 - 3^x| - 2}{|2^x - 4|} \geq 0 \Rightarrow |3^x - 1| - |3 - 3^x| - 2 \geq 0$$

Kako važi

$$3^x - 1 > 0 \iff 3^x > 1 \iff 3^x > 3^0 \iff x > 0$$

to se prema definiciji apsolutne vrednosti ima

$$|3^x - 1| = \begin{cases} 3^x - 1, & x > 0 \\ 1 - 3^x, & x \leq 0 \end{cases}$$

Slično, kako je

$$3 - 3^x > 0 \iff 3^1 > 3^x \iff x < 1$$

dobijamo

$$|3 - 3^x| = \begin{cases} 3^x - 3, & x > 1 \\ 3 - 3^x, & x \leq 1 \end{cases}$$

Sada razlikujemo tri segmenta

1. (i) $x \leq 0$

$$|3^x - 1| - |3 - 3^x| - 2 \geq 0 \iff 1 - 3^x - (3 - 3^x) - 2 \geq 0 \iff -4 \geq 0$$

   što nije ispunjeno ni za jedno x iz ovog segmenta.

2. (ii) $x \in (0, 1)$

$$|3^x - 1| - |3 - 3^x| - 2 \geq 0 \iff 3^x - 1 - (3 - 3^x) - 2 \geq 0 \iff 2(3^x - 3) \geq 0 \iff 3^x \geq 3^1 \iff x \geq 1$$

   što nije ispunjeno ni za jedno $x \in (0, 1)$

3. (iii) $x \in [1, 2) \cup (2, +\infty)$

$$|3^x - 1| - |3 - 3^x| - 2 \geq 0 \iff 3^x - 1 - (3^x - 3) - 2 \geq 0 \iff 0 \geq 0$$

   što je ispunjeno za sve $x \in [1, 2) \cup (2, +\infty)$

Dakle, skup svih rešenja nejednačine je

$$x \in [1, 2) \cup (2, +\infty)$$

odnosno skup rešenja je oblika

$$[a, b) \cup (b, +\infty).$$

15.©

$$y \cdot (|x| - 2)^{\log_y(|x|-2)} = (|x| - 2)^{\frac{5}{2}}$$

$$\log_4 y \cdot \log_y(y - 3x + 6) = 1$$

U skupu realnih brojeva, argument logaritamske funkcije mora biti pozitivan, dok osnova logaritamske funkcije mora istovremeno biti i pozitivna i različita od 1:

$$|x| - 2 > 0 \iff x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

$$y - 3x + 6 > 0 \iff y > 3(x - 2)$$

$$y > 0, y \neq 1$$

Korišćenjem $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ iz druge jednačine u sistemu dobijamo

$$\log_4 y \cdot \log_y(y - 3x + 6) = 1 \iff \log_y(y - 3x + 6) = \log_y 4 \Rightarrow y - 3x + 6 = 4 \iff y = 3x - 2$$

odakle se za gornje uslove dalje dobija

$$y > 3(x - 2) \Rightarrow 3x - 2 > 3x - 6 \Rightarrow -2 > -6 \text{ (ispunjeno za svako } x\text{)}$$

$$y > 0 \Rightarrow 3x - 2 > 0 \Rightarrow x > \frac{2}{3}$$

$$y \neq 1 \Rightarrow 3x - 2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$$

Uzimanjem u obzir svih uslova za x i y, neophodno je da se realna rešenja zadatog sistema nalaze u intervalu

$$x \in (2, +\infty), y \in (4, +\infty)$$

Za $x > 2$ važi $|x| = x$, te sledi

$$y \cdot (|x| - 2)^{\log_y(|x|-2)} = (|x| - 2)^{\frac{5}{2}} \Rightarrow y \cdot (x-2)^{\log_y(x-2)} = (x-2)^{\frac{5}{2}}$$

Primenom logaritma na levu (L) i desnu (D) stranu prethodne jednačine, dobijamo

$$L = \log_y \left(y \cdot (x-2)^{\log_y(x-2)} \right) = \log_y y + \log_y (x-2)^{\log_y(x-2)} = 1 + \log_y^2(x-2)$$

$$D = \log_y (x-2)^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} \log_y(x-2)$$

i uvođenjem smene $t = \log_y(x-2)$ jednačina dalje postaje

$$1 + \log_y^2(x-2) = \frac{5}{2} \log_y(x-2) \Rightarrow 1 + t^2 = \frac{5}{2} t \iff 2t^2 - 5t + 2 = 0$$

Ova kvadratna jednačina ima dva rešenja

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ 2 \end{cases}$$

Sada imamo dve mogućnosti

1. (i) $t = \dfrac{1}{2}$

$$\log_y(x-2) = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_y(x-2) = \log_y \sqrt{y} \Rightarrow x - 2 = \sqrt{y} \Rightarrow (x-2)^2 = 3x - 2 \iff x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$(x-1)(x-6) = 0 \iff x_1 = 1 \vee x_2 = 6$$

kako važi uslov $x > 2$, to je jedino rešenje u ovom slučaju $x_2 = 6$, $y_2 = 3x_2 - 2 = 16$.

2. (ii) $t = 2$

$$\log_y(x-2) = 2 \Rightarrow \log_y(x-2) = \log_y y^2 \Rightarrow x - 2 = y^2 \Rightarrow x - 2 = (3x-2)^2 \iff 9x^2 - 13x + 6 = 0$$

kako je diskriminanta ove kvadratne jednačine

$$D = 13^2 - 4 \cdot 9 \cdot 6 = 169 - 216 < 0$$

to u ovom slučaju nema realnih rešenja

Dakle, ukupan broj realnih rešenja zadatog sistema jednačina je 1.

---

16. Ⓐ

$$\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + x - 2} = \sqrt[4]{x^2 - 2x + 1}$$

U skupu realnih brojeva, kvadratni koren je definisan za argumente koji nisu negativni, tako da je neophodno da važe sledeći uslovi

$$x^2 - 1 \geq 0 \iff (x-1)(x+1) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$x^2 + x - 2 \geq 0 \iff (x-1)(x+2) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$$

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Kako za desnu stranu jednačine važi

$$\sqrt[4]{x^2 - 2x + 1} = \sqrt[4]{(x-1)^2} = \sqrt{|x-1|}$$

gde je $|x - 1| \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, to rešenja tražimo u skupu realnih brojeva $x \in (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$ i dalje sledi

$$\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + x - 2} = \sqrt[4]{x^2 - 2x + 1}$$

$$\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + x - 2} = \sqrt{|x-1|} \quad \Big/^2$$

$$2x^2 - 3x - 3 + 2\sqrt{(x-1)^2(x+1)(x+2)} = |x-1|$$

Sada razlikujemo dva slučaja

1. (i) $x \geq 1 \Rightarrow |x-1| = x-1$:

$$2x^2 + x - 3 + 2\sqrt{(x-1)^2(x+1)(x+2)} = x - 1$$
$$\sqrt{(x-1)^2(x+1)(x+2)} = 1 - x^2$$

Leva strana poslednje jednačine je veća ili jednaka nuli, pa to mora biti slučaj i sa desnom stranom, odakle dobijamo
$$1 - x^2 \geq 0 \iff x^2 - 1 \leq 0 \iff (x-1)(x+1) \leq 0 \iff x \in [-1, 1]$$
Kako je, međutim, u ovom slučaju $x \geq 1$ to je jedino moguće rešenje zadate jednačine $x_1 = 1$. Proverom možemo ustanoviti da je ovo zaista rešenje zadate jednačine
$$\sqrt{(-1-1)^2(-1+1)(-1+2)} = 1 - (-1)^2 \iff 0 = 0$$

2. (ii) $x \leq -2 \Rightarrow |x-1| = 1-x$:

$$2x^2 + x - 3 + 2\sqrt{(x-1)^2(x+1)(x+2)} = 1 - x$$
$$2\sqrt{(x-1)^2(x+1)(x+2)} = -2(x^2 + x - 2) = -2(x-1)(x+2)$$
$$\sqrt{(x-1)^2(x+1)(x+2)} = -(x-1)(x+2)$$

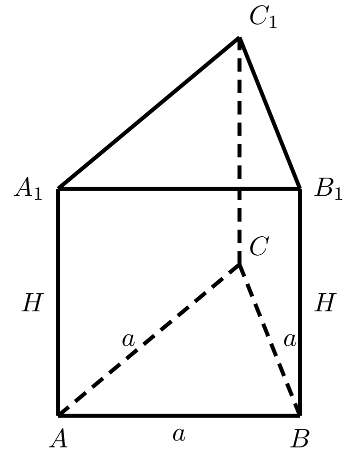
Kao i u prethodnom slučaju, leva strana poslednje jednačine je veća ili jednaka nuli, pa to mora biti slučaj i sa desnom stranom, odakle dobijamo
$$-(x-1)(x+2) \geq 0 \iff (x-1)(x+2) \leq 0 \iff x \in [-2, 1]$$
Kako je, međutim, u ovom slučaju $x \leq -2$ to je jedino moguće rešenje $x_2 = -2$. Proverom možemo ustanoviti da je ovo zaista rešenje zadate jednačine
$$\sqrt{(-2-1)^2(-2+1)(-2+2)} = -(-2-1)(-2+2) \iff 0 = 0$$

Zbir svih realnih rešenja zadate jednačine je
$$x_1 + x_2 = 1 - 2 = -1 \in [-3, 0).$$

17.Ⓓ U ovom zadatku ćemo koristiti sledeće trigonometrijske identitete
$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Sada sledi
$$\sin 2 - \sin 12 = 2\cos\frac{2+12}{2}\sin\frac{2-12}{2} = -2\sin 5\cos 7$$
$$\sin 4 + \sin 6 = 2\sin\frac{4+6}{2}\cos\frac{4-6}{2} = 2\sin 5\cos 1$$
odakle se za vrednost u brojiocu dobija
$$B = \sin 2 + \sin 4 + \sin 6 - \sin 12 = (\sin 4 + \sin 6) + (\sin 2 - \sin 12) = 2\sin 5(\cos 1 - \cos 7)$$
Dalje imamo
$$\cos 1 - \cos 7 = -2\sin\frac{1+7}{2}\sin\frac{1-7}{2} = 2\sin 4\sin 3$$
te je
$$B = 2\sin 5(\cos 1 - \cos 7) = 4\sin 3\sin 4\sin 5$$
tako da se za vrednost zadatog izraza dobija:
$$\frac{\sin 2 + \sin 4 + \sin 6 - \sin 12}{\sin 3\sin 4\sin 5} = \frac{4\sin 3\sin 4\sin 5}{\sin 3\sin 4\sin 5} = 4.$$

18.Ⓐ Na slici je prikazana pravilna trostrana prizma visine H sa jednakostraničnim trouglom u osnovi. Neka je dužina stranice trougla a. Bočna strana prizme je pravougaonik stranica a i H te za njegov obim važi izraz



$$S = 2(a + H) \Rightarrow H = \frac{S}{2} - a$$

Površina osnove prizme je

$$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

pa se njena zapremina može predstaviti sledećim izrazom

$$V = BH = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{S}{2} - a\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2(S - 2a)$$

Zapremina će biti maksimalna za onu vrednost promenljive a za koju je izvod funkcije zapremine jednak nuli. Za izvod funkcije zapremine po promenljivoj a imamo (S je zadata konstanta koja ne zavisi od a)

$$V' = \left(\frac{\sqrt{3}}{8}a^2(S - 2a)\right)' = \frac{\sqrt{3}}{8}\left((a^2)'(S - 2a) + a^2(S - 2a)'\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}\left(2a(S - 2a) + a^2(-2)\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}a(S - 3a)$$

te sledi

$$V' = 0 \iff a(S - 3a) = 0 \iff a = 0 \vee a = \frac{S}{3}$$

Za $a = 0$ zapremina je minimalna i iznosi $V_{\min} = 0$.

Za $a = \frac{S}{3}$ zapremina je maksimalna i iznosi

$$V_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2(S - 2a) = \frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{S}{3}\right)^2\left(S - 2\frac{S}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}\frac{S^2}{9}\frac{1}{3}S = \frac{S^3\sqrt{3}}{216}.$$

19.Ⓑ Ako su x_1 i x_2 koreni kvadratne jednačine

$$x^2 + (2 + m)x - 6m^2 + 11m - 3 = 0$$

onda se ova jednačina može predstaviti u sledećem obliku

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$$

Izjednačavanjem koeficijenata polinoma iz prethodne dve jednačine dobijamo

$$x_1 + x_2 = -(m + 2)$$

$$x_1x_2 = -6m^2 + 11m - 3$$

Prema uslovu zadatka važi

$$\frac{2x_1}{x_2} + \frac{x_2}{2x_1} \leq 2$$

odakle sledi

$$\frac{4x_1^2 + x_2^2}{2x_1x_2} \leq 2 \iff \frac{4x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2}{2x_1x_2} \leq 0 \iff \frac{(2x_1 - x_2)^2}{2x_1x_2} \leq 0$$

Kako je $(2x_1 - x_2)^2 \geq 0$ to se nejednačina dalje svodi na

$$x_1x_2 < 0 \vee 2x_1 - x_2 = 0$$

1. (i) $x_1x_2 < 0$

   Dobijamo sledeću kvadratnu nejednačinu po promenljivoj m

$$-6m^2 + 11m - 3 < 0 \iff 6m^2 - 11m + 3 > 0$$

   Kako su koreni kvadratne jednačine $6m^2 - 11m + 3 = 0$ dati sa

$$m_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 6 \cdot 3}}{2 \cdot 6} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 72}}{12} = \frac{11 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{11 \pm 7}{12} = \begin{cases} \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2} \end{cases}$$

   to je rešenje ove kvadratne nejednačine

$$m \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$$

2. (ii) $2x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_1$

   Sada sledi

$$x_1 + x_2 = -(m + 2) \Rightarrow x_1 + 2x_1 = -(m + 2)$$

   odnosno

$$x_1 = -\frac{1}{3}(m + 2), \quad x_2 = 2x_1 = -\frac{2}{3}(m + 2)$$

$$-6m^2 + 11m - 3 = x_1x_2 = \frac{2}{9}(m + 2)^2$$

$$-54m^2 + 99m - 27 = 2m^2 + 8m + 8 \iff 56m^2 - 91m + 35 = 0$$

   odakle se za dodatna rešenja dobija

$$m_{1,2} = \frac{91 \pm \sqrt{91^2 - 4 \cdot 56 \cdot 35}}{2 \cdot 56} = \frac{91 \pm \sqrt{441}}{112} = \frac{91 \pm 21}{112} = \begin{cases} \frac{5}{8} \\ 1 \end{cases}$$

Dakle, skup svih vrednosti realnog parametra m za koje su zadovoljeni uslovi zadatka je

$$m \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left\{\frac{5}{8}, 1\right\} \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

20.Ⓐ Dat je skup $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ i preslikavanje $f\colon A \to A$ za koje važi

$$(\forall k \in A)\big(f(k) \neq \min\{k, 3\} \ \wedge \ (k > 3 \implies f(k) < k - 2)\big),$$

gde je $\min\{a, b\} = \begin{cases} a, & a \leq b \\ b, & a > b \end{cases}$

Odavde sledi:

$$\begin{array}{l}
f(1) \neq \min(1,3) = 1 \\
f(2) \neq \min(2,3) = 2 \\
f(3) \neq \min(3,3) = 3 \\
f(4) \neq \min(4,3) = 3, \quad f(4) < 4 - 2 = 2 \\
f(5) \neq \min(5,3) = 3, \quad f(5) < 5 - 2 = 3 \\
f(6) \neq \min(6,3) = 3, \quad f(6) < 6 - 2 = 4 \\
f(7) \neq \min(7,3) = 3, \quad f(7) < 7 - 2 = 5
\end{array}$$

te dobijamo da su za pojedinačne elemenate skupa A dozvoljena sledeća preslikavanja

$$\begin{array}{l}
1 \to 2, 3, 4, 5, 6, 7 \\
2 \to 1, 3, 4, 5, 6, 7 \\
3 \to 1, 2, 4, 5, 6, 7 \\
4 \to 1 \\
5 \to 1, 2 \\
6 \to 1, 2 \\
7 \to 1, 2, 4
\end{array}$$

Dakle, element 1 se može preslikati u jedan od 6 različitih elemenata, element 2 u jedan od 6 različitih elemenata, element 3 u jedan od 6 različitih elemenata, element 4 se može preslikati samo u 1 element, element 5 u 2 različita elementa, element 6 u 2 različita elementa i element 7 u 3 različita elementa, tako da je ukupan broj preslikavanja jednak

$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 216 \cdot 12 = 2592.$$

PROBNI PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE ZA UPIS NA ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

1. Ako je p procenata broja A jednako 1, tada je proizvod $p \cdot A$ jednak:

(A) 1 (B) 10 (C) 100 (D) 0.1 (E) 0.01 (N) Ne znam

2. Vrednost izraza $\dfrac{x-1}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}} \cdot \dfrac{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}+1} \cdot x^{\frac{1}{4}}+1$ za $x=16$ jednaka je:

(A) 2 (B) $\sqrt[4]{2}$ (C) 8 (D) 4 (E) 3 (N) Ne znam

3. Vrednost izraza $\left(\dfrac{i^{2018}-i^{2017}}{1+i^{2019}}\right)^{2020}$, $(i^2=-1)$ jednaka je:

(A) $-i$ (B) i (C) 1 (D) -1 (E) $1+i$ (N) Ne znam

4. Vrednost izraza $\sin\left(3^{\frac{\log_3 12+\log_4 12}{\log_3 12\cdot\log_4 12}} \cdot \pi\right)$ jednaka je:

(A) 1 (B) -1 (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (E) 0 (N) Ne znam

5. Izraz $\sin^2(45^o+\alpha)-\sin^2(30^o-\alpha)-\sin 15^o\cos(15^o+2\alpha)$ identički je jednak izrazu:

(A) $\sin 2\alpha$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha$ (D) $1-\cos 2\alpha$ (E) $\sqrt{3}\sin 2\alpha$ (N) Ne znam

6. Ako je $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{an^3+(a+1)n^2-n+2017}{bn^3+bn+4034}+\dfrac{b}{a}\cdot 2017^{-n}\right)=\dfrac{1}{2}$ $(a,b\in\mathbb{R}\backslash\{0\})$, gde su a i b uzajamno prosti brojevi, tada je a^2+b^2 jednako:

(A) 13 (B) 2 (C) 8 (D) 5 (E) 2017^2+1 (N) Ne znam

7. Jednačina kruga upisanog u trougao čije stranice pripadaju pravama $x=0$, $y=0$ i $3x+4y-12=0$ je:

(A) $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ (B) $x^2+y^2-2x-4y+2=0$

(C) $x^2+y^2-x-y+\dfrac{1}{4}=0$ (D) $x^2+y^2-\dfrac{3}{2}x-y+\dfrac{3}{4}=0$

(E) nijedan od prethodno ponuđenih odgovora (N) Ne znam

8. Brojevi a_1, a_2 i a_3 su prva tri člana rastuće geometrijske progresije a zbir im je jednak 19. Brojevi a_1, a_2+4 i a_3+7 su prva tri člana aritmetičke progresije. Tada je zbir $3a_1+4a_2+5a_3$ jednak:

(A) 81 (B) 45 (C) 65 (D) 75 (E) 85 (N) Ne znam

9. Data je funkcija $f(x)=\sqrt{\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}}$. Tada je vrednost $f'(4)$ jednaka:

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{24}$ (C) $-\dfrac{\sqrt{3}}{24}$ (D) $-\dfrac{\sqrt{3}}{12}$ (E) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ (N) Ne znam

10. U jednakokraki trougao čiji je jedan unutrašnji ugao 120^o, upisan je krug poluprečnika 3 cm. Obim tog trougla (u cm) jednak je:

(A) $3+\sqrt{3}$ (B) $4+2\sqrt{3}$ (C) $2(12+7\sqrt{3})$ (D) $2(10+7\sqrt{3})$ (E) $3(10-2\sqrt{3})$ (N) Ne znam

11. Skup svih realnih rešenja nejednačine $\log_{x+3}(9-x^2)-\dfrac{1}{16}\log^2_{x+3}(x-3)^2 \geq 2$ je oblika (za brojeve a, b i c takve da je $-\infty < a < b < c < +\infty$):

(A) $\{a\}$ (B) $[a,b]$ (C) (a,b) (D) $[a,b)\cup(b,c]$ (E) $[a,b)$ (N) Ne znam

12. Zbir svih realnih rešenja jednačine $|\sin x| = \sin x + 2\cos x$ koja pripadaju intervalu $(0,3\pi)$ jednak je:

(A) 5π (B) $\dfrac{11\pi}{2}$ (C) $\dfrac{9\pi}{4}$ (D) $\dfrac{19\pi}{4}$ (E) $\dfrac{39\pi}{4}$ (N) Ne znam

13. Sva realna rešenja jednačine $\sqrt{x\sqrt[5]{x}}-\sqrt[5]{x\sqrt{x}}=56$ nalaze se u intervalu:

(A) $(0,500]$ (B) $(500,1000]$ (C) $(1000,1500]$ (D) $(1500,2000]$ (E) $(2000,2017]$ (N) Ne znam

14. Za one vrednosti $x\in\mathbb{R}$ za koje je ispunjena nejednačina $(0.5)^{\sin^2 x-\sin^4 x+\cdots+(-1)^{n-1}\sin^{2n}+\cdots} > \sqrt[15]{0.25^{2\cos^2 x}}$, vrednost $\cos^2 x$ pripada intervalu:

(A) $\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$ (B) $\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{3}\right)$

(C) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ (D) $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right)$

(E) nijedan od prethodno ponuđenih odgovora (N) Ne znam

15. Ukupan broj realnih rešenja sistema jednačina $\dfrac{2\cdot 4^x+1}{2^x+2}-4^x=\dfrac{y}{2^{x+1}+4}$, $4\cdot 2^{3x}+y^2=4$ je:

(A) 2 (B) 1 (C) 3 (D) 4 (E) 0 (N) Ne znam

16. Ako su p, q i r koreni jednačine $x^3-x+1=0$, tada je $p^5+q^5+r^5$ jednako:

(A) 0 (B) -5 (C) -2 (D) -3 (E) -4 (N) Ne znam

17. Osnova piramide je pravougaonik čija je površina $8\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$ a ugao između njegovih dijagonala je 60°. Bočne ivice piramide nagnute su prema ravni osnove pod uglom od 30°. Zapremina piramide (u cm^3) je:

(A) $\dfrac{32\sqrt{2}}{3}$ (B) $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$ (C) $16\sqrt{2}$ (D) $8\sqrt{2}$ (E) $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$ (N) Ne znam

18. U razvoju binoma $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{b^2}}-\dfrac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[8]{a^3}}\right)^n$ $(a,b\in\mathbb{R}^+,\ n\in\mathbb{N})$ postoji član oblika $A\cdot b^6$. Ako je binomni koeficijent četvrtog člana 11 puta veći od binomnog koeficijenta trećeg člana, tada je A jednako :

(A) $353a^{-4}$ (B) $25a^{-12}$ (C) $3254a^{-4}$ (D) $2025a^{-4}$ (E) $6545a^{-12}$ (N) Ne znam

19. Ako je m najmanja, a M najveća vrednost funkcije $f(x)=-\cos 2x-x$ na segmentu $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ tada je $m+M$ jednako :

(A) $-\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $-\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (E) $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (N) Ne znam

20. Dati su skupovi $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ i $B=\{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6,b_7,b_8,b_9\}$. Ukupan broj bijekcija koje preslikavaju skup A u neki podskup skupa B pripada intervalu:

(A) $(1,100]$ (B) $(100,1000]$

(C) $(1000,10000]$ (D) $(10000,20000]$

(E) nijedan od prethodno ponuđenih odgovora (N) Ne znam

REŠENJA

1.Ⓒ p procenata broja A je prema uslovu zadatka jednako 1 i dato je izrazom

$$\frac{p\cdot A}{100}=1\Rightarrow p\cdot A=100.$$

2.Ⓓ Za $x=16=2^4$ imamo

$$x^{\frac{1}{4}}=\left(2^4\right)^{\frac{1}{4}}=2$$
$$x^{\frac{1}{2}}=\left(2^4\right)^{\frac{1}{2}}=2^2=4$$
$$x^{\frac{3}{4}}=\left(2^4\right)^{\frac{3}{4}}=2^3=8$$

te se za vrednost zadatog izraza dobija

$$\frac{x-1}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}+1}\cdot x^{\frac{1}{4}}+1=\frac{16-1}{8+4}\cdot\frac{4+2}{4+1}\cdot 2+1=\frac{15}{12}\cdot\frac{6}{5}\cdot 2+1=4.$$

3.Ⓒ Važe sledeće relacije

$$i^{2017}=i\cdot i^{2016}=i\cdot(i^2)^{1008}=i\cdot(-1)^{1008}=i$$
$$i^{2018}=i\cdot i^{2017}=i^2=-1$$
$$i^{2019}=i^2\cdot i^{2017}=-1\cdot i=-i$$

te se za vrednost zadatog izraza dobija

$$\frac{i^{2018}-i^{2017}}{1+i^{2019}}=\frac{-1-i}{1-i}=-\frac{1+i}{1-i}=-\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-\frac{1+2i+i^2}{1^2-i^2}=-\frac{2i}{2}=-i$$

odnosno

$$\left(\frac{i^{2018}-i^{2017}}{1+i^{2019}}\right)^{2020}=(-i)^{2020}=\left((-i)^2\right)^{1010}=(-1)^{1010}=1.$$

4.Ⓔ Kako važi

$$\frac{\log_3 12+\log_4 12}{\log_3 12\cdot\log_4 12}=\frac{1}{\log_3 12}+\frac{1}{\log_4 12}=\log_{12}3+\log_{12}4=\log_{12}(3\cdot 4)=\log_{12}12=1$$

to se za vrednost zadatog izraza dobija

$$\sin\left(3\frac{\log_3 12+\log_4 12}{\log_3 12\cdot\log_4 12}\cdot\pi\right)=\sin(3\pi)=0.$$

5.Ⓐ Kako važe sledeće trigonometrijske jednakosti

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left(\sin(x+y)+\sin(x-y)\right)$$
$$\sin^2 x=\frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right)$$

to se dobija

$$\sin 15^{\circ}\cos(15^{\circ}+2\alpha)=\frac{1}{2}\left(\sin(30^{\circ}+2\alpha)-\sin 2\alpha\right)$$
$$\sin^2(30^{\circ}-\alpha)=\frac{1}{2}\left(1-\cos(60^{\circ}-2\alpha)\right)=\frac{1}{2}\left(1-\sin(90^{\circ}-(60^{\circ}-2\alpha))\right)=\frac{1}{2}\left(1-\sin(30^{\circ}+2\alpha)\right)$$
$$\sin^2(45^{\circ}+\alpha)=\frac{1}{2}\left(1-\cos(90^{\circ}+2\alpha)\right)=\frac{1}{2}\left(1+\sin 2\alpha\right)$$

te se za zadati izraz dobija da je identički jednak sledećem izrazu

$$\begin{aligned}\sin^2(45^{\circ}+\alpha)-\sin^2(30^{\circ}-\alpha)-\sin 15^{\circ}\cos(15^{\circ}+2\alpha)&=\\&=\frac{1}{2}(1+\sin 2\alpha)-\frac{1}{2}\left(1-\sin(30^{\circ}+2\alpha)\right)-\frac{1}{2}\left(\sin(30^{\circ}+2\alpha)-\sin 2\alpha\right)=\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin 2\alpha-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin(30^{\circ}+2\alpha)-\frac{1}{2}\sin(30^{\circ}+2\alpha)+\frac{1}{2}\sin 2\alpha=\sin 2\alpha.\end{aligned}$$

6. Ⓓ Kako je

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{an^3+(a+1)n^2-n+2017}{bn^3+bn+4034}+\frac{b}{a}\cdot 2017^{-n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{an^3}{bn^3}+\frac{b}{a}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2017^n}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\cdot 0=\frac{a}{b}$$

to prema uslovu zadatka sledi

$$\frac{a}{b}=2\Leftrightarrow a=2b$$

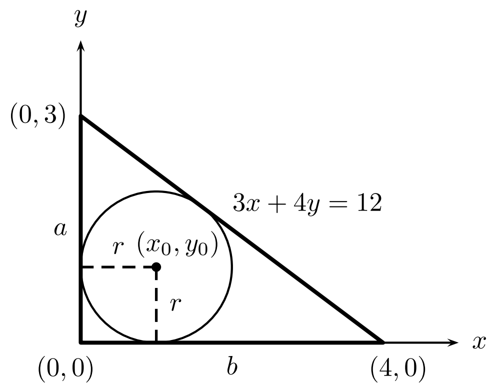
Po uslovu zadatka a i b su uzajamno prosti brojevi, što znači da je najveći zajednički delitelj ova dva broja broj 1. Najveći zajednički delitelj brojeva $a=2b$ i b je b, odakle sledi $b=1$ i $a=2b=2$. Za traženu vrednost izraza se konačno dobija

$$a^2+b^2=1^2+2^2=5.$$

---

7. Ⓐ

Na slici je prikazan (pravougli) trougao čije stranice pripadaju pravama $x=0$, $y=0$ i $3x+4y-12=0$. Katete ovog pravouglog trougla su dužine $a=3$ cm i $b=4$ cm. Hipotenuza ovog trougla je prema Pitagorinoj teoremi



$$c^2=a^2+b^2=3^2+4^2=25\Rightarrow c=5$$

Poluprečnik upisanog kruga se može dobiti iz izraza

$$r=\frac{2P}{a+b+c}$$

gde je P površina trougla. Kako se radi o pravouglom trouglu, to važi

$$P=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}3\cdot 4=6$$

te za poluprečnik upisanog kruga imamo

$$r=\frac{12}{3+4+5}=1$$

Sa slike se vidi da je centar upisanog kruga poluprečnika r u tački čije su koordinate

$$x_0=r=1,\quad y_0=r=1$$

Jednačina upisanog kruga je sada data izrazom

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$
$$(x-1)^2+(y-1)^2=1$$
$$x^2+y^2-2x-2y+1=0.$$

---

8. Ⓐ Neka su a_1, a_2 i a_3 prva tri člana rastuće geometrijske progresije ($q>1$). Tada važi

$$a_2=qa_1$$
$$a_3=q^2a_1$$

Prema uslovu zadatka je

$$a_1+a_2+a_3=19$$

Brojevi $b_1=a_1$, $b_2=a_2+4$ i $b_3=a_3+7$ predstavljaju prva tri člana aritmetičke progresije, te važi

$$b_3-b_2=b_2-b_1\Rightarrow a_3-a_2+3=a_2-a_1+4\Rightarrow a_1-2a_2+a_3=1$$

Oduzimanjem prethodne dve jednačine, dobijamo

$$(a_1+a_2+a_3)-(a_1-2a_2+a_3)=19-1\Leftrightarrow 3a_2=18\Leftrightarrow a_2=6$$

odakle sledi

$$qa_1=6$$

i

$$a_1 + a_2 + a_3 = 19 \Rightarrow a_1 + a_3 = 19 - a_2 = 13 \Rightarrow a_1(1+q^2) = 13$$

Deljenjem poslednje dve jednačine dobijamo kvadratnu jednačinu po promenljivoj q

$$\frac{1+q^2}{q} = \frac{13}{6} \Rightarrow 6 + 6q^2 = 13q \Rightarrow 6q^2 - 13q + 6 = 0$$

čija su dva rešenja

$$q_{1/2} = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6}}{2 \cdot 6} = \frac{13 \pm \sqrt{169-144}}{12} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{13 \pm 5}{12} = \begin{cases} \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \\ \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Samo rešenje $q_2 = \dfrac{3}{2}$ ispunjava uslov rastućeg geometrijskog niza $q > 1$. Sada za preostala dva člana geometrijskog niza dobijamo sledeće vrednosti

$$a_1 = \frac{a_2}{q} = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$$

$$a_3 = qa_2 = \frac{3}{2} \cdot 6 = 9$$

te se za vrednost traženog izraza dobija

$$3a_1 + 4a_2 + 5a_3 = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 9 = 12 + 24 + 45 = 81.$$

9.Ⓓ Označimo sledeće funkcije

$$w(x) = \sqrt{x}$$

$$v(w) = \frac{w+1}{w-1}$$

$$u(v) = \sqrt{v}$$

tada se zadata funkcija može izraziti u obliku sledeće složene funkcije

$$f(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}} = u(v(w(x)))$$

Izvod složene funkcije se nalazi prema sledećem lančanom pravilu

$$f'(x) = u'(v) \cdot v'(w) \cdot w'(x)$$

Kako važi

$$w'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$v'(w) = \left(\frac{w+1}{w-1}\right)' = \frac{(w+1)'(w-1) - (w+1)(w-1)'}{(w-1)^2} = \frac{w-1-(w+1)}{(w-1)^2} = -\frac{2}{(w-1)^2}$$

$$u'(v) = \left(\sqrt{v}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{v}}$$

to se za izvod zadate funkcije ima

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot \frac{2}{(w-1)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}}} \cdot \frac{2}{(\sqrt{x}-1)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

i u tački $x = 4 \Rightarrow \sqrt{x} = 2$ se dobija vrednost

$$f'(4) = -\frac{1}{2\sqrt{\frac{2+1}{2-1}}} \cdot \frac{2}{(2-1)^2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{4\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{12}.$$

10.Ⓒ Na slici je prikazan jednakokraki trougao ABC jednog unutrašnjeg ugla $\angle ACB = 2\beta = 120^{\circ}$ i poluprečnika upisanog kruga $r = 3$. Za vrednosti uglova ovog trougla se dobija

$$\alpha = \angle BAC = \angle ABC = \frac{1}{2}(180^{\circ} - \angle ACB) = \frac{1}{2}(180^{\circ} - 120^{\circ}) = 30^{\circ}$$

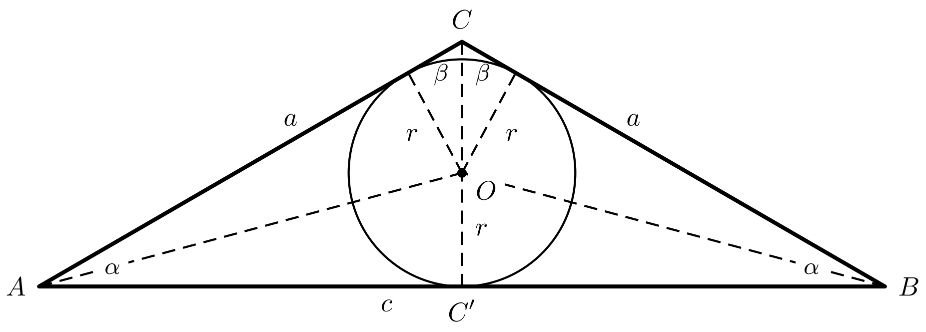
$$\beta = \frac{1}{2}\angle ACB = 60^{\circ}$$

Označimo dužinu kraka ovog trougla $AC = BC = a$. Sada se iz pravouglog trougla $AC'C$ za osnovicu trougla dobija

$$c = AB = 2 \cdot AC' = 2 \cdot AC \cos\alpha = 2a\cos 30^{\circ} = a\sqrt{3}$$

dok se za visinu nad osnovicom AB ima

$$h = CC' = AC \sin\alpha = a \sin 30^{\circ} = \frac{a}{2}$$



Površina trougla ABC je data izrazom

$$P = \frac{1}{2}AB \cdot CC' = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}a\sqrt{3}\frac{a}{2} = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$$

Površina ovog trougla se može izraziti kao zbir površina trouglova ABO, BCO i ACO:

$$P = P_{ABO} + P_{BCO} + P_{ACO} = \frac{1}{2}(c \cdot r + a \cdot r + a \cdot r) = \frac{1}{2}(2a + c)r = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{3})ar$$

Iz poslednje dve jednačine se ima

$$\frac{1}{4}a^2\sqrt{3} = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{3})ar \Rightarrow a = 2\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}r = 2\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot 3 = 2(2 + \sqrt{3})\sqrt{3}$$

Sada se za obim trougla dobija

$$O = 2a + c = 2a + a\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})a = 2(2 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})\sqrt{3} = 2(4 + 3 + 4\sqrt{3})\sqrt{3} = 2(7 + 4\sqrt{3})\sqrt{3} = 2(7\sqrt{3} + 12).$$

11.Ⓐ Logaritamska funkcija je definisana za realne brojeve x za koje su argumenti ove funkcije pozitivni:

- $(9 - x^2) > 0 \Rightarrow (3 - x)(3 + x) > 0 \iff (x - 3)(x + 3) < 0 \iff x \in (-3, 3)$
- $(x - 3)^2 > 0 \iff x \neq 3$

i za koje je osnova logaritamske funkcije pozitivna i različita od broja 1:

- $x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$
- $x + 3 \neq 1 \Rightarrow x \neq -2$

Iz prethodnih relacija sledi da rešenje treba tražiti u skupu realnih brojeva

$$x \in (-3, -2) \cup (-2, 3)$$

Važe sledeći izrazi

$$\log_{x+3}(9-x^2) = \log_{x+3}(3-x) + \log_{x+3}(x+3) = \log_{x+3}(3-x) + 1$$

$$\log^2_{x+3}(x-3)^2 = \left(\log_{x+3}(3-x)^2\right)^2 = \left(2\log_{x+3}(3-x)\right)^2 = 4\log^2_{x+3}(3-x)$$

te se izraz sa leve strane zadate nejednačine može predstaviti u sledećem obliku

$$\log_{x+3}(9-x^2) - \frac{1}{16}\log^2_{x+3}(x-3)^2 = \log_{x+3}(3-x) + 1 - \frac{4}{16}\log^2_{x+3}(3-x) = 1 + \log_{x+3}(3-x) - \frac{1}{4}\log^2_{x+3}(3-x)$$

ako uvedemo smenu $t = \log_{x+3}(3-x)$, zadata nejednačina postaje

$$1 + t - \frac{1}{4}t^2 \geq 2 \iff t^2 - 4t + 4 \leq 0 \iff (t-2)^2 \leq 0$$

Poslednja nejednačina ima samo jedno rešenje $t = 2$. Vraćanjem smene nazad, odavde dalje dobijamo

$$\log_{x+3}(3-x) = 2 \Leftrightarrow \log_{x+3}(3-x) = \log_{x+3}(x+3)^2 \Leftrightarrow 3-x = (x+3)^2 \Leftrightarrow 3-x = x^2+6x+9$$

Kvadratna jednačina

$$x^2 + 7x + 6 = 0 \iff (x+1)(x+6) = 0$$

ima dva rešenja: $x_1 = -1$ i $x_2 = -6$. Od ova dva moguća rešenja, samo $x_1 = -1$ pripada skupu $x \in (-3,-2) \cup (-2,3)$. Dakle, zadata nejednačina ima samo jedno rešenje $x = a = -1$. Tačan odgovor je $x = \{a\}$.

12.Ⓓ Rešenja jednačine

$$|\sin x| = \sin x + 2\cos x$$

tražimo u skupu $x \in (0, 3\pi)$. Kako je

$$\sin x \geq 0 \text{ za } x \in (0,\pi] \cup [2\pi, 3\pi)$$

i

$$\sin x < 0 \text{ za } x \in (\pi, 2\pi)$$

to važi

$$|\sin x| = \begin{cases} \sin x, & x \in (0,\pi] \cup [2\pi,3\pi) \\ -\sin x, & x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

Sada razlikujemo dva slučaja

1. $x \in (0,\pi] \cup [2\pi, 3\pi)$:

$$|\sin x| = \sin x + 2\cos x \Rightarrow \sin x = \sin x + 2\cos x \iff \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

gde zadatom skupu pripadaju samo dva rešenja

$$x_1 = \frac{\pi}{2} \text{ i } x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$$

2. $x \in (\pi, 2\pi)$:

$$|\sin x| = \sin x + 2\cos x \Rightarrow -\sin x = \sin x + 2\cos x \iff \operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

gde zadatom skupu pripada samo jedno rešenje $x_3 = 2\pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{4}$

Sledi da je zbir svih rešenja zadate jednačine u skupu $x \in (0, 3\pi)$

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{2} + \frac{7\pi}{4} = \frac{\pi}{4}(2 + 10 + 7) = \frac{19\pi}{4}.$$

13.Ⓒ Kvadratni koren je definisan za realne brojeve koji nisu negativni, te rešenja zadate jednačine tražimo u skupu $x \geq 0$. Leva strana jednačine se može predstaviti u sledećem ekvivalentnom obliku

$$\sqrt{x\sqrt[5]{x}} - \sqrt[5]{x\sqrt{x}} = \left(x \cdot x^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(x^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} = x^{\frac{3}{5}} - x^{\frac{3}{10}} = t^2 - t$$

gde smo uveli smenu $t = x^{\frac{3}{10}} > 0$.

Zadata jednačina je ekvivalentna sledećoj kvadratnoj jednačini

$$t^2 - t = 56 \iff t^2 - t - 56 = 0 \iff (t+7)(t-8) = 0$$

čija su rešenja $t_1 = -7$ i $t_2 = 8$. Kako je $t > 0$, to je jedino rešenje ove jednačine $t_2 = 8$. Vraćanjem smene, dalje dobijamo

$$x^{\frac{3}{10}} = 8 \iff x = 8^{\frac{10}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{10}{3}} = 2^{10} = 1024$$

te se jedino realno rešenje ove jednačine nalazi u intervalu $x \in (1000, 1500]$.

14.Ⓔ Zadata nejednačina se može predstaviti u sledećem obliku

$$(0.5)^{\sin^2 x - \sin^4 x + \cdots + (-1)^{n-1}\sin^{2n} + \cdots} > \sqrt[15]{0.25^{2\cos^2 x}}$$

$$2^{-\left(\sin^2 x - \sin^4 x + \cdots + (-1)^{n-1}\sin^{2n} + \cdots\right)} > \left(2^{-2}\right)^{\frac{2\cos^2 x}{15}} = 2^{-\frac{4\cos^2 x}{15}}$$

$$-\left(\sin^2 x - \sin^4 x + \cdots + (-1)^{n-1}\sin^{2n} + \cdots\right) > -\frac{4\cos^2 x}{15}$$

$$\sin^2 x - \sin^4 x + \cdots + (-1)^{n-1}\sin^{2n} + \cdots < \frac{4\cos^2 x}{15}$$

Leva strana ove nejednačine se može transformisati na sledeći način

$$\begin{aligned}
\sin^2 x - \sin^4 x + \cdots + (-1)^{n-1}\sin^{2n} + \cdots &= \\
&= \sin^2 x(1 - \sin^2 x) + \sin^6 x(1 - \sin^2 x) + \sin^{10} x(1 - \sin^2 x) + \cdots \\
&= (1 - \sin^2 x)(\sin^2 x + \sin^6 x + \sin^{10} x + \cdots + \sin^{2+4n} x + \cdots) \\
&= \cos^2 x \sin^2 x(1 + \sin^4 x + \sin^8 x + \cdots + \sin^{4n} x + \cdots)
\end{aligned}$$

te dalje sledi

$$\cos^2 x \sin^2 x(1 + \sin^4 x + \sin^8 x + \cdots + \sin^{4n} x + \cdots) < \frac{4\cos^2 x}{15}$$

$$\cos^2 x\left(\sin^2 x(1 + \sin^4 x + \sin^8 x + \cdots + \sin^{4n} x + \cdots) - \frac{4}{15}\right) < 0$$

Kako je $\cos^2 x > 0$, to se prethodna nejednačina svodi na

$$\sin^2 x(1 + \sin^4 x + \sin^8 x + \cdots + \sin^{4n} x + \cdots) - \frac{4}{15} < 0$$

Uvođenjem smene $t = \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \in [0, 1)$ dalje dobijamo

$$t(1 + t^2 + t^4 + t^6 + \cdots) - \frac{4}{15} < 0$$

Pošto je $t^2 \in [0, 1)$ to se za beskonačnu sumu u zagradi ima

$$1 + t^2 + t^4 + t^6 \cdots = 1 + (t^2)^1 + (t^2)^2 + (t^2)^3 + \cdots = \frac{1}{1 - t^2}$$

što zamenom u prethodnu nejednačinu daje

$$\frac{t}{1 - t^2} - \frac{4}{15} < 0 \Rightarrow 4t^2 + 15t - 4 < 0$$

Kako su rešenja kvadratne jednačine

$$4t^2 + 15t - 4 = 0$$

data izrazima

$$t_{1/2} = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 + 4 \cdot 4 \cdot 4}}{2 \cdot 4} = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 64}}{8} = \frac{-15 \pm \sqrt{289}}{8} = \frac{-15 \pm 17}{8}$$

$$t_1 = -4, \quad t_2 = \frac{1}{4}$$

to je rešenje gornje kvadratne nejednačine

$$t \in \left(-4, \frac{1}{4}\right)$$

odnosno kako istovremeno važi $t \in [0, 1)$ to dobijamo

$$t \in \left[0, \frac{1}{4}\right)$$

Vraćanjem smene za t nazad u nejednačinu dalje se dobija

$$1 - \cos^2 x \geq 0 \iff \cos^2 x \leq 1$$

$$1 - \cos^2 x < \frac{1}{4} \iff \cos^2 x > \frac{3}{4}$$

Dakle, zadata nejednačina je ispunjena za one vrednosti $\cos^2 x$ koje pripadaju intervalu $\left(\frac{3}{4}, 1\right]$ što ne odgovara nijednom od ponuđenih odgovora (a)-(d).

---

15. Ⓑ

$$\frac{2 \cdot 4^x + 1}{2^x + 2} - 4^x = \frac{y}{2^{x+1} + 4}$$

$$4 \cdot 2^{3x} + y^2 = 4$$

Uvođenjem smene

$$t = 2^x > 0$$

i uzimajući u obzir da važi

$$2^{x+1} = 2 \cdot 2^x = 2t$$

$$4^x = (2^2)^x = (2^x)^2 = t^2$$

$$2^{3x} = (2^x)^3 = t^3$$

ovaj sistem jednačina postaje

$$\frac{2 \cdot t^2 + 1}{t + 2} - t^2 = \frac{y}{2(t + 2)}$$

$$4t^3 + y^2 = 4$$

Iz prve jednačine dobijamo

$$y = 2(2t^2 + 1) - 2t^2(t + 2) = 4t^2 + 2 - 2t^3 - 4t^2 = 2(1 - t^3)$$

odakle je

$$y^2 = 4(1 - t^3)^2$$

Iz druge jednačine sledi

$$y^2 = 4(1 - t^3)$$

Iz poslednje dve jednačine dobijamo

$$4(1 - t^3) = 4(1 - t^3)^2 \iff (1 - t^3)((1 - t^3) - 1) = 0 \iff t^3(1 - t^3) = 0$$

čija su moguća rešenja

$$t^3 = 0 \Rightarrow t_1 = 0$$

$$1 - t^3 = 0 \Rightarrow t_2 = 1$$

Kako je $t = 2^x > 0$ to je jedino moguće rešenje za x:

$$2^x = 1 \iff x = 0$$

i jedino moguće rešenje za y:

$$y = 2(1 - t^3) = 0$$

Dakle, zadati sistem ima samo jedno rešenje u skupu realnih brojeva $(x, y) = (0, 0)$.

16. Ⓑ Ako su p, q, r koreni kubne jednačine $x^3 - x + 1$, tada važi

$$x^3 - x + 1 = (x-p)(x-q)(x-r) = x^3 - (p+q+r)x^2 + (pq+qr+pr)x - pqr$$

Izjednačavanjem koeficijenata polinoma sa leve i desne strane gornje jednačine dobijamo

$$p+q+r = 0$$

$$pq+qr+pr = -1$$

$$pqr = -1$$

Takođe su ispunjene sledeće jednakosti

$$p^3 - p + 1 = 0$$

$$q^3 - q + 1 = 0$$

$$r^3 - r + 1 = 0$$

Sabiranjem prethodne tri jednačine i uzimanjem u obzir gornjih izraza dobijamo

$$p^3 + q^3 + r^3 - \underbrace{(p+q+r)}_{=0} + 3 = 0 \Rightarrow p^3 + q^3 + r^3 = -3$$

Takođe važi

$$\underbrace{(p+q+r)^2}_{=0} = p^2 + q^2 + r^2 + 2\underbrace{(pq+qr+pr)}_{=-1} = p^2 + q^2 + r^2 - 2 \Rightarrow p^2 + q^2 + r^2 = 2$$

Množenjem prethodna dva izraza se ima

$$(p^2+q^2+r^2)(p^3+q^3+r^3) = 2 \cdot (-3) = -6$$

Za levu stranu ove jednačine važi

$$(p^2+q^2+r^2)(p^3+q^3+r^3) = p^5 + q^5 + r^5 + p^2q^2(p+q) + q^2r^2(q+r) + p^2r^2(p+r)$$

i kako je $p+q+r=0$ to je

$$p+q=-r, \quad q+r=-p, \quad p+r=-q$$

te smenom ovih jednakosti leva strana jednačine postaje

$$(p^2+q^2+r^2)(p^3+q^3+r^3) = p^5+q^5+r^5-p^2q^2r-q^2r^2p-p^2r^2q = p^5+q^5+r^5-\underbrace{pqr}_{=-1}\underbrace{(pq+qr+pr)}_{=-1} = p^5+q^5+r^5-1$$

odavde se za vrednost traženog izraza konačno dobija

$$p^5+q^5+r^5 = 1 + \underbrace{(p^2+q^2+r^2)(p^3+q^3+r^3)}_{=-6} = 1 - 6 = -5.$$

---

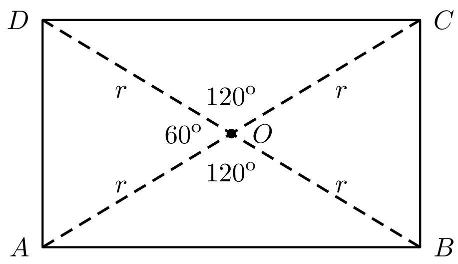
17. Ⓑ Na slici levo je prikazana osnova piramide (pravougaonik dijagonale $d = 2r$ i manjeg ugla između dijagonala 60°). Površina ovog pravougaonika se može izraziti kao zbir površina četiri trougla koje grade dijagonale i stranice pravougaonika

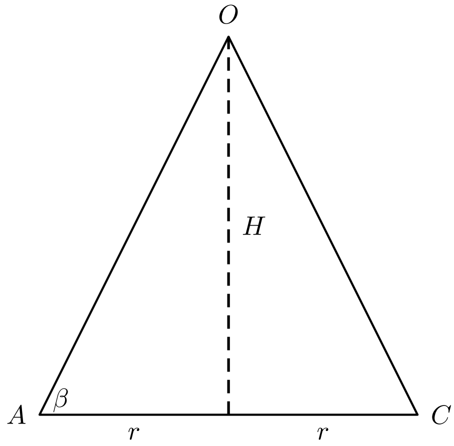
$$B = P_{AOB} + P_{BOC} + P_{COD} + P_{AOD} = 2\left(\frac{1}{2}r^2 \sin 60^{\circ} + \frac{1}{2}r^2 \underbrace{\sin(180^{\circ} - 60^{\circ})}_{=\sin 60^{\circ}}\right)$$

$$= 2r^2 \sin 60^{\circ} = 2r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = r^2\sqrt{3}$$

Kako je prema uslovu zadatka $B = 8\sqrt{3}$ odavde se za r dobija

$$r^2\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \iff r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$





Na slici desno je prikazan trougao koji obrazuju dve bočne ivice piramide sa ravni osnove. Kako je ugao između dijagonale i bočnih ivica $\beta = 30^\circ$ to za visinu piramide H imamo

$$H = r\,\mathrm{tg}\,\beta = r\,\mathrm{tg}\,30^\circ = 2\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

Sada je zapremina piramide

$$V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}8\sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{6} = \frac{16}{3}\sqrt{2}.$$

18.Ⓔ Izraz za razvoj binoma n-tog stepena je

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

Prema uslovu zadatka je

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{b^2}} = b^{-\frac{2}{3}}$$

$$y = -\frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[8]{a^3}} = -b^{\frac{1}{4}}a^{-\frac{3}{8}}$$

tako da za faktore koji figurišu u članu $k+1$ važi

$$x^{n-k} = b^{-\frac{2}{3}(n-k)}$$

$$b^k = \left(-b^{\frac{1}{4}}a^{-\frac{3}{8}}\right)^k = (-1)^k b^{\frac{k}{4}}a^{-\frac{3k}{8}}$$

Prema uslovu zadatka postoji k takvo da je

$$\binom{n}{k}x^{n-k}y^k = \binom{n}{k}\cdot b^{-\frac{2}{3}(n-k)}\cdot(-1)^k b^{\frac{k}{4}}a^{-\frac{3k}{8}} = A\cdot b^6$$

Izjednačavanjem stepena nad promenljivom b sa leve i desne strane poslednje jednačine imamo

$$-\frac{2}{3}(n-k) + \frac{k}{4} = 6$$

$$-8(n-k) + 3k = 72 \iff 11k - 8n = 72$$

Binomni koeficijent četvrtog člana je 11 puta veći od binomnog koeficijenta trećeg člana, odnosno

$$\binom{n}{3} = 11\binom{n}{2}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1} = 11\frac{n(n-1)}{2\cdot 1} \Rightarrow n-2 = 33 \iff n = 35$$

Zamenom dobijene vrednosti za n u jednačinu $11k - 8n = 72$ dobijamo traženu vrednost za k

$$k = \frac{72 + 8n}{11} = \frac{72 + 8 \cdot 35}{11} = \frac{352}{11} = 32.$$

Sada se za vrednost A konačno ima

$$A = \binom{n}{k} \cdot (-1)^k a^{-\frac{3k}{8}} = (-1)^{32}\binom{35}{32} a^{-\frac{3\cdot 32}{8}} = \binom{35}{3} a^{-12} = \frac{35 \cdot 34 \cdot 33}{3 \cdot 2 \cdot 1} a^{-12} = 6545 a^{-12}.$$

19.Ⓒ Na intervalu $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ tražimo minimalnu m i maksimalnu M vrednost funkcije

$$f(x) = -\cos 2x - x$$

Prvi izvod ove funkcije je

$$f'(x) = (-\cos 2x - x)' = -(\cos 2x)' - (x)' = 2\sin 2x - 1$$

dok je njen drugi izvod

$$f''(x) = (2\sin 2x - 1)' = 2(\sin 2x)' = 4\cos 2x$$

Kako je $\cos 2x \geq 0$ za $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \iff 2x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, to je funkcija na ovom intervalu konveksna i ima minimalnu vrednost u tački $x = x_0$ za koju je njen prvi izvod jednak nuli:

$$f'(x_0) = 0 \iff 2\sin 2x_0 - 1 = 0 \iff \sin 2x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x_0 = \frac{\pi}{6} \iff x_0 = \frac{\pi}{12}$$

Minimalna vrednost funkcije u ovoj tački iznosi

$$m = f(x_0) = -\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right) - \frac{\pi}{12} = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{12} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12}$$

Kako je funkcija konveksna na zadatom intervalu, to ona može imati maksimum u extremnim tačkama intervala:

- $x_1 = -\frac{\pi}{4}$:

$$f(x_1) = -\cos 2x_1 - x_1 = -\cos\left(-2\frac{\pi}{4}\right) - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

- $x_2 = \frac{\pi}{4}$:

$$f(x_2) = -\cos 2x_2 - x_2 = -\cos\left(2\frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

Kako je $f(x_1) > f(x_2)$ to je maksimalna vrednost funkcije na ovom intervalu

$$M = f(x_1) = \frac{\pi}{4}$$

Konačno za traženu vrednost zbira maksimalne i minimalne vrednosti se dobija

$$m + M = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

20.Ⓓ Skup $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ ima pet elemenata, dok skup $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9\}$ ima devet elemenata. Traži se ukupan broj bijekcija:

$$A \to S$$

gde je S podskup skupa B. Bijekcija $A \to S$ preslikava svaki element skupa A u tačno jedan element skupa S i ne postoje dva različita elementa skupa A koji su preslikani u isti element skupa S. Ovo preslikavanje je dakle "1-1" i "na". To znači da skup S ima jednak broj elemenata kao i skup A, odnosno 5 elemenata.

Ukupan broj podskupova od 5 elemenata koje možemo izabrati u skupu od 9 elemenata je

$$\binom{9}{5}$$

Broj različitih preslikavanja skupa A u skup S (od pet elemenata) je

$$5!$$

Naime, prvi element skupa A se može preslikati u bilo koji od pet elemenata skupa S, drugi element u bilo koji od preostala četiri elementa, treći element u bilo koji od preostala tri elementa etc... dakle, ukupan broj različitih preslikavanja je $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$.

Konačno kako ima $\binom{9}{5}$ različitih podskupova S i za svaki postoji $5!$ bijekcija, to je ukupan broj bijekcija

$$\binom{9}{5} \cdot 5! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120 \in (10000, 20000].$$

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE ZA UPIS NA ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

1. Vrednost izraza $0.5^{1.5} \cdot 0.25^{0.5} \cdot 8^{-1.5}$ je:

(A) 2^3 (B) $\frac{1}{2^5}$ (C) $\frac{1}{2^7}$ (D) $2^{1.5}$ (E) 1 (N) Ne znam

2. Broj realnih rešenja jednačine $||1-|x||-1|-2=0$ jednak je:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4 (N) Ne znam

3. Dat je kompleksan broj $z = \dfrac{\sqrt{2016}+i^{2019}}{\sqrt{2016}+i^{2017}}$, $(i^2=-1)$. Tada je izraz $\dfrac{z+\bar{z}}{2}$ (gde je $\bar{z}$ konjugovano kompleksni broj broja z) jednak

(A) $\sqrt{2016}$ (B) $-\sqrt{2016}$ (C) $\frac{2015}{2017}$ (D) $\frac{2016}{2015}$ (E) $\sqrt{2017}$ (N) Ne znam

4. Tetive kruga AB i CD, međusobno su normalne i seku se u tački M tako da je $AM = 3\,\mathrm{cm}$, $MB = 4\,\mathrm{cm}$, $CM = 2\,\mathrm{cm}$ i $MD = 6\,\mathrm{cm}$. Prečnik tog kruga je jednak (u cm):

(A) $8\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{75}$ (C) $\sqrt{65}$ (D) 10 (E) $2\sqrt{38}$ (N) Ne znam

5. U rastućoj aritmetičkoj progresiji od 11 članova, prvi, peti i jedanaesti član čine prva tri člana geometrijske progresije. Ako je prvi član te aritmetičke progresije jednak 24, tada je zbir svih članova te aritmetičke progresije jednak:

(A) 249 (B) 264 (C) 378 (D) 429 (E) 501 (N) Ne znam

6. Ako je $\log_2(\sqrt{3}+1)+\log_2(\sqrt{6}-2)=A$, tada je izraz $\log_{\frac{1}{4}}(\sqrt{3}-1)+\log_{\frac{1}{4}}(\sqrt{6}+2)$ jednak:

(A) $A-1$ (B) $2A$ (C) $2A-4$ (D) $\frac{A}{2}-1$ (E) $\sqrt{6}A$ (N) Ne znam

7. Prvi izvod funkcije $f(x)=\ln\dfrac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x}$ u tački $x_0=1$ jednak je:

(A) $\ln\sqrt{2}$ (B) $\frac{1}{\ln\sqrt{2}}$ (C) $-\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{2}$ (E) 1 (N) Ne znam

8. Date su funkcije $f(x)=\dfrac{x-2016}{x+2016}$ i $g(x)=\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}$. Tada je $f(g(x))$ jednako:

(A) $2016x$ (B) $\frac{x-1}{x+1}$ (C) $\frac{1-x}{1+x}$ (D) $1-2016x$ (E) $2017x$ (N) Ne znam

9. Skup svih vrednosti parametra a $(a\in\mathbb{R}\backslash\{0\})$ tako da koreni x_1 i x_2 kvadratne jednačine $ax^2+ax+1=0$ zadovoljavaju nejednačinu $\dfrac{(x_1+1)^2+(x_2+1)^2}{(x_1-1)^2+(x_2-1)^2}\le 1$, jeste:

(A) $(-\infty,-1)\cup\left\{\frac{1}{4}\right\}$ (B) $(-\infty,0)\cup\left(\frac{2}{5},+\infty\right)$ (C) $\left(0,\frac{2}{5}\right)$

(D) $(-1,0)\cup\left(0,\frac{2}{5}\right)$ (E) $(0,+\infty)$ (N) Ne znam

10. U jednakokrakom trouglu ABC je $AB = AC = b$ i $\sphericalangle BAC = 30^o$. Tada je zbir visina tog trougla jednak:

(A) $b(1+\sqrt{6})$ (B) $\frac{b}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ (C) $\frac{b}{4}(4+\sqrt{2}+\sqrt{6})$
(D) $b(\sqrt{2}+\sqrt{6})$ (E) $b(1+\sqrt{2}+\sqrt{6})$ (N) Ne znam

11. Ako su temena trougla tačke $A(-8,4)$, $B(-2,1)$ i $C(1,-3)$, a ortocentar $H(x_0,y_0)$ tada je vrednost razlike $y_0 - x_0$ jednaka:

(A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4 (E) 8 (N) Ne znam

12. U razvoju binoma $\left(\sqrt[3]{a}+\frac{1}{\sqrt[6]{a}}\right)^n$ $(a>0,\ n\in\mathbb{N})$ zbir prva tri binomna koeficijenta je 121. Član koji sadrži $\frac{1}{a}$ jednak je:

(A) $\frac{12}{a}$ (B) $\frac{560}{a}$ (C) $\frac{455}{a}$ (D) $\frac{322}{a}$ (E) $\frac{155}{a}$ (N) Ne znam

13. Ako je polinom $x^{2016}+x^{2015}-x^{2014}+ax^{2013}-bx^2+c$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ deljiv polinomom x^3-x, tada je zbir $4a^2+3b^2+8c^2$ jednak:

(A) 4 (B) 3 (C) 12 (D) 15 (E) 18 (N) Ne znam

14. Dat je kvadar $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Dužine dijagonala strana ovog kvadra su 7, 8 i 9. Susedna temena temenu B su A, C i B_1. Dužina visine iz temena B piramide $ABCB_1$ jednaka je:

(A) $\frac{12}{\sqrt{5}}$ (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{2\sqrt{55}}{5}$ (D) 3 (E) 5 (N) Ne znam

15. Ukupan broj realnih rešenja sistema jednačina $\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{y}+1$, $x-y=2$, jednak je:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4 (N) Ne znam

16. Skup svih realnih rešenja nejednačine $\frac{|\log_3|2x+3||-3}{\log_3 x}>0$ je oblika (za neke realne brojeve a,b,c,d takve da je $0<a<b<c<d<+\infty$):

(A) (a,b) (B) $(a,b]\cup[c,d]$ (C) $(a,b)\cup(b,c)$
(D) $(a,b)\cup(c,+\infty)$ (E) $(a,b)\cup(b,c)\cup(d,+\infty)$ (N) Ne znam

17. Na polici se nalazi 5 knjiga na engleskom, 7 na španskom i 8 na francuskom jeziku. Sve knjige su međusobno različite. Na koliko načina možemo rasporediti knjige ako sve napisane na francuskom jeziku moraju biti jedna do druge?

(A) $13!\cdot 8!$ (B) $13\cdot 8!$
(C) $13\cdot\binom{12}{5}+7!\cdot 8!$ (D) $\binom{20}{7}\cdot\binom{13}{8}\cdot 5!$
(E) Nijedan od prethodno ponuđenih odgovora (N) Ne znam

18. Zbir svih realnih rešenja jednačine $2\sqrt{x}\cdot 4^x+5\cdot 1^{x+1}+2\sqrt{x}=2^{2x+2}+5\sqrt{x}\cdot 2^x+4$ je:

(A) 5 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4 (N) Ne znam

19. Izvodnice prave kružne kupe nagnute su prema ravni osnove kupe pod uglom α, a u kupu je upisana lopta. Vrednost $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ tako da odnos V_l/V_k (zapremine lopte i zapremine kupe) ima najveću moguću vrednost, jednaka je:

(A) 3 (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (E) $\sqrt{3}$ (N) Ne znam

20. Ukupan broj realnih rešenja jednačine $\cos x+\cos 2x+2\cos^2\frac{3x}{2}+\cos 4x=\frac{1}{2}$ na segmentu $[0,2\pi]$ jednak je:

(A) 2 (B) 5 (C) 6 (D) 9 (E) 8 (N) Ne znam

REŠENJA

1.Ⓒ

$$0.5^{1.5}\cdot 0.25^{0.5}\cdot 8^{-1.5}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 8^{-\frac{3}{2}}=2^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(2^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(2^{3}\right)^{-\frac{3}{2}}=2^{-\frac{3}{2}-1-\frac{9}{2}}=2^{-\frac{14}{2}}=\frac{1}{2^7}.$$

2.Ⓒ Uzimajući u obzir da prema definiciji apsolutne vrednosti važi

$$|x|=a \iff x=\pm a \text{ i } |x|\geq 0$$

iz zadate jednačine sledi

$$||1-|x||-1|-2=0 \iff ||1-|x||-1|=2 \iff |1-|x||-1=\pm 2$$

te imamo dve mogućnosti

1. $|1-|x||-1=-2$:
$$|1-|x||-1=-2 \iff |1-|x||=-1$$
što je u kontradikciji sa uslovom $|1-|x||\geq 0$, te u ovom slučaju jednačina nema realnih rešenja: $x\in\emptyset$.
2. $|1-|x||-1=2$:
$$|1-|x||-1=2 \iff |1-|x||=3 \iff 1-|x|=\pm 3 \iff |x|=1\mp 3$$
$$|x|=\begin{cases}1-3=-2\\ 1+3=4\end{cases}$$
Jednačina $|x|=-2$ nema realnih rešenja jer je $|x|\geq 0$

Jednačina $|x|=4$ ima dva rešenja $x=\pm 4$

Dakle, ukupan broj realnih rešenja zadate jednačine je 2.

3.Ⓒ

$$z=\frac{\sqrt{2016}+i^{2019}}{\sqrt{2016}+i^{2017}}$$

Važe sledeće relacije

$$i^{2019}=i\cdot i^{2018}=i\cdot(i^2)^{1009}=i\cdot(-1)^{1009}=-i$$

$$i^{2017}=\frac{i^{2019}}{i^2}=\frac{-i}{-1}=i$$

te dalje sledi

$$z=\frac{\sqrt{2016}+i^{2019}}{\sqrt{2016}+i^{2017}}=\frac{\sqrt{2016}-i}{\sqrt{2016}+i}=\frac{(\sqrt{2016}-i)^2}{(\sqrt{2016}+i)(\sqrt{2016}-i)}$$

odnosno,

$$z=\frac{2016-2i\sqrt{2016}+i^2}{2016-i^2}=\frac{2015-2i\sqrt{2016}}{2017}$$

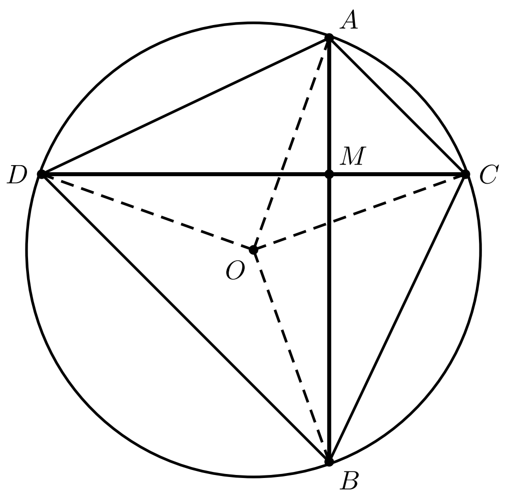
Za kompleksno konjugovanu vrednost se sada ima

$$\bar{z}=\frac{2015+2i\sqrt{2016}}{2017}$$

te sledi

$$\frac{z+\bar{z}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{2015-2i\sqrt{2016}}{2017}+\frac{2015+2i\sqrt{2016}}{2017}\right)=\frac{1}{2}\frac{2\cdot 2015}{2017}=\frac{2015}{2017}.$$

4.Ⓒ Na slici su šematski prikazane međusobno normalne tetive AB i CD koje se seku u tački M tako da je prema uslovima zadatka $AM = 3$, $MB = 4$, $CM = 2$ i $MD = 6$. Neka je poluprečnik kruga $R = OA = OB = OC = OD$.



Primenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao AMD dobijamo

$$AD^2 = AM^2 + MD^2 = 3^2 + 6^2 = 45 \Rightarrow AD = 3\sqrt{5}$$

dok za pravougli trougao BMD imamo

$$BD^2 = MB^2 + MD^2 = 4^2 + 6^2 = 52 = 4 \cdot 13 \Rightarrow BD = 2\sqrt{13}$$

Za centralni ugao $\sphericalangle AOB$ nad tetivom AB i periferni ugao $\sphericalangle ADB$ nad istom tetivom AB važi relacija

$$\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ADB = 2\alpha$$

Uzimajući u obzir da je $AB = AM + MB = 7$, na osnovu kosinusne teoreme za trougao ADB dobijamo

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2 \cdot AD \cdot BD \cdot \cos \sphericalangle ADB$$

$$7^2 = 45 + 52 - 2 \cdot 3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{13} \cos\alpha \iff 12\sqrt{65}\cos\alpha = 48 \iff \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{65}}$$

Primenom kosinusne teoreme na jednakokraki trougao AOB imamo

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \sphericalangle AOB$$

$$AB^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos 2\alpha = 2R^2(1 - \cos 2\alpha) = 2R^2(1 - (2\cos^2\alpha - 1)) = 4R^2(1 - \cos^2\alpha)$$

Kako je $D = 2R$, za prečnik kruga se iz prethodnog izraza dobija

$$D^2 = \frac{AB^2}{1 - \cos^2\alpha} = \frac{7^2}{1 - \frac{16}{65}} = \frac{7^2}{\frac{49}{65}} = 65$$

$$D = \sqrt{65}.$$

5.Ⓓ Prvi, peti i jedanaesti član aritmetičke progresije

$$a_n = a_1 + (n-1)d,\ n = 2, 3, 4, \ldots$$

formiraju, prema uslovu zadatka, prva tri člana geometrijske progresije

$$b_n = b_1 q^{n-1}, n = 2, 3, 4, \ldots$$

te važi

$$b_1 = a_1$$

$$b_2 = a_5 \Rightarrow a_1 q = a_1 + 4d \iff q = 1 + \frac{4d}{a_1}$$

$$b_3 = a_{11} \Rightarrow a_1 q^2 = a_1 + 10d$$

Iz poslednje dve jednačine dalje sledi

$$a_1\left(1 + \frac{4d}{a_1}\right)^2 = a_1 + 10d \iff a_1\left(1 + \frac{8d}{a_1} + \frac{16d^2}{a_1^2}\right) = a_1 + 10d$$

$$2d(8d - a_1) = 0$$

i kako je $d \neq 0$

$$8d = a_1 \iff d = \frac{a_1}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

Za zbir članova aritmetičke progresije sada imamo

$$\begin{aligned}S_{11} &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{11}\\ &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + 10d)\\ &= 11a_1 + d(1 + 2 + \cdots + 10)\\ &= 11a_1 + d\frac{11 \cdot 10}{2} = 11a_1 + 55d = 11 \cdot 24 + 55 \cdot 3 = 429.\end{aligned}$$

6.Ⓓ Kako je

$$\begin{aligned}\sqrt{3} - 1 &= \frac{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{3} + 1} = \frac{3 - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{2}{\sqrt{3} + 1}\\ \sqrt{6} + 2 &= \frac{(\sqrt{6} + 2)(\sqrt{6} - 2)}{\sqrt{6} - 2} = \frac{6 - 4}{\sqrt{6} - 2} = \frac{2}{\sqrt{6} - 2}\end{aligned}$$

to sledi

$$\log_{\frac{1}{4}}(\sqrt{3} - 1) = \frac{\log_2(\sqrt{3} - 1)}{\log_2 4^{-1}} = \frac{\log_2 \frac{2}{\sqrt{3}+1}}{\log_2 2^{-2}} = \frac{\log_2 2 - \log_2(\sqrt{3} + 1)}{-2} = \frac{1}{2}\Big(\log_2(\sqrt{3} + 1) - 1\Big)$$

$$\log_{\frac{1}{4}}(\sqrt{6} + 2) = \frac{\log_2(\sqrt{6} + 2)}{\log_2 4^{-1}} = \frac{\log_2 \frac{2}{\sqrt{6}-2}}{\log_2 2^{-2}} = \frac{\log_2 2 - \log_2(\sqrt{6} - 2)}{-2} = \frac{1}{2}\Big(\log_2(\sqrt{6} - 2) - 1\Big)$$

te za zadati izraz dobijamo

$$\begin{aligned}\log_{\frac{1}{4}}(\sqrt{3} - 1) + \log_{\frac{1}{4}}(\sqrt{6} + 2) &= \frac{1}{2}\Big(\log_2(\sqrt{3} + 1) - 1\Big) + \frac{1}{2}\Big(\log_2(\sqrt{6} - 2) - 1\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\log_2(\sqrt{3} + 1) + \log_2(\sqrt{6} - 2)\Big) - 1\\ &= \frac{1}{2}A - 1\end{aligned}$$

gde je po uslovu zadatka

$$A = \log_2(\sqrt{3} + 1) + \log_2(\sqrt{6} - 2).$$

7.Ⓓ

$$f(x) = \ln \frac{x^2 - 1 + \sqrt{x^4 + 1}}{x} = g(h(x))$$

gde je

$$g(h) = \ln h$$

i

$$h(x) = \frac{x^2 - 1 + \sqrt{x^4 + 1}}{x} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$u(x) = x^2 - 1 + \sqrt{x^4 + 1}$$

$$v(x) = x$$

Koristimo lančano pravilo izvoda funkcije

$$f(x) = g(h(x)) \Rightarrow f'(x) = g'(h) \cdot h'(x)$$

gde je

$$g'(h) = (\ln h)' = \frac{1}{h} = \frac{x}{x^2 - 1 + \sqrt{x^4 + 1}}$$

Dalje koristimo formulu za izvod količnika dve funkcije

$$h(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow h'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{v^2(x)}$$

gde je

$$v'(x) = x' = 1$$

$$\begin{aligned}
u'(x) &= \left(x^2-1+\sqrt{x^4+1}\right)' \\
&= \left(x^2\right)' + \left(\sqrt{x^4+1}\right)' \\
&= 2x + \frac{1}{2\sqrt{x^4+1}}\cdot\left(x^4+1\right)' \\
&= 2x + \frac{1}{2\sqrt{x^4+1}}\cdot 4x^3 = 2x + \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+1}}
\end{aligned}$$

pri čemu smo iskoristili $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ i gornje navedeno lančano pravilo.

Vraćanjem nazad u izraz za $h'(x)$ dobijamo

$$h'(x) = \frac{\left(2x+\frac{2x^3}{2\sqrt{x^4+1}}\right)x - \left(x^2-1+\sqrt{x^4+1}\right)}{x^2}$$

odnosno

$$\begin{aligned}
f'(x) = g'(h)\cdot h'(x) &= \frac{x}{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}\cdot\frac{\left(2x+\frac{2x^3}{\sqrt{x^4+1}}\right)x-\left(x^2-1+\sqrt{x^4+1}\right)}{x^2} \\
&= \frac{2x+\frac{2x^3}{\sqrt{x^4+1}}}{x^2-1+\sqrt{x^4+1}} - \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

te je vrednost izvoda u tački $x = x_0 = 1$

$$f'(1) = \frac{2+\frac{2}{\sqrt{2}}}{1-1+\sqrt{2}} - \frac{1}{1} = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2}.$$

8.Ⓒ

$$f(x) = \frac{x-2016}{x+2016}$$

$$g(x) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)} = \frac{1-\frac{x-2016}{x+2016}}{1+\frac{x-2016}{x+2016}} = \frac{x+2016-(x-2016)}{x+2016+x-2016} = \frac{2\cdot 2016}{2\cdot x} = \frac{2016}{x}$$

$$f(g(x)) = f\left(\frac{2016}{x}\right) = \frac{\frac{2016}{x}-2016}{\frac{2016}{x}+2016} = \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1} = \frac{1-x}{1+x}.$$

9.Ⓑ Ako su x_1 i x_2 koreni jednačine

$$ax^2+ax+1=0 \iff x^2+x+\frac{1}{a}=0,\ a\neq 0$$

tada važi

$$x^2+x+\frac{1}{a} = (x-x_1)(x-x_2) = x^2-(x_1+x_2)+x_1x_2$$

te izjednačavanjem koeficijenata polinoma sa leve i desne strane jednačine dobijamo

$$x_1+x_2=-1 \text{ i } x_1x_2=\frac{1}{a}$$

Sada se za levu stranu zadate nejednačine ima

$$\begin{aligned}
\frac{(x_1+1)^2+(x_2+1)^2}{(x_1-1)^2+(x_2-1)^2} &= \frac{x_1^2+2x_1+1+x_2^2+2x_2+1}{x_1^2-2x_1+1+x_2^2-2x_2+1} \\
&= \frac{x_1^2+x_2^2+2(x_1+x_2)+2}{x_1^2+x_2^2-2(x_1+x_2)+2} \\
&= \frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+2(x_1+x_2)+2}{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-2(x_1+x_2)+2} \\
&= \frac{1-\frac{2}{a}-2+2}{1-\frac{2}{a}+2+2} = \frac{1-\frac{2}{a}}{5-\frac{2}{a}} = \frac{a-2}{5a-2}
\end{aligned}$$

te nejednačina postaje

$$\frac{(x_1+1)^2+(x_2+1)^2}{(x_1-1)^2+(x_2-1)^2} \le 1 \Rightarrow \frac{a-2}{5a-2} \le 1$$

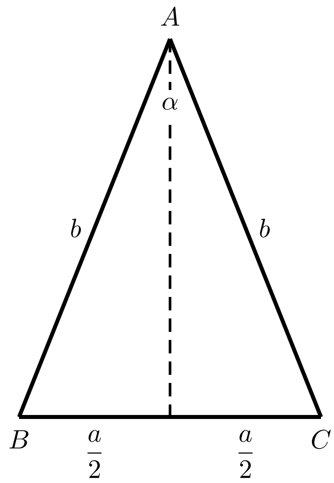
$$\frac{a-2}{5a-2} - 1 \le 0 \iff \frac{a-2-5a+2}{5a-2} \le 0 \iff \frac{-4a}{5a-2} \le 0 \iff \frac{a}{5a-2} \ge 0$$

Znaci u brojiocu i imeniocu izraza u racionalnoj funkciji sa leve strane nejednakosti su dati u tabeli ispod, odakle se za rešenje ove nejednačine (uz početni uslov $a \neq 0$) dobija

$$a \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{5}, +\infty\right).$$

$a \in$	$(-\infty, 0)$	0	$\left(0, \frac{2}{5}\right)$	$\frac{2}{5}$	$\left(\frac{2}{5}, +\infty\right)$
sign(a)	$-$	0	$+$	$+$	$+$
sign$(5a-2)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
LHS	$+$	0	$-$	∞	$+$

10.Ⓒ Na slici je prikazan jednakokraki trougao ABC sa uglom $\sphericalangle BAC = \alpha = 30^{\circ}$, kracima $AB = AC = b$ i osnovicom $BC = a$. Za površinu ovog trougla važi



$$P = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \sphericalangle BAC = \frac{1}{2} b^2 \sin\alpha = \frac{1}{2} b^2 \sin 30^{\circ} = \frac{1}{4} b^2$$

odnosno, kako je $\sphericalangle ABC = \frac{1}{2}(180^{\circ} - \alpha) = 75^{\circ}$,

$$P = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin \sphericalangle ABC = \frac{1}{2} ab \sin 75^{\circ}$$

i kako je

$$\begin{aligned} \sin 75^{\circ} &= \sin(30^{\circ} + 45^{\circ}) \\ &= \sin 30^{\circ} \cos 45^{\circ} + \sin 45^{\circ} \cos 30^{\circ} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right) \end{aligned}$$

to iz prethodne jednačine sledi

$$P = \frac{1}{2} ab \cdot \frac{1}{4}\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right) = \frac{1}{8} ab \left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$$

Sada iz jednačina za površinu trougla ABC dobijamo

$$\frac{1}{8} ab \left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right) = \frac{1}{4} b^2 \Rightarrow a = \frac{2b}{\sqrt{2} + \sqrt{6}}$$

Ako su h_a i h_b dužine visina trougla nad osnovicom a i kracima b, to se za površinu trougla takođe imaju izrazi

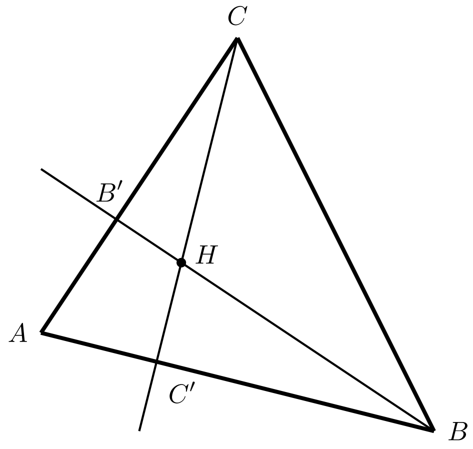
$$P = \frac{1}{2} a h_a \Rightarrow h_a = \frac{2P}{a} = \frac{\frac{b^2}{2}}{\frac{2b}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}} = \frac{b}{4}\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$$

$$P = \frac{1}{2} b h_b \Rightarrow h_b = \frac{2P}{b} = \frac{b}{2}$$

te je zbir visina ovog trougla jednak:

$$2h_b + h_a = b + \frac{b}{4}\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right) = \frac{b}{4}\left(4 + \sqrt{2} + \sqrt{6}\right).$$

11. A Na slici je prikazan trougao ABC sa ortocentrom u tački H u kojoj se seku visine ovog trougla (na slici su prikazane samo visine nad stranicama AB i AC).



Ako poznajemo koordinate tačaka $A(-8,4)$, $B(-2,1)$ i $C(1,-3)$, položaj ortocentra možemo naći na sledeći način.

AB:

Koeficijent nagiba prave AB dat je jednačinom

$$k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-4}{-2+8} = -\frac{1}{2}$$

Prava CC' je normalna na pravu AB te je njen koeficijent nagiba

$$k_c = -\frac{1}{k_{AB}} = 2$$

kako ova prava prolazi kroz tačku $C(1,-3)$, to za njenu jednačinu važi

$$y = k_c x + n_c \Rightarrow -3 = 2\cdot 1 + n_c \iff n_c = -5$$

$$CC' : y = 2x - 5$$

AC:

Koeficijent nagiba prave AC dat je izrazom

$$k_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-3-4}{1+8} = -\frac{7}{9}$$

Prava BB' je normalna na pravu AC te je njen koeficijent nagiba

$$k_b = -\frac{1}{k_{AC}} = \frac{9}{7}$$

kako ova prava prolazi kroz tačku $B(-2,1)$, to za njenu jednačinu važi

$$y = k_b x + n_b \Rightarrow 1 = \frac{9}{7}\cdot(-2) + n_b \iff n_b = \frac{25}{7}$$

$$BB' : y = \frac{9}{7}x + \frac{25}{7}$$

H:

Ortocentar se nalazi u preseku pravih BB' i CC', koji se dobija rešavanjem sistema jednačina ovih dveju pravih

$$2x_0 - 5 = \frac{9}{7}x_0 + \frac{25}{7} \iff 14x_0 - 35 = 9x_0 + 25 \iff 5x_0 = 60 \iff x_0 = 12$$

$$y_0 = 2x_0 - 5 = 2\cdot 12 - 5 = 19$$

Sada je tražena vrednost $y_0 - x_0 = 19 - 12 = 7$.

---

12. C Izraz za razvoj binoma n-tog stepena je

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

Prema uslovu zadatka, zbir prva tri binomna koeficijenta jednak je 121:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 121 \iff 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 121$$

$$n^2 + n - 240 = 0 \iff n_{1,2} = \frac{-1 + \sqrt{-1+4\cdot 240}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{961}}{2} = \frac{-1 \pm 31}{2}$$

jedino pozitivno rešenje ove kvadratne jednačine je $n = 15$.

U našem slučaju je

$$x = \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt[6]{a}} = a^{-\frac{1}{6}}$$

te se za $k-$ti član u razvoju binoma dobija

$$\binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \binom{15}{k} \cdot a^{\frac{15-k}{3}} \cdot a^{-\frac{k}{6}} \binom{15}{k} a^{5-\frac{k}{2}}$$

Tražimo k za koje član u razvoju binoma sadrži a^{-1}, dakle,

$$a^{5-\frac{k}{2}} = a^{-1} \iff 5 - \frac{k}{2} = -1 \iff k = 12$$

odakle se za ovaj član dobija

$$\binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \binom{15}{12} a^{-1} = \binom{15}{3} a^{-1} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2} a^{-1} = 455a^{-1}.$$

13.Ⓐ Ako je polinom $P(x) = x^{2016} + x^{2015} - x^{2014} + ax^{2013} - bx^2 + c$ deljiv polinomom $x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$, onda postoji polinom $Q(x)$ takav da važi

$$P(x) = x(x-1)(x+1)Q(x)$$

Iz prethodne relacije sledi

$$P(0) = 0,\ P(-1) = 0,\ P(1) = 0$$

Sada iz izraza za polinom $P(x)$ dobijamo sledeće jednačine

$$P(0) = c = 0$$

$$P(1) = 1 + 1 - 1 + a - b + c = 0 \Rightarrow a - b = -1$$

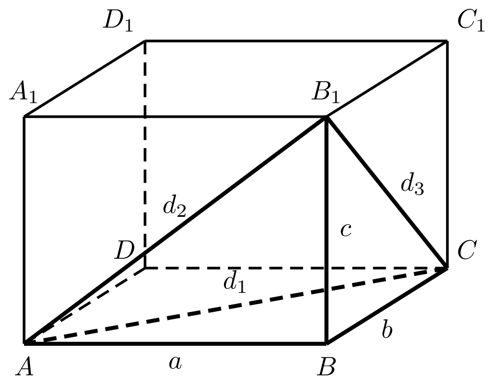
$$P(-1) = 1 - 1 - 1 - a - b + c = 0 \Rightarrow a + b = -1$$

čijim rešavanjem nalazimo $a = -1$ i $b = 0$.

Dakle,

$$4a^2 + 3b^2 + 8c^2 = 4.$$

14.Ⓒ Na slici je prikazan kvadar $ABCDA_1B_1C_1D_1$ sa stranama čije su dijagonale dužine $d_1 = AC = 9$, $d_2 = AB_1 = 8$, $d_3 = B_1C = 7$. Površina trougla AB_1C koji je osnova piramide BAB_1C se može izračunati korišćenjem izraza



$$P_{AB_1C} = \sqrt{s(s-d_1)(s-d_2)(s-d_3)}$$

gde je

$$s = \frac{1}{2}(d_1 + d_2 + d_3) = \frac{1}{2}(9 + 8 + 7) = 12$$

$s - d_1 = 12 - 9 = 3$, $s - d_2 = 12 - 8 = 4$, $s - d_3 = 12 - 7 = 5$

Sada je

$$P_{AB_1C} = \sqrt{12 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 12\sqrt{5}$$

Ako je H_B visina piramide iz temena B nad osnovom AB_1C, tada se zapremina ove piramide može izraziti preko

$$V = \frac{1}{3} P_{AB_1C} \cdot H_B = \frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{5} \cdot H_B = H_B \cdot 4\sqrt{5}$$

Zapremina ove piramide se može izraziti i preko površine osnove pravouglog trougla ABC i visine BB_1. Ako označimo $AB = a$, $BC = b$ i $BB_1 = c$, to se za zapreminu piramide dobija

$$V = \frac{1}{3}P_{ABC}H = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}abc = \frac{1}{6}abc$$

Iz Pitagorine teoreme primenjene na pravougle trouglove ABC, ABB_1 i BCB_1 dobijamo jednačine

$$d_1^2 = a^2 + b^2$$

$$d_2^2 = a^2 + c^2$$

$$d_3^2 = b^2 + c^2$$

Sabiranjem ovih triju jednačina dobijamo

$$2(a^2+b^2+c^2) = d_1^2+d_2^2+d_3^2 \iff a^2+b^2+c^2 = \frac{1}{2}(d_1^2+d_2^2+d_3^2)$$

$$a^2+b^2+c^2 = \frac{1}{2}(81+64+49) = 97$$

Sada je

$$a^2 = (a^2+b^2+c^2) - d_3^2 = 97-49 = 48 \Rightarrow a = 4\sqrt{3}$$

$$b^2 = (a^2+b^2+c^2) - d_2^2 = 97-64 = 33 \Rightarrow b = \sqrt{33}$$

$$c^2 = (a^2+b^2+c^2) - d_1^2 = 97-81 = 16 \Rightarrow c = 4$$

te se za zapreminu dobija

$$V = \frac{1}{6}abc = \frac{1}{6}\cdot 16\sqrt{3}\cdot\sqrt{33} = 8\sqrt{11}$$

što uz prethodno dobijenu jednačinu

$$V = H_B \cdot 4\sqrt{5}$$

daje sledeću vrednost za traženu visinu

$$H_B = \frac{V}{4\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{11}}{4\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{11}\cdot\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{55}}{5}.$$

15.Ⓑ

$$\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{y} = 1$$

$$x - y = 2$$

Uvođenjem smene

$$\sqrt{x-1} = u \geq 0 \Rightarrow x = u^2+1$$

$$\sqrt[3]{y} = v \Rightarrow y = v^3$$

ovaj sistem jednačina postaje

$$u + v = 1 \iff u = 1 - v$$

$$u^2 + 1 - v^3 = 2 \iff u^2 - v^3 = 1$$

Smenom prve jednačine u drugoj dobijamo sledeću jednačinu po promenljivoj v

$$(1-v)^2 - v^3 = 1 \iff 1 - 2v + v^2 - v^3 = 1 \iff v(v^2 - v + 2) = 0$$

odnosno

$$v = 0 \vee v^2 - v + 2 = 0$$

Kako je diskriminanta kvadratne jednačine $v^2 - v + 2 = 0$ negativna $D = 1 - 4\cdot 2 = -7$, to ova kvadratna jednačina nema realnih rešenja.

Dakle, za jedino realno rešenje zadate jednačine se dobija

$$v = 0, u = 1 - v = 1 \Rightarrow y = v^3 = 0, x = u^2 + 1 = 2.$$

16.Ⓓ Izraz u imeniocu sa leve strane nejednačine

$$\frac{|\log_3|2x+3||-3}{\log_3 x} > 0$$

je definisan za $x > 0, x \neq 1$, te rešenja ove nejednačine tražimo u tom skupu realnih brojeva x.
Za $x > 0$ važi

$$2x+3 > 3 > 0 \Rightarrow |2x+3| = 2x+3$$

odnosno

$$2x+3 > 3 \Rightarrow \log_3|2x+3| = \log_3(2x+3) > \log_3 3 = 1 > 0 \Rightarrow |\log_3|2x+3|| = \log_3(2x+3)$$

te se zadata nejednačina može napisati u sledećem ekvivalentnom obliku

$$\frac{\log_3(2x+3)-3}{\log_3 x} > 0$$

Dalje ispitujemo znake funkcija iz brojioca $P(x) = \log_3(2x+3) - 3$ i imenioca $Q(x) = \log_3 x$ izraza sa leve strane nejednačine:

1. $\text{sign}(P(x))$:

$$P(x) > 0 \iff \log_3(2x+3) - 3 > 0 \iff \log_3(2x+3) > 3 = \log_3 3^3 \iff 2x > 24 \iff x > 12$$

$$P(x) \leq 0 \iff x \leq 12$$

2. $\text{sign}(Q(x))$:

$$Q(x) > 0 \iff \log_3 x > 0 = \log_3 3^0 \iff x > 1$$

$$Q(x) \leq 0 \iff 0 < x < 1$$

U tabeli su prikazani znaci funkcija sa leve strane nejednačine, odakle se uz uslov $x > 0, x \neq 1$ dobija da je rešenje nejednačine oblika

$$x \in (0,1) \cup (12,+\infty).$$

$x \in$	$(0,1)$	1	$(1,12)$	12	$(12,+\infty)$
$\text{sign}(P(x))$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\text{sign}(Q(x))$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\text{sign}(P(x)/Q(x))$	$+$	∞	$-$	0	$+$

17.Ⓐ Imamo pet različitih knjiga na engleskom jeziku (označimo ih sa $e_1e_2\ldots e_5$), osam različitih knjiga na francuskom (označimo ih sa $f_1f_2\ldots f_8$) i sedam različitih knjiga na španskom jeziku (označimo ih sa $s_1s_2\ldots s_7$). Knjige na polici raspoređujemo tako da su knjige na francuskom uvek zajedno. Označimo ovu grupu knjiga sa $f = f_{i_1}f_{i_2}\ldots f_{i_8}$. Takvih različitih grupa ima 8! (permutacije bez ponavljanja). Kako su francuske knjige uvek pojavljuju u grupi f, to sada imamo ukupno 13 elemenata (koje čine 5 engleskih, 7 španskih i jedna grupa francuskih knjiga) koje možemo rasporediti na 13! različitih načina. Kako postoji 8! različitih grupa f, to je ukupan broj na koji je moguće rasporediti knjige da ispunjavaju uslove zadatka

$$8! \cdot 13!.$$

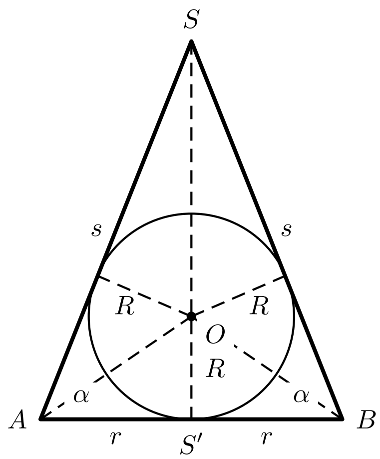
18.Ⓐ Jednačina
$$2\sqrt{x}\cdot 4^x + 5\cdot 2^{x+1} + 2\sqrt{x} = 2^{2x+2} + 5\sqrt{x}\cdot 2^x + 4$$
je definisana u skupu realnih brojeva x za koje izraz pod kvadratnim korenom nije negativan, odnosno za $x \geq 0$. Data jednačina se može preurediti na sledeći način
$$\sqrt{x}\cdot 2^{2x+1} + 5\cdot 2^{x+1} + 2\sqrt{x} = 2^{2x+2} + 5\sqrt{x}\cdot 2^x + 4$$
$$2^{2x+1}(2-\sqrt{x}) - 5\cdot 2^x(2-\sqrt{x}) + 2(2-\sqrt{x}) = 0$$
$$(2-\sqrt{x})\left(2\cdot 2^{2x} - 5\cdot 2^x + 2\right) = 0$$
Sada imamo sledeće mogućnosti

- $2-\sqrt{x} = 0 \iff \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$
- $2\cdot 2^{2x} - 5\cdot 2^x + 2 = 0$

  Uvođenjem smene $t = 2^x > 0$ dobijamo kvadratnu jednačinu po promenljivoj t:
  $$2t^2 - 5t + 2 = 0$$
  čija su rešenja
  $$t_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot 2\cdot 2}}{4} = \frac{5\pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ 2 \end{cases}$$
  te se za x dobija
  $$t = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x = 2^{-1} \iff x = -1$$
  $$t = 2 \Rightarrow 2^x = 2^1 \iff x = 1$$
  Jedino rešenje koje pripada skupu $x \geq 0$ je $x = 1$.

Dakle, jednačina ima dva realna rešenja $x_1 = 4$ i $x_2 = 1$ te je traženi zbir ovih rešenja
$$x_1 + x_2 = 5.$$

19.Ⓑ Na slici je prikazan poprečni presek kroz pravu kupu poluprečnika osnovice r, dužine izvodnice s i visine $H = SS'$ sa upisanom loptom poluprečnika R. Ako je α ugao koji izvodnica kupe s zaklapa sa osnovom, tada važi
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{r} \Rightarrow H = r\operatorname{tg}\alpha$$
te se za zapreminu kupe dobija izraz
$$V_k = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}r^2\pi r\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}r^3\pi\operatorname{tg}\alpha$$
Dalje nalazimo izraz za poluprečnik lopte R u funkciji poluprečnika osnove kupe r i ugla α. Površina jednakokrakog trougla ABS se može izraziti preko dužine osnovice $AB = 2r$ i visine $SS' = H$ na sledeći način
$$P_{ABS} = \frac{1}{2}2rH = rH = r\cdot r\operatorname{tg}\alpha = r^2\operatorname{tg}\alpha$$



Površinu ovog trougla možemo takođe izraziti kao zbir površina trouglova AOB, AOS i BOS od kojih svaki ima visinu R nad odgovarajućim stranicama $AB = 2r$, $AS = s$ i $BS = s$. Sledi
$$P_{ABS} = P_{AOB} + P_{AOS} + P_{BOS} = \frac{1}{2}2rR + \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}sR = R(r+s) = Rr\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)$$
gde za dužinu izvodnice s važi
$$\cos\alpha = \frac{r}{s} \Rightarrow s = \frac{r}{\cos\alpha}$$

Izjednačavanjem ova dva izraza za površinu trougla ABS za poluprečnik lopte dobijamo

$$Rr\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)=r^2\operatorname{tg}\alpha \Rightarrow R=\frac{r\operatorname{tg}\alpha}{\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)}=\frac{r\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{r\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Korišćenjem sledećih trigonometrijskih identiteta

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$1+\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

dalje dobijamo

$$R=\frac{2r\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

Sada za zapreminu lopte imamo

$$V_l=\frac{4}{3}R^3\pi=\frac{4}{3}\pi r^3\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}$$

te se odnos zapremina lopte i kupe može napisati u obliku

$$\frac{V_l}{V_k}=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{3}r^3\pi\operatorname{tg}\alpha}=\frac{4\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Korišćenjem trigonometrijskog identiteta

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}\text{ za } x=y=\frac{\alpha}{2}\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

konačno imamo

$$\frac{V_l}{V_k}=\frac{4\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}{\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}=2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

Sada tražimo maksimalnu vrednost funkcije

$$f(x)=x^2\left(1-x^2\right)=x^2-x^4$$

gde je $x=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ i $0<x<1$.

Funkcija će imati ekstremnu vrednost u tački $x=x_0$ za koju je prvi izvod funkcije jednak nuli. Kako je

$$f'(x)=\left(x^2-x^4\right)'=2x-4x^3=0 \iff x(1-2x^2)=0 \iff x=0\vee x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

jedino pozitivno rešenje gornje jednačine je

$$x=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

i za ovu vrednost $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ je odnos zapremina lopte i kupe maksimalan.

20.Ⓔ Uzimajući u obzir sledeće trigonometrijske identitete

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos 4x = \cos(2\cdot 2x) = 2\cos^2 2x - 1 = 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

$$2\cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x \Rightarrow 2\cos^2 \frac{3x}{2} = 1 + \cos 3x$$

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x\\ &= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x \cos x = 2\cos^3 x - \cos x - 2(1-\cos^2 x)\cos x\\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x\end{aligned}$$

zadata jednačina

$$\cos x + \cos 2x + 2\cos^2 \frac{3x}{2} + \cos 4x = \frac{1}{2}$$

dobija oblik

$$\cos x + \cos 2x + 1 + \cos 3x + \cos 4x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x + 2\cos^2 x - 1 + 1 + 4\cos^3 x - 3\cos x + 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} - 2\cos x - 6\cos^2 x + 4\cos^3 x + 8\cos^4 x = 0$$

$$1 - 4\cos x - 12\cos^2 x + 8\cos^3 x + 16\cos^4 x = 0$$

Uvedimo smenu $t = \cos x$ gde je $x \in [0, 2\pi]$ i $t \in [-1, 1]$. Dobijamo sledeću jednačinu

$$1 - 4t - 12t^2 + 8t^3 + 16t^4 = 0$$

$$1 + 2t - 6t - 12t^2 + 8t^3 + 16t^4 = 0 \iff (1+2t) - 6t(1+2t) + 8t^3(1+2t) = 0 \iff (1+2t)(1-6t+8t^3) = 0$$

odakle sledi

$$1 + 2t_1 = 0 \iff t_1 = -\frac{1}{2}$$

dok kubna jednačina

$$1 - 6t + 8t^3 = 0$$

može imati najviše tri realna rešenja.

Ispitujemo funkciju $f(t) = 8t^3 - 6t + 1$ na intervalu $t \in [-1, 1]$

- Vrednost ove funkcije u tačkama $t = -1, 0, 1$ je

$$f(-1) = -8 + 6 + 1 = -1$$

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 8 - 6 + 1 = 3$$

- Prvi izvod funkcije.

$$f'(t) = \left(8t^3 - 6t + 1\right)' = 24t^2 - 6$$

- Nule prvog izvoda se nalaze u tačkama

$$f'(t) = 24t^2 - 6 = 0 \iff t^2 = \frac{1}{4} \iff t = \pm\frac{1}{2}$$

  Vrednost funkcije u tim tačkama je

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 8\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 6\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = -1 + 3 + 1 = 3$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 8\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 6\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$$

  Dakle u tački $t = -\frac{1}{2}$ funkcija ima maksimalnu, a u tački $t = \frac{1}{2}$ minimalnu vrednost.

- Znak prvog izvoda

  Kako je

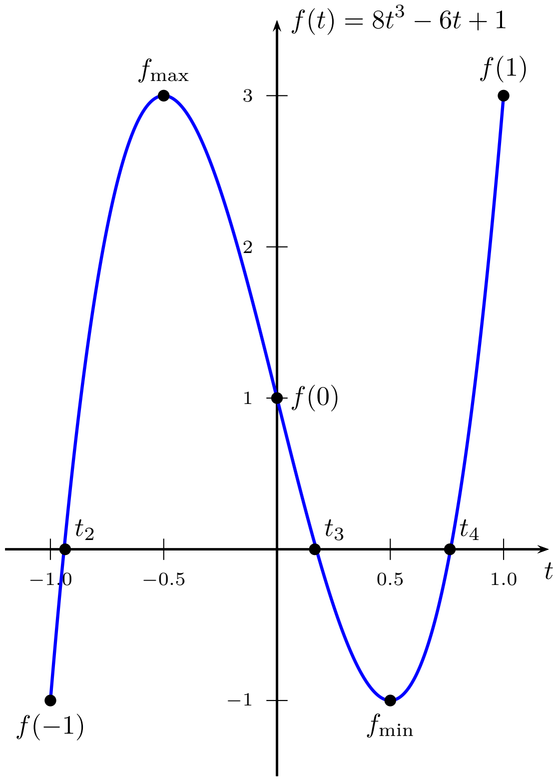
$$f'(t) = 24t^2 - 6 > 0 \text{ za } -1 < t < -\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} < t < 1$$

  u tom intervalu je funkcija rastuća, odnosno kako je

$$f'(t) < 0 \text{ za } -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$$

  na ovom segmentu je funkcija opadajuća

Na osnovu prethodne analize funkcije $f(t)$, funkciju grafički možemo predstaviti kao na sledećoj slici.



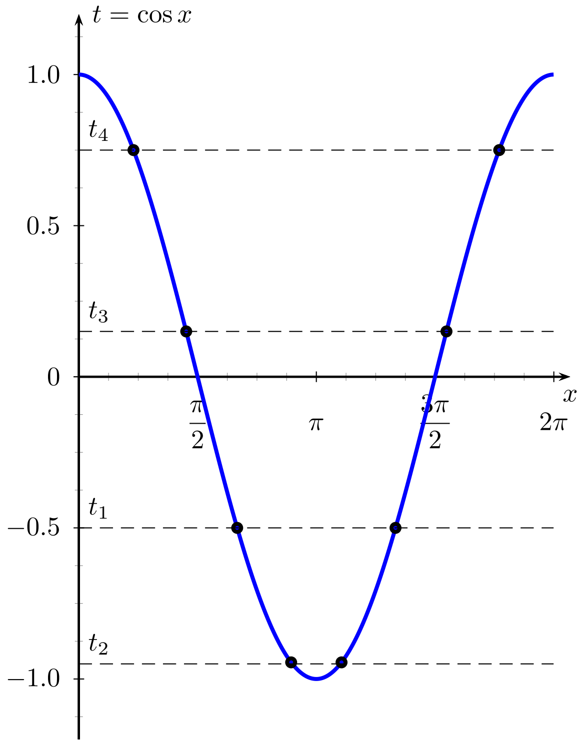
Kako funkcija seče abscisu u tri tačke, to jednačina

$$f(t) = 8t^3 - 6t + 1 = 0$$

ima tri različita realna rešenja t_2, t_3, t_4, odnosno, jednačina

$$(1 + 2t)(1 - 6t + 8t^3) = 0$$

ima ukupno četiri različita realna rešenja t_1, t_2, t_3, t_4. Kako je $t = \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$, to će za svako od ovih rešenja $t_i \in [-1, 1]$ postojati dve vrednosti promenljive x koje zadovoljavaju zadatu jednačinu, te je ukupan broj realnih rešenja x zadate jednačine $2 \cdot 4 = 8$ (videti grafik na sledećoj strani).



$t = \cos x$
1.0
0.5
0
−0.5
−1.0
t_4
t_3
t_1
t_2
x
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE ZA UPIS NA ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

1. Ako je $k \in \mathbb{Z}$ i $0,0010101 \cdot 10^k > 1001$, koja je najmanja moguća vrednost za k?

(A) -6 (B) 5 (C) -5 (D) 6 (E) 0 (N) Ne znam

2. Najkraće rastojanje između pravih $\sqrt{2}x + y = 1$ i $2x + \sqrt{2}y = 3\sqrt{2}$ je:

(A) 2 (B) $\sqrt{2} - 1$ (C) 0 (D) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ (E) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ (N) Ne znam

3. Ako su x_1 i x_2 rešenja kvadratne jednačine $x^2 + x + 1 = 0$, tada su $y_1 = ax_1 + x_2$ i $y_2 = x_1 + ax_2$, $(a \in \mathbb{R})$, rešenja kvadratne jednačine:

(A) $y^2 + (a+1)y - a^2 + a + 1 = 0$ (B) $y^2 + (a^2+1)y + 1 = 0$

(C) $y^2 + (a+1)y + a^2 - a + 1 = 0$ (D) $y^2 + (a^2+1)y + a^2 - a + 1 = 0$

(E) nijedan od ponuđenih odgovora (N) Ne znam

4. Ako je $k \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$, tada je moduo kompleksnog broja $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2015} + \frac{-1+5ki}{3k} - 1$ najmanji za k jednako:

(A) $\frac{3}{5}$ (B) 0 (C) $\frac{1}{3}$ (D) $-\frac{1}{2}$ (E) 3 (N) Ne znam

5. Ako za dijagonale romba važi jednakost $d_1 = (2 - \sqrt{3})d_2$, tada je oštar ugao romba jednak:

(A) 15° (B) 30° (C) 45° (D) 60° (E) 22.5° (N) Ne znam

6. Prav valjak i prava kupa imaju zajedničku osnovu. Vrh kupe je centar druge osnove valjka. Ako je odnos visine valjka i izvodnice kupe $4:5$, tada je odnos površina valjka i kupe jednak:

(A) $3:2$ (B) $7:5$ (C) $4:3$ (D) $8:5$ (E) $7:4$ (N) Ne znam

7. Ako je $a = 0,1^{0,1}$, $b = 0,2^{0,2}$ i $c = 0,3^{0,3}$, tada je

(A) $b < c < a$ (B) $a < b < c$ (C) $b < a < c$ (D) $c < b < a$ (E) $c < a < b$ (N) Ne znam

8. Znajući da je $\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{4}{5}$ i $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, tada je vrednost izraza $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}$ jednaka:

(A) $-\frac{38}{125}$ (B) $\frac{82}{125}$ (C) $\frac{4}{125}$ (D) 1 (E) -1 (N) Ne znam

9. Broj realnih rešenja jednačine $f(x) + f(f(x)) = x$, gde je $f(x) = |x| + a$, $a > 0$, jednak je:

(A) 1 (B) 0 (C) 2 (D) 3 (E) 4 (N) Ne znam

10. Ako je $A = \frac{1}{6}\left((\log_2 3)^3 - (\log_2 6)^3 - (\log_2 12)^3 + (\log_2 24)^3\right)$, tada je vrednost izraza 2^A jednaka:

(A) 1 (B) 36 (C) 72 (D) 144 (E) 64 (N) Ne znam

11. Ukupan broj parova celih brojeva (x, y) takvih da važi $|x^2 - 2x| - y < \frac{1}{2}$ i $y + |x - 1| < 2$ je:

(A) 0 (B) 2 (C) 1 (D) 4 (E) 3 (N) Ne znam

12. Ako se zna da $\frac{14}{9}$ binomnog koeficijenta trećeg člana, binomni koeficijent četvrtog člana i binomni koeficijent petog člana u razvoju binoma $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ $(n \in \mathbb{N},\ x > 0)$, čine geometrijsku progresiju, tada je binomni koeficijent uz $\sqrt{x}$ jednak:

(A) 1 (B) 48 (C) 84 (D) 5 (E) 21 (N) Ne znam

13. Ako je N broj šestocifrenih brojeva koji u svom zapisu sadrže cifru 1 bar na jednom mestu, tada N pripada intervalu:

(A) $[10^5, 2 \cdot 10^5)$ (B) $[2 \cdot 10^5, 3 \cdot 10^5)$
(C) $[3 \cdot 10^5, 4 \cdot 10^5)$ (D) $[4 \cdot 10^5, 5 \cdot 10^5)$
(E) $[5 \cdot 10^5, 6 \cdot 10^5)$ (N) Ne znam

14. Data je aritmetička progresija $a_1, a_2, \ldots$ čija je razlika $d = 1$, a zbir prvih 98 članova $a_1 + a_2 + \cdots + a_{98} = 137$. Tada je zbir $a_2 + a_4 + \cdots a_{98}$ jednak:

(A) 88 (B) 93 (C) 103 (D) 127 (E) 141 (N) Ne znam

15. Skup svih realnih vrednosti x za koje važi nejednakost $\left|4^{3x} - 2^{4x+2} \cdot 3^{x+1} + 20 \cdot 12^x \cdot 3^x\right| \geq 8 \cdot 6^x \left(8^{x-1} + 6^x\right)$ je oblika (za neke realne brojeve a, b, c i d takve da je $-\infty < a < b < c < d < +\infty$):

(A) $(-\infty, a] \cup [b, c] \cup [d, +\infty)$ (B) $(-\infty, a) \cup (d, +\infty)$
(C) $(a, b) \cup \{c\}$ (D) $(-\infty, a) \cup [b, c)$
(E) $(-\infty, a] \cup (b, c)$ (N) Ne znam

16. Broj parova (p, q), $p, q \in \mathbb{R}$ takvih da je polinom $x^4 + px^2 + q$ deljiv polinomom $x^2 + px + q$, jednak je:

(A) 0 (B) 2 (C) 1 (D) 4 (E) 5 (N) Ne znam

17. U jednakokrakom trouglu ABC je $AB = BC = b$, $AC = a$ i $\angle ABC = 20^\circ$. Tada je izraz $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b}{a}$ jednak:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) $\frac{3}{2}$ (E) $\frac{5}{2}$ (N) Ne znam

18. Tangenta krive $y = e^{-x}$ $(x > -1)$, seče koordinatne ose u tačkama A i B. Ako je O koordinatni početak, maksimalna površina trougla OAB iznosi:

(A) $\frac{1}{e}$ (B) $\frac{2}{e}$ (C) $\frac{3}{e}$ (D) e (E) $2e$ (N) Ne znam

19. Jedno od realnih rešenja jednačine $\log_{\cos x} \sin x = 4 \log_{\sin x} \cos x$ pripada intervalu

(A) $\left(0, \frac{\pi}{6}\right]$ (B) $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ (C) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ (D) $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ (E) $\left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$ (N) Ne znam

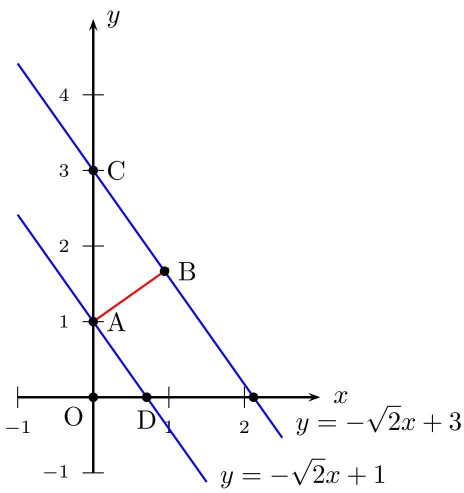
20. Sva realna rešenja jednačine $\frac{x + \sqrt{3}}{\sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{3}}} + \frac{x - \sqrt{3}}{\sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{3}}} = \sqrt{x}$ nalaze se u skupu:

(A) $[\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ (B) $(2\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$ (C) $[3\sqrt{3}, 6)$ (D) $[6, 8)$ (E) $\emptyset$ (N) Ne znam

REŠENJA

1.Ⓓ Kako je
$$0,0010101 \cdot 10^k = 1010.1 \cdot 10^{-6} \cdot 10^k = 1010.1 \cdot 10^{k-6},$$
to se zadata nejednakost može predstaviti u ekvivalentom obliku
$$1010.1 \cdot 10^{k-6} > 1001 \iff 10^{k-6} > \frac{1001}{1010.1}$$
te je najmanja moguća vrednost celog broja k za koji je gornja nejednakost ispunjena: $k = 6$.

2.Ⓓ Jednačine pravih se mogu izraziti ekplicitno na sledeći način
$$y = -\sqrt{2}x + 1$$
$$y = -\sqrt{2}x + 3$$
Sa slike se može videti da su ove dve prave paralelne. Najkraće rastojanje između pravih $\overline{AB}$ se može dobiti iz sličnosti trouglova ABC i AOD:
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{AD}}$$



x-koordinata temena D se može dobiti iz jednačine prave $y = -\sqrt{2}x + 1$ za $y = y_D = 0$ i iznosi
$$x_D = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
Sada za dužinu stranice $\overline{OD}$ imamo
$$\overline{OD} = x_D = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
a korišćenjem Pitagorine teoreme, za dužinu stranice $\overline{AD}$ dobijamo
$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OD}^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$
Kako je $\overline{AC} = 3 - 1 = 2$, to se iz jednačine sličnosti konačno dobija
$$\overline{AB} = \overline{AC}\frac{\overline{OD}}{\overline{AD}} = 2\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

3.Ⓒ Ako su x_1 i x_2 rešenja kvadratne jednačine $x^2+x+1=0$, onda se ova jednačina može predstaviti u sledećem obliku

$$x^2+x+1=(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2$$

odakle se izjednačavanjem koeficijenata sa leve i desne strane jednačine dobija

$$x_1+x_2=-1 \text{ i } x_1x_2=1.$$

Na isti način, za kvadratnu jednačinu sa rešenjima $y_1=ax_1+x_2$ i $y_2=x_1+ax_2$ važi

$$(y-y_1)(y-y_2)=0$$

$$y^2-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$$

$$y^2-(a+1)(x_1+x_2)y+(ax_1+x_2)(x_1+ax_2)=0$$

$$y^2-(a+1)(x_1+x_2)y+(a^2+1)x_1x_2+a(x_1^2+x_2^2)=0$$

Kako je

$$x_1+x_2=-1$$

$$x_1x_2=1$$

i

$$x_1^2+x_2^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-1)^2-2\cdot 1=-1$$

za traženu kvadratnu jednačinu konačno dobijamo

$$y^2+(a+1)y+a^2+1-a=0.$$

4.Ⓐ Važe sledeće relacije

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}=\frac{1+2i-1}{1+1}=i$$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2015}=i^{2015}=i\cdot i^{2014}=i\cdot(i^2)^{1007}=i\cdot(-1)^{1007}=i\cdot(-1)=-i$$

$$\frac{-1+5ki}{3i}=-\frac{1}{3i}+\frac{5k}{3}=\frac{1}{3}i+\frac{5k}{3}$$

Sada se izraz za zadati kompleksni broj može uprostiti

$$z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2015}+\frac{-1+5ki}{3k}-1=-i+\frac{1}{3}i+\frac{5k}{3}-1=\frac{5k}{3}-1-\frac{2}{3}i$$

te se za moduo kompleksnog broja dobija

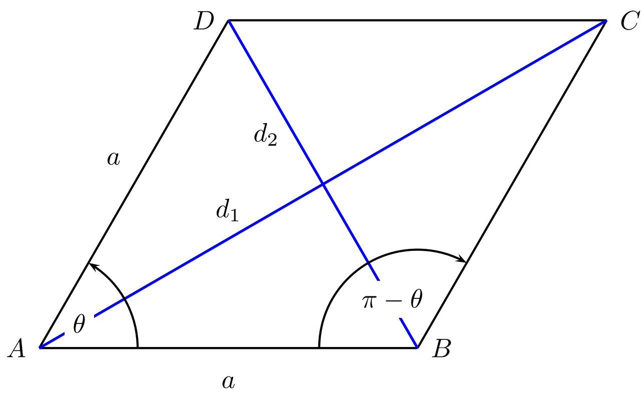
$$|z|=\sqrt{\left(\frac{5k}{3}-1\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

Kako je $\left(\frac{5k}{3}-1\right)^2\geq 0$, to će moduo biti najmanji za

$$\frac{5k}{3}-1=0 \iff k=\frac{3}{5}.$$

5.Ⓑ Primenom kosinusne teoreme na trouglove ABD i ABC dobijamo sledeće izraze za manju i veću dijagonalu romba, respektivno

$$d_2^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cos\theta = 2a^2(1-\cos\theta)$$
$$d_1^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cos(\pi-\theta) = 2a^2 + 2a^2\cos\theta = 2a^2(1+\cos\theta)$$



Odavde dalje sledi

$$\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \left(2-\sqrt{3}\right)^2 = 4+3-4\sqrt{3} = 7-4\sqrt{3}$$

Rešavanjem ove jednačine za $\cos\theta$ dobijamo redom

$$(7-4\sqrt{3})(1+\cos\theta) = 1-\cos\theta \iff 6-4\sqrt{3} = 4(-2+\sqrt{3})\cos\theta$$
$$\cos\theta = -\frac{3-2\sqrt{3}}{2(2-\sqrt{3})} = -\frac{(3-2\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{2(4-3)} = -\frac{6+3\sqrt{3}-4\sqrt{3}-6}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\theta = \frac{\pi}{6} = 30^{\circ}.$$

6.Ⓔ

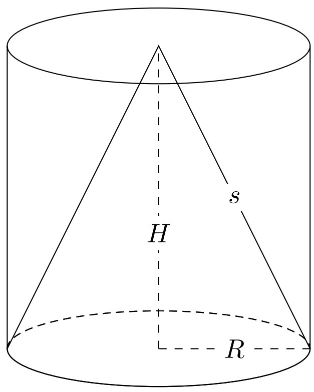
Površina pravog valjka sa slike data je izrazom

$$P_{\mathrm{v}} = 2R^2\pi + 2R\pi H = 2R\pi(R+H)$$

dok je površina kupe koja ima istu osnovu i visinu

$$P_{\mathrm{k}} = R^2\pi + R\pi s = R\pi\left(R + \sqrt{R^2+H^2}\right)$$

gde je $s = \sqrt{R^2+H^2}$ izvodnica kupe.



Odnos površina valjka i kupe jednak je

$$\frac{P_{\mathrm{v}}}{P_{\mathrm{k}}} = \frac{2R\pi(R+H)}{R\pi\left(R+\sqrt{R^2+H^2}\right)} = 2\frac{1+\frac{R}{H}}{\frac{R}{H}+\sqrt{1+\left(\frac{R}{H}\right)^2}}$$

Prema uslovu zadatka odnos visine valjka i izvodnice kupe je 4/5:

$$\frac{4}{5} = \frac{H}{s} = \frac{H}{\sqrt{R^2+H^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{H}\right)^2}}$$

odakle sledi

$$\sqrt{1+\left(\frac{R}{H}\right)^2} = \frac{5}{4} \to 1+\left(\frac{R}{H}\right)^2 = \frac{25}{16} \to \left(\frac{R}{H}\right)^2 = \frac{9}{16} \to \frac{R}{H} = \frac{3}{4}$$

Uvrščavanjem poslednjeg izraza, za odnos površina valjka i kupe ima se

$$\frac{P_{\mathrm{v}}}{P_{\mathrm{k}}} = 2\frac{1+\frac{R}{H}}{\frac{R}{H}+\sqrt{1+\left(\frac{R}{H}\right)^2}} = 2\frac{1+\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}+\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{7}{4}.$$

---

7. Ⓓ Važe sledeće relacije

$$\frac{b}{a} = \frac{0.2^{0.2}}{0.1^{0.1}} = \frac{\left(\frac{2}{10}\right)^{\frac{2}{10}}}{\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{10}}} = \left(\frac{4}{10}\right)^{\frac{1}{10}} < 1 \to b < a$$

$$\frac{c}{b} = \frac{0.3^{0.3}}{0.2^{0.2}} = \frac{\left(\frac{3}{10}\right)^{\frac{3}{10}}}{\left(\frac{2}{10}\right)^{\frac{2}{10}}} = \left(\frac{27}{4}\right)^{\frac{1}{10}} \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{3}{10}}}{\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{2}{10}}} = \left(\frac{27}{40}\right)^{\frac{1}{10}} < 1 \to c < b$$

Iz prethodne dve nejednakosti dobijamo

$$c < b < a$$

---

8. Ⓑ

$$\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos x \underbrace{\cos\frac{3\pi}{2}}_{=0} + \sin x \underbrace{\sin\frac{3\pi}{2}}_{=-1} = -\sin x \to -\sin x = -\frac{4}{5} \to \boxed{\sin x = \frac{4}{5}}$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \to \cos x = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} = \pm\frac{3}{5}$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \to \sin x > 0 \text{ i } \cos x < 0 \to \boxed{\cos x = -\frac{3}{5}}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 1 - \sin^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} \to \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2} \to \sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \to \frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} \to \cos\frac{x}{2} > 0 \text{ i } \sin\frac{x}{2} > 0$$

$$\sin\frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} \to \boxed{\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{4}{5}}}$$

$$\cos\frac{x}{2} = +\sqrt{1-\sin^2\frac{x}{2}} \to \boxed{\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{5}}}$$

$$\cos\frac{5x}{2} = \cos\left(2x + \frac{x}{2}\right) = \cos 2x \cos\frac{x}{2} - \sin 2x \sin\frac{x}{2}$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x = 2\frac{4}{5}\left(-\frac{3}{5}\right) \to \boxed{\sin 2x = -\frac{24}{25}}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} \to \boxed{\cos 2x = -\frac{7}{25}}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{5x}{2} = \cos 2x \cos\frac{x}{2} - \sin 2x \sin\frac{x}{2} = -\frac{7}{25}\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{24}{25}\sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{41}{25}\sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2} = \sqrt{\frac{4}{5}}\frac{41}{25}\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{82}{125}$$

9.Ⓑ

$$f(x) = |x| + a,\ a > 0$$

$$f(f(x)) = f(|x| + a) = ||x| + a| + a$$

Kako je $|x| \geq 0$ i $a > 0$, to sledi $|x| + a > 0$, odnosno $||x| + a| = |x| + a$ pa imamo

$$f(f(x)) = ||x| + a| + a = |x| + 2a$$

Sada jednačina

$$f(x) + f(f(x)) = x$$

postaje

$$|x| + a + |x| + 2a = x \Rightarrow 2|x| + 3a = x$$

Pošto je $a > 0$ i $|x| \geq 0$ to imamo $2|x| + 3a > 0$, pa su jedina moguća rešenja pozitivna, tj. $x > 0$. Za $x > 0$ važi $|x| = x$ te gornja jednačina prima ekvivalentni oblik

$$2x + 3a = x$$

i njeno rešenje je

$$x = -3a$$

Međutim, kako je $a > 0$, to je $x = -3a < 0$, što je u kontradikciji sa gornjim uslovom da su jedina rešenja jednačine pozitivna. To znači da jednačina nema realnih rešenja.

10.Ⓒ Označimo $t = \log_2 3$. Tada važi

$$\log_2 24 = \log_2\left(3 \cdot 2^3\right) = \log_2 3 + 3 = t + 3$$
$$\log_2 12 = \log_2\left(3 \cdot 2^2\right) = \log_2 3 + 2 = t + 2$$
$$\log_2 6 = \log_2\left(3 \cdot 2^1\right) = \log_2 3 + 1 = t + 1$$

te imamo

$$(\log_2 24)^3 = (t+3)^3 = t^3 + 9t^2 + 27t + 27$$
$$(\log_2 12)^3 = (t+2)^3 = t^3 + 6t^2 + 12t + 8$$
$$(\log_2 6)^3 = (t+1)^3 = t^3 + 3t^2 + 3t + 1$$

Sada je

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{6}\left((\log_2 3)^3 - (\log_2 6)^3 - (\log_2 12)^3 + (\log_2 24)^3\right)\\
&= \frac{1}{6}\left(t^3 - (t+1)^3 - (t+2)^3 + (t+3)^3\right)\\
&= \frac{1}{6}\left(t^3 - t^3 - 3t^2 - 3t - 1 - t^3 - 6t^2 - 12t - 8 + t^3 + 9t^2 + 27t + 27\right)\\
&= \frac{1}{6}(12t + 18)\\
&= 2t + 3 = 2\log_2 3 + 3
\end{aligned}$$

te za traženu vrednost izraza dobijamo

$$2^A = 2^{2\log_2 3 + 3} = 2^3 \cdot 2^{2\log_2 3} = 2^3 \cdot \left(2^{\log_2 3}\right)^2 = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72.$$

11.Ⓔ Važi

$$|x^2 - 2x| = |x(x-2)| = \begin{cases} x(x-2), & x > 2 \\ -x(x-2), & 0 < x \leq 2 \\ x(x-2), & x \leq 0 \end{cases}$$

i

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1, & x > 1 \\ -x - 1, & x \leq 1 \end{cases}$$

tako da ćemo tražiti celobrojna rešenja u skupovima

1. $x > 2$
2. $1 < x \leq 2 \Rightarrow x = 2$
3. $0 < x \leq 1 \Rightarrow x = 1$
4. $x \leq 0$

1. Za $x > 2$ nejednačine dobijaju oblik

$$\left.\begin{array}{c}|x^2-2x|-y<\dfrac{1}{2}\\ y+|x-1|<2\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c}x^2-2x-y<\dfrac{1}{2}\\ y+x-1<2\end{array}\right\} \bigoplus \quad x^2-x-\frac{9}{4}<0$$

Koreni jednačine $x^2 - x - \dfrac{9}{4} = 0$ su

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{2}$$

pa su rešenja gornje nejednačine, uzimajući u obzir uslov $x > 2$

$$x \in \left(2, \frac{1+\sqrt{10}}{2}\right)$$

Kako je $\dfrac{1+\sqrt{10}}{2} \approx 2.1$, to u gornjem skupu nema celih brojeva.

2. Za $x = 2$ nejednačine dobijaju oblik

$$\left.\begin{array}{c}|x^2-2x|-y<\dfrac{1}{2}\\ y+|x-1|<2\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c}-y<\dfrac{1}{2}\\ y-1<0\end{array}\right\} \quad -\frac{1}{2}<y<1$$

U ovom slučaju postoji jedan celobrojni par koji je rešenje zadatih nejednačina $(x, y) = (2, 0)$.

3. Za $x = 1$ nejednačine dobijaju oblik

$$\left.\begin{array}{c}|x^2-2x|-y<\dfrac{1}{2}\\ y+|x-1|<2\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c}1-y<\dfrac{1}{2}\\ y<2\end{array}\right\} \quad \frac{1}{2}<y<2$$

u ovom slučaju postoji samo jedan celobrojni par koji ispunjava zadate nejednačine: $(x, y) = (1, 1)$.

4. Za $x \leq 0$ nejednačine dobijaju oblik

$$\left.\begin{array}{c}|x^2-2x|-y<\dfrac{1}{2}\\ y+|x-1|<2\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c}x^2-2x-y<\dfrac{1}{2}\\ y-x+1<2\end{array}\right\} \bigoplus x^2-3x-\frac{3}{2}<0$$

Koreni jednačine $x^2 - 3x - \dfrac{3}{2} = 0$ su

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{15}}{2}$$

pa su rešenja gornje nejednačine, uzimajući u obzir uslov $x \leq 0$

$$x \in \left(\frac{3-\sqrt{15}}{2}, 0\right]$$

Kako je $\dfrac{3-\sqrt{15}}{2} \approx -0.4$, to je jedini ceo broj u ovom skupu $x = 0$

Za $x = 0$ zadate nejednačine postaju

$$\left.\begin{array}{c}|x^2-2x|-y<\dfrac{1}{2}\\ y+|x-1|<2\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c}-y<\dfrac{1}{2}\\ y+1<2\end{array}\right\} \quad -\frac{1}{2}<y<1$$

u ovom slučaju postoji samo jedan celobrojni par koji ispunjava zadate nejednačine: $(x, y) = (0, 0)$.

Dakle, ukupan broj parova celih brojeva takvih da važe zadate nejednakosti je 3:

$$(x, y) = \{(0, 0), (1, 1), (2, 0)\}$$

12.© Razvoj binoma n-tog reda dat je jednačinom

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

gde je binomni koeficijent dat izrazom

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

Binomni koeficijenti trećeg, četvrtog i petog člana u razvoju binoma su dakle

$$\begin{aligned} k_3 &= \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2\cdot 1} \\ k_4 &= \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1} \\ k_5 &= \binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} \end{aligned}$$

Prema uslovu zadatka $\frac{14}{9}k_3, k_4$ i k_5 čine geometrijsku progresiju, tako da važi

$$\frac{k_4}{\frac{14}{9}k_3} = \frac{k_5}{k_4}$$

Kako je

$$\begin{aligned} \frac{k_4}{k_3} &= \frac{n-2}{3} \\ \frac{k_5}{k_4} &= \frac{n-3}{4} \end{aligned}$$

to iz prethodnog izraza dobijamo sledeću jednačinu po nepoznatoj n

$$\frac{n-3}{4} = \frac{n-2}{3}\cdot\frac{9}{14} \iff 42(n-3) = 36(n-2) \iff n = 9$$

Prema uslovu zadatka je $a = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ i $b = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$. Tražimo k za koje je

$$a^{n-k}b^k = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{n-k}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^k = x^{\frac{n-k}{3}-\frac{k}{2}} = x^{\frac{1}{2}}$$

odakle dobijamo

$$\frac{n-k}{3} - \frac{k}{2} = \frac{1}{2} \iff k = \frac{2n-3}{5} = 3$$

pa je binomni koeficijent uz $\sqrt{x}$:

$$\binom{n}{k} = \binom{9}{3} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = 84$$

13.Ⓓ Neka je n ukupan broj svih šestocifrenih brojeva. Kako je najmanji šestocifreni broj $a_1 = 100000$, a najveći $a_n = 999999$, to se za n dobija

$$n = a_n - a_1 + 1 = 1000000 - 100000 = 900000 = 9 \cdot 10^5$$

Izračunajmo ukupan broj šestocifrenih brojeva koji u svom zapisu ne sadrže nijednu cifru "1".

Označimo bilo koji takav broj sa $c_5c_4c_3c_2c_1c_0$.

c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 mogu biti bilo koja od devet cifara $0, 2, 3, \ldots, 9$, dok c_5 može biti bilo koja od osam cifara $2, 3, \ldots, 9$. Odavde sledi da je ukupan broj šestocifrenih brojeva koji u svom zapisu ne sadrže nijednu cifru "1" dat izrazom: $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 = 8 \cdot 9^5$.

Sada je broj šestocifrenih brojeva koji u svom zapisu sadrže barem jednu cifru "1" dat izrazom

$$N = n - 8 \cdot 9^5 = 9 \cdot 10^5 - 8 \cdot 9^5$$

Pošto je

$$8 \cdot 9^5 = 8 \cdot (10-1)^5 = 8(10^5 - 5 \cdot 10^4 + 10 \cdot 10^3 - 10 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 - 1) = 8 \cdot 10^5 - 4 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^4 - 8 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 - 8 \approx 4.8 \cdot 10^5$$

to za N dobijamo približno

$$N \approx 9 \cdot 10^5 - 4.8 \cdot 10^5 = 4.2 \cdot 10^5 \in \left[4 \cdot 10^5, 5 \cdot 10^5\right).$$

14.Ⓑ Prema uslovima zadatka važi

$$a_1 + a_2 \cdots + a_{98} = 137$$
$$d = a_{i+1} - a_i = 1,\ i = 1, 2, \ldots$$

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 - d \\ a_3 &= a_4 - d \\ &\vdots \\ a_{97} &= a_{98} - d \end{aligned}$$

Sabiranjem ovih 49 jednačina dobijamo

$$a_1 + a_3 + \cdots + a_{97} = a_2 + a_4 + \cdots + a_{98} - 49d$$

Uzimajući poslednju relaciju u obzir dalje imamo

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_{98} &= a_1 + a_3 + \cdots + a_{97} + a_2 + a_4 + \cdots + a_{98} \\ &= a_2 + a_4 + \cdots + a_{98} - 49d + a_2 + a_4 + \cdots + a_{98} \\ &= 2(a_2 + a_4 + \cdots + a_{98}) - 49d \end{aligned}$$

odakle konačno sledi

$$\begin{aligned} a_2 + a_4 + \cdots + a_{98} &= \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{98} + 49d) \\ &= \frac{1}{2}(137 + 49) \\ &= 93. \end{aligned}$$

15.Ⓐ Važe sledeće transformacije

$$
\begin{aligned}
4^{3x} - 2^{4x+2} \cdot 3^{x+1} + 20 \cdot 12^x \cdot 3^x &= \left(4^3\right)^x - 2^2 \cdot \left(2^4\right)^x \cdot 3 \cdot 3^x + 20 \cdot 36^x \\
&= 64^x - 4 \cdot (16)^x \cdot 3 \cdot 3^x + 20 \cdot 36^x \\
&= 64^x - 12 \cdot 48^x + 20 \cdot 36^x \\
&= 8^{2x} - 12 \cdot 8^x \cdot 6^x + 20 \cdot 6^{2x}
\end{aligned}
$$

$$8 \cdot 6^x \left(8^{x-1} + 6^x\right) = 6^x \cdot 8^x + 8 \cdot 6^{2x}$$

Tako da se zadata nejednakost može napisati u ekvivalentnom obliku

$$|8^{2x} - 12 \cdot 8^x \cdot 6^x + 20 \cdot 6^{2x}| \geq 6^x \cdot 8^x + 8 \cdot 6^{2x}$$

odnosno, ako podelimo obe strane nejednakosti sa $6^{2x} > 0$

$$\left|\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 12\left(\frac{4}{3}\right)^x + 20\right| \geq \left(\frac{4}{3}\right)^x + 8$$

$$\left|t^2 - 12t + 20\right| \geq t + 8, \quad t = \left(\frac{4}{3}\right)^x > 0$$

Sada imamo dve mogućnosti: 1) $t^2 - 12t + 20 > 0$ i 2) $t^2 - 12t + 20 \leq 0$

1. $t^2 - 12t + 20 > 0$:

   Koreni jednačine $t^2 - 12t + 20 = 0$ su

   $$t_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 20}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 10 \end{cases}$$

   te rešenja treba tražiti u skupu

   $$t \in (-\infty, 2] \cup [10, +\infty)$$

   odnosno, ako uzmemo u obzir da je $t > 0$:

   $$t \in (0, 2] \cup [10, +\infty)$$

   U ovom skupu nejednakost prima oblik

   $$t^2 - 12t + 20 \geq t + 8 \iff t^2 - 13t + 12 \geq 0$$

   Koreni jednačine $t^2 - 13t + 12 = 0$ su

   $$t_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 48}}{2} = \begin{cases} 1 \\ 12 \end{cases}$$

   i rešenja se nalaze u skupu

   $$t \in (-\infty, 1] \cup [12, +\infty) \text{ i } t \in (0, 2] \cup [10, +\infty)$$

   odnosno

   $$t \in (0, 1] \cup [12, +\infty)$$

2. $t^2 - 12t + 20 \leq 0$:

   Rešenja sada treba tražiti u skupu

   $$t \in [2, 10]$$

   U ovom skupu nejednakost prima oblik

   $$-t^2 + 12t - 20 \geq t + 8 \iff t^2 - 11t + 28 \leq 0$$

   Koreni jednačine $t^2 - 11t + 28 = 0$ su

   $$t_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 4 \cdot 28}}{2} = \begin{cases} 4 \\ 7 \end{cases}$$

   i rešenja se nalaze u skupu

   $$t \in [4, 7] \cap t \in [2, 10] \Rightarrow t \in [4, 7]$$

Dakle konačan skup rešenja nejednakosti (uzimajući u obzir slučajeve 1) i 2)) dat je izrazom

$$t \in (0,1] \cup [4,7] \cup [12,+\infty)$$

Uzimajući u obzir da je $t = \left(\frac{4}{3}\right)^x$ i sledeće jednakosti

$$\log_{\frac{4}{3}} 0 = -\infty$$

$$a = \log_{\frac{4}{3}} 1 = 0$$

$$b = \log_{\frac{4}{3}} 4$$

$$c = \log_{\frac{4}{3}} 7$$

$$d = \log_{\frac{4}{3}} 12$$

skup svih realnih vrednosti x za koje važi zadata nejednakost je oblika

$$x \in (-\infty, a] \cup [b,c] \cup [c,+\infty).$$

16.Ⓔ Pri deljenju polinoma $x^4 + px^2 + q$ polinomom $x^2 + px + q$ dobija se količnik

$$Q = x^2 - px + p^2 + p - q$$

i ostatak

$$R = -\frac{\left(p^3 + p^2 - 2pq\right)x + q(p^2 + p - q - 1)}{x^2 + px + q}$$

Da bi polinom bio deljiv, potrebno je da ostatak pri deljenju R bude jednak nuli za sve realne vrednosti x, odnosno da istovremeno važi

$$p^3 + p^2 - 2pq = 0 \text{ i } q(p^2 + p - q - 1) = 0$$

Dakle, imamo sledeći sistem jednačina

$$\left.\begin{array}{l} p(p^2 + p - 2q) = 0 \\ q(p^2 + p - q - 1) = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} p = 0 \vee p^2 + p = 2q \\ q = 0 \vee p^2 + p = q + 1 \end{array}\right\}$$

Dobijamo sledeća rešenja

1. $p = 0,\ q = 0$
2. $p = 0,\ p^2 + p = q + 1 \Rightarrow q = -1$
3. $q = 0,\ p^2 + p = 2q \Rightarrow p(p+1) = 0 \iff p = 0 \vee p = -1$
4. $p^2 + p = 2q,\ p^2 + p = q + 1 \Rightarrow 2q = q + 1 \iff q = 1$

$$p^2 + p - 2 = 0 \iff p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

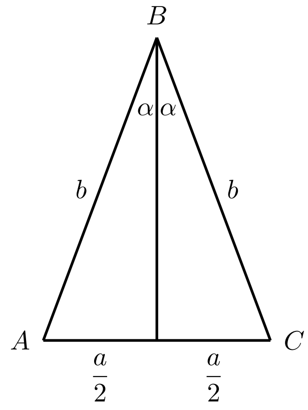
Dakle, za sledećih pet parova (p,q) je polinom $x^4 + px^2 + q$ deljiv polinomom $x^2 + px + q$:

$$(p,q) = \{(0,0), (0,-1), (-1,0), (-2,1), (1,1)\}.$$

17.Ⓒ

Kako je

$$\sin\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = 2\sin\alpha$$



to se dobija

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b}{a} = 4\sin^2\alpha + \frac{1}{2\sin\alpha} = \frac{8\sin^3\alpha + 1}{2\sin\alpha}, \quad \alpha = \frac{\pi}{18}$$

Za $\alpha = \frac{\pi}{18}$ važi

$$\sin 3\alpha = \sin 3\frac{\pi}{18} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

i kako je

$$\begin{aligned}
\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) &= \sin 2\alpha \cos\alpha + \sin\alpha\cos 2\alpha \\
&= 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) \\
&= 2\sin\alpha\left(1 - \sin^2\alpha\right) + \sin\alpha\left(1 - 2\sin^2\alpha\right) \\
&= 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha \\
&= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha
\end{aligned}$$

to dobijamo

$$4\sin^3\alpha = 3\sin\alpha - \frac{1}{2}$$
$$8\sin^3\alpha + 1 = 6\sin\alpha$$

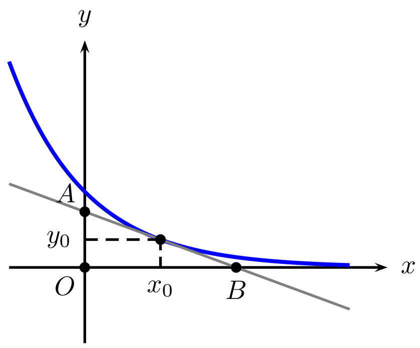
i konačno sledi

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b}{a} = \frac{8\sin^3\alpha + 1}{2\sin\alpha} = \frac{6\sin\alpha}{2\sin\alpha} = 3.$$

18.Ⓑ

Jednačina tangente koja dodiruje krivu $y = e^{-x}$ u tački (x_0, y_0) je

$$y = kx + b$$



gde je

$$k = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = \left.\left(e^{-x}\right)'\right|_{x=x_0} = \left.-e^{-x}\right|_{x=x_0} = -e^{-x_0}$$

U tački dodira (x_0, y_0) za obe krive važi

$$y_0 = kx_0 + b = -e^{-x_0}x_0 + b$$

$$y_0 = e^{-x_0}$$

odakle se za b dobija

$$b = (x_0 + 1)e^{-x_0}$$

te je jednačina tangente

$$y = -xe^{-x_0} + (x_0 + 1)e^{-x_0}$$

Sada se za tačke u kojima tangenta seče koordinatne ose dobija:

A: $x_A = 0 \Rightarrow y_A = -0 \cdot e^{-x_0} + (x_0 + 1)e^{-x_0} = (x_0 + 1)e^{-x_0}$

B: $y_B = 0 \Rightarrow x_B = x_0 + 1$

te se površina trougla OAB može izraziti u obliku

$$P = \frac{1}{2}y_A x_B = \frac{1}{2}(x_0 + 1)^2 e^{-x_0}$$

Površina trougla će biti maksimalna kada je izvod gornje funkcije po x_0 jednak nuli

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x_0} = \frac{1}{2}\left(2(x_0+1)e^{-x_0} - (x_0+1)^2e^{-x_0}\right) = \frac{1}{2}(1+x_0)(1-x_0)e^{-x_0} = 0$$

odakle se dobija

$$x_0 = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$$

Kako je prema uslovima zadatka $x > -1$, to je jedino rešenje $x_0 = 1$.

Površina trougla je tada maksimalna i iznosi

$$P_{\max} = \frac{1}{2}(x_0+1)^2e^{-x_0} = \frac{1}{2}(1+1)^2e^{-1} = \frac{2}{e}.$$

19.Ⓑ Važe sledeće ekvivalentne jednakosti

$$\log_{\cos x}\sin x = 4\log_{\sin x}\cos x$$

$$\frac{\log\sin x}{\log\cos x} = 4\frac{\log\cos x}{\log\sin x}$$

$$(\log\sin x)^2 = (2\log\cos x)^2$$

U skupu realnih brojeva, argument logaritamske funkcije mora biti pozitivan odnosno $\sin x, \cos x > 0$. Istovremeno važi $\sin x, \cos x \leq 1$ pa je $\log\sin x \leq 0$ i $\log\cos x \leq 0$. Uzimanjem kvadratnog korena leve i desne strane gornje jednačine dalje dobijamo

$$\log\sin x = 2\log\cos x = \log\cos^2 x$$

$$\sin x = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

Smenom $t = \sin x$ prethodna jednačina postaje

$$t^2 + t - 1 = 0$$

i njena rešenja su

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Kako je

$$t_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < -1$$

i $t = \sin x \geq 0$, to ova jednačina ne daje realno rešenje za x. S druge strane za

$$t_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx \frac{-1+2.2}{2} = 0.6$$

postoji realno rešenje za x tako da je

$$\sin x = 0.6$$

Kako je

$$\sin\frac{\pi}{6} = 0.5$$

i

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$$

i kako važi

$$\sin\frac{\pi}{6} < \sin x < \sin\frac{\pi}{4}$$

to imamo da jedno od realnih rešenja jednačine pripada intervalu

$$x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) \subset \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right].$$

20.Ⓐ Kako je

$$\frac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{3}}} = \frac{(x+\sqrt{3})\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+\sqrt{3}}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+\sqrt{3}}\right)} = -\frac{(x+\sqrt{3})\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{3}}} = \frac{(x-\sqrt{3})\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{3}}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{3}}\right)} = \frac{(x-\sqrt{3})\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}}$$

to se zadata jednačina

$$\frac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{3}}} + \frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{3}}} = \sqrt{x}$$

gde mora da važi $x-\sqrt{3}\geq 0 \iff x\geq\sqrt{3}$, može uprostiti na sledeći način

$$-\frac{(x+\sqrt{3})\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} + \frac{(x-\sqrt{3})\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} = \sqrt{x}$$

$$\frac{\sqrt{x}\,(-x-\sqrt{3}+x-\sqrt{3})}{\sqrt{3}} + \frac{(x+\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}+(x-\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}} = \sqrt{x}$$

$$-2\sqrt{x} + \frac{(x+\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}+(x-\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}} = \sqrt{x}$$

$$\left(x+\sqrt{3}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(x-\sqrt{3}\right)^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{3}\sqrt{x} \qquad \overset{(\cdot)^2}{\to}$$

$$\left(x+\sqrt{3}\right)^{3} + \left(x-\sqrt{3}\right)^{3} + 2(x^2-3)^{\frac{3}{2}} = 27x$$

$$x^3+3x^2\sqrt{3}+3x\cdot 3+(\sqrt{3})^3+x^3-3x^2\sqrt{3}+3x\cdot 3-(\sqrt{3})^3+2(x^2-3)^{\frac{3}{2}} = 27x$$

$$2x^3+18x+2(x^2-3)^{\frac{3}{2}} = 27x$$

$$2x^3-9x = -2(x^2-3)^{\frac{3}{2}}$$

gde x mora da zadovolji uslov $2x^3-9x\leq 0$. Kvadriranjem prethodne jednačine dalje dobijamo

$$4x^6-36x^4+81x^2 = 4\left(x^2-3\right)^3 = 4\left(x^6-9x^4+27x^2-27\right) = 4x^6-36x^4+108(x^2-1)$$

$$27x^2 = 108 \iff x^2=4 \iff x=\pm 2$$

Kako je $x\geq\sqrt{3}$ jedino moguće rešenje je $x=+2$. Za $x=2$ imamo takođe da je uslov $2x^3-9x=-2\leq 0$ ispunjen. Jedino realno rešenje zadate jednačine se nalazi u skupu $x=2\in\left[\sqrt{3},2\sqrt{3}\right)$.

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE ZA UPIS NA ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

1. Vrednost izraza $2014^3 - 2013 \cdot 2014 \cdot 2015$ jednaka je:

(A) 1 (B) 2013 (C) 2014 (D) 2015 (E) -1 (N) Ne znam

2. Pojeftinjenje neke robe najpre za 10%, a zatim za 20%, jednako je pojeftinjenju iste robe za:

(A) 30% (B) 25% (C) 32% (D) 28% (E) 19% (N) Ne znam

3. Ako realni brojevi x i y zadovoljavaju jednakost $\dfrac{2x+i}{y+i} = \dfrac{1+i\sin\alpha}{1-i\sin 3\alpha}$, $\Big(\alpha \neq k\pi,\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ i^2=-1\Big)$, tada je količnik $\dfrac{y}{x}$ jednak:

(A) $-4+2\cos 2\alpha$ (B) $4+2\cos 2\alpha$ (C) $2-4\cos 2\alpha$ (D) $-2-4\cos 2\alpha$ (E) $2-2\sin 2\alpha$ (N) Ne znam

4. Izraz $5^{\frac{3-\log_{10} 5}{\log_{10} 25}}$ je jednak izrazu:

(A) $10\sqrt{2}$ (B) 5 (C) $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$ (D) $\dfrac{10}{\sqrt{2}}$ (E) $5^{\frac{1}{5}}$ (N) Ne znam

5. Ako je $x+|x| = \dfrac{x}{|x|}$, $(x \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$, tada x pripada skupu:

(A) $(0,1)$ (B) $(-1,0)$ (C) $(1,3)$ (D) $(2,+\infty)$ (E) $(-\infty,0)$ (N) Ne znam

6. Ako je $f\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = x$, $(x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\})$, tada je $f(f(x))$

(A) x (B) $\dfrac{1-x}{1+x}$ (C) $\dfrac{1}{x}$ (D) $\dfrac{1+x}{1-x}$ (E) $2x$ (N) Ne znam

7. Ako je $a=-0.3$, koja od sledećih relacija je tačna?

(A) $a<a^2<a^3$ (B) $a<a^3<a^2$ (C) $a^2<a<a^3$ (D) $a^2<a^3<a$ (E) $a^3<a<a^2$ (N) Ne znam

8. Odnos binomnih koeficijenata uz stepen x^{1007}, $(x \in (0,+\infty))$ u razvojima binoma $(1+x)^{2014}$ i $(1+x)^{2013}$ redom, iznosi:

(A) $\dfrac{1007}{1006}$ (B) 2 (C) $\dfrac{3}{2}$ (D) $\dfrac{1}{2014}$ (E) $\dfrac{1}{2015}$ (N) Ne znam

9. Data je kvadratna funkcija $f(x)=x^2+bx+c$, $(b,c \in \mathbb{R})$ takva da je $f(f(1))=f(f(2))=0$, pri čemu je $f(1)\neq f(2)$. Vrednost $f(0)$ jednaka je:

(A) -6 (B) $-\dfrac{2}{3}$ (C) $-\dfrac{3}{2}$ (D) $\dfrac{1}{4}$ (E) -2 (N) Ne znam

10. Neka je $s=1+q+q^2+\cdots$ $(|q|<1)$ i $S=1+Q+Q^2+\cdots$ $(|Q|<1)$, gde su s i S dati brojevi. Tada je zbir $1+qQ+q^2Q^2+q^3Q^3+\cdots$ jednak:

(A) $\dfrac{s\cdot S}{s+S-1}$ (B) $\dfrac{s\cdot S}{2s\cdot S-s-S+1}$

(C) $\dfrac{s\cdot S}{s\cdot S+s+S-2}$ (D) $\dfrac{2s\cdot S-1}{s+S-1}$

(E) $s\cdot S$ (N) Ne znam

11. Proizvod svih realnih rešenja jednačine $\dfrac{2013x}{2014} = 2013^{\log_x 2014}$ pripada skupu:

(A) $(0,1]$ (B) $(1,2]$ (C) $(2,3]$ (D) $(3,4]$ (E) $(4,+\infty)$ (N) Ne znam

12. Krug sadrži tri tačke čije su koordinate $(0,6),(0,10)$ i $(8,0)$. Apscisa druge tačke u kojoj dati krug seče x-osu, jednaka je:

(A) 7 (B) 7.25 (C) 7.5 (D) 7.75 (E) 9 (N) Ne znam

13. Sva realna rešenja iracionalne jednačine $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}} + \dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{4}$ pripadaju skupu:

(A) $[2,6)$ (B) $[6,10)$ (C) $[10,14)$ (D) $[14,18)$ (E) $[18,+\infty)$ (N) Ne znam

14. Dat je trougao ABC sa stranicama $AB = \sqrt{2}$ cm i $AC = \sqrt{3}$ cm. Neka je D tačka na stranici BC tako da je $\angle BAD = 30^{\circ}$ i $\angle CAD = 45^{\circ}$. Dužina duži AD iznosi (u cm):

(A) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ (B) $\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{6}}}$ (C) $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ (D) $\dfrac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{2+\sqrt{6}}}$ (E) $\dfrac{1}{2}$ (N) Ne znam

15. Dat je polinom $P(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4\,(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4 \in \mathbb{R}, a_0 \neq 0)$, takav da je $P(0) = P(1) = P(2) = P(-1) = 0$ i $P(-2) = 12$. Tada je $P(3)$ jednako:

(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $-\dfrac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2 (E) 12 (N) Ne znam

16. Bočne strane trostrane piramide su pravougli trouglovi sa temenom pravog ugla u vrhu piramide. Površine tih bočnih strana su 6 cm^2, 8 cm^2 i 12 cm^2. Zapremina piramide je:

(A) 6 cm^3 (B) $8\sqrt{2}$ cm^3 (C) 8 cm^3 (D) $6\sqrt{2}$ cm^3 (E) 12 cm^3 (N) Ne znam

17. Ako je uređen par $(x,y)\,(x,y \in \mathbb{R}, x,y > 0, x \neq 1)$, rešenje sistema jednačina $x^y = y^x, x^p = y^q$ $(p,q \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, p \neq q)$, tada je proizvod $x \cdot y$ jednak:

(A) $\dfrac{p-q}{2}$ (B) $\dfrac{2}{p-q}$ (C) 1 (D) $\left(\dfrac{p}{q}\right)^{\frac{p+q}{p-q}}$ (E) $\left(\dfrac{q}{p}\right)^{\frac{p+q}{p-q}}$ (N) Ne znam

18. Neka je S skup svih realnih rešenja nejednačine $\mathrm{tg}x\left(1-\mathrm{tg}^2x\right)\left(1-3\mathrm{tg}^2x\right)(1+\mathrm{tg}2x\cdot\mathrm{tg}3x) > 0$ i neka je $S_1 \subset S$. Tada skup S_1 može biti:

(A) $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ (B) $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$ (C) $\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$ (D) $\left(\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ (E) $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{6}\right)$ (N) Ne znam

19. Od lista hartije kružnog oblika izrezan je kružni isečak od koga je napravljen konusni levak najveće zapremine. Centralni ugao tog kružnog isečka u radijanima je:

(A) $\dfrac{\pi}{3}$ (B) $\dfrac{2\pi}{3}\sqrt{6}$ (C) $\dfrac{2\pi}{3}$ (D) $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$ (E) $\dfrac{\pi\sqrt{6}}{2}$ (N) Ne znam

20. Iz skupa od 10 studenata, među kojima su samo jedan student elektrotehnike i samo jedan student matematike, biramo komisiju od 6 članova, ali tako da ako je u komisiji student elektrotehnike mora u toj komisiji biti i student matematike. Koliko se takvih komisija može obrazovati?

(A) 210 (B) 98 (C) 126 (D) 154 (E) 165 (N) Ne znam

REŠENJA

1.Ⓒ

$$\begin{aligned}2014^3 - 2013\cdot 2014\cdot 2015 &= 2014\left(2014^2 - 2013\cdot 2015\right)\\ &= 2014\left(2014^2-(2014-1)(2014+1)\right)\\ &= 2014\left(2014^2-\left(2014^2-1\right)\right)\\ &= 2014.\end{aligned}$$

2.Ⓓ Neka je c_0 početna cena robe. Nakon pojeftinjenja od 10% cena robe postaje

$$c_1 = (1-0.1)c_0$$

a nakon još jednog pojeftinjenja od 20% cena robe će biti

$$c_2 = (1-0.2)c_1 = (1-0.2)(1-0.1)c_0 = 0.8\cdot 0.9\cdot c_0 = 0.72\cdot c_0 = (1-0.28)c_0$$

što odgovara ukupnom pojeftinjenju od 28%.

3.Ⓓ Iz uslova zadatka sledi

$$\frac{2x+i}{y+i} = \frac{1+i\sin\alpha}{1-i\sin 3\alpha} \Rightarrow (y+i)(1+i\sin\alpha) = (2x+i)(1-i\sin 3\alpha)$$

$$y-\sin\alpha + i(1+y\sin\alpha) = 2x+\sin 3\alpha + i(1-2x\sin 3\alpha)$$

odakle se izjednačavanjem imaginarnih delova leve i desne strane jednačine dobija

$$1+y\sin\alpha = 1-2x\sin 3\alpha \Rightarrow \frac{y}{x} = -\frac{2\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$$

Uzimajući u obzir identitet

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) &= \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha\\ &= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha\\ &= 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) + (1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha\\ &= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\end{aligned}$$

dalje dobijamo

$$\frac{y}{x} = 2\frac{4\sin^3\alpha - 3\sin\alpha}{\sin\alpha} = 2\left(4\sin^2\alpha - 3\right)$$

Najzad, kako je $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1-2\sin^2\alpha \iff \sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$, konačno imamo

$$\frac{y}{x} = 2(2(1-\cos 2\alpha)-3) = -2-4\cos 2\alpha.$$

4.Ⓐ

$$\log_{10} 25 = \log_{10} 5^2 = 2\log_{10} 5$$

$$3 = 3\log_{10} 10 = 3\log_{10}(2\cdot 5) = 3\log_{10} 2 + 3\log_{10} 5$$

$$\frac{3-\log_{10} 5}{\log_{10} 25} = \frac{3\log_{10} 2 + 3\log_{10} 5 - \log_{10} 5}{2\log_{10} 5} = \frac{3\log_{10} 2 + 2\log_{10} 5}{2\log_{10} 5} = \frac{3\log_{10} 2}{2\log_{10} 5} + 1 = \frac{3}{2}\log_5 2 + 1$$

$$5^{\frac{3-\log_{10} 5}{\log_{10} 25}} = 5^{\frac{3}{2}\log_5 2+1} = 5\cdot 5^{\frac{3}{2}\log_5 2} = 5\cdot\left(5^{\log_5 2}\right)^{\frac{3}{2}} = 5\cdot 2^{\frac{3}{2}} = 5\cdot 2\cdot\sqrt{2} = 10\sqrt{2}.$$

5. Ⓐ

$$x + |x| = \frac{x}{|x|},\ x \neq 0$$

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

(a) $x > 0$:

$$x + x = \frac{x}{x} \iff 2x = 1 \iff x = \frac{1}{2}$$

(b) $x < 0$:

$$x - x = \frac{x}{-x} \iff 0 = -1 \iff x = \emptyset$$

Dakle, jedino realno rešenje jednačine $x = \frac{1}{2}$ pripada skupu $(0, 1)$.

---

6. Ⓐ

$$f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = x,\ x \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 0, 1\}$$

Smenom

$$t = \frac{1-x}{1+x} \iff x = \frac{1-t}{1+t}$$

dobijamo

$$f(t) = \frac{1-t}{1+t}$$

što je ekvivalentno izrazu

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

Sada je

$$f(f(x)) = f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = x.$$

---

7. Ⓑ Za $a = -0.3$ važi

$$a^2 = (-0.3)^2 = 0.09$$
$$a^3 = a \cdot a^2 = -0.3 \cdot 0.09 = -0.27$$

odakle sledi

$$-0.3 < -0.27 < 0.09$$

odnosno

$$a < a^3 < a^2.$$

---

8. Ⓑ Važi sledeća formula za razvoj binoma $(x+1)^n$

$$(x+1)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} + \cdots + \binom{n}{k} x^{n-k} + \cdots + \binom{n}{1} x + 1$$

Za $n_1 = 2014$ i stepen $n_1 - k_1 = 1007 \iff k_1 = 1007$ dobijamo sledeći binomni koeficijent

$$\binom{n_1}{k_1} = \binom{2014}{1007} = \frac{2014 \cdot 2013 \cdots (2014 - 1007 + 1)}{1007 \cdot 1006 \cdots 2 \cdot 1}$$

Slično, za $n_2 = 2013$ i stepen $n_2 - k_2 = 1007 \iff k_2 = 1006$ imamo sledeći binomni koeficijent

$$\binom{n_2}{k_2} = \binom{2013}{1006} = \frac{2013 \cdot 2012 \cdots (2013 - 1006 + 1)}{1006 \cdot 1005 \cdots 2 \cdot 1}$$

Sada se za odnos binomnih koeficijenata uz stepen x^{1007} ima

$$\frac{\binom{n_1}{k_1}}{\binom{n_2}{k_2}} = \frac{2014 \cdot 2013 \cdots 1008}{1007 \cdot 1006 \cdots 2 \cdot 1} \cdot \frac{1006 \cdot 1005 \cdots 2 \cdot 1}{2013 \cdot 2012 \cdots 1008} = \frac{2014}{1007} = 2.$$

9.Ⓒ Označimo $x_1 = f(1)$ i $x_2 = f(2)$. Kako je $f(f(1)) = f(x_1) = 0$ i $f(f(2)) = f(x_2) = 0$, to su x_1 i x_2 rešenja kvadratne jednačine

$$f(x) = x^2 + bx + c = 0$$

te se ona može predstaviti u obliku

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 + bx + c$$

odakle izjednačavanjem koeficijenata uz x^2, x^1 i x^0 dobijamo

$$x_1 + x_2 = -b$$

$$x_1x_2 = c$$

Takođe važi

$$x_1 = f(1) = b + c + 1$$

$$x_2 = f(2) = 2b + c + 4$$

Iz prethodnih jednačina se dalje dobija

$$x_1 + x_2 = 3b + 2c + 5 = -b \Rightarrow 4b + 2c + 5 = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{4}(2c + 5)$$

$$x_1x_2 = (b + c + 1)(2b + c + 4) = c \Rightarrow 2b^2 + 3bc + c^2 + 6b + 4c + 4 = 0$$

Iz poslednje dve jednačine dobijamo kvadratnu jednačinu po nepoznatoj c:

$$\frac{1}{8}(2c + 5)^2 + c^2 - \frac{3}{4}c(2c + 5) + c^2 - \frac{3}{2}(2c + 5) + 4c + 4 = 0 \overset{8(\cdot)}{\rightarrow}$$

$$4c^2 + 20c + 25 + 8c^2 - 12c^2 - 30c + 8c^2 - 24c - 60 + 32c + 32 \iff -2c - 3 = 0 \iff c = -\frac{3}{2}$$

Konačno imamo

$$f(0) = c = -\frac{3}{2}.$$

10.Ⓐ

$$s = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = 1 + q\left(1 + q + q^2 + \cdots\right) = 1 + qs \Rightarrow q = \frac{s - 1}{s}$$

$$S = 1 + Q + Q^2 + Q^3 + \cdots = 1 + Q\left(1 + Q + Q^2 + \cdots\right) = 1 + QS \Rightarrow Q = \frac{S - 1}{S}$$

$$S_{qQ} = 1 + qQ + q^2Q^2 + q^3Q^3 + \cdots = 1 + qQ\left(1 + qQ + q^2Q^2 + \cdots\right) = 1 + qQS_{qQ} \Rightarrow S_{qQ} = \frac{1}{1 - qQ}$$

Zamenom izraza za q i Q u poslednjoj jednačini imamo

$$\begin{aligned} S_{qQ} &= \frac{1}{1 - qQ} = \frac{1}{1 - \frac{s-1}{s}\frac{S-1}{S}} \\ &= \frac{sS}{sS - (s - 1)(S - 1)} = \frac{sS}{s + S - 1}. \end{aligned}$$

11.Ⓑ

$$\frac{2013x}{2014} = 2013^{\log_x 2014} = 2013^{\frac{\log_{2013} 2014}{\log_{2013} x}} = \left(2013^{\log_{2013}} 2014\right)^{\frac{1}{\log_{2013} x}}$$

$$\frac{2013x}{2014} = 2014^{\frac{1}{\log_{2013} x}}$$

$$\left(\frac{2013x}{2014}\right)^{\log_{2013} x} = 2014$$

$$(2013x)^{\log_{2013} x} = 2014 \cdot 2014^{\log_{2013} x} = 2014^{\log_{2013} x + 1} = 2014^{\log_{2013}(2013x)}$$

$$2013^{\log_{2013} x} \cdot x^{\log_{2013} x} = 2014^{\log_{2013}(2013x)}$$

$$x \cdot x^{\log_{2013} x} = 2014^{\log_{2013}(2013x)}$$
$$x^{\log_{2013} x+1} = 2014^{\log_{2013}(2013x)}$$
$$x^{\log_{2013} x+\log_{2013} 2013} = 2014^{\log_{2013}(2013x)}$$
$$x^{\log_{2013}(2013x)} = 2014^{\log_{2013}(2013x)}$$

Ako označimo $a = \log_{2013}(2013x)$, jednačina postaje

$$x^a = 2014^a$$

čija su realna rešenja:

$$a \neq 0 \Rightarrow x_1 = 2014$$

i

$$a = 0 \Rightarrow \log_{2013}(2013x) = 0 \iff 2013x = 1 \iff x_2 = \frac{1}{2013}$$

Proizvod svih realnih rešenja gornje jednačine je

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{2014}{2013} \in (1, 2].$$

12.Ⓒ

Jednačina kruga poluprečnika R sa centrom u tački (x_c, y_c) data je izrazom

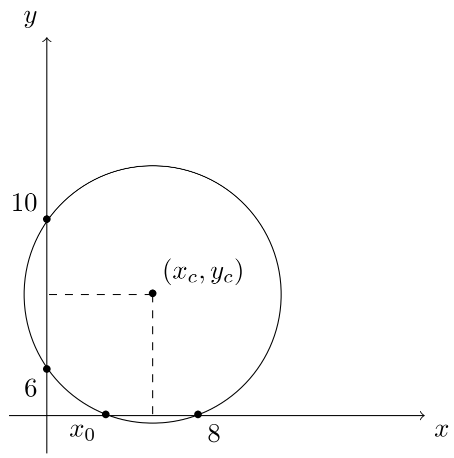
$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$$

Kako krug sadrži tačke sa koordinatama $(0, 6), (0, 10), (8, 0)$ onda važi sledeći sistem jednačina

$$x_c^2 + (y_c - 6)^2 = R^2$$
$$x_c^2 + (y_c - 10)^2 = R^2$$
$$(x_c - 8)^2 + y_c^2 = R^2$$

Iz prve dve jednačine imamo

$$(y_c - 6)^2 - (y_c - 10)^2 = 0$$
$$4(2y_c - 16) = 0 \iff y_c = 8$$



Iz druge i treće jednačine se dobija

$$(x_c - 8)^2 - x_c^2 + y_c^2 - (y_c - 10)^2 = 0, \text{ with } y_c = 8$$

$$-8(2x_c - 8) + 64 - 4 = 0 \iff 16(x_c - 4) = 60 \iff x_c = 4 + \frac{15}{4}$$

Neka je x_0 apscisa druge tačke u kojoj krug seče x-osu, tada iz jednačine kruga dobijamo

$$(x_c - x_0)^2 + y_c^2 = R^2$$

što u kombinaciji sa

$$(x_c - 8)^2 + y_c^2 = R^2$$

daje

$$(x_c - x_0)^2 - (x_c - 8)^2 = 0$$
$$(8 - x_0)(2x_c - x_0 - 8) = 0 \iff x_0 = 8 \vee x_0 = 2x_c - 8$$
$$x_0 = 2x_c - 8 = 2\left(4 + \frac{15}{4}\right) - 8 = 8 + \frac{15}{2} - 8 = 7.5.$$

13. Ⓓ

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x-2})(\sqrt{x}-\sqrt{x-2})}+\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}{x-(x-2)}+\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{(x+2)-x}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}{2}+\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{2}=\frac{1}{4}$$

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}=\frac{1}{2}\quad\stackrel{(\cdot)^2}{\rightarrow}$$

$$x+2+x-2-2\sqrt{x^2-4}=\frac{1}{4}$$

$$x-\sqrt{x^2-4}=\frac{1}{8}$$

$$\sqrt{x^2-4}=x-\frac{1}{8}\quad\stackrel{(\cdot)^2}{\rightarrow}$$

$$x^2-4=\frac{1}{64}-\frac{1}{4}x+x^2$$

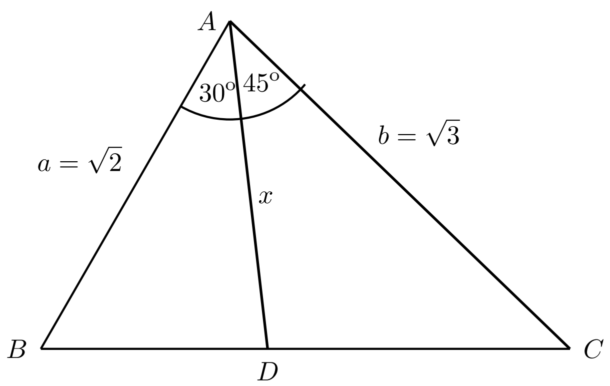
$$x=16+\frac{1}{16}\in[14,18).$$

---

14. Ⓐ

Neka je x dužina duži AD. Površina trougla ABD je

$$P_1=\frac{1}{2}ax\sin 30^{\circ}=\frac{1}{4}x\sqrt{2}$$



dok je površina trougla ACD

$$P_2=\frac{1}{2}bx\sin 45^{\circ}=\frac{1}{4}x\sqrt{2}\sqrt{3}=\frac{1}{4}x\sqrt{6}$$

ukupna površina trougla ABC je

$$P=\frac{1}{2}ab\sin(30^{\circ}+45^{\circ})=\frac{1}{2}\sqrt{6}\sin(30^{\circ}+45^{\circ})$$

gde je

$$\begin{aligned}\sin(30^{\circ}+45^{\circ})&=\sin 30^{\circ}\cos 45^{\circ}+\cos 30^{\circ}\sin 45^{\circ}\\&=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\\&=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)\end{aligned}$$

pa imamo

$$P=\frac{1}{2}\sqrt{6}\sin(30^{\circ}+45^{\circ})=\frac{1}{2}\sqrt{6}\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}+1)$$

Dalje važi

$$P=P_1+P_2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}+1)=\frac{1}{4}x\sqrt{2}+\frac{1}{4}x\sqrt{6}$$

$$\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)=x\sqrt{2}(1+\sqrt{3})$$

$$x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

15. Ⓔ

$$P(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$$

Iz uslova zadatka sledi

$$\begin{aligned}
&(1)\quad P(0) = a_4 = 0\\
&(2)\quad P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0\\
&(3)\quad P(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0\\
&(4)\quad P(2) = 16a_0 + 8a_1 + 4a_2 + 2a_3 = 0
\end{aligned}$$

$$P(1) + P(-1) = 2(a_0 + a_2) = 0 \Rightarrow a_2 = -a_0$$

$$P(1) - P(-1) = 2(a_1 + a_3) = 0 \Rightarrow a_3 = -a_1$$

$$P(2) = 0 \Rightarrow 16a_0 + 8a_1 + 4a_2 + 2a_3 = 0$$

$$16a_0 + 8a_1 - 4a_0 - 2a_1 = 0 \iff 12a_0 + 6a_1 = 0 \iff a_1 = -2a_0 \Rightarrow a_3 = -a_1 = 2a_0$$

Sada je

$$P(x) = a_0x^4 - 2a_0x^3 - a_0x^2 + 2a_0x = a_0(x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x)$$

te se za $P(-2) = 12$ dalje dobija

$$P(-2) = a_0(16 + 16 - 4 - 4) = 12 \iff 24a_0 = 12 \iff a_0 = \frac{1}{2}$$

odakle je

$$P(x) = \frac{1}{2}(x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x)$$

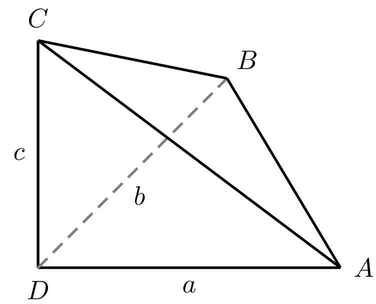
Najzad, tražena vrednost polinoma u tački 3 jednaka je

$$P(3) = \frac{1}{2}(81 - 54 - 9 + 6) = 12.$$

---

16. Ⓑ

Trostrana piramida se može predstaviti kao na slici gde su $\angle ADB = \angle ADC = \angle BDC = 90^\circ$. Označimo katete pravouglih trouglova piramide sa $AD = a, BD = b$ i $CD = c$. Sada se za površine pravouglih trouglova (prema uslovu zadatka) ima



$$\frac{1}{2}ab = 6 \Rightarrow ab = 12$$

$$\frac{1}{2}bc = 8 \Rightarrow bc = 16$$

$$\frac{1}{2}ac = 12 \Rightarrow ac = 24$$

Množenjem ovih triju jednačina dobijamo

$$(abc)^2 = 12 \cdot 16 \cdot 24 = 2 \cdot 3^2 \cdot 16^2 \Rightarrow abc = 48\sqrt{2}$$

Ako posmatramo piramidu kao na slici, i uzmemo trougao ADB za njen bazis, površine $P = \frac{1}{2}ab$, tada je visina piramide $H = CD = c$, pa se za zapreminu dobija izraz

$$V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}\frac{1}{2}abc = \frac{1}{6}abc = \frac{1}{6}48\sqrt{2} = 8\sqrt{2}.$$

17. Ⓓ

$$x^y = y^x,\ x, y > 0 \iff \log x^y = \log x^y \iff y \log x = x \log y$$

Slično

$$x^p = y^q \iff p \log x = q \log y$$

Deljenjem prethodne dve jednačine dobijamo

$$\frac{y}{p} = \frac{x}{q} \iff y = \frac{p}{q}x$$

što zamenom u

$$x^p = y^q$$

daje

$$x^p = \left(\frac{p}{q}x\right)^q = \left(\frac{p}{q}\right)^q x^q$$

$$x^{p-q} = \left(\frac{p}{q}\right)^q$$

$$x = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{q}{p-q}}$$

Na kraju dobijamo

$$xy = x\frac{p}{q}x = \frac{p}{q}x^2 = \frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{2q}{p-q}} = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{2q}{p-q}+1} = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p+q}{p-q}}.$$

---

18. Ⓑ Važe sledeće jednakosti

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{tg}2x = \operatorname{tg}(x+x) = \frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}$$

$$\operatorname{tg}3x = \operatorname{tg}(2x+x) = \frac{\operatorname{tg}2x + \operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}x} = \frac{\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x} + \operatorname{tg}x}{1 - \frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}\operatorname{tg}x} = \frac{3\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}^3x}{1-3\operatorname{tg}^2x}$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}
1 + \operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x &= 1 + \frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}\frac{3\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}^3x}{1-3\operatorname{tg}^2x} \\
&= \frac{(1-\operatorname{tg}^2x)(1-3\operatorname{tg}^2x) + 2\operatorname{tg}^2x(3-\operatorname{tg}^2x)}{(1-\operatorname{tg}^2x)(1-3\operatorname{tg}^2x)} \\
&= \frac{1-4\operatorname{tg}^2x+3\operatorname{tg}^4x+6\operatorname{tg}^2x-2\operatorname{tg}^4x}{(1-\operatorname{tg}^2x)(1-3\operatorname{tg}^2x)} \\
&= \frac{\operatorname{tg}^4x+2\operatorname{tg}^2x+1}{(1-\operatorname{tg}^2x)(1-3\operatorname{tg}^2x)} \\
&= \frac{(\operatorname{tg}^2x+1)^2}{(1-\operatorname{tg}^2x)(1-3\operatorname{tg}^2x)}
\end{aligned}$$

te nejednačina postaje

$$\operatorname{tg}x(1-\operatorname{tg}^2x)(1-3\operatorname{tg}^2x)(1+\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x) > 0$$

$$\operatorname{tg}x(1-\operatorname{tg}^2x)(1-3\operatorname{tg}^2x)\frac{(\operatorname{tg}^2x+1)^2}{(1-\operatorname{tg}^2x)(1-3\operatorname{tg}^2x)} > 0$$

$$\operatorname{tg}x(\operatorname{tg}^2x+1)^2 > 0$$

Kako je $(\operatorname{tg}^2x+1)^2 > 0$ to nejednačina dobija ekvivalentni oblik

$$\operatorname{tg}x > 0$$

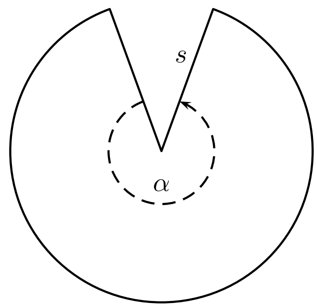
i njena realna rešenja su

$$x \in S = \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

Skup $S_1 = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ je podskup skupa svih realnih rešenja S.

---

19. Ⓑ

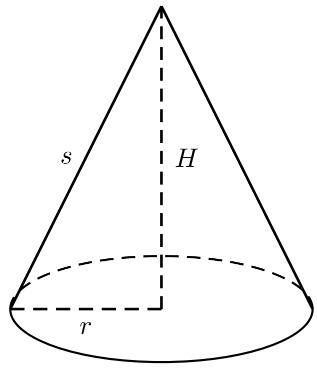


Neka je s poluprečnik kružnog isečka i r poluprečnik osnove kupe napravljene od ovog isečka (videti sliku). Dužina luka kružnog isečka biće jednaka obimu osnove kupe, odnosno

$$s\alpha = 2r\pi \iff r = \frac{s\alpha}{2\pi}$$

Istovremeno, poluprečnik kružnog isečka odgovara izvodnici kupe napravljene od ovog isečka (slika). Primenom Pitagorine teoreme za visinu kupe dobijamo

$$H = \sqrt{s^2 - r^2} = s\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2}$$



Za zapreminu kupe sada se ima

$$V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}r^2\pi H = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{s\alpha}{2\pi}\right)^2 s\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2}$$

$$V = \frac{s^3}{12\pi}\alpha^2\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2}$$

Kupa će imati najveću zapreminu za maksimalnu vrednost funkcije $f(\alpha) = \alpha^2\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2}$ koja se dobija iz sledećeg uslova

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\alpha} = 0$$

Kako je

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\alpha^2\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2}\right) = 2\alpha\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2} + \alpha^2\frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}}}\left(-\frac{1}{4\pi^2}2\alpha\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{2\alpha\left(1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}\right) - \frac{1}{4\pi^2}\alpha^3}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}}}$$

to dalje dobijamo

$$2\alpha\left(1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}\right) - \frac{1}{4\pi^2}\alpha^3 = 0$$

$$2\left(1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}\right) - \frac{1}{4\pi^2}\alpha^2 = 0, \quad \alpha \neq 0$$

$$\frac{3\alpha^2}{4\pi^2} = 2 \iff \alpha = \pi\sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2}{3}\pi\sqrt{6}.$$

20.Ⓓ Imamo grupu od 10 studenata od kojih je jedan student elektrotehnike i jedan student matematike. Biramo komisiju od šest studenata iz grupe od 10 studenata tako da ako je u komisiji student elektrotehnike, onda u njoj mora biti i student matematike. Imamo sledeće međusobno isključive mogućnosti:

1. U komisiji nisu ni student elektrotehnike ni student matematike. To znači da komisiju od 6 članova biramo iz grupe od 8 preostalih studenata (10 studenata bez studenata elektrotehnike i matematike), a takvih komisija ima
$$\binom{8}{6}$$
2. U komisiji je student elektrotehnike, te prema uslovu zadatka to znači da u komisiji mora biti i student matematike. Ostalih 4 članova biramo iz preostale grupe od 8 studenata (bez studenata matematike i elektrotehnike), a takvih komisija ima
$$\binom{8}{4}$$
3. U komisiji je student matematike, ali nije student elektrotehnike. Ostalih 5 članova biramo iz preostale grupe od 8 studenata (bez studenata matematike i elektrotehnike), a takvih komisija ima
$$\binom{8}{5}$$

Ukupan broj komisija koje ispunjavaju uslove zadatka je

$$\begin{aligned}\binom{8}{6}+\binom{8}{4}+\binom{8}{5} &= \binom{8}{2}+\binom{8}{4}+\binom{8}{3}\\ &= \frac{8\cdot 7}{2\cdot 1}+\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}+\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}\\ &= 28+70+56=154.\end{aligned}$$

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE ZA UPIS NA ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

1. Vrednost izraza $2x^2 - 2.4x - 1.7$ za $x = 7 \cdot 10^{-1}$ iznosi:

(A) 1 (B) -17.52 (C) 6.42 (D) -2.40 (E) -2.89 (N) Ne znam

2. Jednačina prave koja prolazi kroz tačke $M_1(-1,1)$ i $M_2(2,4)$ glasi:

(A) $x - y + 2 = 0$ (B) $x + y = 0$

(C) $-2x + y = 0$ (D) $-3x - y - 2 = 0$

(E) $x - y - 2 = 0$ (N) Ne znam

3. Vrednost izraza $\dfrac{x^{0.5}+1}{x+x^{0.5}+1} : \dfrac{1}{x^{1.5}-1}$, za $x \geq 0, x \neq 1$ je:

(A) $x^2 - 1$ (B) $2x - 1$ (C) $2\sqrt{x} - 1$ (D) $x - 1$ (E) $\sqrt{x} - 1$ (N) Ne znam

4. Ako 30% broja $2n$ iznosi 2013, tada 40% broja $5n$ ($n \in \mathbb{N}$), iznosi

(A) 6710 (B) 3355 (C) 1342 (D) 6038 (E) 2820 (N) Ne znam

5. U jednakokraki trougao čija je osnovica $a = 10\,\mathrm{cm}$ i krak $b = 13\,\mathrm{cm}$ upisan je kvadrat tako da mu dva temena leže na osnovici trougla, a druga dva na kracima. Dužina stranice kvadrata (u cm) jednaka je:

(A) $\dfrac{64}{11}$ (B) $\dfrac{63}{11}$ (C) $\dfrac{62}{11}$ (D) $\dfrac{61}{11}$ (E) $\dfrac{60}{11}$ (N) Ne znam

6. Ako je $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \dfrac{1}{3}$ $(\alpha, \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \alpha - \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + m\pi, k, m \in \mathbb{Z})$, tada je $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$ jednako:

(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) 1 (D) $\dfrac{1}{4}$ (E) $\dfrac{2}{3}$ (N) Ne znam

7. Neka je S_1 skup rešenja nejednačine $|\sqrt{x+1}| > 1$ i S_2 skup rešenja nejednačine $\sqrt{|x+1|} > 1$. Tada je:

(A) $S_1 = S_2$ (B) $S_1 \supset S_2$

(C) $S_1 \subset S_2$ (D) $S_1 = \mathbb{R}, S_2 \neq \emptyset$

(E) nijedan od ponuđenih odgovora (N) Ne znam

8. Kompleksan broj $\dfrac{\cos\alpha + i\sin\alpha + 1}{\cos\alpha + i\sin\alpha - 1}$ $(i = \sqrt{-1},\ \alpha \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$, jednak je

(A) $-i \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$ (B) $-i \cdot \dfrac{2\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

(C) $-i \cdot \dfrac{2\sin\alpha}{2-\cos\alpha}$ (D) $-i \cdot \dfrac{2\sin\alpha}{2(1-\cos\alpha)}$

(E) $-i \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ (N) Ne znam

9. Ako je polinom $P(x) = x^{2014} + px^{2013} + qx - 1$ $(p, q \in \mathbb{R})$, deljiv polinomom $x + 1$, tada je zbir $p + q$ jednak:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) -2 (E) -1 (N) Ne znam

10. Ako je $f(x) = 2x + |x|$ i $g(x) = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}|x|$, tada je $f(g(x))$ jednako:

(A) $\dfrac{2}{3}x$ (B) $|x|$ (C) $-x$ (D) x (E) $3x$ (N) Ne znam

11. Neka su x_1 i x_2 koreni jednačine $x^2 + bx + c = 0\,(b, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$ tada je izraz $x_1^4 + x_2^4$ jednak:

(A) $b^4 - 4b^2c + 2c^2x$ (B) $b^4 - 4b^2c^2 + 2c^2$

(C) $b^4 - 4bc^2 + 2c^2$ (D) $b^4 + 4c^2$

(E) $b^4 - 4b^2c + 2c$ (N) Ne znam

12. U razvoju binoma $\left(x - \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{12}$, $(x \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$, član koji ne sadrži x jednak je:

(A) -132 (B) 66 (C) 11 (D) -12 (E) 1 (N) Ne znam

13. Ukupan broj realnih rešenja sistema jednačina $x^2 + xy - \sqrt{2} \cdot x = 0$, $x^2 + y^2 = 2$ je:

(A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) 0 (E) 3 (N) Ne znam

14. U valjak prečnika osnove $14\sqrt{3}$ cm i visine 20 cm upisana je prava trostrana prizma čija osnova je trougao ABC čija je stranica $BC = 9$ cm, a ugao naspram stranice AC je 120°. Zapremina prizme (u cm^3) je:

(A) $1890\sqrt{3}$ (B) $3780\sqrt{3}$ (C) $810\sqrt{3}$ (D) $675\sqrt{3}$ (E) $825\sqrt{3}$ (N) Ne znam

15. Skup realnih rešenja jednačine $4^x - 7 \cdot 2^{\frac{x-3}{2}} = 2^{-x}$ sadrži se u intervalu:

(A) $(-9, -2]$ (B) $(0, 3]$ (C) $(-2, 0]$ (D) $(7, 12]$ (E) $(3, 7]$ (N) Ne znam

16. Najmanja vrednost rastojanja tačke $M(0, 1)$ od tačaka (x, y) takvih da je $y = 1 + \dfrac{1}{4\sqrt{3}x^{3/2}}$, za $x > 0$, iznosi:

(A) $2\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ (E) $\dfrac{1}{3}$ (N) Ne znam

17. Zbir prva tri člana rastuće aritmetičke progresije je 54. Ako od prvog člana te progresije oduzmemo 3, drugi član ostane nepromenjen, a trećem članu dodamo 12, dobijamo prva tri člana geometrijske progresije. Količnik te geometrijske progresije je:

(A) 6 (B) 2 (C) -3 (D) $\dfrac{1}{2}$ (E) $\dfrac{1}{6}$ (N) Ne znam

18. Na koliko načina se mogu izabrati tri broja iz skupa prirodnih brojeva $\{1, 2, 3, \ldots, 40\}$ tako da im zbir bude neparan broj?

(A) 1140 (B) 3800 (C) 6480 (D) 4940 (E) 14080 (N) Ne znam

19. Ukupan broj realnih rešenja jednačine $\sin 14x - \sin 12x + 8 \sin x - \cos 13x = 4$ na intervalu $(0, 2\pi)$ je:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4 (N) Ne znam

20. Skup svih realnih rešenja nejednačine $\dfrac{\log_{2(x+1)^2-1}\left(\log_{2x^2+2x+3}(x^2 - 2x)\right)}{\log_{2(x+1)^2-1}(x^2 + 6x + 10)} \geq 0$ je oblika (za neke realne brojeve a, b, c, takve da je $(-\infty < a < b < c < +\infty)$:

(A) $(a, b) \cup (b, c)$ (B) $[a, b)$

(C) $(-\infty, a) \cup (b, c]$ (D) $(a, b] \cup (c, +\infty)$

(E) $[a, b]$ (N) Ne znam

REŠENJA

1. Ⓓ

$$f(x) = 2x^2 - 2.4x - 1.7$$

$$f(7 \cdot 10^{-1}) = 2 \cdot (0.7)^2 - 2.4 \cdot 0.7 - 1.7 = 0.7(1.4 - 2.4) - 1.7 = -0.7 - 1.7 = -2.4.$$

---

2. Ⓐ Jednačina prave

$$y = ax + b$$

koja prolazi kroz tačke $M_1(-1, 1)$ i $M_2(2, 4)$ ispunjava sledeće uslove

1. $M_1(-1, 1)$:
$$1 = -a + b$$

2. $M_2(2, 4)$:
$$4 = 2a + b$$

Oduzimanjem prve jednačine od druge imamo

$$3 = 3a \Rightarrow a = 1$$

Iz prve jednačine sada sledi

$$b = 1 + a = 2$$

pa je jednačina prave $y = x + 2 \iff x - y + 2 = 0$.

---

3. Ⓓ

$$\frac{x^{0.5} + 1}{x + x^{0.5} + 1} : \frac{1}{x^{1.5} - 1} = \frac{\sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x} + 1} \cdot \left(x\sqrt{x} - 1\right) =$$

Označimo $t = \sqrt{x}$, tada izraz postaje

$$= \frac{t + 1}{t^2 + t + 1} \cdot \left(t^3 - 1\right) = \frac{t + 1}{t^2 + t + 1} \cdot (t - 1)\left(t^2 + t + 1\right) = t^2 - 1 = x - 1.$$

---

4. Ⓐ

$$\frac{30}{100} 2n = 2013 \iff 2n = 10\frac{2013}{3} = 6710$$

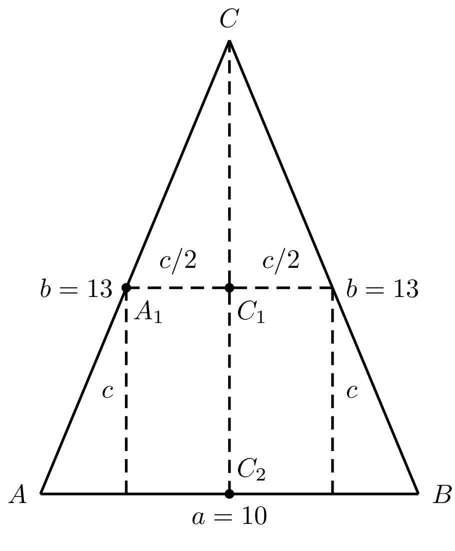
$$\frac{40}{100} 5n = 2n = 6710.$$

---

5. Ⓔ

Posmatrajmo jednakokraki trougao ABC stranica $AC = BC = b$ i $AB = a$ sa upisanim kvadratom stranice c. Visina ovog jednakokrakog trougla $h = CC_2$ je prema Pitagorinoj teoremi primenjenoj na trougao ACC_2

$$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{169 - 25} = 12$$



Iz sličnosti trouglova ACC_2 i A_1CC_1 imamo sledeću relaciju

$$\frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{h - c}{\frac{c}{2}}$$

odakle sledi

$$\frac{h}{a} = \frac{h - c}{c} = \frac{h}{c} - 1 \iff \frac{h}{c} = \frac{h}{a} + 1$$

$$c = \frac{h}{\frac{h}{a} + 1} = \frac{12}{1.2 + 1} = \frac{120}{22} = \frac{60}{11}.$$

6.Ⓑ

$$\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta} = \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{1}{3}$$

$$3(1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta) = 1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$$

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}.$$

7.Ⓒ

1. $|\sqrt{x+1}| > 1$

   Da bi funkcija imala realne vrednosti, potrebno je da važi

   $$x+1 \geq 0 \iff x \geq -1$$

   Kako je $\sqrt{x+1} \geq 0$, to važi $|\sqrt{x+1}| = \sqrt{x+1}$ pa zadata nejednakost postaje

   $$\sqrt{x+1} > 1 \Rightarrow x+1 > 1 \Rightarrow x > 0$$

   Skup rešenja ove nejednačine je, dakle, $S_1 = \{x \in \mathbb{R} | x \in (0, +\infty)\}$

2. $\sqrt{|x+1|} > 1$

   U ovom slučaju argument ispod kvadratnog korena je uvek nenegativan $|x+1| \geq 0$. Sada imamo

   $$|x+1| > 1 \text{ i } |x+1| = \begin{cases} x+1, & x > -1 \\ -x-1, & x \leq -1 \end{cases}$$

   a) $x > -1$:

   $$x+1 > 1 \iff x > 0$$

   b) $x \leq -1$:

   $$-x-1 > 1 \iff x < -2$$

   Dakle, skup rešenja ove nejednačine je $S_2 = \{x \in \mathbb{R} | x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)\}$

Konačno se dobija da važi

$$S_1 \subset S_2.$$

8.Ⓐ Koristimo sledeće identitete

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$$

odakle sledi

$$\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha + 1}{\cos\alpha + i\sin\alpha - 1} = \frac{e^{i\alpha}+1}{e^{i\alpha}-1} \cdot \frac{e^{-i\alpha/2}}{e^{-i\alpha/2}} = \frac{e^{i\frac{\alpha}{2}} + e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\frac{e^{i\frac{\alpha}{2}}+e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{2}}{i\frac{e^{i\frac{\alpha}{2}}-e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{2i}} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{i\sin\frac{\alpha}{2}} = -i \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

9.Ⓐ Ako je polinom $P(x) = x^{2013}(x+p) + qx - 1$ deljiv polinomom $x+1$, tada postoji polinom $Q(x) = a_{2013}x^{2013} + a_{2012}x^{2012} + \cdots + a_1x + a_0$ stepena 2013, tako da važi

$$P(x) = (x+1)Q(x)$$

Rešenje A.

Kako važi

$$P(-1) = (-1+1)Q(-1) = 0$$

to sledi

$$P(-1) = (-1)^{2013}(p-1) - q - 1 = 0 \iff -(p-1) - q - 1 = 0 \iff -(p+q) = 0 \iff p+q = 0.$$

Rešenje B.

$$x^{2013}(x+p) + qx - 1 = (x+1)\left(a_{2013}x^{2013} + a_{2012}x^{2012} + \cdots + a_1x + a_0\right)$$

Dalje imamo

$$\begin{aligned} x^{2014} + px^{2013} + qx - 1 = {} & a_{2013}x^{2014} + a_{2012}x^{2013} + \cdots + a_1x^2 + a_0x \\ & + a_{2013}x^{2013} + a_{2012}x^{2012} + \cdots + a_1x + a_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{2014} + px^{2013} + qx - 1 = a_{2013}x^{2014} & + (a_{2012} + a_{2013})x^{2013} \\ & + (a_{2011} + a_{2012})x^{2012} \\ & \vdots \\ & + (a_1 + a_2)x^2 \\ & + (a_0 + a_1)x \\ & + a_0 \end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz različite stepene x sa obe strane jednačine, dobijamo

$$\begin{aligned} a_0 &= -1 \\ a_0 + a_1 &= q \Rightarrow a_1 = q+1 \\ a_1 + a_2 &= 0 \Rightarrow a_2 = -a_1 = -(q+1) \\ a_2 + a_3 &= 0 \Rightarrow a_3 = -a_2 = (q+1) \\ &\vdots \\ a_k &= (-1)^{k+1}(q+1) \\ &\vdots \\ a_{2012} &= -(q+1) \\ a_{2012} + a_{2013} &= p \Rightarrow a_{2013} = p+q+1 \\ a_{2013} &= 1 \Rightarrow p+q+1 = 1 \Rightarrow p+q = 0. \end{aligned}$$

10.Ⓓ

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x + |x| \\ g(x) &= \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x| \\ f(g(x)) &= 2g(x) + |g(x)| = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}|x| + \left|\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|\right| \end{aligned}$$

1. $x > 0 \Rightarrow |x| = x$:

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}x + \left|\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x\right| \\ &= \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}|x| \\ &= \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x = x \end{aligned}$$

2. $x \le 0 \Rightarrow |x| = -x$:

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}x + \left|\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x\right| \\ &= 2x + |x| \\ &= 2x - x = x \end{aligned}$$

Dakle, za $x \in \mathbb{R}$ važi

$$f(g(x)) = x.$$

11.Ⓐ Kako su x_1 i x_2 rešenja kvadratne jednačine $x^2 + bx + c$ to važi

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + bx + c \iff x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 + bx + c$$

odakle izjednačavanjem koeficijenata polinoma s leve i desne strane, dobijamo

$$x_1 + x_2 = -b$$

$$x_1x_2 = c$$

Odavde dalje sledi

$$\begin{gathered} (x_1 + x_2)^2 = b^2 \\ x_1^2 + x_2^2 + 2\underbrace{x_1x_2}_{c} = b^2 \\ x_1^2 + x_2^2 = b^2 - 2c \overset{(\cdot)^2}{\rightarrow} \\ x_1^4 + x_2^4 + 2\underbrace{(x_1x_2)}_{c}{}^2 = b^4 - 4b^2c + 4c^2 \\ x_1^4 + x_2^4 = b^4 - 4b^2c + 2c^2. \end{gathered}$$

12.Ⓑ Za razvoj binoma važi sledeći izraz

$$(a-b)^n = a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + (-1)^k\binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}ab^{n-1} + (-1)^n b^n$$

Prema uslovima zadatka je

$$\left(x - \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{12} = \left(x - x^{-\frac{1}{5}}\right)^{12}$$

odakle imamo $a = x$, $b = x^{-\frac{1}{5}}$ i $n = 12$. Tražimo k za koje $a^{n-k}b^k$ ne sadrži x

$$a^{n-k}b^k = x^{12-k}\left(x^{-\frac{1}{5}}\right)^k = x^{12-k-\frac{k}{5}} = x^{12-\frac{6k}{5}}$$

odakle se dobija uslov

$$12 - \frac{6k}{5} = 0 \iff k = \frac{5}{6} \cdot 12 = 10$$

Sada je član koji ne sadrži x jednak

$$\binom{n}{k} = \binom{12}{10} = \binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66.$$

13.Ⓔ Rešavamo sistem jednačina

$$x^2 + xy - \sqrt{2}x = 0$$
$$x^2 + y^2 = 2$$

Iz prve jednačine imamo

$$x(x + y - \sqrt{2}) = 0 \iff x = 0 \lor x = \sqrt{2} - y$$

pa razlikujemo dva slučaja

- $x = 0$:

  Druga jednačina tada postaje
  $$y^2 = 2 \iff y = \pm\sqrt{2}$$
  te su rešenja realni parovi: $(0, -\sqrt{2})$ i $(0, \sqrt{2})$.

- $x = \sqrt{2} - y$:

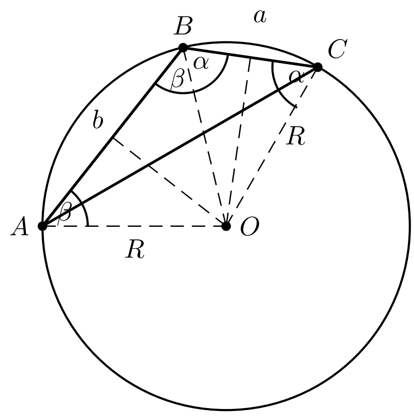
  Sada druga jednačina dobija oblik
  $$(\sqrt{2} - y)^2 + y^2 = 2 \iff 2 - 2\sqrt{2}y + 2y^2 = 2 \iff y(y - \sqrt{2}) = 0$$
  i u ovom slučaju rešenja su
  $$y = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2} - y = \sqrt{2}$$
  $$y = \sqrt{2} \Rightarrow x = \sqrt{2} - \sqrt{y} = 0$$

Ukupan broj različitih realnih rešenja zadatog sistema jednačina je 3: $(0, -\sqrt{2})$, $(0, \sqrt{2})$ i $(\sqrt{2}, 0)$.

---

14. Ⓓ

Osnova prizme je trougao ABC koji je upisan u osnovu valjka (krug poluprečnika R), kao na slici. Prema uslovima zadatka je $a = BC = 9$, $\angle ABC = \alpha + \beta = 120^\circ$ i $R = 7\sqrt{3}$. Trougao BOC je jednakokraki sa kracima dužine R, osnovicom dužine a i uglom α između kraka i osnovice. Važi



$$\frac{a}{2} = R\cos\alpha \iff \cos\alpha = \frac{a}{2R} = \frac{9}{2 \cdot 7\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$$

i

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{27}{196}} = \sqrt{\frac{196 - 27}{196}} = \sqrt{\frac{169}{196}} = \frac{13}{14}$$

Kako je

$$\cos\beta = \cos(120^\circ - \alpha) = \cos 120^\circ \cos\alpha + \sin 120^\circ \sin\alpha$$

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos(60^\circ) = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

to dobijamo

$$\cos\beta = -\frac{1}{2}\frac{3\sqrt{3}}{14} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{13}{14} = \frac{10\sqrt{3}}{28} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

Trougao AOB je takođe jednakokraki sa kracima dužine R, osnovicom dužine b i uglom β izmedju kraka i osnovice. Važi

$$\frac{b}{2} = R\cos\beta \iff b = 2R\cos\beta = 2 \cdot 7\sqrt{3}\frac{5\sqrt{3}}{14} = 15$$

Za površinu trougla ABC u osnovi prizme sada dobijamo

$$B = \frac{1}{2}ab\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}9 \cdot 15\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{135}{4}\sqrt{3}$$

Kako je visina prave prizme $H = 20$, to se za zapreminu ove prizme konačno dobija

$$V = B \cdot H = \frac{135}{4}\sqrt{3} \cdot 20 = 675\sqrt{3}.$$

15. Ⓑ

$$4^x - 7\cdot 2^{\frac{x-3}{2}} = 2^{-x}$$
$$2^{2x} - 7\cdot 2^{\frac{x-3}{2}} = 2^{-x} \Big/ \cdot 2^x$$
$$2^{3x} - 7\cdot 2^{-3/2}\cdot 2^{3x/2} = 1$$

Uvedimo smenu $t = 2^{3x/2} > 0$, tada je $t^2 = 2^{3x}$ i jednačina postaje kvadratna jednačina po nepoznatoj t

$$t^2 - 7\cdot 2^{-3/2} t - 1 = 0$$

čija su rešenja data izrazom

$$t_{1/2} = \frac{7\cdot 2^{-3/2} \pm \sqrt{49\cdot 2^{-3} + 4}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{7\sqrt{2}}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{8} + 4}\right)$$

$$t_{1/2} = \frac{7\sqrt{2}}{8} \pm \frac{9\sqrt{2}}{8} = \begin{cases} -\dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Kako je $t > 0$ to je jedino realno rešenje $t = t_2 = 2\sqrt{2} = 2^{\frac{3}{2}}$ te dalje imamo

$$2^{\frac{3x}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$$

odakle se dobija $x = 1 \in (0, 3]$.

---

16. Ⓓ Rastojanje d između tačke $M(x_M, x_M) = M(0, 1)$ i tačke (x, y) na krivoj $y = 1 + \dfrac{1}{4\sqrt{3}x^{3/2}}$, $x > 0$ dato je izrazom

$$d^2 = (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = x^2 + (y-1)^2 = x^2 + \left(1 + \frac{1}{4\sqrt{3}x^{3/2}} - 1\right)^2 = x^2 + \frac{1}{48}x^{-3}$$

Ovo rastojanje će biti minimalno za minimalnu vrednost funkcije $f(x) = d^2 = x^2 + \dfrac{1}{48}x^{-3}$ koja se dobija iz uslova

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = 0$$

Dalje sledi

$$\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = 2x_0 - \frac{3}{48}x_0^{-4} = 0 \iff x_0^5 = \frac{1}{32} = \frac{1}{2^5} \iff x_0 = \frac{1}{2}$$

te se za minimalnu vrednost rastojanja dobija

$$d = \sqrt{x_0^2 + \frac{1}{48}x_0^{-3}} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{5}{12}} = \sqrt{\frac{5}{4\cdot 3}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}.$$

---

17. Ⓑ Prva tri člana rastuće aritmetičke progresije se mogu predstaviti u obliku $a_0, a_1 = a_0 + d, a_2 = a_0 + 2d$. Kako je zbir ova tri člana po uslovima zadatka

$$a_0 + a_1 + a_2 = 54 \Rightarrow a_0 = 18 - d \Rightarrow a_1 = 18, a_2 = 18 + d.$$

Sledeća tri broja predstavljaju prva tri člana geometrijske progresije

$$b_0 = a_0 - 3 = 15 - d$$
$$b_1 = a_1 = 18$$
$$b_2 = a_2 + 12 = 30 + d$$

pa važi

$$q = \frac{b_1}{b_0} = \frac{b_2}{b_1}$$

odakle se dalje dobija

$$b_0 b_2 = b_1^2 \Rightarrow (15-d)(30+d) = 324 \iff d^2 + 15d - 126 = 0$$

Rešenja ove kvadratne jednačine su

$$d_{1/2} = \frac{-15 + \sqrt{225 + 4 \cdot 126}}{2} = \frac{-15 \pm 27}{2} = \begin{cases} -21 \\ 6 \end{cases}$$

Kako je aritmetička progresija rastuća, to je $d > 0$ i $d = d_2 = 6$. Sada se za količnik geometrijske progresije dobija

$$q = \frac{b_1}{b_0} = \frac{18}{15-6} = 2.$$

18.Ⓓ U zadatom skupu $\{1, 2, 3, \ldots, 40\}$ ima 20 parnih i 20 neparnih brojeva. Iz ovog skupa biramo tri broja, tako da je njihov zbir neparan. Zbir će biti neparan u sledećim slučajevima

1. Sva tri broja su neparna.

   U ovom slučaju biramo tri broja od 20 neparnih brojeva, te je ukupan broj takvih kombinacija (bez ponavljanja) jednak

   $$\binom{20}{3}$$

2. Jedan broj je neparan, preostala dva su parna.

   U ovom slučaju biramo jedan neparan broj iz skupa od 20 neparnih brojeva, što možemo učiniti na $\binom{20}{1} = 20$ načina, i dva parna broja iz skupa od 20 parnih brojeva, što možemo učiniti na $\binom{20}{2}$ načina, pa je ukupan broj takvih izbora

   $$\binom{20}{1} \cdot \binom{20}{2}.$$

Sada je ukupan broj načina na koje se mogu izabrati tri broja tako da je njihov zbir neparan jednak

$$\binom{20}{3} + \binom{20}{1} \cdot \binom{20}{2} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} + 20\frac{20 \cdot 19}{2 \cdot 1} = 60 \cdot 19 + 20 \cdot 10 \cdot 19 = 4940.$$

19.Ⓒ Korišćenjem trigonometrijskog identiteta

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

dobijamo

$$\sin 14x - \sin 12x = 2\sin x \cdot \cos 13x$$

Zadata jednačina sada dobija sledeći ekvivalentni oblik

$$\sin 14x - \sin 12x + 8\sin x - \cos 13x = 4$$

$$2\sin x \cdot \cos 13x + 8\sin x - \cos 13x = 4$$

$$2\sin x(\cos 13x + 4) - (\cos 13x + 4) = 0$$

$$(2\sin x - 1)(\cos 13x + 4) = 0$$

Kako je $\cos 13x \geq -1 \Rightarrow \cos 13x + 4 \geq 3 > 0$ to se dalje dobija jednačina

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

čija su rešenja

$$x_k = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_m = \frac{5\pi}{6} + 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$$

U zadatom intervalu $(0, 2\pi)$ nalaze se dva rešenja jednačine: $x_{k=0} = \frac{\pi}{6}$ i $x_{m=0} = \frac{5\pi}{6}$.

20.Ⓐ Označimo levu stranu nejednačine sa $F(x)$. Tada imamo

$$F(x) = \frac{\log_{2^{(x+1)^2}-1}\left(\log_{2x^2+2x+3}(x^2-2x)\right)}{\log_{2^{(x+1)^2}-1}(x^2+6x+10)} \geq 0$$

Logaritamska funkcija je definisana za osnove koje su pozitivne i različite od jedinice. Dakle imamo uslove

$$2^{(x+1)^2}-1 \neq 1 \iff 2^{(x+1)^2} \neq 2^1 \iff (x+1)^2 \neq 1 \iff x(x+2) \neq 0 \iff x \neq 0 \wedge x \neq -2$$

i

$$2^{(x+1)^2}-1 > 0 \iff 2^{(x+1)^2} > 2^0 \iff (x+1)^2 > 0 \iff x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$$

te rešenja treba tražiti u skupu realnih brojeva $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2,-1,0\}$.

Korišćenjem $\log_q p = \dfrac{\log_s p}{\log_s q}$, gde je $s = 2^{(x+1)^2}-1$, $F(x)$ se sada može uprostiti na sledeći način

$$F(x) = \frac{\log_{2^{(x+1)^2}-1}\left(\log_{2x^2+2x+3}(x^2-2x)\right)}{\log_{2^{(x+1)^2}-1}(x^2+6x+10)} = \log_{x^2+6x+10}\left(\log_{2x^2+2x+3}(x^2-2x)\right) \geq 0$$

Da bi logaritam bio definisan, neophodno je da osnova bude pozitivna i različita od 1. Kako je

$$x^2+6x+10 = x^2+6x+9+1 = (x+3)^2+1 \geq 1$$

gde jednakost važi za $x=-3$, sledi $x \neq -3$, odnosno rešenja dalje treba tražiti u skupu realnih brojeva

$$x \in \mathbb{R}\backslash\{-3,-2,-1,0\}.$$

Sada imamo

$$\log_{x^2+6x+10}\left(\log_{2x^2+2x+3}(x^2-2x)\right) \geq 0$$

$$\log_{x^2+6x+10}\left(\log_{2x^2+2x+3}(x^2-2x)\right) \geq \log_{x^2+6x+10} 1$$

i kako je $x^2+6x+10 > 1$

$$\log_{2x^2+2x+3}(x^2-2x) \geq 1$$

Proverimo osnovu ove logaritamske funkcije (mora biti pozitivna i različita od 1)

$$2x^2+2x+3 = x^2+x^2+2x+1+2 = \underbrace{x^2}_{\geq 0} + \underbrace{(x+1)^2}_{\geq 0} + 2 \geq 2$$

što znači da su oba uslova ispunjena. Dalje imamo

$$\log_{2x^2+2x+3}(x^2-2x) \geq 1$$

$$\log_{2x^2+2x+3}(x^2-2x) \geq \log_{2x^2+2x+3} 2x^2+2x+3$$

i kako je $2x^2+2x+3 \geq 2 > 1$ dalje sledi

$$x^2-2x \geq 2x^2+2x+3$$

$$x^2+4x+3 \leq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4\cdot 3}}{2} = \begin{cases} -3 \\ -1 \end{cases}$$

te su rešenja ove nejednačine u skupu

$$x \in [-3,-1]$$

Kako je prethodnim uslovima zadato da se realna rešenja mogu naći u skupu

$$x \in \mathbb{R}\backslash\{-3,-2,-1,0\}$$

to se skup svih realnih rešenja može predstaviti u obliku

$$x \in (-3,-2) \cup (-2,-1).$$

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE ZA UPIS NA ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

1. Vrednost izraza $\left(\frac{(-0.4)^3}{(-0.8)^3} - \frac{(-0.8)^3}{(-0.4)^3}\right) : \left(\frac{3}{4} - 3\right)$ jednaka je:

(A) $\frac{7}{2}$ (B) $\frac{63}{8}$ (C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{5}{9}$ (E) $\frac{7}{9}$ (N) Ne znam

2. Ukupan broj dijagonala pravilnog desetougla je:

(A) 15 (B) 20 (C) 25 (D) 30 (E) 35 (N) Ne znam

3. Ako je $f(x) = x^3 - 3x$ i $g(x) = \sin \frac{\pi}{12}x$, tada je $f(g(2))$ jednako:

(A) 0 (B) $-\frac{11}{2}$ (C) $\frac{11}{2}$ (D) $-\frac{11}{8}$ (E) $\frac{11}{8}$ (N) Ne znam

4. Rešenje jednačine $2^{16^x} = 16^{2^x}$ jeste:

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{4}{5}$ (E) $\frac{5}{6}$ (N) Ne znam

5. Ako se zna da je polinom $x^3 + ax^2 + bx - 4$ $(a, b \in \mathbb{R})$ deljiv polinomom $x^2 - 1$, tada zbir $a^2 + b^2$ iznosi:

(A) 1 (B) 17 (C) 5 (D) 3 (E) 14 (N) Ne znam

6. Koeficijent uz $x^{27}y^2$ u razvoju binoma $(x^3 + \sqrt{y})^{13}$ jednak je:

(A) 12 (B) 1516 (C) 1312 (D) 715 (E) 78 (N) Ne znam

7. Jednačina kruga čiji centar je tačka preseka pravih $x - 2y + 4 = 0$ i $3x + y - 9 = 0$ a koji dodiruje pravu $3x + 4y + 2 = 0$ glasi:

(A) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 2 = 0$ (B) $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$

(C) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ (D) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 1 = 0$

(E) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 1 = 0$ (N) Ne znam

8. Pravilna četvorostrana prizma presečena je sa ravni koja sadrži osnovnu ivicu prizme. Ako je površina preseka ravni i prizme dva puta veća od površine baze, tada je ugao izmeju te ravni i baze prizme jednak:

(A) 15° (B) 30° (C) 45° (D) 60° (E) 75° (N) Ne znam

9. Zbir prvih 2012 članova aritmetičke progresije $\frac{2011}{2012}, \frac{2010}{2012}, \frac{2009}{2012}, \ldots$ iznosi:

(A) $\frac{2013}{2}$ (B) $\frac{2013}{4}$

(C) $\frac{2011}{4}$ (D) $\frac{2011}{2}$

(E) Nijedan od ponuđenih odgovora (N) Ne znam

10. Ako je $a \in \mathbb{R}$ i $\left|a + \frac{1}{a}\right| = 3$, tada je $\left|a - \frac{1}{a}\right|$ jednako:

(A) $\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{7}$ (E) 0 (N) Ne znam

11. Koja od navedenih relacija postoji između rešenja x_1 i x_2 kvadratne jednačine $x^2 - 6x + 5 + m(x^2 - 5x + 6) = 0\,(m \in \mathbb{R}, m \neq -1)$?

(A) $x_1 + x_2 + 4x_1x_2 = 2$ (B) $x_1 + x_2 + x_1x_2 - 11 = 0$
(C) $x_1 + x_2 - x_1x_2 + 2 = 0$ (D) $x_1 + x_2 - x_1x_2 = 4$
(E) $x_1 + x_2 + 3x_1x_2 = 1$ (N) Ne znam

12. Vrednost izraza $8\sin^2 80^\circ - 2\sqrt{3}\sin 40^\circ - 2\cos 40^\circ$, jednaka je:

(A) 2 (B) $2\sqrt{3}$ (C) $4\sqrt{3}$ (D) 4 (E) 1 (N) Ne znam

13. Ako je $\log_2 3 = a$ i $\log_5 2 = b$, tada je $\log_{24} 50$ jednako:

(A) $\dfrac{b+2}{b(a+3)}$ (B) $\dfrac{b+1}{b(a+4)}$
(C) $\dfrac{b-2}{b(a-4)}$ (D) $\dfrac{b+1}{b(a+3)}$
(E) $\dfrac{b-2}{(b+1)(a+3)}$ (N) Ne znam

14. Stranice trougla su 21 i $9\sqrt{2}$ a njima zahvaćeni ugao 45°. Zbir poluprečnika upisanog i opisanog kruga tog trougla je:

(A) $3(2-\sqrt{3})$ (B) $6(\sqrt{2}-1)$ (C) $6(\sqrt{2}+1)$ (D) $6(2+\sqrt{3})$ (E) $6(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ (N) Ne znam

15. Ako je $i^2 = -1$ i ε kompleksan broj koji zadovoljava uslov $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, tada je rešenje jednačine $\dfrac{x-1}{x+1} = \varepsilon\dfrac{1+i}{1-i}$ po x, jednako:

(A) $-2\varepsilon + 1 - 2i$ (B) $-2\varepsilon - 1 + 2i$ (C) $-2\varepsilon - 1 - 2i$ (D) $2\varepsilon + 1 - 2i$ (E) $2\varepsilon - 1 - 2i$ (N) Ne znam

16. Ukupan broj realnih rešenja jednačine $\sqrt{3 \cdot 2^{\log_{10} 2x} + 1} + \sqrt{2 \cdot 2^{\log_{10} 2x} + 9} = \sqrt{13 \cdot 2^{\log_{10} 2x} - 4}$ je:

(A) 0 (B) 1
(C) 2 (D) 3
(E) Nijedan od ponuđenih odgovora (N) Ne znam

17. Ukupan broj realnih rešenja jednačine $3\,\mathrm{tg}^2 x - 8\cos^2 x + 1 = 0$ koja pripadaju intervalu $(0, 2\pi)$ je:

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6 (N) Ne znam

18. Skup svih realnih rešenja nejednačine $\dfrac{|1-x|}{1-|x|} < \dfrac{1+|x|}{|1+x|}$ je oblika (za neke realne brojeve a i b takve da je $0 < a < b < +\infty$):

(A) $(-\infty, -a)$ (B) $(a, +\infty)$
(C) $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$ (D) $(-b, -a) \cup (a, b)$
(E) $(-\infty, -a) \cup (-a, a) \cup (a, +\infty)$ (N) Ne znam

19. Na koliko načina se u red mogu poređati 5 učenika i 2 učenice, tako da učenice ne stoje jedna pored druge?

(A) 240 (B) 3600 (C) 7680 (D) 2400 (E) 250 (N) Ne znam

20. Najmanja vrednost funkcije $f(x) = 4x + \dfrac{9\pi^2}{x} + \sin x$ za $0 < x < +\infty$ je:

(A) $5\pi + 2$ (B) $\dfrac{5\pi}{2}$ (C) $12\pi - 1$ (D) $3\pi + 1$ (E) π^2 (N) Ne znam

REŠENJA

1. Ⓐ

$$\left(\frac{(-0.4)^3}{(-0.8)^3}-\frac{(-0.8)^3}{(-0.4)^3}\right):\left(\frac{3}{4}-3\right)=-\left(\frac{1}{2^3}-2^3\right)\cdot\frac{4}{9}=\frac{63}{8}\cdot\frac{4}{9}=\frac{7}{2}.$$

---

2. Ⓔ Ukupan broj dijagonala u pravilnom poligonu sa N uglova jednak je ukupnom broju duži između svaka dva od njegovih N temena umanjenom za broj stranica N:

$$\frac{N(N-1)}{2}-N$$

za $N=10$ imamo

$$\frac{10\cdot 9}{2}-10=35.$$

---

3. Ⓓ

$$g(x)=\sin\frac{\pi}{12}x \Rightarrow g(2)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$f(x)=x^3-3x \Rightarrow f(g(2))=f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{3}{2}=-\frac{11}{8}.$$

---

4. Ⓑ Kako važi

$$2^{16^x}=2^{\left(2^4\right)^x}=2^{2^{4x}}$$

$$16^{2^x}=\left(2^4\right)^{2^x}=2^{4\cdot 2^x}=2^{2^{x+2}}$$

to jednačina

$$2^{16^x}=16^{2^x}$$

postaje

$$2^{2^{4x}}=2^{2^{x+2}}$$

pa izjednačavanjem eksponenata dobijamo ekvivalentnu jednačinu

$$4x=x+2 \iff x=\frac{2}{3}.$$

---

5. Ⓑ Kako je

$$\left(x^3+ax^2+bx-4\right):\left(x^2-1\right)=x+a+\frac{(b+1)x+a-4}{x^2-1}$$

da bi zadati polinom bio deljiv polinomom x^2-1 potrebno je da ostatak pri deljenju bude jednak nuli, odnosno

$$(b+1)x+a-4=0$$

izjednačavanjem koeficijenata na levoj i desnoj strani jednačine dobijamo

$$b+1=0 \iff b=-1$$

i

$$a-4=0 \iff a=4$$

tako da imamo

$$a^2+b^2=1+16=17.$$

6.Ⓓ Za razvoj binoma važi izraz

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

U našem slučaju je $a = x^3$, $b = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$ i $n = 13$.
Kako je

$$a^{n-k}b^k = \left(x^3\right)^{n-k} y^{\frac{k}{2}} = x^{3(n-k)}y^{\frac{k}{2}}$$

to je

$$a^{n-k}b^k = x^{27}y^2$$

ispunjeno za

$$x^{27}y^2 = x^{3(n-k)}y^{\frac{k}{2}} \iff k = 4 \text{ i } n = 13.$$

Sada je koeficijent uz ovaj član

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} = \binom{13}{4} = \frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 13\cdot 11\cdot 5 = 715.$$

7.Ⓒ Tačka preseka pravih $x - 2y + 4 = 0$ i $3x + y - 9 = 0$ dobija se rešavanjem sistema jednačina

$$x - 2y + 4 = 0$$

$$3x + y - 9 = 0$$

Iz druge jednačine dobijamo $y = 9 - 3x$, što smenom u prvoj daje

$$x - 18 + 6x + 4 = 0 \iff 7x = 14 \iff x = 2$$

odnosno

$$y = 9 - 3x = 9 - 6 = 3$$

Znači da se centar kruga nalazi u tački $(x_c, y_c) = (2, 3)$. Udaljenost ove tačke od prave $ax + by + c = 0$ data je formulom

$$d = \frac{|ax_c + by_c + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

U našem slučaju prava je data jednačinom $3x + 4y + 2 = 0$ te je $a = 3, b = 4, c = 2$ i za udaljenost se dobija

$$d = \frac{|3\cdot 2 + 4\cdot 3 + 2|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{20}{5} = 4$$

Kako krug dodiruje ovu pravu, to je ova udaljenost ujedno i poluprečnik kruga $R = d = 4$. Jednačina kruga poluprečnika R sa centrom u tački (x_c, y_c) je

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$$

i u našem slucaju se dobija

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4^2 \iff x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0.$$

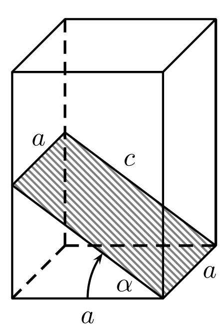
8.Ⓓ

Na slici je prikazana pravilna četvorostrana prizma sa osnovom čija je ivica dužine a i površine

$$B = a^2$$

Neka je α ugao koji ravan zaklapa sa osnovom prizme. Tada je presek ravni i prizme pravougaonik sa jednom ivicom dužine a i drugom ivicom dužine (videti sliku)

$$c = \frac{a}{\cos\alpha}$$



te je površina ovog preseka

$$P = ac = \frac{a^2}{\cos\alpha}$$

Prema uslovima zadatka važi

$$P = 2B$$

odakle sledi

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \iff \alpha = 60^{\circ}.$$

9.Ⓓ Zadata aritmetička progresija se može predstaviti u obliku

$$a_1 = \frac{2011}{2012},\ d = -\frac{1}{2012}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Zbir prvih 2012 članova je

$$\begin{aligned} S_{2012} &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2011} \\ &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + 2011d) \\ &= 2012a_1 + (1 + 2 + 3 + \cdots + 2011)d \end{aligned}$$

Kako je

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 2011 = \frac{(2011+1)\cdot 2011}{2} = \frac{2012 \cdot 2011}{2}$$

to dalje imamo

$$S_{2012} = 2012 \cdot \frac{2011}{2012} - \frac{2012 \cdot 2011}{2} \cdot \frac{1}{2012} = \frac{2011}{2}.$$

10.Ⓐ

$$\left|a + \frac{1}{a}\right| = 3 \overset{()^2}{\Rightarrow} \left|a + \frac{1}{a}\right|^2 = 3^2 \iff \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 9$$

$$a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 = 9 \iff a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 + 4 = 9 \iff \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = 5$$

$$\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = 5 \overset{\sqrt{()}}{\Rightarrow} \left|a - \frac{1}{a}\right| = \sqrt{5}.$$

11.Ⓑ Zadata kvadratna jednačina je oblika

$$x^2 - 6x + 5 + m(x^2 - 5x + 6) = 0 \iff (m+1)x^2 - (5m+6)x + 6m + 5 = 0 \iff x^2 - \frac{5m+6}{m+1}x + \frac{6m+5}{m+1} = 0$$

gde je $m \neq -1$.

Ako su x_1 i x_2 rešenja ove jednačine, tada se ona može predstaviti i u sledećem obliku

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0 \iff x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$$

Izjednačavanjem koeficijenata polinoma s leve i desne strane jednačine

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 - \frac{5m+6}{m+1}x + \frac{6m+5}{m+1}$$

dobijamo

$$x_1 + x_2 = \frac{5m+6}{m+1} = \frac{5(m+1)+1}{m+1} = 5 + \frac{1}{m+1}$$

$$x_1x_2 = \frac{6m+1}{m+1} = \frac{6(m+1)-1}{m+1} = 6 - \frac{1}{m+1}$$

Sada imamo

$$x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 5 + \frac{1}{m+1} + 6 - \frac{1}{m+1} = 11$$

odnosno

$$x_1 + x_2 + x_1 x_2 - 11 = 0.$$

---

12. Ⓓ Važe sledeće jednakosti

$$\sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^o = \frac{1}{2}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

odakle imamo

$$\begin{aligned} -2\sqrt{3}\sin 40^o - 2\cos 40^o &= -4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 40^o + \frac{1}{2}\cos 40^o\right) \\ &= -4(\sin 60^o \sin 40^o + \cos 60^o \cos 40^o) \\ &= -4\cos(60^o - 40^o) = -4\cos 20^o \end{aligned}$$

Koristeći

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \iff 2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

za $\alpha = 80^o$ imamo

$$2\sin^2 80^o = 1 - \cos 160^o$$

te zadati izraz dobija ekvivalentni oblik

$$\begin{aligned} 8\sin^2 80^o - 2\sqrt{3}\sin 40^o - 2\cos 40^o &= 4(1 - \cos 160^o) - 4\cos 20^o \\ &= 4 - 4(\cos 160^o + \cos 20^o) \\ &= 4 - 4(\cos(180^o - 20^o) + \cos 20^o) \\ &= 4 - 4(-\cos 20^o + \cos 20^o) = 4. \end{aligned}$$

---

13. Ⓐ

$$\log_{24} 50 = \frac{\log_2 2\cdot 5^2}{\log_2 3\cdot 2^3} = \frac{\log_2 2 + \log_2 5^2}{\log_2 3 + \log_2 2^3} = \frac{1 + 2\log_2 5}{\log_2 3 + 3\log_2 2} = \frac{1 + 2\frac{\log_5 5}{\log_5 2}}{\log_2 3 + 3} = \frac{1 + \frac{2}{\log_5 2}}{3 + \log_2 3}$$

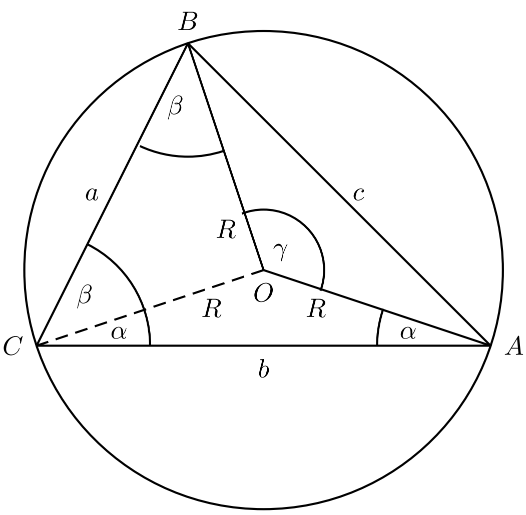
uzimajući u obzir $a = \log_2 3$ i $b = \log_5 2$ iz prethodnog izraza dobijamo

$$\log_{24} 50 = \frac{1 + \frac{2}{\log_5 2}}{3 + \log_2 3} = \frac{1 + \frac{2}{b}}{3 + a} = \frac{b + 2}{b(a+3)}.$$

---

14. Ⓒ

Posmatrajmo najpre trougao ABC sa opisanim krugom sa centrom u tački O. Uslovom zadatka je dato $\angle ACB = \alpha + \beta = 45^o$, $a = 21$ i $b = 9\sqrt{2}$.



Sa slike vidimo da važi $OA = OB = OC = R$ te da su trouglovi AOB, AOC, i BOC jednakokraki (sa kracima dužine poluprečnika opisanog kruga R i osnovicama koje odgovaraju stranicama trougla ABC).

Neka je $\alpha = \angle OAC = \angle OCA$ i $\beta = \angle OBC = \angle OCB$. Kako su trouglovi AOC i BOC jednakokraki to su uglovi zahvaćeni njihovim kracima jednaki $\angle AOC = \pi - 2\alpha$ i $\angle BOC = \pi - 2\beta$, te za ugao $\angle AOB$ važi

$$\gamma = \angle AOB = 2\pi - (\pi - 2\alpha) - (\pi - 2\beta) = 2(\alpha + \beta) = 90^o$$

dakle, trougao AOB je pravougli pa iz Pitagorine teoreme za hipotenuzu $c = AB$ dobijamo

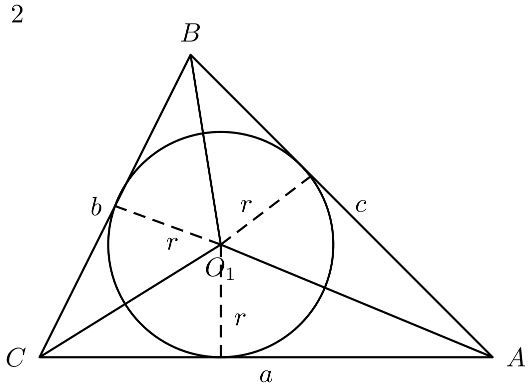
$$c^2 = 2R^2 \Rightarrow R = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

Slično, iz kosinusne teoreme za trougao ABC imamo

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha+\beta) = a^2 + b^2 - 2ab\cos 45^{\circ} = 21^2 + (9\sqrt{2})^2 - 2\cdot 21\cdot 9\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 225 \iff c = 15$$

Iz prethodne dve jednačine za poluprečnik opisanog kruga dobijamo

$$R = \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{15\sqrt{2}}{2}$$



Posmatrajmo sada isti trougao sa upisanim krugom poluprečnika r. Važe sledeće jednakosti za površine trouglova ABC, AO_1B, AO_1C, BO_1C:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin\angle ACB = \frac{1}{2}21\cdot 9\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{189}{2}$$

$$P_{AO_1B} = \frac{1}{2}cr$$

$$P_{BO_1C} = \frac{1}{2}br$$

$$P_{AO_1C} = \frac{1}{2}ar$$

Kako je

$$P_{ABC} = P_{AO_1B} + P_{BO_1C} + P_{AO_1C}$$

to dobijamo jednakost

$$r(a+b+c) = 2P_{ABC}$$

odakle se za poluprečnik upisanog kruga r dobija

$$r = \frac{2P_{ABC}}{a+b+c} = \frac{189}{36+9\sqrt{2}} = \frac{21}{4+\sqrt{2}} = \frac{21(4-\sqrt{2})}{14}$$

Konačno dobijamo

$$R + r = 15\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{21(4-\sqrt{2})}{14} = 6(\sqrt{2}+1).$$

---

15. Ⓓ

$$\frac{x-1}{x+1} = \varepsilon\frac{1+i}{1-i} = \varepsilon\frac{(1+i)(1+i)}{1-i^2} = \varepsilon\frac{1+2i-1}{2} = i\varepsilon$$

$$x - 1 = i\varepsilon(x+1) \iff x(1-i\varepsilon) = 1 + i\varepsilon$$

$$x = \frac{1+i\varepsilon}{1-i\varepsilon} = \frac{(1+i\varepsilon)(1+i\varepsilon)}{(1-i\varepsilon)(1+i\varepsilon)} = \frac{1+2i\varepsilon+i^2\varepsilon^2}{1-(i\varepsilon)^2}$$

$$x = \frac{1+2i\varepsilon-\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} = \frac{1+\varepsilon^2+2i\varepsilon-2\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}$$

$$x = 1 + \frac{2\varepsilon(i-\varepsilon)}{1+\varepsilon^2}$$

Prema uslovu zadatka važi $\varepsilon^2+\varepsilon+1 = 0 \iff 1+\varepsilon^2 = -\varepsilon$ te sledi

$$x = 1 + \frac{2\varepsilon(i-\varepsilon)}{-\varepsilon} = 1 - 2i + 2\varepsilon.$$

16.Ⓑ Smenom

$$t = 2^{\log_{10} 2x} > 0$$

zadata jednačina

$$\sqrt{3 \cdot 2^{\log_{10} 2x} + 1} + \sqrt{2 \cdot 2^{\log_{10} 2x} + 9} = \sqrt{13 \cdot 2^{\log_{10} 2x} - 4}$$

postaje

$$\sqrt{3t+1} + \sqrt{2t+9} = \sqrt{13t-4}$$

pri čemu za realna rešenja mora da važi

$$3t + 1 \geq 0 \iff t \geq -\frac{1}{3} \text{ što je uvek ispunjeno jer je } t > 0$$

$$2t + 9 \geq 0 \iff t \geq -\frac{9}{2} \text{ što je uvek ispunjeno jer je } t > 0$$

i

$$13t - 4 \geq 0 \iff t \geq \frac{4}{13}$$

Dakle, rešenja treba tražiti u skupu $t \geq \dfrac{4}{13}$.

Podizanjem na kvadrat leve i desne strane gornje jednačine dalje dobijamo

$$3t + 1 + 2t + 9 + 2\sqrt{(3t+1)(2t+9)} = 13t - 4$$

$$\sqrt{(3t+1)(2t+9)} = 4t - 7, \text{ gde je neophodan uslov } 4t - 7 \geq 0 \iff t \geq \frac{7}{4} = 1.75$$

Rešenja dalje tražimo u skupu $t \geq 1.75$. Sada kvadriranjem prethodne jednačine dalje dobijamo

$$(3t+1)(2t+9) = 16t^2 - 56t + 49$$

$$10t^2 - 85t + 40 = 0 \iff 2t^2 - 17t + 8 = 0$$

čija su rešenja jednaka

$$t_{1/2} = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 8 \cdot 8}}{4} = \frac{17 \pm \sqrt{225}}{4} = \frac{17 \pm 15}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ 8 \end{cases}$$

Kako je $t_1 = \dfrac{1}{2} < 1.75$ to je jedino realno rešenje zadate jednačine

$$t_2 = 8$$

$$2^{\log_{10} 2x} = 8 = 2^3$$

$$\log_{10} 2x = 3 = \log_{10} 10^3$$

$$2x = 1000$$

$$x = 500.$$

17.Ⓒ Koristeći identitet

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

zadata jednačina

$$3 \operatorname{tg}^2 x - 8\cos^2 x + 1 = 0$$

se može transformisati na sledeći način

$$3(\operatorname{tg}^2 + 1) - 3 - 8\cos^2 x + 1 = 0 \iff 3(\operatorname{tg}^2 + 1) - 8\cos^2 x - 2 = 0$$

$$\frac{3}{\cos^2 x} - 8\cos^2 x - 2 = 0 \Rightarrow 3 - 8\cos^4 x - 2\cos^2 x = 0$$

smenom $t = \cos^2 x \geq 0$ dalje dobijamo

$$8t^2 + 2t - 3 = 0$$

rešenja ove kvadratne jednačine su jednaka

$$t_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 8 \cdot 3}}{16} = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{16} = \frac{-2 \pm 10}{16} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Kako je $t = \cos^2 x \geq 0$ to je jedino realno rešenje $t_1 = \frac{1}{2}$ odakle sledi

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \iff \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Broj realnih brojeva koji ispunjavaju gornju jednačinu u intervalu $(0, 2\pi)$ je 4:

$$x_1 = \frac{\pi}{4},\ x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{4},\ x_3 = \pi - \frac{\pi}{4} \text{ i } x_4 = \pi + \frac{\pi}{4}.$$

18.Ⓒ Za realna rešenja nejednačine

$$\frac{|1-x|}{1-|x|} < \frac{1+|x|}{|1+x|}$$

neophodno je da važi

$$1 - |x| \neq 0 \iff x \neq \pm 1$$

Kako je $1 + |x| > 0$ i $|1 + x| > 0$ to se zadata nejednačina može napisati u sledećem ekvivalentnom obliku

$$\frac{|1-x|}{1-|x|}\frac{|1+x|}{1+|x|} < 1$$

$$\frac{|1-x||1+x|}{1-|x|^2} - 1 < 0$$

$$\frac{|(1-x)(1+x)|}{1-x^2} - 1 < 0$$

$$\frac{|1-x^2|}{1-x^2} - 1 < 0$$

1. Za $1 - x^2 > 0 \iff (x-1)(x+1) < 0 \iff x \in (-1, 1)$:

$$|1 - x^2| = 1 - x^2 \Rightarrow \frac{|1-x^2|}{1-x^2} - 1 = \frac{1-x^2}{1-x^2} - 1 < 0 \Rightarrow 0 < 0 \Rightarrow x \in \emptyset$$

2. Za $1 - x^2 \leq 0 \iff (x-1)(x+1) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$:

$$|1 - x^2| = -(1 - x^2) \Rightarrow \frac{|1-x^2|}{1-x^2} - 1 = -\frac{1-x^2}{1-x^2} - 1 < 0 \Rightarrow -2 < 0 \Rightarrow \forall x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

Kako važi uslov $x \neq \pm 1$, to je skup realnih rešenja zadate nejednačine

$$x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty),\ \text{gde je } a = 1.$$

19.Ⓑ U ovom zadatku, redosled rasporeda je važan.

Ukupan broj različitih načina na koji se u red mogu poređati 7 đaka (od kojih su 5 učenika i 2 učenice) dat je brojem permutacija

$$N = 7!$$

(na prvoj poziciji može biti jedan od sedam đaka, na drugoj jedan od šest, na trećoj jedan od pet, i tako redom, na poslednjoj preostali jedan đak $\to 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdots 1 = 7!$).

Izračunajmo najpre broj načina suprotne situacije: na koliko načina se u red mogu poređati ovih sedmoro đaka tako da učenice uvek stoje jedna pored druge.

1. Neka su učenice na susednim pozicijama jedan i dva: Dve učenice se mogu rasporediti na ove pozicije na 2! načina, dok se na preostalim pozicijama pet preostalih učenika može rasporediti na 5! načina. Ukupan broj načina je $2! \cdot 5! = 2 \cdot 5!$.
2. Neka su učenice na susednim pozicijama dva i tri: Dve učenice se mogu rasporediti na ove pozicije na 2! načina, dok se na preostalim pozicijama pet preostalih učenika može rasporediti na 5! načina. Ukupan broj načina je opet $2! \cdot 5! = 2 \cdot 5!$.
3. Slično se dobija za učenice na susednim pozicijama 3 i 4, 4 i 5, 5 i 6, 6 i 7

Dakle, ukupan broj slučajeva u kojima su učenice jedna pored druge je 6 i u svakom od tih slučajeva ukupan broj različitih rasporeda je $2 \cdot 5!$. Sledi da je ukupan broj načina u kojima su učenice jedna pored druge

$$\bar{N} = 6 \cdot 2 \cdot 5! = 2 \cdot 6!$$

Sada je ukupan broj načina na koji se u red mogu poređati đaci tako da učenice ne stoje jedna pored druge jednak:

$$N - \bar{N} = 7! - 2 \cdot 6! = 4 \cdot 6! = 5 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3600.$$

20.Ⓒ Funkcija

$$f(x) = 4x + \frac{9\pi^2}{x} + \sin x$$

će imati minimalnu vrednost kada je njen izvod jednak nuli $f'(x_0) = 0$, odakle dalje sledi

$$f'(x_0) = 4 - \frac{9\pi^2}{x^2} + \cos x\bigg|_{x=x_0} = 4\left(1 - \frac{3\pi}{2}\frac{1}{x_0}\right)\left(1 + \frac{3\pi}{2}\frac{1}{x_0}\right) + \cos x_0$$

Za $x_0 = \frac{3\pi}{2}$ je $1 - \frac{3\pi}{2}\frac{1}{x_0} = 0$ i $\cos x_0 = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$ te je $x_0 = \frac{3\pi}{2}$ rešenje jednačine

$$f'(x_0) = 0.$$

U ovoj tački funkcija $f(x)$ ima minimalnu vrednost

$$\begin{aligned} f(\frac{3\pi}{2}) &= 4\frac{3\pi}{2} + \frac{9\pi^2}{x^2}\frac{2}{3\pi} + \sin\frac{3\pi}{2} \\ &= 6\pi + 6\pi - 1 = 12\pi - 1. \end{aligned}$$

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE ZA UPIS NA ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

1. Koji od pet datih izraza ima različitu vrednost od ostala četiri izraza?

(A) 2^8 (B) 4^4 (C) $8^{8/3}$ (D) 16^2 (E) $32^{6/5}$ (N) Ne znam

2. Vrednost izraza $\left(\dfrac{i^{2011}+i^{2012}}{i^{2013}-i^{2014}}\right)^{2015}$, $(i^2=-1)$, jednaka je:

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) i (E) $-i$ (N) Ne znam

3. Ako je $|x|>2$, $x\in\mathbb{R}$ tada je izraz $\dfrac{x+2+\sqrt{x^2-4}}{x+2-\sqrt{x^2-4}}+\dfrac{x+2-\sqrt{x^2-4}}{x+2+\sqrt{x^2-4}}$ identički jednak:

(A) 4 (B) -4 (C) x (D) $2x$ (E) $4x$ (N) Ne znam

4. Ukupan broj realnih rešenja jednačine $\dfrac{\sqrt{(x+1)^2}}{x+1}=|x+1|$ je:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4 (N) Ne znam

5. Zbir $\sin\dfrac{3\pi}{7}+\sin\dfrac{4\pi}{7}$ jednak je:

(A) $-2\sin\dfrac{\pi}{14}$ (B) $-2\cos\dfrac{\pi}{14}$ (C) $2\sin\dfrac{\pi}{14}$ (D) $2\cos\dfrac{\pi}{7}$ (E) $2\cos\dfrac{\pi}{14}$ (N) Ne znam

6. Osnovice jednakokrakog trapeza su 15 cm i 5 cm a kraci 13 cm. Njegova visina (u cm) iznosi:

(A) 16 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 9 (N) Ne znam

7. AKo su x_1 i x_2 koreni kvadratne jednačine $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}=1$, tada je izraz $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}$ jednak:

(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{2}{3}$ (C) 2 (D) 3 (E) 5 (N) Ne znam

8. Neka su u proizvoljnom trouglu α,β i γ uglovi a,b i c dužine stranica naspram datih uglova i R poluprečnik opisanog kruga, tada je $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma}$ jednako:

(A) R^2 (B) $2R^2$ (C) $3R^2$ (D) $4R^2$ (E) $5R^2$ (N) Ne znam

9. Ako je $f(x)=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$ $(x\neq\pm1)$ tada je $f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)-f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ jednako:

(A) $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$ (B) $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$ (C) 0 (D) $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ (E) $-\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$ (N) Ne znam

10. Prave $-ax+y-3=0$, $x-by+2=0$ seku se u centru kruga $x^2+y^2-2x+4y-10=0$. Ugao između ovih pravih je:

(A) 60° (B) 30° (C) 90° (D) 45° (E) 75° (N) Ne znam

11. Ukupan broj realnih rešenja sistema jednačina $\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{5}{2}$, $x^2+y^2=20$ jeste:

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8 (N) Ne znam

12. Zbir beskonačne geometrijske progresije $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2}+\cdots$ jednak je:

(A) $2+\sqrt{2}$ (B) $2-\sqrt{2}$ (C) 1 (D) $4+3\sqrt{2}$ (E) $4-3\sqrt{2}$ (N) Ne znam

13. Ostatak pri deljenju polinoma $x^{243}+x^{81}+x^{27}+x^9+x^3+x$ polinomom x^2-1 iznosi:

(A) 0 (B) 1 (C) $2x$ (D) $4x$ (E) $6x$ (N) Ne znam

14. Na koliko načina od 2 matematičara i 8 inženjera možemo formirati petočlanu komisiju u kojoj će biti bar jedan matematičar?

(A) 196 (B) 248 (C) 70 (D) 56 (E) 140 (N) Ne znam

15. Zbir svih realnih rešenja jednačine $\sqrt{\sin^2 x+\dfrac{1}{2}}+\sqrt{\cos^2 x+\dfrac{1}{2}}=2$ na segmentu $[0,2\pi]$ iznosi:

(A) π (B) 2π

(C) 3π (D) 4π

(E) Nijedan od ponuđenih odgovora (N) Ne znam

16. U razvoju binoma $(x+y)^n$ $(x,y\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N})$ drugi član je jednak 240, treći član 720 a četvrti 1080. Tada je zbir $x+y+n$ jednak:

(A) 11 (B) 9 (C) 10 (D) 25 (E) 280 (N) Ne znam

17. Maksimalni obim pravougaonika upisanog u krug datog poluprečnika r iznosi:

(A) $5\sqrt{2}r$ (B) $4\sqrt{2}r$

(C) $\sqrt{2}r$ (D) $3\sqrt{2}r$

(E) Nijedan od ponuđenih odgovora (N) Ne znam

18. Osnova prave četvorostrane piramide je pravougaonik dijagonale d i ugla α među dijagonalama. Ako bočne ivice obrazuju sa osnovom piramide ugao β, tada je zapremina ove piramide jednaka:

(A) $\dfrac{d^3}{12}\sin\alpha\,\mathrm{ctg}\beta$ (B) $\dfrac{d^3}{12}\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta$

(C) $\dfrac{d^3}{4}\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta$ (D) $\dfrac{d^3}{12}\sin\dfrac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\beta$

(E) $\dfrac{d^3}{12}\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta$ (N) Ne znam

19. Sva realna rešenja jednačine $\log_{2011}(2010x)=\log_{2010}(2011x)$ pripadaju intervalu:

(A) $\left(0,\frac{1}{2011}\right]$ (B) $\left(\frac{1}{2011},\frac{1}{2010}\right]$ (C) $\left(\frac{1}{2011},1\right]$ (D) $\left(1,\frac{2011}{2010}\right]$ (E) $\left(\frac{2011}{2010},+\infty\right)$ (N) Ne znam

20. Skup svih realnih vrednosti x za koje važi nejednakost $\dfrac{3\cdot 3^{2x}-4\cdot 4^{2x}}{|-1+5^{x+1}|-4}<0$ je oblika (za neke realne brojeve a,b takve da je $-\infty<a<b<+\infty$) :

(A) $(0,a)$ (B) $(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$

(C) $[a,b]$ (D) (a,b)

(E) $(a,b)\cup(b,+\infty)$ (N) Ne znam

REŠENJA

1.Ⓔ Kako je:

$$4^4 = \left(2^2\right)^4 = 2^{2\cdot 4} = 2^8$$

$$8^{8/3} = \left(\left(2^3\right)^{\frac{1}{3}}\right)^8 = 2^{3\cdot\frac{1}{3}\cdot 8} = 2^8$$

$$16^2 = \left(2^4\right)^2 = 2^{4\cdot 2} = 2^8$$

jedini izraz koji nema istu vrednost kao ostali je:

$$32^{6/5} = \left(2^5\right)^{\frac{6}{5}} = 2^{5\cdot\frac{6}{5}} = 2^6$$

2.Ⓓ

$$\frac{i^{2011}+i^{2012}}{i^{2013}-i^{2014}} = \frac{i^{2011}(1+i)}{i^{2013}(1-i)} = \frac{1}{i^2}\frac{1+i}{1-i} = -1\frac{(1+i)(1-i)}{1-i^2} = -\frac{1+2i+i^2}{1+1} = -i$$

$$\left(\frac{i^{2011}+i^{2012}}{i^{2013}-i^{2014}}\right)^{2015} = (-i)^{2015} = (-1)^{2015}\cdot i^{2015} = -i^{2015} = -i\cdot i^{2014} = -i\cdot(i^2)^{1007} = -i(-1)^{1007} = i.$$

3.Ⓒ

$$\begin{aligned}
&\frac{x+2+\sqrt{x^2-4}}{x+2-\sqrt{x^2-4}} + \frac{x+2-\sqrt{x^2-4}}{x+2+\sqrt{x^2-4}} \\
&\qquad = \frac{\left(x+2+\sqrt{x^2-4}\right)^2}{(x+2)^2-(\sqrt{x^2-4})^2} + \frac{\left(x+2-\sqrt{x^2-4}\right)^2}{(x+2)^2-(\sqrt{x^2-4})^2} \\
&\qquad = \frac{(x+2)^2+2(x+2)\sqrt{x^2-4}+x^2-4+(x+2)^2-2(x+2)\sqrt{x^2-4}+x^2-4}{x^2+4x+4-(x^2-4)} \\
&\qquad = \frac{2(x+2)^2+2(x-2)(x+2)}{4(x+2)} \\
&\qquad \overset{x\neq -2}{=} \frac{1}{2}(x+2+x-2) = x.
\end{aligned}$$

4.Ⓑ Kako važi

$$\sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$$

to dalje imamo

$$\frac{\sqrt{(x+1)^2}}{x+1} = |x+1| \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{|x+1|}{x+1} = |x+1|$$

kako je $x+1\neq 0 \iff x\neq -1$ to deljenjem obe strane jednačine sa $|x+1|\neq 0$ dobijamo

$$\frac{1}{x+1} = 1 \iff x+1 = 1 \iff x = 0$$

te jednačina ima samo jedno realno rešenje.

5.Ⓔ Kako je

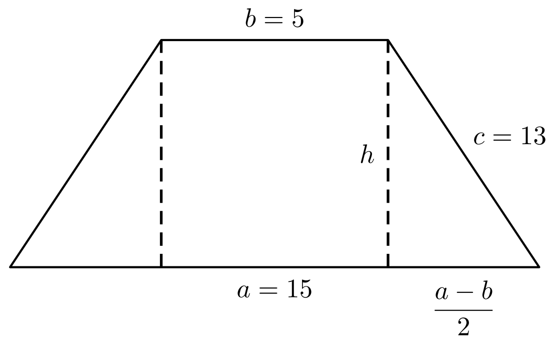
$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

za $\alpha = \dfrac{3\pi}{7}$ i $\beta = \dfrac{4\pi}{7}$ dobijamo

$$\sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} = 2\cos\frac{3\pi-4\pi}{2\cdot 7}\sin\frac{3\pi+4\pi}{2\cdot 7} = 2\cos\frac{-\pi}{14}\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} = 2\cos\frac{\pi}{14}.$$

6.Ⓓ
Sa slike se za visinu trapeza, iz Pitagorine teoreme, dobija

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow h = 12.$$



7.Ⓓ Zadata jednačina je za $x \neq 1, 2$ ekvivalentna redom kvadratnoj jednačini

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = 1 \iff x - 2 + x - 1 = (x-1)(x-2) \iff 2x - 3 = x^2 - 3x + 2$$

$$x^2 - 5x + 5 = 0$$

Ako su x_1 i x_2 rešenja ove kvadratne jednačine tada važi

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2) + x_1x_2 = x^2 - 5x + 5$$

Izjednačavanjem koeficijenata polinoma dobijamo

$$x_1 + x_2 = 5$$

$$x_1x_2 = 5$$

Sada dobijamo

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{25 - 10}{5} = 3.$$

8.Ⓓ Koristeći sinusnu teoremu za trougao stranica a, b, c i uglova α, β, γ

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

gde je R poluprečnik opisanog kruga, imamo

$$a^2 = 4R^2 \sin^2\alpha$$

$$b^2 = 4R^2 \sin^2\beta$$

$$c^2 = 4R^2 \sin^2\gamma$$

te se za izraz u brojiocu ima

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2 \left(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma\right)$$

Koristeći identitet $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, izraz u imeniocu se može transformisati na sledeći način

$$3 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma = 3 - (1 - \sin^2\alpha) - (1 - \sin^2\beta) - (1 - \sin^2\gamma) = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$$

Zamenom u polaznoj jednačini dobijamo

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma} = \frac{4R^2\left(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma\right)}{\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma} = 4R^2.$$

9.Ⓒ

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2, \quad x \neq \pm 1$$

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \left(\frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x-1} - 1}\right)^2 = \left(\frac{x + 1 + x - 1}{x + 1 - x + 1}\right)^2 = x^2$$

$$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \left(\frac{\frac{x-1}{x+1}+1}{\frac{x-1}{x+1}-1}\right)^2 = \left(\frac{x-1+x+1}{x-1-x-1}\right)^2 = x^2$$

Iz gornjih jednačina sledi

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = x^2 - x^2 = 0.$$

10.Ⓓ Zadatu jednačinu kruga možemo predstaviti u ekvivalentnom obliku

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 10 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 4y + 4 - 4 - 10 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 15$$

što poređenjem sa opštom jednačinom kruga sa centrom u tački (x_c, y_c) i poluprečnikom R

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$$

daje $x_c = 1$ i $y_c = -2$. Kako se zadate prave seku u centru ovog kruga, to tačka $(x_c, y_c) = (1, -2)$ pripada obema pravama te su ispunjene sledeće jednačine

$$-ax_c + y_c - 3 = 0 \iff -a - 5 = 0 \iff a = -5$$

$$x_c - by_c + 2 = 0 \iff 1 + 2b + 2 = 0 \iff b = -\frac{3}{2}$$

Jednačine zadatih pravih se sada mogu predstaviti u sledećem obliku

$$-ax + y - 3 = 0 \iff 5x + y - 3 = 0 \iff y = -5x + 3 = k_1x + b_1,\ k_1 = \operatorname{tg}\phi_1 = -5$$

$$x - by + 2 = 0 \iff x + \frac{3}{2}y + 2 = 0 \iff y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3} = k_2x + b_2,\ k_2 = \operatorname{tg}\phi_2 = -\frac{2}{3}$$

gde su ϕ_1 i ϕ_2 uglovi koje ove dve prave zaklapaju sa x-osom. Ugao između pravih $\phi_2 - \phi_1$ se može izračunati iz sledećih relacija

$$\operatorname{tg}(\phi_2 - \phi_1) = \frac{\operatorname{tg}\phi_2 - \operatorname{tg}\phi_1}{1 + \operatorname{tg}\phi_1 \operatorname{tg}\phi_2} = \frac{-\frac{2}{3} + 5}{1 + \frac{10}{3}} = \frac{15 - 2}{3 + 10} = 1$$
$$\phi_2 - \phi_1 = \operatorname{arctg}(1) = 45^{\circ}.$$

11. Ⓒ Prva jednačina zadatog sistema se za $x \neq \pm y$ može predstaviti na sledeći način

$$\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{5}{2}$$

$$(x+y)^2 + (x-y)^2 = \frac{5}{2}(x-y)(x+y)$$

$$x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 = \frac{5}{2}(x^2 - y^2)$$

$$\frac{4}{5}(x^2 + y^2) = x^2 - y^2$$

gde zamenom druge jednačine $x^2 + y^2 = 20$ dobijamo

$$x^2 - y^2 = \frac{4}{5} \cdot 20 = 16$$

Sada imamo sledeći sistem jednačina, čijim rešavanjem dobijamo:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 = 20 \\ x^2 - y^2 = 16 \end{aligned}\right\} \oplus \Rightarrow 2x^2 = 36 \iff x^2 = 18 \iff x = \pm 3\sqrt{2}$$

$$y^2 = 20 - x^2 = 20 - 18 = 2 \iff y = \pm\sqrt{2}$$

Rešenja ovog sistema su sve moguće kombinacije gornjih rešenja za x i y pri čemu mora da važi $x \neq \pm y$:

$$(-3\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-3\sqrt{2}, +\sqrt{2}), (+3\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (+3\sqrt{2}, +\sqrt{2}),$$

tj. sistem ima 4 realna rešenja.

---

12. Ⓓ Prva tri člana zadate geometrijske progresije su

$$a_1 = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

$$a_2 = \frac{1}{2-\sqrt{2}} = \frac{1}{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{((\sqrt{2})^2 - 1^2)\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$$

$$a_3 = \frac{1}{2}$$

Kako važi

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} = \frac{(\sqrt{2})^2 - 1^2}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}$$

i

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}$$

to se zadata geometrijska progresija može predstaviti u obliku

$$a_1 = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

$$a_n = q^{n-1}a_1, \quad q = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} < 1$$

Sada za zbir ove geometrijske progresije važi

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = a_1(1 + q + q^2 + \cdots) = \frac{a_1}{1-q}$$

te zamenom vrednosti za a_1 i q konačno dobijamo

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \frac{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}(\sqrt{2}+1)^2 = 4 + 3\sqrt{2}.$$

13.Ⓔ Ako je $R(x) = r_1x + r_0$ ostatak pri deljenju polinoma $P(x) = x^{243} + x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + x$ polinomom $x^2 - 1$, pri čemu količnik $Q(x)$ mora biti polinom stepena $n = 243 - 2 = 241$, tada važi sledeća relacija

$$P(x) = (x^2 - 1)Q(x) + R(x)$$

Rešenje A.

Imamo

$$P(x) = (x^2 - 1)Q(x) + r_1x + r_0$$

odakle za $x = \pm 1$ dobijamo

$$P(-1) = ((-1)^2 - 1)Q(-1) - r_1 + r_0 = -r_1 + r_0$$

i

$$P(1) = (1^2 - 1)Q(1) + r_1 + r_0 = r_1 + r_0$$

S druge strane važi

$$P(-1) = (-1)^{243} + (-1)^{81} + (-1)^{27} + (-1)^9 + (-1)^3 + (-1) = -6$$

i

$$P(1) = 1^{243} + 1^{81} + 1^{27} + 1^9 + 1^3 + 1 = 6$$

Iz jednakosti za $P(-1)$ i $P(1)$ imamo sistem jednačina sa dve nepoznate

$$-r_1 + r_0 = -6$$

$$r_1 + r_0 = 6$$

čijim rešavanjem dobijamo

$$r_0 = 0 \wedge r_1 = 6$$

te je

$$R(x) = r_1x + r_0 = 6x.$$

Rešenje B.

Neka je

$$Q(x) = a_{241}x^{241} + a_{240}x^{240} + a_{239}x^{239} + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Za desnu stranu gornje jednačine imamo

$$\begin{aligned}(x^2-1)Q(x) + R(x) &= (x^2 - 1)\cdot\left(a_{241}x^{241} + a_{240}x^{240} + a_{239}x^{239} + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0\right) + r_1x + r_0\\ &= a_{241}x^{243} + a_{240}x^{242} + a_{239}x^{241} + a_{238}x^{240} + a_{237}x^{239} + \cdots + a_1x^3 + a_0x^2\\ &\quad - a_{241}x^{241} - a_{240}x^{240} - a_{239}x^{239} - \cdots - a_3x^3 - a_2x^2 - a_1x - a_0\\ &\quad + r_1x + r_0\end{aligned}$$

odakle sledi

$$\begin{aligned}x^{243} + x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + x = {}& a_{241}x^{243} + a_{240}x^{242} + (a_{239} - a_{241})x^{241} + (a_{238} - a_{240})x^{240} + \cdots\\ &+ (a_1 - a_3)x^3 + (a_0 - a_2)x^2 + (r_1 - a_1)x + r_0 - a_0\end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenata polinoma sa leve i desne strane gornje jednačine redom dobijamo

$$\begin{aligned}
a_{241} &= 1\\
a_{240} &= 0\\
a_{239} - a_{241} &= 0 \Rightarrow a_{239} = a_{241} = 1\\
a_{238} - a_{240} &= 0 \Rightarrow a_{238} = a_{240} = 0\\
a_{237} - a_{239} &= 0 \Rightarrow a_{237} = a_{239} = 1\\
&\vdots\\
a_{79} - a_{81} &= 1 \Rightarrow a_{79} = 1 + a_{81} = 2\\
a_{78} - a_{80} &= 0 \Rightarrow a_{78} = a_{80} = 0\\
a_{77} - a_{79} &= 0 \Rightarrow a_{77} = a_{79} = 2\\
a_{76} - a_{78} &= 0 \Rightarrow a_{76} = a_{78} = 0\\
&\vdots\\
a_{25} - a_{27} &= 1 \Rightarrow a_{25} = 1 + a_{27} = 3\\
a_{24} - a_{26} &= 0 \Rightarrow a_{24} = a_{26} = 0\\
a_{23} - a_{25} &= 0 \Rightarrow a_{23} = a_{25} = 3\\
a_{22} - a_{24} &= 0 \Rightarrow a_{22} = a_{24} = 0\\
&\vdots\\
a_7 - a_9 &= 1 \Rightarrow a_7 = 1 + a_9 = 4\\
a_6 - a_8 &= 0 \Rightarrow a_6 = a_8 = 0\\
a_5 - a_7 &= 0 \Rightarrow a_5 = a_7 = 4\\
a_4 - a_6 &= 0 \Rightarrow a_4 = a_6 = 0\\
&\vdots\\
a_1 - a_3 &= 1 \Rightarrow a_1 = 1 + a_3 = 5\\
a_0 - a_2 &= 0 \Rightarrow a_0 = a_2 = 0\\
r_1 - a_1 &= 1 \Rightarrow r_1 = 1 + a_1 = 6\\
r_0 - a_0 &= 0 \Rightarrow r_0 = a_0 = 0
\end{aligned}$$

Konačno, za ostatak deljenja se dobija

$$R(x) = r_1 x + r_0 = 6x.$$

14.Ⓐ Iz skupa od 2 matematičara i 8 inženjera treba formirati komisiju od pet članova tako da je u njoj bar jedan matematičar. Imamo dve međusobno isključive mogućnosti

1. U komisiji su tačno jedan matematičar i četiri inženjera.

   Jednog matematičara iz skupa od 2 matematičara možemo izabrati na $\binom{2}{1}$ načina.

   Četiri inženjera iz skupa od 8 inženjera možemo izabrati na $\binom{8}{4}$ načina, pa je ukupan broj ovakvih komisija
$$\binom{2}{1}\cdot\binom{8}{4}$$

2. U komisiji su tačno dva matematičara i tri inženjera.

   Dva matematičara iz skupa od 2 matematičara možemo izabrati na $\binom{2}{2}$ načina.

   Tri inženjera iz skupa od 8 inženjera možemo izabrati na $\binom{8}{3}$ načina, pa je ukupan broj ovakvih komisija
$$\binom{2}{2}\cdot\binom{8}{3}$$

Sada se za ukupan broj petočlanih komisija u kojima je bar jedan matematičar ima
$$\binom{2}{1}\cdot\binom{8}{4}+\binom{2}{2}\cdot\binom{8}{3}=2\cdot\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}+1\cdot\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}=28\cdot 5+56=196.$$

Zadatak se može rešiti i na sledeći način. Ukupan broj petočlanih komisija iz skupa od 10 stručnjaka (2 matematičara + 8 inženjera) se može izabrati na
$$\binom{10}{5}\text{ načina}$$

Ukupan broj petočlanih komisija u kojima nema nijednog matematičara dobija se biranjem pet članova iz skupa od 8 inženjera, što se može učiniti na
$$\binom{8}{5}\text{ načina}$$

Sada je ukupan broj komisija u kojima je bar jedan matematičar jednak razlici
$$\binom{10}{5}-\binom{8}{5}=196.$$

15.Ⓓ Uvedimo smenu promenljivih
$$t=\cos^2 x+\frac{1}{2}$$
tada je
$$\sin^2 x+\frac{1}{2}=1-\cos^2 x+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}-(\cos^2 x+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}=2-t$$
pa jednačina
$$\sqrt{\sin^2 x+\frac{1}{2}}+\sqrt{\cos^2 x+\frac{1}{2}}=2$$
postaje
$$\sqrt{2-t}+\sqrt{t}=2$$
pri čemu je neophodno da važi $t\geq 0$ i $2-t\geq 0 \iff t\leq 2$.

Kvadriranjem obe strane gornje jednačine dalje sledi
$$2-t+t+2\sqrt{t(2-t)}=4$$
$$\sqrt{t(2-t)}=1 \xrightarrow{()^2} t(2-t)=1 \iff t^2-2t+1=0 \iff (t-1)^2=0 \iff t=1$$

Rešenje $t = 1$ ispunjava uslove $0 \leq t \leq 2$.

Dalje imamo

$$t = \cos^2 x + \frac{1}{2} = 1 \iff \cos^2 x = \frac{1}{2} \iff \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Sva rešenja poslednje jednačine u skupu $x \in [0, 2\pi]$ su

$$x_1 = \frac{\pi}{4},\ x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{4},\ x_3 = \pi - \frac{\pi}{4},\ x_4 = \pi + \frac{\pi}{4}$$

te traženi zbir rešenja u zadatom skupu iznosi

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4\pi.$$

16.Ⓒ Prva četiri člana u razvoju binoma $(x+y)^n$ su

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \cdots$$

Prema uslovima zadatka važe sledeće jednakosti

$$nx^{n-1}y = 240$$
$$\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 = 720$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2}x^{n-3}y^3 = 1080$$

Deljenjem treće jednačine drugom dobijamo

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2}x^{n-3}y^3 \cdot \frac{2}{n(n-1)}\frac{1}{x^{n-2}y^2} = \frac{1080}{720} \Rightarrow \frac{n-2}{3}\frac{y}{x} = \frac{9}{2} \iff \frac{y}{x} = \frac{9}{2}\frac{3}{n-2}$$

Deljenjem druge jednačine prvom na sličan način dobijamo

$$\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 \cdot \frac{1}{nx^{n-1}y} = \frac{720}{240} \Rightarrow (n-1)\frac{y}{x} = 6 \iff \frac{y}{x} = \frac{6}{n-1}$$

Iz poslednja dva izraza imamo

$$\frac{9}{2}\frac{3}{n-2} = \frac{6}{n-1} \iff 12n - 24 = 9n - 9 \iff n = 5$$

Dalje važi

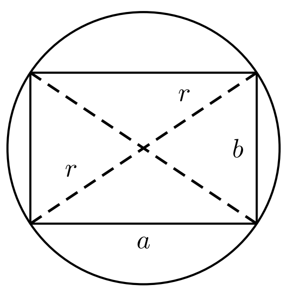
$$\frac{y}{x} = \frac{6}{n-1} = \frac{3}{2} \text{ što smenom u } nx^{n-1}y = 240 \iff 5x^4y = 240 \text{ daje}$$
$$x^4 \cdot \frac{3}{2}x = 48 \iff x^5 = 32 = 2^5 \iff x = 2 \text{ i } y = \frac{3}{2}x = 3$$

Sada je konačno

$$x + y + n = 2 + 3 + 5 = 10.$$

17.Ⓑ

Na slici je prikazan krug poluprečnika r sa upisanim pravougaonikom stranica a, b. Dijagonala pravougaonika jednaka je prečniku kruga, te na osnovu Pitagorine teoreme za pravougaoni trougao kateta a i b i osnovice $d = 2r$ imamo



$$(2r)^2 = a^2 + b^2 \iff b = \sqrt{4r^2 - a^2}$$

Obim ovog pravougaonika je

$$O = 2(a+b) = 2(a + \sqrt{4r^2 - a^2})$$

i biće maksimalan, kada je izvod sledeće funkcije jednak nuli

$$f(a) = a + \sqrt{4r^2 - a^2}$$

Sada imamo

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}a} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{4r^2 - a^2}} \cdot (-2a) = 1 - \frac{a}{\sqrt{4r^2 - a^2}}$$

te iz uslova

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}a} = 0$$

dobijamo jednačinu po nepoznatoj a

$$1 - \frac{a}{\sqrt{4r^2 - a^2}} = 0 \iff a = \sqrt{4r^2 - a^2} \Rightarrow a^2 = 4r^2 - a^2 \iff a^2 = 2r^2 \Rightarrow a = r\sqrt{2}$$

Za maksimalni obim upisanog pravougaonika se dobija

$$O_{\max} = 2\left(a + \sqrt{4r^2 - a^2}\right) = 2r\sqrt{2} + 2\sqrt{4r^2 - 2r^2} = 4r\sqrt{2}.$$

18.Ⓑ Na slici levo je prikazana osnova prave četvorostrane piramide (pravougaonik dijagonale d i ugla između dijagonala α). Površina ovog pravougaonika se može izraziti kao zbir površina četiri trougla koje grade dijagonale i stranice pravougaonika

$$\begin{aligned} B &= 2\left(\frac{1}{2}\frac{d}{2} \cdot \frac{d}{2} \sin\alpha + \frac{1}{2}\frac{d}{2} \cdot \frac{d}{2} \sin(\pi - \alpha)\right) \\ &= \frac{1}{4}d^2 \sin\alpha + \frac{1}{4}d^2 \sin\alpha \\ &= \frac{1}{2}d^2 \sin\alpha \end{aligned}$$

Na slici desno je prikazan trougao koji obrazuju dijagonala piramide i dve bočne ivice piramide. Kako je ugao između dijagonale i bočnih ivica β to imamo

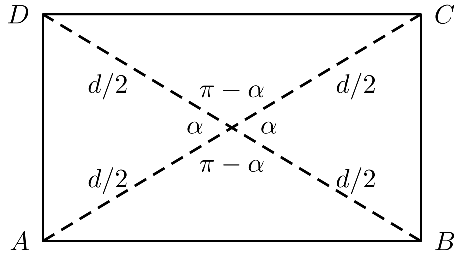
$$\operatorname{tg}\beta = \frac{H}{\frac{d}{2}} = \frac{2H}{d}$$

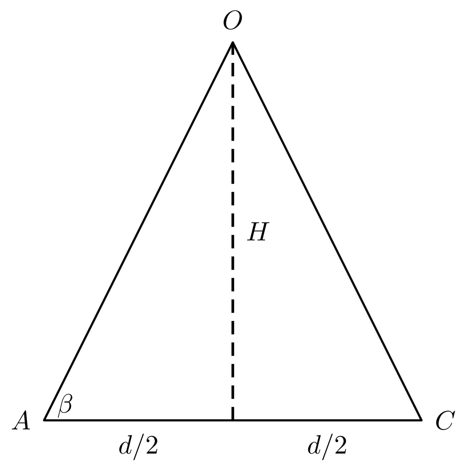
te se za visinu piramide H dobija

$$H = \frac{d}{2}\operatorname{tg}\beta$$

Sada je zapremina piramide

$$V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}d^2 \sin\alpha \cdot \frac{d}{2}\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{12}d^3 \sin\alpha \operatorname{tg}\beta.$$





19.Ⓐ

$$\log_{2011}(2010x) = \log_{2010}(2011x)$$
$$\log_{2011} 2010 + \log_{2011} x = \log_{2010} 2011 + \log_{2010} x$$
$$\log_{2011} 2010 - \log_{2010} 2011 = \log_{2010} x - \log_{2011} x$$
$$\log_{2011} 2010 - \frac{\log_{2011} 2011}{\log_{2011} 2010} = \frac{\log_{2011} x}{\log_{2011} 2010} - \log_{2011} x$$
$$\log_{2011} 2010 - \frac{1}{\log_{2011} 2010} = \log_{2011} x \frac{1 - \log_{2011} 2010}{\log_{2011} 2010}$$
$$(\log_{2011} 2010)^2 - 1 = \log_{2011} x\,(1 - \log_{2011} 2010)$$
$$(\log_{2011} 2010 - 1)(\log_{2011} 2010 + 1) = \log_{2011} x\,(1 - \log_{2011} 2010)$$
$$\log_{2011} x = -(\log_{2011} 2010 + 1) = -(\log_{2011} 2010 + \log_{2011} 2011) = -\log_{2011}(2010 \cdot 2011)$$
$$\log_{2011} x = \log_{2011}(2010 \cdot 2011)^{-1}$$
$$x = \frac{1}{2010 \cdot 2011} \in \left(0, \frac{1}{2011}\right]$$

20.Ⓑ Označimo

$$P(x) = 3 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 4^{2x}$$

i

$$Q(x) = |5^{x+1} - 1| - 4$$

sada treba rešiti nejednakost

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$$

1. Odredimo najpre znak funkcije $P(x)$.

$$P(x) = 3 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 4^{2x} = 3^{2x+1} - 4^{2x+1}$$

$$P(x) > 0 \iff 3^{2x+1} - 4^{2x+1} > 0 \iff 3^{2x+1} > 4^{2x+1} \iff \left(\frac{4}{3}\right)^{2x+1} < 1 \iff \left(\frac{4}{3}\right)^{2x+1} < \left(\frac{4}{3}\right)^{0}$$

Kako je $\frac{4}{3} > 1$ to dalje važi

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{2x+1} < \left(\frac{4}{3}\right)^{0} \iff 2x + 1 < 0 \iff x < -\frac{1}{2}$$

Dakle,

$$P(x) > 0, \quad x < -\frac{1}{2}$$
$$P(x) < 0, \quad x > -\frac{1}{2}$$

2. Odredimo sada znak funkcije $Q(x)$. Razlikujemo slučajeve

   a) $|5^{x+1} - 1| = 5^{x+1} - 1$ za $5^{x+1} - 1 > 0 \iff 5^{x+1} > 1 \iff 5^{x+1} > 5^0 \iff x + 1 > 0 \iff x > -1$
   Sada $Q(x)$ postaje

   $$Q(x) = |5^{x+1} - 1| - 4 = 5^{x+1} - 1 - 4 = 5^{x+1} - 5$$

   te se za znak funkcije $Q(x)$, za $x > -1$ dobija

   $$Q(x) > 0 \iff 5^{x+1} - 5 > 0 \iff 5^{x+1} > 5^1 \iff x + 1 > 1 \iff x > 0$$

   Dakle, imamo

   $$Q(x) > 0, \quad x > 0$$
   $$Q(x) < 0, \quad -1 < x < 0$$

b) Za $x < -1$ imamo $|5^{x+1} - 1| = -5^{x+1} + 1$. Sada $Q(x)$ postaje

$$Q(x) = |5^{x+1} - 1| - 4 = -5^{x+1} + 1 - 4 = -5^{x+1} - 3$$

kako su oba sabirka u gornjem izrazu negativna za svako $x \in \mathbb{R}$ to za znak funkcije u ovom skupu realnih brojeva važi

$$Q(x) < 0, x < -1$$

Dakle, za znak funkcije $Q(x)$ konačno dobijamo

$$Q(x) > 0, \quad x > 0$$
$$Q(x) < 0, \quad x < 0$$

U sledećoj tabeli su sumirani prethodni rezultati za znak funkcija $P(x)$, $Q(x)$ i $P(x)/Q(x)$:

$x \in$	$(-\infty, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, 0)$	$(0, +\infty)$
$P(x)$	$+$	$-$	$-$
$Q(x)$	$-$	$-$	$+$
$P(x)/Q(x)$	$-$	$+$	$-$

Dakle

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \text{ za } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty).$$

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE ZA UPIS NA ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

1. Vrednost izraza $\frac{3}{100}+\frac{5}{1000}+\frac{7}{100000}$ jednaka je:

(A) 0.357 (B) 0.3507 (C) 0.35007 (D) 0.0357 (E) 0.03507 (N) Ne znam

2. Ako je $x=-1$, vrednost izraza $-(x^4+x^3+x^2+x)$ iznosi:

(A) -1 (B) -4 (C) 0 (D) 4 (E) 10 (N) Ne znam

3. Ako je $f\left(\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}\right)=x$, tada je $f(2)$ jednako:

(A) 0 (B) -2 (C) -1 (D) 1 (E) 2 (N) Ne znam

4. Dužina one tetive kruga $x^2+y^2+4x-4y-17=0$, čija je sredina u tački $P(0,3)$, jednaka je:

(A) $\sqrt{5}$ (B) $2\sqrt{5}$ (C) $4\sqrt{5}$ (D) $5\sqrt{5}$ (E) $6\sqrt{5}$ (N) Ne znam

5. Ako je $\sin 41^{\circ}=a$, $\cos 41^{\circ}=b$, $\sin 18^{\circ}=c$, $\cos 18^{\circ}=d$, tada je $\sin(-23^{\circ})$ jednak:

(A) $ab-cd$ (B) $bc-ad$

(C) $ac-bd$ (D) $ac+bd$

(E) Nijedan od navedenih odgovora (N) Ne znam

6. Ako je $i=\sqrt{-1}$ tada vrednost izraza $\frac{(1+i)^{2010}}{(1-i)^{2011}}-\frac{(1-i)^{2012}}{(1+i)^{2013}}$ iznosi:

(A) i (B) 1 (C) -1 (D) $-i$ (E) 0 (N) Ne znam

7. Ostatak pri deljenju polinoma $3x^5+2x^4+3$ binomom $x+1$ jeste:

(A) $x+2$ (B) -3 (C) -2 (D) 2 (E) $3x+1$ (N) Ne znam

8. Ako je $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\frac{a}{b}}$, $(a>0,\ b>0,\ a\neq b)$ tada je $\sin x$ jednak:

(A) $\frac{b-a}{b+a}$ (B) $\sqrt{b}-\sqrt{a}$ (C) $\frac{a+b}{a-b}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ (E) $1-\frac{b}{a}$ (N) Ne znam

9. Ako je $a>0$ i $x>\sqrt{a}$, tada je izraz $\sqrt{\frac{a+x^2}{x}-2\sqrt{a}}+\sqrt{\frac{a+x^2}{x}+2\sqrt{a}}$ identički jednak:

(A) $2\sqrt{x}$ (B) $2\sqrt{\frac{a}{x}}$ (C) $\frac{2a}{\sqrt{x}}$ (D) $\frac{2}{\sqrt{x}}$ (E) $\sqrt{a}+\sqrt{x}$ (N) Ne znam

10. Ako se zna da se binomni koeficijenti petog i trećeg člana u razvoju binoma $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$ $(x>0,\ n\in\mathbb{N})$ odnose kao $7:2$, tada je član koji sadrži x jednak:

(A) $34x$ (B) $81x$ (C) $84x$ (D) $2x$ (E) x (N) Ne znam

11. Povećanjem poluprečnika osnove valjka za 6 jedinica njegova zapremina se poveća za y kubnih jedinica. Povećanjem visine valjka za 6 jedinica njegova zapremina takođe se poveća za y kubnih jedinica. Ako je početna visina valjka jednaka 2, tada je početni poluprečnik valjka jednak:

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) π (N) Ne znam

12. Dati su iskazi:
I) Nejednačina $|x-1| \leq 0$ nema realnih rešenja;
II) Nejednačina $|-x^2-4| \geq 0$ je tačna za svaku realnu vrednost x;
III) Nejednačina $|x+1| + |x^2+x| \leq 0$ nema realnih rešenja.
Tada:

(A) Tačan je samo iskaz I (B) Tačan je samo iskaz II
(C) Tačan je samo iskaz III (D) Nijedan od navedenih iskaza nije tačan
(E) Sva tri iskaza su tačna (N) Ne znam

13. Ukupan broj realnih rešenja jednačine $\sin^4 x - \cos^4 x = \cos 4x$ na segmentu $[0, 2\pi]$ je:

(A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 7 (E) 0 (N) Ne znam

14. Ako je u trouglu ABC ugao kod temena C jednak 60°, a stranice $BC = 8$ i $CA = 5$, tada je ugao kod temena A jednak:

(A) $\arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{143}}\right)$ (B) $\arcsin\left(\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$
(C) $\arcsin\left(\frac{3\sqrt{3}}{7}\right)$ (D) $\arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{143}}\right)$
(E) 45° (N) Ne znam

15. Skup svih realnih rešenja nejednačine $\sqrt{(x-3)(2-x)} \geq 3 + 2x$ je:

(A) $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ (B) $[2, 3]$
(C) $\left(-\frac{3}{2}, 3\right]$ (D) $[2, +\infty)$
(E) Nijedan od ponuđenih odgovora (N) Ne znam

16. Ukupan broj realnih rešenja jednačine $\left(1 + \frac{1}{2x}\right) \log 3 + \log 2 = \log(27 - 3^{\frac{1}{x}})$ je:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4 (N) Ne znam

17. Katete pravouglog trougla iznose 3 cm i 4 cm. Rastojanje između centara upisanog kruga i opisanog kruga tog trougla iznosi (u cm):

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (D) 2 (E) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (N) Ne znam

18. Trocifrenih brojeva, u čijem zapisu su sve tri cifre različite, ima:

(A) 728 (B) 720 (C) 642 (D) 648 (E) 450 (N) Ne znam

19. Neki članovi aritmetičkih progresija $17, 21, 25, 29, \ldots$ i $16, 21, 26, \ldots$ jednaki su među sobom. Tada zbir prvih 50 jednakih članova datih progresija iznosi:

(A) 25550 (B) 25020 (C) 26250 (D) 20500 (E) 24050 (N) Ne znam

20. Ako su m i M redom najmanja i najveća vrednost funkcije $y = x^3 - 2x|x-2|$ na segmentu $[0, 3]$, tada je zbir $m + M$ jednak:

(A) 5 (B) $\frac{527}{27}$ (C) $\frac{31}{27}$ (D) 29 (E) $\frac{607}{27}$ (N) Ne znam

REŠENJA

1.Ⓔ Kako je:

$$\frac{3}{100} = 0.03$$
$$\frac{5}{1000} = 0.005$$
$$\frac{7}{100000} = 0.00007$$

to imamo

$$\frac{3}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{7}{100000} = 0.03 + 0.005 + 0.00007 = 0.03507.$$

2.Ⓒ

$$x = -1$$
$$x^2 = 1$$
$$x^3 = -1$$
$$x^4 = 1$$
$$x^4 + x^3 + x^2 + x = 1 - 1 + 1 - 1 = 0.$$

3.Ⓑ

$$f\left(\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}\right) = x$$

Kako je

$$\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} = 2 \Rightarrow \frac{x-2}{x+1} = 4 \iff x - 2 = 4x + 4 \iff 3x = -6 \iff x = -2$$

to sledi

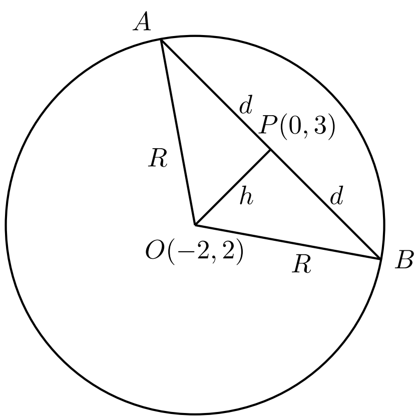
$$f(2) = -2.$$

4.Ⓒ Jednačina kruga se može napisati u obliku

$$x^2 + y^2 + 4x - 4y - 17 = 0 \iff (x^2 + 4x + 4) - 4 + (y^2 - 4y + 4) - 4 - 17 = 0 \iff (x+2)^2 + (y-2)^2 = 5^2$$

što odgovara krugu poluprečnika $R = 5$ sa centrom u tački $O(x_c, y_c) = (-2, 2)$.

Na slici je prikazan dati krug sa tetivom čija je sredina u tački $P(x_p, y_p) = (0, 3)$. Poluprečnici kruga R sa tetivom formiraju jednakokraki trougao AOB čija se visina može odrediti kao rastojanje između tačaka $O(x_c, y_c)$ i $P(x_p, y_p)$



$$h = \sqrt{(x_c - x_p)^2 + (y_c - y_p)^2} = \sqrt{(-2-0)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

Sada iz Pitagorine teoreme za pravougli trougao POA dobijamo da je polovina dužine tetive

$$d^2 = R^2 - h^2 = 25 - 5 = 4 \cdot 5 \Rightarrow d = 2\sqrt{5}$$

te je dužina tetive

$$D = 2d = 4\sqrt{5}.$$

5.Ⓑ

$$a = \sin 41^{\circ},\ b = \cos 41^{\circ},\ c = \sin 18^{\circ},\ d = \cos 18^{\circ}$$

Koristimo trigonometrijski identitet

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$$

Sada važi

$$\sin(-23^{\circ}) = -\sin(23^{\circ}) = -\sin(41^{\circ} - 18^{\circ}) = -\sin 41^{\circ}\cos 18^{\circ} + \sin 18^{\circ}\cos 41^{\circ} = -ad + cb = bc - ad.$$

6.Ⓒ

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i$$

$$\frac{1-i}{1+i} = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{-1} = \frac{1}{i} = -i$$

Dalje sledi

$$\frac{(1+i)^{2010}}{(1-i)^{2011}} = \frac{1}{1-i}\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2010} = \frac{1}{1-i}i^{2010} = \frac{1}{1-i}(i^2)^{1005} = \frac{1}{1-i}(-1)^{1005} = -\frac{1}{1-i}$$

$$\frac{(1-i)^{2012}}{(1+i)^{2013}} = \frac{1}{1+i}\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2012} = \frac{1}{1+i}(-i)^{2012} = \frac{1}{1+i}i^{2012} = \frac{1}{1+i}(i^2)^{1006} = \frac{1}{1+i}(-1)^{1006} = \frac{1}{1+i}$$

Sada konačno dobijamo

$$\frac{(1+i)^{2010}}{(1-i)^{2011}} - \frac{(1-i)^{2012}}{(1+i)^{2013}} = -\frac{1}{1-i} - \frac{1}{1+i} = -\frac{1+i+1-i}{(1-i)(1+i)} = -\frac{2}{1-i^2} = -1.$$

7.Ⓓ

Rešenje A.

Zadatak se može rešiti direktnim deljenjem zadatog polinoma binomom $x+1$ na sledeći način:

$$\begin{array}{l}
\big(\ 3x^5 + 2x^4 \qquad\qquad\qquad + 3\big) \div \big(x+1\big) = 3x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 + \dfrac{2}{x+1} \\
\underline{-3x^5 - 3x^4} \\
\qquad -x^4 \\
\qquad \underline{x^4 + x^3} \\
\qquad\qquad x^3 \\
\qquad\qquad \underline{-x^3 - x^2} \\
\qquad\qquad\quad -x^2 \\
\qquad\qquad\quad \underline{x^2 + x} \\
\qquad\qquad\qquad x + 3 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-x - 1} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 2
\end{array}$$

Rešenje B.

Neka je količnik pri deljenju polinoma $P(x) = 3x^5 + 2x^4 + 3$ binomom $x+1$, polinom $Q(x)$ (reda $5-1$) i ostatak polinom $R(x) = r$ (reda 0) tako da važi

$$P(x) = (x+1)Q(x) + r$$

odakle sledi

$$P(-1) = (-1+1)Q(1) + r = r$$

S druge strane imamo da važi

$$P(-1) = 3\dot{(}-1)^5 + 2\cdot(-1)^4 + 3 = -3 + 2 + 3 = 2$$

Iz poslednje dve jednakosti za $P(-1)$ direktno sledi

$$r = 2 \Rightarrow R(x) = r = 2.$$

Rešenje C.
Neka je količnik pri deljenju polinoma $P(x) = 3x^5 + 2x^4 + 3$ binomom $x + 1$, polinom $Q(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x1 + a_0$ (reda $5 - 1$) i ostatak polinom $R(x) = r$ (reda 0). Sada imamo sledeću jednakost

$$P(x) = (x + 1)Q(x) + R(x)$$

odnosno

$$\begin{aligned} 3x^5 + 2x^4 + 3 &= (x + 1)(a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) + r \\ &= a_4x^5 + a_3x^4 + a_2x^3 + a_1x^2 + a_0x \\ &\quad + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 + r \\ &= a_3x^5 + (a_3 + a_4)x^4 + (a_2 + a_3)x^3 + (a_1 + a_2)x^2 + (a_0 + a_1)x + a_0 + r \end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenata polinoma sa leve i desne strane gornje jednačine redom dobijamo:

$$\begin{aligned} a_4 &= 3 \\ a_3 + a_4 = 2 &\Rightarrow a_3 = 2 - a_4 = -1 \\ a_2 + a_3 = 0 &\Rightarrow a_2 = -a_3 = 1 \\ a_1 + a_2 = 0 &\Rightarrow a_1 = -a_2 = -1 \\ a_0 + a_1 = 0 &\Rightarrow a_0 = -a_1 = 1 \\ a_0 + r = 3 &\Rightarrow r = 3 - a_0 = 2 \end{aligned}$$

Dakle, ostatak pri deljenju je $R(x) = r = 2$.

8.Ⓐ Koristimo sledeće trigonometrijske identitete

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

Kako je

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \frac{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}$$

to dobijamo

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{a}{b}} \iff \frac{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Kvadriranjem prethodne jednakosti dalje imamo

$$\left(\frac{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$$

$$b(1 - \sin x) = a(1 + \sin x) \iff (a + b)\sin x = b - a \iff \sin x = \frac{b - a}{b + a}.$$

9.Ⓐ Važi

$$\sqrt{\frac{a+x^2}{x}-2\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{a+x^2-2\sqrt{a}\cdot x}{x}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{a})^2+x^2-2\sqrt{a}\cdot x}{x}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{a}-x)^2}{x}}=\frac{|x-\sqrt{a}|}{\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{\frac{a+x^2}{x}+2\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{a+x^2+2\sqrt{a}\cdot x}{x}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{a})^2+x^2+2\sqrt{a}\cdot x}{x}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{a}+x)^2}{x}}=\frac{|x+\sqrt{a}|}{\sqrt{x}}$$

Kako je $x>\sqrt{a}$, to imamo $|x-\sqrt{a}|=x-\sqrt{a}$ i $|x+\sqrt{a}|=x+\sqrt{a}$. Zadati izraz je identički jednak sledećem izrazu:

$$\sqrt{\frac{a+x^2}{x}-2\sqrt{a}}+\sqrt{\frac{a+x^2}{x}+2\sqrt{a}}=\frac{x-\sqrt{a}}{\sqrt{x}}+\frac{x+\sqrt{a}}{\sqrt{x}}=\frac{2x}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}.$$

10.Ⓒ Prvih pet članova u razvoju binoma $(a+b)^n$ dato je izrazom

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+\binom{n}{4}a^{n-4}b^4+\cdots$$

Po uslovu zadatka je

$$a=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}\quad b=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=x^{-\frac{2}{3}}$$

i odnos binomnog koeficijenta petog i trećeg člana

$$\frac{\binom{n}{4}}{\binom{n}{2}}=\frac{7}{2}\iff\frac{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}{\frac{n(n-1)}{2\cdot1}}=\frac{(n-2)(n-3)}{12}=\frac{7}{2}\iff(n-2)(n-3)=7\cdot6\iff n-2=7\iff n=9$$

Iz sledećeg uslova nalazimo član k koji sadrži x

$$a^{n-k}b^k=x\iff x^{\frac{9-k}{2}}\cdot x^{-\frac{2}{3}}=x^1\iff x^{\frac{9-k}{2}-\frac{2}{3}}=x^1$$

$$\frac{9-k}{2}-\frac{2}{3}=1\iff 27-3k-4k=6\iff 7k=21\iff k=3.$$

Sada je član koji sadrži x

$$\binom{n}{k}a^{n-k}b^k=\binom{9}{3}x=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}x=84x.$$

11.Ⓒ Neka je r početni poluprečnik kruga u osnovi valjka, i H njegova početna visina. Početna zapremina valjka je

$$V=BH=r^2\pi H$$

Prema uslovima zadatka, kad se poluprečnik osnove poveća za 6 jedinica, zapremina se poveća za y kubnih jedinica, te važi

$$V_1=r_1^2\pi H=(r+6)^2\pi H=V+y$$

Slično, povećanjem visine za 6 jedinica, imamo isto povećanje zapremine od y kubnih jedinica pa važi

$$V_2=r^2\pi H_2=r^2\pi(H+6)=V+y$$

Kako je $V_1=V_2=V+y$, iz prethodne dve jednačine sledi

$$(r+6)^2\pi H=r^2\pi(H+6)\iff(r+6)^2H=r^2(H+6)$$

i kako je $H=2$, to dalje važi

$$(r+6)^2\cdot2=r^2\cdot8\iff 4r^2=(r+6)^2\Rightarrow 2r=r+6\iff r=6.$$

12. Ⓑ Posmatrajmo svaki iskaz ponaosob:

I) $|x-1| \leq 0$ nema realnih rešenja.

Ovaj iskaz je očigledno netačan jer $x = 1$ ispunjava zadatu nejednakost (to je ujedno i jedino rešenje gornje nejednačine).

II) $|-x^2-4| \geq 0$ je tačno za svaku realnu vrednost x.

Kako je prema definiciji apsolutne vrednosti $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, to je zadata nejednakost $|-x^2-4| = |x^2+4| \geq 0$ ispunjena za svaku realnu vrednost x, te je ovaj iskaz tačan.

III) $|x+1| + |x^2+x| \leq 0$ nema realnih rešenja.

Kako je

$$|x+1| + |x^2+x| = |x+1| + |x(x+1)| = |x+1|(1+|x|) = 0 \text{ za } x = -1$$

to gornja nejednačina ima jedno realno rešenje te je ovaj iskaz takođe netačan.

Dakle, tačan je samo iskaz II).

---

13. Ⓑ Koristeći sledeće trigonometrijske identitete

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

dobijamo

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 - (\cos^2 x)^2 = \underbrace{(\sin^2 x - \cos^2 x)}_{=-\cos 2x}\underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{=1} = -\cos 2x$$

pa zadata jednačina poprima ekvivalentni oblik

$$-\cos 2x = \cos 4x = \cos(2\cdot 2x) = 2\cos^2 2x - 1 \iff 2\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0$$

Smenom $t = \cos 2x \in [-1, 1]$ dobijamo kvadratnu jednačinu

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

čija su rešenja

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\cdot 2}}{2\cdot 2} = \frac{-1\pm 3}{4} = \begin{cases} -1 \\ -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Kako oba rešenja ispunjavaju uslov $t \in [-1, 1]$ to imamo

$$\cos 2x = -1 \iff 2x = \pi + 2m\pi \iff x = \frac{\pi}{2} + m\pi$$

od kojih $x = \{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \pi\}$ pripadaju segmentu $[0, 2\pi]$

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \iff 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi \iff x = \pm\frac{\pi}{6} + n\pi$$

od kojih $x = \{\frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \pi, -\frac{\pi}{6} + 2\pi\}$ pripadaju segmentu $[0, 2\pi]$. Dakle, ukupan broj rešenja zadate jednačine na segmentu $[0, 2\pi]$ je: 6.

---

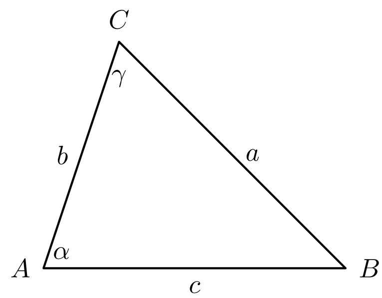
14. Ⓑ

Prema uslovima zadatka je (videti sliku)

$$a = 8,\ b = 5,\ \gamma = 60^o.$$

Traženi ugao α u temenu A se može izračunati primenom formule za površinu trougla ABC. Najpre, površina trougla se može izraziti preko poznatih stranica a i b i njima zahvaćenog ugla γ:

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}8\cdot 5\cdot \sin 60^o = 20\frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$



Na osnovu kosinusne teoreme, dužina stranice c iznosi

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = 8^2 + 5^2 - 80 \cdot \frac{1}{2} = 64 + 25 - 40 = 49 \Rightarrow c = 7$$

Sada je površina istog trougla izražena preko poznatih stranica b i c i njima zahvaćenog ugla α:

$$P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2P}{bc} = \frac{20\sqrt{3}}{5\cdot 7} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

odakle se za traženi ugao α dobija

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

15.Ⓔ Realna rešenja nejednačine

$$\sqrt{(x-3)(2-x)} \geq 3 + 2x$$

treba tražiti u skupu realnih brojeva x za koje je ispunjeno

$$(x-3)(2-x) \geq 0 \iff (x-2)(x-3) \leq 0 \iff x \in [2,3]$$

Kvadriranjem leve i desne strane zadate nejednakosti dobijamo

$$(x-3)(2-x) \geq (3+2x)^2 \iff -x^2 + 5x - 6 \geq 4x^2 + 12x + 9 \iff 5x^2 + 7x + 15 \leq 0$$

Kako je $x \in [2,3] > 0$ to je svaki sabirak u zbiru $5x^2 + 7x + 15$ veći od nule, pa važi

$$5x^2 + 7x + 15 > 0$$

i nejednačina $5x^2 + 7x + 15 \leq 0$ nema rešenja.

16.Ⓑ Važi

$$\left(1 + \frac{1}{2x}\right)\log 3 + \log 2 = \log 3^{\left(1+\frac{1}{2x}\right)} + \log 2 = \log\left(2 \cdot 3^{\left(1+\frac{1}{2x}\right)}\right)$$

te zadata jednačina postaje

$$\log\left(2 \cdot 3^{\left(1+\frac{1}{2x}\right)}\right) = \log(27 - 3^{\frac{1}{x}})$$

$$2 \cdot 3^{\left(1+\frac{1}{2x}\right)} = 27 - 3^{\frac{1}{x}}$$

$$6 \cdot 3^{\frac{1}{2x}} = 27 - 3^{\frac{1}{x}}$$

Uvođenjem smene $t = 3^{\frac{1}{2x}} > 0$ dalje imamo

$$6t = 27 - t^2 \iff t^2 + 6t - 27 = 0$$

Rešenja ove kvadratne jednačine su

$$t_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 4\cdot 27}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{-6 \pm 12}{2} = \begin{cases} -9 \\ 3 \end{cases}$$

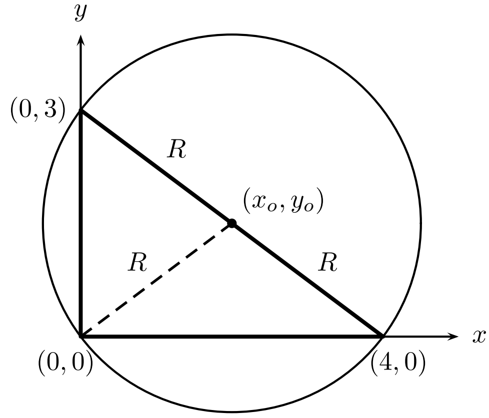
Kako važi uslov $t > 0$, to je $t_2 = 3$ jedino rešenje. Dalje važi

$$t = 3^{\frac{1}{2x}} = 3^1 \iff \frac{1}{2x} = 1 \iff x = \frac{1}{2}$$

tako da je ovo jedino rešenje zadate jednačine.

17. C

Na slici (iznad) je prikazan pravougli trougao sa katetama dužine $a = 3$ cm i $b = 4$ cm i sa centrom koordinatnog sistema smeštenim u temenu pravog ugla. Hipotenuza ovog trougla je prema Pitagorinoj teoremi



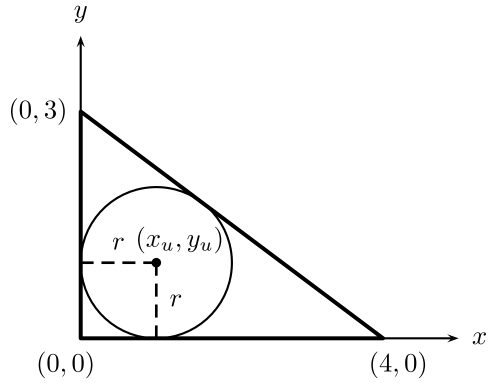
$$c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow c = 5$$

Centar opisanog kruga svakog pravouglog trougla se nalazi na sredini hipotenuze, pa su koordinate ove tačke

$$x_o = \frac{4+0}{2} = 2, \quad y_o = \frac{3+0}{2} = 1.5$$

Na slici (ispod) je isti pravougli trougao sa upisanim krugom. Poluprečnik upisanog kruga se može dobiti iz izraza

$$r = \frac{2P}{a+b+c}$$



gde je P površina trougla. Kako se radi o pravouglom trouglu, to važi

$$P = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}3 \cdot 4 = 6$$

te za poluprečnik upisanog kruga imamo

$$r = \frac{12}{3+4+5} = 1$$

Sa slike se vidi da je centar upisanog kruga u tački čije su koordinate

$$x_u = r = 1, \quad y_u = r = 1$$

Sada je rastojanje između centara upisanog i opisanog kruga zadatog trougla jednako rastojanju između tačaka $(x_u, y_u) = (1, 1)$ i $(x_o, y_o) = (2, 1.5)$:

$$d = \sqrt{(x_o - x_u)^2 + (y_o - y_u)^2} = \sqrt{(2-1)^2 + \left(\frac{3}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

---

18. D Tražimo ukupan broj trocifrenih brojeva $c_2c_1c_0$ za čije cifre važi $c_2 \neq c_1 \neq c_0$.

c_2: Za ovu cifru možemo izabrati bilo koju od <u>devet</u> cifara iz skupa $\{1, 2, \dots, 9\}$. Cifra 0 ne može biti na ovom položaju jer bismo u suprotnom imali dvocifreni broj.

c_1: Za ovu cifru možemo izabrati bilo koju od <u>devet</u> cifara $\{0, 1, 2, \dots, 9\} \backslash \{c_2\}$ (sve cifre osim one koju smo već izabrali za c_2.

c_0: Za ovu cifru možemo izabrati bilo koju od <u>osam</u> cifara $\{0, 1, 2, \dots, 9\} \backslash \{c_2, c_1\}$ (sve cifre osim onih koje smo već izabrali za c_2 i c_1.

Ukupan broj mogućnosti je sada:

$$9 \cdot 9 \cdot 8 = 8 \cdot 81 = 648.$$

---

19. A Aritmetička progresija $17, 21, 25, 29, \dots$ se može predstaviti u generalnom obliku (prvi član je 17, rastojanje između susednih članova je 4):

$$a_0 = 17,\ d_a = 4,\ a_m = a_0 + md_a \Rightarrow a_m = 17 + 4m,\ m \in \mathbb{N}_0$$

dok se na sličan način za drugu aritmetičku progresiju $16, 21, 26, \dots$ dobija (prvi član je 16, rastojanje između susednih članova je 5):

$$b_0 = 16,\ d_b = 5,\ b_n = b_0 + nd_b \Rightarrow b_n = 16 + 5n,\ n \in \mathbb{N}_0$$

Tražimo članove ovih dveju progresija koji su jednaki među sobom. Iz uslova

$$a_m = b_n \iff 17 + 4m = 16 + 5n$$

$$n = \frac{4m+1}{5}$$

gde su m i n prirodni (celi pozitivni) brojevi, imamo

$$n = \frac{4m+1}{5} = \begin{cases} 1, & m = 1 \\ 5, & m = 6 \\ 9, & m = 11 \\ 13, & m = 16 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

Članovi koji su jednaki među sobom formiraju novu aritmetičku progresiju c_p, datu sa $c_1 = a_1 = b_1$, $c_2 = a_6 = b_5$, $c_3 = a_{11} = b_9$, $c_4 = a_{16} = b_{13}, \ldots$ koja se može predstaviti sa početnim članom $c_p = a_1 = b_1 = 21$ i rastojanjem između susednih članova koje je jednako

$$d_c = a_6 - a_1 = b_5 - b_1 = (16 + 5 \cdot 5 - (16 + 5 \cdot 1)) = 20.$$

Zbir prvih pedeset članova ove progresije je

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 + \cdots + c_{50} &= c_0 + c_0 + d_c + \cdots + c_0 + 49 \cdot d_c \\ &= 50 \cdot c_0 + d_c(1 + 2 + \cdots + 49) \\ &= 50 \cdot c_0 + d_c \frac{49(49+1)}{2} \\ &= 50 \cdot 21 + 20 \cdot 49 \cdot 25 = 1050 + 24500 = 25550. \end{aligned}$$

20.© Tražimo ekstremne vrednosti funkcije $y = x^3 - 2x|x-2|$ na segmentu $[0, 3]$.
Važi

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2, & x > 2 \\ -(x-2), & x \leq 2 \end{cases}$$

Sada na intervalu $[0, 3]$ razlikujemo dva slučaja:

- $x \in (2, 3]$:

  Kako je $x > 2$ to funkcija prima oblik

  $$y = x^3 - 2x(x-2) = x^3 - 2x^2 + 4x$$

  Ekstremne vrednosti funkcije na ovom intervalu nalazimo posmatranjem prvog izvoda funkcije:

  $$y' = 3x^2 - 4x + 4 = 2x^2 + (x^2 - 4x + 4) = 2x^2 + (x-2)^2$$

  Kako za $x \in (2, 3]$ važi $2x^2 > 0$ i $(x-2)^2 > 0$ to je $y' > 0$ te je funkcija na ovom intervalu rastuća. Maksimalnu vrednost ona dostiže za $x = 3$ i ta vrednost iznosi

  $$M = y(3) = 3^3 - 2 \cdot 3(3-2) = 27 - 6 = 21$$

- $x \in [0, 2]$:

  Kako je $x \leq 2$ to funkcija postaje

  $$y = x^3 + 2x(x-2) = x^3 + 2x^2 - 4x$$

  Izvod funkcije u ovom slučaju je

  $$y' = 3x^2 + 4x - 4$$

  Ekstremne vrednosti funkcije dobijamo za $y' = 0$ odakle se ima

  $$3x^2 + 4x - 4 = 0 \iff x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 3 \cdot 16}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{3} = \begin{cases} -2 \\ \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

  Kako je $x \in [0, 2]$ to je $x_2 = \dfrac{2}{3}$ jedino rešenje. Drugi izvod funkcije je

  $$y'' = (3x^2 + 4x - 4)' = 6x + 4$$

i u tački $x_2 = \dfrac{2}{3}$ ima vrednost

$$y''\left(\frac{2}{3}\right) = 6 \cdot \frac{2}{3} + 4 = 8 > 0$$

te funkcija u ovoj tački ima minimum koji iznosi

$$m = y\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4\frac{2}{3} = \frac{2}{3}\frac{4+12-36}{9} = -\frac{40}{27}$$

Sada je

$$m + M = -\frac{40}{27} + 21 = \frac{-40+567}{21} = \frac{527}{27}.$$

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE ZA UPIS NA ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

1. Vrednost izraza $\sqrt{\sqrt[3]{0.000064}}$ jednaka je:

(A) 0.004 (B) 0.008 (C) 0.02 (D) 0.04 (E) 0.2 (N) Ne znam

2. Ako je D dužina dijagonale kocke, tada je njena površina jednaka:

(A) $2D^2$ (B) $\frac{1}{3}D^2$ (C) $\frac{1}{2}D^2$ (D) $6D^2$ (E) $4D^2$ (N) Ne znam

3. Ako je $x(2x+1) = 0$ i $(x + \frac{1}{2})(2x - 3) = 0$, tada je x jednako:

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) -3 (D) 0 (E) $\frac{3}{2}$ (N) Ne znam

4. Date su funkcije $f(x) = 1 - x$ i $g(x) = 2 - x$. Tada je izraz $f(g(x)) - g(f(x))$ jednak:

(A) 0 (B) $-x$ (C) x (D) -2 (E) 2 (N) Ne znam

5. Teme parabole $y = x^2 - 8x + m$ biće na x osi ako je m jednako:

(A) 16 (B) -4 (C) 4 (D) $6\sqrt{3}$ (E) 9 (N) Ne znam

6. Ako je polinom $x^{2009} + ax^2 + bx + 1$ (a, b su realni brojevi) deljiv polinomom $x^2 + 1$, tada je $2a + b$ jednako:

(A) 1 (B) -1 (C) -3 (D) 3 (E) 0 (N) Ne znam

7. Ako se zna da se binomni koeficijent trećeg i četvrtog člana u razvoju binoma $\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^n$, $(a > 0, n \in \mathbb{N}$ odnose kao $1 : 2$, tada je srednji član tog razvoja jednak:

(A) $20a$ (B) $70a^2$ (C) $70a$ (D) $20a^{\frac{3}{4}}$ (E) $252a^{\frac{5}{4}}$ (N) Ne znam

8. Osnovica jednakokrakog trougla iznosi $\sqrt{2}$ cm. Težišne duži koje su povučene na krake seku se pod pravim uglom. Površina tog trougla (u cm^2) iznosi:

(A) 1.5 (B) 2.5 (C) 2 (D) 3.5 (E) 4 (N) Ne znam

9. Neka su α, β i γ uglovi a a, b i c dužine stranica naspram datih uglova proizvoljnog trougla, tada je $\frac{\cos\alpha}{a} + \frac{\cos\beta}{b} + \frac{\cos\gamma}{c}$ jednako:

(A) $\frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ (B) $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}\right)$

(C) $\frac{1}{3}(ab + ac + bc)$ (D) $\frac{(a+b+c)^2}{abc}$

(E) Nijedan od ponuđenih odgovora (N) Ne znam

10. Ako su x i y realni brojevi za koje važi $0 \le x \le 4$ i $y < 12$, koja od sledećih vrednosti ne može biti vrednost proizvoda xy?

(A) -2 (B) 0 (C) 6 (D) 24 (E) 48 (N) Ne znam

11. Ugao koji obrazuju bočna strana i osnova pravilnog tetraedra iznosi:

(A) $\operatorname{arctg} 2$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\operatorname{arctg} 4$ (D) $\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$ (E) $\frac{\pi}{4}$ (N) Ne znam

12. Ako je $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ i $\operatorname{tg}\beta = -\frac{1}{3}$, tada je izraz $\frac{\sin\alpha + \sin(\alpha - 2\beta)}{\cos\alpha + \cos(\alpha - 2\beta)}$ jednak:

(A) $\frac{1}{7}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) 1 (D) 2 (E) $\frac{1}{5}$ (N) Ne znam

13. Ukupan broj realnih rešenja sistema jednačina $x^{y+4x} = y^{5\left(y-\frac{x}{3}\right)}$, $x^3 = y^{-1}$ je:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4 (N) Ne znam

14. Proizvod realnih rešenja jednačine $\left(\log_3 \frac{3}{x}\right) \cdot (\log_2 x) - \log_3 \frac{x^3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x}$ je:

(A) 1 (B) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ (C) $-\frac{3}{64}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{3}{4}$ (N) Ne znam

15. Jednačina kruga čiji je centar presečna tačka pravih $x + 2y - 2 = 0$, $3x + y + 4 = 0$ i koji dodiruje pravu $5x + 12y - 1 = 0$, jeste:

(A) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 1$ (B) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$

(C) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 1$ (D) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = \frac{1}{13}$

(E) $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 3 = 0$ (N) Ne znam

16. Zbir članova beskonačne geometrijske progresije je 3, a zbir kubova njenih članova je $\frac{108}{13}$. Tada je zbir kvadrata njenih članova jednak:

(A) $\frac{9}{2}$ (B) $\frac{9}{4}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{3}{2}$ (E) $\frac{27}{8}$ (N) Ne znam

17. Ako je $x^2 + x + 1 = 0$, tada je izraz $x^{2009} + x^{-2009}$ jednak:

(A) -1 (B) 1 (C) $x - 1$ (D) $x + 1$ (E) 0 (N) Ne znam

18. U pravu kupu upisan je valjak sa najvećim omotačem. Ako je zapremina kupe V, tada je zapremina tog valjka jednaka:

(A) $\frac{2}{3}V$ (B) $\frac{1}{4}V$ (C) $\frac{3}{8}V$ (D) $\frac{3}{16}V$ (E) $\frac{3}{4}V$ (N) Ne znam

19. Skup svih rešenja nejednačine $\sin x < \cos 2x$ na segmentu $[0, 2\pi]$ jeste:

(A) $\left[0, \frac{\pi}{3}\right) \bigcup \left(\frac{2\pi}{3}, 2\pi\right]$ (B) $\left[0, \frac{\pi}{6}\right) \bigcup \left(\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right]$

(C) $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ (D) $\left[0, \frac{\pi}{3}\right) \bigcup \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right) \bigcup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

(E) $\left[0, \frac{\pi}{6}\right) \bigcup \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right) \bigcup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ (N) Ne znam

20. Ukupan broj šestocifrenih brojeva kod kojih parne i neparne cifre dolaze naizmenično (gde je 0 paran broj) je:

(A) $6!$ (B) $(5 \cdot 4 \cdot 3)^2$ (C) $2 \cdot 5^6$ (D) $5^6 + 4 \cdot 5^5$ (E) $5^6 + 5^5$ (N) Ne znam

REŠENJA

1.Ⓔ Kako je:

$$0.000064 = 64 \cdot 10^{-6} = 2^6 \cdot 10^{-6}$$

to važi

$$\sqrt{\sqrt[3]{0.000064}} = \left((0.000064)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = (0.000064)^{\frac{1}{6}} = ((2^6 \cdot 10^{-6}\big)^{\frac{1}{6}} = 2 \cdot 10^{-1} = 0.2.$$

2.Ⓐ Neka je a dužina ivice kocke. Tada se dužina njene dijagonale može izraziti kao

$$D = a\sqrt{3} \iff a = \frac{D}{\sqrt{3}}$$

Za površinu kocke sada važi

$$P = 6a^2 = 6\left(\frac{D}{\sqrt{3}}\right)^2 = 2D^2.$$

3.Ⓑ Prva jednačina je ispunjena za

$$x(2x+1) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ 2x+1 = 0 \iff x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

dok su rešenja druge jednačine data izrazima

$$(x+\frac{1}{2})(2x-3) = 0 \iff \begin{cases} x+\dfrac{1}{2} = 0 \iff x = -\dfrac{1}{2} \\ 2x-3 = 0 \iff x = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Dakle obe jednačine su zadovoljene za $x = -\dfrac{1}{2}$.

4.Ⓓ Važi

$$f(g(x)) = 1 - g(x) = 1 - (2-x) = x - 1$$
$$g(f(x)) = 2 - f(x) = 2 - (1-x) = x + 1$$

te sledi

$$f(g(x)) - g(f(x)) = (x-1) - (x+1) = -2.$$

5.Ⓐ Da bi teme parabole $y = x^2 - 8x + m$ bilo na x osi $y = 0$, potrebno je da jednačina

$$x^2 - 8x + m = 0$$

ima samo jedno realno rešenje. To je ispunjeno kada je diskriminanta ove jednačine jednaka nuli, odnosno za

$$D = b^2 - 4ac = 8^2 - 4m = 64 - 4m = 0 \iff m = 16.$$

6.Ⓐ Rešenje A.

Ako je polinom $P(x) = x^{2009} + ax^2 + bx + 1$ deljiv polinomom x^2+1, tada postoji polinom $Q(x)$ stepena $2007 = 2009 - 2$ takav da važi

$$P(x) = (x^2+1)Q(x)$$

to ujedno znači da je

$$P(i) = (i^2+1)Q(x) = 0, \text{ gde je } i^2 = -1$$

Sada imamo

$$P(i) = i^{2009} + a(i)^2 + bi + 1 = i^{2009} - a + bi + 1$$

Kako je

$$i^{2009} = i \cdot i^{2008} = i \cdot (i^2)^{1004} = i \cdot (-1)^{1004} = i$$

to dalje sledi

$$P(i) = i^{2009} - a + bi + 1 = i - a + bi + 1 = (1+b)i + (1-a)$$

$$P(i) = 0 \iff 1 + b = 0 \wedge 1 - a = 0 \iff b = -1 \wedge a = 1$$

odakle se dobija

$$2a + b = 2 \cdot 1 - 1 = 1.$$

Rešenje B.

Ako je polinom $x^{2009} + ax^2 + bx + 1$, stepena 2009, deljiv polinomom $x^2 + 1$ stepena 2, tada postoji polinom $Q(x) = a_{2007}x^{2007} + a_{2006}x^{2006} + \cdots a_2x^2 + a_1x + a_0$, stepena $2007 = 2009 - 2$, takav da važi

$$x^{2009} + ax^2 + bx + 1 = (x^2+1)(a_{2007}x^{2007} + a_{2006}x^{2006} + \cdots a_2x^2 + a_1x + a_0)$$

Odavde dalje sledi

$$\begin{aligned}
x^{2009} + ax^2 + bx + 1 &= a_{2007}x^{2009} + a_{2006}x^{2008} + a_{2005}x^{2007} + \cdots + a_2x^4 + a_1x^3 + a_0x^2 \\
&\phantom{= a_{2007}x^{2009} + a_{2006}x^{2008}} + a_{2007}x^{2007} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\
&= a_{2007}x^{2009} + a_{2006}x^{2008} + (a_{2005} + a_{2007})x^{2007} \\
&\phantom{= a_{2007}x^{2009} + a_{2006}x^{2008}} + (a_{2004} + a_{2006})x^{2006} \\
&\phantom{= a_{2007}x^{2009} + a_{2006}x^{2008}} + (a_{2003} + a_{2005})x^{2005} \\
&\phantom{= a_{2007}x^{2009} + a_{2006}x^{2008}} \vdots \\
&\phantom{= a_{2007}x^{2009} + a_{2006}x^{2008}} + (a_2 + a_4)x^4 \\
&\phantom{= a_{2007}x^{2009} + a_{2006}x^{2008}} + (a_1 + a_3)x^3 \\
&\phantom{= a_{2007}x^{2009} + a_{2006}x^{2008}} + (a_0 + a_2)x^2 \\
&\phantom{= a_{2007}x^{2009} + a_{2006}x^{2008}} + a_1x + a_0
\end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenata polinoma sa leve i desne strane jednačine dobijamo redom

$$\begin{aligned}
a_{2007} &= 1 \\
a_{2006} &= 0 \\
a_{2005} + a_{2007} &= 0 \Rightarrow a_{2005} = -a_{2007} = -1 \\
a_{2004} + a_{2006} &= 0 \Rightarrow a_{2004} = 0 \\
a_{2003} + a_{2005} &= 0 \Rightarrow a_{2003} = -a_{2005} = 1 \\
&\vdots \\
a_{2k} &= 0 \\
a_{2k+1} &= (-1)^{k+1} \\
&\vdots \\
a_2 + a_4 &= 0 \Rightarrow a_2 = 0 \\
a_1 + a_3 &= 0 \Rightarrow a_1 = -a_3 = -1 \\
a_0 + a_2 &= a \Rightarrow a_0 = a \\
a_1 &= b \Rightarrow b = a_1 = -1 \\
a_0 &= 1 \Rightarrow a = a_0 = 1
\end{aligned}$$

Dakle, $a = 1$ i $b = -1$ te sledi

$$2a + b = 2 - 1 = 1.$$

7.© Razvoj binoma $(x+y)^n$ dat je sledećom uopštenom formulom

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + y^n$$

Za koeficijente četvrtog člana: $\binom{n}{3}$, i trećeg člana: $\binom{n}{2}$ prema uslovu zadatka važi

$$\frac{\binom{n}{3}}{\binom{n}{2}} = 2 \iff \frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}}{\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}} = 2 \iff n-2=6 \iff n=8$$

Srednji član razvoja se dobija za $k = n/2 = 4$ i iznosi

$$\binom{n}{k}x^{n-k}y^k = \binom{8}{4}x^4y^4 = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}x^4y^4 = 70x^4y^4$$

Kako je

$$x = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x^4 = a^2$$

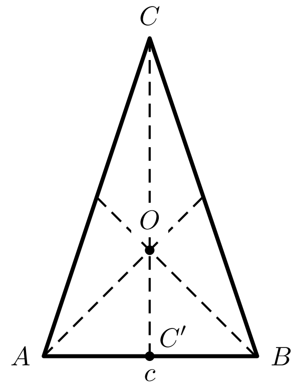
$$y = \frac{1}{\sqrt[4]{a}} = a^{-\frac{1}{4}} \Rightarrow y^4 = a^{-1}$$

to se konačno dobija

$$\binom{n}{k}x^{n-k}y^k = 70x^4y^4 = 70a^2\cdot a^{-1} = 70a.$$

---

8. Ⓐ



Na slici je prikazan jednakokraki trougao sa osnovicom dužine $c = AB = \sqrt{2}$. Kako je ugao koji zaklapaju težisne duži povučene na krake prav, to je trougao ABO jednakokraki pravougli trougao. Tada su takođe trouglovi $AC'O$ i $BC'O$ pravougli jednakokraki trouglovi sa dužinama kateta koje odgovaraju polovini dužine osnovice $c = AB$, odnosno

$$C'O = AC' = BC' = \frac{1}{2}c = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Kako je tačka O težište trougla to važi

$$CO = 2C'O$$

te se za dužinu težišne duži CC' dobija

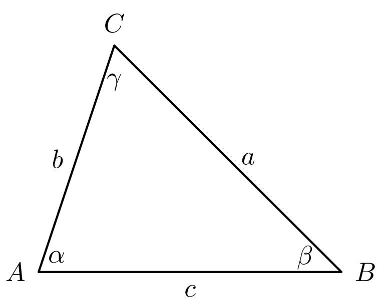
$$CC' = CO + C'O = 2C'O + C'O = 3C'O = 3\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Kako je u jednakokrakom trouglu ABC ova duž ujedno i visina trougla $h = CC'$, za njegovu površinu se dalje dobija

$$P = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot 3\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

---

9. Ⓑ



Primenom kosinusne teoreme za dužine stranica proizvoljnog trougla prikazanog na slici redom imamo

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Sabiranjem ove tri jednačine dalje dobijamo

$$a^2+b^2+c^2 = 2(a^2+b^2+c^2) - 2(bc\cos\alpha + ac\cos\beta + ab\cos\gamma)$$

$$a^2+b^2+c^2 = 2(bc\cos\alpha + ac\cos\beta + ab\cos\gamma)$$

Deljenjem obe strane jednačine sa $abc \neq 0$ dalje imamo

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} = 2\left(\frac{\cos\alpha}{a} + \frac{\cos\beta}{b} + \frac{\cos\gamma}{c}\right)$$

što konačno daje

$$\frac{\cos\alpha}{a}+\frac{\cos\beta}{b}+\frac{\cos\gamma}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}\right).$$

10.Ⓔ Važi

$$0\le x\le 4$$
$$y<12$$

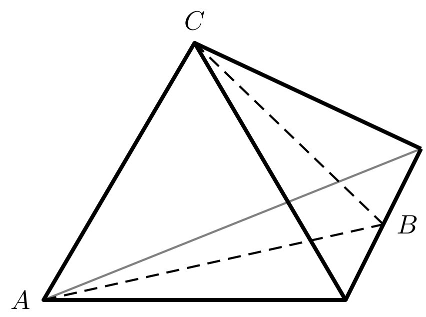
te za proizvod ovih realnih brojeva sledi

$$xy<4\cdot 12=48$$

što znači da jedina od ponuđenih vrednosti koja ne može biti vrednost ovog proizvoda je 48.

11.Ⓓ

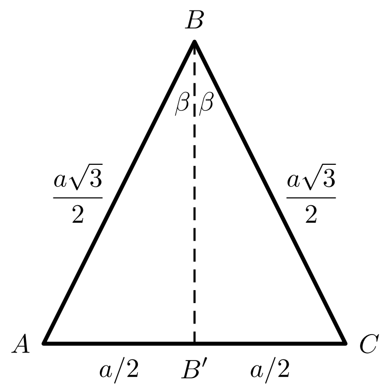
Stranice pravilnog tetraedra su jednakostranični trouglovi. Ugao koji obrazuju bočna strana i osnova pravilnog tetraedra je prikazan na slici isprekidanim linijama i odgovara uglu u temenu jednakokrakog trougla ABC. Dužine kraka ovog trougla odgovaraju visini jednakostraničnog trougla; ako je a dužina stranice tetraedra tada imamo



$$AB=BC=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

dok je dužina osnovice jednaka dužini stranice tetraedra

$$AC=a$$



Sada za trougao ABB' važi

$$\sin\beta=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Za traženi ugao $\angle ABC=2\beta$ važi

$$\operatorname{tg}2\beta=\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}=\frac{\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$$

odnosno

$$\angle ABC=2\beta=\operatorname{arctg}2\sqrt{2}.$$

12.Ⓒ Kako je

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-2\beta)&=\sin\alpha\cos 2\beta-\cos\alpha\sin 2\beta\\&=\sin\alpha(\cos^2\beta-\sin^2\beta)-\cos\alpha(2\sin\beta\cos\beta)\\&=\sin\alpha(2\cos^2\beta-1)-2\cos\alpha\sin\beta\cos\beta\\&=-\sin\alpha+2\cos\beta(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)\end{aligned}$$

to sledi

$$\sin\alpha+\sin(\alpha-2\beta)=2\cos\beta(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)$$

Slično iz

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-2\beta)&=\cos\alpha\cos 2\beta+\sin\alpha\sin 2\beta\\&=\cos\alpha(\cos^2\beta-\sin^2\beta)+\sin\alpha(2\sin\beta\cos\beta)\\&=\cos\alpha(2\cos^2\beta-1)+2\sin\alpha\sin\beta\cos\beta\\&=-\cos\alpha+2\cos\beta(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\end{aligned}$$

imamo

$$\cos\alpha + \cos(\alpha - 2\beta) = 2\cos\beta(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$$

Sada za zadati izraz sledi

$$\begin{aligned}\frac{\sin\alpha + \sin(\alpha-2\beta)}{\cos\alpha + \cos(\alpha-2\beta)} &= \frac{2\cos\beta(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)}{2\cos\beta(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)}\\ &= \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}\\ &= \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\frac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\\ &= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}} = 1.\end{aligned}$$

13.Ⓒ Zamenom $x^3 = y^{-1} \iff y = x^{-3}$, $x \neq 0, y \neq 0$ u prvoj jednačini:

$$x^{y+4x} = y^{5\left(y-\frac{x}{3}\right)}$$

dobijamo

$$x^{y+4x} = x^{\frac{1}{x^3}+4x} = x^{\frac{4x^4+1}{x^3}}$$

$$y^{5\left(y-\frac{x}{3}\right)} = (x^{-3})^{5\left(\frac{1}{x^3}-\frac{x}{3}\right)} = x^{-15\frac{3-x^4}{3x^3}} = x^{5\frac{x^4-3}{x^3}}$$

odnosno

$$x^{\frac{4x^4+1}{x^3}} = x^{5\frac{x^4-3}{x^3}} \iff x^{\frac{x^4-16}{x^3}} = 1$$

gde u skupu realnih brojeva za bazu eksponencijalne funkcije mora važiti $x > 0$.

Razlikujemo dva slučaja

- $x = 1$:

  Jednačina postaje

  $$1^{-15} = 1$$

  što je ispunjeno, te je jedno rešenje $x_1 = 1, y_1 = x_1^{-3} = 1$.

- $x \neq 1$:

  Sada sledi

  $$x^4 - 16 = 0$$

  te za x dobijamo sledeća moguća rešenja

  $$x_2 = -\sqrt[4]{16} = -2$$

  $$x_3 = +\sqrt[4]{16} = 2$$

  Međutim, kako mora biti $x > 0$ to je u ovom slučaju jedino moguće rešenje $x_3 = 2, y_3 = x^{-3} = \dfrac{1}{8}$.

Ukupan broj realnih rešenja zadatog sistema jednačina je dva:

$$(1,1), (2, 1/8).$$

14.Ⓑ

$$\left(\log_3\frac{3}{x}\right)\log_2 x - \log_3\frac{x^3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \log_2\sqrt{x}$$

$$(\log_3 3 - \log_3 x)\log_2 x - (3\log_3 x - \log_3\sqrt{3}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_2 x$$

$$(1 - \log_3 x)\log_2 x - 3\log_3 x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_2 x$$

$$\log_2 x - \log_2 x\log_3 x - 3\log_3 x = \frac{1}{2}\log_2 x$$

$$\frac{1}{2}\log_2 x - \log_2 x \log_3 x - 3\log_3 x = 0$$

$$\frac{1}{2}\log_2 x - \log_2 x \frac{\log_2 x}{\log_2 3} - 3\frac{\log_2 x}{\log_2 3} = 0$$

$$\frac{1}{2}\log_2 3 \cdot \log_2 x - \log_2 x \cdot \log_2 x - 3\log_2 x = 0$$

$$\log_2 x\left(\frac{1}{2}\log_2 3 - \log_2 x - 3\right) = 0$$

$$\log_2 x\left(\log_2 \sqrt{3} - \log_2 x - 3\log_2 2\right) = 0$$

$$\log_2 x\left(\log_2 \sqrt{3} - \log_2 x - \log_2 2^3\right) = 0$$

$$\log_2 x \cdot \log_2 \frac{\sqrt{3}}{8x} = 0$$

Sada su moguća rešenja

$$\log_2 x = 0 \iff x_1 = 1$$

$$\log_2 \frac{\sqrt{3}}{8x} = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{8x} = 1 \iff x_2 = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

te je proizvod realnih rešenja zadate jednačine

$$x_1 x_2 = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

---

15. Ⓒ Presečna tačka se dobija rešavanjem sistema jednačina

$$x + 2y - 2 = 0$$

$$3x + y + 4 = 0$$

Smenom $x = 2 - 2y$ iz druge jednačine imamo

$$3(2 - 2y) + y + 4 = 0 \iff y = 2 \Rightarrow x = -2$$

Dakle, centar kruga je u tački $(x_c, y_c) = (-2, 2)$.

Kako krug dodiruje pravu $5x + 12y - 1 = 0$, to je rastojanje centra kruga i tačke dodira jednako poluprečniku kruga R. Rastojanje tačke (x_c, y_c) od prave $ax + by + c = 0$ dato je formulom

$$R = \frac{|ax_c + by_c + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

i u našem slučaju iznosi

$$R = \frac{|5x_c + 12y_c - 1|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{|5(-2) + 12 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{169}} = \frac{|23 - 10|}{13} = 1$$

Konačno za jednačinu kruga imamo

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$$

$$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 1.$$

---

16. Ⓐ Neka je

$$a_n = q^{n-1} a_1,\ n = 1, 2, \ldots,\ |q| < 1$$

nepoznata geometrijska progresija koja ispunjava uslove zadatka, da je zbir njenih članova jednak 3

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = a_1(1 + q + q^2 + \cdots) = \frac{a_1}{1 - q} = 3$$

i da je zbir kubova njenih članova jednak $\dfrac{108}{13}$:

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \cdots = a_1^3(1 + q^3 + (q^3)^2 + \cdots) = \frac{a_1^3}{1-q^3} = \frac{108}{13}$$

Sada imamo

$$\frac{a_1^3}{1-q^3} = \frac{108}{13} \Rightarrow a_1^3 = \frac{9\cdot 12}{13}(1-q^3) = \frac{9\cdot 12}{13}(1-q)(1+q+q^2)$$

$$\frac{a_1^3}{(1-q)^3} = 3^3 \Rightarrow a_1^3 = 3^3(1-q)^3$$

odakle se dobija

$$\frac{9\cdot 12}{13}(1-q)(1+q+q^2) = 3^3(1-q)^3 \Rightarrow 4(1+q+q^2) = 13(1-q)^2 \iff 4+4q+4q^2 = 13-26q+13q^2$$

$$9q^2 - 30q + 9 = 0$$

Rešenja ove kvadratne jednačine su

$$q_{1,2} = \frac{30 \pm \sqrt{30^2 - 18^2}}{18} = \frac{30 \pm 24}{18} = \begin{cases} 1/3 \\ 3 \end{cases}$$

i kako je $|q| < 1$ to je jedino moguće rešenje: $q = \dfrac{1}{3}$. Sada se za početni član progresije dobija

$$a_1 = 3(1-q) = 3 - 3q = 2$$

Konačno, za zbir kvadrata članova ove progresije imamo

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots = a_1^2(1 + q^2 + (q^2)^2 + (q^2)^3 + \cdots) = \frac{a_1^2}{1-q^2} = \frac{2^2}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{4\cdot 9}{8} = \frac{9}{2}.$$

17.Ⓐ Kako je

$$x^2 + x + 1 = 0 \iff x^2 = -(x+1) \iff x^2 + x = -1$$

to dalje važe sledeće jednakosti

$$x^3 = x\cdot x^2 = -x(x+1) = -(x^2+x) = 1$$

$$x^{2009} = x^2 \cdot x^{2007} = x^2\cdot (x^3)^{669} = x^2 \cdot 1^{669} = x^2$$

$$x^{-2009} = x^{-2}\cdot x^{-2007} = x^{-2}\cdot (x^3)^{-669} = x^{-2}\cdot 1^{-669} = x^{-2}$$

odakle sledi

$$x^{2009} + x^{-2009} = x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^4+1}{x^2} = \frac{x^3\cdot x + 1}{-(x+1)} = \frac{x+1}{-(x+1)} = -1.$$

18.Ⓒ
Na slici je prikazana kupa, poluprečnika osnove $R = AB$ i visine $H = BC$. Zapremina ove kupe data je izrazom

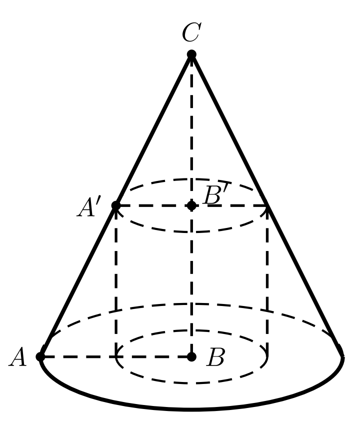
$$V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}R^2\pi H$$

Neka je $r = A'B'$ poluprečnik osnove valjka, upisanog u ovu kupu, i $h = BB'$ njegova visina. Iz sličnosti trouglova ABC i $A'B'C$ dobijamo da važi

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C}{BC}$$

i kako je $A'B' = r, AB = R, BC = H, B'C = BC - B'C = H - h$ to dalje sledi

$$\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H} = 1 - \frac{h}{H} \iff r = R\left(1 - \frac{h}{H}\right)$$



Površina omotača valjka se može izraziti na sledeći način

$$M = 2\pi r \cdot h = 2\pi R\left(1 - \frac{h}{H}\right)h = 2\pi R\left(h - \frac{h^2}{H}\right)$$

Površina omotača će biti maksimalna kada je vrednost funkcije $f(h) = h - \dfrac{h^2}{H}$ maksimalna, a ona se dobija za visinu h za koju je izvod ove funkcije po h jednak nuli

$$f'(h) = 1 - 2\frac{h}{H} = 0 \Rightarrow h = \frac{H}{2}$$

tada je

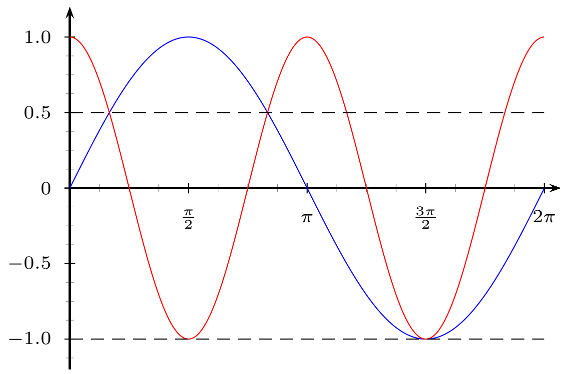
$$r = R\left(1 - \frac{h}{H}\right) = R\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{R}{2}$$

Sada se za zapreminu ovog valjka dobija

$$V_1 = r^2\pi h = \frac{R^2}{4}\pi\frac{H}{2} = \frac{1}{8}R^2\pi H = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}R^2\pi H\right) = \frac{3}{8}V.$$

19.Ⓔ

Rešenje je grafički predstavljeno na slici. Analitički se može dobiti na sledeći način.



$$\sin x < \cos 2x,\ x \in [0, 2\pi]$$

$$\sin x < \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 < 0 \quad \xrightarrow{t=\sin x}$$

$$2t^2 + t - 1 < 0$$

Rešenja kvadratne jednačine su:

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ \dfrac{1}{2} \end{array} \right.$$

pa je rešenje kvadratne nejednačine

$$-1 < t < \frac{1}{2}$$

odnosno

$$-1 < \sin x < \frac{1}{2}$$

Kako, za $x \in [0, 2\pi]$ važi

$$\sin x = -1 \iff x = \frac{3\pi}{2}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6}$$

to

$$-1 < \sin x < \frac{1}{2}$$

važi za

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right) \bigcup \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right) \bigcup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right].$$

20.Ⓓ Posmatramo sve šestocifrene brojeve $c_5c_4c_3c_2c_1c_0$ kod kojih parne i neparne cifre dolaze naizmenično. Razlikujemo dva slučaja

1. Cifra c_5 je parna.
   - Na mestu cifre c_5 ($c_5 \neq 0$) može biti bilo koja od <u>četiri</u> parnih cifara iz skupa $\{2, 4, 6, 8\}$.
   - Na mestu cifre c_4 može biti bilo koja od <u>pet</u> neparnih cifara iz skupa $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.
   - Na mestu cifre c_3 može biti bilo koja od <u>pet</u> parnih cifara iz skupa $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.
   - Na mestu cifre c_2 može biti bilo koja od <u>pet</u> neparnih cifara iz skupa $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.
   - Na mestu cifre c_1 može biti bilo koja od <u>pet</u> parnih cifara iz skupa $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.
   - Na mestu cifre c_0 može biti bilo koja od <u>pet</u> neparnih cifara iz skupa $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

   Ukupan broj ovakvih cifara je $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 4 \cdot 5^5$.
2. Cifra c_5 je neparna.
   - Na mestu cifre c_5 može biti bilo koja od <u>pet</u> neparnih cifara iz skupa $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.
   - Na mestu cifre c_4 može biti bilo koja od <u>pet</u> parnih cifara iz skupa $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.
   - Na mestu cifre c_3 može biti bilo koja od <u>pet</u> neparnih cifara iz skupa $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.
   - Na mestu cifre c_2 može biti bilo koja od <u>pet</u> parnih cifara iz skupa $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.
   - Na mestu cifre c_1 može biti bilo koja od <u>pet</u> neparnih cifara iz skupa $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.
   - Na mestu cifre c_0 može biti bilo koja od <u>pet</u> parnih cifara iz skupa $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.

   Ukupan broj ovakvih cifara je $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6$.

Ukupan broj šestocifrenih brojeva koji zadovoljavaju uslov zadatka je

$$5^6 + 4 \cdot 5^5.$$

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE ZA UPIS NA ELEKTROTEHNIČKI I FIZIČKI FAKULTET

1. Vrednost izraza $(2^{-1} + 3^{-1} + 4^{-1} - 5^{-1})^{-1}$ jednaka je:

(A) 0 (B) $\dfrac{53}{60}$ (C) $\dfrac{60}{53}$ (D) $\dfrac{60}{43}$ (E) $\dfrac{43}{60}$ (N) Ne znam

2. Ako je $x > 0$, koliko procenata od x je izraz $\dfrac{x}{50} + \dfrac{x}{25}$?

(A) 6% (B) 25% (C) 5% (D) 60% (E) 75% (N) Ne znam

3. Ako je $\operatorname{tg}(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{3}{4}$, tada je $\operatorname{tg}\alpha$ jednako:

(A) 7 (B) 5 (C) 6 (D) 2 (E) 0 (N) Ne znam

4. Zbir svih vrednosti realnog parametra m za koje je jedan koren jednačine $2x^2 - (2m+1)x + m^2 - 9m + 39 = 0$ dva puta veći od drugog, iznosi

(A) 15 (B) 19 (C) 23 (D) 17 (E) 21 (N) Ne znam

5. Oko kruga je opisan trapez čija srednja linija iznosi 8 cm. Obim trapeza je (u cm):

(A) 16 (B) 24 (C) 32 (D) 36 (E) 30 (N) Ne znam

6. Ako je $x = (0.08)^2$, $y = \dfrac{1}{(0.08)^2}$ i $z = (1 - 0.08)^2 - 1$, koji od sledećih iskaza je tačan?

(A) $x = y = z$ (B) $y < z < x$ (C) $z < x < y$ (D) $y < x = z$ (E) $x + z = y$ (N) Ne znam

7. Dati su kompleksni brojevi $z_1 = k + 1 + i(k-1)$ i $z_2 = 2k - ik$, $(i = \sqrt{-1})$. Vrednost realnog parametra k za koju je količnik $\dfrac{z_1}{z_2}$ realan broj jeste:

(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{1}{6}$ (C) -3 (D) $-\dfrac{1}{3}$ (E) 3 (N) Ne znam

8. Zbir svih rešenja jednačine $||x-1|-1|-1 = 0$ iznosi:

(A) -3 (B) 1 (C) 2 (D) -2 (E) 3 (N) Ne znam

9. Poluprečnik osnove, visina i izvodnica prave kupe su tri uzastopna člana aritmetičke progresije. Ako je površina osnog preseka kupe $300\,\mathrm{cm}^2$, zapremina kupe iznosi (u cm^3):

(A) 1500π (B) 1200π (C) 1450π (D) 1520π (E) 1300π (N) Ne znam

10. Ako sa φ označimo oštar ugao koji grade tangente povučene iz tačke $(-4, 1)$ na parabolu $y^2 = 2x$, tada je ugao φ jednak:

(A) $\dfrac{\pi}{4}$ (B) $\dfrac{\pi}{2}$ (C) $\operatorname{arctg}\dfrac{6}{7}$ (D) $\operatorname{arctg}\dfrac{5}{9}$ (E) $\operatorname{arctg}\dfrac{2}{7}$ (N) Ne znam

11. Neka su a i b dužine kateta, a t_a, t_b, t_c dužine težišnih duži koje odgovaraju katetama a, b i hipotenuzi c redom, pravouglog trougla. Tada je $\dfrac{t_a^2 + t_b^2 + t_c^2}{a^2 + b^2}$ jednako:

(A) $\dfrac{2}{3}$ (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) $\dfrac{5}{4}$ (D) $\dfrac{9}{4}$ (E) $\dfrac{4}{3}$ (N) Ne znam

12. Skup svih realnih brojeva x, takvih da je $x^2 - x - 2 < 0$, $-x^2 + 4x - 3 < 0$, jeste:

(A) $(-\infty, -1)$ (B) $(1, 2)$ (C) $(1, 3)$ (D) $(-1, 1)$ (E) $(-1, 3)$ (N) Ne znam

13. U krugu poluprečnika 2 cm dužina tetive kojoj odgovara periferijski ugao od 15°, iznosi (u cm):

(A) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ (B) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ (C) $\dfrac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ (D) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (E) 2 (N) Ne znam

14. Ako se polinom $x^{2008} + x^{1007} + 1$ podeli sa $x^2 + 1$, ostatak je:

(A) $2x + 1$ (B) $-x + 2$ (C) 0 (D) $x + 1$ (E) $x - 2$ (N) Ne znam

15. Zbir svih rešenja jednačine $\sin 2x = 1 + \sqrt{2}\cos x + \cos 2x$ na intervalu $(0, 2\pi)$ je:

(A) $\dfrac{7\pi}{2}$ (B) $\dfrac{3\pi}{2}$ (C) $\dfrac{5\pi}{2}$ (D) π (E) $\dfrac{\pi}{2}$ (N) Ne znam

16. Skup svih realnih vrednosti x za koje važi nejednakost

$$\frac{3^x - 81}{(4^{2x+1} - 32)\sqrt{5^{\frac{x^2-3}{2}} - 125}} \leq 0$$

je oblika (za neke realne a i b takve da je $0 < a < b < +\infty$):

(A) $[0, a)$ (B) $(a, b]$

(C) $(0, a) \cup (b, +\infty)$ (D) $(a, +\infty)$

(E) $(0, a)$ (N) Ne znam

17. Zbir binomnih koeficijenata trećeg od početka i trećeg od kraja člana razvoja binoma $(\sqrt[4]{3} + \sqrt[3]{4})^n$, ($n$ je prirodan broj), jednak je 2450. Broj racionalnih članova u tom razvoju je:

(A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4 (E) 3 (N) Ne znam

18. Ukupan broj rešenja sistema jednačina $(1 + 2\log_{|xy|} 2) \cdot \log_{x+y} |xy| = 1$, $x - y = 2\sqrt{3}$ je:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 0 (N) Ne znam

19. Ako je M_1 najveća vrednost funkcije $f_1(x) = (\log_5 6)^{\sin x}$ a M_2 najveća vrednost funkcije $f_2(x) = (\log_6 5)^{\cos x}$, tada je:

(A) $M_1 \cdot M_2 = 1$ (B) $M_1 = M_2$ (C) $M_1 < M_2$ (D) $M_1 > M_2$ (E) $M_1 = 1 + M_2$ (N) Ne znam

20. Dat je izvestan skup tačaka u ravni od kojih nikoje tri i nikoje četiri nisu kolinearne. Ako je poznato da je broj četvorouglova osam puta veći od broja trouglova koje te tačke određuju, tada je broj pravih koje te tačke određuju jednak:

(A) 132 (B) 196 (C) 512 (D) 514 (E) 595 (N) Ne znam

REŠENJA

1.Ⓒ

$$(2^{-1}+3^{-1}+4^{-1}-5^{-1})^{-1}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)^{-1}=\left(\frac{30+20+15-12}{3\cdot 4\cdot 5}\right)^{-1}=\left(\frac{53}{60}\right)^{-1}=\frac{60}{53}.$$

2.Ⓐ Kako je

$$\frac{x}{50}+\frac{x}{25}=x\frac{1+2}{50}=\frac{3}{50}x=\frac{6}{100}x$$

to zadata vrednost odgovara vrednosti 6% od x.

3.Ⓐ Kako je

$$\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-1}{1+\operatorname{tg}\alpha}$$

to sledi

$$\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{4}\iff\frac{\operatorname{tg}\alpha-1}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{3}{4}$$

$$4\operatorname{tg}\alpha-4=3+3\operatorname{tg}\alpha\iff\operatorname{tg}\alpha=7.$$

4.Ⓓ

$$2x^2-(2m+1)x+m^2-9m+39=0\iff x^2-\frac{(2m+1)}{2}x+\frac{1}{2}(m^2-9m+39)=0$$

Ako su x_1 i x_2 koreni gornje kvadratne jednačine, tada važi

$$(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=x^2-\frac{(2m+1)}{2}x+\frac{1}{2}(m^2-9m+39)$$

Izjednačavanjem koeficijenata polinoma sa leve i desne strane jednačine, dobijamo

$$x_1+x_2=\frac{(2m+1)}{2},\quad x_1x_2=\frac{1}{2}(m^2-9m+39)$$

Prema uslovu zadatka važi $x_2=2x_1$ te sledi

$$x_1+x_2=3x_1=\frac{(2m+1)}{2}\Rightarrow x_1=\frac{(2m+1)}{6}\Rightarrow x_1^2=\frac{(2m+1)^2}{36}$$

i

$$x_1x_2=2x_1^2=\frac{1}{2}(m^2-9m+39)\Rightarrow x_1^2=\frac{1}{4}(m^2-9m+39)$$

Iz poslednje dve jednakosti imamo

$$36(m^2-9m+39)=4(2m+1)^2=4(4m^2+4m+1)$$

$$9m^2-81m+351=4m^2+4m+1\iff 5m^2-85m+350=0\iff m^2-17m+70=0$$

Rešenja ove kvadratne jednačine su

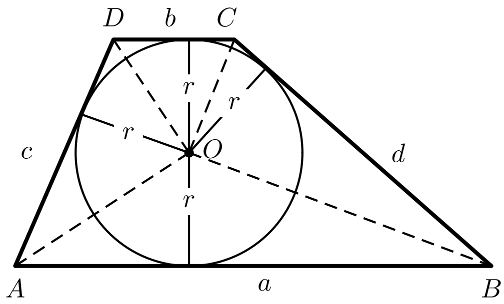
$$m_{1,2}=\frac{17\pm\sqrt{17^2-4\cdot 70}}{2}$$

tako da za zbir ovih rešenja imamo

$$m_1+m_2=\frac{1}{2}(17-\sqrt{17^2-4\cdot 70}+17+\sqrt{17^2-4\cdot 70})=17.$$

5.Ⓒ
Na slici je prikazan trapez $ABCD$ opisan oko kruga poluprečnika r sa centrom u tački O. Sa slike se vidi da je visina trapeza jednaka prečniku kruga

$$h = 2r$$



Površina ovog trapeza se može izraziti u funkciji visine $h = 2r$ i srednje linije $\frac{a+b}{2} = 8$:

$$P = \frac{a+b}{2}h = \frac{a+b}{2}2r$$

Istovremeno, površina trapeza jednaka je zbiru površina trouglova ABO, BCO, CDO, ADO, od kojih svaki ima visinu r nad odgovarajućom stranicom a, d, b, c:

$$P = P_{ABO} + P_{BCO} + P_{CDO} + P_{ADO} = \frac{1}{2}(ar + dr + br + cr) = \frac{1}{2}r(a + b + c + d) = \frac{1}{2}rO$$

gde je sa O označen obim trapeza. Iz poslednja dva izraza za za obim trapeza dobijamo

$$\frac{a+b}{2}2r = \frac{1}{2}rO \iff O = 4 \cdot \frac{a+b}{2} = 4 \cdot 8 = 32.$$

6.Ⓒ Važe sledeće relacije

$$(0.08)^2 > 0 \Rightarrow x > 0$$

$$0.08 < 1 \Rightarrow (0.08)^2 < 1 \Rightarrow x < 1$$

$$0 < x < 1$$

$$\frac{1}{(0.08)^2} = \frac{1}{x} > 1 \Rightarrow y > 1$$

$$(1 - 0.08) < 1 \Rightarrow (1 - 0.08)^2 < 1 \Rightarrow (1 - 0.08)^2 - 1 < 0 \Rightarrow z < 0$$

Na osnovu gore izvedenih relacija sledi

$$z < 0 < x < 1 < y \Rightarrow z < x < y.$$

7.Ⓐ

$$z_1 = k + 1 + i(k-1), \quad z_2 = 2k - ik$$

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} = \frac{k+1+i(k-1)}{k(2-i)} &= \frac{k+1+i(k-1)}{k} \cdot \frac{2+i}{(2-i)(2+i)} \\ &= \frac{(k+1+i(k-1))(2+i)}{k(4-i^2)} \\ &= \frac{2(k+1)-(k-1)}{5k} + i\frac{2(k-1)+k+1}{5k}\end{aligned}$$

Količnik je realan za one vrednosti k za koje je imaginarni deo jednak nuli:

$$2(k-1) + k + 1 = 0 \iff k = \frac{1}{3}.$$

8.Ⓔ

$$||x-1|-1| - 1 = 0$$

Kako je

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x > 1 \\ -(x-1), & x \leq 1 \end{cases}$$

to razlikujemo dva slučaja

1. $x > 1 : |x-1| = x-1$

   Jednačina sada postaje

   $$||x-1|-1|-1 = |x-1-1|-1 = |x-2|-1 = 0$$

   dalje razlikujemo dva podslučaja

   a) $x > 2 \to |x-2| = x-2 :$

   $$|x-2|-1 = 0 \iff x-2-1 = 0 \iff x = 3$$

   Kako $x = 3$ ispunjava uslov $x > 2$ to je ovo rešenje zadate jednačine.

   b) $1 < x \leq 2 \to |x-2| = -(x-2) = -x+2 :$

   $$|x-2|-1 = 0 \iff -x+2-1 = 0 \iff x = 1$$

   Kako $x = 1$ ne ispunjava uslov $1 < x \leq 2$ to ovo nije rešenje zadate jednačine.

2. $x \leq 1 : |x-1| = -x+1$

   Jednačina sada postaje

   $$||x-1|-1|-1 = |-x+1-1|-1 = |-x|-1 = |x|-1 = 0$$

   sada opet razlikujemo dva podslučaja

   a) $0 < x \leq 1 \to |x| = x :$

   $$|x|-1 = 0 \iff x-1 = 0 \iff x = 1$$

   Kako $x = 1$ ispunjava uslov $0 < x \leq 1$ to je ovo rešenje zadate jednačine.

   b) $x < 0 \to |x| = -x :$

   $$|x|-1 = 0 \iff -x-1 = 0 \iff x = -1$$

   Kako $x = -1$ ispunjava uslov $x < 0$ to je ovo rešenje zadate jednačine.

Sada se za zbir svih rešenja zadate jednačine dobija

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3 + 1 - 1 = 3.$$

9.Ⓐ Neka je R poluprečnik osnove prave kupe, H njena visina i s izvodnica prave kupe. Prema uslovu zadatka, ove tri veličine formiraju aritmetičku progresiju pa važi

$$R = a_1,\ H = a_1 + d,\ s = a_1 + 2d$$

odakle sledi

$$d = H - a_1 = H - R,\ s = a_1 + 2d = R + 2(H-R) = 2H - R$$

Površina osnog preseka kupe data je izrazom

$$P = \frac{1}{2} 2R \cdot H = 300 \iff RH = 300$$

Takođe, za izvodnicu kupe prema Pitagorinoj teoremi imamo

$$s^2 = R^2 + H^2$$

odnosno, korišćenjem gore izvedenog izraza za izvodnicu

$$(2H-R)^2 = R^2 + H^2 \iff 4H^2 - 4RH + R^2 = R^2 + H^2 \Rightarrow 3H^2 = 4RH = 4 \cdot 300 = 1200$$

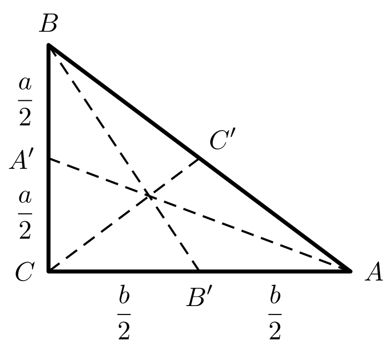
$$H^2 = 400 \Rightarrow H = 20 \Rightarrow R = \frac{300}{H} = 15$$

Sada se za zapreminu kupe ima

$$V = \frac{1}{3} BH = \frac{1}{3} R^2 \pi H = \frac{1}{3} 15^2 \pi 20 = 75 \cdot 20\pi = 1500\pi.$$

10.Ⓒ Neka je prava
$$y = kx + n$$
tangenta na parabolu $y^2 = 2x$ povučena iz tačke $(-4, 1)$. Kako prava prolazi kroz ovu tačku to je ispunjeno
$$1 = k \cdot (-4) + n \iff n = 4k + 1$$
i jednačina tangente postaje
$$y = kx + 4k + 1$$
Ova prava ima dodirnu tačku sa parabolom $x = \frac{1}{2}y^2$, koja se nalazi rešavanjem sistema jednačina
$$y = kx + 4k + 1, \quad x = \frac{1}{2}y^2$$
odakle imamo
$$y = kx + 4k + 1 \Rightarrow y = \frac{k}{2}y^2 + 4k + 1 \iff ky^2 - 2y + 2(4k + 1) = 0$$
da bi gornja kvadratna jednačina imala samo jedno rešenje (tangenta dodiruje parabolu samo u jednoj tački), diskriminanta kvadratne jednačine treba da je jednaka nuli, odnosno
$$D = b^2 - 4ac = 4 - 8k(4k + 1) = -32k^2 - 8k + 4 = 0$$
$$32k^2 + 8k - 4 = 0 \iff 8k^2 + 2k - 1 = 0$$
Rešenja dobijene kvadratne jednačine po k su
$$k_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \cdot 8}}{2 \cdot 8} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{16} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{cases}$$
Dakle postoje dve tangente na zadatu parabolu:
$$y = k_1 x + (4k_1 + 1) = \frac{1}{2}x - 1$$
$$y = k_2 x + (4k_2 + 1) = \frac{1}{4}x + 1$$
Ugao φ_1 koji prva tangenta zaklapa sa x osom dat je izrazom
$$\operatorname{tg}\varphi_1 = k_1 = -\frac{1}{2}$$
a ugao druge tangente sa x osom je
$$\operatorname{tg}\varphi_2 = k_2 = \frac{1}{4}$$
Sada se za ugao $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ koji ove dve tangente grade, dobija
$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_2}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{6}{7}$$
$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{6}{7}.$$

11.Ⓑ
Na slici je prikazan zadati pravougli trougao ABC dužina kateta $a = BC$, $b = AC$ i hipotenuze $c = AB$. Težišne duži $t_a = AA'$, $t_b = BB'$ i $t_c = CC'$ spajaju temena trougla sa središtem naspramnih stranica, te važi
$$BA' = A'C = \frac{a}{2},\ AB' = B'C = \frac{b}{2},\ AC' = C'B = \frac{c}{2}$$



Primenom Pitagorine teoreme na pravougle trouglove ABC, $B'CB$ i $A'CA$ dobijamo

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = t_b^2$$

$$b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = t_a^2$$

Znajući da je središte hipotenuze pravouglog trougla, ujedno i poluprečnik opisanog kruga, za hipotenuzu i težišnu duž iznad hipotenuze važi

$$t_c = \frac{c}{2} \Rightarrow t_c^2 = \frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$$

Sabiranjem poslednje tri jednačine imamo

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = b^2 + \frac{a^2}{4} + a^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{a^2 + b^2}{4} = \frac{3}{2}(a^2 + b^2)$$

$$\frac{t_a^2 + t_b^2 + t_c^2}{a^2 + b^2} = \frac{3}{2}.$$

12.Ⓓ Rešenja prve nejednačine nalazimo na sledeći način

$$x^2 - x - 2 < 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \iff x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ \ \ 2 \end{cases}$$

$$x \in (-1, 2)$$

Slično, za drugu nejednačinu imamo

$$-x^2 + 4x - 3 < 0 \iff x^2 - 4x + 3 > 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \iff x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$$

$$x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$$

Rešenje zadatog sistema se nalazi u preseku intervala

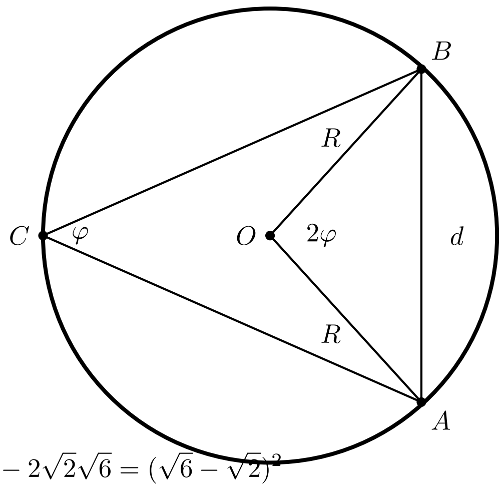
$$x \in (-1, 2) \text{ i } x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$$

te sledi

$$x \in (-1, 1).$$

13.Ⓑ

Na slici je prikazan krug poluprečnika $R = 2$ cm sa tetivom dužine $d = AB$ kojoj odgovara periferijski ugao $\varphi = \angle ACB = 15^\mathrm{o}$. Centralni ugao koji odgovara ovoj tetivi dvostruko je veći od periferijskog ugla



$$\angle AOB = 2\angle ACB = 2\varphi = 30^\mathrm{o}$$

Sada se na osnovu kosinusne teoreme za trougao AOB dobija

$$d^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cos 2\varphi = 2 \cdot 2^2(1 - \cos 30^\mathrm{o})$$

$$d^2 = 8\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8 - 4\sqrt{3}$$

Kako važi

$$8 - 4\sqrt{3} = 6 + 2 - 2\sqrt{2}\sqrt{6} = (\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2}\sqrt{6} = (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$$

to se za dužinu tetive ima

$$d = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{6} - \sqrt{2}.$$

14.Ⓑ Neka polinom $P(x) = x^{2008} + x^{1007} + 1$ pri deljenju polinomom $x^2 + 1$ daje količnik $Q(x)$ i ostatak $R(x)$. Količnik $Q(x)$ će biti polinom stepena $2008 - 2 = 2006$

$$Q(x) = a_{2006}x^{2006} + a_{2005}x^{2005} + a_{2004}x^{2004} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

a ostatak $R(x)$ polinom stepena $2 - 1 = 1$

$$R(x) = r_1x + r_0$$

tako da važi

$$P(x) = (x^2 + 1)Q(x) + R(x)$$

Rešenje A.

Sada imamo

$$P(x) = (x^2 + 1)Q(x) + r_1x + r_0$$

i za $x = i$, $(i^2 = -1)$ sledi

$$P(i) = (i^2 + 1)Q(i) + r_1 \cdot i + r_0 = r_1 \cdot i + r_0$$

S druge strane važi

$$P(i) = i^{2008} + i^{1007} + 1$$

gde je

$$i^{2008} = (i^2)^{1004} = (-1)^{1004} = 1$$
$$i^{1007} = i \cdot i^{1006} = i \cdot (i^2)^{503} = i \cdot (-1)^{503} = -i$$

te imamo

$$P(i) = i^{2008} + i^{1007} + 1 = 1 - i + 1 = 2 - i$$

Iz poslednje dve jednakosti za $P(j)$ dobijamo

$$r_1 \cdot i + r_0 = 2 - i \iff (r_1 + 1) \cdot i + (r_0 - 2) = 0 \iff r_1 = -1 \wedge r_0 = 2$$

te konačno sledi

$$R(x) = r_1x + r_0 = -x + 2.$$

Rešenje B.

Važi

$$\begin{aligned} x^{2008} + x^{1007} + 1 = (x^2+1)Q(x) + R(x) \\ = \quad & a_{2006}x^{2008} \\ & + a_{2005}x^{2007} \\ & + (a_{2004} + a_{2006})x^{2006} \\ & + (a_{2003} + a_{2005})x^{2005} \\ & + (a_{2002} + a_{2004})x^{2004} \\ & \vdots \\ & + (a_{1005} + a_{1007})x^{1007} \\ & \vdots \\ & + (a_1 + a_3)x^3 \\ & + (a_0 + a_2)x^2 \\ & + (a_1 + r_1)x \\ & + a_0 + r_0 \end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenata polinoma sa leve i desne strane jednačine dobijamo

$$\begin{aligned}
a_{2006} &= 1\\
a_{2005} &= 0\\
a_{2004} + a_{2006} &= 0 \Rightarrow a_{2004} = -a_{2006} = -1\\
a_{2003} + a_{2005} &= 0 \Rightarrow a_{2003} = -a_{2005} = 0\\
a_{2002} + a_{2004} &= 0 \Rightarrow a_{2002} = -a_{2004} = +1\\
&\vdots\\
a_{2k+1} &= 0\\
a_{2k} &= (-1)^{k+1}\\
&\vdots\\
a_{1005} + a_{1007} &= 1 \Rightarrow a_{1005} = 1 - a_{1007} = +1\\
a_{1004} + a_{1006} &= 0 \Rightarrow a_{1004} = -a_{1006} = -1\\
a_{1003} + a_{1005} &= 0 \Rightarrow a_{1003} = -a_{1005} = -1\\
a_{1002} + a_{1004} &= 0 \Rightarrow a_{1002} = -a_{1004} = +1\\
a_{1001} + a_{1003} &= 0 \Rightarrow a_{1001} = -a_{1003} = +1\\
&\vdots\\
a_{2k+1} &= (-1)^{k}\\
a_{2k} &= (-1)^{k+1}\\
&\vdots\\
a_1 + a_3 = 0 &= 0 \Rightarrow a_1 = -a_3 = +1\\
a_0 + a_2 = 0 &= 0 \Rightarrow a_0 = -a_2 = -1\\
a_1 + r_1 = 0 &= 1 \Rightarrow r_1 = a_1 = -1\\
a_0 + r_0 = 1 &= 0 \Rightarrow r_0 = 1 - a_0 = +2
\end{aligned}$$

Konačno dobijamo da je ostatak pri deljenju

$$R(x) = r_1 x + r_0 = -x + 2.$$

---

15. Ⓐ

$$\begin{aligned}
\sin 2x &= 1 + \sqrt{2}\cos x + \cos 2x\\
2\sin x\cos x &= 1 + \sqrt{2}\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x\\
2\sin x\cos x &= 1 + \sqrt{2}\cos x + 2\cos^2 x - 1\\
\sqrt{2}\cos x\left(\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x + 1\right) &= 0
\end{aligned}$$

Odavde slede dva moguća slučaja

1. $\cos x = 0$:

   Rešenja ove jednačine data su izrazima

   $$x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad x_m = \frac{3\pi}{2} + 2m\pi, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

   od kojih samo dva rešenja pripadaju zadatom intervalu $x \in (0, 2\pi)$

   $$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

2. $\sin x - \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$:

Kvadriranjem ove jednačine, uz uslov $\sin x > \cos x$ dalje dobijamo

$$\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$1 - \sin 2x = \frac{1}{2} \iff \sin 2x = \frac{1}{2}$$

Rešenja ove jednačine data su izrazima

$$2x_m = \frac{\pi}{6} + 2m\pi, \quad 2x_n = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

$$x_m = \frac{\pi}{12} + m\pi, \quad x_n = \frac{5\pi}{12} + n\pi, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

Moguća rešenja koja pripadaju intervalu $x \in (0, 2\pi)$ su

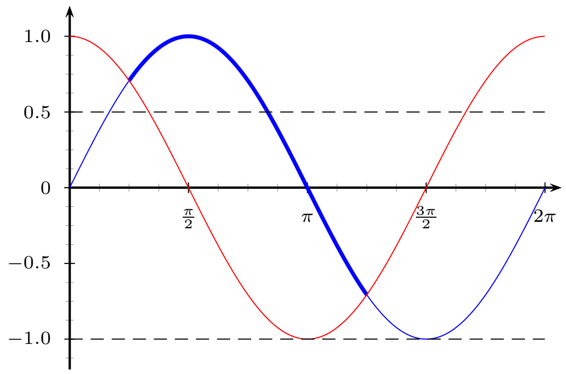
$$x = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12} + \pi, \frac{5\pi}{12}, \frac{5\pi}{12} + \pi$$

od kojih samo sledeća ispunjavaju uslov $\sin x > \cos x$ (videti sliku):

$$x = \frac{\pi}{12} + \pi, \frac{5\pi}{12}$$

Sada je zbir svih rešenja zadate jednačine

$$\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{12} + \pi + \frac{5\pi}{12} = 3\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}.$$



16.Ⓑ Zadatu nejednakost

$$\frac{3^x - 81}{(4^{2x+1} - 32)\sqrt{5^{\frac{x^2-3}{2}} - 125}} \leq 0$$

možemo predstaviti u sledećem obliku

$$\frac{P(x)}{Q(x)R(x)} \leq 0$$

gde je

$$P(x) = 3^x - 81$$

$$Q(x) = 4^{2x+1} - 32$$

$$R(x) = \sqrt{5^{\frac{x^2-3}{2}} - 125}$$

- Najpre, primećujemo da uvek važi $R(x) \geq 0$, ali da bi vrednost leve strane nejednakosti bila definisana u skupu realnih brojeva, neophodno je da vrednost funkcije pod kvadratnim korenom bude veća od nule (uslov jednakosti nuli je u prinicipu moguć, ali kako se funkcija $R(x)$ nalazi u imeniocu, taj uslov je isključen)

$$5^{\frac{x^2-3}{2}} - 125 > 0 \iff 5^{\frac{x^2-3}{2}} > 5^3 \iff \frac{x^2-3}{2} > 3$$

$$x^2 - 3 > 6 \iff x^2 - 9 > 0 \iff (x-3)(x+3) > 0 \iff x \in (-\infty, -3) \cup (+3, +\infty)$$

- Sada ispitujemo znak funkcije $P(x)$:

$$P(x) > 0 \iff 3^x - 81 > 0 \iff 3^x > 3^4 \iff x > 4$$

  dakle

$$P(x) > 0, \text{ za } x > 4$$

$$P(x) \leq 0, \text{ za } x \leq 4$$

- Na kraju, ispitujemo znak funkcije $Q(x)$:

$$Q(x) > 0 \iff 4^{2x+1} - 32 > 0 \iff 4^{2x+1} - 32 > 0 \iff 2^{2(2x+1)} > 2^5$$

$$4x + 2 > 5 \iff 4x > 3 \iff x > \frac{3}{4}$$

  Primećujemo da iz istog razloga kao za $R(x)$ mora da važi $Q(x) \neq 0$ odnosno $x \neq \frac{3}{4}$, dakle

$$Q(x) > 0, \text{ za } x > \frac{3}{4}$$

$$Q(x) < 0, \text{ za } x < \frac{3}{4}$$

U sledećoj tabeli su sumirani prethodni rezultati za znak funkcija $P(x)$, $Q(x)$ i leve strane (LS) nejednakosti (podsećamo, $R(x) > 0$ u intervalu $x \in (-\infty, -3) \cup (+3, +\infty)$:

$x \in$	$(-\infty, -3)$	$(3, 4]$	$(4, +\infty)$
$P(x)$	$-$	$-$	$+$
$Q(x)$	$-$	$+$	$+$
LS	$+$	$-$	$+$

Dakle, nejednakost je ispunjena za

$$x \in (3, 4].$$

17.Ⓓ Razvoj binoma $(a+b)^n$ dat je sledećim izrazom

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-k}a^k b^{n-k} + \cdots + \binom{n}{n-2}a^2 b^{n-2} + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

Zbir binomnih koeficijenata trećeg člana od početka i trećeg člana od kraja u razvoju binoma je

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{n-2} = \binom{n}{2} + \binom{n}{2} = 2\frac{n(n-1)}{2\cdot 1} = n(n-1)$$

te iz uslova zadatka

$$n(n-1) = 2450 = 50\cdot 49$$

sledi $n = 50$.

Sada tražimo sve racionalne članove u razvoju za koji je

$$a = \sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}}$$

$$b = \sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}}$$

Imamo

$$a^{n-k}b^k = \left(3^{\frac{1}{4}}\right)^{50-k}\left(4^{\frac{1}{3}}\right)^k = 3^{\frac{50-k}{4}}4^{\frac{k}{3}}$$

Da bi ovaj član bio racionalan broj, potrebno je da oba činioca u proizvodu budu racionalni brojevi, a to se dobija za one vrednosti k za koje istovremeno važi

- $50-k$ je deljivo sa četiri
- k je deljivo sa tri

U sledećoj tabeli su prikazane sve vrednosti k između 0 i 50 koje su deljive sa tri, i zaokružene one za koje važi da je $50-k$ deljivo sa četiri. Takvih brojeva je četiri koliki je i broj racionalnih članova u zadatom razvoju.

k	$50-k$
0	50
3	47
6	44
9	41

k	$50-k$
12	38
15	35
18	32
21	29

k	$50-k$
24	26
27	23
30	20
33	17

k	$50-k$
36	14
39	11
42	8
45	5

k	$50-k$
48	2

18.Ⓐ

$$\left(1 + 2\log_{|xy|}2\right)\cdot \log_{x+y}|xy| = 1$$

Neophodno je da važi $|xy| \neq 0, 1$ i $x+y > 0$, $x+y \neq 1$. Dalje imamo

$$\left(1 + 2\frac{\log_2 2}{\log_2|xy|}\right)\cdot \frac{\log_2|xy|}{\log_2(x+y)} = 1$$

$$\frac{\log_2|xy|}{\log_2(x+y)} + \frac{\log_2 2^2}{\log_2(x+y)} = 1$$

$$\frac{\log_2 4|xy|}{\log_2(x+y)} = 1$$

$$\log_2 4|xy| = \log_2(x+y)$$

$$4|xy| = x+y$$

Sada rešavamo sistem jednačina

$$4|xy| = x+y, \quad x-y = 2\sqrt{3} \iff x = y + 2\sqrt{3}$$

Smenom dalje dobijamo

$$4|y(y+2\sqrt{3})| = 2y + 2\sqrt{3}$$
$$2|y(y+2\sqrt{3})| = y + \sqrt{3}$$

Kako je $|y(y+2\sqrt{3})| \geq 0 \Rightarrow y+\sqrt{3} \geq 0 \iff y \geq -\sqrt{3}$. Dakle, rešenja tražimo u intervalu $y \in [-\sqrt{3}, +\infty)$ uz uslove $xy \neq 0$, $|xy| \neq 1$, $x+y>0$, $x+y \neq 1$. Razlikujemo sledeće slučajeve

- $y > 0$:

  Tada je $y(y+2\sqrt{3}) > 0$ te važi $|y(y+2\sqrt{3})| = y(y+2\sqrt{3})$ pa dalje sledi

  $$2|y(y+2\sqrt{3})| = y + \sqrt{3}$$

  $$2y(y+2\sqrt{3}) = y+\sqrt{3} \iff 2y^2 + 4\sqrt{3}y = y + \sqrt{3} \iff 2y^2 + (4\sqrt{3}-1)y - \sqrt{3} = 0$$

  Diskriminanta ove kvadratne jednačine je

  $$D = b^2 - 4ac = (4\sqrt{3}-1)^2 + 8\sqrt{3} = 48 - 8\sqrt{3} + 1 + 8\sqrt{3} = 49$$

  te su rešenja

  $$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4\sqrt{3}+1 \pm 7}{4} = \begin{cases} -\dfrac{3}{2} - \sqrt{3} \\ 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

  Jedino rešenje koje pripada intervalu $y > 0$ je $y = 2-\sqrt{3}$ za koje imamo $x = y + 2\sqrt{3} = 2+\sqrt{3}$. Međutim kako je

  $$|xy| = |(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})| = |4-3| = 1$$

  to ovo rešenje ne ispunjava uslov $|xy| \neq 1$ što znači da u ovom intervalu jednačina nema rešenja.

- $y \in [-\sqrt{3}, 0]$:

  Sada je $y(y+2\sqrt{3}) \leq 0$ te važi $|y(y+2\sqrt{3})| = -y(y+2\sqrt{3})$ pa dalje sledi

  $$2|y(y+2\sqrt{3})| = y + \sqrt{3}$$

  $$-2y(y+2\sqrt{3}) = y+\sqrt{3} \iff -2y^2 - 4\sqrt{3}y = y + \sqrt{3} \iff 2y^2 + (4\sqrt{3}+1)y + \sqrt{3} = 0$$

  Diskriminanta ove kvadratne jednačine je

  $$D = b^2 - 4ac = (4\sqrt{3}+1)^2 - 8\sqrt{3} = 48 + 8\sqrt{3} + 1 - 8\sqrt{3} = 49$$

  te su rešenja

  $$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4\sqrt{3}-1 \pm 7}{4} = \begin{cases} -2 - \sqrt{3} \\ \dfrac{3}{2} - \sqrt{3} \end{cases}$$

  Jedino rešenje koje pripada intervalu $y \in [-\sqrt{3}, 0]$ je $y = \frac{3}{2} - \sqrt{3}$ za koje imamo $x = y + 2\sqrt{3} = \frac{3}{2} + \sqrt{3}$. Kako je sada

  $$|xy| = \left| \left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)\left(\frac{3}{2}-\sqrt{3}\right) \right| = \left| \frac{9}{4} - 3 \right| = \frac{3}{4} \neq 0, \neq 1$$

  i

  $$x + y = 3 > 0, \neq 1$$

  to ovo rešenje ispunjava uslove zadatka.

Dakle, sistem jednačina ima jedno rešenje

$$x = \frac{3}{2} + \sqrt{3}, \quad y = \frac{3}{2} - \sqrt{3}.$$

19.Ⓑ Neka je $a = \log_5 6 > 1$, tada je $\log_6 5 = \dfrac{\log_5 5}{\log_5 6} = \dfrac{1}{\log_5 6} = \dfrac{1}{a} < 1$. Sada se zadate funkcije mogu izraziti u obliku

$$f_1(x) = (\log_5 6)^{\sin x} = a^{\sin x}$$
$$f_2(x) = (\log_5 6)^{\cos x} = (a^{-1})^{\cos x} = a^{-\cos x}$$

Funkcija će imati ekstremnu vrednost u onoj tački u kojoj je prvi izvod te funkcije jednak nuli

$$f'(x_0) = 0$$

Ako je drugi izvod te funkcije u toj tački pozitivan, ekstremna vrednost je minimum, ako je negativan, ekstremna vrednost je maksimum. Nađimo izvode zadatih funkcija. Uzimamo u obzir da važi

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a$$

Sada za prvu funkciju imamo

$$(f_1(x))' = (a^{\sin x})' = a^{\sin x} \ln a \cdot (\sin x)' = a^{\sin x} \ln a \cdot \cos x = 0$$

Rešenja gornje jednačine su

$$\cos x = 0 \iff \sin x = \pm 1$$

Drugi izvod funkcije $f_1(x)$ je

$$\begin{aligned}
(f_1(x))'' = ((f_1(x))')' &= (a^{\sin x} \ln a \cdot \cos x)' = \ln a \left((a^{\sin x})' \cdot \cos x + a^{\sin x} \cdot (\cos x)'\right) \\
&= \ln a \left((a^{\sin x} \ln a \cdot (\sin x)' \cdot \cos x + a^{\sin x} \cdot (\cos x)'\right) \\
&= \ln a \left(a^{\sin x} \ln a \cdot \cos x \cdot \cos x - a^{\sin x} \cdot \sin x\right) \\
&= a^{\sin x} \ln a (\ln a \cdot \cos^2 x - \sin x)
\end{aligned}$$

gde je $a = \log_5 6 > 1$ i $\ln a > 0$.

- Za $\cos x_1 = 0$, $\sin x_1 = 1$ imamo

  $$f_1''(x_1) = a^{\sin x_1} \ln a(\ln a \cdot \cos^2 x_1 - \sin x_1) = a^1 \ln a(\ln a \cdot 0 - 1) = -a \ln a < 0$$

  te funkcija u ovoj tački ima maksimum

  $$M_1 = f_1(x_1) = a^{\sin x_1} = a^1 = a = \log_5 6$$

- Za $\cos x_2 = 0$, $\sin x_2 = -1$ imamo

  $$f_1''(x_2) = a^{\sin x_2} \ln a(\ln a \cdot \cos^2 x_2 - \sin x_2) = a^{-1} \ln a(\ln a \cdot 0 + 1) = a^{-1} \ln a > 0$$

  te funkcija u ovoj tački ima minimum

Sličnim postupkom za drugu funkciju dobijamo

$$(f_2(x))' = (a^{-\cos x})' = a^{-\cos x} \ln a \cdot (-\cos x)' = a^{-\cos x} \ln a \cdot \sin x = 0$$

Rešenja gornje jednačine su

$$\sin x = 0 \iff \cos x = \pm 1$$

Drugi izvod funkcije $f_2(x)$ je

$$\begin{aligned}
(f_2(x))'' = ((f_2(x))')' &= (a^{-\cos x} \ln a \cdot \sin x)' = \ln a \left((a^{-\cos x})' \cdot \sin x + a^{-\cos x} \cdot (\sin x)'\right) \\
&= \ln a \left((a^{-\cos x} \ln a \cdot (-\cos x)' \cdot \sin x + a^{-\cos x} \cdot (\sin x)'\right) \\
&= \ln a \left(a^{-\cos x} \ln a \cdot \sin x \cdot \sin x + a^{-\cos x} \cdot \cos x\right) \\
&= a^{-\cos x} \ln a (\ln a \cdot \sin^2 x + \cos x)
\end{aligned}$$

gde je $a = \log_5 6 > 1$ i $\ln a > 0$.

- Za $\sin x_1 = 0$, $\cos x_1 = 1$ imamo

  $$f_2''(x_1) = a^{-\cos x_1} \ln a(\ln a \cdot \sin^2 x_1 + \cos x_1) = a^{-1} \ln a(\ln a \cdot 0 + 1) = a^{-1} \ln a > 0$$

  te funkcija u ovoj tački ima minimum

- Za $\sin x_2 = 0$, $\cos x_2 = -1$ imamo

  $$f_2''(x_2) = a^{-\cos x_2} \ln a(\ln a \cdot \sin^2 x_2 + \cos x_2) = a^1 \ln a(\ln a \cdot 0 - 1) = -a \ln a < 0$$

  te funkcija u ovoj tački ima maksimum

  $$M_2 = f_2(x_2) = a^{-\cos x_2} = a^1 = a = \log_5 6$$

Sada sledi $M_1 = M_2 = a = \log_5 6$.

20.Ⓔ Neka je u ravni dato N tačaka od koje nikoje tri i nikoje četiri nisu kolinearne. To znači da ne postoje tri tačke koje pripadaju istoj pravoj, niti četiri tačke koje pripadaju istoj pravoj. To ujedno znači da bilo koje tri tačke obrazuju trougao i bilo koje četiri tačke obrazuju četvorougao.

Ukupan broj različitih četvorouglova koji se može formirati od ovih N tačaka jednak je broju kombinacija od N elemenata klase 4:

$$\binom{N}{4}$$

Slično, ukupan različitih trouglova koji se može formirati od ovih N tačaka jednak je broju kombinacija od N elemenata klase 3:

$$\binom{N}{3}$$

Prema uslovu zadatka važi

$$\binom{N}{4} = 8\binom{N}{3}$$

odakle sledi

$$\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 8\frac{N(N-1)(N-2)}{3\cdot 2\cdot 1}$$

$$\frac{N-3}{4} = 8 \iff N-3 = 32 \iff N = 35$$

Bilo koje dve tačke od ovih $N = 35$ tačaka određuju jednu pravu, tako da je ukupan broj pravih dat brojem kombinacija od $N = 35$ elemenata, druge klase

$$\binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2} = \frac{35\cdot 34}{2} = 17\cdot 35 = 595.$$

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE ZA UPIS NA ELEKTROTEHNIČKI I FIZIČKI FAKULTET

1. Vrednost izraza $2^{0.5} - 2^0 - (2^{0.5} + 2^0)^{-1}$ jednaka je:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) $\sqrt{2}$ (E) $-\sqrt{2}$ (N) Ne znam

2. Ako je $x > 0$, onda je $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ jednako:

(A) $x\sqrt{x}$ (B) $x\sqrt[4]{x}$ (C) $\sqrt[8]{x}$ (D) $\sqrt[8]{x^3}$ (E) $\sqrt[8]{x^7}$ (N) Ne znam

3. Rastojanje tačke $(1, -1)$ od prave $x + 2y - 4 = 0$ iznosi:

(A) $\sqrt{2}$ (B) 3 (C) $\sqrt{3}$ (D) 4 (E) $\sqrt{5}$ (N) Ne znam

4. Vrednost izraza $\dfrac{(1+i)^{2008} - (1-i)^{2009}}{(1+i)^{2006} + (1-i)^{2007}}$, $(i^2 = -1)$ iznosi:

(A) i (B) $1 + i$ (C) $1 - i$ (D) $-i$ (E) $2i$ (N) Ne znam

5. Ako je $|x + a| = a\,(a \geq 0)$, tada je $||x| - a|$ jednako:

(A) 0 (B) a (C) $2a$ (D) $3a$ (E) $\dfrac{a}{2}$ (N) Ne znam

6. Jednačina $\log_2(1 - x) = \log_2(x - 3)$:

(A) Nema rešenja (B) Ima beskonačno mnogo rešenja

(C) $x = 3$ je jedinstveno rešenje (D) $x = 1$ je jedinstveno rešenje

(E) Zadovoljena je za $x = 2$ (N) Ne znam

7. Lopta je upisana u kocku. Odnos površina lopte i kocke je:

(A) $\dfrac{2\pi}{3}$ (B) $\dfrac{\pi}{6}$ (C) $\dfrac{4\pi}{3}$ (D) $\dfrac{\pi}{12}$ (E) $\dfrac{8\pi}{3}$ (N) Ne znam

8. Skup svih rešenja nejednačine $\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)} \geq 1$ je:

(A) $(-\infty, +\infty)$ (B) $[0, +\infty)$

(C) $[0, 1]$ (D) $[0, 1) \cup (2, +\infty)$

(E) $(-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$ (N) Ne znam

9. Neka su α, β i γ uglovi a a, b i c stranice proizvoljnog trougla. Tada je $\dfrac{b - 2a\cos\gamma}{a\sin\gamma} + \dfrac{c - 2b\cos\gamma}{b\sin\alpha} + \dfrac{a - 2c\cos\beta}{c\sin\beta}$ jednako:

(A) -2 (B) -1

(C) 0 (D) 1

(E) Nijedan od ponuđenih odgovora (N) Ne znam

10. Ako su x_1 i x_2 rešenja jednačine $3x^2+17x-14=0$, tada je vrednost izraza $\dfrac{3x_1^2+5x_1x_2+3x_2^2}{4x_1x_2^2+4x_1^2x_2}$ jednaka:

(A) $\frac{909}{952}$ (B) $\frac{303}{238}$ (C) $\frac{101}{352}$ (D) $\frac{5}{9}$ (E) $\frac{13}{3}$ (N) Ne znam

11. Koliko rešenja ima jednačina $\cos^2 x-\sin^2 2x=0$ na segmentu $[0,2\pi]$?

(A) 1 (B) 6 (C) 4 (D) 2 (E) 3 (N) Ne znam

12. Jednačina $9^{2\sqrt{x-1}}-4\cdot 3^{2\sqrt{x-1}}+3=0$:

(A) Nema rešenja (B) Ima jedno rešenje

(C) Ima dva rešenja (D) Ima tri rešenja

(E) Ima četiri rešenja (N) Ne znam

13. Vrednost izraza $\dfrac{\sin 86^o+\sin 76^o-\sin 26^o-\sin 16^o}{\cos 86^o+\cos 76^o+\cos 26^o+\cos 16^o}$ iznosi:

(A) $\sqrt{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (E) 0 (N) Ne znam

14. Ako je x^2+4x+6 faktor od x^4+ax^2+b, tada je $a+b$ jednako:

(A) 12 (B) 24 (C) 32 (D) 36 (E) 40 (N) Ne znam

15. U razvoju binoma $\left(\sqrt[4]{a^2x}+\sqrt[5]{\dfrac{1}{ax^2}}\right)^{13}$ $(a>0,\ x>0)$, član koji ne sadrži x glasi:

(A) $1287a^3$ (B) $1024a^4$ (C) $390a^2$ (D) $516a$ (E) $52a^5$ (N) Ne znam

16. U geometrijskoj progresiji je $a_1+a_5=51$, $a_2+a_6=102$. Za koju vrednost n je zbir n prvih članova te progresije $S_n=3069$?

(A) $n=4$ (B) $n=6$ (C) $n=8$ (D) $n=10$ (E) $n=12$ (N) Ne znam

17. Zbir najveće i najmanje vrednosti funkcije $f(x)=x^3+3x^2-72x+90$ na segmentu $[-5,5]$ iznosi:

(A) 314 (B) 330 (C) 400 (D) 412 (E) 321 (N) Ne znam

18. Date su funkcije $f_1(x)=2^{\log_2 x}$, $f_2(x)=\log_2 2^x$, $f_3(x)=x$, $f_4(x)=(x\cdot 2^{-\log_2\sqrt{x}})^2$. Tačan je iskaz:

(A) Među funkcijama nema međusobno jednakih (B) $f_1=f_2=f_3\neq f_4$

(C) $f_1\neq f_2=f_2\neq f_4\neq f_1$ (D) $f_3\neq f_1=f_2\neq f_4$

(E) $f_2=f_3\neq f_1=f_4$ (N) Ne znam

19. Dati su brojevi $a=\dfrac{\sin 1}{\sin 2}$, $b=\dfrac{\sin 2}{\sin 3}$ i $c=\dfrac{\sin 3}{\sin 4}$. Tada je

(A) $a<b<c$ (B) $c<b<a$ (C) $c<a<b$ (D) $b<a<c$ (E) $a<c<b$ (N) Ne znam

20. Broj načina na koji se može formirati petočlana komisija od 2 matematičara i 8 fizičara, tako da u njoj bude bar jedan matematičar iznosi:

(A) 132 (B) 196 (C) 212 (D) 314 (E) 422 (N) Ne znam

REŠENJA

1.Ⓐ Kako je

$$2^{0.5} - 2^0 = \sqrt{2} - 1$$

i

$$(2^{0.5} + 2^0)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2-1} = \sqrt{2}-1$$

to je

$$2^{0.5} - 2^0 - (2^{0.5} + 2^0)^{-1} = 0.$$

2.Ⓔ

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = (x(x \cdot x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = (x(x^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = (x \cdot x^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}} = (x^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{7}{8}} = \sqrt[8]{x^7}.$$

3.Ⓔ Rastojanje tačke (x_0, y_0) od prave $ax + by + c = 0$ dato je jednačinom

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Kako je u našem slučaju $x_0 = 1$, $y_0 = -1$, $a = 1$, $b = 2$, $c = -4$, za rastojanje dobijamo

$$d = \frac{|1-2-4|}{\sqrt{1+4}} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

4.Ⓔ

$$\frac{(1+i)^{2008} - (1-i)^{2009}}{(1+i)^{2006} + (1-i)^{2007}} = \frac{(1+i)^{2008}}{(1+i)^{2006}} \frac{1 - (1-i)\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2008}}{1 + (1-i)\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2006}}$$

Kako je

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{1+i^2-2i}{1^2-i^2} = -i$$

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2008} = (-i)^{2008} = i^{2008} = (i^2)^{1004} = (-1)^{1004} = 1$$

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2006} = (-i)^{2006} = i^{2006} = (i^2)^{1003} = (-1)^{1003} = -1$$

dalje sledi

$$\frac{(1+i)^{2008} - (1-i)^{2009}}{(1+i)^{2006} + (1-i)^{2007}} = \frac{(1+i)^{2008}}{(1+i)^{2006}} \frac{1-(1-i)}{1-(1-i)} = (1+i)^2 = 1 + i^2 + 2i = 2i.$$

5.Ⓑ Kako je

$$|x+a| = \begin{cases} x+a, & x+a \geq 0 \iff x \geq -a \\ -(x+a), & x+a < 0 \iff x < -a \end{cases}$$

to imamo

1. $x \geq -a$:

$$|x+a| = a \Rightarrow x + a = a \iff x = 0$$

   Kako je $a \geq 0 \iff -a \leq 0$ i $x = 0$, to je uslov $x \geq -a$ ispunjen

2. $x < -a$:

$$|x+a| = a \Rightarrow x + a = -a \iff x = -2a$$

   Kako je $-2a < -a$ i $x = -2a$ to je uslov $x < -a$ ispunjen.

Sada imamo

$$||x|-a| = \left\{ \begin{array}{ll} ||0|-a| = |-a| = a, & x \geq a \\ ||-2a|-a| = |2a-a| = a, & x < a \end{array} \right\} = a.$$

6.Ⓐ Jednačina

$$\log_2(1-x) = \log_2(x-3)$$

je definisana za

$$1-x > 0 \iff x < 1$$

i

$$x-3 > 0 \iff x > 3$$

te rešenja treba tražiti u intervalu

$$x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$$

u tom intervalu važi

$$\log_2(1-x) = \log_2(x-3) \iff 1-x = x-3 \iff 2x = 4 \iff x = 2$$

Međutim, kako $x = 2$ ne pripada mogućem intervalu, to jednačina nema rešenja.

7.Ⓑ Neka je a dužina stranice kocke. Lopta upisana u ovu kocku će imati prečnik $2R$ jednak dužini stranice kocke, odnosno

$$a = 2R$$

Površina lopte je

$$P_l = 4\pi R^2$$

dok je površina kocke

$$P_k = 6a^2 = 6(2R)^2 = 24R^2$$

tako da je traženi odnos površina lopte i kocke

$$\frac{P_l}{P_k} = \frac{4\pi R^2}{24R^2} = \frac{\pi}{6}.$$

8.Ⓓ

$$\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)} \geq 1,\ x \neq 1, 2$$

$$\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)} - 1 \geq 0 \iff \frac{(x+1)(x+2)-(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} \geq 0 \iff \frac{(x^2+3x+2)-(x^2-3x+2)}{(x-1)(x-2)} \geq 0$$

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)} \geq 0$$

U sledećoj tabeli su dati znaci funkcija x, $x-1$ i $x-2$, kao i leve strane (LS) nejednakosti (podećamo da je leva strana nejednačine definisana za $x \neq 1, 2$):

$x \in$	$(-\infty, 0)$	$[0, 1)$	(1,2)	$(2, +\infty)$
x	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
LS	$-$	$+$	$-$	$+$

Dakle, rešenje date nejednačine je

$$x \in [0, 1) \cup (2, +\infty).$$

9. C Na osnovu kosinusne teoreme za stranice a, b, c i njima naspramne uglove α, β, γ proizvoljnog trougla, imamo

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = b^2 + c(c - 2b\cos\alpha) \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ac\cos\beta = c^2 + a(a - 2c\cos\beta) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = a^2 + b(b - 2a\cos\gamma) \end{aligned}$$

čijim sabiranjem dobijamo

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + c(c - 2b\cos\alpha) + a(a - 2c\cos\beta) + b(b - 2a\cos\gamma)$$

$$b(b - 2a\cos\gamma) + c(c - 2b\cos\alpha) + a(a - 2c\cos\beta) = 0$$

Na osnovu sinusne teoreme za isti trougao imamo

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = t$$

odakle je

$$a = t\sin\alpha,\ b = t\sin\beta,\ c = t\sin\gamma$$

što smenom u gornjoj jednačini daje

$$t\sin\beta\cdot(b - 2a\cos\gamma) + t\sin\gamma\cdot(c - 2b\cos\alpha) + t\sin\alpha\cdot(a - 2c\cos\beta) = 0$$

$$\sin\beta\cdot(b - 2a\cos\gamma) + \sin\gamma\cdot(c - 2b\cos\alpha) + \sin\alpha\cdot(a - 2c\cos\beta) = 0$$

$$\frac{b - 2a\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma} + \frac{c - 2b\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta} + \frac{a - 2c\cos\beta}{\sin\beta\sin\gamma} = 0$$

dalje korišćenjem

$$\sin\alpha = \frac{a}{t},\ \sin\beta = \frac{b}{t},\ \sin\gamma = \frac{c}{t}$$

konačno dobijamo

$$\frac{b - 2a\cos\gamma}{\frac{a}{t}\sin\gamma} + \frac{c - 2b\cos\alpha}{\sin\alpha\frac{b}{t}} + \frac{a - 2c\cos\beta}{\sin\beta\frac{c}{t}} = 0$$

$$\frac{b - 2a\cos\gamma}{a\sin\gamma} + \frac{c - 2b\cos\alpha}{b\sin\alpha} + \frac{a - 2c\cos\beta}{c\sin\beta} = 0.$$

---

10. A Ako su x_1 i x_2 rešenja jednačine

$$3x^2 + 17x - 14 = 0 \iff x^2 + \frac{17}{3} - \frac{14}{3} = 0$$

tada važi

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2) + x_1x_2 = x^2 + \frac{17}{3}x - \frac{14}{3}$$

te izjednačavanjem koeficijenata polinoma sa obe strane gornje jednačine dobijamo

$$x_1 + x_2 = -\frac{17}{3}$$

$$x_1x_2 = -\frac{14}{3}$$

Sada imamo

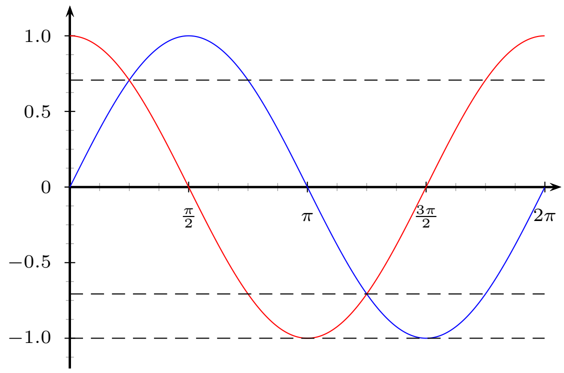
$$\begin{aligned} \frac{3x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2}{4x_1x_2^2 + 4x_1^2x_2} &= \frac{3(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) - x_1x_2}{4x_1x_2(x_1 + x_2)} \\ &= \frac{3(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2}{4x_1x_2(x_1 + x_2)} \\ &= \frac{3\left(-\frac{17}{3}\right)^2 + \frac{14}{3}}{-4\frac{14}{3}\left(-\frac{17}{3}\right)} = \frac{3\cdot 17^2 + 3\cdot 14}{4\cdot 14\cdot 17} = \frac{909}{952}. \end{aligned}$$

11. Ⓑ

$$\cos^2 x - \sin^2 2x = 0,\ x \in [0, 2\pi]$$
$$\cos^2 x - 4\sin^2 x \cos^2 x = 0$$
$$\cos^2 x(1 - 4\sin^2 x) = 0$$
$$\cos^2 x = 0 \vee 1 - 4\sin^2 x = 0$$

1. $\cos^2 x = 0 \iff \cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

   Rešenja koja pripadaju intervalu $[0, 2\pi]$ su
   $$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$



2.
   $$1 - 4\sin^2 x = 0 \iff 4\sin^2 x = 1 \iff \sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$
   $$\sin x = +\frac{\sqrt{2}}{2} \iff x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$
   Rešenja koja pripadaju intervalu $[0, 2\pi]$ su
   $$x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$
   $$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$
   Rešenja koja pripadaju intervalu $[0, 2\pi]$ su
   $$x = \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

Dakle, ukupan broj rešenja zadate jednačine je šest.

---

12. Ⓒ

$$9^{2\sqrt{x-1}} - 4 \cdot 3^{2\sqrt{x-1}} + 3 = 0 \iff \left(3^{2\sqrt{x-1}}\right)^2 - 4 \cdot 3^{2\sqrt{x-1}} + 3 = 0$$

Uvođenjem smene $t = 3^{2\sqrt{x-1}}$, $x \geq 1$, $t > 0$ dobijamo

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$$

Oba rešenja su pozitivna, pa je uslov $t > 0$ ispunjen. Dalje imamo

$$t = 1 \iff 3^{2\sqrt{x-1}} = 3^0 \iff 2\sqrt{x-1} = 0 \iff x = 1$$
$$t = 3 \iff \iff 3^{2\sqrt{x-1}} = 3^1 \iff 2\sqrt{x-1} = 1 \iff x = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

Oba rešenja ispunjavaju uslov $x \geq 1$, te zadata jednačina ima dva rešenja.

13.Ⓓ Koristimo sledeće trigonometrijske identitete

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Sada imamo

$$\sin 86^{\text{o}} - \sin 26^{\text{o}} = 2\sin\frac{86^{\text{o}}-26^{\text{o}}}{2}\cos\frac{86^{\text{o}}+26^{\text{o}}}{2} = 2\sin\frac{60^{\text{o}}}{2}\cos\frac{112^{\text{o}}}{2} = 2\sin 30^{\text{o}}\cos 56^{\text{o}}$$

$$\sin 76^{\text{o}} - \sin 16^{\text{o}} = 2\sin\frac{76^{\text{o}}-16^{\text{o}}}{2}\cos\frac{76^{\text{o}}+16^{\text{o}}}{2} = 2\sin\frac{60^{\text{o}}}{2}\cos\frac{92^{\text{o}}}{2} = 2\sin 30^{\text{o}}\cos 46^{\text{o}}$$

$$\cos 86^{\text{o}} + \cos 26^{\text{o}} = 2\cos\frac{86^{\text{o}}-26^{\text{o}}}{2}\cos\frac{86^{\text{o}}+26^{\text{o}}}{2} = 2\cos\frac{60^{\text{o}}}{2}\cos\frac{112^{\text{o}}}{2} = 2\cos 30^{\text{o}}\cos 56^{\text{o}}$$

$$\cos 76^{\text{o}} + \cos 16^{\text{o}} = 2\cos\frac{76^{\text{o}}-16^{\text{o}}}{2}\cos\frac{76^{\text{o}}+16^{\text{o}}}{2} = 2\cos\frac{60^{\text{o}}}{2}\cos\frac{92^{\text{o}}}{2} = 2\cos 30^{\text{o}}\cos 46^{\text{o}}$$

te dalje sledi

$$\begin{aligned}\frac{\sin 86^{\text{o}} + \sin 76^{\text{o}} - \sin 26^{\text{o}} - \sin 16^{\text{o}}}{\cos 86^{\text{o}} + \cos 76^{\text{o}} + \cos 26^{\text{o}} + \cos 16^{\text{o}}} &= \frac{2\sin 30^{\text{o}}\cos 56^{\text{o}} + 2\sin 30^{\text{o}}\cos 46^{\text{o}}}{2\cos 30^{\text{o}}\cos 56^{\text{o}} + 2\cos 30^{\text{o}}\cos 46^{\text{o}}}\\ &= \frac{\sin 30^{\text{o}}}{\cos 30^{\text{o}}}\frac{\cos 56^{\text{o}} + \cos 46^{\text{o}}}{\cos 56^{\text{o}} + \cos 46^{\text{o}}}\\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

14.Ⓒ Ako je polinom $x^4 + ax^2 + b$ deljiv polinomom $x^2 + 4x + 6$ tada postoji polinom stepena $4 - 2 = 2$: $Q(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ takav da važi

$$\begin{aligned}x^4 + ax^2 + b &= (x^2 + 4x + 6)Q(x) = (x^2 + 4x + 6)(a_2x^2 + a_1x + a_0)\\ &= a_2x^4 + (a_1 + 4a_2)x^3 + (a_0 + 4a_1 + 6a_2)x^2 + (4a_0 + 6a_1)x + 6a_0\end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenata polinoma sa leve i desne strane jednačine dobijamo

$$\begin{aligned}a_2 &= 1\\ a_1 + 4a_2 = 0 &\Rightarrow a_1 = -4a_2 = -4\\ 4a_0 + 6a_1 = 0 &\Rightarrow a_0 = -\frac{3}{2}a_1 = 6\\ b &= 6a_0 = 36\\ a &= a_0 + 4a_1 + 6a_2 = 6 - 16 + 6 = -4\end{aligned}$$

Sada dobijamo

$$a + b = -4 + 36 = 32.$$

15.Ⓐ Opšta formula za razvoj binoma je

$$(c+d)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}c^{n-k}d^k$$

U našem slučaju važi

$$c = \sqrt[4]{a^2x} = (a^2x)^{\frac{1}{4}}$$

$$d = \sqrt[5]{\frac{1}{ax^2}} = (a^2x)^{-\frac{1}{5}}$$

$$n = 13$$

te je

$$c^{n-k}d^k = (a^2x)^{\frac{n-4}{4}} \cdot (a^2x)^{-\frac{k}{5}} = a^{\frac{13-k}{2}-\frac{k}{5}} \cdot x^{\frac{13-k}{4}-\frac{2k}{5}}$$

Ovaj član neće sadržati x u svom zapisu za

$$\frac{13-k}{4} - \frac{2k}{5} = 0 \iff 65 - 5k - 8k = 0 \iff k = 5$$

i taj član je

$$\binom{n}{k} a^{\frac{n-k}{2}} a^{-\frac{k}{5}} = \binom{13}{5} a^{\frac{13-5}{2}} \cdot a^{-\frac{5}{5}} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} a^4 \cdot a^{-1} = 13 \cdot 11 \cdot 9a^3 = 1287a^3.$$

---

16. Ⓓ

$$a_n = q^{n-1}a_1 \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

$$a_2 = qa_1,\ a_5 = q^4a_1,\ a_6 = q^5a_1$$

$$a_1 + a_5 = 51 \Rightarrow a_1(1 + q^4) = 51$$

$$a_2 + a_6 = 102 \Rightarrow a_1q(1 + q^4) = 102$$

Deljenjem poslednje dve jednakosti, dobijamo

$$q = 2$$

i

$$a_1 = \frac{51}{1 + q^4} = \frac{51}{1 + 16} = 3$$

Sada se za sumu prvih n članova ima

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1(1 + q + \cdots + q^{n-1}) = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Iz uslova zadatka $S_n = 3069$ dobijamo jednačinu po nepoznatoj n

$$3\frac{2^n - 1}{2 - 1} = 3069$$

$$2^n - 1 = 1023 \iff 2^n = 1024 = 2^{10} \iff n = 10.$$

---

17. Ⓐ

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$$

Prvi izvod funkcije je jednak nuli

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 72 = 0$$

za

$$x^2 + 2x - 24 = 0 \iff x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 24}}{2} = \frac{-2 \pm 10}{2} = \begin{cases} -6 \\ +4 \end{cases}$$

Drugi izvod funkcije je

$$f''(x) = (f(x)')' = (3x^2 + 6x - 72)' = 6x + 6$$

$$\text{za } x = -6: \quad f''(x) = 6x + 6 = 6 \cdot (-6) + 6 = -30 < 0 \Rightarrow \text{ funkcija ima maksimum u ovoj tački}$$

$$\text{za } x = 4: \quad f''(x) = 6x + 6 = 6 \cdot (4) + 6 = 30 > 0 \Rightarrow \text{ funkcija ima minimum u ovoj tački}$$

Tražimo minimum i maksimum funkcije na intervalu $x \in [-5, 5]$. Kako $x = 4$ pripada ovom intervalu, to je minimum funkcije na ovom intervalu

$$m = f(4) = 4^3 + 3 \cdot 4^2 - 72 \cdot 4 + 90 = -86$$

Kako $x = -6$ ne pripada intervalu $[-5, 5]$ to maksimum funkcije nije u ovom intervalu. Prvi izvod funkcije

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 72 = 3(x - 4)(x + 6)$$

je negativan na intervalu $x \in (-6, +4)$ te je na ovom intervalu funkcija opadajuća. Ako funkcija ima maksimum u tački $x = -6$ i polazeći od te tačke opada do $x = 4$, to maksimum na intervalu $[-5, 5]$ treba tražiti na granici intervala bliskoj apsolutnom maksimumu tj. u tački $x = -5$:

$$M = f(-5) = (-5)^3 + 3 \cdot (-5)^2 - 72 \cdot (-5) + 90 = 400$$

Sada dobijamo

$$m + M = 400 - 86 = 314.$$

18.Ⓔ Imamo

$$f_1(x) = 2^{\log_2 x} = x,\ x > 0$$

$$f_2(x) = \log_2 2^x = x,\ x \in \mathbb{R}$$

$$f_3(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$$

$$f_4(x) = \left(x \cdot 2^{\log_2 \frac{1}{\sqrt{x}}}\right)^2 = x^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = \frac{x^2}{x} = x,\ x > 0$$

Dakle, sve tri funkcije su identički jednake x, pri čemu su $f_2(x)$ i $f_3(x)$ definisane za sve realne brojeve x, dok su $f_1(x)$ i $f_4(x)$ definisane za pozitivne realne brojeve x. Odavde sledi

$$f_2 = f_3 \neq f_1 = f_4.$$

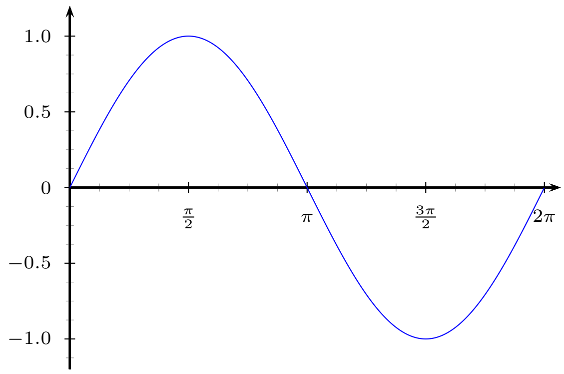
19.Ⓒ
Važi

$$\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{3}$$

i kako je funkcija $\sin(x)$ na ovom intervalu rastuća (videti sliku), to sledi

$$\sin\frac{\pi}{4} < \sin 1 < \sin\frac{\pi}{3}$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin 1 < \frac{\sqrt{3}}{2}}$$



Slično imamo

$$\frac{\pi}{2} < 2 < \frac{2\pi}{3}$$

kako je na ovom intervalu funkcija $\sin x$ opadajuća (videti sliku), to dobijamo

$$\sin\frac{\pi}{2} > \sin 2 > \sin\frac{2\pi}{3}$$

$$1 > \sin 2 > \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin 2 < 1}$$

Dalje važi

$$\frac{5\pi}{6} < 3 < \pi$$

i kako je na ovom intervalu funkcija $\sin x$ opadajuća, to imamo

$$\sin\frac{5\pi}{6} > \sin 3 > \sin\pi$$

$$\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) > \sin 3 > 0$$

$$\sin\frac{\pi}{6} > \sin 3 > 0$$

$$\boxed{0 < \sin 3 < \frac{1}{2}}$$

Najzad, kako je
$$\frac{3\pi}{2} > 4 > \pi$$
i na ovom intevalu funkcija $\sin x$ opadajuća, to važi
$$\sin\frac{3\pi}{2} < \sin 4 < \sin\pi$$
$$\boxed{-1 < \sin 4 < 0}$$
Sada za gornju granicu a imamo
$$\sin 1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin 2 > \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sin 2} < \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
te množenjem poslednje dve relacije, dobijamo
$$a = \frac{\sin 1}{\sin 2} = \sin 1\frac{1}{\sin 2} < \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 \Rightarrow a < 1$$
Slično, za donju granicu a dobijamo
$$\sin 1 > \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin 2 < 1 \Rightarrow \frac{1}{\sin 2} > 1$$
te množenjem poslednje dve relacije, imamo
$$a = \frac{\sin 1}{\sin 2} > \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$
Kako je
$$\sin 2 > \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin 3 < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sin 3} > 2$$
Množenjem poslednje dve relacije, za donju granicu b imamo
$$b = \frac{\sin 2}{\sin 3} > \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2 = \sqrt{3}$$
Dakle, imamo
$$0 < a < 1 \text{ i } b > \sqrt{3} > 1 \Rightarrow 0 < a < b$$
Kako je $\sin 3 > 0$ i $\sin 4 < 0$ to važi
$$c = \frac{\sin 3}{\sin 4} < 0$$
te konačno imamo relaciju
$$c < a < b.$$

20.Ⓑ Iz skupa od 2 matematičara i 8 inženjera treba formirati komisiju od pet članova tako da je u njoj bar jedan matematičar. Imamo dve međusobno isključive mogućnosti

1. U komisiji su tačno jedan matematičar i četiri inženjera.

   Jednog matematičara iz skupa od 2 matematičara možemo izabrati na $\binom{2}{1}$ načina.

   Četiri inženjera iz skupa od 8 inženjera možemo izabrati na $\binom{8}{4}$ načina, pa je ukupan broj ovakvih komisija
   $$\binom{2}{1}\cdot\binom{8}{4}$$

2. U komisiji su tačno dva matematičara i tri inženjera.

   Dva matematičara iz skupa od 2 matematičara možemo izabrati na $\binom{2}{2}$ načina.

   Tri inženjera iz skupa od 8 inženjera možemo izabrati na $\binom{8}{3}$ načina, pa je ukupan broj ovakvih komisija

$$\binom{2}{2}\cdot\binom{8}{3}$$

Sada se za ukupan broj petočlanih komisija u kojima je bar jedan matematičar ima

$$\binom{2}{1}\cdot\binom{8}{4}+\binom{2}{2}\cdot\binom{8}{3}=2\cdot\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}+1\cdot\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=28\cdot5+56=196.$$

Zadatak se može rešiti i na sledeći način. Ukupan broj petočlanih komisija iz skupa od 10 stručnjaka (2 matematičara + 8 inženjera) se može izabrati na

$$\binom{10}{5}\text{ načina}$$

Ukupan broj petočlanih komisija u kojima nema nijednog matematičara dobija se biranjem pet članova iz skupa od 8 inženjera, što se može učiniti na

$$\binom{8}{5}\text{ načina}$$

Sada je ukupan broj komisija u kojima je bar jedan matematičar jednak razlici

$$\binom{10}{5}-\binom{8}{5}=196.$$

KLASIFIKACIONI ISPIT IZ MATEMATIKE ZA UPIS NA ELEKTROTEHNIČKI I FIZIČKI FAKULTET

1. Vrednost izraza $(\sqrt{2}+\sqrt{4}+\sqrt{8}+\sqrt{16})\cdot(1-2^{-1/2})$ jednaka je:

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) 3 (D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (E) $2+\sqrt{2}$ (N) Ne znam

2. Jednačina prave koja je normalna na pravu $2x+3y+5=0$ ima koeficijent pravca:

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $-\frac{3}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $-\frac{2}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$ (N) Ne znam

3. Ako je $\frac{0.0015\cdot 10^m}{0.03\cdot 10^k}=5\cdot 10^7$ tada je razlika $m-k$ jednaka:

(A) 9 (B) 8 (C) 7 (D) 6 (E) 5 (N) Ne znam

4. Vrednost izraza $\frac{(1-i^{2006})^{2007}}{(1+i^{2008})^{2009}}$, $(i^2=-1)$ iznosi:

(A) $\frac{i}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) 4 (D) i (E) $-i$ (N) Ne znam

5. Ako je $(b-3)\left(4+\frac{2}{b}\right)=0$ i $b\neq 3$, tada je b jednako:

(A) -8 (B) -2 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) 2 (N) Ne znam

6. Funkcije f i g zadate su sa $g(f(x))=\frac{x}{2}$ i $g(x)=\log_{16}x$. Tada je $f(-1)+f(-\frac{3}{2})$ jednako:

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{7}{4}$ (C) $\frac{5}{8}$ (D) $\frac{5}{2}$ (E) $\frac{3}{8}$ (N) Ne znam

7. Ako su x_1 i x_2 rešenja jednačine $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}=\frac{1}{a}$ $(a\neq 0)$, tada su $\frac{1}{x_1^2}$ i $\frac{1}{x_2^2}$ rešenja jednačine

(A) $a^4x^2-6a^2x+1=0$ (B) $a^3x^2+6ax+1=0$

(C) $a^4x^2+6a^2x+1=0$ (D) $a^3x^2-6ax+1=0$

(E) $x^2+6a^3x+a^4=0$ (N) Ne znam

8. Osnovica jednakokrakog trougla je 6 cm a krak 12 cm. Poluprečnik opisanog kruga oko trougla iznosi (u cm):

(A) $\frac{7}{5}\sqrt{15}$ (B) $4\sqrt{13}$ (C) $3\sqrt{15}$ (D) $6\sqrt{13}$ (E) $\frac{8}{5}\sqrt{15}$ (N) Ne znam

9. Ako je $\cos 2\alpha=-\frac{63}{65}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ i $\cos\beta=\frac{7}{\sqrt{130}}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, tada je $\alpha+\beta$ jednako:

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$ (E) $\frac{3\pi}{4}$ (N) Ne znam

10. Koja od sledećih nejednakosti je tačna za svako $x\in(0,1)$
(I) $x^5<x^3$, (II) $x^4+x^5<x^3+x^2$, (III) $x^4-x^5<x^2-x^3$:

(A) Nijedna (B) Samo (I)

(C) Samo (II) (D) Samo (I) i (II)

(E) (I), (II) i (III) (N) Ne znam

11. U razvoju binoma $(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^n$ $(n \in \mathbb{N})$ koeficijent trećeg člana je 28. Srednji član razvoja je:

(A) $70(1-x^2)^2$ (B) $-70(1-x^2)^2$
(C) $28(1-x)(1+x)^3$ (D) $-28(1-x)(1+x)^3$
(E) $56(1+x)^{\frac{5}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}$ (N) Ne znam

12. U trouglu čije su stranice a, b, c i važi jednakost $(a+b+c)(a+b-c)=3ab$, ugao naspram stranice c iznosi:

(A) 15^o (B) 30^o (C) 45^o (D) 60^o (E) 150^o (N) Ne znam

13. Ukupan broj rešenja sistema jednačina $x+xy+y=11$, $x^2y+y^2x=30$ je:

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 3 (E) 0 (N) Ne znam

14. Ako je α oštar ugao između prostornih dijagonala kocke, tada je $\operatorname{tg}\alpha$ jednak:

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (D) $2\sqrt{2}$ (E) $3\sqrt{2}$ (N) Ne znam

15. Zbir rešenja jednačine $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{3}$, koja pripadaju intervalu $(0,2\pi)$ je:

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) 0 (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$ (E) $\frac{\pi}{6}$ (N) Ne znam

16. Zbir prva tri člana rastućeg geometrijskog niza je 91. Ako tim članovima dodamo redom 25, 27 i 1 dobijamo tri broja koja obrazuju aritmetički niz. Sedmi član datog geometrijskog niza je:

(A) 567 (B) 1701 (C) 5103 (D) 5706 (E) 5063 (N) Ne znam

17. Zbir svih rešenja jednačine $2\log_4^2|x+1|+\log_4|x^2-1|+\log_{\frac{1}{4}}|x-1|=0$ je:

(A) 1 (B) -2 (C) -4 (D) 4 (E) $-\frac{1}{2}$ (N) Ne znam

18. Ostatak pri deljenju polinoma $P(x)$ (stepena $n \geq 2$) sa $x-1$ je 1, a ostatak pri deljenju polioma $P(x)$ sa $x+1$ je -1. Ostatak pri deljenju polinoma $P(x)$ sa x^2-1 je:

(A) x (B) $x+2$ (C) $1-x$ (D) $x+3$ (E) $2-x$ (N) Ne znam

19. Najmanja vrednost rastojanja tačke $M(0,-2)$ od tačaka (x,y) takvih da je $y=\frac{16}{\sqrt{3}x^3}-2$, za $x>0$, iznosi:

(A) $\frac{4}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ (C) $\frac{16}{\sqrt{3}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (E) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (N) Ne znam

20. Skup svih vrednosti x za koje važi nejednakost $\frac{20-8^{2\sqrt{x}+1}-64^{2\sqrt{x}}}{(2^x-1)(2^x-4)}>0$ je oblika (za neke realne brojeve a i b takve da je $0<a<b<+\infty$):

(A) $(0,a)$ (B) (a,b)
(C) $(0,a)\cup(b,+\infty)$ (D) $(a,+\infty)$
(E) $(0,a)\backslash\{1\}$ (N) Ne znam

REŠENJA

1.Ⓒ

$$(\sqrt{2}+\sqrt{4}+\sqrt{8}+\sqrt{16})(1-2^{-1/2}) = (\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}+4)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= (6+3\sqrt{2})\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2}(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})$$
$$= \frac{3}{2}(2^2-(\sqrt{2})^2) = \frac{3}{2}(4-2) = 3.$$

2.Ⓐ

$$2x+3y+5=0 \iff y = -\frac{2}{3}x-\frac{5}{3} = k_1x+n_1$$

gde je koeficijent zadate prave $k_1 = -\dfrac{2}{3}$. Koeficijent prave normalne na ovu pravu dat je jednačinom

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} = \frac{3}{2}.$$

3.Ⓐ Kako je

$$\frac{0.0015\cdot 10^m}{0.03\cdot 10^k} = \frac{15}{300}10^{m-k} = 5\cdot 10^{m-k-2}$$

to sledi

$$5\cdot 10^{m-k-2} = 5\cdot 10^7 \iff m-k-2=7 \iff m-k=9.$$

4.Ⓑ Kako je

$$i^{2008} = (i^2)^{1004} = (-1)^{1004} = 1$$
$$i^{2006} = (i^2)^{1003} = (-1)^{1003} = -1$$

dalje sledi

$$\frac{(1-i^{2006})^{2007}}{(1+i^{2008})^{2009}} = \frac{(1-(-1))^{2007}}{(1+1)^{2009}} = \frac{2^{2007}}{2^{2009}} = 2^{-2} = \frac{1}{4}.$$

5.Ⓒ

$$(b-3)\left(4+\frac{2}{b}\right) = 0$$

i kako je $b \neq 3$ to mora važiti

$$4+\frac{2}{b}=0 \iff \frac{2}{b}=-4 \iff b=-\frac{1}{2}.$$

6.Ⓔ

$$g(f(x)) = \frac{x}{2}$$
$$g(x) = \log_{16} x \Rightarrow g(f(x)) = \log_{16}(f(x))$$

odakle sledi

$$\log_{16}(f(x)) = \frac{x}{2} \iff f(x) = 16^{\frac{x}{2}}$$

Sada imamo

$$f(-1) = 16^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$
$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = 16^{-\frac{3}{4}} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

odnosno

$$f(-1)+f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}+\frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

7.Ⓐ

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}=\frac{1}{a}\qquad /a(x-a)(x+a)$$
$$a(x+a)+a(x-a)=x^2-a^2 \iff 2ax=x^2-a^2 \iff x^2-2a-a^2=0$$

Ako su x_1 i x_2 rešenja ove kvadratne jednačine, tada važi

$$(x-x_1)(x-x_2)=0 \iff x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$$

te izjednačavanjem koeficijenata polinoma sa leve strane kvadratnih jednačina dobijamo

$$x_1+x_2=2a,\quad x_1x_2=-a^2$$

Ako su $\frac{1}{x_1^2}$ i $\frac{1}{x_2^2}$ rešenja kvadratne jednačine, tada za tu kvadratnu jednačinu važi

$$\left(x-\frac{1}{x_1^2}\right)\left(x-\frac{1}{x_2^2}\right)=0$$
$$x^2-\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2x_2^2}x+\frac{1}{x_1^2x_2^2}=0$$

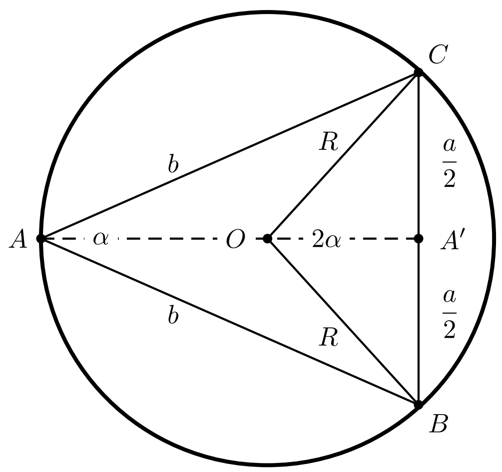
Kako je

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(2a)^2-2(-a^2)=6a^2$$
$$x_1^2x_2^2=(x_1x_2)^2=(-a^2)^2=a^4$$

to je tražena jednačina oblika

$$x^2-\frac{6a^2}{a^4}x+\frac{1}{a^4}=0$$
$$a^4x^2-6a^2x+1=0.$$

8.Ⓔ



Na slici je prikazan jednakokraki trougao ABC sa osnovicom $a=BC=6$ cm i kracima dužine $b=AB=AC=12$ cm. Oko njega je opisan krug poluprečnika R koji tražimo. Kako je $\alpha=\angle BAC$ periferijski ugao nad tetivom BC, to je centralni ugao nad istom tetivom $\angle BOC=2\angle BAC=2\alpha$.

Iz pravouglog trougla BAA' imamo

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{a/2}{b}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

te sledi

$$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$
$$\cos\alpha=1-2\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{7}{8}$$

Primenom kosinusne teoreme na trougao BOC imamo

$$a^2=R^2+R^2-2R^2\cos2\alpha=2R^2(1-\cos2\alpha)=2R^2(1-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=2R^2(1-\cos^2\alpha+1-\cos^2\alpha)$$
$$a^2=4R^2(1-\cos^2\alpha)$$

odakle se za poluprečnik dobija

$$\begin{aligned}R^2&=\frac{1}{4}\frac{a^2}{1-\cos^2\alpha}\\&=\frac{1}{4}\frac{6^2}{1-\left(\frac{7}{8}\right)^2}=\frac{1}{4}\frac{36}{\frac{15}{64}}=\frac{64\cdot15}{25}\end{aligned}$$

$$R=\frac{8}{5}\sqrt{15}.$$

9.Ⓔ Iz
$$\cos\beta = \frac{7}{\sqrt{130}}, \quad \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$
sledi
$$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta = 1 - \frac{49}{130} = \frac{81}{130}$$
odnosno
$$\sin\beta = \pm\sqrt{\frac{81}{130}} = \pm\frac{9}{\sqrt{130}}$$
i kako je $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ to je $\sin\beta > 0$ odnosno
$$\sin\beta = \frac{9}{\sqrt{130}}$$
Dalje koristimo identitet
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$
odakle sledi
$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$
$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$
Kako je
$$\cos 2\alpha = -\frac{63}{65}$$
i
$$\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin\alpha > 0, \quad \cos\alpha > 0$$
to sledi
$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \frac{63}{65}) = \frac{64}{65} \Rightarrow \sin\alpha = +\frac{8}{\sqrt{65}}$$
$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \frac{63}{65}) = \frac{1}{65} \Rightarrow \cos\alpha = +\frac{1}{\sqrt{65}}$$
Sada imamo
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{8}{\sqrt{65}}\cdot\frac{7}{\sqrt{130}} + \frac{1}{\sqrt{65}}\cdot\frac{9}{\sqrt{130}} = \frac{56+9}{\sqrt{65\cdot 65\cdot 2}} = \frac{65}{65\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
i
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{65}}\cdot\frac{7}{\sqrt{130}} - \frac{8}{\sqrt{65}}\cdot\frac{9}{\sqrt{130}} = -\frac{65}{\sqrt{65\cdot 65\cdot 2}} = -\frac{65}{65\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
te je
$$\alpha + \beta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

10.Ⓔ

I) $x^5 < x^3 \overset{x\geq 0}{\Rightarrow} x^2 < 1 \iff x^2 - 1 < 0 \iff (x-1)(x+1) < 0 \iff x \in (-1,1) \wedge x > 0 \Rightarrow x \in (0,1)$
te je gornja nejednačina ispunjena za svako $x \in (0,1)$.

II) $x^4 + x^5 < x^3 + x^2 \overset{x\geq 0}{\Rightarrow} x^2 + x^3 < x + 1 \iff x^2(x+1) < x + 1 \overset{x+1>0}{\Rightarrow} x^2 - 1 < 0$ tako da su rešenja ove nejednačine ista kao u prvom slučaju $x \in (0,1)$ i nejednačina je ispunjena za svako x iz ovog intervala.

III) $x^4 - x^5 < x^3 - x^2 \overset{x\geq 0}{\Rightarrow} x^2 - x^3 < 1 - x \iff x^2(1-x) < 1 - x \overset{1-x>0}{\Rightarrow} x^2 - 1 < 0 \wedge x > 0 \wedge x < 1$ tako da su rešenja ove nejednačine ista kao u prva dva slučaja $x \in (0,1)$ i nejednačina je ispunjena za svako x iz ovog intervala.

Dakle, sve tri nejednakosti su tačne za $x \in (0,1)$.

11.Ⓐ Za razvoj binoma važi jednačina

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

za koeficijent trećeg člana prema uslovu zadatka važi

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = 28 \Rightarrow n(n-1) = 56 = 8 \cdot 7 \Rightarrow n = 8$$

Kako je $a = \sqrt{1+x}$ i $a = \sqrt{1-x}$ to se za srednji član ($k = \frac{n}{2} = 4$) dobija

$$\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \binom{8}{4}(1+x)^2(1-x)^2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}\left((1+x)(1-x)\right)^2 = 70(1-x^2)^2$$

12.Ⓓ Zadata jednakost se može predstaviti u sledećem obliku

$$(a+b+c)(a+b-c) = 3ab \iff (a+b)^2 - c^2 = 3ab \iff a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = 3ab$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - ab$$

Iz kosinusne teoreme imamo

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Izjednačavanjem poslednje dve jednačine imamo

$$\cos\gamma = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{3} = 60^{\circ}.$$

13.Ⓒ

$$x^2y + y^2x = 30 \iff xy(x+y) = 30 \iff xy = \frac{30}{x+y}$$

$$x + xy + y = 11 \iff x + y + \frac{30}{x+y} = 11$$

Uvođenjem smene $t = x + y$ dalje imamo

$$t + \frac{30}{t} = 11 \iff t^2 - 11t + 30 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 4 \cdot 30}}{2} = \frac{11 \pm 1}{2} = \begin{cases} 5 \\ 6 \end{cases}$$

Sada imamo

1. $t = 5$

$$x + y = 5 \iff y = 5 - x$$

$$xy = \frac{30}{x+y} = 6$$

$$xy = 6 \Rightarrow x(5-x) = 6 \iff x^2 - 5x + 6 = 0 \iff (x-2)(x-3) = 0 \iff x = 2 \lor x = 3$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 5 - x = 3$$
$$x = 3 \Rightarrow y = 5 - x = 2$$

2. $t = 6$

$$x + y = 6 \iff y = 6 - x$$

$$xy = \frac{30}{x+y} = 5$$

$$xy = 5 \Rightarrow x(6-x) = 5 \iff x^2 - 6x + 5 = 0 \iff (x-1)(x-5) = 0 \iff x = 1 \lor x = 5$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 6 - x = 5$$
$$x = 5 \Rightarrow y = 6 - x = 1$$

Dakle, sistem jednačina ima 4 rešenja

$$(x,y) \in \{(2,3),(3,2),(1,5),(5,1)\}.$$

14.Ⓓ Na slici levo je prikazana kocka sa svoje dve prostorne dijagonale AD i BC, a na slici desno je presek ravni koja sadrži ove dve prostorne dijagonale koje se seku u tački O. Ako je dužina ivice kocke a, dužina prostorne dijagonale je

$$D = a\sqrt{3}$$

Stranice jednakokrakog trougla ABO su $AB = a$, $BO = AO = \dfrac{D}{2}$ tako da na osnovu kosinusne teoreme, imamo

$$a^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 - 2\frac{D}{2}\frac{D}{2}\cos\alpha = \frac{D^2}{2}(1-\cos\alpha)$$

odakle je

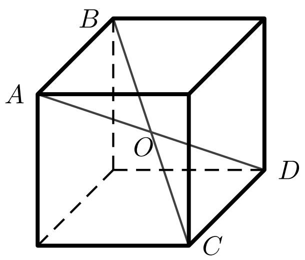
$$\cos\alpha = 1 - \frac{2a^2}{D^2} = 1 - \frac{2a^2}{3a^2} = \frac{1}{3}$$

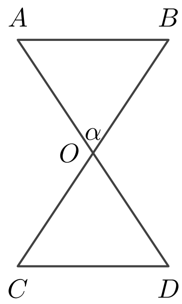
Dalje sledi

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

te se za tangens traženog ugla dobija

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\sqrt{2}.$$





15.Ⓓ

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3},\ x \in (0, 2\pi)$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

i uzimajući u obzir da važi

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

dalje sledi

$$\cos\frac{\pi}{6}\sin x + \sin\frac{\pi}{6}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sva rešenja ove jednačine su

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

i pritom se u zadatom intervalu $x \in (0, 2\pi)$ nalaze

$$x_1 = \frac{\pi}{6} \text{ i } x_2 = \frac{\pi}{2}$$

te je zbir svih rešenja na zadatom intervalu

$$x_1 + x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}.$$

16.Ⓒ Neka su a_1, a_2, a_3 prva tri člana zadatog geometrijskog niza. Tada važi

$$a_2 = qa_1$$

$$a_3 = q^2 a_1$$

i prema uslovu zadatka

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1(1 + q + q^2) = 91$$

Ako ovim članovima dodamo redom 25, 27 i 1, dobijamo aritmetički niz

$$b_1 = a_1 + 25,\ b_2 = a_2 + 27,\ b_3 = a_3 + 1$$

tako da važi

$$d = b_2 - b_1 = b_3 - b_2 \iff a_2 + 27 - (a_1 + 25) = (a_3 + 1) - (a_2 + 27) \iff a_2 - a_1 + 2 = a_3 - a_2 - 26$$

odnosno

$$qa_1 - a_1 = q^2 a_1 - qa_1 - 28 \iff a_1(q^2 - 2q + 1) = 28$$

što uz prethodnu jednakost

$$a_1(q^2 + q + 1) = 91$$

daje sistem jednačina po nepoznatim q i a_1. Oduzimanjem ove dve jednačine dobijamo

$$3a_1 q = 91 - 28 = 63 \iff a_1 q = 21$$

dok sabiranjem istih jednačina imamo

$$2a_1q^2 - a_1q + 2a_1 = 28 + 91 = 119 \Rightarrow 2a_1q^2 + 2a_1 = 119 + a_1q = 119 + 21 = 140 \iff a_1(q^2 + 1) = 70$$

Iz poslednje dve jednačine dobijamo kvadratnu jednačinu po nepoznatoj q

$$\frac{q^2 + 1}{q} = \frac{70}{21} = \frac{10}{3} \iff 3q^2 - 10q + 3 = 0$$

čija su rešenja

$$q_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 9}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6} = \begin{cases} \frac{1}{3} \\ 3 \end{cases}$$

Kako je zadati geometrijski niz rastući, to je $q > 1$, te je jedino rešenje koje ispunjava ovaj uslov

$$q = q_2 = 3$$

Sledi

$$a_1 = \frac{21}{q} = 7$$

i

$$a_7 = q^6 a_1 = 3^6 \cdot 7 = 5103.$$

17.Ⓒ

$$2\log_4^2|x + 1| + \log_4|x^2 - 1| + \log_{\frac{1}{4}}|x - 1| = 0$$

Jednačina je definisana za $x \neq \pm 1$.
Kako je

$$\log_{\frac{1}{4}} x = \frac{\log_4 x}{\log_4 4^{-1}} = -\log_4 x$$

to sledi

$$2\log_4^2|x + 1| + \log_4|x^2 - 1| - \log_4|x - 1| = 0$$

$$2\log_4^2|x + 1| + \log_4\frac{|x^2 - 1|}{|x - 1|} = 0$$

dalje koristeći $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ dobijamo

$$2\log_4^2|x+1| + \log_4\left|\frac{x^2-1}{x-1}\right| = 0$$

$$2\log_4^2|x+1| + \log_4|x+1| = 0$$

Smenom $t = \log_4|x+1|$ dalje imamo

$$2t^2 + t = 0 \iff t(2t+1) = 0 \iff t = 0 \vee t = -\frac{1}{2}$$

1. $t = 1$

$$\log_4|x+1| = 0 = \log_4 1 \iff |x+1| = 1 \iff x+1 = \pm 1 \iff x = \left\{\begin{array}{r} 0 \\ -2 \end{array}\right.$$

2. $t = -\frac{1}{2}$

$$\log_4|x+1| = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\log_4 4 = \log_4 4^{-\frac{1}{2}}$$

$$|x+1| = 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \iff x+1 = \pm\frac{1}{2} \iff x = \left\{\begin{array}{r} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Dakle, zbir svih rešenja zadate jednačine je

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 - 2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -4.$$

18.Ⓐ Neka je $Q_1(x)$ količnik i 1 ostatak pri deljenju polinoma $P(x)$ sa $x-1$, tada važi

$$P(x) = (x-1)Q_1(x) + 1 \Rightarrow P(1) = 1$$

Neka je $Q_2(x)$ količnik i -1 ostatak pri deljenju polinoma $P(x)$ sa $x+1$, tada važi

$$P(x) = (x+1)Q_2(x) - 1 \Rightarrow P(-1) = -1$$

Pri deljenju polinoma sa $x^2-1 = (x-1)(x+1)$ dobijamo neki polinom $Q(x)$ za količnik i polinom $R(x) = r_1x+r_0$ za ostatak, te imamo

$$P(x) = (x^2-1) + R(x) = (x-1)(x+1)Q(x) + r_1x + r_0$$

Sada je

$$P(1) = r_1 + r_0 = 1$$

$$P(-1) = -r_1 + r_0 = -1$$

Sabiranjem prethodne dve jednačine dobijamo

$$2r_0 = 0 \Rightarrow r_0 = 0$$

a oduzimanjem imamo

$$2r_1 = 2 \Rightarrow r_1 = 1$$

tako da je ostatak pri deljenju polinoma $P(x)$ polinomom x^2-1 dat sa

$$R(x) = r_1x + r_0 = x.$$

19.Ⓑ Za udaljenost tačke (x_M, y_M) od bilo koje tačke na krivoj $y = \frac{16}{\sqrt{3}x^3} - 2$, $x > 0$ važi

$$d^2 = (x-x_M)^2 + (y-y_M)^2 = (x-0)^2 + (y+2)^2 = x^2 + (y+2)^2$$

$$d^2 = x^2 + \left(\frac{16}{\sqrt{3}x^3} - 2 + 2\right)^2 = x^2 + \frac{256}{3x^6}$$

Udaljenost će biti minimalna za minimalnu vrednost funkcije

$$f(x) = d^2 = x^2 + \frac{256}{3x^6} = x^2 + \frac{256}{3}x^{-6}$$

koja se dobija u tački u kojoj je prvi izvod ove funkcije jednak nuli

$$f'(x) = \left(x^2 + \frac{256}{3}x^{-6}\right)' = 2x + \frac{256}{3}(-6)x^{-7} = 2x - 2\frac{256}{x^7}$$

$$f'(x) = 0 \iff 2x - 2\frac{256}{x^7} = 0 \iff x = \frac{256}{x^7} \iff x^8 = 256 = 2^8 \iff x = 2$$

U ovoj tački je rastojanje minimalno i iznosi

$$d_{\min}^2 = x^2 + \frac{256}{3x^6} = 2^2 + \frac{256}{3 \cdot 2^6} = 2^2\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{16}{3}$$

$$d_{\min} = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

20.Ⓑ Zadata nejednakost se može predstaviti u sledećem obliku

$$\frac{20 - 8^{2\sqrt{x}+1} - 64^{2\sqrt{x}}}{(2^x - 1)(2^x - 4)} > 0$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$$

gde je $P(x) = 20 - 8^{2\sqrt{x}+1} - 64^{2\sqrt{x}}$ i $Q(x) = (2^x - 1)(2^x - 4)$ i pri čemu mora važiti

$$x \geq 0$$

$$2^x - 1 \neq 0 \iff 2^x \neq 1 \iff x \neq 0$$

$$2^x - 4 \neq 0 \iff 2^x \neq 2^2 \iff x \neq 2$$

Ispitujemo znak ovih dveju funkcija u skupu $x \in (0, 2) \cup (2, +\infty)$.

- $P(x) > 0$:

$$P(x) = 20 - 8^{2\sqrt{x}+1} - 64^{2\sqrt{x}} = 20 - 8(8^2)^{\sqrt{x}} - (8^2)^{2\sqrt{x}} = 20 - 8 \cdot 8^{2\sqrt{x}} - (8^{2\sqrt{x}})^2$$

smenom

$$t = 8^{2\sqrt{x}} > 1 \text{ (jer je } x > 0)$$

dobijamo

$$P(x) = P(t) = 20 - 8t - t^2 = -(t^2 + 8t - 20)$$

$$P(t) > 0 \iff -(t^2 + 8t - 20) > 0 \iff t^2 + 8t - 20 < 0$$

Kako su rešenja kvadratne jednačine

$$t^2 + 8t - 20 = 0$$

data

$$t_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 4 \cdot 20}}{2} = \frac{-8 \pm 12}{2} = \begin{cases} -10 \\ 2 \end{cases}$$

to je nejednačina ispunjena za

$$-10 < t < 2$$

Kako istovremeno važi uslov $t > 1$, to je rešenje gornje nejednačine

$$1 < t < 2$$

Uzimajući u obzir smenu $t = 8^{2\sqrt{x}}$ dalje dobijamo

$$1 < 8^{2\sqrt{x}} < 2 \iff 2^0 < \left(2^3\right)^{2\sqrt{x}} < 2^1 \iff 2^0 < 2^{6\sqrt{x}} < 2^1 \iff 0 < 6\sqrt{x} < 1 \iff 0 < \sqrt{x} < \frac{1}{6}$$

$$0 < x < \frac{1}{36}$$

- $Q(x) > 0$:

$$Q(x) = (2^x - 1)(2^x - 4)$$

smenom $t = 2^x > 1$ (jer je $x > 0$), dobijamo

$$Q(x) = Q(t) = (t-1)(t-4)$$

$$Q(t) > 0 \iff (t-1)(t-4) > 0 \iff t \in (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$$

što uz uslov $t > 1$ daje rešenje

$$t > 4 \iff 2^x > 4 = 2^2 \iff x > 2$$

U sledećoj tabeli su sumirani prethodni rezultati za znak funkcija $P(x)$, $Q(x)$ i leve strane (LS) nejednakosti

$x \in$	$(0, 1/36)$	$(1/36, 2)$	$(2, +\infty)$
$P(x)$	$+$	$-$	$-$
$Q(x)$	$-$	$-$	$+$
LS	$-$	$+$	$-$

Dakle, nejednakost je ispunjena za

$$x \in \left(\frac{1}{36}, 2\right).$$

KLASIFIKACIONI ISPIT IZ MATEMATIKE ZA UPIS NA ELEKTROTEHNIČKI, FIZIČKI FAKULTET I FAKULTET ZA FIZIČKU HEMIJU

1. Vrednost izraza $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}} + \sqrt{3}\cdot\sqrt{12} - \sqrt{50}\cdot\sqrt{2}$ jednaka je:

(A) 0 (B) -2 (C) 2 (D) -1 (E) 1 (N) Ne znam

2. Ako je $f(x) = x^2 + x + 1$, tada je $f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)$ za svako x jednako

(A) 2 (B) 0 (C) $x+2$ (D) x (E) $x+3$ (N) Ne znam

3. Ako je x jednako $x\%$ od y, gde je x pozitivan realan broj, vrednost broja y jednaka je:

(A) 100 (B) 200

(C) 10000 (D) Ne postoji

(E) Ne može se odrediti (N) Ne znam

4. Ako kompleksan broj z zadovoljava jednakost $z + 2\overline{z} = 12 + 3i$, $(i^2 = -1)$ tada je $|z|$ jednako:

(A) 5 (B) 13 (C) 15 (D) 9 (E) 10 (N) Ne znam

5. Ako su x_1 i x_2 rešenja jednačine $x^2 + x - 2005 = 0$, tada je $2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_1 - 2005$ jednako

(A) 2005 (B) 2006 (C) 2007 (D) 2008 (E) 2009 (N) Ne znam

6. Ako je $\operatorname{tg}\alpha = -7$, $\alpha \in (\pi/2, \pi)$, tada $\dfrac{3\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha}$ iznosi:

(A) $\dfrac{10}{11}$ (B) $-\dfrac{10}{11}$ (C) $\dfrac{11}{20}$ (D) $-\dfrac{11}{10}$ (E) $\dfrac{11}{10}$ (N) Ne znam

7. U geometrijskoj progresiji količnik je 2, a zbir prvih sedam članova je jednak 635. Tada sedmi član iznosi:

(A) 310 (B) 325 (C) 355 (D) 315 (E) 320 (N) Ne znam

8. Ako je $\log_a b = \sqrt{2}$ tada je $\log_{\frac{b}{a}}(ab)$ jednako:

(A) $\sqrt{2}+1$ (B) $\sqrt{2}-1$ (C) $3-2\sqrt{2}$ (D) $3+2\sqrt{2}$ (E) $1+2\sqrt{2}$ (N) Ne znam

9. Zbir koeficijenata pravca tangenti kružnice $x^2 + y^2 = 2$ koje sadrže presečnu tačku pravih $x - y - 1 = 0$ i $x + y - 3 = 0$ je:

(A) 2 (B) $\sqrt{6}$ (C) -2 (D) $-\sqrt{6}$ (E) $2\sqrt{6}$ (N) Ne znam

10. U proizvoljnom trouglu čije su stranice a, b i c i odgovarajući uglovi α i β količnik $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$ jednak je:

(A) $\dfrac{(a-b)^2}{c^2}$ (B) $\dfrac{c^2}{a^2-b^2}$ (C) $\dfrac{a^2-b^2}{c^2}$ (D) $\dfrac{c^2}{(a-b)^2}$ (E) $\dfrac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$ (N) Ne znam

11. Date su funkcije $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \dfrac{x^2}{x}$, $f_2(x) = \sqrt{x^2}$, $f_4(x) = (\sqrt{x})^2$. Tačan je iskaz:

(A) Sve funkcije su međusobno jednake

(B) $f_1 = f_2 \neq f_3$

(C) Među datim funkcijama nema međusobno jednakih

(D) $f_1 = f_3 \neq f_4$

(E) $f_1 \neq f_3 = f_4$

(N) Ne znam

12. Razlika veće i manje osnovice jednakokrakog trapeza čiji je obim 32 cm a poluprečnik upisanog kruga 2 cm, iznosi (u cm):

(A) $\sqrt{3}$ (B) $8\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{6}$ (D) $3\sqrt{2}$ (E) $6\sqrt{6}$ (N) Ne znam

13. Broj realnih rešenja sistema jednačina $\log_{|x-y|} \dfrac{xy}{2} = 2$, $x + y = xy + 1$ je:

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 3 (E) 0 (N) Ne znam

14. Ukupan broj rešenja jednačine $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$ na intervalu $(0, 2\pi)$ jednak je:

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6 (N) Ne znam

15. Skup rešenja sistema nejednačina $x^2 - 4 \leq 0$, $1 - 2x + x^2 > 0$, $x^2 - (3 + \sqrt{3})x + 2 + \sqrt{3} > 0$ je oblika:

(A) $[a, b]$

(B) $[a, b)$

(C) $(a, b) \cup (b, +\infty)$

(D) $(a, b]$

(E) $(-\infty, a]$

(N) Ne znam

16. Koeficijent uz a^8 u razvoju binoma $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}} - a\right)^{12}$ je:

(A) 0 (B) 456 (C) -220 (D) -70 (E) 70 (N) Ne znam

17. Ako je rešenje jednačine $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$ oblika $\dfrac{p}{q}$, tada je $p + q$ jednako:

(A) -3 (B) 4 (C) 5 (D) -5 (E) -4 (N) Ne znam

18. Ako je $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{(1 + \operatorname{tg} 1^o)(1 + \operatorname{tg} 2^o) - 2}{(1 - \operatorname{tg} 1^o)(1 - \operatorname{tg} 2^o) - 2}$ i $\alpha \in (0^o, 90^o)$, tada je α:

(A) 40 (B) 41 (C) 42 (D) 43 (E) 44 (N) Ne znam

19. Broj načina na koji se mogu poređati u niz n nula i k jedinica, tako da nikoje dve jedinice nisu susedne, ako je $k \leq n + 1$ je:

(A) $\dbinom{n+1}{k}$ (B) $\dbinom{n}{k}$ (C) $\dfrac{n!}{k!}$ (D) $\dfrac{(n+1)!}{k!}$ (E) $\dbinom{n-1}{k}$ (N) Ne znam

20. Maksimalna površina pravougaonika upisanog u parabolički odsečak ograničen parabolom $y = 1 - x^2$ i pravom $y = 0$, tako da mu jedna stranica pripada $x-$osi, jeste:

(A) $\dfrac{1}{9}\sqrt{3}$ (B) $\dfrac{4}{9}\sqrt{3}$ (C) $\dfrac{8}{9}\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{3}$ (E) $2\sqrt{3}$ (N) Ne znam

REŠENJA

1.Ⓑ

$$\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}} + \sqrt{3}\cdot\sqrt{12} - \sqrt{50}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{4} + \sqrt{36} - \sqrt{100} = 2 + 6 - 10 = -2.$$

2.Ⓐ

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

$$f(x+1) = (x+1)^2 + (x+1) + 1 = x^2 + 2x + 1 + x + 1 + 1 = x^2 + 3x + 3$$

$$f(x+2) = (x+2)^2 + (x+2) + 1 = x^2 + 4x + 4 + x + 2 + 1 = x^2 + 5x + 7$$

$$f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) = x^2 + 5x + 7 + x^2 + x + 1 - 2(x^2 + 3x + 3) = 2x^2 + 6x + 8 - 2x^2 - 6x - 6 = 2.$$

3.Ⓐ Prema uslovu zadatka x je jednako $x\%$ broja y. Za $x > 0$ sledi:

$$x = \frac{x}{100}\cdot y \quad \Big/ : x \neq 0$$

$$\frac{y}{100} = 1 \iff y = 100.$$

4.Ⓐ Neka je

$$z = a + ib$$

tada je

$$\overline{z} = a - ib$$

te imamo

$$z + 2\overline{z} = a + ib + 2(a - ib) = 3a - ib$$

i kako je

$$z + 2\overline{z} = 12 + 3i$$

to sledi

$$3a - ib = 12 + 3i \iff 3a = 12 \wedge b = -3 \iff a = 4 \wedge b = -3$$

Sada se ima

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$$

5.Ⓑ Ako su x_1 i x_2 rešenja kvadratne jednačine

$$x^2 + x - 2005 = 0$$

tada važi

$$x^2 + x - 2005 = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$$

te izjednačavanjem koeficijenata polinoma sa leve i desne strane jednačine imamo

$$x_1 + x_2 = -1, \quad x_1x_2 = -2005$$

Istovremeno važi

$$x_1^2 + x_1 - 2005 = 0$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_1 - 2005 &= x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + \underbrace{(x_1^2 + x_1 - 2005)}_{=0} \\ &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 = (-1)^2 - (-2005) = 2006. \end{aligned}$$

6.Ⓑ

$$\frac{3\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-3\sin\alpha}=\frac{3\,\mathrm{tg}\,\alpha+1}{1-3\,\mathrm{tg}\,\alpha}=\frac{3(-7)+1}{1-3(-7)}=\frac{-21+1}{1+21}=-\frac{20}{22}=-\frac{10}{11}.$$

7.Ⓔ Zbir prvih sedam članova geometrijske progresije jednak je

$$S_7=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7=a_1+qa_1+q^2a_1+\cdots+q^6a_1=a_1(1+q+q^2+\cdots+q^6)=a_1\frac{q^7-1}{q-1}$$

Kako prema uslovu zadatka važi $S_7=635$ i $q=2$, to sledi

$$S_7=a_1\frac{q^7-1}{q-1}\Rightarrow a_1\frac{2^7-1}{2-1}=635 \iff a_1=\frac{635}{127}=5$$

Sada je sedmi član jednak

$$a_7=q^6a_1=2^6\cdot 5=64\cdot 5=320.$$

8.Ⓓ

$$\log_{\frac{b}{a}}(ab)=\frac{\log_a(ab)}{\log_a\frac{b}{a}}=\frac{\log_a a+\log_a b}{\log_a b-\log_a a}=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{(1+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{1+2\sqrt{2}+2}{(\sqrt{2})^2-1^2}=3+2\sqrt{2}.$$

9.Ⓐ Presečna tačka pravih $x-y-1=0$ i $x+y-3=0$ nalazi se rešavanjem sistema ovih jednačina. Sabiranjem ove dve jednačine dobijamo

$$2x-4=0 \iff x=2$$

a njihovim oduzimanjem

$$2y-2=0 \iff y=1$$

Ako je jednačina tangente $y=kx+n$, tada je ova jednačina zadovoljena u presečnoj tački $(x_M,y_M)=(2,1)$, odnosno

$$y_M=kx_M+n\Rightarrow 1=2k+n \iff n=1-2k$$

te za jednačinu tangente važi

$$y=kx+n=kx+1-2k$$

Dodirne tačke ove prave sa kružnicom $x^2+y^2=2$ nalaze se rešavanjem sistema jednačina prave i tangente. Smenom $y=kx+1-2k$ u $x^2+y^2=2$ dobijamo

$$x^2+(kx+1-2k)^2=2 \iff (k^2+1)x^2+2k(1-2k)x+(1-2k)^2-2=0$$

Da bi prava imala samo jednu dodirnu tačku, potrebno je da prethodna kvadratna jednačina ima samo jedno rešenje, a to se dobija kada je diskriminanta ove jednačine jednaka nuli, odnosno

$$D=b^2-4ac=4k^2(1-2k)^2-4(k^2+1)((1-2k)^2-2)=0$$

$$k^2(1-2k)^2-(k^2+1)(1-2k)^2+2(k^2+1)=0 \iff -(1-2k)^2+2(k^2+1)=0 \iff -(1-4k+4k^2)+2k^2+2=0$$

$$2k^2-4k-1=0$$

Rešenja ove kvadratne jednačine su

$$k_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16+4\cdot 2}}{4}=1\pm\frac{\sqrt{24}}{4}$$

te je zbir koeficijenata pravca ovih tangenti

$$k_1+k_2=1-\frac{\sqrt{24}}{4}+1+\frac{\sqrt{24}}{4}=2.$$

10.Ⓒ Neka su α, β i γ uglovi naspram stranica trougla a, b i c, redom. Na osnovu sinusne teoreme imamo

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} = t$$

odakle sledi

$$\sin\alpha = t\cdot a,\ \sin\beta = t\cdot b,\ \sin\gamma = t\cdot c$$

Uzimamo u obzir da je zbir uglova u trouglu jednak π radijana

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi \iff \alpha+\beta=\pi-\gamma$$

Važe sledeće trigonometrijske jednakosti

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha = ta\cos\beta - tb\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\pi-\gamma) = \sin\gamma = tc$$

odakle sledi

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{ta\cos\beta - tb\cos\alpha}{tc} = \frac{a\cos\beta - b\cos\alpha}{c}$$

Iz kosinusne teoreme dobijamo sledeće jednakosti

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \Rightarrow a\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2c}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \Rightarrow b\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$$

što smenom u prethodnom izrazu daje

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{a\cos\beta - b\cos\alpha}{c} = \frac{\frac{a^2+c^2-b^2}{2c} - \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}}{c} = \frac{2a^2-2b^2}{2c^2} = \frac{a^2-b^2}{c^2}.$$

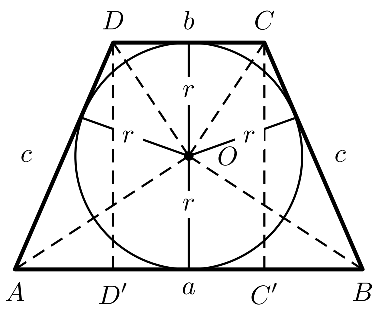
11.Ⓒ Kako je

- $f_1(x) = x,\ x\in\mathbb{R}$
- $f_2(x) = \dfrac{x^2}{x} = x,\ x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$
- $f_3(x) = \sqrt{x^2} = |x|,\ x\in\mathbb{R}$
- $f_4(x) = (\sqrt{x})^2 = x,\ \ x\geq 0$

to među zadatim funkcijama nema međusobno jednakih.

12.Ⓓ

Na slici je prikazan jednakokraki trapez $ABCD$ sa upisanim krugom poluprečnika r i sa centrom u tački O. Sa slike se vidi da je visina trapeza jednaka prečniku kruga



$$h = 2r$$

Površina ovog trapeza se može izraziti u funkciji visine $h = 2r$ i srednje linije $\dfrac{a+b}{2}$:

$$P = \frac{a+b}{2}h = \frac{a+b}{2}2r$$

Istovremeno, površina trapeza jednaka je zbiru površina trouglova ABO, BCO, CDO, ADO, od kojih svaki ima visinu r nad odgovarajućom stranicom a, c, b, c:

$$P = P_{ABO} + P_{BCO} + P_{CDO} + P_{ADO} = \frac{1}{2}(ar+cr+br+cr) = \frac{1}{2}r(a+b+2c) = \frac{1}{2}rO$$

gde je sa $O = a + b + 2c$ označen obim trapeza. Iz poslednja dva izraza dobijamo

$$\frac{a+b}{2}2r = \frac{1}{2}rO \iff a+b = \frac{O}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

i

$$c = \frac{O}{2} - \frac{a+b}{2} = \frac{O}{2} - \frac{O}{4} = \frac{O}{4} = \frac{32}{4} = 8$$

Dalje za jednakokraki trapez važi

$$AD' = BC' = \frac{a-b}{2}$$

i iz pravouglog trougla $AD'D$ na osnovu Pitagorine teoreme imamo

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = c^2 - h^2 = c^2 - (2r)^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48$$

te za razliku veće i manje osnovice trapeza dobijamo

$$a - b = 2\sqrt{48} = 8\sqrt{3}.$$

13.Ⓑ Jednačina

$$\log_{|x-y|}\frac{xy}{2} = 2$$

je definisana u skupu realnih brojeva, za $xy > 0$, $|x-y| \neq 0$, i $|x-y| \neq 1$. Sada sledi

$$\log_{|x-y|}\frac{xy}{2} = 2 \iff \frac{\log\frac{xy}{2}}{\log|x-y|} = 2 \iff \log\frac{xy}{2} = 2\log|x-y| = \log|x-y|^2 = \log(x-y)^2$$

$$xy = 2(x-y)^2$$

Za drugu jednačinu važi

$$x + y = xy + 1 \iff x(y-1) - (y-1) = 0 \iff (x-1)(y-1) = 0 \iff x = 1 \vee y = 1$$

- Zamenom $x = 1$ u prvu jednačinu, dobijamo kvadratnu jednačinu

  $$xy = 2(x-y)^2 \Rightarrow y = 2(y-1)^2 \iff 2y^2 - 5y + 2 = 0$$

  čija su rešenja

  $$y_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4\cdot 4}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ 2 \end{cases}$$

  Kako je

  $$|x - y_1| = \left|1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \neq 0, 1$$

  $y_1 = \frac{1}{2}$ ispunjava uslove jednačine, dok za $y = y_2$ imamo da važi

  $$|x - y_2| = |1 - 2| = 1$$

  te y_2 ne ispunjava uslove i ne može biti rešenje zadate jednačine.
- Zamenom $y = 1$ u prvu jednačinu, dobijamo istu kvadratnu jednačinu po x

  $$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

  čija su rešenja

  $$x_{1,2} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ 2 \end{cases}$$

  Iz istih razloga, samo je $x = \frac{1}{2}$ rešenje zadate jednačine.

Dakle, zadata jednačina ima dva rešenja $(x, y) = \left\{(\frac{1}{2}, 1), (1, \frac{1}{2})\right\}$.

14.Ⓔ

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = 1,\ x \in [0, 2\pi]$$
$$\sin^2 x + (2 \sin x \cos x)^2 = 1$$
$$\sin^2 x + 4 \sin^2 x(1 - \sin^2 x) = 1$$
$$4 \sin^4 x - 5 \sin x + 1 = 0$$

Smenom $t = \sin^2 x \in [0, 1]$ dobijamo kvadratnu jednačinu po promenljivoj t:

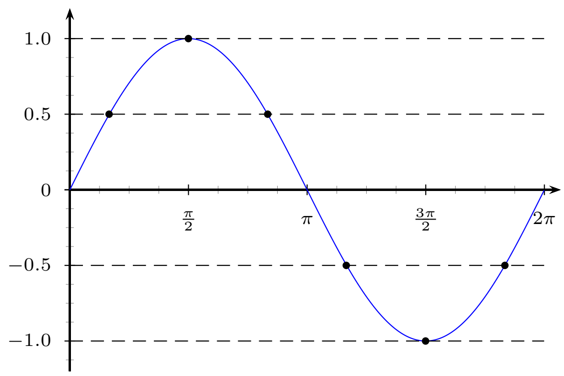
$$4t^2 - 5t + 1 = 0,\ \text{uz uslov } 0 \leq t \leq 1$$

Rešenja ove jednačine su

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{8} = \frac{5 \pm 3}{8} = \begin{cases} \frac{1}{4} \\ 1 \end{cases}$$

gde oba rešenja ispunjavaju uslov $0 \leq t \leq 1$.

Dalje sledi



- $t = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4} \iff \sin x = \pm\frac{1}{2} \iff$
  $$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$
  od ovih rešenja, sledeća četiri pripadaju intervalu $x \in (0, 2\pi)$:
  $$x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{5\pi}{6}, x_3 = \frac{11\pi}{6}, x_4 = \frac{7\pi}{6}$$

- $t = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 \iff \sin x = \pm 1 \iff$
  $$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$
  od ovih rešenja, sledeća dva pripadaju intervalu $x \in (0, 2\pi)$:
  $$x_5 = \frac{\pi}{2}, x_6 = \frac{3\pi}{2}$$

Dakle ukupan broj rešenja koja pripadaju intervalu $(0, 2\pi)$ je šest.

15.Ⓑ

1. $x^2 - 4 \leq 0$
$$(x - 2)(x + 2) \leq 0 \iff x \in [-2, 2]$$

2. $1 - 2x + x^2 > 0$
$$(1 - x)^2 > 0 \iff x \neq 1$$

3. $x^2 - (3 + \sqrt{3})x + 2 + \sqrt{3} > 0$
$$(x - 1)(x - (2 + \sqrt{3})) > 0 \iff x \in (-\infty, 1) \cup (2 + \sqrt{3}, +\infty)$$

Rešenje sistema nejednačina se nalazi u preseku intervala koje smo dobili za rešenja pojedinačnih nejednačina i dato je sa

$$x \in [-2, 1).$$

16.© Razvoj binoma dat je formulom

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + y^n$$

U našem slučaju je $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{a}} = a^{-\frac{1}{3}}$, $y = -a$ i $n = 12$. Tražimo član u razvoju koji sadrži a^8. Kako je

$$\binom{n}{k}x^{n-k}(-y)^k = \binom{12}{k}a^{-\frac{12-k}{3}}(-a)^k = \binom{12}{k}(-1)^k a^{k-\frac{12-k}{3}}$$

to iz

$$a^{k-\frac{12-k}{3}} = a^8$$

sledi

$$k - 4 + \frac{k}{3} = 8 \iff \frac{4}{3}k = 12 \iff k = 9$$

Za član razvoja koji sadrži a^8 sada imamo

$$\binom{n}{k}x^{n-k}(-y)^k = \binom{12}{9}(-1)^9a^8 = -\binom{12}{12-9}a^8 = -\binom{12}{3}a^8$$

$$\binom{n}{k}x^{n-k}(-y)^k = -\frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2}a^8 = -220a^8,$$

odnosno traženi koeficijent uz a^8 jednak je -220.

17.©

$$4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$$

Jednačina je definisana u skupu realnih brojeva za

$$x^2 - 2 \geq 0 \iff (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$$

Iz zadate jednačine sledi

$$2^{2(x+\sqrt{x^2-2})} - \frac{5}{2}\cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}} - 6 = 0$$

te smenom $t = 2^{x+\sqrt{x^2-2}} > 0$ dobijamo kvadratnu jednačinu

$$t^2 - \frac{5}{2}t - 6 = 0 \iff 2t^2 - 5t - 12 = 0$$

čija su rešenja

$$t_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{25+96}}{4} = \frac{5\pm 11}{4} = \begin{cases} -\dfrac{3}{2} \\ 4 \end{cases}$$

Jedino $t = t_2 = 4$ ispunjava uslov $t > 0$ pa je to jedino rešenje kvadratne jednačine po nepoznatoj t. Dalje imamo

$$t = 4 \Rightarrow 2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 2^2 \iff x + \sqrt{x^2-2} = 2 \iff \sqrt{x^2-2} = 2 - x$$

Kako je $\sqrt{x^2-2} \geq 0$ to je neophodan uslov $2 - x \geq 0 \iff x \leq 2$. Kvadriranjem leve i desne strane prethodne jednačine, sledi

$$x^2 - 2 = 4 - 4x + x^2 \iff 4x = 6 \iff x = \frac{3}{2}$$

Uslovi $x = \dfrac{3}{2} \leq 2$ i $x = \dfrac{3}{2} > \sqrt{2}$ su ispunjeni, te je ovo rešenje zadate jednačine i ima oblik $\dfrac{p}{q}$ gde je $p = 3$ i $q = 2$. Konačno sledi

$$p + q = 5.$$

18.Ⓒ

$$\begin{aligned}
\frac{(1+\operatorname{tg}1^o)(1+\operatorname{tg}2^o)-2}{(1-\operatorname{tg}1^o)(1-\operatorname{tg}2^o)-2} &= \frac{2-(1+\operatorname{tg}1^o)(1+\operatorname{tg}2^o)}{2-(1-\operatorname{tg}1^o)(1-\operatorname{tg}2^o)}\\
&= \frac{1-\operatorname{tg}1^o\operatorname{tg}2^o-\operatorname{tg}1^o-\operatorname{tg}2^o}{1-\operatorname{tg}1^o\operatorname{tg}2^o+\operatorname{tg}1^o+\operatorname{tg}2^o}\\
&= \frac{(1-\operatorname{tg}1^o\operatorname{tg}2^o-\operatorname{tg}1^o-\operatorname{tg}2^o)\cdot\frac{1}{1-\operatorname{tg}1^o\operatorname{tg}2}}{(1-\operatorname{tg}1^o\operatorname{tg}2^o+\operatorname{tg}1^o+\operatorname{tg}2^o)\cdot\frac{1}{1-\operatorname{tg}1^o\operatorname{tg}2}}\\
&= \frac{1-\frac{\operatorname{tg}1^o+\operatorname{tg}2^o}{1-\operatorname{tg}1^o\operatorname{tg}2^o}}{1+\frac{\operatorname{tg}1^o+\operatorname{tg}2^o}{1-\operatorname{tg}1^o\operatorname{tg}2^o}}\\
&= \frac{1-\operatorname{tg}(1^o+2^o)}{1+\operatorname{tg}(1^o+2^o)} = \frac{1-\operatorname{tg}3^o}{1+\operatorname{tg}3^o} = \frac{\operatorname{tg}45^o-\operatorname{tg}(3)}{1+\operatorname{tg}45^o\operatorname{tg}3^o} = \operatorname{tg}(45^o-3^o) = \operatorname{tg}42^o
\end{aligned}$$

pri čemu smo koristili trigonometrijske identitete

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(\alpha-\beta) &= \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\\
\operatorname{tg}(\alpha+\beta) &= \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\\
\operatorname{tg}45^o &= 1\\
\operatorname{tg}(45^o-\alpha) &= \frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}.
\end{aligned}$$

19.Ⓐ Imamo n nula i k jedinica, $n+1>k$. Treba ih rasporediti tako da nikoje dve jedinice nisu susedne. Ako ispred svake jedinice pridružimo po jednu nulu i pri raspoređivanju ih uvek držimo u grupi, tada će uvek biti ispunjen uslov da nikoje dve jedninice nisu susedne. U tom slučaju imamo k grupa '01' i kako je svakoj od k jedinica dodeljena po jedna nula, to preostaje $n-k$ nula. Kako god da rasporedimo ove članove, na $n-k+k=n$ pozicija, važiće

- na prvoj poziciji u bilo kom rasporedu je uvek nula
- nikoje dve jedinice nisu susedne

Ukupan broj različitih rasporeda u ovom slučaju odgovara ukupnom broju načina na koji možemo rasporediti k grupa '01' na n različitih pozicija (kombinacije klase k sa n elemenata):

$$\binom{n}{k}$$

Preostaje slučaj kada je na prvoj poziciji u rasporedu uvek jedinica. Tada imamo $k-1$ grupa '01' (jedna jedinica je uvek na prvoj poziciji u rasporedu) i preostaje $n-(k-1)=n-k+1$ nula. Kako god da rasporedimo ove članove, na $n-k+1+(k-1)=n$ pozicija, važiće

- na prvoj poziciji u bilo kom rasporedu je uvek jedinica
- nikoje dve jedinice nisu susedne

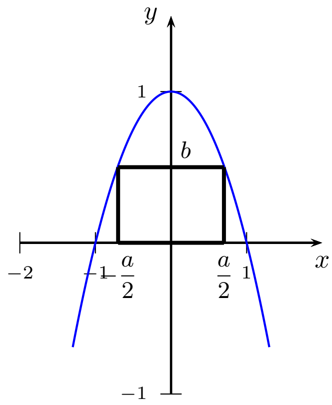
Ukupan broj različitih rasporeda u ovom slučaju odgovara ukupnom broju načina na koji možemo rasporediti $k-1$ grupa '01' na n različitih pozicija (kombinacije klase $k-1$ sa n elemenata):

$$\binom{n}{k-1}$$

Sada je ukupan broj rasporeda

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!}\\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k+1}\right) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\frac{n-k+1+k}{k(n-k+1)}\\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\frac{n+1}{k(n-k+1)} = \frac{(n+1)n!}{k(k-1)!(n-k+1)(n-k)!}\\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

20.Ⓑ Na slici je prikazana parabola $y = 1 - x^2$ sa pravougaonikom upisanim u zadati parabolički odsečak. Neka je a dužina stranice pravougaonika na x-osi, i b dužina stranice pravougaonika paralelne y-osi. Površina ovog pravougaonika data je izrazom



$$P = ab$$

Kako tačka $(\frac{a}{2}, b)$ pripada paraboli (videti sliku), to je ispunjeno

$$y = 1 - x^2 \Rightarrow b = 1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 1 - \frac{a^2}{4}$$

te se površina pravougaonika može izraziti u funkciji promenljive a na sledeći način

$$P = ab = a\left(1 - \frac{a^2}{4}\right) = a - \frac{1}{4}a^3$$

Površina će biti maksimalna, za maksimalnu vrednost funkcije

$$f(a) = a - \frac{1}{4}a^3$$

koja se dobija za vrednost a u kojoj je prvi izvod ove funkcije jednak nuli. Sledi

$$f'(a) = \left(a - \frac{1}{4}a^3\right)' = 1 - \frac{1}{4}3a^2 = 1 - \frac{3}{4}a^2$$

Iz $f'(a_0) = 0$ dobijamo

$$1 - \frac{3}{4}a_0^2 = 0 \iff a_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

te je maksimalna površina upisanog pravougla

$$P_{\max} = a_0\left(1 - \frac{1}{4}a_0^2\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{4}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{2}{3} = \frac{4}{9}\sqrt{3}.$$

KLASIFIKACIONI ISPIT IZ MATEMATIKE ZA UPIS NA ELEKTROTEHNIČKI, FIZIČKI FAKULTET I FAKULTET ZA FIZIČKU HEMIJU

1. Ako je i imaginarna jedinica onda je količnik $\dfrac{i^{2004}+i^{2005}}{i^{2003}-i^{2002}}$ jednak:

(A) 0 (B) $-i$ (C) 1 (D) -1 (E) i (N) Ne znam

2. Vrednost izraza $\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)^{-1} : \left(1+\frac{1}{3}\right)\right]^{-2} \cdot \left(1+\frac{1}{4}\right)$ jednaka je:

(A) 5 (B) 0.2 (C) 1 (D) 0.5 (E) 3 (N) Ne znam

3. Zbir svih celobrojnih vrednosti x takvih da važi jednakost $|5-|x||=5-|x|$ je:

(A) 12 (B) 10 (C) 5 (D) 2 (E) 0 (N) Ne znam

4. Ako je $a>b>0$ i $a^2+b^2=6ab$, tada je $\dfrac{a+b}{a-b}$ jednako:

(A) $-\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{6}$ (D) 1 (E) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (N) Ne znam

5. Ako je $\frac{a}{A}=\frac{b}{B}=\frac{c}{C}=k$, tada je $\dfrac{4a-3b+c}{4A-3B+C}$ jednako:

(A) $2k$ (B) k (C) $\dfrac{2k}{3}$ (D) $-2k$ (E) $\dfrac{k}{2}$ (N) Ne znam

6. Neka su α,β i γ uglovi a a,b,c stranice trougla. Tada je $a\sin(\beta-\gamma)+b\sin(\gamma-\alpha)+c\sin(\alpha-\beta)$ jednako:

(A) $2\cos(\alpha+\beta-\gamma)$ (B) $\cos(\alpha-\beta-\gamma)$
(C) 1 (D) 0
(E) -1 (N) Ne znam

7. Ako su x_1 i x_2 rešenja jednačine $ax^2+bx+c=0$, tada su x_1^3 i x_2^3 rešenja jednačine:

(A) $a^3x^2-b^2x+a^3+c^3=0$ (B) $a^3x^2+b^3x+c^3+1=0$
(C) $a^3x^2+b(b^2-3ac)x+c^3=0$ (D) $a^3x^2+(b^3-4abc)x+c^3=0$
(E) $x^2+(a^3+b^3)x+a^3+b^3+c^3=0$ (N) Ne znam

8. Ako je $\log_{b^2}x+\log_{x^2}b=1$, $b>0, b\neq 1, x\neq 1$, tada je x jednako:

(A) $\dfrac{1}{b}$ (B) $\dfrac{1}{b^2}$ (C) b (D) b^2 (E) $\sqrt{b}$ (N) Ne znam

9. Stranica romba čija je površina $80\,\mathrm{cm}^2$, a odnos dijagonala $4:5$, iznosi (u cm):

(A) $\sqrt{84}$ (B) $\sqrt{81}$ (C) $\sqrt{72}$ (D) $\sqrt{80}$ (E) $\sqrt{82}$ (N) Ne znam

10. Ako je $\cos 2x=1/2$ pri čemu je $0<x<\pi$, tada je $\sin 7x$ jednako:

(A) 0 (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (C) 1 (D) -1 (E) $-\dfrac{1}{2}$ (N) Ne znam

11. Nejednačina $\sqrt{\frac{1}{x+1}} > \frac{1}{2x-1}$ je tačna ako i samo ako je:

(A) $x \in (-1, 1/2) \cup (5/4, +\infty)$
(B) $x \in (5/4, +\infty)$
(C) $x \in (-1, 1/2)$
(D) $x \in (4/5, +\infty)$
(E) $x \in (0, 4/5)$
(N) Ne znam

12. Data je funkcija $f(x) = 2x - x^2$. Tada je $f(f(f(1-x)))$ jednako:

(A) $2x^4 - x^8$ (B) $2x - x^{16}$ (C) $1 - (1-x)^8$ (D) $2x^3 - x^8$ (E) $1 - x^8$ (N) Ne znam

13. Sistem jednačina $3^x - 2^{y^2} = 77$, $3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y^2}{2}} = 7$ ima:

(A) jedno realno rešenje
(B) dva realna rešenja
(C) četiri realna rešenja
(D) tri realna rešenja
(E) prazan skup realnih rešenja
(N) Ne znam

14. U jednakokraki trougao osnovice dužine 12 cm i odgovarajuće visine dužine 8 cm, upisan je pravougaonik maksimalne površine tako da mu jedna stranice pripada osnovici trougla. Obim pravougaonika (u cm) je:

(A) 20 (B) 16 (C) 14 (D) 24 (E) 10 (N) Ne znam

15. Poluprečnik kruga koji sadrži tačke $(-2, 0)$ i $(1, -3)$ a centar mu pripada pravoj $x + y = 0$, jeste:

(A) $\sqrt{13}$ (B) $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ (C) $\sqrt{\dfrac{13}{2}}$ (D) $\dfrac{13}{2}$ (E) $\sqrt{\dfrac{13}{6}}$ (N) Ne znam

16. U razvoju stepena binoma $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$ jedan član je $a \cdot x^{-\frac{1}{6}}$. Tada je a jednako:

(A) 0 (B) 56 (C) -56 (D) -70 (E) 70 (N) Ne znam

17. Dati su izrazi $E_1 = \sin^2 \dfrac{x+y}{2} + \cos x \cos y$, $E_2 = \cos^2 \dfrac{x-y}{2} - \sin x \sin y$, $E_3 = \cos^2 \dfrac{x+y}{2} + \sin x \sin y$, $E_4 = \sin^2 \dfrac{x-y}{2} + \cos x \cos y$. Tačan je iskaz:

(A) $E_1 \neq E_2$, $E_3 = E_4$
(B) $E_1 = E_2$, $E_3 \neq E_4$
(C) Nema međusobno jednakih izraza
(D) $E_1 = E_2$, $E_3 = E_4$
(E) $E_1 = E_3$, $E_2 = E_4$
(N) Ne znam

18. Date su dve paralelne prave. Na jednoj od njih je 10 a na drugoj 12 različitih tačaka. Broj trouglova koje određuju ove tačke je:

(A) $\binom{10}{2}\binom{12}{1} + \binom{10}{1}\binom{12}{2}$
(B) $\binom{22}{3} - \binom{22}{2}$
(C) $\binom{10}{1}\binom{12}{2}$
(D) $\binom{10}{2}\binom{12}{1}$
(E) $10 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 11$
(N) Ne znam

19. Neka je S skup svih realnih brojeva x za koje važi $2\log_{\cos x} \sin x \leq \log_{\sin x} \operatorname{cotg} x \quad (0 < x < \pi)$. Tada je za neke brojeve a, b, c, d, e, f $(a < b < c < d < e < f)$ skup S oblika:

(A) (a, b)
(B) $[a, b] \cup [c, d]$
(C) $(a, b) \cup (c, d)$
(D) $[a, b]$
(E) $(a, b) \cup (c, d) \cup (e, f)$
(N) Ne znam

20. Ako su a, b i c istovremeno peti, sedamnaesti i trideset sedmi član i aritmetičke i geometrijske progresije, tada je $a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b}$ jednako:

(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) 1 (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{1}{4}$ (E) 2 (N) Ne znam

REŠENJA

1.Ⓔ

$$\frac{i^{2004}+i^{2005}}{i^{2003}-i^{2002}}=\frac{i^{2004}(1+i)}{i^{2003}(i-1)}=i^2\frac{i+1}{i-1}=-\frac{(i+1)(i+1)}{(i-1)(i+1)}=-\frac{i^2+2i+1}{i^2-1^2}=-\frac{-1+2i+1}{-2}=i.$$

2.Ⓐ

$$\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)^{-1}:\left(1+\frac{1}{3}\right)\right]^{-2}\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)=\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}:\frac{4}{3}\right)^{-2}\cdot\frac{5}{4}=\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)^{-2}\cdot\frac{5}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot\frac{5}{4}=2^2\cdot\frac{5}{4}=5.$$

3.Ⓔ Na osnovu definicije apsolutne vrednosti

$$|x|=\begin{cases} x,\ x\geq 0\\ -x,\ x<0\end{cases}$$

sledi da će zadata jednakost

$$|5-|x||=5-|x|$$

biti ispunjena za

$$5-|x|\geq 0\iff |x|\leq 5$$

Svi celi brojevi koji ispunjavaju ovu nejednakost su

$$0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm5$$

i njihov zbir je jednak nuli.

4.Ⓑ Važi

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2=\frac{a^2+b^2+2ab}{a^2+b^2-2ab}=\frac{6ab+2ab}{6ab-2ab}=\frac{8ab}{4ab}$$

Kako su $a>b>0$ to je

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2=\frac{8ab}{4ab}=2$$

te pošto je $a+b>0$ i $a-b>0$ to je $\dfrac{a+b}{a-b}>0$ te imamo

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2=2\Rightarrow\frac{a+b}{a-b}=\sqrt{2}.$$

5.Ⓑ Kako je

$$\frac{a}{A}=\frac{b}{B}=\frac{c}{C}=k\Rightarrow a=kA,\ b=kB,\ c=kC$$

sledi

$$\frac{4a-3b+c}{4A-3B+C}=\frac{4kA-3kB+kC}{4A-3B+C}=\frac{k(4A-3B+C)}{4A-3B+C}=k.$$

6.Ⓓ Na osnovu sinusne teoreme za trougao važi

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=t$$

odnosno

$$a=t\sin\alpha,\ b=t\sin\beta,\ c=t\sin\gamma$$

te iz zadatog izraza sledi

$$\begin{aligned}
a\sin(\beta-\gamma)+b\sin(\gamma-\alpha)+c\sin(\alpha-\beta) &= t\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+t\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)+t\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)\\
&= t\sin\alpha\,(\sin\beta\cos\gamma-\sin\gamma\cos\beta)\\
&\quad + t\sin\beta\,(\sin\gamma\cos\alpha-\sin\alpha\cos\gamma)\\
&\quad + t\sin\gamma\,(\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha)\\
&= t\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-t\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma\\
&\quad + t\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma-t\sin\alpha\ \sin\beta\cos\gamma\\
&\quad + t\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma-t\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma=0.
\end{aligned}$$

7.© Ako su x_1 i x_2 rešenja kvadratne jednačine

$$ax^2+bx+c=0 \iff x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

tada važi

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2$$

te izjednačavanjem koeficijenata polinoma sa leve i desne strane jednačine dobijamo

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1x_2=\frac{c}{a}$$

Za kvadratnu jednačinu, čija su rešenja x_1^3 i x_2^3 sada važi

$$(x-x_1^3)(x-x_2^3)=0 \iff x^2-(x_1^3+x_2^3)x+x_1^3x_2^3=0$$

Kako je

$$(x_1+x_2)^3=x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3=x_1^3+x_2^3+3x_1x_2(x_1+x_2)$$

to sledi

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=-\frac{b^3}{a^3}-3\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)=-\frac{b^3}{a^3}+3\frac{bc}{a^2}$$

pa jednačina postaje

$$\begin{gathered}
x^2-(x_1^3+x_2^3)x+x_1^3x_2^3=0\\
x^2-\left(-\frac{b^3}{a^3}+3\frac{bc}{a^2}\right)x+\frac{c^3}{a^3}=0\\
a^3x^2+b\left(b^2-3ac\right)x+c^3=0.
\end{gathered}$$

8.©

$$\begin{gathered}
\log_{b^2}x+\log_{x^2}b=1,\quad b>0, b\neq 1, x\neq 1\\
\frac{\log_b x}{\log_b b^2}+\frac{\log_b b}{\log_b x^2}=1\\
\frac{\log_b x}{2\log_b b}+\frac{\log_b b}{2\log_b x}=1\\
\frac{\log_b x}{2}+\frac{1}{2\log_b x}=1
\end{gathered}$$

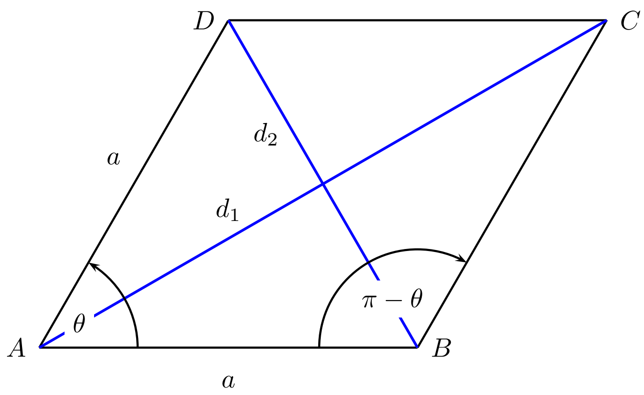
Smenom $t=\log_b x$ dalje dobijamo

$$\frac{t}{2}+\frac{1}{2t}=1 \iff t^2-2t+1=0 \iff (t-1)^2=0 \iff t=1$$

$$\log_b x=1=\log_b b \iff x=b.$$

9.Ⓔ Primenom kosinusne teoreme na trouglove ABD i ABC dobijamo sledeće izraze za manju i veću dijagonalu romba, respektivno

$$d_2^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cos\theta = 2a^2(1-\cos\theta)$$
$$d_1^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cos(\pi-\theta) = 2a^2 + 2a^2\cos\theta = 2a^2(1+\cos\theta)$$



Odavde dalje sledi

$$\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{16}{25}$$
$$16(1+\cos\alpha) = 25(1-\cos\alpha) \iff \cos\alpha = \frac{9}{41}$$
$$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-\frac{9^2}{41^2} = \frac{1681-81}{41^2} = \frac{40^2}{41^2}$$
$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{40^2}{41^2}} = \frac{40}{41}$$

Površina romba data je izrazom

$$P = a^2\sin\alpha \iff a = \sqrt{\frac{P}{\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{80}{\frac{40}{41}}} = \sqrt{82}.$$

10.Ⓔ Kako je $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = \frac{1}{2} \iff 2\sin^2 x = \frac{1}{2} \iff \sin^2 x = \frac{1}{4}$

to sledi $\sin x = \pm\frac{1}{2}$

Pošto je $0 < x < \pi$ to je u ovom intervalu $\sin x > 0$ te važi

$$\sin x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{6} \vee x = \pi - \frac{\pi}{6}$$

Dalje za $x = \frac{\pi}{6}$ sledi:

$$\sin 7x = \sin\frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

i slično za $x = \pi - \frac{\pi}{6}$:

$$\sin 7x = \sin\left(7\pi - \frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Dakle $\sin 7x = -\frac{1}{2}$.

11.Ⓐ

$$\sqrt{\frac{1}{1+x}} > \frac{1}{2x-1}$$

nejednačina je definisana u skupu realnih brojeva za koje važi

$$1+x>0 \iff x>-1$$

Kako je $\sqrt{\frac{1}{1+x}} > 0$, to razlikujemo dva slučaja

- $\frac{1}{2x-1} < 0 \iff 2x-1<0 \iff x<\frac{1}{2}$:

  U ovom slučaju zadata nejednačina je uvek ispunjena jer za $x \in \left(-1, \frac{1}{2}\right)$ važi

$$\sqrt{\frac{1}{1+x}} > 0 \wedge \frac{1}{2x-1} < 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{1+x}} > \frac{1}{2x-1}$$

- $\frac{1}{2x-1} > 0 \iff 2x-1>0 \iff x>\frac{1}{2}$:

  Obe strane nejednakosti su pozitivne u ovom slučaju te kvadriranjem leve i desne strane dobijamo

$$\frac{1}{1+x} > \frac{1}{(2x-1)^2}$$

  odnosno

$$1+x<(2x-1)^2 = 4^2-4x+1 \iff 4x^2-5x>0 \iff 4x\left(x-\frac{5}{4}\right)>0$$

$$x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{5}{4}, +\infty\right)$$

  što uz uslov $x > \frac{1}{2}$ daje rešenje

$$x \in \left(\frac{5}{4}, +\infty\right)$$

Dakle, rešenja zadate nejednačine se nalaze u intervalu

$$x \in \left(-1, \frac{1}{2}\right) \bigcup \left(\frac{5}{4}, +\infty\right).$$

12.Ⓔ

$$f(x) = 2x - x^2 = x(2-x)$$
$$f(1-x) = (1-x)(2-(1-x)) = (1-x)(1+x) = 1-x^2$$
$$f(f(1-x)) = f(1-x^2) = (1-x^2)(2-(1-x^2)) = (1-x^2)(1+x^2) = 1-x^4$$
$$f(f(f(1-x))) = f(1-x^4) = (1-x^4)(2-(1-x^4)) = (1-x^4)(1+x^4) = 1-x^8.$$

13.Ⓑ Uvedimo smene

$$u = 3^{\frac{x}{2}} > 0, \quad v = 2^{\frac{y^2}{2}} > 0$$

Sada sledi

$$\left.\begin{array}{c} 3^x - 2^{y^2} = 77 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y^2}{2}} = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} u^2 - v^2 = 77 \\ u - v = 7 \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{c} (u-v)(u+v) = 77 \\ u - v = 7 \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{c} u+v = 11 \\ u - v = 7 \end{array}\right\}$$

Rešavanjem poslednjeg sistema jednačina dobijamo

$$2u = 18 \iff u = 9$$
$$2v = 4 \iff v = 2$$

Pri čemu rešenja ispunjavaju početne uslove $u > 0$ i $v > 0$. Dalje sledi

$$u = 9 \Rightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^2 \iff \frac{x}{2} = 2 \iff x = 4$$

$$v = 2 \Rightarrow 2^{\frac{y^2}{2}} = 2^1 \iff \frac{y^2}{2} = 1 \iff y = \pm\sqrt{2}$$

Dakle, sistem jednačina ima dva realna rešenja

$$(x, y) \in \{(4, -\sqrt{2}), (4, \sqrt{2})\}.$$

14.Ⓐ
Posmatrajmo jednakokraki trougao ABC osnovice $AB = a = 12$ i visine $CC_2 = h = 8$ sa upisanim pravougaonikom stranica c i d. Iz sličnosti trouglova ACC_2 i A_1CC_1 imamo sledeću relaciju

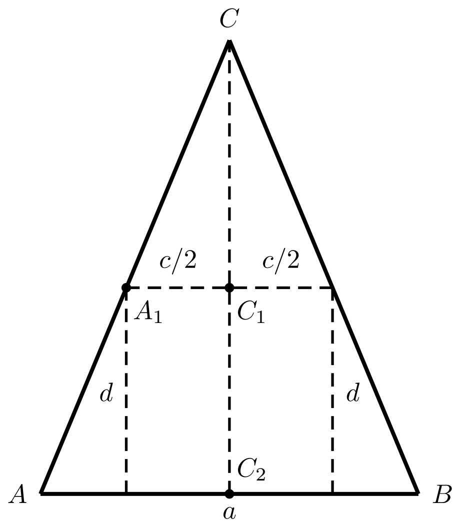
$$\frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{\frac{c}{2}}{h - d}$$

odakle sledi

$$c = \frac{h-d}{h} a = \left(1 - \frac{d}{h}\right) a = 12\left(1 - \frac{d}{8}\right)$$

Sada se površina pravougaonika može izraziti u funkciji promenljive d na sledeći način

$$P = cd = 12\left(1 - \frac{d}{8}\right) d = 12d - \frac{3}{2}d^2$$



Površina pravougaonika će biti maksimalna za maksimalnu vrednost funkcije $P(d)$, koja se dobija u tački $d = d_0$ za koju je $P'(d_0) = 0$. Prvi izvod gornje funkcije po promenljivoj d je

$$P'(d) = \left(12d - \frac{3}{2}d^2\right)' = 12 - 3d$$

Iz $P'(d_0) = 0$ dobijamo $12 - 3d_0 = 0 \iff d_0 = 4$. Tada je $c_0 = 12\left(1 - \frac{4}{8}\right) = 6$ i traženi obim pravougaonika sa maksimalnom mogućom površinom je

$$O = 2(c_0 + d_0) = 2(4 + 6) = 20.$$

15.Ⓒ Jednačina kruga poluprečnika R sa centrom u tački (x_c, y_c) je

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$$

Kako centar kruga pripada pravoj $x + y = 0$ to važi

$$x_c + y_c = 0 \iff y_c = -x_c$$

te jednačina kruga postaje

$$(x - x_c)^2 + (y + x_c)^2 = R^2$$

Tačka $(x, y) = (-2, 0)$ pripada krugu, te važi

$$(-2 - x_c)^2 + (0 + x_c)^2 = R^2 \iff x_c^2 + 4x_c + 4 + x_c^2 = R^2 \iff 2x_c^2 + 4x_c + 4 = R^2$$

i slično iz uslova da tačka $(x, y) = (1, -3)$ pripada krugu imamo

$$(1 - x_c)^2 + (-3 + x_c)^2 = R^2 \iff x_c^2 - 2x_c + 1 + x_c^2 - 6x_c + 9 = R^2 \iff 2x_c^2 - 8x_c + 10 = R^2$$

Iz poslednje dve jednačine sledi

$$2x_c^2 + 4x_c + 4 = 2x_c^2 - 8x_c + 10 \iff 12x_c = 6 \iff x_c = \frac{1}{2}$$

te se za poluprečnik kruga dobija

$$R^2 = 2x_c^2 + 4x_c + 4 = 2\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{2} + 4 = 6 + \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$$

$$R = \sqrt{\frac{13}{2}}.$$

16.Ⓒ Razvoj stepena binoma dat je formulom

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

U našem slučaju je $a = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $b = -\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = -x^{-\frac{1}{3}}$ i $n = 8$. Tražimo član u razvoju koji sadrži $x^{-\frac{1}{6}}$. Kako je

$$\binom{n}{k}x^{n-k}(-y)^k = \binom{8}{k}x^{\frac{8-k}{2}}(-x^{-\frac{1}{3}})^k = \binom{8}{k}(-1)^k x^{4-\frac{k}{2}-\frac{k}{3}}$$

to iz

$$x^{4-\frac{k}{2}-\frac{k}{3}} = x^{-\frac{1}{6}}$$

sledi

$$4 - \frac{k}{2} - \frac{k}{3} = -\frac{1}{6} \iff 24 - 5k = -1 \iff 5k = 25 \iff k = 5$$

Za član razvoja koji sadrži $x^{-\frac{1}{6}}$ sada imamo

$$\binom{n}{k}x^{n-k}(-y)^k = \binom{8}{5}(-1)^5 x^{-\frac{1}{6}} = -\binom{8}{8-5}x^{-\frac{1}{6}} = -\binom{8}{3}x^{-\frac{1}{6}}$$

odnosno, traženi koeficijent uz $x^{-\frac{1}{6}}$ je

$$-\binom{8}{3} = -\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = -56.$$

17.Ⓔ Koristimo sledeće trigonometrijske identitete

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

Sada sledi

$$\begin{aligned}
E_1 &= \sin^2\frac{x+y}{2} + \cos x\cos y = \frac{1}{2}\left(1-\cos(x+y)\right) + \cos x\cos y \\
&= \frac{1}{2}\left(1-(\cos x\cos y - \sin x\sin y)\right) + \cos x\cos y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x\cos y + \cos x\cos y + \frac{1}{2}\sin x\sin y \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\cos x\cos y + \sin x\sin y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(x-y) = \cos^2\frac{x-y}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_2 &= \cos^2\frac{x-y}{2} - \sin x\sin y = \frac{1}{2}\left(1+\cos(x-y)\right) - \sin x\sin y \\
&= \frac{1}{2}\left(1+(\cos x\cos y + \sin x\sin y)\right) - \sin x\sin y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x\cos y + \frac{1}{2}\sin x\sin y - \sin x\sin y \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\cos x\cos y - \sin x\sin y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(x+y) = \cos^2\frac{x+y}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_3 &= \cos^2\frac{x+y}{2} + \sin x \sin y = \frac{1}{2}\left(1+\cos(x+y)\right) + \sin x \sin y \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + (\cos x\cos y - \sin x \sin y)\right) + \sin x \sin y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x \cos y - \frac{1}{2}\sin x \sin y + \sin x \sin y \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\cos x \cos y + \sin x \sin y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(x-y) = \cos^2\frac{x-y}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_4 &= \sin^2\frac{x-y}{2} + \cos x \cos y = \frac{1}{2}\left(1-\cos(x-y)\right) + \cos x \cos y \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - (\cos x\cos y + \sin x \sin y)\right) + \cos x \cos y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x \cos y - \frac{1}{2}\sin x \sin y + \cos x \cos y \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\cos x \cos y - \sin x \sin y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(x+y) = \cos^2\frac{x+y}{2}
\end{aligned}$$

Odavde sledi

$$E_1 = E_3 = \cos^2\frac{x-y}{2}$$
$$E_2 = E_4 = \cos^2\frac{x+y}{2}.$$

18.Ⓐ Neka je na pravoj p deset različitih tačaka i na njoj paralelnoj pravoj q dvanaest različitih tačaka. Trouglove možemo obrazovati tako što izaberemo jednu tačku na pravoj p i dve tačke na pravoj q ili jednu tačku na pravoj q i dve tačke na pravoj p.

- Biramo jednu tačku na pravoj p i dve tačke na pravoj q:

  Jednu tačku od 10 tačaka na pravoj p možemo izabrati na $\binom{10}{1}$ načina.

  Dve tačke od 12 tačaka na pravoj q možemo izabrati na $\binom{12}{2}$ načina.

  Ukupan broj ovako obrazovanih trouglova je $\binom{10}{1}\cdot\binom{12}{2}$.
- Biramo jednu tačku na pravoj q i dve tačke na pravoj p:

  Jednu tačku od 12 tačaka na pravoj q možemo izabrati na $\binom{12}{1}$ načina.

  Dve tačke od 10 tačaka na pravoj p možemo izabrati na $\binom{10}{2}$ načina.

  Ukupan broj ovako obrazovanih trouglova je $\binom{12}{1}\cdot\binom{10}{2}$.

Sada je ukupan broj trouglova koji određuju tačke iz zadatka

$$\binom{10}{1}\cdot\binom{12}{2} + \binom{12}{1}\cdot\binom{10}{2}.$$

19.Ⓐ

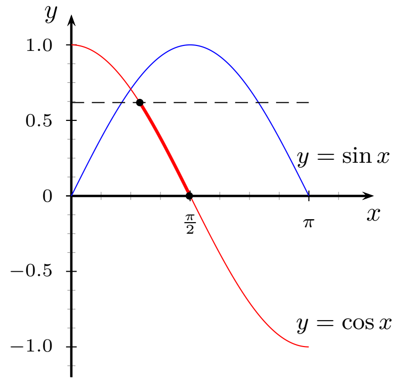
$$2\log_{\cos x}\sin x \le \log_{\sin x}\operatorname{cotg} x, \quad 0 < x < \pi$$

ova jednačina je definisana u skupu realnih brojeva za koje važi

$$\sin x > 0 \wedge \sin x \ne 1 \wedge \cos x > 0 \wedge \cos x \ne 1 \wedge \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} > 0$$

Sa slike se može videti da su ovi uslovi na intervalu $(0,\pi)$ ispunjeni za

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$



Kako je

$$\log_{\sin x}\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\log_{\cos x}\frac{\cos x}{\sin x}}{\log_{\cos x}\sin x} = \frac{\log_{\cos x}\cos x - \log_{\cos x}\sin x}{\log_{\cos x}\sin x}$$

$$\log_{\sin x}\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1-\log_{\cos x}\sin x}{\log_{\cos x}\sin x}$$

to imamo

$$2\log_{\cos x}\sin x\le\log_{\sin x}\operatorname{cotg}x\Rightarrow 2\log_{\cos x}\sin x\le\frac{1-\log_{\cos x}\sin x}{\log_{\cos x}\sin x}$$

te smenom $t=\log_{\cos x}\sin x\neq 0$ dobijamo

$$2t\le\frac{1-t}{t}\iff 2t-\frac{1-t}{t}\le 0\iff\frac{2t^2+t-1}{t}\le 0$$

Kako su rešenja jednačine

$$2t^2+t-1=0$$

data sa

$$t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{-1\pm 3}{4}=\begin{cases}-1\\ \dfrac{1}{2}\end{cases}$$

to je

$$P(t)=2t^2+t-1\begin{cases}<0 \text{ za } t\in\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)\\ >0 \text{ za } t\in(-\infty,-1)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)\end{cases}$$

dok je

$$Q(t)=t\begin{cases}<0 \text{ za } t<0\\ >0 \text{ za } t<0\end{cases}$$

Rešenje nejednačine

$$\frac{P(t)}{Q(t)}=\frac{2t^2+t-1}{t}\le 0$$

nalazimo iz sledeće tabele

$t\in$	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},+\infty)$
$P(t)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$Q(t)$	$-$	$-$	$+$	$+$
LS	$-$	$+$	$-$	$+$

Dakle, nejednakost je ispunjena za

$$t\in(-\infty,-1)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right).$$

Sada sledi

- $t<-1$:

$$\log_{\cos x}\sin x<-1=\log_{\cos x}\frac{1}{\cos x}$$

  kako je $0<\cos x<1$ to je funkcija $\log_{\cos x}(\cdot)$ opadajuća, te dalje važi

$$\sin x>\frac{1}{\cos x}\Rightarrow\sin x\cos x>1\iff 2\sin x\cos x>2\iff\sin(2x)>2\Rightarrow x\in\emptyset$$

- $t\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$:

$$0<\log_{\cos x}\sin x<\frac{1}{2}\iff\log_{\cos x}1<\log_{\cos x}\sin x<\log_{\cos x}\sqrt{\cos x}$$

  kako je $0<\cos x<1$ to je funkcija $\log_{\cos x}(\cdot)$ opadajuća, te dalje važi

$$1>\sin x>\sqrt{\cos x}$$

Za $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ leva nejednakost $1 > \sin x$ je ispunjena. Takođe važi $\sin x > 0$ pa kvadriranjem desne nejednakosti dalje sledi

$$\sin^2 x > \cos x \iff 1 - \cos^2 x > \cos x \iff \cos^2 x + \cos x - 1 < 0$$

Sada uvođenjem nove smene $u = \cos x \in (0, 1)$ dobijamo kvadratnu nejednačinu

$$u^2 + u - 1 < 0$$

i kako su rešenja odgovarajuće kvadratne jednačine $u^2 + u - 1 = 0$ data sa

$$u_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

to je rešenje nejednačine

$$u \in \left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

Pošto je $-\frac{\sqrt{5}+1}{2} < 0$ i kako važi uslov $0 < u < 1$, to je rešenje nejednačine dato sa

$$u \in \left(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \Rightarrow \cos x \in \left(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

Sa slike se može videti da je ovaj uslov ispunjen za

$$x \in \left(\arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right), \frac{\pi}{2}\right)$$

Dakle, skup svih realnih brojeva x za koje važi zadata nejednačina je oblika

$$x \in (a, b)$$

gde je

$$a = \arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \text{ i } b = \frac{\pi}{2}.$$

20.Ⓑ Iz uslova da su brojevi a, b, c redom, peti, sedamnaesti i trideset sedmi član aritmetičke progresije imamo

$$a = p_5 = r_1 + 4d$$
$$b = p_{17} = r_1 + 16d$$
$$c = p_{37} = r_1 + 36d$$

gde je r_1 prvi član a d razlika u ovoj aritmetičkoj progresiji. Odavde sledi

$$a - b = -12d$$
$$b - c = -20d$$
$$c - a = 32d$$

Iz uslova da su brojevi a, b, c redom, peti, sedamnaesti i trideset sedmi član geometrijske progresije imamo

$$a = s_5 = s_1 q^4$$
$$b = s_{17} = s_1 q^{16}$$
$$c = s_{37} = s_1 q^{36}$$

gde je s_1 prvi član a q količnik u ovoj geometrijskoj progresiji. Odavde sledi

$$\frac{b}{a} = q^{12} \Rightarrow b = aq^{12}$$
$$\frac{c}{a} = q^{32} \Rightarrow c = aq^{32}$$

Sada za zadati izraz imamo

$$\begin{aligned} a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b} &= a^{-20d} \cdot (aq^{12})^{32d} \cdot (aq^{32})^{-12d} \\ &= a^{-20d+32d-12d} \cdot q^{12\cdot 32d - 32\cdot 12d} \\ &= a^0 \cdot q^0 = 1. \end{aligned}$$

KLASIFIKACIONI ISPIT IZ MATEMATIKE ZA UPIS NA ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET, FIZIČKI FAKULTET I FAKULTET ZA FIZIČKU HEMIJU

1. Ako je $a = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ i $b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, tada je $a^2 - b^2$ jednako:

(A) $\sqrt{5}$ (B) 10 (C) $5\sqrt{5}$ (D) 5 (E) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ (N) Ne znam

2. Jednačina $x - \frac{7}{x-3} = 3 - \frac{7}{x-3}$:

(A) ima bezbroj celobrojnih rešenja
(B) nema rešenja
(C) ima jedno celobrojno rešenje
(D) ima dva jednaka celobrojna rešenja
(E) ima dva jednaka necelobrojna rešenja
(N) Ne znam

3. Vrednost izraza $\left(\frac{x-9}{x+3\sqrt{x}+9} : \frac{x^{0.5}+3}{x^{1.5}-27}\right)^{0.5} - x^{0.5}$, za $x \in (9, +\infty)$ je:

(A) x (B) $3 - \sqrt{2}x$ (C) -3 (D) $\dfrac{3}{27}$ (E) $\sqrt{x}$ (N) Ne znam

4. Razlika $\cos^2 \frac{x+y}{2} - \sin^2 \frac{x-y}{2}$ jednaka je:

(A) $\sin(x-y)$ (B) $\cos x \cos y$ (C) $\sin x \cos y$ (D) $\sin x \sin y$ (E) $\sin(x+y)$ (N) Ne znam

5. Proizvod rešenja jednačine $\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10$ je:

(A) 2 (B) 1 (C) $\frac{1}{100}$ (D) 100 (E) 10 (N) Ne znam

6. Površina trougla, čiji su uglovi α, β i γ a R poluprečnik opisanog kruga, jednaka je:

(A) $2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$
(B) $\dfrac{1}{2}R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$
(C) $\dfrac{1}{2}R^2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$
(D) $R^2 \sin\alpha \cos\beta \cos\gamma$
(E) $2R^2 \cos\alpha \sin(\beta+\gamma)$
(N) Ne znam

7. Broj rešenja jednačine $9^{|3x-1|} = 3^{8x-2}$ je:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4 (N) Ne znam

8. Date su funkcije $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \frac{|\sin x|}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$, $f_3(x) = \frac{|\cos x|}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$, $f_4(x) = \tan x \cdot \cot x$. Tačan je iskaz:

(A) Nema međusobno jednakih funkcija
(B) Sve funkcije su međusobno jednake
(C) $f_1 \neq f_2 = f_3$
(D) $f_1 = f_4 \neq f_3$
(E) $f_2 \neq f_3 = f_4 \neq f_1$
(N) Ne znam

9. Ako je prava $y = kx + n$ zajednička tangenta kruga $x^2 + y^2 = 4$ i elipse $2x^2 + 5y^2 = 10$, tada je $k^2 + n^2$ jednako:

(A) 4 (B) 7 (C) 6 (D) 5 (E) 14 (N) Ne znam

10. Jednačina $x^3 + x^2 + ax + b = 0\,(a, b \in \mathbb{R})$ ima rešenja $1 - \sqrt{2}$ i $1 + \sqrt{2}$. Proizvod svih rešenja date jednačine je:

(A) -2 (B) -3 (C) 2 (D) 0 (E) 3 (N) Ne znam

11. Visina valjka maksimalne zapremine upisanog u loptu poluprečnika $\sqrt{3}$ jednaka je:

(A) 1 (B) 2 (C) $2\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{3}$ (E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (N) Ne znam

12. Broj rešenja jednačine $(\cos x)^{\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2}} = 1$ na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ je:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4 (N) Ne znam

13. Skup svih realnih brojeva x za koje važi $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$ je:

(A) $(0,1)$
(B) $(-\infty,-2)$
(C) $\{-1\} \cup [2,+\infty)$
(D) (1,2)
(E) $\left(\frac{1}{2},1\right)$
(N) Ne znam

14. U jednakokraki trougao ABC ($AB = AC = 3\,\text{cm}$, $BC = 2\,\text{cm}$) upisan je krug koji dodiruje krake AB i AC redom u tačkama D i E. Dužina duži DE jednaka je (u cm):

(A) $\frac{13}{10}$ (B) $\frac{6}{5}$ (C) $\frac{135}{100}$ (D) $\frac{4}{3}$ (E) $\frac{7}{5}$ (N) Ne znam

15. Data su tri različita proizvoda fabrike A, četiri različita proizvoda fabrike B i pet različitih proizvoda fabrike C. Na koliko različitih načina se svi proizvodi mogu poređati u niz uz sledeće uslove: proizvodi fabrike B su jedan pored drugog, proizvodi fabrike C su jedan pored drugog, nikoja dva proizvoda fabrike A nisu jedan pored drugog?

(A) 5! (B) 4!5! (C) 3!4!5! (D) 2!3!4!5! (E) $12 \cdot 3!$ (N) Ne znam

16. Broj realnih rešenja sistema jednačina $2^x 4^y = 32$, $\log(x-y)^2 - 2\log 2 = 0$ jednak je:

(A) 2 (B) 0 (C) 1 (D) 3 (E) 4 (N) Ne znam

17. Kompleksan broj $(1+i\sqrt{3})^9 + (\sqrt{3}-i)^9$ $(i = \sqrt{-1})$ jednak je:

(A) $2^9(1+i)$ (B) $2^9(-1+i)$ (C) $2^9(1-i)$ (D) 2^9 (E) $-2^9 i$ (N) Ne znam

18. Zbir $1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{11\ldots1}_{n}$ je jednak:

(A) $\frac{1}{81}(10^{n+1} - 10 - 9n)$
(B) $\frac{1}{9}(10^n - 9n + 8)$
(C) $\frac{1}{81}(10^{n+1} - 19n)$
(D) $\frac{1}{9}(10^{2n} - 40n - 50)$
(E) $\frac{1}{22}(11^n - n + 1)$
(N) Ne znam

19. Ako je $\cos x : \cos 2x : \cos 4x = 1 : 2 : y$, tada je y jednako:

(A) 4 (B) $5+3\sqrt{3}$ (C) 8 (D) $5-3\sqrt{3}$ (E) $4-3\sqrt{3}$ (N) Ne znam

20. Brojevi 2, $\sqrt{6}$, $\frac{9}{2}$ su članovi:
(A) opadajuće aritmetičke progresije
(B) rastuće aritmetičke progresije
(C) geometrijske progresije
(D) niza sa opštim članom $a_n = \frac{9n}{2} + \frac{1}{n}$, $(n = 1, 2, \ldots)$
(E) niza sa opštim članom $a_n = \frac{2+\sqrt{6}}{n} - 1$, $(n = 1, 2, \ldots)$

REŠENJA

1. Ⓐ

$$a = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = \frac{\sqrt{5}+1-(\sqrt{5}-1)}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}+1+\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt{5}.$$

---

2. Ⓑ U jednačini

$$x - \frac{7}{x-3} = 3 - \frac{7}{x-3}$$

mora da važi uslov

$$x - 3 \neq 0 \iff x \neq 3$$

Rešavanjem jednačine dobijamo

$$x - \frac{7}{x-3} = 3 - \frac{7}{x-3} \iff x = 3$$

Kako je ovo rešenje u kontradikciji sa uslovom $x \neq 3$ to ova jednačina nema rešenja.

---

3. Ⓒ Korišćenjem identiteta

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

dobijamo

$$(\sqrt{x})^3 - 3^3 = (\sqrt{x}-3)((\sqrt{x})^2 + 3\sqrt{x} + 3^2)$$

odnosno

$$x^{1.5} - 27 = (\sqrt{x}-3)(x+3\sqrt{x}+9)$$

Takođe važi

$$x - 9 = (\sqrt{x})^2 - 3^2 = (\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)$$

tako da zadati izraz postaje

$$\begin{aligned}\left(\frac{x-9}{x+3\sqrt{x}+9} : \frac{x^{0.5}+3}{x^{1.5}-27}\right)^{0.5} - x^{0.5} &= \sqrt{\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{x+3\sqrt{x}+9} \cdot \frac{(\sqrt{x}-3)(x+3\sqrt{x}+9)}{\sqrt{x}+3}} - \sqrt{x} \\ &= \sqrt{(\sqrt{x}-3)^2} - \sqrt{x} = |\sqrt{x}-3| - \sqrt{x}\end{aligned}$$

Kako je po uslovu zadatka $x > 9 \Rightarrow \sqrt{x} > 3 \iff \sqrt{x} - 3 > 0$ to je $|\sqrt{x}-3| = \sqrt{x}-3$ te se za vrednost izraza dalje dobija

$$|\sqrt{x}-3| - \sqrt{x} = \sqrt{x} - 3 - \sqrt{x} = -3.$$

---

4. Ⓑ Važi

$$\begin{aligned}\cos^2\frac{x+y}{2} - \sin^2\frac{x-y}{2} &= \frac{1}{2}(1+\cos(x+y)) - \frac{1}{2}(1-\cos(x-y)) \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos(x+y) + \cos(x-y)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos x\cos y - \sin x \sin y + \cos x \cos y + \sin x \sin y\right) \\ &= \cos x \cos y\end{aligned}$$

gde smo koristili trigonometrijske identitete

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos\alpha)$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos\alpha)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$$

5.Ⓐ Jednačina

$$\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}} = 10$$

je definisana u skupu realnih brojeva za $x > 0$. Sada kvadriranjem leve i desne strane imamo

$$x^{\log\sqrt{x}} = 10^2$$

i uzimanjem logaritma obe strane, dalje dobijamo

$$\log x^{\log\sqrt{x}} = \log 10^2$$

$$\log\sqrt{x}\cdot\log x = 2$$

$$\frac{1}{2}\log x\cdot\log x = 2 \iff (\log x)^2 = 4 \iff \log x = \pm 2 = \log 10^{\pm 2}$$

$$x = 10^{\pm 2} \Rightarrow x_1 = 10^{-2},\ x_2 = 10^2$$

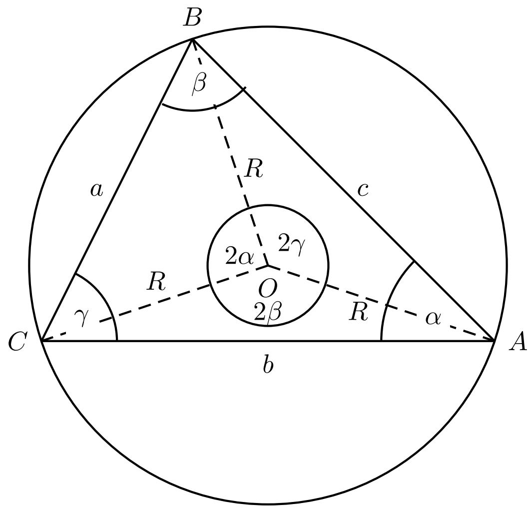
(oba rešenja ispunjavaju uslov $x > 0$)

Sada se za proizvod rešenja ove jednačine ima

$$x_1\cdot x_2 = 10^{-2}\cdot 10^2 = 10^0 = 1.$$

6.Ⓐ

Površina trougla ABC se može izraziti zbirom površina jednakokrakih trouglova ABO, BCO i ACO, od kojih svaki ima krake jednake poluprečniku opisanog kruga R. Primetimo da uglovi zahvaćeni kracima predstavljaju centralne uglove nad tetivama kruga (koje odgovaraju stranicama trougla ABC) i da su kao takvi dvostruko veći od periferijskih uglova nad istim tetivama (koji odgovaraju uglovima trougla α, β, γ). Sada sledi (videti sliku)



$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}R^2\sin 2\alpha + \frac{1}{2}R^2\sin 2\beta + \frac{1}{2}R^2\sin 2\gamma \\ &= \frac{1}{2}R^2(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma) \end{aligned}$$

Dalje koristimo $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$ odnosno

$$\begin{aligned} \sin 2\gamma &= \sin 2(\pi - (\alpha+\beta) = \sin(-2(\alpha+\beta)) \\ &= -\sin 2(\alpha+\beta) = -\sin 2\alpha\cos 2\beta - \sin 2\beta\cos 2\alpha \end{aligned}$$

te imamo

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma &= \sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\alpha\cos 2\beta - \sin 2\beta\cos 2\alpha \\ &= \sin 2\alpha\cdot(1-\cos 2\beta) + \sin 2\beta\cdot(1-\cos 2\alpha) \\ &= \sin 2\alpha\cdot 2\sin^2\beta + \sin 2\beta\cdot 2\sin^2\alpha \\ &= 4\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta + 4\sin\beta\cos\beta\sin^2\alpha \\ &= 4\sin\alpha\sin\beta(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha) \\ &= 4\sin\alpha\sin\beta(\sin(\alpha+\beta)) \\ &= 4\sin\alpha\sin\beta(\sin(\pi-(\alpha+\beta))) = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \end{aligned}$$

Sada se za površinu konačno dobija izraz

$$P = \frac{1}{2}R^2(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma) = \frac{1}{2}R^2\cdot 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

7.Ⓑ

$$9^{|3x-1|} = 3^{8x-2}$$
$$3^{2|3x-1|} = 3^{8x-2}$$
$$2|3x-1| = 2(4x-1) \iff |3x-1| = 4x-1$$

Kako važi

$$|3x-1| = \begin{cases} 3x-1, \text{ za } 3x-1>0 \iff x>\dfrac{1}{3} \\ -3x+1, \text{ za } 3x-1 \leq 0 \iff x \leq \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Sledi

- $x > \dfrac{1}{3}$:
$$|3x-1| = 2x-1 \Rightarrow 3x-1 = 4x-1 \iff x = 0$$
Međutim ovo rešenje ne pripada skupu $x > \dfrac{1}{3}$ te u ovom slučaju jednačina nema rešenja $x \in \emptyset$.
- $x \leq \dfrac{1}{3}$:
$$|3x-1| = 4x-1 \Rightarrow -3x+1 = 4x-1 \iff 7x = 2 \iff x = \frac{2}{7}.$$
Kako je $\dfrac{2}{7} < \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ to ovo rešenje pripada zadatom skupu.

Dakle, zadata jednačina ima samo jedno rešenje.

8.Ⓐ

- $f_1(x) = 1,\ x \in \mathbb{R}$
- $f_2(x) = \dfrac{|\sin x|}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \dfrac{|\sin x|}{|\sin x|} = 1,\ |\sin x| \neq 0 \iff x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $f_3(x) = \dfrac{|\cos x|}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \dfrac{|\cos x|}{|\cos x|} = 1,\ |\cos x| \neq 0 \iff x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \wedge x \neq \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $f_4(x) = \tan x \cdot \cot x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \cdot \dfrac{\cos x}{\sin x} = 1, \sin x \neq 0 \wedge \cos x \neq 0 \iff x \neq k\pi \wedge x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \wedge x \neq \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Dakle, funkcije su definisane na različitim skupovima realnih brojeva, te među zadatim funkcijama nema međusobno jednakih.

9.Ⓔ Rešavanjem sistema jednačina

$$y = kx + n$$
$$x^2 + y^2 = 4$$

nalazimo tačke u kojima prava $y = kx + n$ preseca zadati krug. Smenom prve jednačine u drugoj imamo kvadratnu jednačinu

$$x^2 + (kx+n)^2 = 4 \iff (1+k^2)x^2 + 2knx + n^2 - 4 = 0$$

Prava će biti tangenta na krug (imati samo jednu zajedničku tačku preseka/dodira) ako prethodna kvadratna jednačina ima samo jedno rešenje. To je ispunjeno kada je diskriminanta ove kvadratne jednačine jednak nuli, odnosno za

$$D = b^2 - 4ac = (2kn)^2 - 4(1+k^2)(n^2-4) = 0$$
$$4k^2n^2 - 4(n^2 - 4 + k^2n^2 - 4k^2) = 0$$
$$16k^2 - 4n^2 + 16 = 0$$

Na sličan način se dobija uslov da je prava $y = kx + n$ tangenta na elipsu $2x^2 + 5y^2 = 10$

$$2x^2 + 5(kx+n)^2 - 10 = 0$$
$$(2+5k^2)x^2 + 10knx + 5n^2 - 10 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (10kn)^2 - 4(2+5k^2)(5n^2-10) = 0$$
$$100k^2n^2 - 4(10n^2 - 20 + 25k^2n^2 - 50k^2)$$
$$20k^2 - 4n^2 + 8 = 0$$

Rešavanjem sistema dobijenih kvadratnih jednačina

$$16k^2 - 4n^2 + 16 = 0$$
$$20k^2 - 4n^2 + 8 = 0$$

dalje sledi

$$4k^2 - 8 = 0 \iff k^2 = 2$$
$$16 \cdot 2 - 4n^2 + 16 = 0 \iff n^2 = 12$$

Sada je konačno

$$k^2 + n^2 = 2 + 12 = 14.$$

10.Ⓔ Ako su $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$ i x_3 rešenja kubne jednačine

$$x^3 + x^2 + ax + b = 0$$

tada je ispunjeno

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$$

odnosno

$$x^3 + x^2 + ax + b = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Kako je

$$\begin{aligned}(x - x_1)(x - x_2) &= (x - (1-\sqrt{2}))(x - (1+\sqrt{2})) = x^2 - (1 - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2}) + (1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) \\ &= x^2 - 2x + (1^2 - (\sqrt{2})^2) = x^2 - 2x - 1\end{aligned}$$

to dalje imamo

$$\begin{aligned}x^3 + x^2 + ax + b &= (x^2 - 2x - 1)(x - x_3) \\ &= x^3 - 2x^2 - x - x_3x^2 + 2x_3x + x_3 \\ &= x^3 - (x_3+2)x^2 + (2x_3 - 1)x + x_3\end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenta polinoma uz stepen x^2 sa leve i desne strane jednačine dobijamo da za treće rešenje date jednačine mora da važi

$$-(x_3 + 2) = 1 \iff x_3 = -3$$

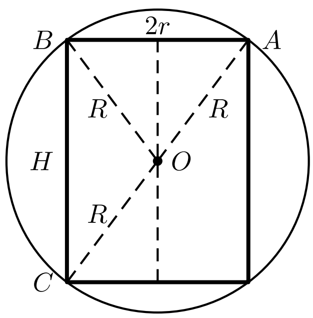
Sada je traženi proizvod rešenja zadate jednačine

$$x_1x_2x_3 = (1-\sqrt{2}) \cdot (1+\sqrt{2}) \cdot (-3) = (1^2 - (\sqrt{2})^2) \cdot (-3) = (-1) \cdot (-3) = 3.$$

11.Ⓑ

Na slici je prikazana ravan koja sadrži centar lopte O poluprečnika R kao i centre osnova u njoj upisanog valjka, poluprečnika r i visine H. Primenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao ABC dobijamo

$$(2R)^2 = (2r)^2 + H^2 \iff (2\sqrt{3})^2 = 4r^2 + H^2 \iff r^2 = 3 - \frac{1}{4}H^2$$



Zapremina upisanog valjka se sada može predstaviti u funkciji njegove visine H kao

$$V = B \cdot H = r^2\pi H = \pi\left(3H - \frac{1}{4}H^3\right)$$

Zapremina će biti maksimalna za maksimalnu vrednost funkcije

$$f(H) = 3H - \frac{1}{4}H^3$$

koja se dobija u tački $H = H_0$ u kojoj je prvi izvod ove funkcije jednak nuli. Sledi

$$f'(H) = \left(3H - \frac{1}{4}H^3\right)' = 3 - \frac{3}{4}H^2$$

$$f'(H_0) = 0 \Rightarrow 3 - \frac{3}{4}H_0^2 = 0 \iff H_0 = 2.$$

12.©

$$(\cos x)^{\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2}} = 1,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Imamo dve mogućnosti

- $\cos x = 1 \Rightarrow x = 0$
- $\sin^2 x - \dfrac{3}{2}\sin x + \dfrac{1}{2} = 0 \wedge \cos x \neq 0$

  Smenom $t = \sin x \in [0, 1)$ za $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ova jednačina postaje

  $$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

  i rešenja ove kvadratne jednačine su

  $$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ 1 \end{cases}$$

  Kako $t_2 = 1 \notin [0, 1)$ to je $t_1 \in [0, 1)$ jedino rešenje koje ispunjava uslov. Dalje sledi

  $$t = \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

  Na kraju, proveravamo $\cos x = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$, što je takođe ispunjeno.

Dakle, zadata jednačina ima dva rešenja na intervalu $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{\pi}{6}.$$

13.©

$$(x-1)\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0$$

U skupu realnih brojeva za jednačinu mora da važi uslov

$$x^2 - x - 2 \geq 0 \iff (x+1)(x-2) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$$

Kako je po definiciji

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0$$

da bi proizvod sa $(x-1)$ bio nenegativan, potrebno je da važi

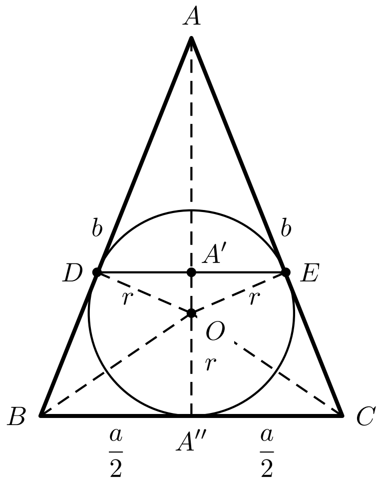
$$x - 1 \geq 0 \iff x \geq 1$$

Primetimo, da je jednakost u gornjoj nejednačini ispunjena za $x = -1$ i $x = 2$ te se za skup svih realnih brojeva x dobija

$$x = -1 \vee x = -2 \vee x \in [-2, +\infty)$$

$$x \in \{-1\} \cup [2, +\infty).$$

14. Ⓓ Na slici je prikazan jednakokraki trougao ABC sa osnovicom $a = BC = 2$ i kracima $b = AB = AC = 3$ i u njemu upisani krug poluprečnika r. Označimo traženu dužinu duži $d = DE$. Površina trougla ABC se može izraziti u obliku zbira površina trouglova ABO, BCO i ACO od kojih svaki ima visinu r nad odgovarajućim stranicama a, b, b, redom, te važi



$$P = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}br = \frac{1}{2}(a+2b)r$$

Za površinu istog trougla važi

$$P = \frac{1}{2}ah$$

gde je $h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$ visina trougla ABC nad osnovicom $a = BC$. Za dužinu poluprečnika upisanog kruga se dobija

$$\frac{1}{2}(a+2b)r = \frac{1}{2}ah \iff r = \frac{ah}{a+2b} = \frac{2\cdot 2\sqrt{2}}{2+6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Iz sličnosti trouglova $AA''B$ i ADO imamo

$$\frac{a/2}{h} = \frac{r}{AD} \Rightarrow AD = \frac{2rh}{a}$$

A iz sličnosti trouglova $AA''B$ i $AA'D$

$$\frac{AD}{d/2} = \frac{b}{a/2} \iff d = AD\frac{a}{b} = \frac{2rh}{a}\frac{a}{b} = \frac{2rh}{b}$$

odakle sledi

$$d = \frac{2rh}{b} = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\sqrt{2}}{3} = \frac{4}{3}.$$

---

15. Ⓓ Imamo

- tri različita proizvoda fabrike A: a_1, a_2, a_3
- četiri različita proizvoda fabrike B: b_1, b_2, b_3, b_4
- pet različitih proizvoda fabrike C: c_1, c_2, c_3, c_4, c_5

Ove proizvode treba rasporediti tako da su ispunjeni sledeći uslovi

- proizvodi fabrike B su jedan pored drugog
- proizvodi fabrike C su jedan pored drugog
- nikoja dva proizvoda fabrike A nisu jedan pored drugog

To znači da se proizvodi fabrike B uvek nalaze zajedno u jednoj grupi:

$$\overline{b}_g = b_{i_1}b_{i_2}b_{i_3}b_{i_4}, \quad i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{1,2,3,4\},\ i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_4$$

i broj ovakvih različitih grupa je 4!.

Slično, proizvodi fabrike C su uvek zajedno u jednoj grupi

$$\overline{c}_g = c_{i_1}c_{i_2}c_{i_3}c_{i_4}c_{i_5}, \quad i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 \in \{1,2,3,4,5\},\ i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_4 \neq i_5$$

dok je broj ovakvih različitih grupa 5!.

Da tri proizvoda fabrike A nikad nisu jedan pored drugog, potrebno je da između njih uvek bude grupa $\overline{b}_g$ ili $\overline{c}_g$, odnosno, imamo sledeće moguće rasporede

$$a_{i_1}\overline{b}_g a_{i_2}\overline{c}_g a_{i_3} \text{ ili } a_{i_1}\overline{c}_g a_{i_2}\overline{b}_g a_{i_3}$$

gde je $i_1, i_2, i_3 \in \{1,2,3\}$, $i_1 \neq i_2 \neq i_3$. Broj načina na koji tri proizvoda fabrike A možemo rasporediti na 3 različite pozicije je 3! i pritom, proizvode fabrike B u grupi $\overline{b}_g$ možemo rasporediti na 4! načina, a proizvode fabrike C u grupi $\overline{c}_g$ na 5! načina. Istovremeno, grupe $\overline{b}_g$ i $\overline{c}_g$ možemo rasporediti na dve pozicije između proizvoda fabrike A na 2! različitih načina. Sledi da je ukupan broj različitih rasporeda koji zadovoljavaju uslove zadatka jednak

$$2!3!4!5!.$$

16.Ⓐ

$$2^x 4^y = 32 \iff 2^x 2^{2y} = 32 \iff 2^{x+2y} = 2^5 \iff x + 2y = 5$$

$$\log(x-y)^2 - 2\log 2 = 0 \iff \log(x-y)^2 = \log 2^2 \iff (x-y)^2 = 2^2 \iff |x-y| = 2$$

Sada imamo dva slučaja

- $x > y$:

$$|x-y| = 2 \Rightarrow x - y = 2 \iff y = x - 2$$

  što smenom u prvoj jednačini daje

$$x + 2y = 5 \Rightarrow x + 2(x-2) = 5 \iff 3x = 9 \iff x = 3$$

$$y = x - 2 = 3 - 2 = 1$$

- $x \leq y$:

$$|x-y| = 2 \Rightarrow x - y = -2 \iff y = x + 2$$

  što smenom u prvoj jednačini daje

$$x + 2y = 5 \Rightarrow x + 2(x+2) = 5 \iff 3x = 1 \iff x = \frac{1}{3}$$

$$y = x + 2 = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$$

Dakle, jednačina ima dva realna rešenja

$$(x,y) \in \left\{(3,1), \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)\right\}.$$

17.Ⓑ Kompleksni broj $z = x + iy$ se može predstaviti preko apsolutne vrednosti

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

i ugla

$$\varphi = \arctan\frac{y}{x}$$

na sledeći način

$$z = x + iy = re^{i\varphi}.$$

Imamo

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3} = r_1 e^{i\varphi_1}$$

gde je

$$r_1 = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\varphi_1 = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

odnosno

$$z_2 = \sqrt{3} - i = r_2 e^{i\varphi_2}$$

gde je

$$r_2 = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\varphi_2 = \arctan\frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$$

Dakle

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

te dalje sledi

$$z_1^9 + z_2^9 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^9 + \left(2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^9 = 2^9\left(e^{3i\pi} + e^{-\frac{3}{2}i\pi}\right)$$

Kako je

$$e^{3i\pi} = \cos 3\pi + i\underbrace{\sin 3\pi}_{=0} = \cos(\pi + 2\pi) = \cos\pi = -1$$

$$e^{-\frac{3}{2}i\pi} = \underbrace{\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)}_{=0} - i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i\cdot(-1) = i$$

to se konačno dobija

$$z_1^9 + z_2^9 = 2^9\left(e^{3i\pi} + e^{-\frac{3}{2}i\pi}\right) = 2^9(-1+i).$$

---

18. Ⓐ Zadati zbir možemo predstaviti na sledeći način

$$\begin{aligned}1 + 11 + \cdots + \underbrace{11\ldots1}_{n} &= (1) + (1+10) + (1+10+100) + \cdots + (1+10+100+\cdots+10^{n-1})\\ &= s_1 + s_2 + \cdots + s_n\end{aligned}$$

gde je

$$s_k = 1 + 10 + 100 + \cdots + 10^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots n$$

Pošto je

$$s_k = 1 + 10^1 + 10^2 + \cdots + 10^{k-1} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{k-1} = \frac{q^k - 1}{q - 1}$$

gde smo označili $q = 10$, to dalje sledi

$$s_k = \frac{q^k - 1}{q - 1} = \frac{10^k - 1}{9}$$

Dalje imamo

$$\begin{aligned}1 + 11 + \cdots + \underbrace{11\ldots1}_{n} &= s_1 + s_2 + \cdots + \cdots s_{n-1}\\ &= \frac{10^1 - 1}{9} + \frac{10^2 - 1}{9} + \frac{10^3 - 1}{9} + \cdots + \frac{10^n - 1}{9}\\ &= \frac{1}{9}\left(10^1 + 10^2 + \cdots + 10^n - \underbrace{1 - 1 - 1 - \cdots - 1}_{n}\right)\\ &= \frac{1}{9}\left(10(1 + 10^1 + \cdots + 10^{n-1}) - n\right)\\ &= \frac{1}{9}\left(10\cdot\frac{10^n - 1}{10 - 1} - n\right)\\ &= \frac{1}{9}\left(\frac{10^{n+1} - 10}{9} - n\right)\\ &= \frac{1}{81}\left(10^{n+1} - 10 - 9n\right).\end{aligned}$$

Naravno, zadatak se može rešiti isprobavanjem vrednosti za $n = 1, 2, 3$, poređenjem dobijenog rezultata sa datim rešenjima i eliminacijom pogrešnih odgovora.

19. Ⓓ

$$\frac{\cos x}{\cos 2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = 2\cos x \iff 2\cos^2 x - 1 = 2\cos x$$

$$2\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$$

Smenom $t = \cos x \in [-1, 1]$ dalje se dobija kvadratna jednačina

$$2t^2 - 2t - 1 = 0$$

čija su rešenja

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Kako je $t_2 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} > 1$, to ovo ne može biti rešenje jednačine. Dakle preostaje

$$t_1 = \cos x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

odnosno

$$\cos 2x = 2\cos x = 1 - \sqrt{3}.$$

Dalje sledi

$$\begin{aligned}\cos 4x = \cos 2(2x) &= \cos^2 2x - \sin^2 2x = 2\cos^2 2x - 1\\ &= 2(1-\sqrt{3})^2 - 1 = 2(1+3-2\sqrt{3}) - 1 = 7 - 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

Sada se za vrednost y dobija

$$\frac{\cos 2x}{\cos 4x} = \frac{2}{y} \Rightarrow y = 2\frac{\cos 4x}{\cos 2x}$$

$$y = 2\frac{\cos 4x}{\cos 2x} = 2\frac{7-4\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = 2\frac{(7-4\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = 2\frac{7+7\sqrt{3}-4\sqrt{3}-12}{1-3} = -(-5+3\sqrt{3}) = 5-3\sqrt{3}.$$

---

20. Ⓒ Neka je $a_m = 2$, $a_n = \sqrt{6}$ i $a_p = \dfrac{9}{2}$ $m, n, p \in \mathbb{N}$, $p > n > m$. Ispitujemo sledeće hipoteze

- a_m, a_n, a_p su članovi aritmetičke progresije.

  Tada je

  $$a_m = a_1 + (m-1)d, a_n = a_1 + (n-1)d, a_p = a_1 + (p-1)d$$

  te sledi

  $$a_n - a_m = (n-m)d,\ a_p - a_m = (p-m)d \Rightarrow \frac{a_n - a_m}{a_p - a_m} = \frac{n-m}{p-m}$$

  Kako je

  $$\frac{a_n - a_m}{a_p - a_m} = \frac{\sqrt{6}-2}{\frac{9}{2}-2} = \frac{2\sqrt{6}-4}{7}$$

  to je leva strana jednačine $\dfrac{a_n - a_m}{a_p - a_m} = \dfrac{n-m}{p-m}$ iracionalni broj. Istovremeno, $m, n, p \in \mathbb{N}$ su prirodni brojevi, pa je desna strana jednačine racionalni broj, što je kontradikcija. Dakle, zadati brojevi nisu članovi aritmetičke progresije bilo da je ona rastuća ($d > 0$) ili opadajuća ($d < 0$).

- a_m, a_n, a_p su članovi geometrijske progresije.

  Tada je

  $$a_m = a_1 a^{m-1}, a_n = a_1 q^{n-1}, a_p = a_1 q^{p-1}$$

  te sledi

  $$\frac{a_n}{a_m} = \frac{\sqrt{6}}{2} = q^{n-m} \Rightarrow q = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^{\frac{1}{n-m}}$$

  $$\frac{a_p}{a_m} = \frac{9}{4} = q^{p-m} \Rightarrow q = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{p-m}}$$

Iz poslednje dve jednačine se dobija

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{p-m}} = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^{\frac{1}{n-m}} \Rightarrow \frac{9}{4} = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^{\frac{p-m}{n-m}}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \left(\frac{6^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{p-m}{n-m}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{p-m}{2(n-m)}}$$

$$\frac{p-m}{2(n-m)} = 2 \Rightarrow \frac{p-m}{n-m} = 4$$

Kako postoje prirodni brojevi m, n, p, $p > n > m$ takvi da je gornja jednačina ispunjena, to su a_m, a_n, a_p članovi geometrijske progresije.

- a_m, a_n, a_p su članovi niza sa opštim članom $b_n = \dfrac{9n}{2} + \dfrac{1}{n}$, $(n = 1, 2, \ldots)$.

  Kako su svi članovi niza b_n racionalni za $n \in \mathbb{N}$, dok je jedan zadati broj $a_n = \sqrt{6}$ iracionalan, to zadati broj ne može biti član ovog niza.

- a_m, a_n, a_p su članovi niza sa opštim članom $b_n = \dfrac{2+\sqrt{6}}{n} - 1$, $(n = 1, 2, \ldots)$.

  Kako su svi članovi niza b_n iracionalni za $n \in \mathbb{N}$, dok je $a_m = 2$ prirodan broj i $a_p = \dfrac{9}{2}$ racionalan broj, to zadati brojevi ne mogu biti članovi ovog niza.

KLASIFIKACIONI ISPIT IZ MATEMATIKE ZA UPIS NA ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET, FIZIČKI FAKULTET I FAKULTET ZA FIZIČKU HEMIJU

1. Vrednost izraza $\dfrac{\sqrt{(-7)^2}+\sqrt{-(-1)^3}}{\sqrt[3]{2^3}-\sqrt[3]{(-2)^3}}$ je:

(A) 1 (B) 2
(C) 3 (D) 4
(E) izraz nema smisla (N) Ne znam

2. Ako je $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ i $a \neq b$, vrednost izraza $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}}$ je:

(A) $\dfrac{a+b}{b-a}$ (B) $\dfrac{a+b}{a-b}$ (C) $\dfrac{a-b}{a+b}$ (D) $\dfrac{b-a}{a+b}$ (E) $\dfrac{ab}{a^2-b^2}$ (N) Ne znam

3. Ako su a i b katete, a c hipotenuza pravouglog trougla, onda je poluprečnik upisanog kruga tog trougla jednak:

(A) $\dfrac{2}{3}(a+b+c)$ (B) $\dfrac{1}{3}(a+b+c)$ (C) $\dfrac{1}{2}(b+c-a)$ (D) $\dfrac{1}{2}(a+c-b)$ (E) $\dfrac{1}{2}(a+b-c)$ (N) Ne znam

4. Rastojanje presečne tačke pravih $2x-y=3$ i $x-2y=0$ od centra kruga $(x-6)^2+(y-4)^2=9$ je:

(A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4 (E) 3 (N) Ne znam

5. Ako je zbir prva tri člana aritmetičke progresije 42, a zbir prvih šest članova 48, onda je zbir prvih deset članova:

(A) 90 (B) 54 (C) 60 (D) 0 (E) -4 (N) Ne znam

6. Ako je $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{3}{4}$ i $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$, onda je $\sin 2\alpha$ jednako:

(A) $\dfrac{24}{25}$ (B) $\dfrac{12}{25}$ (C) $-\dfrac{24}{25}$ (D) $-\dfrac{12}{25}$ (E) $\dfrac{3}{5}$ (N) Ne znam

7. Ako je ostatak deljenja polinoma $P(x)=x^3+9x^2+ax+b$ binomom $x+1$ jednak 4, a ostatak deljenja binomom $x-1$ jednak 24, onda je zbir $a+b$ jednak:

(A) -14 (B) -12 (C) 0 (D) 12 (E) 14 (N) Ne znam

8. Neka je tačka E središte stranice BC kvadrata $ABCD$ stranice a i $CF \perp DE$, $F \in DE$. Površina trougla DCF je:

(A) $\dfrac{1}{3}a^2$ (B) $\dfrac{1}{4}a^2$ (C) $\dfrac{1}{5}a^2$ (D) $\dfrac{1}{6}a^2$ (E) $\dfrac{1}{7}a^2$ (N) Ne znam

9. Skup svih vrednosti realnog parametra m za koje je zbir kvadrata rešenja jednačine $x^2-2(3m-1)x+2m+3=0$ jednak zbiru njenih rešenja je:

(A) $(-\infty,\infty)$ (B) $[0,\infty)$ (C) $\left\{0,\dfrac{7}{18},1\right\}$ (D) $\left\{0,\dfrac{7}{18}\right\}$ (E) $\emptyset$ (N) Ne znam

10. Osnova piramide $SABCD$ je kvadrat $ABCD$ stranice $a=20\,\text{cm}$, a visina piramide je $H=SA=21\,\text{cm}$. Površina omotača piramide je (u cm^2):

(A) 960 (B) 1000 (C) 1121 (D) 1200 (E) 1260 (N) Ne znam

11. Zbir rešenja jednačine $x^{3-\log_{10}\frac{x}{3}} = 900$ je:

(A) 130 (B) 100 (C) 70 (D) 30 (E) 10 (N) Ne znam

12. Broj rešenja jednačine $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$ na segmentu $[0, 2\pi]$ je:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) > 3 (N) Ne znam

13. Nejednakost $x + 3 \geq \dfrac{4}{2-x}$ je tačna ako i samo ako x pripada skupu:

(A) $[-2, 2)$ (B) $(-\infty, -2] \cup [1, 2)$

(C) $[1, 2)$ (D) $[-2, 1] \cup (2, \infty)$

(E) $(2, \infty)$ (N) Ne znam

14. Trougao ABC je zadat koordinatama svojih temena: $A(1,1)$, $B(5,4)$, $C\left(0, \dfrac{7}{3}\right)$. Dužina visine $h_C = CC'$, $C' \in AB$ je:

(A) $\dfrac{4}{3}$ (B) 1 (C) $\dfrac{5}{3}$ (D) 2 (E) $\dfrac{7}{3}$ (N) Ne znam

15. Ako je $(2x - 5i) + (zy + 2xi) = -23 + 3yi$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$, onda je zbir $x + y$ jednak:

(A) 4.5 (B) -4.5 (C) 5 (D) -5 (E) 6 (N) Ne znam

16. Proizvod rešenja jednačine $\sqrt[3]{25+x} + \sqrt[3]{3-x} = 4$ je:

(A) -48 (B) 48 (C) -24 (D) 24 (E) 16 (N) Ne znam

17. Visina H i izvodnica s prave kupe odnose se kao $35 : 37$. Ako je površina kupe $P = 588\pi\,\mathrm{cm}^2$, onda je njena zapremina V jednaka (u cm^3):

(A) 588π (B) 1176π (C) 1480π (D) 1680π (E) 1995π (N) Ne znam

18. Od deset učenika treba izabrati ekipu od šest učenika, pri čemu među tih 10 kandidata postoje 2 koji ne mogu biti zajedno u ekipi. Broj načina na koji se to može učiniti je:

(A) 84 (B) 112 (C) 210 (D) 105 (E) 140 (N) Ne znam

19. Ako je $x = \cos\alpha \cdot \cos\beta$ i $y = \sin\alpha \cdot \sin\beta$, onda je maksimalna vrednost izraza $x^2 + y^2$ jednaka:

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\dfrac{3}{2}$ (D) 2 (E) $\dfrac{5}{2}$ (N) Ne znam

20. Prirodni brojevi od 1 do 100 zapisani su bez razdvajanja i tako je dobijen broj $a = 12345\ldots9899100$. Precrtati njegovih 100 cifara tako da preostale cifre, čitane redom, grade najveći mogući broj. Za zbir s tako precrtanih cifara važi:

(A) $100 < s \leq 300$ (B) $300 < s \leq 400$

(C) $400 < s \leq 500$ (D) $500 < s \leq 600$

(E) $s > 600$ (N) Ne znam

REŠENJA

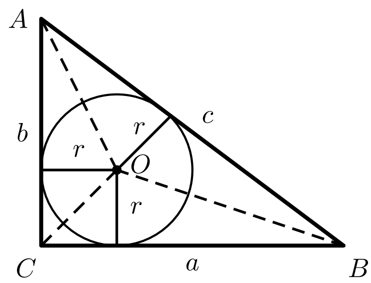
1.Ⓑ

$$\frac{\sqrt{(-7)^2}+\sqrt{-(-1)^3}}{\sqrt[3]{2^3}-\sqrt[3]{(-2)^3}}=\frac{7+1}{2-(-2)}=\frac{8}{4}=2.$$

2.Ⓐ

$$a,b\in\mathbb{R}\backslash\{0\},\ a\neq b\Rightarrow$$

$$\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}}=\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}}\cdot\frac{ab}{ab}=\frac{b+a}{b-a}.$$



3.Ⓔ Površina pravouglog trougla ABC sa katetama a i b, kao na slici, data je izrazom

$$P=\frac{1}{2}ab$$

Ova površina se može izraziti kao zbir površina trouglova AOB, BOC i AOC, gde je O centar kruga upisanog u ovaj trougao i r poluprečnik upisanog kruga (koji odgovara visini trouglova AOB, BOC i AOC, nad stranicama AB, BC, i AC, redom). Sada važi

$$P=P_{AOB}+P_{BOC}+P_{AOC}=\frac{1}{2}cr+\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br=\frac{1}{2}(a+b+c)r$$

Iz prethodne dve jednačine se za poluprečnik upisanog kruga ima

$$r=\frac{ab}{a+b+c}$$

Na osnovu Pitagorine teoreme za pravougli trougao ABC se dobija

$$c^2=a^2+b^2$$

te dalje sledi

$$(a+b+c)(a+b-c)=(a+b)^2-c^2=a^2+2ab+b^2-c^2=2ab$$

što smenom u izrazu za poluprečnik upisanog kruga konačno daje

$$r=\frac{ab}{a+b+c}=\frac{1}{2}\frac{2ab}{a+b+c}=\frac{1}{2}\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{a+b+c}=\frac{1}{2}(a+b-c).$$

4.Ⓒ Tačka u kojoj se seku dve prave nalazi se rešenjem sistema jednačina tih dveju pravih

$$\left.\begin{array}{r}2x-y=3\\x-2y=0\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{c}2x-y=3\\x=2y\end{array}\right\}\rightarrow 2(2y)-y=3\iff y=1\wedge x=2y=2$$

Dakle, prave se seku u tački $(x_P,y_P)=(2,1)$. Jednačina kruga poluprečnika R sa centrom u tački (x_c,y_c) data je izrazom

$$(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=R^2$$

Kako je zadata jednačina kruga

$$(x-6)^2+(y-4)^2=9$$

to je njegov centar $(x_c,y_c)=(6,4)$. Sada se za rastojanje između tačaka $(x_P,y_P)=(2,1)$ i $(x_c,y_c)=(6,4)$ dobija

$$d=\sqrt{(x_c-x_P)^2+(y_c-y_P)^2}=\sqrt{(6-2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5.$$

5.Ⓓ Neka je aritmetička progresija data izrazom

$$a_n = a_1 + (n-1)d,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Zbir prvih k članova te progresije se može predstaviti na sledeći način

$$\begin{aligned} S_k &= a_1 + a_2 + \cdots + a_k \\ &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (k-1))d \\ &= ka_1 + d(1 + 2 + \cdots + (k-1)) \\ &= ka_1 + d\frac{(k-1+1)(k-1)}{2} \\ &= ka_1 + \frac{k(k-1)}{2}d \end{aligned}$$

Prema uslovima zadatka imamo

$$S_3 = 3a_1 + 3d = 42 \Rightarrow a_1 + d = 14$$

$$S_6 = 6a_1 + 15d = 48 \Rightarrow 2a_1 + 5d = 16$$

Rešavanjem sistema prethodnih dveju jednačina imamo

$$2(14-d) + 5d = 16 \iff 3d = -12 \iff d = -4$$

$$a_1 = 14 - d = 18$$

Sada se za zbir privh deset članova ove progresije ima

$$S_{10} = 10a_1 + 45d = 10 \cdot 18 - 45 \cdot 4 = 180 - 180 = 0.$$

6.Ⓐ

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4},\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$$

Koristeći sledeće identitete

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos^2\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha\cos^2\alpha$$

i

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$$

dobijamo

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{24}{25}.$$

7.Ⓔ Kako polinom $P(x) = x^3 + 9x^2 + ax + b$ pri deljenju binomom $x - 1$ daje ostatak 24, to sledi

$$P(x) = (x-1)Q(x) + 24$$

gde je $Q(x)$ količnik deljenja polinoma $P(x)$ binomom $x - 1$. Za $x = 1$ iz prethodne jednačine dobijamo

$$P(1) = (1-1)Q(1) + 24 = 24$$

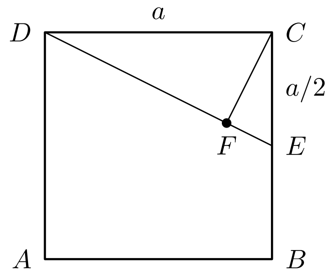
Kako je s druge strane

$$P(1) = 1^3 + 9 \cdot 1^2 + a \cdot 1 + b = 10 + a + b$$

to iz prethodne dve jednakosti dobijamo

$$10 + a + b = 24 \iff a + b = 14.$$

8.Ⓒ Iz Pitagorine teoreme za pravougli trougao DCE za dužinu hipotenuze DE dobijamo



$$DE = \sqrt{CD^2 + CE^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

Iz sličnosti pravouglih trouglova DCE i DFC imamo

$$\frac{FD}{CD} = \frac{CD}{DE} \Rightarrow FD = \frac{CD^2}{DE} = \frac{a^2}{\frac{a}{2}\sqrt{5}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

i takođe

$$\frac{CF}{CD} = \frac{CE}{DE} \Rightarrow CF = \frac{CE \cdot CD^2}{DE} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a}{\frac{a}{2}\sqrt{5}} = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

Sada se za površinu pravouglog trougla DFC dobija

$$P = \frac{1}{2} CF \cdot DF = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{\sqrt{5}} \cdot \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5} a^2.$$

9.Ⓓ Ako su x_1 i x_2 rešenja kvadratne jednačine

$$x^2 - 2(3m-1)x + 2m + 3 = 0$$

tada je ispunjeno

$$x^2 - 2(3m-1)x + 2m + 3 = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2$$

te se izjednačavanjem koeficijenata polinoma sa leve i desne strane gornje jednačine dobija

$$x_1 + x_2 = 2(3m-1)$$

$$x_1 x_2 = 2m + 3$$

Iz uslova zadatka sledi

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1 + x_2$$

Kako je

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$$

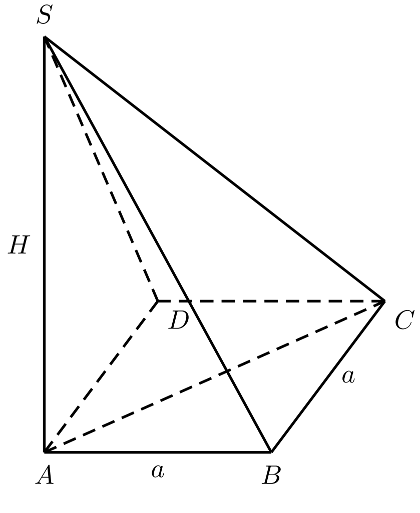
to se iz gornjih jednakosti dalje dobija

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = x_1 + x_2$$

$$(2(3m-1))^2 - 2(2m+3) = 2(3m-1)$$

$$36m^2 - 28m - 2 = 6m - 2 \iff 36m^2 - 34m = 0 \iff m(18m - 17) = 0 \iff m = 0 \vee m = \frac{17}{18}.$$

10.Ⓑ Na osnovu Pitagorine teoreme za hipotenuzu pravouglog trougla SAB dobijamo



$$SB^2 = SB^2 + SA^2 = a^2 + H^2$$

Slično, za hipotenuzu pravouglog trougla SAD imamo

$$SD^2 = SD^2 + SA^2 = a^2 + H^2$$

i najzad, za hipotenuzu pravouglog trougla SAC sledi

$$SC^2 = AC^2 + SA^2 = AB^2 + BC^2 + SA^2 = a^2 + a^2 + H^2 = 2a^2 + H^2$$

Primetimo, da kako važi

$$SC^2 = \underbrace{SA^2 + AB^2}_{=SB^2} + BC^2 = SB^2 + BC^2$$

to je trougao SBC pravougli, sa pravim uglom kod temena B.

Slično, kako važi

$$SC^2 = AC^2 + SA^2 = AD^2 + CD^2 + SA^2 = \underbrace{AD^2 + SA^2}_{=SD^2} + CD^2 = SD^2 + CD^2$$

to je trougao SDC takođe pravougli, sa pravim uglom kod temena D.

Površina omotača piramide jednaka je zbiru površina pravouglih trouglova SAB, SBC, SDC i SAD, odnosno

$$M = P_{SAB} + P_{SBC} + P_{SDC} + P_{SAD} = \frac{1}{2}SA \cdot AB + \frac{1}{2}SB \cdot BC + \frac{1}{2}SD \cdot CD + \frac{1}{2}SA \cdot AD$$

$$M = \frac{1}{2}\left(H \cdot a + \sqrt{a^2 + H^2} \cdot a + \sqrt{a^2 + H^2} \cdot a + H \cdot a\right) = a\left(H + \sqrt{a^2 + H^2}\right)$$

$$M = 20\left(21 + \sqrt{20^2 + 21^2}\right) = 20\left(21 + \sqrt{841}\right) = 20\,(21 + 29) = 1000.$$

---

11. Ⓐ

$$x^{3-\log_{10}\frac{x}{3}} = 900 \qquad \big/ \log_{10}(\cdot)$$

$$\log_{10}\left(x^{3-\log_{10}\frac{x}{3}}\right) = \log_{10} 900$$

$$\left(3 - \log_{10}\frac{x}{3}\right) \cdot \log_{10} x = \log_{10} 3^2 \cdot 10^2$$

$$(3 - \log_{10} x + \log_{10} 3) \cdot \log_{10} x = 2\log_{10} 3 + 2$$

Uvođenjem smene $t = \log_{10} x$, jednačina postaje

$$(\log_{10} 3 + 3 - t)t = 2\log_{10} 3 + 2 \iff t^2 - (3 + \log_{10} 3)t + 2(1 + \log_{10} 3) = 0$$

Rešenja ove kvadratne jednačine su

$$t_{1/2} = \frac{3 + \log_{10} 3 \pm \sqrt{(3 + \log_{10} 3)^2 - 8(1 + \log_{10} 3)}}{2}$$

odnosno, kako je

$$(3+\log_{10} 3)^2 - 8(1+\log_{10} 3) = 9 + 6\log_{10} 3 + (\log_{10} 3)^2 - 8 - 8\log_{10} 3 = (\log_{10} 3)^2 - 2\log_{10} 3 + 1 = (1 - \log_{10} 3)^2$$

i

$$\sqrt{(3 + \log_{10} 3)^2 - 8(1 + \log_{10} 3)} = \sqrt{(1 - \log_{10} 3)^2} = |1 - \log_{10} 3| = 1 - \log_{10} 3$$

to se za rešenja dalje dobija

$$t_{1/2} = \frac{3 + \log_{10} 3 \pm (1 - \log_{10} 3)}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2}(3 + \log_{10} 3 - 1 + \log_{10} 3) = 1 + \log_{10} 3 \\ \frac{1}{2}(3 + \log_{10} 3 + 1 - \log_{10} 3) = 2 \end{cases}$$

Sledi

$$t_1 = 1 + \log_{10} 3 \Rightarrow \log_{10} x_1 = 1 + \log_{10} 3 = \log_{10} 10 + \log_{10} 3 = \log_{10}(3 \cdot 10) = \log_{10} 30 \Rightarrow x_1 = 30$$

$$t_2 = 2 \Rightarrow \log_{10} x_2 = 2 = \log_{10} 10^2 \Rightarrow x_2 = 100$$

Zbir rešenja zadate jednačine je

$$x_1 + x_2 = 30 + 100 = 130.$$

---

12. Ⓒ

$$2\cos^2 x + 3\sin x = 0,\ x \in [0, 2\pi]$$

$$2\cos^2 x + 3\sin x = 2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x = -2\sin^2 x + 3\sin x + 2 \Rightarrow 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$$

Uvođenjem smene $t = \sin x$ dalje dobijamo kvadratnu jednačinu

$$2t^2 - 3t - 2 = 0$$

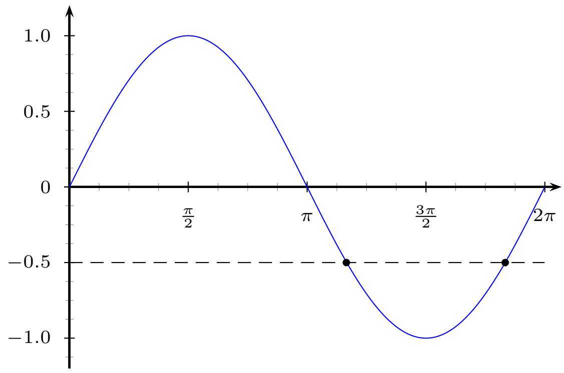
čija su rešenja

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \\ \\ 2 \end{cases}$$

Kako je $\sin x \leq 1$ to $t_2 = \sin x_2 = 2$ nema rešenja u skupu realnih brojeva. Sada preostaje

$$t_1 = \sin x_1 = -\frac{1}{2}$$

i ova jednačina ima dva rešenja na zadatom intervalu $x \in [0, 2\pi]$ (videti sliku).



13.Ⓓ Nejednačina

$$x + 3 \geq \frac{4}{2-x}$$

je definisana u skupu realnih brojeva za $2 - x \neq 0 \iff x \neq 2$. Dalje važi

$$\frac{4}{2-x} - (x+3) \leq 0 \iff \frac{4-(2-x)(x+3)}{2-x} = \frac{4-(2x-x^2+6-3x)}{2-x} = \frac{4-(-x^2-x+6)}{2-x} = \frac{x^2+x-2}{2-x} \leq 0$$

Poslednja nejednakost se može predstaviti u obliku

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$$

gde je

$$P(x) = x^2 + x - 2$$
$$Q(x) = 2 - x$$

$x \in$	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$Q(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$\frac{P(x)}{Q(x)}$	$+$	0	$-$	0	$+$	∞	$-$

- Ispitujemo znak funkcije $P(x)$:

$$P(x) > 0 \iff x^2 + x - 2 > 0 \iff (x-1)(x+2) > 0 \iff x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$$

dakle

$$P(x) > 0, \text{ za } x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$$
$$P(x) \leq 0, \text{ za } x \in [-2, 1]$$

- Za znak funkcije $Q(x)$ dobijamo:

$$Q(x) > 0 \iff 2 - x > 0 \iff x < 2$$

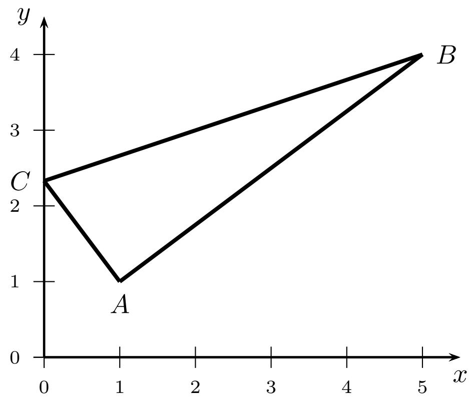
odnosno

$$Q(x) \leq 0, \text{ za } x \geq 2$$

U tabeli su sumirani prethodni rezultati za znak funkcija $P(x)$, $Q(x)$ i leve strane (LS) nejednakosti Dakle, nejednakost je ispunjena za

$$x \in [-2, 1] \cup (2, +\infty).$$

14.Ⓒ Na slici je prikazan trougao ABC sa koordinatama temena $A(1,1)$, $B(5,4)$ i $C\left(0, \frac{7}{3}\right)$. Dužine stranica ovog trougla se dobijaju iz jednačine udaljenosti dve tačke čije su koordinate poznate:



$$d_{PQ}^2 = (x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2.$$

Dakle imamo:

$$AC^2 = (1-0)^2 + \left(1 - \frac{7}{3}\right)^2 = 1 + \frac{16}{9} = \frac{25}{9} \Rightarrow AC = \frac{5}{3}$$

$$AB^2 = (5-1)^2 + (4-1)^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow AB = 5$$

$$BC^2 = (5-0)^2 + \left(4 - \frac{7}{3}\right)^2 = 5^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 = AB^2 + AC^2$$

Kako je $BC^2 = AB^2 + AC^2$ to je trougao ABC pravougli sa pravim uglom u temenu A. Dakle, visina trougla h_c nad stranicom BC odgovara kateti $AC = \frac{5}{3}$.

15.Ⓑ

$$(2x - 5i) + (7y + 2xi) = -23 + 3yi$$

Razdvajanjem realnih i imaginarnih delova u prethodnoj jednačini ($x, y \in \mathbb{R}$), dobijamo

$$(2x + 7y + 23) + (2x - 3y - 5)i = 0$$

Da bi ova jednačina bila ispunjena, potrebno je da realni i imaginarni delovi budu jednaki nuli, odnosno, dobijamo sistem jednačina

$$\left.\begin{array}{c} 2x + 7y + 23 = 0 \\ 2x - 3y - 5 = 0 \end{array}\right\}$$

Oduzimanjem ovih dveju jednačina dobijamo

$$10y + 28 = 0 \iff y = -2.8$$

odnosno za vrednost x:

$$2x = 3y + 5 = 3(-2.8) + 5 = -8.4 + 5 = -3.4 \iff x = -1.7$$

Sada je zbir $x + y$ jednak:

$$x + y = -1.7 - 2.8 = -4.5.$$

16.Ⓐ

$$\sqrt[3]{25 + x} + \sqrt[3]{3 - x} = 4 \iff \sqrt[3]{25 + x} = 4 - \sqrt[3]{3 - x} \quad \Big/^3$$

$$25 + x = 4^3 - 3 \cdot 4^2 \cdot \sqrt[3]{3 - x} + 3 \cdot 4 \cdot \left(\sqrt[3]{3 - x}\right)^2 - \left(\sqrt[3]{3 - x}\right)^3$$

$$25 + x = 64 - 48\sqrt[3]{3 - x} + 12\left(\sqrt[3]{3 - x}\right)^2 - 3 + x$$

$$12\left(\sqrt[3]{3 - x}\right)^2 - 48\sqrt[3]{3 - x} + 36 = 0 \Big/ : 12$$

$$\left(\sqrt[3]{3-x}\right)^2 - 4\sqrt[3]{3-x} + 3 = 0$$

Smenom $t = \sqrt[3]{3-x}$ dalje sledi

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \iff (t-1)(t-3) = 0 \iff t_1 = 1 \vee t_2 = 3$$

odnosno

- $\sqrt[3]{3-x_1} = 1 \iff 3 - x_1 = 1 \iff x_1 = 2$
- $\sqrt[3]{3-x_2} = 3 \iff 3 - x_2 = 3^3 \iff x_2 = -24$

te se za proizvod rešenja jednačine dobija

$$x_1 x_2 = 2(-24) = -48.$$

17.Ⓔ Prema Pitagorinoj teoremi, dužina izvodnice prave kupe poluprečnika osnove R i visine H se može predstaviti u obliku

$$s^2 = R^2 + H^2$$

odakle imamo

$$R^2 = s^2 - H^2 = \left(\frac{37}{35}H\right)^2 - H^2 = \frac{12^2}{35^2}H^2 \Rightarrow R = \frac{12}{35}H$$

Površina ove prave kupe data je izrazom

$$P = R\pi(R+s) = \frac{12}{35}\pi H\left(\frac{12}{35} + \frac{37}{35}\right)H = \pi H^2 \frac{12 \cdot 49}{35^2}$$

Kako je prema uslovu zadatka $P = 588\pi$ to dalje imamo

$$H^2 = 588\frac{35^2}{12 \cdot 49} = 35^2 \Rightarrow H = 35.$$

Sada za zapreminu kupe dobijamo

$$V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}R^2\pi H = \frac{1}{3}\frac{12^2}{35^2}H^2\pi H = \frac{1}{3}\frac{12^2}{35^2}H^3 = \frac{1}{3}\frac{12^2}{35^2}35^3 = 48 \cdot 35\pi = 1680\pi.$$

18.Ⓔ Označimo sa A i B dva učenika u grupi od 10 kandidata, koji ne mogu biti zajedno u ekipi. Ekipu od šest učenika u kojoj A i B ne mogu biti zajedno, možemo formirati na sledeća tri načina

- Ni učenik A ni učenik B nisu u izabranoj ekipi. Dakle, biramo 6 učenika iz grupe od preostalih 8 kandidata, što možemo učiniti na $\binom{8}{6}$ različitih načina.
- Samo je učenik A u ekipi, dok učenik B nije u ekipi. Sada biramo 5 učenika (učenik A je već izabran) iz grupe od 8 preostalih kandidata, što možemo učiniti na $\binom{8}{5}$ različitih načina.
- Samo je učenik B u ekipi, dok učenik A nije u ekipi. Sada biramo 5 učenika (učenik B je već izabran) iz grupe od 8 preostalih kandidata, što možemo učiniti na $\binom{8}{5}$ različitih načina.

Dakle, ukupan broj načina na koji možemo izabrati ekipu od šest učenika koja zadovoljava uslove zadatka je

$$\binom{8}{6} + 2\binom{8}{5} = \binom{8}{8-6} + 2\binom{8}{8-5} = \binom{8}{2} + 2\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7}{2} + 2\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 28 + 2 \cdot 56 = 140.$$

19.Ⓑ Važi

$$x = \cos\alpha\cos\beta$$
$$y = \sin\alpha\sin\beta$$

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= \cos^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta \\
&= \cos^2\alpha\cos^2\beta + (1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta) \\
&= \cos^2\alpha\cos^2\beta + 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta \\
&= 1 - \cos^2\alpha(1-\cos^2\beta) - \cos^2\beta(1-\cos^2\alpha)
\end{aligned}$$

Označimo $a = \cos^2\alpha \in [0,1]$ i $b = \cos^2\beta \in [0,1]$. Dalje dobijamo

$$x^2 + y^2 = 1 - a(1-b) - b(1-a)$$

Važe sledeće nejednakosti

$$0 \le a \le 1 \iff 0 \ge -a \ge -1 \iff 1 \ge 1-a \ge 0$$
$$0 \le b \le 1 \iff 0 \ge -b \ge -1 \iff 1 \ge 1-b \ge 0$$

odakle dobijamo

$$a \ge 0 \land 1-b \ge 0 \Rightarrow a(1-b) \ge 0$$
$$b \ge 0 \land 1-a \ge 0 \Rightarrow b(1-a) \ge 0$$

odnosno

$$a(1-b) \ge 0 \land b(1-a) \ge 0 \Rightarrow a(1-b) + b(1-a) \ge 0$$

Najzad dobijamo

$$a(1-b)+b(1-a) \ge 0 \iff -a(1-b)-b(1-a) \le 0 \iff 1-a(1-b)-b(1-a) \le 1 \iff x^2+y^2 \le 1.$$

Dakle, maksimalna vrednost izraza $x^2 + y^2$ jednaka je 1.

20.Ⓑ Broj a je dobijen zapisivanjem prirodnih brojeva od 1 do 100 bez razdvajanja

$$a = 12345\ldots9899100$$

Treba precrtati njegovih 100 cifara tako da preostale cifre čitane redom, grade najveći mogući broj. Najveći mogući broj će se dobiti ako na pozicijama najveće težine ostanu najveće moguće cifre, (odnosno devetke, kadgod je to moguće). Dakle, precrtavanje vršimo na sledeći način

	broj precrtanih cifara:	zbir precrtanih cifara (s) :
$\cancel{1}\cancel{2}\cancel{3}\cancel{4}\cancel{5}\cancel{6}\cancel{7}\cancel{8}9$	8	36
$\cancel{1}\cancel{0}\cancel{1}\cancel{1}\cancel{1}\cancel{2}\cancel{1}\cancel{3}\cancel{1}\cancel{4}\cancel{1}\cancel{5}\cancel{1}\cancel{6}\cancel{1}\cancel{7}\cancel{1}\cancel{8}\cancel{1}9$	19	46
$\cancel{2}\cancel{0}\cancel{2}\cancel{1}\cancel{2}\cancel{2}\cancel{2}\cancel{3}\cancel{2}\cancel{4}\cancel{2}\cancel{5}\cancel{2}\cancel{6}\cancel{2}\cancel{7}\cancel{2}\cancel{8}\cancel{2}9$	19	56
$\cancel{3}\cancel{0}\cancel{3}\cancel{1}\cancel{3}\cancel{2}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{4}\cancel{3}\cancel{5}\cancel{3}\cancel{6}\cancel{3}\cancel{7}\cancel{3}\cancel{8}\cancel{3}9$	19	66
$\cancel{4}\cancel{0}\cancel{4}\cancel{1}\cancel{4}\cancel{2}\cancel{4}\cancel{3}\cancel{4}\cancel{4}\cancel{4}\cancel{5}\cancel{4}\cancel{6}\cancel{4}\cancel{7}\cancel{4}\cancel{8}\cancel{4}9$	19	76
$\cancel{5}\cancel{0}\cancel{5}\cancel{1}\cancel{5}\cancel{2}\cancel{5}\cancel{3}\cancel{5}\cancel{4}\cancel{5}\cancel{5}\cancel{5}6\cancel{5}7\cancel{5}8\cancel{5}9$	16	65
60616263646566676869	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
90919293949596979899100	0	0
	100	345

Dakle, $s = 345$ odnosno, $300 \le s < 400$.

KLASIFIKACIONI ISPIT IZ MATEMATIKE ZA UPIS NA ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET, FIZIČKI FAKULTET I FAKULTET ZA FIZIČKU HEMIJU

1. Ako je $x = \dfrac{\left(0.5 : 1.25 + \frac{7}{5} : 1\frac{4}{7} - \frac{3}{11}\right) \cdot 3}{\left(1.5 + \frac{1}{4}\right) : 18\frac{1}{3}}$, onda je:

(A) $x < 0$ (B) $0 \leq x \leq 10$ (C) $10 \leq x < 20$ (D) $20 \leq x < 30$ (E) $30 \leq x$ (N) Ne znam

2. Celobrojnih vrednosti parametra k za koje je rešenje jednačine $k(x-k) = 2x$ prirodan broj ima:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) više od 3 (N) Ne znam

3. Ako centar S upisanog kruga u jednakokraki trougao ABC ($AC = BC$) deli visinu CD, $D \in AB$, na dva dela tako da je $CS = 5$ cm i $SD = 3$ cm, onda je obim tog trougla jednak (u cm):

(A) 30 (B) 31 (C) 32 (D) 33 (E) $20 + 8\sqrt{2}$ (N) Ne znam

4. Vrednost izraza $\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 15^{\circ}} + \dfrac{1}{\sin 15^{\circ}}$ je:

(A) $4\sqrt{2}$ (B) 4 (C) 0 (D) -4 (E) $-4\sqrt{2}$ (N) Ne znam

5. Najviše jedna od pravih: $p_1 : y = -x + 7$; $p_2 : y = -x + 4$; $p_3 : y = x + 6$; $p_4 : y = x + 4$ je tangenta kruga $x^2 - 2x + y^2 - 2y = 6$. Koja?

(A) p_1 (B) p_2 (C) p_3 (D) p_4 (E) Nijedna (N) Ne znam

6. U jednom odeljenju ima dva puta više dečaka nego devojčica. Među devojčicama ima 20 % odličnih iz matematike, a među dečacima 5 %. Koliko procenata odličnih iz matematike ima u tom odeljenju?

(A) 10 % (B) 12.5 % (C) 15 % (D) 17.5 % (E) ≥ 22.5 % (N) Ne znam

7. Iz tačke A kružnice k poluprečnika 10 cm konstruisane su poluprave Ap i Aq takve da je $\angle pAq = 60^{\circ}$. Ako su B i C presečne tačke polupravih Ap i Aq i kružnice k, onda je dužina tetive BC jednaka (u cm):

(A) $10\sqrt{2}$ (B) $10\sqrt{3}$ (C) 10 (D) 14 (E) 17 (N) Ne znam

8. Deltoid $ABCD$ stranica $AB = BC = 3$ cm i $AD = CD = 4$ cm upisan je u krug. Dužina kraće dijagonale tog deltoida je:

(A) 4, cm (B) 6 cm (C) 4.8 cm (D) 2.4 cm (E) $2\sqrt{2}$ cm (N) Ne znam

9. Broj rešenja jednačine $|\log_{10} x| = |x - 9|$ je:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) veći od 3 (N) Ne znam

10. Na kružnici poluprečnika $r = 10$ cm date su tačke A, B, C, D tako da se tetive AC i BD seku pod pravim uglom. Zbir s dužina kraćih lukova AB i CD je (u cm):

(A) $0 < s \leq 15$ (B) $15 < s \leq 30$ (C) $30 < s \leq 45$ (D) $45 < s \leq 60$ (E) $s < 60$ (N) Ne znam

11. Ako je λ_0 vrednost parametra λ za koju je nejednakost $\dfrac{x^2+3x+\lambda}{x^2+x+1} < 2$ tačna za sve realne vrednosti x osim za jednu, onda λ_0 pripada:

(A) $(0,1]$ (B) $(1,2]$

(C) $(2,3]$ (D) $(3,4]$

(E) $(-\infty,0)\cup(4,\infty)$ (N) Ne znam

12. Broj rešenja jednačine $\cos^2 x - \dfrac{1}{2}\sin 2x = \dfrac{1}{2}$ na segmentu $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ je:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) veći od 3 (N) Ne znam

13. Ako je $\log_{14} 7 = a$ i $\log_{14} 5 = b$, onda je $\log_{35} 28$ jednak:

(A) $\dfrac{2-a}{a+b}$ (B) $\dfrac{a-2}{a+b}$ (C) $\dfrac{a+b}{a-2}$ (D) $\dfrac{a+b}{2-a}$ (E) $\dfrac{1-a}{a+b}$ (N) Ne znam

14. Šifra na sefu određena je nizom od pet dekadnih cifara. Koliko ima šifara čije cifre čine strogo opadajući niz?

(A) 30240 (B) 15120 (C) 7560 (D) 1890 (E) 252 (N) Ne znam

15. Pravougli trougao ABC kateta $a = 3\,\text{cm}$ i $b = 4\,\text{cm}$ rotira oko prave koja sadrži teme C pravog ugla i paralelna je hipotenuzi c. Zapremina V tako dobijenog tela je (u cm^3):

(A) 28.8π (B) 9.6π (C) 20.32π (D) 8.2π (E) 19.2π (N) Ne znam

16. Ako je $f : R \longrightarrow R$ i $f(x) + 2f(1-x) = x$ za svako $x \in \mathbb{R}$, onda je $f(x)$ jednako:

(A) $-x+\dfrac{2}{3}$ (B) $x-\dfrac{2}{3}$ (C) $x+\dfrac{2}{3}$ (D) $x-\dfrac{1}{3}$ (E) $x(1-x)$ (N) Ne znam

17. Suma binomnih koeficijenata članova na neparnim mestima u razlaganju binoma $\left(a \cdot \sqrt[5]{\dfrac{a}{3}} - \dfrac{b}{\sqrt[7]{a^3}}\right)^n$ jednaka je 2048. Član koji sadrži a^3 je:

(A) $-264a^3b^7$ (B) $264a^3b^7$ (C) $132a^3b^7$ (D) $-132a^3b^7$ (E) $256a^3b^9$ (N) Ne znam

18. Ako je jedan koren polinoma $x^3 - 2x + a$, $a \in \mathbb{R}$, kompleksni broj $1+i$, $i^2 = -1$, onda je realan koren tog polinoma jednak:

(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) -1 (E) -2 (N) Ne znam

19. Dat je sistem jednačina: $x + y = 2a + 1$, $xy = a^2 + 4a - \dfrac{1}{2}$, gde je a realan parametar. Ako su rešenja x i y ovog sistema realni brojevi, onda izraz $x^2 + y^2$ dostiže najmanju vrednost za:

(A) $a = 1$ (B) $a = \dfrac{1}{4}$ (C) $a = \dfrac{7}{4}$ (D) $a = -\dfrac{1}{4}$ (E) $a = -1$ (N) Ne znam

20. Jednačina $\sqrt{9-4x} = p - 2x$ ima tačno dva realna i različita rešenja ako i samo ako realni parameter p pripada:

(A) $\left(\dfrac{9}{4}, \dfrac{9}{2}\right)$ (B) $\left[\dfrac{9}{2}, 5\right)$ (C) $[5,6)$ (D) $[6,7)$ (E) $\left[0, \dfrac{9}{4}\right]$ (N) Ne znam

REŠENJA

1.Ⓔ

$$x = \frac{\left(0.5 : 1.25 + \frac{7}{5} : 1\frac{4}{7} - \frac{3}{11}\right)\cdot 3}{\left(1.5 + \frac{1}{4}\right) : 18\frac{1}{3}} = \frac{3\cdot\left(\frac{2}{5} + \frac{7}{5} : \frac{11}{7} - \frac{3}{11}\right)}{\left(\frac{15}{10} + \frac{1}{4}\right) : \frac{55}{3}} = \frac{\cancel{3}\cdot\left(\frac{2}{5} + \frac{7}{5}\cdot\frac{7}{11} - \frac{3}{11}\right)}{\frac{30+5}{20}\cdot\frac{\cancel{3}}{55}}$$

$$x = \frac{\frac{2}{5} + \frac{49-15}{55}}{\frac{35}{20\cdot 55}} = \frac{\frac{2}{5} + \frac{34}{55}}{\frac{35}{20\cdot 55}} = \frac{\frac{56}{55}}{\frac{35}{20\cdot 55}} = \frac{20\cdot 55\cdot 56}{35\cdot 55} = 32 > 30.$$

2.Ⓓ Zadata jednačina se može predstaviti u obliku sledeće kvadratne jednačine po promenljivoj k

$$k(x-k) = 2x \iff k^2 - xk + 2x = 0$$

i njena rešenja su

$$k_{1,2} = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 8x}}{2} = \frac{x \pm \sqrt{x(x-8)}}{2}$$

Da bi ova jednačina imala celobrojna rešenja, potrebno je da vrednost pod kvadratnim korenom kvadrat celog broja i da važi

$$x(x-8) \geq 0 \iff x \leq 0 \vee x \geq 8$$

Kako je x prirodan broj, to imamo $x \geq 8$. Dalje sledi:

- Za $x = 8$ dobijamo $x(x-8) = 0^2$ (kvadrat celog broja) i važi

  $k_{1,2} = \dfrac{8}{2} = 4$ (prirodan broj)

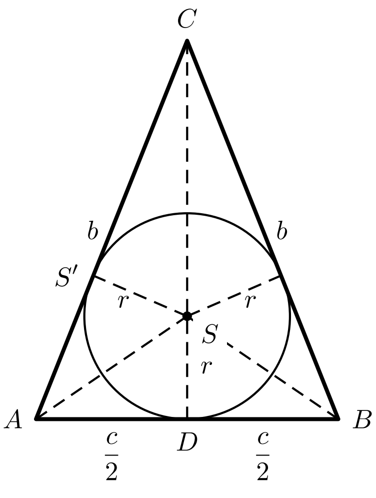
- Za $x = 9$ dobijamo $x(x-8) = 9 = 3^2$ (kvadrat celog broja) i važi

  $k_{3,4} = \dfrac{9 \pm 3}{2} = \begin{cases} 3 \\ 6 \end{cases}$

- Ne postoji prirodan broj $x > 9$ takav da je $x(x-8)$ kvadrat celog broja.

Dakle, jednačina ima tri celobrojna parametra $k = 3, 4, 6$ za koje su rešenja x prirodni brojevi.

3.Ⓓ Na slici je prikazan jednakokraki trougao ABC sa osnovicom $c = AB$ i kracima $b = AC = BC$ i u njemu upisani krug poluprečnika r. Centar upisanog kruga S deli visinu CD na dva dela, tako da je prema uslovu zadatka $CS = 5\,\mathrm{cm}$ i $r = SD = 3\,\mathrm{cm}$ i visina trougla nad osnovicom $h = CS + SD = 8\,\mathrm{cm}$.



Iz sličnosti trouglova ADC i $SS'C$ imamo jednakost

$$\frac{CS'}{CS} = \frac{CD}{AC} = \frac{h}{b}$$

gde primenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao $SS'C$ dobijamo

$$CS' = \sqrt{CS^2 - SS'^2} = \sqrt{CS^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

te se za dužinu katete b ima

$$b = h\frac{CS}{CS'} = 8\cdot\frac{5}{4} = 10$$

Konačno, iz pravouglog trougla ADC za dužinu osnovice $c = AB = 2AD$ dobijamo

$$AD^2 = AC^2 - CD^2 = b^2 - h^2 = \frac{c^2}{4} \iff c = 2\sqrt{b^2 - h^2} = 2\sqrt{10^2 - 8^2} = 2\sqrt{36} = 12$$

te je obim ovog trougla

$$O = 2b + c = 2\cdot 10 + 12 = 32\,\mathrm{cm}.$$

4.Ⓐ

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}}{\cos 15^o}+\frac{1}{\sin 15^o} &= \frac{\sqrt{3}\sin 15^o+\cos 15^o}{\sin 15^o\cos 15^o}\\
&= \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 15^o+\frac{1}{2}\cos 15^o\right)}{\frac{1}{2}\left(2\sin 15^o\cos 15^o\right)}\\
&= 4\frac{\cos 30^o\sin 15^o+\sin 30^o\cos 15^o}{\sin(2\cdot 15^o)}\\
&= 4\frac{\sin(30^o+15^o)}{\sin(30^o)}\\
&= 4\frac{\sin(45^o)}{\sin(30^o)} = 4\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2}
\end{aligned}$$

gde smo koristili identitete

$$\begin{aligned}
\sin 30^o &= \frac{1}{2}\\
\cos 30^o &= \frac{\sqrt{3}}{2}\\
\sin 45^o &= \frac{\sqrt{2}}{2}\\
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha\\
\sin(2\alpha) &= 2\sin\alpha\cos\alpha.
\end{aligned}$$

5.Ⓓ Neka je $y = kx + n$ jednačina tangente na krug $x^2 - 2x + y^2 - 2y = 6$. Dodirna tačka tangente i kruga nalazi se rešavanjem sistema njihovih jednačina

$$\left.\begin{array}{l} y = kx+n \\ x^2-2x+y^2-2y=6 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2-2x+(kx+n)^2-2(kx+n)=6 \iff (k^2+1)x^2+2(kn-k-1)x+n^2-2n-6=0$$

ova kvadratna jednačina će imati samo jedno rešenje (dodirnu tačku), ako je diskriminanta kvadratne jednačine jednaka nuli

$$D = b^2-4ac = 4(kn-k-1)^2-4(k^2+1)(n^2-2n-6)=0 \iff (kn-k-1)^2=(k^2+1)(n^2-2n-6)$$

Jedino prava $p_4 : y = x + 4$ sa $k = 1$ i $n = 4$ ispunjava ovaj uslov

$$(4-1-1)^2=(1+1)(16-8-6) \iff 2^2=2\cdot 2$$

i jedino je ova prava tangenta zadatog kruga.

6.Ⓐ Neka je x broj dečaka i y broj devojčica. Ukupan broj učenika u odeljenju je dakle $s = x + y$, odnosno, kako važi $x = 2y$ to sledi

$$s = x+y = 3y$$

Prema uslovu zadatka, 5 % dečaka i 20 % devojčica su odlični učenici, te je ukupan broj odličnih đaka

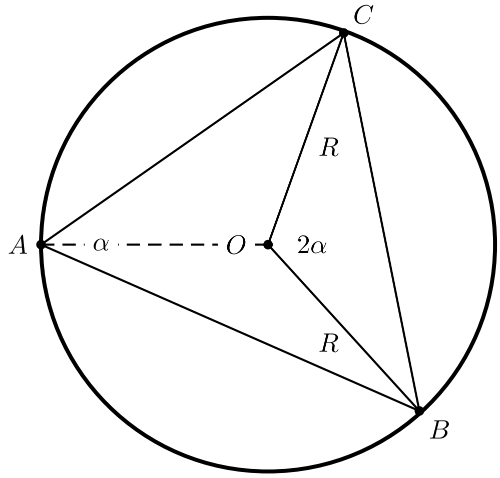
$$5\,\%x+20\,\%y = \frac{5}{100}x+\frac{20}{100}y = \frac{5}{100}2y+\frac{20}{100}y = \left(\frac{10}{100}+\frac{20}{100}\right)y = \frac{30}{100}y$$

što u procentima ukupnog broja đaka iznosi

$$\frac{\frac{30}{100}y}{s}\cdot 100\,\% = \frac{30}{100}\frac{y}{3y}\cdot 100\,\% = 10\,\%.$$

7.Ⓑ Na slici su prikazane poluprave Ap i Aq koje seku kružnicu poluprečnika $R = 10\,\text{cm}$ u tačkama B i C i za koje važi $\angle pAq = \angle BAC = \alpha = 60^{\circ}$. Relacija između centralnog $\angle BOC$ i perifernog $\angle BAC$ ugla nad tetivom BC je

$$\angle BOC = 2\angle BAC = 2\alpha = 120^{\circ}$$



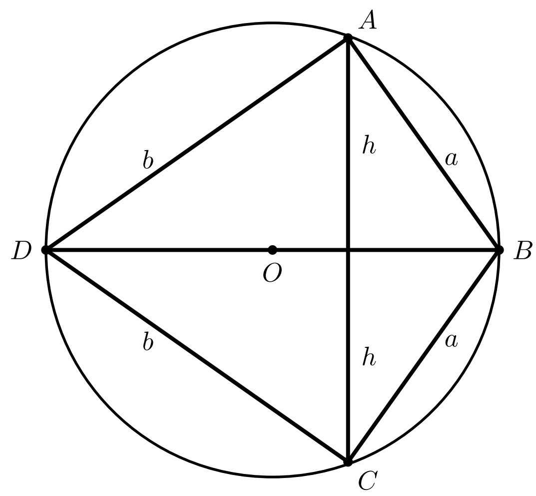
Sada se na osnovu kosinusne teoreme za jednakokraki trougao BOC sa kracima dužine $BO = CO = R$ za dužinu tetive BC dobija

$$\begin{aligned} BC^2 &= BO^2 + CO^2 - 2\cdot BO\cdot CO\cdot\cos\angle BOC \\ &= R^2 + R^2 - 2R^2\cos 120^{\circ} \\ &= 2R^2(1-\cos 120^{\circ}) = 2R^2(1-\cos(180^{\circ}-60^{\circ})) \\ &= 2R^2(1+\cos 60^{\circ}) = 2R^2\left(1+\frac{1}{2}\right) = 3R^2 = 300 \end{aligned}$$

$$BC = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}.$$

8.Ⓒ Na slici je prikazan zadati deltoid stranica $a = AB = BC = 3\,\text{cm}$ i $b = AD = CD = 4\,\text{cm}$ upisan u krug prečnika $BD = d$. Kako je $\angle BAD$ ugao nad prečnikom kruga, to je taj ugao prav, te iz Pitagorine teoreme za pravougli trougao BAD dobijamo

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 \Rightarrow d^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow d = 5.$$



Ako sa h označimo visinu pravouglih trouglova BAD i BCD nad hipotenuzom BD, onda se za površinu pravouglog trougla BAD i BCD dobijaju sledeće relacije

$$P = \frac{1}{2}d\cdot h \wedge P = \frac{1}{2}ab$$

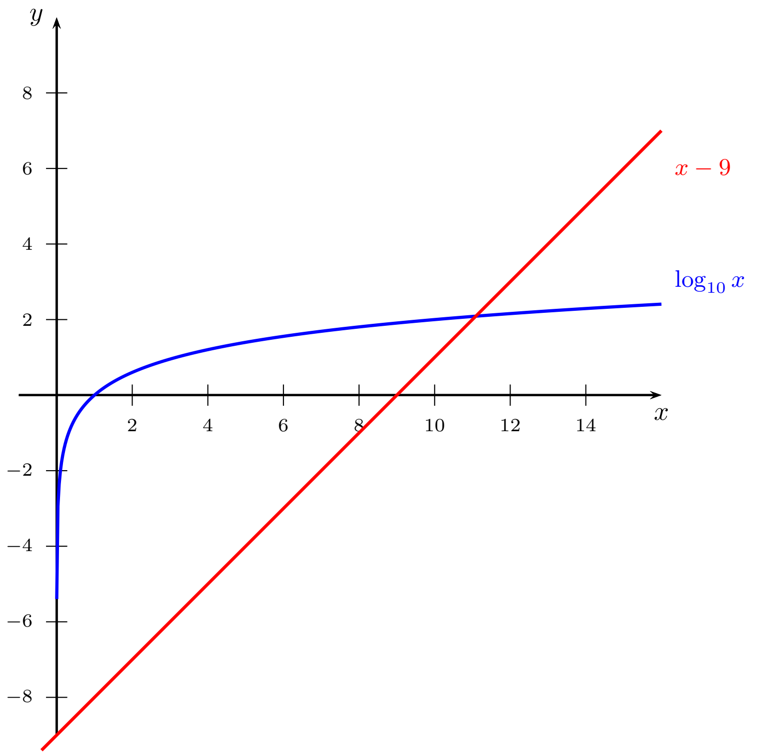
odakle se za visinu ima

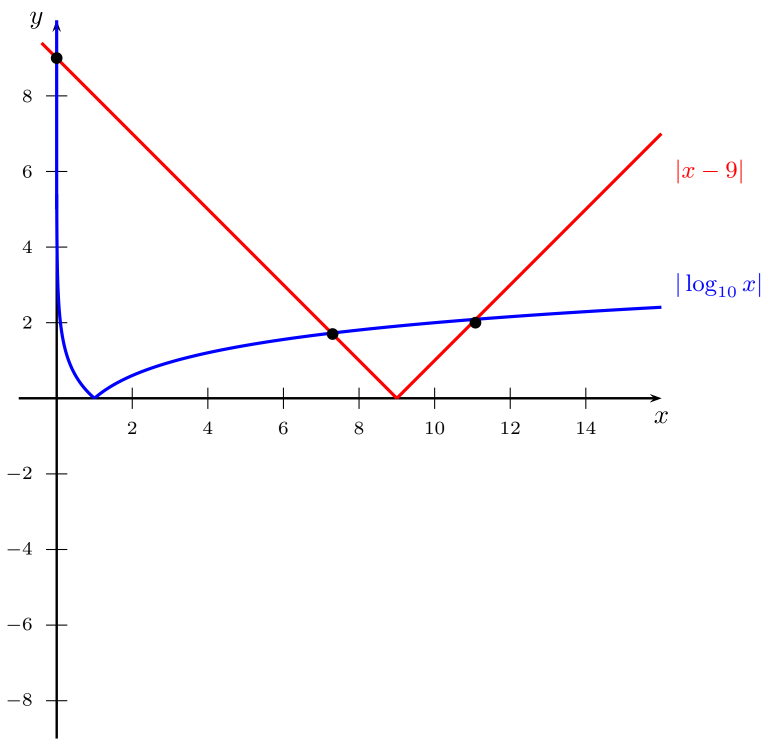
$$h = \frac{ab}{d}$$

i dužina kraće dijagonale AC iznosi

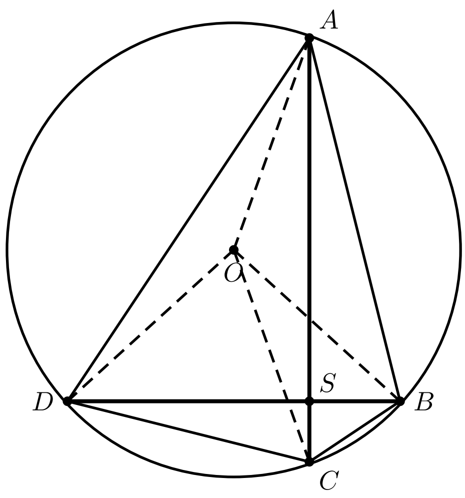
$$AC = 2h = \frac{2ab}{d} = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{5} = \frac{24}{5} = 4.8.$$

9. Ⓓ Broj rešenja ove jednačine ćemo tražiti grafički, kao što je ilustrovano na slikama ispod. Na gornjem grafiku su predstavljene logaritamska funkcija $\log_{10} x$ i linearna funkcija $x - 9$. Na donjem grafiku su predstavljene njihove apsolutne vrednosti $f(x) = |\log_{10} x|$ i $g(x) = |x - 9|$. U preseku ovih krivih nalazimo rešenje zadate jednačine $f(x) = g(x)$. Sa slike je očigledno da ove dve krive imaju tri presečne tačke odnosno da jednačina $f(x) = g(x)$ ima tri rešenja.





10.Ⓒ Na slici je prikazana kružnica poluprečnika r sa centrom u tački O. Tačke kružnice A, B, C, D su takve da se tetive AC i BD seku pod pravim uglom, odnosno



$$\sphericalangle BSC = \frac{\pi}{2}$$

Tražimo zbir dužina kraćih lukova $s = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}$, gde je

$$\overset{\frown}{AB} = r \cdot \sphericalangle AOB$$

$$\overset{\frown}{CD} = r \cdot \sphericalangle COD$$

odakle sledi

$$s = r(\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD)$$

$\sphericalangle AOB$ je centralni ugao nad tetivom AB, dok za njemu odgovarajući periferni ugao $\sphericalangle ACB$ važi

$$\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ACB$$

Slično za relaciju između centralnog ugla $\sphericalangle COD$ i njemu odgovarajućeg perifernog ugla $\sphericalangle CBD$ nad tetivom CD dobijamo

$$\sphericalangle COD = 2\sphericalangle CBD$$

Kako je prema uslovu zadatka $\sphericalangle BSC = \frac{\pi}{2}$ to se iz zbira uglova u pravouglom trouglu BSC dobija

$$\sphericalangle BSC + \sphericalangle CBD + \sphericalangle ACB = \pi \Rightarrow \sphericalangle ACB + \sphericalangle CBD = \frac{\pi}{2}$$

te se konačno za traženi zbir dužine lukova ima

$$s = r(\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD) = 2r(\sphericalangle ACB + \sphericalangle CBD) = 2 \cdot 10 \cdot \frac{\pi}{2} = 31.4$$

Dakle, tačan je odgovor $30 < s \leq 45$.

11.Ⓑ Iz zadate nejednakosti, dobijamo sledeću ekvivalentnu nejednakost

$$\frac{x^2 + 3x + \lambda}{x^2 + x + 1} < 2 \iff \frac{x^2 + 3x + \lambda - 2x^2 - 2x - 2}{x^2 + x + 1} < 0 \iff \frac{x^2 - x - (\lambda - 2)}{x^2 + x + 1} > 0$$

Kako je diskriminanta kvadratne funkcije u imeniocu $g(x) = x^2 + x + 1$ manja od nule

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 = -3 < 0$$

i koeficijent uz x^2 pozitivan, to je ova funkcija uvek pozitivna, tj. važi: $x^2 + x + 1 > 0$. Ovo se može dokazati i na sledeći način:

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0.$$

Dakle, znak racionalne funkcije iz gornje nejednakosti zavisi isključivo od znaka kvadratne funkcije u brojiocu $f(x) = x^2 - x - (\lambda - 2)$. Prema uslovima zadatka, potrebno je da izraz

$$f(x) > 0$$

bude ispunjen za sve realne brojeve x osim za jednu vrednost. Diskriminanta gornje kvadratne funkcije je

$$D = b^2 - 4ac = 1 + 4(\lambda - 2)$$

i neophodno je da ona bude manja od nule, kako bi važilo $f(x) > 0$ za svako x. Za vrednosti λ za koje je $D = 0$ imaćemo da kvadratna funkcija dodiruje x osu, te će postojati jedna vrednost x za koju je $f(x) = 0$ odnosno za koju gornja nejednačina nije ispunjena. Odavde sledi

$$D = 0 \iff 1 + 4(\lambda_0 - 2) = 0 \iff \lambda_0 = \frac{7}{4} \in [1, 2).$$

12.Ⓒ

$$\cos^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2},\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}(\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$\frac{1}{2}\cos^2 x - \frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x = 0$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \sin 2x$$

$$\cos 2x = \sin 2x \iff \operatorname{tg} 2x = 1,\ \cos 2x \neq 0$$

čija su rešenja

$$2x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Rešenja koja pripadaju intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ su

$$x_1 = \frac{\pi}{8},\ x_2 = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{8}$$

i za oba važi da je $\cos 2x_i \neq 0$, $i = 1, 2$.

13.Ⓐ

$$a = \log_{14} 7,\ b = \log_{14} 5$$

$$\log_{35} 28 = \frac{\log_{14} 28}{\log_{14} 35}$$

$$\log_{14} 35 = \log_{14} 5 \cdot 7 = \log_{14} 5 + \log_{14} 7 = a + b$$

$$\log_{14} 28 = \log_{14} 2 \cdot 14 = \log_{14} 2 + \log_{14} 14 = \log_{14}\frac{14}{7} + 1 = \log_{14} 14 - \log_{14} 7 + 1 = 1 - a + 1 = 2 - a$$

$$\Rightarrow \log_{35} 28 = \frac{\log_{14} 28}{\log_{14} 35} = \frac{2-a}{a+b}.$$

14.Ⓔ Tražimo broj različitih petocifrenih brojeva, $a_5a_4a_3a_2a_1$, $a_i \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 8, 9\}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ čije cifre čine strogo opadajući niz: $a_5 > a_4 > a_3 > a_2 > a_1$. Najveći takav broj je

$$a_5a_4a_3a_2a_1 = 98765$$

a najmanji broj koji ispunjava uslove je

$$a_5a_4a_3a_2a_1 = 43210$$

Primećujemo da mora da važi

$$0 \le a_1 \le 5$$

$$1 \le a_2 \le 6$$

$$2 \le a_3 \le 7$$

$$3 \le a_4 \le 8$$

$$4 \le a_5 \le 9$$

Razlikujemo sledeće moguće slučajeve

- $a_3 = 2:$

  Tada s desne strane ove cifre mora važiti $a_2 = 1$ i $a_0 = 0$ te je broj različitih mogućnosti sa desne strane jednak 1.

  S leve strane imamo sledeće mogućnosti

  - $a_4 = 3$: a_5 može biti bilo koja od cifara $4, 5, 6, 7, 8, 9$, odnosno imamo 6 različitih mogućnosti.
  - $a_4 = 4$: a_5 može biti bilo koja od cifara $5, 6, 7, 8, 9$, što je 5 različitih mogućnosti.
  - $a_4 = 5$: a_5 može biti bilo koja od cifara $6, 7, 8, 9$, što je 4 različitih mogućnosti.
  - $a_4 = 6$: a_5 može biti bilo koja od cifara $7, 8, 9$, što je 3 različitih mogućnosti.

- $a_4 = 7$: a_5 može biti bilo koja od cifara $8, 9$, što je 2 različite mogućnosti.
- $a_4 = 8$: a_5 može biti samo cifra 9, što je 1 mogućnost.

Dakle u slučaju $a_3 = 2$, imamo jednu mogućnost sa desne strane i $1+2+3+4+5+6$ mogućnosti sa leve strane, što je ukupno $(1+2+3+4+5+6)\cdot 1$ brojeva.

- $a_3 = 3$:

  Sada s desne strane ove cifre imamo sledeće mogućnosti

  - $a_2 = 2$: a_1 može biti bilo koja od cifara $0, 1$, što je 2 različite mogućnosti
  - $a_2 = 1$: a_1 može biti samo cifra 0, što je jedna mogućnost

  Dakle, sa desne strane imamo $(1+2)$ različitih mogućnosti.

  S leve strane imamo sledeće mogućnosti

  - $a_4 = 4$: a_5 može biti bilo koja od cifara $5, 6, 7, 8, 9$, što je 5 različitih mogućnosti.
  - $a_4 = 5$: a_5 može biti bilo koja od cifara $6, 7, 8, 9$, što je 4 različitih mogućnosti.
  - $a_4 = 6$: a_5 može biti bilo koja od cifara $7, 8, 9$, što je 3 različitih mogućnosti.
  - $a_4 = 7$: a_5 može biti bilo koja od cifara $8, 9$, što je 2 različite mogućnosti.
  - $a_4 = 8$: a_5 može biti samo cifra 9, što je 1 mogućnost.

  Dakle, sa leve strane imamo $(1+2+3+4+5)$ različitih mogućnosti.

  Znači u slučaju $a_3 = 3$, imamo $(1+2)$ mogućnosti sa desne strane i $(1+2+3+4+5)$ mogućnosti sa leve strane, što je ukupno $(1+2+3+4+5)\cdot(1+2)$ brojeva.

- $a_3 = 4$:

  Istim postupkom kao za slučajeve $a_3 = 3$ i $a_3 = 2$ se može pokazati da je broj različitih mogućnosti sa desne strane: $(1+2+3)$, odnosno sa leve strane: $(1+2+3+4)$, što je ukupno $(1+2+3+4)\cdot(1+2+3)$ različitih brojeva.

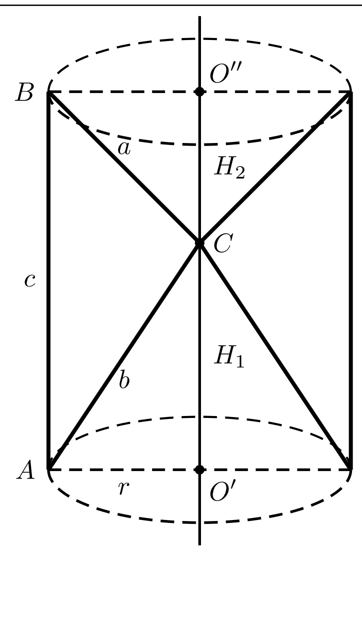
  Slično dobijamo za ostale mogućnosti za a_3, naime

- $a_3 = 5$: $(1+2+3)\cdot(1+2+3+4)$
- $a_3 = 6$: $(1+2)\cdot(1+2+3+4+5)$
- $a_3 = 7$: $1\cdot(1+2+3+4+5+6)$

Iz gornje analize sledi da je ukupan broj različitih petocifrenih brojeva čije cifre formiraju strogo opadajući niz dat izrazom

$$\begin{aligned}
&(1+2+3+4+5+6)\cdot 1+(1+2+3+4+5)\cdot(1+2)+(1+2+3+4)\cdot(1+2+3)\\
&+(1+2+3)\cdot(1+2+3+4)+(1+2)\cdot(1+2+3+4+5)+1\cdot(1+2+3+4+5+6)\\
&=2\left(\frac{7\cdot 6}{2}+\frac{3\cdot 2}{2}\cdot\frac{6\cdot 5}{2}+\frac{4\cdot 3}{2}\cdot\frac{5\cdot 4}{2}\right)\\
&=2(21+45+60)=2\cdot 126=252.
\end{aligned}$$

15.Ⓔ Na slici je prikazano telo koje se dobija rotacijom pravouglog trougla ABC oko ose koja prolazi kroz teme pravog ugla C i koja je paralelna hipotenuzi c. Telo je valjak poluprečnika osnove r i visine c iz kog su izdvojene dve kupe, obe poluprečnika r i visina H_1 i H_2 kao na slici.



Najpre, iz Pitagorine teoreme za pravougli trougao ABC dobijamo dužinu hipotenuze

$$c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow c = 5$$

Visina pravouglog trougla ABC nad hipotenuzom c odgovara poluprečniku osnove valjka r. Za površinu ovog trougla se ima

$$P = \frac{1}{2}ab \wedge P = \frac{1}{2}cr \Rightarrow ab = cr \iff r = \frac{ab}{c} = \frac{3\cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$$

Zapremina valjka je

$$V_v = r^2\pi c$$

dok su zapremine kupa

$$V_{k1} = \frac{1}{3}r^2\pi H_1$$

$$V_{k2} = \frac{1}{3}r^2\pi H_2$$

te se uzimajući u obzir $H_1 + H_2 = c$, za zapreminu dobijenog tela dobija

$$V = V_v - V_{k1} - V_{k2} = r^2\pi c - \frac{1}{3}r^2\pi(H_1 + H_2) = \frac{2}{3}r^2\pi c$$

$$V = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{12}{5}\right)^2\cdot\pi\cdot 5 = \frac{96}{5}\pi = 19.2\pi.$$

16.Ⓐ

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) + 2f(1-x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Uvedimo smenu $t = 1 - x \in \mathbb{R} \iff x = 1 - t$. Tada prethodna jednakost postaje

$$f(1-t) + 2f(t) = 1 - t$$

što je ekvivalentno jednakosti

$$f(1-x) + 2f(x) = 1 - x \iff f(1-x) = 1 - x - 2f(x)$$

Smenom poslednje jednakosti u zadatom izrazu dalje dobijamo

$$f(x) + 2f(1-x) = x \Rightarrow f(x) + 2(1 - x - 2f(x)) = x \iff -3f(x) = 3x - 2 \iff f(x) = -x + \frac{2}{3}.$$

17.Ⓐ Formula za n-ti razvoj binoma $x + y$ je data izrazom

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 \cdots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

Na neparnim mestima se nalaze sledeći binomni koeficijenti

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{2}, \binom{n}{4}, \binom{n}{6}, \ldots$$

Prema uslovu zadatka, njihova suma iznosi 2048. Dakle, treba naći vrednost stepena n za koju važi

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \ldots = 2048$$

Proverom možemo ustanoviti da je gornja jednačina ispunjena za $n = 12$:

$$\begin{aligned}
&\binom{12}{0} + \binom{12}{2} + \binom{12}{4} + \binom{12}{6} + \binom{12}{8} + \binom{12}{10} + \binom{12}{12}\\
&= \binom{12}{0} + \binom{12}{2} + \binom{12}{4} + \binom{12}{6} + \binom{12}{12-8} + \binom{12}{12-10} + \binom{12}{12-12}\\
&= 2\left(\binom{12}{0} + \binom{12}{2} + \binom{12}{4}\right) + \binom{12}{6}\\
&= 2\left(1 + \frac{12\cdot 11}{2} + \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 3\cdot 2}\right) + \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}\\
&= 2\,(1 + 66 + 495) + 924 = 2\cdot 562 + 924 = 1124 + 924 = 2048.
\end{aligned}$$

U našem slučaju je

$$x = a\sqrt[5]{\frac{a}{3}} = a \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{1}{5}} = 3^{-\frac{1}{5}}a^{\frac{6}{5}}$$

$$y = -\frac{b}{\sqrt[7]{a^3}} = -ba^{-\frac{3}{7}}$$

tako da za $k+1$ član u razvoju binoma imamo

$$\binom{n}{k}x^{n-k}y^k = \binom{12}{k}\left(3^{-\frac{1}{5}}a^{\frac{6}{5}}\right)^{12-k}\left(-ba^{-\frac{3}{7}}\right)^k$$

$$= (-1)^k\binom{12}{k}3^{-\frac{12-k}{5}}b^k a^{\frac{6}{5}(12-k)-\frac{3k}{7}}$$

Za član koji sadrži a^3 važi

$$a^{\frac{6}{5}(12-k)-\frac{3k}{7}} = a^3 \Rightarrow \frac{6}{5}(12-k) - \frac{3k}{7} = 3 \iff 7(72-6k) - 5\cdot 3k = 105 \iff 57k = 399 \iff k = 7$$

Dakle, za ovaj član imamo

$$\binom{12}{7}x^{12-7}y^7 = (-1)^7\binom{12}{7}3^{-\frac{12-7}{5}}b^7a^3 = -\binom{12}{5}3^{-1}a^3b^7 = -\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}\frac{1}{3}a^3b^7 = -264a^3b^7.$$

---

18. Ⓔ

Rešenje A:

Neka su x_1, x_2 i x_3 koreni polinoma $P(x) = x^3 - 2x + a$, $a \in \mathbb{R}$. Tada se ovaj polinom može predstaviti u sledećem obliku

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Prema uslovu zadatka, jedan koren ovog polinoma je kompleksan broj $x_1 = 1 + i$. Kako su koeficijenti polinoma relani brojevi, to se kompleksni koreni polinoma javljaju u kompleksno-konjugovanim parovima. Odnosno, ako je $x_1 = 1 + i$ koren polinoma, onda je i $x_2 = x_1^* = 1 - i$ takođe koren ovog polinoma. Sada imamo

$$x_1 + x_2 = 1 + i + 1 - i = 2$$

$$x_1x_2 = (1+i)(1-i) = 1^2 - i^2 = 2$$

odnosno

$$P(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = (x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2)(x-x_3) = (x^2 - 2x + 2)(x - x_3)$$

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - x_3x^2 + 2x_3x - 2x_3 = x^3 - (2+x_3)x^2 + 2(1+x_3) - 2x_3 = x^3 - 2x + a$$

Izjednačavanjem koeficijenata polinoma s leve i desne strane poslednje jednačine uz x^2 dobijamo

$$2 + x_3 = 0 \iff x_3 = -2.$$

Rešenje B:

Kako je $x_1 = 1 + i$ koren polinoma $P(x) = x^3 - 2x + a$, to važi

$$P(x_1) = 0 \Rightarrow P(1+i) = (1+i)^3 - 2(1+i) + a = 0$$

$$1^3 + 3\cdot i + 3\cdot i^2 + i^3 - 2 - 2i + a = 0 \iff 1 + 3i - 3 - i - 2 - 2i + a = 0 \iff a - 4 = 0 \iff a = 4$$

Sada sledi

$$P(x) = x^3 - 2x + 4 = x^3 - 4x + 2x + 4 = x(x^2-4) + 2(x+2) = x(x-2)(x+2) + 2(x+2) = (x+2)(x^2-2x+2)$$

odakle sledi da je $x = -2$ realni koren polinoma.

19. Ⓑ Rešavanjem sistema jednačina

$$x + y = 2a + 1 \iff y = 2a + 1 - x$$

$$xy = a^2 + 4a - \frac{1}{2}$$

dobijamo

$$xy = x(2a + 1 - x) = a^2 + 4a - \frac{1}{2} \iff x^2 - (2a + 1)x + a^2 + 4a - \frac{1}{2} = 0$$

Da bi ova kvadratna jednačina imala realna rešenja neophodno je da njena diskriminanta ne bude negativna

$$D = b^2 - 4ac \geq 0 \Rightarrow (2a + 1)^2 - 4\left(a^2 + 4a - \frac{1}{2}\right) \geq 0 \iff 4a^2 + 4a + 1 - 4a^2 - 16a + 2 \geq 0$$

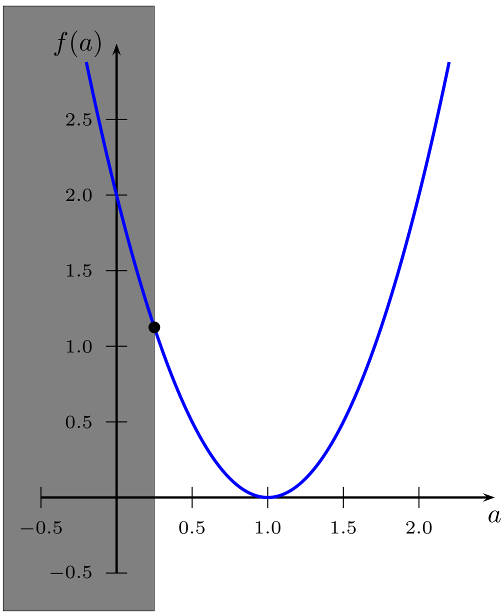
$$-12a \geq -3 \iff 12a \leq 3 \iff a \leq \frac{1}{4}$$

tj. vrednost parametra a za koju izraz $x^2 + y^2$ dostiže minimum treba tražiti na segmentu $a \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$.

Sada imamo

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= x^2 + y^2 + 2xy - 2xy \\ &= (x + y)^2 - 2xy \\ &= (2a + 1)^2 - 2\left(a^2 + 4a - \frac{1}{2}\right) \\ &= 4a^2 + 4a + 1 - 2a^2 - 8a + 1 \\ &= 2(a^2 - 2a + 1) = 2(a - 1)^2 \end{aligned}$$

Dakle $x^2 + y^2 = f(a) = 2(a - 1)^2$ je kvadratna funkcija po promenljivoj a. Na slici je grafički predstavljena ova funkcija - parabola koja dodiruje abscisu u tački $a = 1$. Vidimo da na segmentu $a \leq \frac{1}{4}$ ova funkcija ima minimum upravo za vrednost parametra $a = \frac{1}{4}$.



20.Ⓑ Jednačina
$$\sqrt{9-4x} = p - 2x$$
je definisana u skupu realnih brojeva za koje važi
$$9 - 4x \geq 0 \iff 4x \leq 9 \iff x \leq \frac{9}{4}$$
i kako je $\sqrt{9-4x} \geq 0$:
$$p - 2x \geq 0 \iff p \geq 2x$$
Kvadriranjem leve i desne strane zadate jednačine dobijamo
$$9 - 4x = p^2 - 4px + 4x^2$$
$$4x^2 - 4(p-1)x + p^2 - 9 = 0$$
Ova jednačina će imati dva realna i različita rešenja ako je diskriminanta ove jednačine strogo veća od nule
$$D = b^2 - 4ac = 16(p-1)^2 - 16(p^2-9) = 16(p^2-2p+1) - 16(p^2-9) = 16(-2p+10)$$
$$D > 0 \Rightarrow 16(-2p+10) > 0 \iff 2p < 10 \iff p < 5$$
Dakle, parametar p treba da ispunjava sledeće nejednakosti
$$p < 5$$
$$p \geq 2x$$
gde je $x \leq \frac{9}{4}$ odnosno $2x \leq \frac{9}{2}$. Dakle, važi
$$p \geq \frac{9}{2} \geq 2x$$
odnosno
$$p \in \left[\frac{9}{2}, 5\right).$$

Istorija verzija

Verzija	Datum	Autor	Opis promena
1.0	01.07.2016	I. Stevanović	
1.1	22.08.2016	I. Stevanović	Ispravka rešenja zadatka 15/2016. Na grešku uputio: Vaso Đogović.
2.0	27.06.2017	I. Stevanović	Dodati zadaci sa probnog ispita 2017. godine i ispravljene tipografske greške.
2.1	06.07.2017	I. Stevanović	Dodati zadaci sa prijemnog ispita 2017. godine.
3.0	29.06.2018	I. Stevanović	Dodati zadaci sa prijemnog ispita 2018. godine.
3.1	03.09.2018	I. Stevanović	Dodati zadaci sa probnog prijemnog ispita 2018. godine.
4.0	01.07.2019	I. Stevanović	Dodati zadaci sa prijemnog ispita 2019. godine.
5.0	03.07.2020	I. Stevanović	Dodati zadaci sa prijemnog ispita 2020. godine i probnih prijemnih iz 2019 i 2020. godine. Uvedene ispravke u postavkama zadataka 17/2018, 6/2014 i 17/2014 kao i uprošćeno rešenje zadatka 8/2011 (Mihailo Keleberda).
6.0	17.06.2021	I. Stevanović	Dodati zadaci sa probnog prijemnog ispita iz 2021 godine.
6.1	07.07.2021	I. Stevanović	Dodati zadaci sa prijemnog ispita iz 2021 godine.
6.2	12.07.2021	I. Stevanović	Ispravke zadataka 4/2021, 6/2021, 17/2021 (Djordje Maljković).
7.0	23.06.2022	I. Stevanović	Dodati zadaci sa probnog prijemnog ispita iz 2022 godine.
7.1	02.07.2022	I. Stevanović	Dodati zadaci sa prijemnog ispita iz 2022 godine.
7.2	20.05.2023	I. Stevanović	Ispravka zadatka 9/2018 (Marko Brzak)
8.0	18.06.2023	I. Stevanović	Dodati zadaci sa probnog prijemnog ispita iz 2023 godine.
8.1	09.07.2023	I. Stevanović	Dodati zadaci sa prijemnog ispita iz 2023 godine. Ispravka u rešenju zadataka sa probnog prijemnog 12/2020 i 16/2022 (Marko Brzak)