Sequência Numérica de Thue-Morse

Jovani O. Brasil[1]

[1]Faculdade de Informática - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
PUCRS
Caixa Postal 6681 – 90.619-900 – Porto Alegre – RS – Brazil

jovani.brasil@acad.pucrs.br

1. Introdução

A sequência de Thue-Morse foi descoberta em 1906 por Axel Thue que trabalhava na área de combinatória com palavras, mas foi só mais tarde com Marston Morse em 1921 que a sequência ficou conhecida em seus trabalhos com geometria diferencial. Neste trabalho o objetivo é entender os números gerados pela sequência de Thue-Morse e qual a sua relação com a geometria através de suas propriedades. Para isso proponho um simples experimento de geração de fractais para visualização da natureza geométrica da sequência.

2. Formalização

Podemos caracterizar a sequência de Thue-Morse como uma sequência infinita de números binários (não negativos) gerados a partir da concatenação sucessiva do complemento booleano de prefixos. É bem verdade que este modelo já foi generalizado para outras bases numéricas, mas este trabalho somente trata da base binária que foi primariamente postulada por Thue-Morse.

Então observe o procedimento a seguir considerando que *concatena(x, y)* faz a concatenação das palavras *x* e *y* e que *complemento(x)* realiza a inversão dos bits da palavra *x* dada:

Procedimento Thue-Morse-Iterativo

```
Binário p = 0
for i de 1 até N do
    p = concatena(p, complemento(p));
end for
```

Como pode ser visto, escolhendo um número inicial, que pode ser 0 ou 1, vamos a cada iteração gerar um novo valor que consiste da concatenação do valor da iteração anterior e o seu complemento. Observe os primeiros resultados da sequência na Tabela 1.

Tabela 1. 4 iterações da sequência de Thue-Morse começando com o dígito 0. Note que o resultado da iteração é a concatenação do valor acumulado com o complemento deste valor.

Iteração	Resultado	Complemento
1	0	1
2	01	10
3	0110	1001
4	01101001	-

O processo iterativo descrito anteriormente é só uma das maneiras de gerarmos a sequência de Thue-Morse. Entre as outras abordagens destacam-se a com sistemas de Lindenmayer, recorrências e utilizando *Evil Numbers* e *Odious Numbers*.

A sequência de Thue-Morse possui propriedades interessantes que podemos observar para entender o seu comportamento, são elas:

Infinitude: A sequência de Thue-Morse é infinita. Computacionalmente ela é finita e depende das limitações físicas da máquina.

Inexistência de Cubismo *(Cube free)*: Não existe sequência consecutiva de três palavras iguais nos valores gerados.

Periodicidade e Aperiodicidade: Periódica quando em bases múltiplas de 2.

Auto-similaridade: A sequência se auto-reproduz, ou seja, parece a mesma em qualquer escala [Schroeder 2009].

3. Aplicações

A sequência de números de Thue-Morse possui diversas aplicações, sendo que existem muitos trabalhos científicos em diversas áreas aplicando a sequência na solução dos mais diversos problemas. Exemplos são a resolução de equações integrais [Bertazzon 2012], estudos em padrões de difração [Janusz Wolny 2000] [Janusz Wolny 1999], além de geração de música e geometrias.

A variedade de aplicações da sequência de Thue-Morse são consequência do fato da sua natureza fractal, dado que as geometrias geradas pela sequências são encontradas em diversos processos na natureza.

4. Experimento

Como experimento, a ideia é gerar fractais a partir dos valores gerados pela sequência de forma a visualizar o comportamento de suas propriedades. A forma de fractal ao qual a sequência tem convergência de trajetória é a conhecida curva de Koch, a qual quando unida a mais duas formando um triângulo, forma o fractal Koch snowflake.

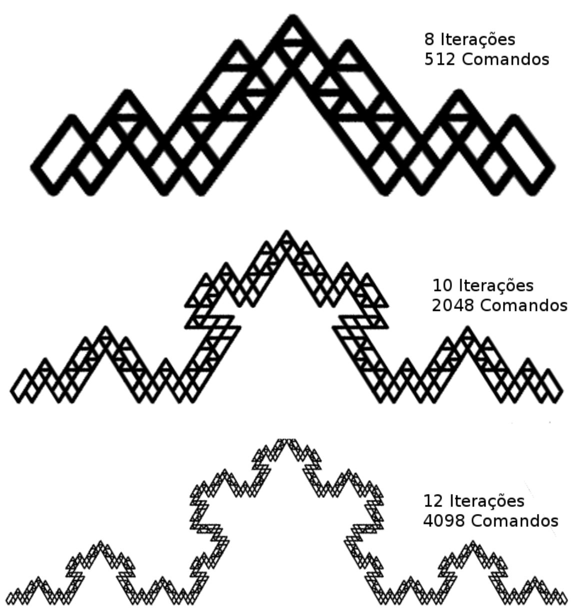

Figura 1. Fractais gerados a partir da sequência de Thue-Morse iniciando com o dígito 1.

4.1. Gerando fractais

Para gerar o fractal a partir da sequência vamos utilizar um gráfico tartaruga. Em um gráfico tartaruga definimos as regras para o movimento de uma tartaruga em um plano cartesiano. No nosso caso considere que, dada a parcela S gerada na n-ésima iteração, precisamos percorrer iterativamente cada elemento e da parcela S levando em conta as seguintes regras:

1. Se e tem valor '1', então move para frente.
2. Se e tem valor '0', então rotaciona PI/3 no sentido anti-horário.

O resultado deste algoritmo pode ser visto na Figura 1. Como podemos ver, a sequência de 0's e 1's geradas pela sequência de Thue-Morse realmente converge para uma forma fractal. Os valores obtidos nas iterações usadas podem ser vistos no final do trabalho, no anexo B.

4.2. Conexão entre número, geometria e processos

Os fractais são interpretações gráficas das propriedades que alguns números podem nos dar, e são formas encontradas na natureza, por isso a geração gráfica foi feita neste trabalho. Entender a transição entre a visualização de um processo, a identificação de padrões e a conexão com um modelo matemático é extremamente importante para a solução de problemas.

É muito fácil perceber como é extremamente complexo o campo da modelagem matemática. Observar um processo físico, químico ou de qualquer outra área e relacionar isso com números é um grande desafio. Imagine que a maioria destes processos se encontram em sistemas que possuem uma quantidade incontável de variáveis e relacionamentos, e quase sempre sem linearidade em seu comportamento.

Aqui, um dos objetivos propostos do trabalho é mostrar uma propriedade que simplifique um processo computacional. Bom, imagine qualquer problema modelado por um fractal. Será que teremos um modelo igualmente simples de uma outra maneira? Para muitos problemas a resposta é provavelmente não. Um exemplo de simplificação é a utilização de fractais de Koch para descrever formações de contornos de costa. Gerar fractais de Koch utilizando a sequência de Thue-Morse é relativamente barato, e eles descrevem aproximadamente bem o padrão da realidade. Podemos dizer que es propriedades que fazem da sequência de Thue-Morse uma sequência geradora de Fractais, simplificam o processo de geração de geometrias.

5. Conclusão

A partir da escolha pela sequência de Thue-Morse foram apresentadas suas propriedades, aplicações e uma implementação. A implementação não só gera os valores mas também gera visualização, que no caso da sequência de Thue-Morse é o principal meio de visualizar suas propriedades.

É importante dizer que é possível gerar os mesmos fractais a partir de um procedimento recursivo, porém aqui não foi apresentado, pois não tive tempo hábil para implementá-lo e também o custo para gerar os fractais da melhor implementação com sequencia de Thue-Morse é menor do que o custo de gerar recursivamente (vou ficar devendo as complexidades também pela falta de tempo).

6. Considerações

1. Tentei fazer a conexão entre o número e sua semântica, a partir da representação geométrica.
2. A implementação dos algoritmos em linguagem *Python* podem ser conferidas em anexo no final do trabalho no anexo A.
3. Eu demorei para amadurecer a ideia do trabalho, faltaram coisas que eu poderia ter falado/comparado.

Referências

Bertazzon, J.-F. (2012). Resolution of an integral equation with the thue–morse sequence. *Indagationes Mathematicae*, 23(3):327–336. An optional note.

Janusz Wolny, Anna Wn k, J.-L. V.-G. (2000). Fractal behaviour of diffraction pattern of thue–morse sequence. *Journal of Computational Physics*, 163(2):313–327. An optional note.

Janusz Wolny, Anna Wnek, J.-L. V.-G.-L. P. (1999). Average unit-cell approach to diffraction on thue–morse sequence and decorated quasicrystals. *Materials Science and Engineering*, 294(2):381–384. An optional note.

Schroeder, M. (2009). *Number Theory in Science and Communication*. Springer.

7. Anexo A - Código - Geração dos Números e dos Fractais

```

import turtle

'''
    Author: Jovani Brasil
    Email: jovanibrasil@gmail.com

'''


def thuemorse(iterations):
    '''
        Gerando a sequencia de Thue-Morse.

        @param  iteration numero de iteracoes
        @return result resultado final
    '''

    result = '1'

    for i in range(0, iterations -1):
        result += ''.join(['0' if c is '1' else '1' for c in result])

    return result



jovani = turtle.Turtle()

turtle.screensize(1240, 720)

jovani.hideturtle()
jovani.penup()
jovani.goto(150, 200)
jovani.pendown()

i = 0
for e in thuemorse(12):
    if e is '1':
        #step
        jovani.fd(4)
    else:
        #rotate
        jovani.left(60)
    i=i+1

print i, " commands."


ts = turtle.getscreen()

ts.getcanvas().postscript(file="duck.eps")
```

8. Anexo B - Valores Computados

8.1. 8 Iterações

01101001100101101001011001101001100101100110100101101001100101101001011
001101001011010011001011001101001100101101001011001101001

8.2. 10 Iterações

01101001100101101001011001101001100101100110100101101001100101101001011
00110100101101001100101100110100110010110100101100110100110010110011010
01011010011001011001101001100101101001011001101001011010011001011010010
11001101001100101100110100101101001100101101001011001101001011010011001
01100110100110010110100101100110100101101001100101101001011001101001100
10110011010010110100110010110011010011001011010010110011010011001011001
10100101101001100101101001011001101001011010011001011001101001100101101
001011001101001

8.3. 12 Iterações

01101001100101101001011001101001100101100110100101101001100101101001011
00110100101101001100101100110100110010110100101100110100110010110011010
01011010011001011001101001100101101001011001101001011010011001011010010
11001101001100101100110100101101001100101101001011001101001011010011001
01100110100110010110100101100110100101101001100101101001011001101001100
10110011010010110100110010110011010011001011010010110011010011001011001
10100101101001100101101001011001101001011010011001011001101001100101101
00101100110100110010110011010010110100110010110011010011001011010010110
01101001011010011001011010010110011010011001011001101001011010011001011
00110100110010110100101100110100110010110011010010110100110010110100101
10011010010110100110010110011010011001011010010110011010010110100110010
11010010110011010011001011001101001011010011001011010010110011010010110
10011001011001101001100101101001011001101001100101100110100101101001100
10110011010011001011010010110011010010110100110010110100101100110100110
01011001101001011010011001011010010110011010010110100110010110011010011
00101101001011001101001011010011001011010010110011010011001011001101001
01101001100101100110100110010110100101100110100110010110011010010110100
11001011010010110011010010110100110010110011010011001011010010110011010
01011010011001011010010110011010011001011001101001011010011001011010010
11001101001011010011001011001101001100101101001011001101001100101100110
10010110100110010110011010011001011010010110011010010110100110010110100
10110011010011001011001101001011010011001011001101001100101101001011001
10100110010110011010010110100110010110100101100110100101101001100101100
11010011001011010010110011010011001011001101001011010011001011001101001
10010110100101100110100101101001100101101001011001101001100101100110100
10110100110010110100101100110100101101001100101100110100110010110100101
10011010010110100110010110100101100110100110010110011010010110100110010
11001101001100101101001011001101001100101100110100101101001100101101001
011001101001011010011001011001101001100101101001011001101001